Stred a os stredovej kolineácie

Zadanie

Je daná stredová kolineácia v projektívnej rovine, určená maticou:

$$K = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Určte:

- stred kolineácie (samodružný bod),
- os kolineácie (samodružnú priamku).

Stred kolineácie

Stred kolineácie je bod $S = (x_1, x_2, x_3)^T$, ktorý sa zobrazí sám na seba, t. j. platí:

$$K \cdot S = \lambda S$$

Pre vlastné číslo $\lambda = 1$ hľadáme riešenie rovnice:

$$(K - I) \cdot S = 0$$

$$\left(\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

Z prvej rovnice dostávame:

$$-2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

Teda stred kolineácie je každý bod s homogénnymi súradnicami:

$$S = (x_1, x_2, x_3)^T \quad \text{taký, že } x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

Os kolineácie

Os kolineácie je priamka $m = (a, b, c)^T$, ktorá sa zobrazí sama na seba, t. j. platí:

$$K^T \cdot m = \lambda m$$

Pre $\lambda = 1$ riešime:

$$(K^T - I) \cdot m = 0$$

$$\left(\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

Z prvej rovnice:

$$-2a + 2b + 2c = 0 \quad \Rightarrow \quad a = b + c$$

Teda os kolineácie je každá priamka s homogénnymi súradnicami:

$$m = (a, b, c)^T \quad \text{taká, že } a = b + c$$

Záver

Stred kolineácie je množina bodov:

$$S = (x_1, x_2, x_3)^T \quad \text{takých, že } x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

Os kolineácie je množina priamok:

$$m = (a, b, c)^T \quad \text{takých, že } a = b + c$$