Afinný priestor

Pripomenutie pojmov

Pavol Hanzel
Fakulta prírodných vied UMB

Obsah

1. Afinný priestor
2. Afinné podpriestory
3. Priamka a nadrovina
4. Incidencia a kolineárnosť
5. Krátke zopakovanie

Od vektorového k afinnému priestoru

Vo vektorovom priestore $V(\mathbb{R}^n)$ sme popísali základné pojmy:

- vektor ako prvok vektorového priestoru V),
- štandardná báza $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e_1}, ..., \boldsymbol{e_n})$ vektorového priestoru V),
- súradnice vektora $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$, pričom zrejme platí

$$(v_1, v_2, ..., v_n) = v_1 \cdot (1, 0, ..., 0) \oplus v_2 \cdot (0, 1, 0, ..., 0) \oplus v_n \cdot (0, 0, ..., 1).$$

V afinnom priestore pracujeme s bodmi ale aj s vektormi.

Základná myšlienka

Afinný priestor spája body s vektormi: body tvoria množinu $\mathcal{A}$ a vektory priestoru V opisujú posunutia medzi bodmi.

Afinný priestor

Definícia

Nech V je vektorový priestor nad telesom T a $\mathcal{A}$ neprázdna množina. Dvojicu

$$\mathbb{A} = (\mathcal{A}, V)$$

nazývame afinný priestor so zameraním V, ak každej dvojici bodov $A, B \in \mathcal{A}$ prislúcha vektor $\overrightarrow{AB} \in V$ a platí:

1. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$,
2. pre každý $A \in \mathcal{A}$ a $\vec{u} \in V$ existuje práve jeden bod $B \in \mathcal{A} : \overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

Dôsledky definície

Prvá vlastnosť je Chaslesova relácia:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Ak $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, používame aj zápis

$$B = A + \vec{u}.$$

Z Chaslesovej relácie dostávame

$$\overrightarrow{AA} = \vec{0}, \qquad \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}.$$

Dimenzia

$$\dim \mathbb{A} = \dim V.$$

Dimenzia afinného priestoru je dimenziou jeho zamerania.

Afinná rovina ako posunutie podpriestoru →

Uvažujme

$$\mathcal{A} = \{(x_1, x_2, x_3);\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 5\}$$

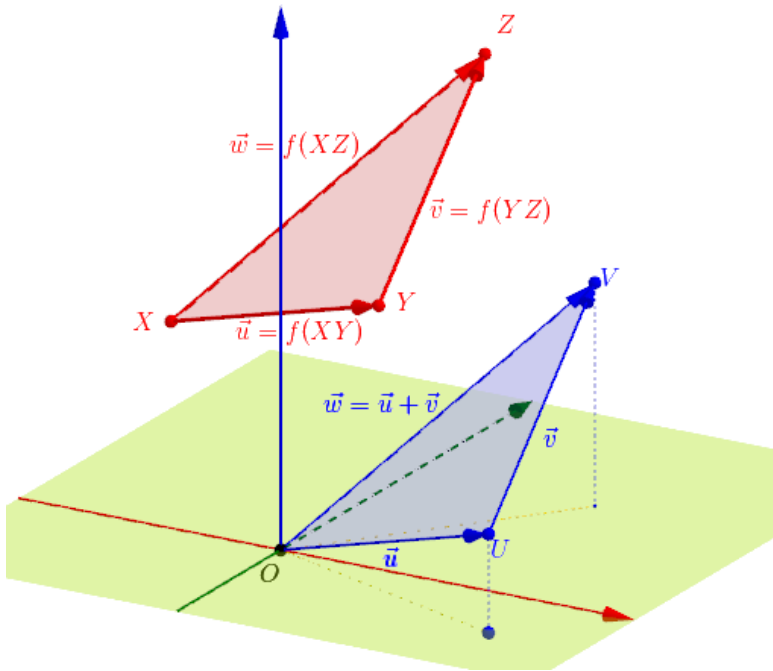
a

$$V = \{(u_1, u_2, u_3);\ u_1 + u_2 - 2u_3 = 0\}.$$

Pre $X, Y \in \mathcal{A}$ položíme

$$\overrightarrow{XY} = Y - X.$$

Potom $(\mathcal{A}, V)$ je dvojrozmerný afinný priestor.



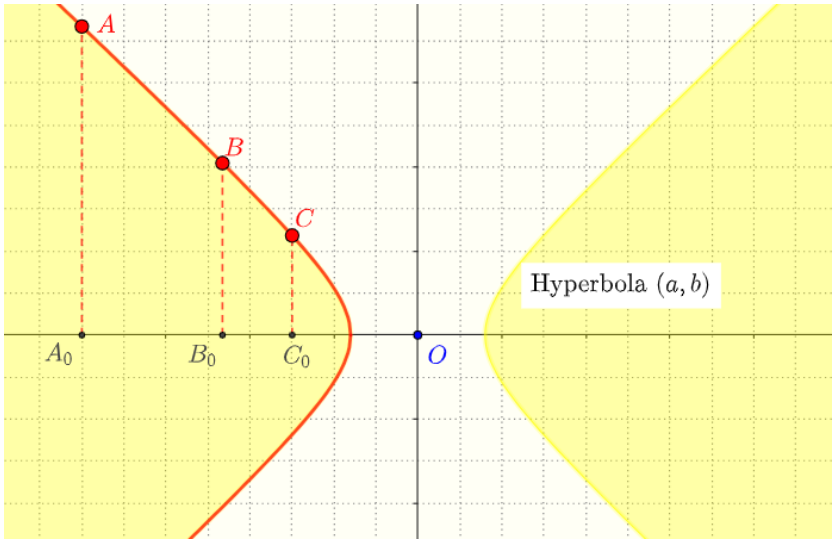
Afinný priestor nemusí vyzerať ako priamka

Ľavá vetva hyperboly

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad x \leq -a$$

sa dá vybaviť štruktúrou jednorozmerného afinného priestoru so zameraním $\mathbb{R}$.
Pre body $X_1 = [x_1, y_1]$, $X_2 = [x_2, y_2]$ definujeme

$$\overrightarrow{X_1X_2} = y_2 - y_1.$$



Interaktívny applet si aktivujete Tu.

Dôležité

Rozhodujúca nie je podoba množiny bodov, ale spôsob, akým je definovaná afinná štruktúra.

Afinný podpriestor

Definícia

Nech $\mathbb{A} = (\mathcal{A}, V)$ je afinný priestor, $A \in \mathcal{A}$ a $V' \subseteq V$ vektorový podpriestor. Množinu

$$\mathcal{A}' = A + V' = \{A + \vec{v};\ \vec{v} \in V'\}$$

nazývame afinný podpriestor so zameraním V'.

Afinný podpriestor môžeme chápať ako posunutý vektorový podpriestor.

Ak $\dim V' = k$, potom $\dim \mathcal{A}' = k$.

- dimenzia 0: bod,
- dimenzia 1: priamka,
- dimenzia 2: rovina,
- dimenzia $n-1$: nadrovina.

Parametrické vyjadrenie

Nech $A \in \mathcal{A}'$ a $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k$ je báza zamerania. Potom

$$X = A + t_1\vec{u}_1 + \cdots + t_k\vec{u}_k, \qquad t_i \in \mathbb{R}.$$

V súradniciach:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 + a_{11}t_1 + \cdots + a_{1k}t_k, \\ x_2 &= a_2 + a_{21}t_1 + \cdots + a_{2k}t_k, \\ &\vdots \\ x_n &= a_n + a_{n1}t_1 + \cdots + a_{nk}t_k. \end{aligned}$$

Neparametrické vyjadrenie

k-rozmerný afinný podpriestor v $\mathbb{A}^n$ možno opísať sústavou

$$p = n - k$$

nezávislých lineárnych rovníc.

Príklad: rovina v $\mathbb{A}^3$

Rovina prechádza bodom

$$A = [1, 2, 3]$$

a má smerové vektory

$$\vec{u} = (-5, 6, 4), \qquad \vec{v} = (2, -1, 0).$$

Parametricky:

$$\begin{aligned} x &= 1 - 5t + 2s, \\ y &= 2 + 6t - s, \\ z &= 3 + 4t. \end{aligned}$$

Elimináciou parametrov t, s dostaneme

$$4x + 8y - 7z + 1 = 0.$$

▸ GeoGebra: rovina v afinnom priestore

Od afinného k euklidovskému priestoru

Euklidovský priestor

Ak je v afinnom priestore $\mathbb{A}^n$ definovaný skalárny súčin, tak dostávame euklidovský priestor $\mathbb{E}^n$.

Tým pribúdajú metrické pojmy, napríklad:

- veľkosť vektora a vzdialenosť,
- uhol,
- kolmosť,
- normálový vektor.

Priamka v afinnom priestore

Dva rôzne body A, B určujú priamku

$$p = \{A + t\overrightarrow{AB};\ t \in \mathbb{R}\}.$$

Ak poznáme bod A a nenulový smerový vektor $\vec{u}$, potom

$$\boxed{X = A + t\vec{u}, \qquad t \in \mathbb{R}.}$$

V afinnej rovine pre $A = [a_1, a_2]$ a $\vec{u} = (u_1, u_2)$:

$$x = a_1 + tu_1, \qquad y = a_2 + tu_2.$$

Priamka určená dvoma bodmi

Bod $X = [x, y]$ leží na priamke AB práve vtedy, keď vektory

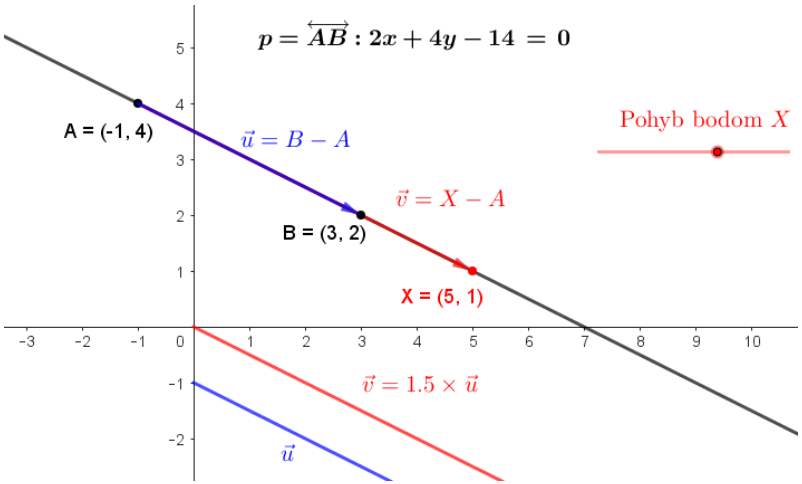
$$\overrightarrow{AX}, \quad \overrightarrow{AB}$$

sú lineárne závislé.
Preto

$$\begin{vmatrix} x - a_1 & y - a_2 \\ b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Po úprave dostávame všeobecnú rovnicu

$$\boxed{ax + by + c = 0}, \qquad (a, b) \neq (0, 0).$$



▸ GeoGebra: priamka dvoma bodmi

Afinné a metrické vlastnosti

Afinné pojmy

- incidencia,
- rovnobežnosť,
- určenie priamky bodom a smerom,
- kolineárnosť.

Metrické pojmy

- vzdialenosť,
- veľkosť vektora,
- uhol,
- kolmosť.

Pohľad dopredu

Pri prechode k projektívnej geometrii sa metrické vlastnosti vo všeobecnosti nezachovávajú.

Nadrovina

Nadrovina v n-rozmernom afinnom priestore má dimenziu $n-1$.
Ak je určená afinne nezávislými bodmi $A_0, \ldots, A_{n-1}$, potom X patrí do nadroviny práve vtedy, keď

$$\begin{vmatrix} x_1 & \cdots & x_n & 1 \\ a_{01} & \cdots & a_{0n} & 1 \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Rozvinutím dostávame

$$\boxed{a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n + a_0 = 0}.$$

Incidencia

Incidencia bodu a priamky

Bod A a priamka p sú incidentné, ak

$$A \in p.$$

Rovnako môžeme hovoriť o incidencii bodu s rovinou alebo všeobecnejšie s afinným podpriestorom.

Incidencia patrí medzi základné vzťahy, ktoré sa prirodzene prenášajú aj do projektívnej geometrie.

Kolineárne body

Definícia

Body A, B, C sú kolineárne, ak existuje priamka, na ktorej všetky tri ležia.

Ak $A \neq B$, potom

$$\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB}$$

pre vhodné $\lambda \in \mathbb{R}$.
V afinnej rovine ekvivalentne:

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Prečo determinantový zápis?

V afinnej rovine používame súradnice

$$[x, y]$$

a kolineárnosť zapisujeme pomocou determinantu so stĺpcom jednotiek.

V projektívnej geometrii budeme pracovať s homogénnymi súradnicami

$$[x_1, x_2, x_3].$$

Most k projektívnej geometrii

Tretia (dodatočná) súradnica a determinantový zápis incidencie sa stanú prirodzenou súčasťou projektívneho modelu.

Afinná nezávislosť bodov

Definícia

Body

$$A_0, A_1, \ldots, A_k$$

sú afinne nezávislé, ak vektory

$$\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_k}$$

sú lineárne nezávislé.

- V afinnej rovine: tri body sú afinne nezávislé práve vtedy, keď nie sú kolineárne.
- V $\mathbb{A}^3$: štyri body sú afinne nezávislé práve vtedy, keď neležia v jednej rovine.

Príklad: kolineárnosť troch bodov

Rozhodnite, či body

$$A = [1, 2], \qquad B = [3, 5], \qquad C = [5, 8]$$

ležia na jednej priamke.

Príklad: kolineárnosť troch bodov

Rozhodnite, či body

$$A = [1, 2], \qquad B = [3, 5], \qquad C = [5, 8]$$

ležia na jednej priamke.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 5 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Príklad: kolineárnosť troch bodov

Rozhodnite, či body

$$A = [1, 2], \qquad B = [3, 5], \qquad C = [5, 8]$$

ležia na jednej priamke.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 5 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Preto sú body A, B, C kolineárne.

Príklad: kolineárnosť troch bodov

Rozhodnite, či body

$$A = [1, 2], \qquad B = [3, 5], \qquad C = [5, 8]$$

ležia na jednej priamke.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 5 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Preto sú body A, B, C kolineárne.
Rovnako:

$$\overrightarrow{AB} = (2, 3), \qquad \overrightarrow{AC} = (4, 6) = 2\overrightarrow{AB}.$$

Príklad: rovnica priamky

Určte rovnicu priamky prechádzajúcej bodmi

$$A = [2, -1], \qquad B = [5, 3].$$

Príklad: rovnica priamky

Určte rovnicu priamky prechádzajúcej bodmi

$$A = [2, -1], \qquad B = [5, 3].$$

Použijeme determinantové vyjadrenie:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Príklad: rovnica priamky

Určte rovnicu priamky prechádzajúcej bodmi

$$A = [2, -1], \qquad B = [5, 3].$$

Použijeme determinantové vyjadrenie:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Po úprave:

$$\boxed{4x - 3y - 11 = 0.}$$

Čo si pripomenúť?

- Afinný priestor rozlišuje body a vektory zamerania.
- Afinný podpriestor je posunutý vektorový podpriestor.
- Priamky, roviny a nadroviny možno opisovať parametricky aj neparametricky.
- Incidencia, kolineárnosť a afinná nezávislosť majú prirodzené determinantové kritériá.
- Afinné pojmy nepotrebujú vzdialenosť ani uhol.
- Determinantový zápis pripravuje prechod k homogénnym súradniciam a projektívnej geometrii.