

1.7 Cvičenie

1. Rozhodnite, či množina

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - 2y + z = 0\}$$

je vektorovým podpriestorom priestoru $\mathbb{R}^3$. Určte jeho dimenziu a nájdite jednu jeho bázu.

$$[\dim V = 2, \text{ napr. } \mathcal{B} = \{(2, 1, 0), (-1, 0, 1)\}]$$

2. Uvažujte množinu

$$\mathcal{A} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - 2y + z = 4\}.$$

Určte zameranie tohto afinného podpriestoru a zapíšte ho v tvare

$$\mathcal{A} = A + V.$$

$$[A = (4, 0, 0), V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - 2y + z = 0\}]$$

3. Nech

$$A = [1, 2], \quad B = [5, -2].$$

Určte bod X , ktorý je afinnou kombináciou

$$X = \frac{3}{4}A + \frac{1}{4}B.$$

Vysvetlite geometrický význam bodu X .

$$[X = [2, 1]; \text{ bod } X \text{ leží na priamke } AB]$$

4. Určte parametrické rovnice priamky prechádzajúcej bodmi

$$A = [1, -2], \quad B = [4, 3].$$

Následne určte jej všeobecnú rovnicu.

$$[x = 1 + 3t, y = -2 + 5t; 5x - 3y - 11 = 0]$$

5. Priamka je daná rovnicou

$$p: 3x - 4y + 7 = 0.$$

Určte jeden jej normálový a jeden smerový vektor.

$$[\mathbf{n} = (3, -4), \text{ napr. } \mathbf{u} = (4, 3)]$$

6. Rozhodnite pomocou determinantu, či body

$$A = [1, 1], \quad B = [2, 3], \quad C = [4, 7]$$

sú kolineárne.

[Áno.]

7. Nájdite hodnotu parametra t , pre ktorú sú body

$$A = [1, 2], \quad B = [3, 4], \quad C = [5, t]$$

kolineárne.

$[t = 6]$

8. Určte rovnicu priamky prechádzajúcej bodmi

$$A = [a_1, a_2], \quad B = [b_1, b_2]$$

pomocou determinantu

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Porovnajte výsledok s rovnicou získanou zo smerového vektora $\overrightarrow{AB}$.

$$[(a_2 - b_2)x + (b_1 - a_1)y + a_1b_2 - a_2b_1 = 0]$$

9. Rozhodnite, či body

$$A_0 = [0, 0, 0], \quad A_1 = [1, 1, 0], \quad A_2 = [0, 1, 1], \quad A_3 = [1, 0, 1]$$

sú afinne nezávislé.

$$[\text{Áno; } \det(\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \overrightarrow{A_0A_3}) = 2 \neq 0.]$$

10. Určte rovnicu roviny prechádzajúcej bodmi

$$A = [1, 0, 0], \quad B = [0, 1, 0], \quad C = [0, 0, 1].$$

Použite determinantový zápis incidencie.

$$[x + y + z - 1 = 0]$$

11. Vysvetlite, prečo rovnica

$$ax + by + c = 0$$

opisuje afinnú priamku iba vtedy, keď

$$(a, b) \neq (0, 0).$$

[Koefficienty a, b určujú nenulový normálový vektor priamky.]

12. Uvažujte dve rôzne rovnobežné priamky v afinnej rovine. Majú spoločný bod? Porovnajte túto situáciu s dvoma rôznobežnými priamkami.

Zamyslite sa, či by bolo možné afinnú rovinu rozšíriť tak, aby aj rovnobežné priamky mali spoločný bod.

[Rovnobežné priamky nemajú vlastný spoločný bod.]

Od afinnej k projektívnej geometrii

V tejto kapitole sme pracovali s vlastnosťami, ktoré nevyžadujú meranie vzdialeností ani uhlov. Incidencia bodu a priamky, kolineárnosť bodov, afinná nezávislosť a rovnobežnosť majú zmysel už v afinnej geometrii.

Pri determinantovom zápise rovnice priamky sme dostali

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Jednotka v poslednej súradnici sa zatiaľ môže javiť iba ako vhodný algebraický trik. V nasledujúcej kapitole však uvidíme, že má hlbší geometrický význam.

Afinná geometria zároveň obsahuje jednu situáciu, ktorá si vyžaduje osobitné zaobchádzanie. Dve rôznobežné priamky majú spoločný bod, zatiaľ čo dve rôzne rovnobežné priamky spoločný bod nemajú.

Projektívna geometria túto výnimku odstráni. Afinnú rovinu rozšírime o nevlastné body a nevlastnú priamku tak, aby platila jednoduchá a jednotná vlastnosť:

Každé dve rôzne priamky projektívnej roviny majú práve jeden spoločný bod.

Prechod od afinnej k projektívnej geometrii teda nebude znamenať opustenie pojmov, ktoré sme doteraz používali. Naopak, incidencia, kolineárnosť a determinantový zápis zostanú zachované. Zmení sa však priestor, v ktorom ich budeme interpretovať.