

Plusové úlohy

Riešené príklady

Andrii Golubtsov
Fakulta prírodných vied UMB

Ukážte, že zobrazenie f v priestore \mathbb{R}^4 , ktoré má vzhľadom na kanonickú bázu tvar:

$$f(x, y) = x_1y_1 + x_1y_4 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3 + 2x_3y_4 + x_4y_1 + 2x_4y_3 + 3x_4y_4$$

Je skalárnym súčinom? Teda:

Zobrazenie $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ zadané vzhľadom na kanonickú bázu je **bilineárna forma**, ak platí:

- **lineárnosť v prvom argumente:**
- **lineárnosť v druhom argumente:**

A f musí byť symetrická a pozitívne definitná.

Toto zobrazenie je bilineárna forma. Zadáme maticu koeficientov bilineárnej formy A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Táto matica je symetrická, teda: $A = A^T$.

Skalárny súčin

Pre danú maticu A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

vypočítame vlastné hodnoty riešením charakteristickej rovnice:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

kde I je jednotková matica a λ sú vlastné hodnoty.

Potom:

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 - \lambda & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

Rozvinutím determinantov dostaneme charakteristický polynóm:

$$\lambda^4 - 9\lambda^3 + 29\lambda^2 - 39\lambda + 18 = 0$$

Riešením tejto kubickéj rovnice získame vlastné hodnoty:

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$$

Preto spektrum matice (vlastné čísla matice) A je $\{1, 2, 3\}$.

Skontrolujeme determinanty všetkých hlavných vedúcich podmatic:

$$\det(A_3) = \det(1) = 1,$$

$$\det(A_2) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2,$$

$$\det(A_1) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 6,$$

$$\det(A_0) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 4$$

\Rightarrow všetky > 0 A je pozitívne definitná

Záver: Funkcia $f(x, y)$ je symetrická, pozitívne definitná bilinéarna forma, teda **skalárny súčin**.

Nájdite ortogonalnú a ortonormálnu bázu priestoru \mathbb{R}^4 vzhľadom na skalárny súčin:

$$f(x, y) = x_1y_1 + x_1y_4 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3 + 2x_3y_4 + x_4y_1 + 2x_4y_3 + 3x_4y_4$$

- Použijeme Gram-Schmidtovu ortogonalizáciu vzhľadom na skalárny súčin f
- Začíname so štandardnou bázou: e_1, e_2, e_3, e_4
- Nájsť ortonormálnu bázu $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$

Ortogonalná a ortonormálna báza

Začínáme s bázou štandardných vektorov:

1.

$$v_1 = e_1 = (1, 0, 0, 0)$$

$$\|v_1\| = 1 \Rightarrow u_1 = v_1$$

2.

$$v_2 = e_2 = (0, 1, 0, 0) \quad \text{a} \quad f(v_2, u_1) = 0 \Rightarrow v_2 \perp u_1$$

$$\|v_2\| = \sqrt{2} \Rightarrow u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0, 0) = (0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0)$$

3.

$$v_3 = e_3 = (0, 0, 1, 0) \quad f(v_3, u_1) = f(v_3, u_2) = 0 \Rightarrow v_3 \perp u_1, u_2$$

$$\|v_3\| = \sqrt{3} \Rightarrow u_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(0, 0, 1, 0) = (0, 0, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0)$$

Ortogonalná a ortonormálna báza

Nájdime $u_4 = (a, b, c, d)$ tak, aby bol ortogonálny k u_1, u_2, u_3 podľa skalárneho súčinu f .

$$\begin{cases} f(u_4, u_1) = a + d = 0 \\ f(u_4, u_2) = \sqrt{2}b = 0 \\ f(u_4, u_3) = \sqrt{3}\left(c + \frac{2}{3}d\right) = 0 \end{cases}$$

Riešenie sústavy:

$$a = -t, \quad b = 0, \quad c = -\frac{2t}{3}, \quad d = t$$

Teda:

$$u_4 = \left(-t, 0, -\frac{2t}{3}t, t\right) = t \cdot \left(-1, 0, -\frac{2}{3}, 1\right) \quad (\text{ľubovoľné } t \neq 0)$$

Normalizácia:

$$f(u_4, u_4) = t^2 \left(1 - 1 + \frac{4}{3} - \frac{4}{3} - 1 - \frac{4}{3} + 3 \right) = \frac{2}{3}t^2$$

$$f(u_4, u_4) = 1 \Rightarrow \frac{2}{3}t^2 = 1 \Rightarrow t^2 = \frac{3}{2} \Rightarrow t = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$$

Nech $t = \sqrt{\frac{3}{2}}$:

$$u_4 = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \left(-1, 0, -\frac{2}{3}, 1\right) = \left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$$

$$u_1 = (1, 0, 0, 0)$$

$$u_2 = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0\right)$$

$$u_3 = \left(0, 0, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)$$

$$u_4 = \left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$$

Tieto vektory sú navzájom kolmé podľa $f(x, y)$ a majú jednotkovú normu.

Ortogonalná a ortonormálna báza je nájdená.

Kolmost' vektorov a uhol medzi vektormi

Kolmost' vektorov: $\vec{x} = (1, 0, 3, -2)$ a $\vec{y} = (2, -1, 1, 2)$.

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = 5$$

Vektory nie sú kolmé.

Uhol medzi vektormi: $\vec{u} = (2, 1, 0, 1)$ a $\vec{v} = (0, 3, 1, -1)$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3, \quad \|\vec{u}\| = \sqrt{13}, \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{20}$$

$$\cos \theta = \frac{3}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{20}} = \frac{3\sqrt{65}}{130}, \quad \theta = \cos^{-1} \left(\frac{3\sqrt{65}}{130} \right) \approx 79,28^\circ$$

Ortogonalné doplnky: Určte ortogonálne doplnky podpriestorov v priestore \mathbb{R}^4 so skalárnym súčinom:

$$f(x, y) = x_1y_1 + x_1y_4 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3 + 2x_3y_4 + x_4y_1 + 2x_4y_3 + 3x_4y_4$$

Určte ortogonálne doplnky nasledovných podpriestorov:

- $W_1 = [x], \quad x = (1, 0, 3, -2)$
- $W_2 = [u, v], \quad u = (2, 1, 0, 1), \quad v = (0, 3, 1, -1)$

Potrebuje nájst množinu všetkých $z \in \mathbb{R}^4$, pre ktoré $f(v, z) = 0$ pre každý generátor v podpriestoru. Nech $x = (1, 0, 3, -2)^T$.

Potom

$$W_1^\perp = \{z \in \mathbb{R}^4 \mid f(x, z) = 0\} = \{z \mid x^T A z = 0\}$$

Najskôr vypočítame Ax :

$$Ax = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow W_1^\perp = \{z \in \mathbb{R}^4 \mid z^T (-1, 0, 5, 1) = 0\}$$

Teda: $-z_1 + 5z_3 + z_4 = 0 \Rightarrow z_1 = 5z_3 + z_4$

Vyjadrenie z pomocou voľných premenných z_2, z_3, z_4 :

$$z = \begin{pmatrix} 5z_3 + z_4 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = z_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z_3 \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Báza:

$$W_1 : [(0, 1, 0, 0), (5, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1)]$$

Nech $u = (2, 1, 0, 1)$, $v = (0, 3, 1, -1)$.

Spočítame:

$$Au = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad Av = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Potom $W_2^\perp = \{z \mid z^T Au = 0 \wedge z^T Av = 0\}$

$$\begin{cases} 3z_1 + 2z_2 + 2z_3 + 5z_4 = 0 \\ -z_1 + 6z_2 + z_3 - z_4 = 0 \end{cases}$$

Vyjadříme sústavu riešení pomocou voľných premenných $z_3 = s$, $z_4 = t$. Dostaneme bázu:

$$W_2 : \left[\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 1, 0 \right), \left(-\frac{8}{5}, -\frac{1}{10}, 0, 1 \right) \right].$$

Daná je bilinéarna forma:

$$\begin{aligned} f(x, y) = & 4x_1y_1 - 2x_1y_2 + 3x_1y_3 \\ & - 2x_2y_1 + 5x_2y_2 - x_2y_3 \\ & + 3x_3y_1 - x_3y_2 + 6x_3y_3 \end{aligned}$$

Overte, či táto forma predstavuje **skalárny súčin** na \mathbb{R}^3 .
Použite výpočet vlastných hodnôt matice formy.

Zápis $f(x, y)$ je možné vyjadriť ako maticový súčin:

$$f(x, y) = x^T Ay$$

kde matica A je:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

- Matica A je **symetrická**: $A = A^T$.
- Skalárny súčin vyžaduje, aby bola A **kladne definitná**.

Vlastné hodnoty zistíme z rovnice:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Vypočítame determinant:

$$\det \begin{pmatrix} 4 - \lambda & -2 & 3 \\ -2 & 5 - \lambda & -1 \\ 3 & -1 & 6 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^3 - 15\lambda^2 + 60\lambda - 59$$

Získame charakteristický polynóm:

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 15\lambda^2 + 60\lambda - 59$$

Riešením polynómu:

$$\lambda^3 - 15\lambda^2 + 60\lambda - 59 = 0$$

dostaneme približné hodnoty:

$$\lambda_1 \approx 9,144, \quad \lambda_2 \approx 4,384, \quad \lambda_3 \approx 1,472$$

Všetky vlastné hodnoty sú **kladné** \Rightarrow matica A je **kladne definitná**. Bilineárna forma f je **skalárnym súčinom** na \mathbb{R}^3 .