Transformácia kužeľosečiek

všeobecná a štandardná rovnica

Pavol Hanzel
Fakulta prírodných vied UMB

Postup transformácie

Motivácia

Pri skúmaní kužeľosečiek je často potrebné previesť ich všeobecnú kvadratickú rovnicu

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \tag{1}$$

do tzv. *štandardného tvaru*

Postup transformácie

Motivácia

Pri skúmaní kužeľosečiek je často potrebné previesť ich všeobecnú kvadratickú rovnicu

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \tag{1}$$

do tzv. *štandardného tvaru*

Návrh postupu transformácie je rozložený na kroky:

1. **Určenie typu kužeľosečky** pomocou diskriminantu $\Delta = B^2 - 4AC$.
2. **Nájdenie stredu kužeľosečky** $S = [x_0, y_0]$.
3. **Posunutím súradnicovej sústavy** o vektor $\vec{u} = (-x_0, -y_0)$.
4. **Rotácia súradnicovej sústavy**.

Otvorte si interaktívny applet: Transformácia kužeľosečky - elipsa.

Interpretácia

Jednotlivé kroky budeme interpretovať na príklade

Príklad transformácie

Transformujte kužeľosečku danú rovnicou

$$4x^2 + 3xy + 4y^2 - 12x - 12y + 9 = 0 \tag{2}$$

na jej štandardný tvar.

Interpretácia

Jednotlivé kroky budeme interpretovať na príklade

Príklad transformácie

Transformujte kužeľosečku danú rovnicou

$$4x^2 + 3xy + 4y^2 - 12x - 12y + 9 = 0 \tag{2}$$

na jej štandardný tvar.

Určenie typu kužeľosečky pomocou diskriminantu

Všeobecná rovnica má koeficienty:

$$A = 4, \quad B = \frac{3}{2}, \quad C = 4$$

Interpretácia

Jednotlivé kroky budeme interpretovať na príklade

Príklad transformácie

Transformujte kužeľosečku danú rovnicou

$$4x^2 + 3xy + 4y^2 - 12x - 12y + 9 = 0 \tag{2}$$

na jej štandardný tvar.

Určenie typu kužeľosečky pomocou diskriminantu

Všeobecná rovnica má koeficienty:

$$A = 4, \quad B = \frac{3}{2}, \quad C = 4$$

Diskriminant kvadratickej formy je

$$\Delta = B^2 - 4AC = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 4 = \frac{9}{4} - 64 = -\frac{55}{4} < 0.$$

Kužeľosečka je teda **elipsa** (resp. kružnica, ak by $A = C$ a $B = 0$).

Určenie typu kužeľosečky - stred

Nájdenie stredu kužeľosečky $S = [x_0, y_0]$. Vyriešime sústavu

$$\frac{\partial}{\partial x}(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F) = 0,$$

ktorej riešením sú súradnice x_0, y_0 stredu kužeľosečky.

Určenie typu kužeľosečky - stred

Nájdenie stredu kužeľosečky $S = [x_0, y_0]$. Vyriešime sústavu

$$\frac{\partial}{\partial x}(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F) = 0,$$

ktorej riešením sú súradnice x_0, y_0 stredu kužeľosečky.

Derivujme

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 8x + 3y - 12 = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x + 8y - 12 = 0.$$

a riešme sústavu

$$8x + 3y = 12, \quad 3x + 8y \quad = 12.$$

Určenie typu kužeľosečky - stred

Nájdenie stredu kužeľosečky $S = [x_0, y_0]$. Vyriešime sústavu

$$\frac{\partial}{\partial x}(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F) = 0,$$

ktorej riešením sú súradnice x_0, y_0 stredu kužeľosečky.

Derivujme

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 8x + 3y - 12 = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x + 8y - 12 = 0.$$

a riešme sústavu

$$8x + 3y = 12, \quad 3x + 8y \quad = 12.$$

Dostaneme súradnice stredu kužeľosečky:

$$x_0 = \frac{12}{11} \quad y_0 = \frac{12}{11}.$$

Posunutie

Posun súradnicovej sústavy do stredu: Zavedieme nové súradnice

$$X = x - \frac{12}{11}, \quad Y = y - \frac{12}{11}.$$

Posunutie

Posun súradnicovej sústavy do stredu: Zavedieme nové súradnice

$$X = x - \frac{12}{11}, \quad Y = y - \frac{12}{11}.$$

Dosadením do pôvodnej rovnice dostaneme rovnicu v posunutej sústave:

$$4X^2 + 3XY + 4Y^2 - \frac{45}{11} = 0$$

alebo v tvare

$$4X^2 + 3XY + 4Y^2 = \frac{45}{11}. \tag{3}$$

Prejsť na algebraické úpravy

Určenie typu kužeľosečky - rotácia

Rotácia súradnicovej sústavy: Pre odstránenie zmiešaného člena Bxy môžeme použiť substitúciu

$$x = X\cos\theta - Y\sin\theta, \quad y \quad = X\sin\theta + Y\cos\theta,$$

kde uhol θ spĺňa

$$\tan 2\theta = \frac{B}{A-C}.$$

Substitúcia predstavuje rotáciu o uhol, ktorý zviera hlavná os stredovej kužeľosečky so súradnicovou osou o_x.

Určenie typu kužeľosečky

Formálne zápisy

Musíme rozlišovať, či v rovnici (1) použijeme tvar

$$2Bxy, 2Dx, 2Ey$$

alebo len

$$Bxy, Dx, Ey.$$

Rozdiel v definovaní diskriminantu (aj pri rotácii) ukazuje tabuľka

Použitý tvar	Malý diskriminant	Rotácia
$Ax^2 + Bxy + Cy^2$	$B^2 - 4AC$	$\tan 2\theta = \dfrac{B}{A-C}$
$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$	$B^2 - AC$	$\tan 2\theta = \dfrac{2B}{A-C}$

Určenie typu kužeľosečky - rotácia

Rotácia súradnicovej sústavy - riešenie príkladu. Pre

$$A = 4, \quad B = \frac{3}{2}, \quad C = 4$$

Odstránime člen XY rotáciou o uhol θ, kde

$$\tan 2\theta = \frac{2B}{A - C} = \frac{3}{0} \quad \Rightarrow \quad 2\theta = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{4}.$$

Určenie typu kužeľosečky - rotácia

Rotácia súradnicovej sústavy - riešenie príkladu. Pre

$$A = 4, \quad B = \frac{3}{2}, \quad C = 4$$

Odstránime člen XY rotáciou o uhol θ, kde

$$\tan 2\theta = \frac{2B}{A - C} = \frac{3}{0} \quad \Rightarrow \quad 2\theta = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{4}.$$

Použijeme substitúciu

$$U = X\cos\theta - Y\sin\theta, \quad V \quad = X\sin\theta + Y\cos\theta,$$

Keďže potrebujeme do rovnice (3) dosadiť hodnoty X, Y, tak ich vypočítajme

Určenie typu kužeľosečky - rotácia

Rotácia súradnicovej sústavy - riešenie príkladu. Pre

$$A = 4, \quad B = \frac{3}{2}, \quad C = 4$$

Odstránime člen XY rotáciou o uhol θ, kde

$$\tan 2\theta = \frac{2B}{A-C} = \frac{3}{0} \quad \Rightarrow \quad 2\theta = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{4}.$$

Použijeme substitúciu

$$U = X\cos\theta - Y\sin\theta, \quad V \quad = X\sin\theta + Y\cos\theta,$$

Keďže potrebujeme do rovnice (3) dosadiť hodnoty X, Y, tak ich vypočítajme

$$X = \frac{U+V}{\sqrt{2}}, \quad Y = \frac{V-U}{\sqrt{2}}.$$

Určenie typu kužeľosečky - rotácia

Rotácia súradnicovej sústavy - riešenie príkladu. Pre

$$A = 4, \quad B = \frac{3}{2}, \quad C = 4$$

Odstránime člen XY rotáciou o uhol θ, kde

$$\tan 2\theta = \frac{2B}{A - C} = \frac{3}{0} \quad \Rightarrow \quad 2\theta = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{4}.$$

Použijeme substitúciu

$$U = X\cos\theta - Y\sin\theta, \quad V \quad = X\sin\theta + Y\cos\theta,$$

Keďže potrebujeme do rovnice (3) dosadiť hodnoty X, Y, tak ich vypočítajme

$$X = \frac{U + V}{\sqrt{2}}, \quad Y = \frac{V - U}{\sqrt{2}}.$$

Po dosadení do rovnice (3) a po zjednodušení získame:

$$\frac{11}{2}V^2 + \frac{5}{2}U^2 = \frac{45}{11}.$$

Úprava na štandardný tvar

Vydelíme celú rovnicu $\frac{45}{11}$:

$$\frac{121}{90}V^2 + \frac{55}{90}U^2 = 1$$

Úprava na štandardný tvar

Vydelíme celú rovnicu $\frac{45}{11}$:

$$\frac{121}{90}V^2 + \frac{55}{90}U^2 = 1$$

Po ekvivalentnej úprave dostaneme:

$$\frac{U^2}{\frac{198}{121}} + \frac{V^2}{\frac{90}{121}} = 1,$$

Úprava na štandardný tvar

Vydelíme celú rovnicu $\frac{45}{11}$:

$$\frac{121}{90}V^2 + \frac{55}{90}U^2 = 1$$

Po ekvivalentnej úprave dostaneme:

$$\frac{U^2}{\frac{198}{121}} + \frac{V^2}{\frac{90}{121}} = 1,$$

čo vedie k poloosiam

$$a = \frac{3\sqrt{22}}{11}, \quad b = \frac{3\sqrt{10}}{11}.$$

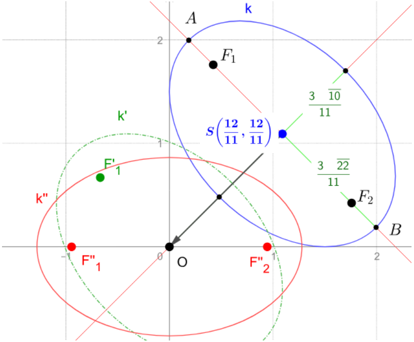
Tento výsledok je v súlade s výsledkom, ktorý sme získali pomocou GeoGebry
Otvorte si interaktívny applet: Transformácia kužeľosečky - elipsa.

Výsledok

Výsledok: Štandardný tvar elipsy po posune a rotácii je

$$\frac{V^2}{\frac{198}{121}} + \frac{U^2}{\frac{90}{121}} = 1,$$

stred je $S\left(\frac{12}{11}, \frac{12}{11}\right)$, osi otočené o $45°$ a poloosi $a = \frac{3\sqrt{22}}{11}$, $\quad b = \frac{3\sqrt{10}}{11}$.



Obr.: Grafické znázornenie príkladu (2)

Geogebra CAS

Uvažujme rovnicu $4x^2 + 3xy + 4y^2 - 12x - 12y + 9 = 0$ a posun súradníc

$$X = x - \frac{12}{11}, \qquad Y = y - \frac{12}{11}.$$

V GeoGebra dosadzujeme spätnú transformáciu $x = X + \frac{12}{11}, \qquad y = Y + \frac{12}{11}$.

1. Definujeme funkciu

$$f(x, y) := 4x^2 + 3xy + 4y^2 - 12x - 12y + 9$$

2. Do CAS zadáme substitúciu

```
Substitute( f(x,y), x = X + 12/11, y = Y + 12/11 ).
```

Výsledná rovnica v súradniciach (X, Y) je $\frac{11}{2}X^2 + \frac{5}{2}Y^2 - \frac{45}{11} = 0$. Späť