Afinná geometria

Riešené príklady

Pavol Hanzel
Fakulta prírodných vied UMB

MON: Úloha 2.1.3

Skalárny súčin je definovaný ako

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 - 2x_1 y_2 - 2x_2 y_1 + 5x_2 y_2,$$

kde $\vec{x} = (x_1, x_2)$, $\vec{y} = (y_1, y_2)$. Určte veľkosť vektora $\vec{u} = (2, 4)$:

Riešenie:

MON: Úloha 2.1.3

Skalárny súčin je definovaný ako

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 - 2x_1 y_2 - 2x_2 y_1 + 5x_2 y_2,$$

kde $\vec{x} = (x_1, x_2)$, $\vec{y} = (y_1, y_2)$. Určte veľkosť vektora $\vec{u} = (2, 4)$:

Riešenie:

$$\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$$

MON: Úloha 2.1.3

Skalárny súčin je definovaný ako

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 - 2x_1 y_2 - 2x_2 y_1 + 5x_2 y_2,$$

kde $\vec{x} = (x_1, x_2)$, $\vec{y} = (y_1, y_2)$. Určte veľkosť vektora $\vec{u} = (2, 4)$:

Riešenie:

$$\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$$

$$= 2 \cdot 2 - 2(2 \cdot 4) - 2(4 \cdot 2) + 5(4 \cdot 4)$$

MON: Úloha 2.1.3

Skalárny súčin je definovaný ako

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 - 2x_1 y_2 - 2x_2 y_1 + 5x_2 y_2,$$

kde $\vec{x} = (x_1, x_2)$, $\vec{y} = (y_1, y_2)$. Určte veľkosť vektora $\vec{u} = (2, 4)$:

Riešenie:

$$\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$$

$$= 2 \cdot 2 - 2(2 \cdot 4) - 2(4 \cdot 2) + 5(4 \cdot 4)$$

$$= 4 - 16 - 16 + 80$$

MON: Úloha 2.1.3

Skalárny súčin je definovaný ako

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 - 2x_1 y_2 - 2x_2 y_1 + 5x_2 y_2,$$

kde $\vec{x} = (x_1, x_2)$, $\vec{y} = (y_1, y_2)$. Určte veľkosť vektora $\vec{u} = (2, 4)$:

Riešenie:

$$\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$$

$$= 2 \cdot 2 - 2(2 \cdot 4) - 2(4 \cdot 2) + 5(4 \cdot 4)$$

$$= 4 - 16 - 16 + 80$$

$$= 52.$$

MON: Úloha 2.1.3

Skalárny súčin je definovaný ako

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 - 2x_1 y_2 - 2x_2 y_1 + 5x_2 y_2,$$

kde $\vec{x} = (x_1, x_2)$, $\vec{y} = (y_1, y_2)$. Určte veľkosť vektora $\vec{u} = (2, 4)$:

Riešenie:

$$\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$$

$$= 2 \cdot 2 - 2(2 \cdot 4) - 2(4 \cdot 2) + 5(4 \cdot 4)$$

$$= 4 - 16 - 16 + 80$$

$$= 52.$$

Teda

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}.$$

MON: Úloha 2.1.7

Nech pre vektory $\vec{a}, \vec{b}$ platí: $\vec{a} = 3, \vec{b} = 1, \cos\theta = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, kde θ je uhol medzi vektormi $\vec{a}$ a $\vec{b}$. Určte kosínus uhla vektorov

1. $\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (3\vec{a})$
2. $\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{a})$.

MON: Úloha 2.1.7

Nech pre vektory $\vec{a}, \vec{b}$ platí: $\vec{a} = 3, \vec{b} = 1, \cos\theta = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, kde θ je uhol medzi vektormi $\vec{a}$ a $\vec{b}$. Určte kosínus uhla vektorov

1. $\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (3\vec{a})$
2. $\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{a})$.

Riešenie úlohy 2.1.7

1. Vypočítame skalárny súčin:

$$
\begin{aligned}
(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (3\vec{a}) &= 3(\vec{a} \cdot \vec{a} + 2\vec{a} \cdot \vec{b}) \\
&= 3(\|\vec{a}\|^2 + 2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \cos\theta) \\
&= 3(9 + 2(3)(1) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}) \\
&= 27 + 9\sqrt{3}.
\end{aligned}
$$

MON: Úloha 2.1.7 - pokračovanie

Určíme normy vektorov:

$$\begin{aligned}\|\vec{a}+2\vec{b}\| &= \sqrt{\|\vec{a}\|^2+4\|\vec{b}\|^2+4\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\theta}\\ &= \sqrt{9+4+4(3)(1)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}\\ &= \sqrt{13+6\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

$$\|3\vec{a}\| = 3\|\vec{a}\| = 9.$$

MON: Úloha 2.1.7 - pokračovanie

Nakoniec,

$$\begin{aligned}\cos\varphi &= \frac{(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(3\vec{a})}{\|\vec{a}+2\vec{b}\|\|3\vec{a}\|}\\ &= \frac{27+9\sqrt{3}}{9\sqrt{13+6\sqrt{3}}}\\ &= \frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{13+6\sqrt{3}}}.\end{aligned}$$

MON: Úloha 2.1.7 - pokračovanie

2. Vypočítame skalárny súčin:

$$\begin{aligned}(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot \vec{a} &= \vec{a} \cdot \vec{a} + 2\vec{b} \cdot \vec{a} \\ &= \|\vec{a}\|^2 + 2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \cos\theta \\ &= 9 + 3\sqrt{3}.\end{aligned}$$

Norma vektora: $\|\vec{a}\| = 3$.

Nakoniec

$$\begin{aligned}\cos\psi &= \frac{(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot \vec{a}}{\|\vec{a} + 2\vec{b}\|\|\vec{a}\|} \\ &= \frac{9 + 3\sqrt{3}}{3\sqrt{13 + 6\sqrt{3}}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{\sqrt{13 + 6\sqrt{3}}}.\end{aligned}$$

MON: Úloha 2.1.9

Zistite, aký uhol zvierajú jednotkové vektory $\vec{a}, \vec{b}$, ak $\vec{x} = \vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{y} = 5\vec{a} - 4\vec{b}$ sú na seba kolmé vektory.

MON: Úloha 2.1.9

Zistite, aký uhol zvierajú jednotkové vektory $\vec{a}, \vec{b}$, ak $\vec{x} = \vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{y} = 5\vec{a} - 4\vec{b}$ sú na seba kolmé vektory.
Vektory $\vec{x} = \vec{a} + 2\vec{b}$ a $\vec{y} = 5\vec{a} - 4\vec{b}$ sú na seba kolmé, t. j.

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = 0.$$

Po dosadení:

$$(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (5\vec{a} - 4\vec{b}) = \vec{a} \cdot (5\vec{a} - 4\vec{b}) + 2\vec{b} \cdot (5\vec{a} - 4\vec{b})$$

MON: Úloha 2.1.9

Zistite, aký uhol zvierajú jednotkové vektory $\vec{a}, \vec{b}$, ak $\vec{x} = \vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{y} = 5\vec{a} - 4\vec{b}$ sú na seba kolmé vektory.
Vektory $\vec{x} = \vec{a} + 2\vec{b}$ a $\vec{y} = 5\vec{a} - 4\vec{b}$ sú na seba kolmé, t. j.

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = 0.$$

Po dosadení:

$$(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (5\vec{a} - 4\vec{b}) = \vec{a} \cdot (5\vec{a} - 4\vec{b}) + 2\vec{b} \cdot (5\vec{a} - 4\vec{b})$$

$$= 5(\vec{a} \cdot \vec{a}) - 4(\vec{a} \cdot \vec{b}) + 10(\vec{b} \cdot \vec{a}) - 8(\vec{b} \cdot \vec{b})$$

MON: Úloha 2.1.9

Zistite, aký uhol zvierajú jednotkové vektory $\vec{a}, \vec{b}$, ak $\vec{x} = \vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{y} = 5\vec{a} - 4\vec{b}$ sú na seba kolmé vektory.
Vektory $\vec{x} = \vec{a} + 2\vec{b}$ a $\vec{y} = 5\vec{a} - 4\vec{b}$ sú na seba kolmé, t. j.

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = 0.$$

Po dosadení:

$$(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (5\vec{a} - 4\vec{b}) = \vec{a} \cdot (5\vec{a} - 4\vec{b}) + 2\vec{b} \cdot (5\vec{a} - 4\vec{b})$$

$$= 5(\vec{a} \cdot \vec{a}) - 4(\vec{a} \cdot \vec{b}) + 10(\vec{b} \cdot \vec{a}) - 8(\vec{b} \cdot \vec{b})$$

$$= 5 - 4\cos\theta + 10\cos\theta - 8 = 0.$$

MON: Úloha 2.1.9

Zistite, aký uhol zvierajú jednotkové vektory $\vec{a}, \vec{b}$, ak $\vec{x} = \vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{y} = 5\vec{a} - 4\vec{b}$ sú na seba kolmé vektory.
Vektory $\vec{x} = \vec{a} + 2\vec{b}$ a $\vec{y} = 5\vec{a} - 4\vec{b}$ sú na seba kolmé, t. j.

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = 0.$$

Po dosadení:

$$(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (5\vec{a} - 4\vec{b}) = \vec{a} \cdot (5\vec{a} - 4\vec{b}) + 2\vec{b} \cdot (5\vec{a} - 4\vec{b})$$

$$= 5(\vec{a} \cdot \vec{a}) - 4(\vec{a} \cdot \vec{b}) + 10(\vec{b} \cdot \vec{a}) - 8(\vec{b} \cdot \vec{b})$$

$$= 5 - 4\cos\theta + 10\cos\theta - 8 = 0.$$

Zjednodušíme:

$$-3 + 6\cos\theta = 0 \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2}.$$

Úloha 2.1.15

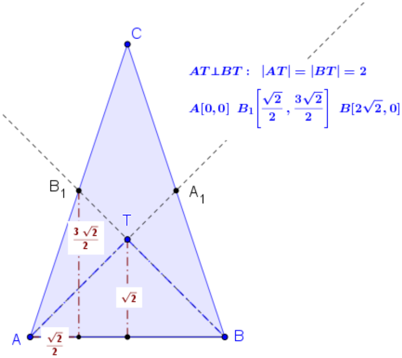
Určte veľkosti vnútorných uhlov rovnoramenného trojuholníka, ktorého ťažnice z vrcholov základne sú navzájom kolmé.

Riešenie:

Úloha 2.1.15

Určte veľkosti vnútorných uhlov rovnoramenného trojuholníka, ktorého ťažnice z vrcholov základne sú navzájom kolmé.

Riešenie:



Pomocou pytagorovej vety určíme súradnice $B_1 = \left[\frac{\sqrt{(2)}}{2}, \frac{3\sqrt{(2)}}{2}\right]$, ak AT=2.

Úloha 2.1.15 - pokračovanie

Dosadíme do vzorca

$$\cos\psi = \frac{(\vec{A}B, \vec{A}B_1}{\|\vec{A}B\|\|\vec{A}B_1\|}$$

Upravíme a vypočítame

$$\cos\psi = \frac{\sqrt{(2)}}{*2\sqrt{(2)}+0}2\sqrt{(2)}\sqrt{(5)} =$$

$$= \frac{2}{2\sqrt{(2)}\sqrt{(5)}} = \frac{\sqrt{(10)}}{10}$$

Odkiaľ dostaneme

$$\cos\psi = \frac{\sqrt{(10)}}{10} = ...$$

MON: Úloha 2.1.22

Pomocou skalárneho súčinu určte veľkosť vektora $\vec{a} = \vec{AL}$, kde L je stred strany BC rovnobežníka $ABCD$, ak

$$|AB| = 5, \quad |BC| = 6, \quad \langle(DAB)\rangle = 60^\circ.$$

MON: Úloha 2.1.22

Pomocou skalárneho súčinu určte veľkosť vektora $\vec{a} = \vec{AL}$, kde L je stred strany BC rovnobežníka $ABCD$, ak

$$|AB| = 5, \quad |BC| = 6, \quad \langle(DAB)\rangle = 60^\circ.$$

Použijeme skalárny súčin:

$$\|\vec{a}\|^2 = \left(\frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AD})\right) \cdot \left(\frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AD})\right)$$

MON: Úloha 2.1.22

Pomocou skalárneho súčinu určte veľkosť vektora $\vec{a} = \vec{AL}$, kde L je stred strany BC rovnobežníka $ABCD$, ak

$$|AB| = 5, \quad |BC| = 6, \quad \langle(DAB)\rangle = 60^\circ.$$

Použijeme skalárny súčin:

$$\|\vec{a}\|^2 = \left(\frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AD})\right) \cdot \left(\frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AD})\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\|\vec{AB}\|^2 + 2\vec{AB} \cdot \vec{AD} + \|\vec{AD}\|^2\right).$$

MON: Úloha 2.1.22

Pomocou skalárneho súčinu určte veľkosť vektora $\vec{a} = \vec{AL}$, kde L je stred strany BC rovnobežníka $ABCD$, ak

$$|AB| = 5, \quad |BC| = 6, \quad \langle(DAB)\rangle = 60^\circ.$$

Použijeme skalárny súčin:

$$\|\vec{a}\|^2 = \left(\frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AD})\right) \cdot \left(\frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AD})\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\|\vec{AB}\|^2 + 2\vec{AB} \cdot \vec{AD} + \|\vec{AD}\|^2\right).$$

Použijeme

$$\vec{AB} \cdot \vec{AD} = |AB||AD| \cos 60^\circ = 5 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = 15.$$

$$\|\vec{a}\|^2 = \frac{1}{4}(5^2 + 6^2 + 2 \cdot 15)$$
$$= \frac{1}{4}(25 + 36 + 30) = \frac{91}{4}.$$

MON: Úloha 2.1.22

Pomocou skalárneho súčinu určte veľkosť vektora $\vec{a} = \vec{AL}$, kde L je stred strany BC rovnobežníka $ABCD$, ak

$$|AB| = 5, \quad |BC| = 6, \quad \langle(DAB)\rangle = 60^\circ.$$

Použijeme skalárny súčin:

$$\|\vec{a}\|^2 = \left(\frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AD})\right) \cdot \left(\frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AD})\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\|\vec{AB}\|^2 + 2\vec{AB} \cdot \vec{AD} + \|\vec{AD}\|^2\right).$$

Použijeme

$$\vec{AB} \cdot \vec{AD} = |AB||AD| \cos 60^\circ = 5 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = 15.$$

$$\|\vec{a}\|^2 = \frac{1}{4}(5^2 + 6^2 + 2 \cdot 15)$$

$$= \frac{1}{4}(25 + 36 + 30) = \frac{91}{4}.$$

Teda

$$\|\vec{a}\| = \frac{\sqrt{91}}{2}.$$

Bilineárna forma - príklad využitia

Nech f je bilineárna forma na priestore $\mathbb{R}^3$ definovaná vzťahom:

$$f(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_2 + 2x_3y_3.$$

1. Overte, že f je skalárny súčin.
2. Overte, či sú vektory $x = (1, -3, 2)$ a $y = (2, 1, -1)$ ortogonálne.
3. Určte ortogonálny doplnok podpriestoru $W = \{(1, 2, -1)\}$.

Overenie skalárneho súčinu

Bilineárna forma f je skalárnym súčinom, ak spĺňa nasledujúce podmienky:

- Symetriu: $f(x, y) = f(y, x)$,
- Linearitu v oboch argumentoch,
- Pozitívnu definitnosť a $f(x, x) > 0$ pre všetky nenulové x.

Overenie skalárneho súčinu

Bilineárna forma f je skalárnym súčinom, ak spĺňa nasledujúce podmienky:

- Symetriu: $f(x, y) = f(y, x)$,
- Linearitu v oboch argumentoch,
- Pozitívnu definitnosť a $f(x, x) > 0$ pre všetky nenulové x.

Matica zodpovedajúca forme f vzhľadom na kanonickú bázu je:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21} & a_{21} \\ a_{31} & a_{31} & a_{31} \end{bmatrix}$$

Overenie skalárneho súčinu

Bilineárna forma f je skalárnym súčinom, ak spĺňa nasledujúce podmienky:

- Symetriu: $f(x, y) = f(y, x)$,
- Linearitu v oboch argumentoch,
- Pozitívnu definitnosť a $f(x, x) > 0$ pre všetky nenulové x.

Matica zodpovedajúca forme f vzhľadom na kanonickú bázu je:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21} & a_{21} \\ a_{31} & a_{31} & a_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{III - II}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Overenie skalárneho súčinu

Bilineárna forma f je skalárnym súčinom, ak spĺňa nasledujúce podmienky:

- Symetriu: $f(x,y) = f(y,x)$,
- Linearitu v oboch argumentoch,
- Pozitívnu definitnosť a $f(x,x) > 0$ pre všetky nenulové x.

Matica zodpovedajúca forme f vzhľadom na kanonickú bázu je:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21} & a_{21} \\ a_{31} & a_{31} & a_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{III - II}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matica A je symetrická a je pozitívne definitná.

Na diagonále sú tri jednotky, žiadne mínus jednotky a nuly. Signatúra formy je (3,0,0).

Overenie skalárneho súčinu

Bilineárna forma f je skalárnym súčinom, ak spĺňa nasledujúce podmienky:

- Symetriu: $f(x,y) = f(y,x)$,
- Linearitu v oboch argumentoch,
- Pozitívnu definitnosť a $f(x,x) > 0$ pre všetky nenulové x.

Matica zodpovedajúca forme f vzhľadom na kanonickú bázu je:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21} & a_{21} \\ a_{31} & a_{31} & a_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{III - II}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matica A je symetrická a je pozitívne definitná.

Na diagonále sú tri jednotky, žiadne mínus jednotky a nuly. Signatúra formy je (3,0,0).

To dokazuje, že f je skalárny súčin.

Viac o vzťahu skalárneho súčinu a bilineárnych foriem si pozrite Tu.

Ortogonalita vektorov x a y

Spočítame $f(x,y)$:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 1\cdot 2 + (-3)\cdot 1 + (-3)\cdot(-1) + 2\cdot 1 + 2\cdot(-1)\cdot 2 \\ &= 2 - 3 + 3 + 2 - 2 = 2 \neq 0. \end{aligned}$$

Preto vektory nie sú ortogonálne.

Ortogonálny doplnok podpriestoru

Podpriestor W je generovaný vektorom $(1, 2, -1)$. Nájdeme ortogonálny doplnok ako množinu všetkých vektorov $z = (z_1, z_2, z_3)$ spĺňajúcich podmienku:

$$f((1, 2, -1), (z_1, z_2, z_3)) = 0.$$

Riešením je rovnica $z_1 + 2z_2 - z_3 = 0$, čo definuje rovinu v $\mathbb{R}^3$.