

UNIVERZITA MATEJA BELA V BANSKEJ BYSTRICI
FAKULTA PRÍRODNÝCH VIED

Kuželosečky v analytickej a projektívnej geometrii

Pavol Hanzel, Patrik Voštinár



Banská Bystrica 2026

ANALYTICKÁ GEOMETRIA - kuželosečky a kvadriky

Učebnica vznikla v rámci projektu KEGA 010TTU-4/2025 "Rozvoj informatického a algoritmického myslenia žiakov prostredníctvom efektívneho začlenenia moderných technológií do vyučovania informatiky a matematiky"

© Autori:

prof. RNDr. Pavol Hanzel, CSc.,
doc. PaedDr. Patrik Voštinár, PhD.

Recenzenti:

doc. RNDr. Tomáš Zdráhal, CSc.
doc. PaedDr. Milan Pokorný, PhD.

Vydavateľ:

© Belianum. Vydavateľstvo Univerzity Mateja Bela v Banskej Bystrici.
Edícia: Fakulta prírodných vied, Prvé vydanie, 2025.

Schválila Edičná komisia FPV UMB v Banskej Bystrici ako vysokoškolskú učebnicu. Rukopis neprešiel jazykovou úpravou.

ISBN ..., (online: iPDF) EAN ...

Obsah

Úvod	1
1 Pripomenutie základných pojmov	5
1.1 Vektorový priestor	5
1.2 Afinný priestor	7
1.2.1 Rovina ako afinný priestor	8
1.2.2 Afinný priestor nemusí byť rovina	9
1.3 Afinné podpriestory	11
1.3.1 Parametrické vyjadrenie afinného podpriestoru	12
1.4 Priamka a nadrovina	13
1.4.1 Priamka	13
1.4.2 Normálový vektor priamky	15
1.4.3 Nadrovina	15
1.5 Incidencia a kolineárnosť	16
1.5.1 Kolineárne body	16
1.5.2 Afinná nezávislosť bodov	17
1.6 Riešené príklady	18
1.7 Cvičenie	20
Od afinnej k projektívnej geometrii	22
2 Projektívna rovina	23
2.1 Nevlastné body	23
2.2 Nevlastná priamka	25
2.3 Projektívne rozšírenie afinnej roviny	26
2.4 Axiomatické zavedenie projektívnej roviny	27
2.5 Projektívne konfigurácie	29
2.5.1 Štvorroh a štvorstran	29
2.5.2 Desarguesova veta	31
2.5.3 Pappova veta	33
2.5.4 Vzťah Pappovej a Desarguesovej vlastnosti	35
2.6 Stredová kolineácia	36

2.7	Cvičenie	40
3	Homogénna súradnicová sústava	45
3.1	Homogénne súradnice bodu	46
3.1.1	Vlastné a nevlastné body	48
3.2	Projektívna rovina v homogénnych súradniciach	53
3.2.1	Afinná rovina ako časť projektívnej roviny	54
3.3	Lineárna závislosť a kolinearita bodov	55
3.4	Priamka v homogénnych súradniciach	59
3.4.1	Incidencia bodu a priamky	61
3.4.2	Afinná a homogénna rovnica priamky	62
3.5	Spojnice dvoch bodov a priesečník dvoch priamok	65
3.6	Nevlastná priamka	70
3.7	Princíp duality	74
3.8	Deliaci pomer a dvojpomer	79
3.8.1	Deliaci pomer troch bodov	79
3.8.2	Dvojpomer štyroch bodov	80
3.8.3	Dvojpomer v homogénnych súradniciach	81
3.9	Cvičenie	88
4	Kružnica	93
4.1	Od geometrickej konštrukcie k rovnici kružnice	93
4.2	Kružnica v projektívnej rovine	96
4.3	Izotropické body a priamky	97
5	Obraz kružnice v kolineácii	99
5.1	Kružnica a úbežnica kolineácie	99
5.2	Od kružnice k elipse, parabole a hyperbole	100
5.3	Dynamický experiment: od kružnice ku kuželosečkám	102
5.4	Čo sa pri kolineácii zachovalo?	103
5.5	Cvičenie	106
6	Kuželosečka – tri pohľady	113
6.1	Metrický pohľad na kuželosečku	114
6.1.1	Projektívna definícia kuželosečky	117
6.1.2	Kuželosečka ako rovinný rez kuželovej plochy	120
6.2	Tri cesty ku kuželosečke	123
6.3	Cvičenie	124

7	Analytická klasifikácia kuželosečiek	127
7.1	Všeobecná rovnica kuželosečky	127
7.2	Homogénna a maticová rovnica kuželosečky	128
7.3	Regulárna a singulárna kuželosečka	129
7.4	Kolineácia projektívnej roviny	131
7.4.1	Maticové vyjadrenie kolineácie	132
7.4.2	Obraz priamky v kolineácii	137
7.5	Kuželosečka a matica kolineácie	138
7.6	Zmena súradnicovej sústavy a kanonický tvar kuželosečky	139
7.6.1	Otočenie súradnicovej sústavy	140
7.6.2	Posunutie súradnicovej sústavy	141
7.6.3	Kanonický tvar	142
7.7	Vzťahy medzi parametrami kuželosečiek	152
7.8	Cvičenie	155
8	Záver	163
	Literatúra	165

Úvod

*Cesta k pochopeniu sveta môže viesť aj cez geometriu, od konštrukcií kružidlom
a pravítkom až po využitie maticového kalkulu.*

Rozšírená myšlienka Euklida

Kuželosečky patria k najstarším a zároveň najvýznamnejším objektom geometrie. Kružnicu, elipsu, parabolu a hyperbolu poznáme najmä z analytickej geometrie, kde ich opisujeme pomocou rovníc a rozlišujeme podľa ich algebraických a metrických vlastností. Elipsu charakterizujeme pomocou dvoch ohnísk, parabolu pomocou ohniska a riadiacej priamky, hyperbolu pomocou rozdielu vzdialeností od dvoch ohnísk. Pri takomto prístupe je prirodzené vnímať ich ako rozdielne geometrické útvary.

Skúsme sa však na ne pozrieť trochu inak a položiť si otázku:

*Predstavujú kružnica, elipsa, parabola a hyperbola skutočne štyri rozdielne geometrické
objekty, alebo sú len rôznymi podobami jedného všeobecnejšieho geometrického útvaru?*

Práve táto otázka je jedným z východísk predkladanej učebnice. Odpoveď budeme postupne hľadať v projektívnej geometrii. Rozšírením afinnej roviny o nevlastné body a nevlastnú priamku sa mení spôsob, akým sa na známe geometrické situácie pozeráme. Rovnobežné priamky získajú spoločný nevlastný bod a každé dve rôzne priamky sa pretínajú práve v jednom bode. To, čo bolo v afinnej geometrii osobitným prípadom, sa v projektívnej rovine stáva prirodzenou súčasťou jedného geometrického obrazu.

Podobne sa mení aj náš pohľad na kuželosečky. Kružnica, elipsa, parabola a hyperbola už nevystupujú iba ako samostatné krivky definované rôznymi metrickými vlastnosťami. Projektívna geometria nám umožňuje hľadať to, čo majú spoločné, a sledovať vlastnosti, ktoré zostávajú zachované aj vtedy, keď sa vzdialenosti, uhly či rovnobežnosť menia.

Analytickým nástrojom takéhoto rozšírenia sú homogénne súradnice. Umožňujú jednotne pracovať s vlastnými aj nevlastnými bodmi a projektívne zobrazenia zapisovať pomocou matic. Geometrická predstava sa tak prirodzene prepája s analytickou geometriou a lineárnou algebrou. Pri štúdiu kuželosečiek je toto prepojenie obzvlášť názorné: obrazom kružnice v kolineácii môže byť elipsa, parabola alebo hyperbola. To, čo sa v euklidovskej rovine javí ako rozdielnosť, sa z projektívneho pohľadu začne ukazovať ako jednota.

Cesta, ktorou sa v učebnici vydáme, má preto prirodzenú postupnosť

afinná rovina $\longrightarrow$ projektívna rovina $\longrightarrow$ homogénne súradnice
 $\longrightarrow$ projektívne transformácie $\longrightarrow$ kuželošečky.

Osobitné miesto na tejto ceste patrí kružnici. Je to objekt dôverne známy z elementárnej geometrie, a práve preto môže slúžiť ako prirodzený východiskový bod. V euklidovskej geometrii ju charakterizujeme pomocou vzdialenosti od stredu. Pri prechode k projektívnej geometrii však vzdialenosť prestáva byť podstatná a do popredia sa dostávajú incidencia, kolinearita a vlastnosti zachovávané kolineáciami. Sledovanie obrazu kružnice nám tak umožní postupne prejsť od klasickej geometrie k všeobecnejšiemu pojmu kuželošečky.

Predkladaná učebnica však nechce ponúknuť iba iné usporiadanie známej teórie kuželošečiek. Pokúšame sa v nej ukázať aj trochu iný spôsob práce s geometriou. Geometrický objekt nevníname iba prostredníctvom jeho definície, rovnice alebo hotového obrázka. Dôležitá je aj možnosť objekt meniť, sledovať jeho správanie a pozorovať, ktoré vlastnosti sa pri zmene konfigurácie zachovávajú a ktoré nie.

Významnú úlohu preto v učebnici zohrávajú dynamické konštrukcie vytvorené v prostredí GeoGebra. Applety nie sú iba ilustráciami k už vyslovenej matematickej teórii. Čitateľ môže meniť polohu bodov a priamok, sledovať pohyb geometrických objektov, prechádzať medzi rôznymi konfiguráciami a pozorovať vlastnosti, ktoré pri týchto zmenách zostávajú nemenné. Dynamický obrázok sa tak stáva súčasťou procesu poznávania: môže viesť k otázke, k objaveniu súvislosti alebo k formulovaniu hypotézy, ktorú je následne potrebné matematicky zdôvodniť.

Práve spojenie klasickeho matematickeho výkladu s dynamickou a interaktívnou geometriou považujeme za jednu z hlavných črt tejto učebnice. Nejde pritom o nahradenie matematickeho dôkazu experimentom v GeoGebre. Dynamická konštrukcia má inú úlohu: pomáha geometrický vzťah objaviť, porozumieť mu a položiť otázku, prečo pozorovaná vlastnosť platí. Až matematická argumentácia rozhoduje o jej všeobecnej platnosti. Takýto spôsob práce môže viesť od pozorovania cez hypotézu k dôkazu a následne späť k hlbšiemu pochopeniu geometrickej situácie.

Kuželošečky budeme preto skúmať z troch navzájom prepojených pohľadov. Metrický pohľad využíva vzdialenosti, ohniská, riadiace priamky, osi a excentricitu. Analytický pohľad ich opisuje pomocou rovníc, matíc a kvadratických foriem. Projektívny pohľad hľadá vlastnosti zachovávané projektívnymi transformáciami a odhaľuje spoločnú geometrickú podstatu jednotlivých typov kuželošečiek. Žiadny z týchto pohľadov nepovažujeme za nadradený ostatným. Každý ukazuje inú stránku toho istého geometrického objektu.

Text nadväzuje na našu predchádzajúcu publikáciu *Afinná geometria – zobrazenia, vizualizácie, aplikácie*. Niektoré pojmy a výsledky z afinnej geometrie preto pripomínáme iba v rozsahu potrebnom pre ďalší výklad. Predpokladáme základné vedomosti z analytickej geometrie roviny, lineárnej algebry a elementárnej teórie kuželošečiek.

Učebnica je určená predovšetkým študentom učiteľstva matematiky, ale aj ďalším čitateľom, ktorí chcú kužeľosečky vnímať v širších geometrických súvislostiach. Naším cieľom nie je iba zhromaždiť ich známe vlastnosti a odvodiť príslušné rovnice. Chceme ukázať, ako sa môže meniť pohľad na ten istý objekt pri prechode od euklidovskej a afinnej geometrie ku geometrii projektívnej a ako môže dynamické geometrické prostredie tento prechod sprístupniť a podporiť jeho porozumenie.

Hlavnú myšlienku učebnice možno napokon vyjadriť jednoducho: *to, čo sa v euklidovskej rovine javí ako rozdielnosť jednotlivých kužeľosečiek, sa v projektívnej rovine ukazuje ako ich jednota.*

Pri príprave rukopisu sme využívali aj nástroje umelej inteligencie. Slúžili predovšetkým ako pomocný nástroj pri formálnych a štylistických úpravách textu, pri kontrole jeho zrozumiteľnosti a nadväznosti jednotlivých častí a pri technickej práci s $\text{\LaTeX}$ om. Matematická koncepcia učebnice, výber a usporiadanie tém, matematický obsah, argumentácia, dynamické konštrukcie a výsledná podoba výkladu zostávajú výsledkom práce autorov.

1 Pripomenutie základných pojmov

V tejto kapitole stručne pripomenieme pojmy z lineárnej a afinnej geometrie, ktoré budeme potrebovať pri zavedení projektívnej roviny a pri ďalšom štúdiu kuželosečiek. Naším cieľom nie je znovu budovať teóriu vektorových a afinných priestorov, ale zdôrazniť tie vlastnosti, ktoré sa neskôr prirodzene prenesú do projektívnej geometrie.

Osobitnú pozornosť budeme venovať afinným podpriestorom, incidencii, kolineárnosti a determinantovým kritériám. Práve tieto pojmy vytvárajú prirodzený most medzi afinnou a projektívnou geometriou.

1.1 Vektorový priestor

Začneme stručným pripomenutím základných pojmov lineárnej algebry.

Definícia 1.1.1: Vektorový priestor

Nech T je komutatívne teleso. *Vektorový priestor* nad telesom T je neprázdna množina V , na ktorej sú definované operácie sčítania vektorov

$$+ : V \times V \longrightarrow V$$

a násobenia vektorov skalármi

$$\cdot : T \times V \longrightarrow V,$$

ktoré spĺňajú obvyklé axiómy vektorového priestoru.

Prvky množiny V nazývame *vektory*, prvky telesa T *skaláre*. V ďalšom texte budeme pracovať najmä s reálnymi vektorovými priestormi, teda s prípadom $T = \mathbb{R}$.

Typickým príkladom je priestor

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n); x_i \in \mathbb{R}\},$$

v ktorom sú sčítanie a násobenie skalárom definované po zložkách.

Geometricky vektor môžeme interpretovať ako triedu ekvivalentných orientovaných

úsečiek. Dve orientované úsečky reprezentujú ten istý voľný vektor, ak majú rovnaký smer, orientáciu a veľkosť.

Definícia 1.1.2: Vektorový podpriestor

Neprázdna podmnožina $W \subseteq V$ sa nazýva *vektorový podpriestor* priestoru V , ak pre všetky $\vec{u}, \vec{v} \in W$ a všetky $\lambda \in T$ platí

$$\vec{u} + \vec{v} \in W, \quad \lambda \vec{u} \in W.$$

Pripomeňme, že množina vektorov

$$\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$$

je lineárne nezávislá, ak z rovnosti

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_k \vec{v}_k = \vec{0}$$

vyplýva

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0.$$

Bázou konečnorozmerného vektorového priestoru nazývame lineárne nezávislú množinu vektorov, ktorá tento priestor vygeneruje. Počet prvkov bázy konečno-rozmerného vektorového priestoru predstavuje jeho *dimenziu*.

1.2 Afinný priestor

Z algebraického pohľadu vo vektorovom priestore existuje jeden triviálny prvok – nulový vektor. V geometrii však pracujeme s bodmi bez toho, aby sme niektorému z nich prisudzovali osobitné postavenie. Túto situáciu opisuje afinný priestor.

Definícia 1.2.1: Afinný priestor

Nech V je vektorový priestor nad telesom T a $\mathcal{A}$ neprázdna množina. Usporiadanú dvojicu

$$\mathbb{A} = (\mathcal{A}, V)$$

nazývame *afinný priestor so zameraním V* , ak je každej usporiadanej dvojici bodov $A, B \in \mathcal{A}$ priradený vektor

$$\overrightarrow{AB} \in V$$

tak, že platia nasledujúce vlastnosti:

1. pre ľubovoľné body $A, B, C \in \mathcal{A}$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC};$$

2. pre každý bod $A \in \mathcal{A}$ a každý vektor $\vec{u} \in V$ existuje práve jeden bod $B \in \mathcal{A}$, pre ktorý

$$\overrightarrow{AB} = \vec{u}.$$

Prvú vlastnosť nazývame *Chaslesovou reláciou*. Druhá vlastnosť vyjadruje, že každý bod môžeme jednoznačne posunúť o ľubovoľný vektor zamerania.

Ak

$$\overrightarrow{AB} = \vec{u},$$

budeme používať aj zápis

$$B = A + \vec{u}.$$

Z Chaslesovej relácie bezprostredne dostávame

$$\overrightarrow{AA} = \vec{0}, \quad \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}.$$

Dimenziou afinného priestoru rozumieme dimenziu jeho zamerania:

$$\dim \mathbb{A} = \dim V.$$

1.2.1 Rovina ako afinný priestor

Nasledujúci príklad ukazuje typickú situáciu, v ktorej množina bodov vznikne posunutím vektorového podpriestoru. Pozri obrázok 1.1.

Príklad 1.2.1: Afinná rovina v $\mathbb{R}^3$

Uvažujme množinu

$$\mathcal{A} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 + x_2 - 2x_3 = 5\}$$

a vektorový podpriestor

$$V = \{(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3; u_1 + u_2 - 2u_3 = 0\}.$$

Pre body $X, Y \in \mathcal{A}$ definujeme

$$\overrightarrow{XY} = Y - X.$$

Ukážeme, že $(\mathcal{A}, V)$ je afinný priestor.

Riešenie. Ak $X, Y \in \mathcal{A}$, potom

$$x_1 + x_2 - 2x_3 = 5, \quad y_1 + y_2 - 2y_3 = 5.$$

Preto

$$(y_1 - x_1) + (y_2 - x_2) - 2(y_3 - x_3) = 0,$$

a teda

$$\overrightarrow{XY} = Y - X \in V.$$

Chaslesova relácia má tvar

$$(Y - X) + (Z - Y) = Z - X.$$

Nech teraz $X \in \mathcal{A}$ a $\vec{u} \in V$. Položme

$$Y = X + \vec{u}.$$

Potom

$$\overrightarrow{XY} = \vec{u}.$$

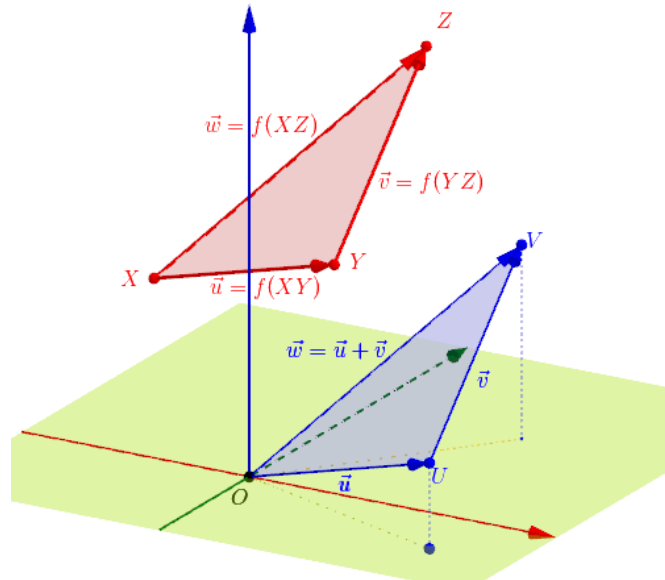
Navyše

$$(x_1 + u_1) + (x_2 + u_2) - 2(x_3 + u_3) = (x_1 + x_2 - 2x_3) + (u_1 + u_2 - 2u_3) = 5,$$

teda $Y \in \mathcal{A}$. Bod Y je jednoznačne určený rovnosťou

$$Y = X + \vec{u}.$$

Množina $\mathcal{A}$ je preto dvojrozmerný afinný priestor so zameraním V . □



Obr. 1.1: Afinná rovina ako posunutie vektorového podpriestoru

1.2.2 Afinný priestor nemusí byť rovina

Pojem afinného priestoru je pomerne abstraktný. Množina jeho bodov preto nemusí byť v euklidovskom priestore zobrazená ako priamka alebo rovina.

V nasledujúcom príklade budú bodovú množinu afinného priestoru tvoriť body len jednej vetvy hyperboly. Uvažujme ľavú vetvu hyperboly (pozri obr. 1.2)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a, b > 0,$$

teda množinu

$$\mathcal{H} = \left\{ [x, y] \in \mathbb{R}^2; \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, x \leq -a \right\}.$$

Každému $y \in \mathbb{R}$ zodpovedá práve jeden bod tejto vetvy:

$$X(y) = \left[-a\sqrt{1 + \frac{y^2}{b^2}}, y \right].$$

Za zameranie zvolíme jednorozmerný vektorový priestor $\mathbb{R}$.

Príklad 1.2.2: Vetva hyperboly ako afinný priestor

Nech $\mathcal{A} = \mathcal{H}$ a $V = \mathbb{R}$. Definujme zobrazenie

$$f : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}$$

takto: pre dva body

$$X_1 = [x_1, y_1], \quad X_2 = [x_2, y_2] \in \mathcal{H}$$

položme

$$f(X_1, X_2) = \overrightarrow{X_1 X_2} = y_2 - y_1.$$

Potom $(\mathcal{H}, \mathbb{R}, f)$ tvorí jednorozmerný afinný priestor.

Riešenie. Pre ľubovoľné tri body $X_1, X_2, X_3 \in \mathcal{H}$ platí

$$\overrightarrow{X_1 X_2} + \overrightarrow{X_2 X_3} = (y_2 - y_1) + (y_3 - y_2) = y_3 - y_1 = \overrightarrow{X_1 X_3}.$$

Nech $X_1 \in \mathcal{H}$ a $u \in \mathbb{R}$. Položme

$$y_2 = y_1 + u.$$

Keďže každej reálnej hodnote y_2 zodpovedá práve jeden bod

$$X_2 = \left[-a\sqrt{1 + \frac{y_2^2}{b^2}}, y_2 \right] \in \mathcal{H},$$

existuje práve jeden bod X_2 , pre ktorý

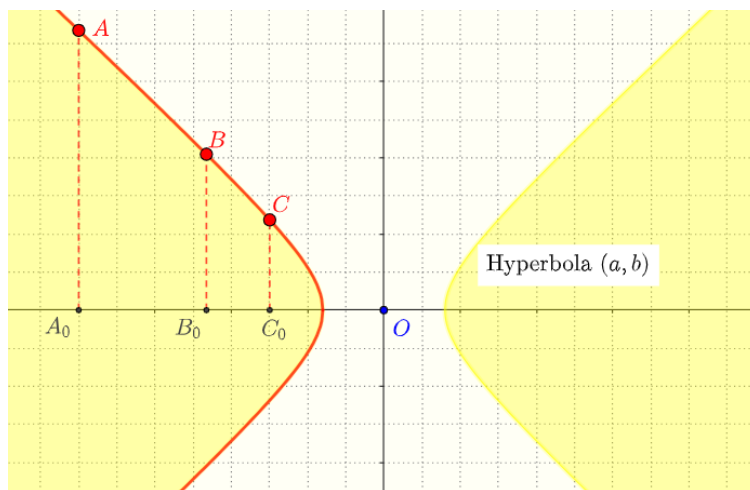
$$\overrightarrow{X_1 X_2} = u.$$

Obe axiomy afinného priestoru sú teda splnené. Množina $\mathcal{H}$ spolu so zameraním $V = \mathbb{R}$ a zobrazením f tvorí jednorozmerný afinný priestor. $\square$

Poznámka 1.2.1: Poznámka

Tento príklad ukazuje dôležitý rozdiel medzi abstraktným afinným priestorom a jeho geometrickým zobrazením. Hoci množina $\mathcal{H}$ má v euklidovskej rovine tvar krivky, vzhľadom na uvedenú afinnú štruktúru je jednorozmerným afinným priestorom.

Rozhodujúca teda nie je podoba množiny bodov, ale spôsob, akým je medzi bodmi a vektormi zamerania definovaná afinná štruktúra.



Obr. 1.2: Ľavá vetva hyperboly ako model jednorozmerného afinného priestoru

1.3 Afinné podpriestory

Definícia 1.3.1: Afinný podpriestor

Nech $\mathbb{A} = (\mathcal{A}, V)$ je afinný priestor, $A \in \mathcal{A}$ a $V' \subseteq V$ vektorový podpriestor. Množinu

$$\mathcal{A}' = A + V' = \{A + \vec{v}; \vec{v} \in V'\}$$

nazývame *afinný podpriestor* priestoru $\mathbb{A}$ so zameraním V' .

Afinný podpriestor teda môžeme chápať ako posunutý vektorový podpriestor.

Ak

$$\dim V' = k,$$

potom

$$\dim \mathcal{A}' = k.$$

V n -rozmernom afinnom priestore rozlišujeme najmä:

- 0-rozmerné afinné podpriestory – body,
- 1-rozmerné afinné podpriestory – priamky,
- 2-rozmerné afinné podpriestory – roviny,
- $(n - 1)$ -rozmerné afinné podpriestory – nadroviny.

1.3.1 Parametrické vyjadrenie afinného podpriestoru

Nech $\mathcal{A}'$ je k -rozmerný afinný podpriestor, $A \in \mathcal{A}'$ a

$$\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k$$

je báza jeho zamerania. Každý bod $X \in \mathcal{A}'$ možno zapísať v tvare

$$X = A + t_1 \vec{u}_1 + \dots + t_k \vec{u}_k, \quad t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}.$$

Tento zápis nazývame *parametrickým vyjadrením* afinného podpriestoru, ktorému odpovedá n parametrických rovníc o k parametroch/neznámych. Tieto parametrické rovnice podpriestoru $\mathbb{A}^k$ majú známy tvar

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 + a_{11}t_1 + \dots + a_{1k}t_k \\ x_2 &= a_2 + a_{21}t_1 + \dots + a_{2k}t_k \\ &\vdots \\ x_n &= a_n + a_{n1}t_1 + \dots + a_{nk}t_k \end{aligned} \tag{1.1}$$

V maticovom tvare

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_k \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

V afinnom priestore $\mathbb{A}^n$ môžeme lineárne podpriestory $\mathbb{A}^k \subset \mathbb{A}^n$ vyjadriť aj **neparametricky** pomocou sústavy p lineárnych rovníc s n neznámymi. Ich počet je závislý od dimenzie podpriestoru k a od dimenzie daného priestoru n . Musí byť splnená rovnosť: $p = n - k$.

Príklad 1.3.1: Rovina v afinnom priestore

Nájdite parametrické aj neparametrické vyjadrenie roviny v $\mathbb{A}^3$, ktorá prechádza bodom $A = [1, 2, 3]$ a má smer $\vec{u} = (-5, 6, 4)$, $\vec{v} = (2, -1, 0)$.

Riešenie. Parametrické rovnice 1.1 majú tvar

$$\begin{aligned} x &= 1 - 5t + 2s \\ y &= 2 + 6t - s \\ z &= 3 + 4t \end{aligned} \tag{1.3}$$

Zo vzťahov lineárnej sústavy (1.5) môžeme vyjadriť $t = \frac{z-3}{4}$ a dosadiť do 1. a 2. rovnice

tejto sústavy. Po úprave dostaneme sústavu dvoch lineárnych rovníc:

$$\begin{aligned} 4x &= 4 - 5(z - 3) + 8s \\ 2y &= 4 + 3(z - 3) - 2s \end{aligned} \tag{1.4}$$

Z každej rovnice sústavy 1.4 môžeme vyjadriť parameter s a ich porovnaním získame len jednu (všeobecnú/neparametrickú) rovnicu.

$$4x + 8y - 7z + 1 = 0 \tag{1.5}$$

□

Rovnica 1.5 predstavuje **neparametrické vyjadrenie roviny** v afinnom priestore $\mathbb{A}^3$. Spôsob použitý v tomto príklade nazývame eliminačná metóda. Eliminovali sme parametre t, s v sústave 1.4 Riešenie je prezentované GeoGebra appletom [Tu](#).

Poznámka 1.3.1: Euklidovský priestor

Ak je v afinnom priestore $\mathbb{A}^n$ definovaný skalárny súčin, tak ho budeme nazývať euklidovským priestorom a symbolicky ho budeme označovať ako $\mathbb{E}^n$. Podrobnejšie informácie nájdete v našej práci [11].

1.4 Priamka a nadrovina

1.4.1 Priamka

Nech A, B sú dva rôzne body afinného priestoru. Priamka určená bodmi A a B je množina

$$p = \{A + t\overrightarrow{AB}; t \in \mathbb{R}\}.$$

Ak poznáme bod A a nenulový smerový vektor $\vec{u}$, môžeme priamku zapísať v tvare

$$p: \quad X = A + t\vec{u}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

V afinnej rovine $\mathbb{A}^2$, kde

$$A = [a_1, a_2], \quad \vec{u} = (u_1, u_2),$$

dostávame parametrické rovnice

$$x = a_1 + tu_1, \quad y = a_2 + tu_2.$$

Ak sú

$$A = [a_1, a_2], \quad B = [b_1, b_2]$$

dva rôzne body priamky, potom bod $X = [x, y]$ leží na priamke AB práve vtedy, keď sú vektory

$$\overrightarrow{AX} = (x - a_1, y - a_2)$$

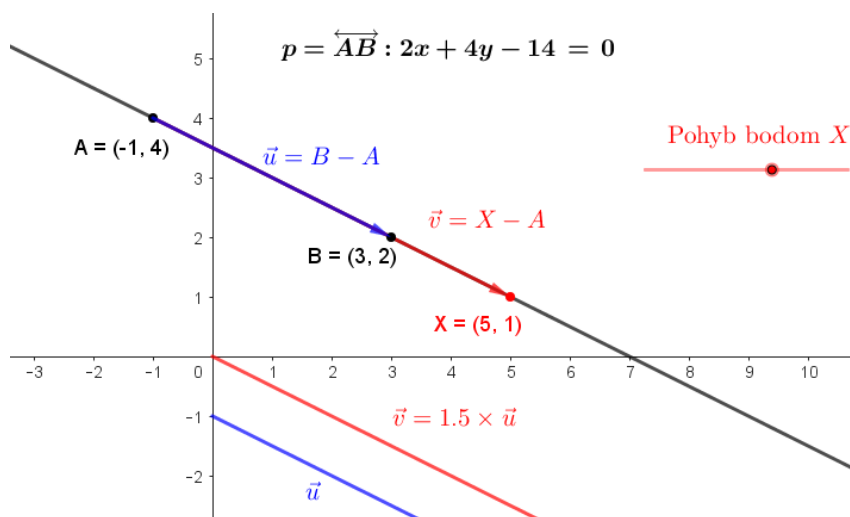
a

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$$

lineárne závislé. Teda platí rovnosť

$$\overrightarrow{AX} = k \cdot \overrightarrow{AB} \quad (1.6)$$

kde k je odpovedajúci skalár (reálne číslo). Pozrite si obrázok 1.3, ktorý korešponduje s interaktívnym appletom [Priamka určená dvoma rôznymi bodmi](#).



Obr. 1.3: Priamka určená dvoma rôznymi bodmi

Z lineárnej algebry [24] vieme, že rovnosť 1.6 je splnená práve vtedy, ak

$$\begin{vmatrix} x - a_1 & y - a_2 \\ b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Po úprave dostávame

$$(b_2 - a_2)x - (b_1 - a_1)y - (b_2 - a_2)a_1 + (b_1 - a_1)a_2 = 0.$$

Ide o všeobecnú rovnicu priamky

$$ax + by + c = 0,$$

kde $(a, b) \neq (0, 0)$.

1.4.2 Normálový vektor priamky

Ak v afinnom priestore je definovaný skalárny súčin (euklidovský priestor $\mathbb{E}^3$), tak môžeme hovoriť aj o kolmosti a normálovom vektore.

Ak

$$\vec{u} = (u_1, u_2)$$

je smerový vektor priamky, potom jedným z jej normálových vektorov je napríklad

$$\vec{n} = (-u_2, u_1),$$

pretože

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = -u_2 u_1 + u_1 u_2 = 0.$$

Analogicky môžeme postupovať pri rovine v euklidovskom priestore. Viac informácií nájdete napríklad v práci [13].

Poznámka 1.4.1: Afinné a metrické vlastnosti

Určenie priamky bodom a smerovým vektorom, incidencia bodu s priamkou a rovnobežnosť sú afinné pojmy. Na ich definovanie nepotrebujeme vzdialenosť ani uhol. Kolmosť, veľkosť vektora, vzdialenosť a uhol sú už metrické pojmy. Vyžadujú dodatočnú euklidovskú štruktúru.

Toto rozlíšenie bude dôležité pri prechode k projektívnej geometrii, v ktorej sa metrické vlastnosti vo všeobecnosti nezachovávajú.

1.4.3 Nadrovina

Nadrovina v n -rozmernom afinnom priestore je afinný podpriestor dimenzie $n - 1$.

Nech je nadrovina $\rho \subset \mathbb{A}^n$ určená n afinne nezávislými bodmi

$$A_0, A_1, \dots, A_{n-1}.$$

Bod X patrí do nadroviny ρ práve vtedy, keď sú vektory

$$\overrightarrow{A_0 A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0 A_{n-1}}, \overrightarrow{A_0 X}$$

lineárne závislé.

V súradniciach

$$X = [x_1, \dots, x_n], \quad A_i = [a_{i1}, \dots, a_{in}]$$

môžeme túto podmienku zapísať determinantovou rovnicou

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & 1 \\ a_{01} & a_{02} & \cdots & a_{0n} & 1 \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Rozvinutím determinantu dostávame rovnicu

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a_0 = 0,$$

kde

$$(a_1, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0).$$

Poznámka 1.4.2: Pohľad dopredu

V poslednom stĺpci determinantovej rovnice sa objavujú jednotky. Tento zápis nie je náhodný. V projektívnom rozšírení afinnej roviny sa práve táto dodatočná súradnica stane súčasťou homogénnych súradníc.

Determinantový zápis incidencie sa tak prirodzene preniesie z afinnej geometrie do geometrie projektívnej.

1.5 Incidencia a kolineárnosť

Jednou zo základných vlastností, ktoré budeme sledovať aj v projektívnej geometrii, je incidencia bodov a priamok.

Hovoríme, že bod A a priamka p sú *incidentné*, ak

$$A \in p.$$

Podobne môžeme hovoriť o incidencii bodu s rovinou alebo všeobecnejšie s afinným podpriestorom.

1.5.1 Kolineárne body

Definícia 1.5.1: Kolineárne body

Body A, B, C nazývame *kolineárne*, ak existuje priamka, na ktorej všetky tri body ležia.

Ak $A \neq B$, body A, B, C sú kolineárne práve vtedy, keď existuje $\lambda \in \mathbb{R}$ také, že

$$\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB}.$$

V afinnej rovine nech

$$A = [x_A, y_A], \quad B = [x_B, y_B], \quad C = [x_C, y_C].$$

Kolineárnosť môžeme vyjadriť podmienkou

$$\begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A \end{vmatrix} = 0.$$

Ekvivalentne:

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Poznámka 1.5.1: Prečo je determinantový zápis dôležitý?

Determinantové kritérium kolineárnosti bude mať v projektívnej geometrii veľmi podobný tvar. Namiesto afinných súradníc

$$[x, y]$$

budeme pracovať s homogénnymi súradnicami

$$[x_1, x_2, x_3].$$

Podmienka kolineárnosti troch projektívnych bodov sa potom zapíše jedinou determinantovou rovnicou. Už v afinnej geometrii tak vidíme algebraický zápis, ktorý sa neskôr prirodzene zovšeobecní.

1.5.2 Afinná nezávislosť bodov

Pojem lineárnej nezávislosti sa týka vektorov. Pre body afinného priestoru používame pojem *afinná nezávislosť*.

Definícia 1.5.2: Afinná nezávislosť bodov

Body

$$A_0, A_1, \dots, A_k$$

afinného priestoru nazývame *afinne nezávislé*, ak vektory

$$\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_k}$$

sú lineárne nezávislé.

V afinnej rovine sú tri body afinne nezávislé práve vtedy, keď neležia na jednej priamke. V trojrozmernom afinnom priestore sú štyri body afinne nezávislé práve vtedy, keď neležia v jednej rovine.

1.6 Riešené príklady

Príklad 1.6.1: Kolineárnosť troch bodov

Rozhodnime, či body

$$A = [1, 2], \quad B = [3, 5], \quad C = [5, 8]$$

ležia na jednej priamke.

Riešenie. Použijeme determinantové kritérium:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 5 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 1(5 - 8) - 2(3 - 5) + (24 - 25) = 0.$$

Body A, B, C sú teda kolineárne.

Rovnaký záver dostaneme z vektorov

$$\overrightarrow{AB} = (2, 3), \quad \overrightarrow{AC} = (4, 6) = 2\overrightarrow{AB}.$$

□

Príklad 1.6.2: Rovnica priamky určenej dvoma bodmi

Určme rovnicu priamky prechádzajúcej bodmi

$$A = [2, -1], \quad B = [5, 3].$$

Bod $X = [x, y]$ leží na priamke AB práve vtedy, keď

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Riešenie. Po rozvinutí determinantu dostávame

$$-4x + 3y + 11 = 0,$$

alebo ekvivalentne

$$4x - 3y - 11 = 0.$$

□

Príklad 1.6.3: Afinná nezávislosť bodov v priestore

Uvažujme body

$$A_0 = [0, 0, 0], \quad A_1 = [1, 0, 0], \quad A_2 = [0, 1, 0], \quad A_3 = [0, 0, 1].$$

Riešenie. Vektory

$$\overrightarrow{A_0A_1} = (1, 0, 0), \quad \overrightarrow{A_0A_2} = (0, 1, 0), \quad \overrightarrow{A_0A_3} = (0, 0, 1)$$

tvoria štandardnú bázu priestoru $\mathbb{R}^3$, a preto sú lineárne nezávislé.

Body

$$A_0, A_1, A_2, A_3$$

sú teda afinne nezávislé.

□

1.7 Cvičenie

1. Rozhodnite, či množina

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - 2y + z = 0\}$$

je vektorovým podpriestorom priestoru $\mathbb{R}^3$. Určte jeho dimenziu a nájdite jednu jeho bázu.

$$[\dim V = 2, \text{ napr. } \mathcal{B} = \{(2, 1, 0), (-1, 0, 1)\}]$$

2. Uvažujte množinu

$$\mathcal{A} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - 2y + z = 4\}.$$

Určte zameranie tohto afinného podpriestoru a zapíšte ho v tvare

$$\mathcal{A} = A + V.$$

$$[A = (4, 0, 0), V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - 2y + z = 0\}]$$

3. Nech

$$A = [1, 2], \quad B = [5, -2].$$

Určte bod X , ktorý je afinnou kombináciou

$$X = \frac{3}{4}A + \frac{1}{4}B.$$

Vysvetlite geometrický význam bodu X .

$$[X = [2, 1]; \text{ bod } X \text{ leží na priamke } AB]$$

4. Určte parametrické rovnice priamky prechádzajúcej bodmi

$$A = [1, -2], \quad B = [4, 3].$$

Následne určte jej všeobecnú rovnicu.

$$[x = 1 + 3t, y = -2 + 5t; 5x - 3y - 11 = 0]$$

5. Priamka je daná rovnicou

$$p: 3x - 4y + 7 = 0.$$

Určte jeden jej normálový a jeden smerový vektor.

$$[\mathbf{n} = (3, -4), \text{ napr. } \mathbf{u} = (4, 3)]$$

6. Rozhodnite pomocou determinantu, či body

$$A = [1, 1], \quad B = [2, 3], \quad C = [4, 7]$$

sú kolineárne.

[Áno.]

7. Nájdite hodnotu parametra t , pre ktorú sú body

$$A = [1, 2], \quad B = [3, 4], \quad C = [5, t]$$

kolineárne.

$[t = 6]$

8. Určte rovnicu priamky prechádzajúcej bodmi

$$A = [a_1, a_2], \quad B = [b_1, b_2]$$

pomocou determinantu

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Porovnajte výsledok s rovnicou získanou zo smerového vektora $\overrightarrow{AB}$.

$$[(a_2 - b_2)x + (b_1 - a_1)y + a_1b_2 - a_2b_1 = 0]$$

9. Rozhodnite, či body

$$A_0 = [0, 0, 0], \quad A_1 = [1, 1, 0], \quad A_2 = [0, 1, 1], \quad A_3 = [1, 0, 1]$$

sú afinne nezávislé.

$$[\text{Áno; } \det(\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \overrightarrow{A_0A_3}) = 2 \neq 0.]$$

10. Určte rovnicu roviny prechádzajúcej bodmi

$$A = [1, 0, 0], \quad B = [0, 1, 0], \quad C = [0, 0, 1].$$

Použite determinantový zápis incidencie.

$$[x + y + z - 1 = 0]$$

11. Vysvetlite, prečo rovnica

$$ax + by + c = 0$$

opisuje afinnú priamku iba vtedy, keď

$$(a, b) \neq (0, 0).$$

[Koefficienty a, b určujú nenulový normálový vektor priamky.]

12. Uvažujte dve rôzne rovnobežné priamky v afinnej rovine. Majú spoločný bod? Porovnajte túto situáciu s dvoma rôznobežnými priamkami.

Zamyslite sa, či by bolo možné afinnú rovinu rozšíriť tak, aby aj rovnobežné priamky mali spoločný bod.

[Rovnobežné priamky nemajú vlastný spoločný bod.]

Od afinnej k projektívnej geometrii

V tejto kapitole sme pracovali s vlastnosťami, ktoré nevyžadujú meranie vzdialeností ani uhlov. Incidencia bodu a priamky, kolineárnosť bodov, afinná nezávislosť a rovnobežnosť majú zmysel už v afinnej geometrii.

Pri determinantovom zápise rovnice priamky sme dostali

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Jednotka v poslednej súradnici sa zatiaľ môže javiť iba ako vhodný algebraický trik. V nasledujúcej kapitole však uvidíme, že má hlbší geometrický význam.

Afinná geometria zároveň obsahuje jednu situáciu, ktorá si vyžaduje osobitné zaobchádzanie. Dve rôznobežné priamky majú spoločný bod, zatiaľ čo dve rôzne rovnobežné priamky spoločný bod nemajú.

Projektívna geometria túto výnimku odstráni. Afinnú rovinu rozšírime o nevlastné body a nevlastnú priamku tak, aby platila jednoduchá a jednotná vlastnosť:

Každé dve rôzne priamky projektívnej roviny majú práve jeden spoločný bod.

Prechod od afinnej k projektívnej geometrii teda nebude znamenať opustenie pojmov, ktoré sme doteraz používali. Naopak, incidencia, kolineárnosť a determinantový zápis zostanú zachované. Zmení sa však priestor, v ktorom ich budeme interpretovať.

2 Projektívna rovina

Motivácia: V predchádzajúcej kapitole sme si všimli jednoduchú, ale podstatnú odlišnosť medzi dvoma situáciami. Dve rôznobežné priamky afinnej roviny majú práve jeden spoločný bod, zatiaľ čo dve rôzne rovnobežné priamky spoločný bod nemajú.

Skúsme sa však na rovnobežné priamky pozrieť inak. Predstavme si železničné koľajnice alebo okraje dlhej priamej cesty. Vieme, že sú rovnobežné, a teda sa v euklidovskej rovine nepretínajú. V perspektívnom obraze sa však zdá, že sa so vzrastajúcou vzdialenosťou približujú a smerujú k spoločnému bodu.

Tento jav poznáme aj z kresby, fotografie či architektúry. Priamky, ktoré majú v priestore rovnaký smer, sa v perspektívnom obraze zbiehajú k tomu istému úbežníku. Úbežník tak určitým spôsobom reprezentuje *smer* celej triedy rovnobežných priamok.

To vedie k prirodzenej otázke:

Možno afinnú rovinu rozšíriť o nové body tak, aby každému smeru rovnobežných priamok zodpovedal jeden spoločný bod?

Ak každému smeru priradíme jeden takýto nový bod, rovnobežné priamky prestanú predstavovať výnimočný prípad. Dve rôznobežné priamky sa pretínajú vo vlastnom bode roviny a dve rovnobežné priamky budú mať spoločný nový bod reprezentujúci ich smer.

Takéto rozšírenie afinnej roviny je základnou myšlienkou projektívnej geometrie. Nové body budeme nazývať *nevlastné (ideálne) body*. Všetky nevlastné body vytvoria nevlastnú priamku a spolu s pôvodnými bodmi a priamkami afinnej roviny vytvoria jej projektívne rozšírenie.

2.1 Nevlastné body

Motivácia z predchádzajúcej časti nás priviedla k myšlienke priradiť každému smeru rovnobežných priamok jeden nový bod. Túto predstavu teraz vyjadríme matematicky.

Nech $\mathbb{A}^2$ je afinná rovina so zameraním V . Každú priamku p môžeme zapísať v tvare

$$p = A + \langle \vec{u} \rangle,$$

kde $A \in \mathbb{A}^2$, $\vec{u} \in V$, $\vec{u} \neq \vec{0}$, a

$$\langle \vec{u} \rangle = \{ \lambda \vec{u}; \lambda \in \mathbb{R} \}$$

je jednorozmerný vektorový podpriestor priestoru V .

Smer priamky pritom nie je určený jediným konkrétnym vektorom. Ak

$$\vec{v} = \mu \vec{u}, \quad \mu \neq 0,$$

potom

$$\langle \vec{v} \rangle = \langle \vec{u} \rangle.$$

Vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ teda určujú ten istý smer.

Dve priamky

$$p = A + \langle \vec{u} \rangle, \quad q = B + \langle \vec{v} \rangle$$

sú rovnobežné práve vtedy, keď

$$\langle \vec{u} \rangle = \langle \vec{v} \rangle.$$

Vidíme teda, že smer triedy rovnobežných priamok možno jednoznačne reprezentovať jednorozmerným vektorovým podpriestorom zamerania V . Práve tomuto smeru priradíme nový bod.

Definícia 2.1.1: Nevlastný bod

Nech $\mathbb{A}^2$ je afinná rovina so zameraním V a nech $\langle \vec{u} \rangle$ je jednorozmerný vektorový podpriestor priestoru V .

Jednorozmernému vektorovému podpriestoru $\langle \vec{u} \rangle$ priradíme jeden nový bod, ktorý nazývame *nevlastný (ideálny) bod* smeru $\langle \vec{u} \rangle$.

Ak priamka

$$p = A + \langle \vec{u} \rangle$$

má smer $\langle \vec{u} \rangle$, príslušný nevlastný bod budeme označovať P_∞ . Tento bod nezávisí od voľby bodu A na priamke, ale iba od jej smeru. Všetky priamky s tým istým smerom preto majú spoločný ten istý nevlastný bod.

Poznámka 2.1.1: Poznámka

Nevlastný bod nereprezentuje konkrétny smerový vektor, ale celý smer. Nenulové vektory

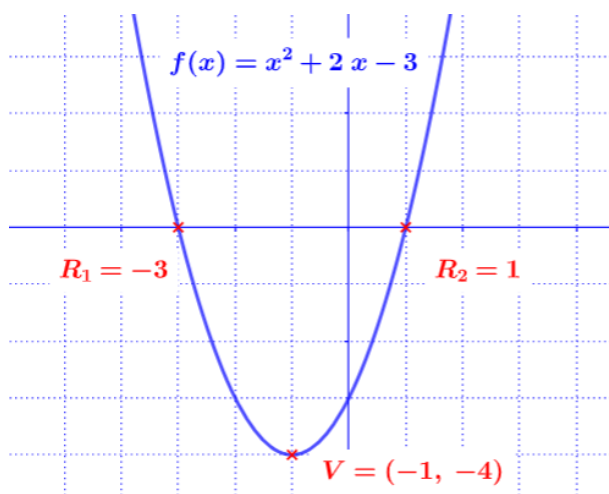
$$\vec{u}, \quad \lambda \vec{u}, \quad \lambda \neq 0,$$

určujú ten istý jednorozmerný podpriestor $\langle \vec{u} \rangle$, a teda aj ten istý nevlastný bod. Nevlastný bod preto nechápeme ako bod afinnej roviny, ktorý sa nachádza „nekonečne ďaleko“. Je to nový geometrický prvok pridaný k afinnej rovine, ktorý reprezentuje smer triedy rovnobežných priamok.

Ako prvý príklad si všimnime parabolu. Pri pohybe po parabole sa smer jej dotýčníc postupne približuje k smeru jej osi. V projektívnom rozšírení paraboly prislúcha jeden nevlastný bod, ktorý reprezentuje tento smer. Na obr. 2.1 je tento smer reprezentovaný vektorom

$$\vec{u} = (0, 1).$$

K presnému súradnicovému vyjadreniu nevlastného bodu paraboly sa vrátíme po zavedení homogénnych súradníc.



Obr. 2.1: Parabola – kvadratická funkcia

Aktiváciou appletu na adrese www.geogebra.org vymodelujte viaceré nevlastné body pre rôzne kvadratické funkcie – paraboly.

2.2 Nevlastná priamka

Každému smeru priamok afinnej roviny sme priradili práve jeden nevlastný bod. Množinu všetkých takto získaných nevlastných bodov budeme považovať za novú priamku.

Definícia 2.2.1: Nevlastná priamka

Množinu všetkých nevlastných bodov afinnej roviny nazývame *nevlastná priamka* a označujeme ju

$$p_{\infty}.$$

Každá vlastná priamka p afinnej roviny má práve jeden nevlastný bod P_{∞} . Tento bod reprezentuje jej smer.

Ak sú dve rôzne vlastné priamky p a q rovnobežné, majú rovnaký smer, a preto im prislúcha ten istý nevlastný bod:

$$p \parallel q \quad \implies \quad P_{\infty} \in p, \quad P_{\infty} \in q.$$

Ak priamky p a q rovnobežné nie sú, pretínajú sa vo vlastnom bode afinnej roviny.

Rozšírením každej vlastnej priamky o jej nevlastný bod tak odstránime rozdiel medzi dvoma prípadmi: medzi priesečníkom rôznobežných priamok a „priesečníkom“ priamok rovnobežných.

Poznámka 2.2.1: Vlastné a nevlastné prvky

Pôvodné body a priamky afinnej roviny budeme nazývať *vlastné body* a *vlastné priamky*. Nové body reprezentujúce smery nazývame *nevlastné body* a množinu všetkých nevlastných bodov nazývame *nevlastná priamka* p_{∞} .

Každá vlastná priamka má práve jeden nevlastný bod, zatiaľ čo nevlastná priamka obsahuje všetky nevlastné body.

2.3 Projektívne rozšírenie afinnej roviny

Máme teraz pripravené všetky prvky potrebné na rozšírenie afinnej roviny. K jej bodom sme pridali nevlastné body reprezentujúce jednotlivé smery a tieto body sme usporiadali do nevlastnej priamky p_{∞} .

Pôvodné body afinnej roviny budeme v tomto rozšírení nazývať *vlastné body*. Pôvodné priamky afinnej roviny budeme nazývať *vlastné priamky*.

Každú vlastnú priamku

$$p = A + \langle \vec{u} \rangle$$

rozšírime o nevlastný bod P_{∞} , ktorý reprezentuje jej smer $\langle \vec{u} \rangle$.

Projektívne rozšírenie afinnej roviny teda obsahuje

- všetky vlastné body afinnej roviny,
- všetky nevlastné body reprezentujúce jej smery,

a jeho priamkami sú

- vlastné priamky rozšírené o príslušný nevlastný bod,
- nevlastná priamka p_∞ .

V takto rozšírenej rovine už rovnobežné priamky nepredstavujú výnimočný prípad. Ak sú dve vlastné priamky rôznobežné, majú spoločný vlastný bod. Ak sú rovnobežné, majú spoločný nevlastný bod, ktorý reprezentuje ich spoločný smer.

Dostávame tak jednotnú vlastnosť:

Každé dve rôzne priamky projektívne rozšírenej roviny majú práve jeden spoločný bod.

Poznámka 2.3.1: Poznámka

Označenie *vlastný* a *nevlastný* závisí od toho, ktorú priamku projektívnej roviny zvolíme za nevlastnú priamku.

Z pohľadu samotnej projektívnej geometrie nemá nevlastná priamka výsadné postavenie. Jej vyčlenením iba určujeme, ktorú časť projektívnej roviny budeme interpretovať ako afinnú rovinu.

Historický kontext

Korene projektívnej geometrie siahajú do 17. storočia a súvisia s rozvojom perspektívy a so štúdiom kužeľosečiek. Významnú úlohu zohrali najmä práce Gérarda Desarguesa (1591–1661), ktorý skúmal geometrické vlastnosti perspektívnych zobrazení, a Blaisa Pascala (1623–1662), ktorého výsledky odhalili hlboké projektívne vlastnosti kužeľosečiek.

Ich myšlienky získali širší význam najmä v 19. storočí, keď sa projektívna geometria rozvinula do samostatnej matematickej disciplíny. K jej rozvoju významne prispeli Jean-Victor Poncelet (1788–1867), August Ferdinand Möbius (1790–1868) a ďalší geometri. Postupne sa vytvoril geometrický jazyk, v ktorom sa body v nekonečne stali prirodzenou súčasťou geometrie a jednotlivé typy kužeľosečiek bolo možné skúmať z jednotného projektívneho hľadiska.

2.4 Axiomatické zavedenie projektívnej roviny

Projektívne rozšírenie afinnej roviny nám poskytlo konkrétny model, v ktorom sa odstránil výnimočný prípad rovnobežných priamok. Každé dve rôzne priamky majú v tomto rozšírení práve jeden spoločný bod.

Pri ďalšom štúdiu však nie je vždy potrebné rozlišovať, ktoré body a priamky vznikli z pôvodnej afinnej roviny a ktoré sme k nej pridali. Do popredia vystupujú predovšetkým vzťahy medzi bodmi a priamkami, najmä vzťah incidencie.

Abstrahujeme preto od konkrétnej konštrukcie projektívneho rozšírenia a vyberme vlastnosti, ktoré budeme považovať za základné. V nami predkladanej práci budeme vychádzať z projektívneho rozšírenia, ktoré sa opiera o axiomatické východisko, ktoré je uvedené v definícii 2.4.

Iný prístup k projektívnemu rozšíreniu je čisto algebraický, ktorý je uvedený napríklad v práci [18]. V tejto práci autori definujú projektívny priestor P^n nad telesom $\mathbb{R}$ ako množinu všetkých jednorozmerných podpriestorov $(n+1)$ -rozmerného vektorového priestoru $V_{n+1}(\mathbb{R})$.

Definícia 2.4.1: Projektívna rovina - axiomatické zavedenie

Projektívna rovina je incidenčná štruktúra

$$\mathcal{P} = (\mathcal{B}, \mathcal{L}, \mathbf{I}),$$

kde $\mathcal{B}$ je množina bodov, $\mathcal{L}$ je množina priamok a $\mathbf{I}$ je vzťah incidencie medzi bodmi a priamkami, pričom platia nasledujúce axiómy:

- P1** Každými dvoma rôznymi bodmi prechádza práve jedna priamka.
- P2** Každé dve rôzne priamky majú práve jeden spoločný bod.
- P3** Existujú štyri body, z ktorých žiadne tri neležia na jednej priamke.

Axióma **P1** vyjadruje známu vlastnosť afinnej aj euklidovskej geometrie: dva rôzne body jednoznačne určujú priamku.

Axióma **P2** odstraňuje rozdiel medzi rôznobežnými a rovnobežnými priamkami. V projektívnej rovine už neexistujú dve rôzne priamky bez spoločného bodu.

Axióma **P3** zabezpečuje, že projektívna rovina nie je degenerovanou incidenčnou štruktúrou. Zaručuje existenciu dostatočne bohatej konfigurácie bodov a priamok, aby sme mohli hovoriť o rovine v geometrickom zmysle.

Poznámka 2.4.1: Body a priamky v projektívnej rovine

Z pohľadu axiomatickej projektívnej geometrie už medzi bodmi nerozlišujeme vlastné a nevlastné body a podobne nerozlišujeme vlastné a nevlastné priamky. Všetky body množiny $\mathcal{B}$ majú rovnaké postavenie a rovnako všetky priamky množiny $\mathcal{L}$. Rozlíšenie na vlastné a nevlastné prvky vznikne až vtedy, keď v projektívnej rovine zvolíme jednu priamku za nevlastnú a jej odstránením vyčleníme príslušnú afinnú rovinu.

Poznámka 2.4.2: Symetria bodov a priamok

Všimnime si nápadnú podobnosť prvých dvoch axiém:

P1: dva rôzne body určujú práve jednu priamku,

P2: dve rôzne priamky určujú práve jeden bod.

Ak v axióme **P1** zameníme slová *bod* a *priamka*, dostaneme axiómu **P2**, a naopak. Táto symetria nie je náhodná. Neskôr ju sformulujeme ako *princíp duality*, ktorý patrí medzi základné vlastnosti projektívnej geometrie.

2.5 Projektívne konfigurácie

Axiómy **P1–P3** určujú základnú incidenčnú štruktúru projektívnej roviny. Opisujú vzťahy medzi bodmi a priamkami, neurčujú však všetky vlastnosti, ktoré môže projektívna rovina spĺňať.

Pri štúdiu projektívnej geometrie sa často stretávame s konfiguráciami bodov a priamok, v ktorých z určitých incidenčných vzťahov vyplývajú ďalšie, na prvý pohľad neočakávané incidencie. Práve takéto konfigurácie odhaľujú vnútornú štruktúru projektívnej roviny.

2.5.1 Štvorroh a štvorstran

Medzi základné konfigurácie bodov a priamok v projektívnej rovine patria štvorroh a štvorstran. Tieto dve konfigurácie sú navzájom úzko prepojené a už na nich možno pozorovať symetriu medzi bodmi a priamkami, ktorá je charakteristická pre projektívnu geometriu.

Definícia 2.5.1: Úplný štvorroh

Nech A, B, C, D sú štyri body projektívnej roviny, z ktorých žiadne tri neležia na jednej priamke.

Konfiguráciu tvorenú bodmi

$$A, B, C, D$$

a šiestimi priamkami

$$AB, AC, AD, BC, BD, CD$$

nazývame *úplný štvorroh*.

Body A, B, C, D nazývame *vrcholy štvorrohu* a uvedených šesť priamok jeho *strany*.

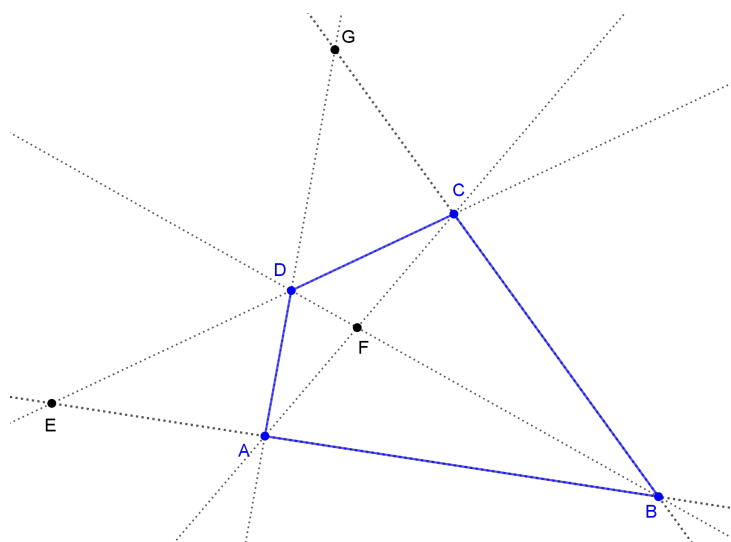
Dvojice protilahlých strán úplného štvorrohu určujú tri *diagonálne body*

$$P = AB \cap CD, \quad Q = AC \cap BD, \quad R = AD \cap BC.$$

Body P, Q, R tvoria *diagonálny trojuholník* úplného štvorrohu.

Príklad 2.5.1: Úloha

Dokážte, že diagonálne body P, Q, R úplného štvorrohu neležia na jednej priamke.



Obr. 2.2: Úplný štvorroh a jeho diagonálne body E, F, G
Interaktívny GeoGebra applet: Stvorroh.ggb.

Definícia 2.5.2: Úplný štvorstran

Nech a, b, c, d sú štyri priamky projektívnej roviny, z ktorých žiadne tri neprechádzajú jedným bodom.

Konfiguráciu tvorenú priamkami

$$a, b, c, d$$

a ich šiestimi priesečníkmi

$$a \cap b, \quad a \cap c, \quad a \cap d, \quad b \cap c, \quad b \cap d, \quad c \cap d$$

nazývame *úplný štvorstran*.

Priamky a, b, c, d nazývame *strany štvorstranu* a ich šesť priesečníkov jeho *vrcholy*.

Tri dvojice protíhlých vrcholov úplného štvorstranu určujú tri *diagonálne priamky*. Tieto priamky tvoria *diagonálny trojstran* úplného štvorstranu.

Príklad 2.5.2: Úloha

Vytvorte v programe GeoGebra interaktívny applet znázorňujúci úplný štvorstran a jeho diagonálne priamky.

Poznámka 2.5.1: Štvorroh a štvorstran

Úplný štvorroh a úplný štvorstran majú navzájom symetrickú stavbu:

úplný štvorroh	úplný štvorstran
4 vrcholy	4 strany
6 strán	6 vrcholov
3 diagonálne body	3 diagonálne priamky

Táto zámena úloh bodov a priamok je jedným z prvých prejavov symetrie, ktorú neskôr presnejšie vyjadríme princípom duality.

Didaktická poznámka. Úplný štvorroh a úplný štvorstran predstavujú vhodnú dvojicu konfigurácií na prvé oboznámenie sa s princípom duality v projektívnej geometrii. Študenti môžu najskôr vytvoriť konštrukciu úplného štvorrohu a následne sa pokúsiť systematicky zameniť body za priamky, spojnice za priesečníky a kolineárnosť za konkurentnosť priamok. Takýto postup umožňuje vnímať dualitu nielen ako formálne pravidlo, ale ako jeden zo základných štruktúrnych princípov projektívnej geometrie. Viac na 2.4.

Medzi najvýznamnejšie patria konfigurácie spojené s Desarguesovou a Pappovou vetou. Ich význam nespočíva iba v samotných geometrických tvrdeniach. Ukazuje sa, že ich platnosť súvisí s algebraickou štruktúrou projektívnej roviny.

Je pritom dôležité zdôrazniť, že Desarguesova ani Pappova veta *nie sú dôsledkami samotných axiém P1–P3*. Existujú projektívne roviny, v ktorých tieto vety neplatia. Ich platnosť preto predstavuje dodatočnú vlastnosť projektívnej roviny.

Ako prvú preskúmame konfiguráciu dvoch trojuholníkov, ktorú opisuje Desarguesova veta.

2.5.2 Desarguesova veta

Uvažujme dva trojuholníky

$$ABC \quad \text{a} \quad A'B'C'$$

v projektívnej rovine. Predpokladajme, že priamky spájajúce zodpovedajúce si vrcholy

$$AA', \quad BB', \quad CC'$$

prechádzajú jedným bodom S :

$$S = AA' \cap BB' \cap CC'.$$

Hovoríme, že trojuholníky ABC a $A'B'C'$ sú *perspektívne z bodu* S .

Teraz zostrojme priesečníky zodpovedajúcich si strán:

$$P = AB \cap A'B',$$

$$Q = BC \cap B'C',$$

$$R = CA \cap C'A'.$$

Desarguesova veta vyjadruje pozoruhodný vzťah medzi týmito dvoma konfiguráciami.

Veta 2.5.1: Desarguesova veta

Ak sú dva trojuholníky $\triangle ABC$ a $\triangle A'B'C'$ perspektívne z bodu, potom priesečníky ich zodpovedajúcich si strán

$$P = AB \cap A'B', \quad Q = BC \cap B'C', \quad R = CA \cap C'A'$$

ležia na jednej priamke.

Priamku obsahujúcu body P, Q, R nazývame *osou perspektivity*. Trojuholníky ABC a $A'B'C'$ sú v tomto prípade *perspektívne z priamky*.

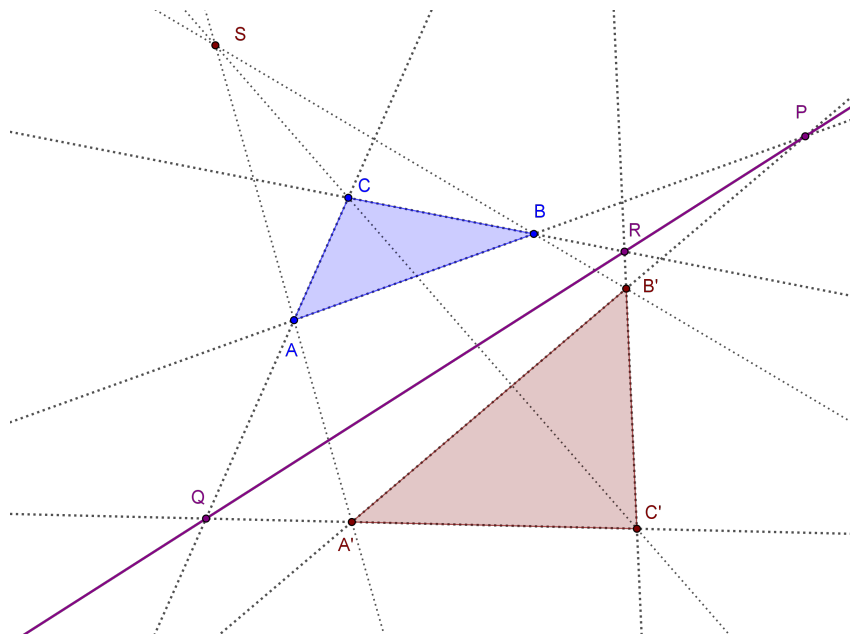
Desarguesova veta teda spája dve podoby perspektívnosti:

perspektívnosť z bodu $\implies$ perspektívnosť z priamky.
--

Poznámka 2.5.2: Desarguesovská projektívna rovina

Desarguesova veta neplatí v každej projektívnej rovine určenej axiómami P1–P3. Reálna projektívna rovina je desarguesovská.

Pri axiomatickom budovaní desarguesovskej projektívnej geometrie možno platnosť Desarguesovej vety požadovať ako ďalšiu axiómu.



Obr. 2.3: Desarguesova veta
Interaktívny GeoGebr a applet: [DesarguesAxioma.ggb](#).

Didaktická poznámka. V dynamickom modeli 2.3 možno meniť polohu vrcholov oboch trojuholníkov pri zachovaní ich perspektívnosti z bodu S . Sledujte polohu bodov

$$P = AB \cap A'B', \quad Q = BC \cap B'C', \quad R = CA \cap C'A'.$$

Pri pohybe vrcholov overujte, že body P, Q, R zostávajú kolineárne. Experiment tak umožňuje dynamicky pozorovať vlastnosť, ktorú vyjadruje Desarguesova veta.

Definícia 2.5.3: Desarguesovská rovina

Projektívna rovina, v ktorej platí Desarguesova veta, sa nazýva *desarguesovská projektívna rovina*.

2.5.3 Pappova veta

Ďalšou významnou incidenčnou konfiguráciou projektívnej geometrie je konfigurácia spojená s Pappovou vetou.

Uvažujme dve rôzne priamky p a q . Na priamke p zvolme tri rôzne body

$$A, B, C$$

a na priamke q tri rôzne body

$$A', B', C'.$$

Zostrojme priesečníky

$$P = AB' \cap A'B,$$

$$Q = AC' \cap A'C,$$

$$R = BC' \cap B'C.$$

Na prvý pohľad nie je zrejmý žiadny dôvod, prečo by takto získané body P, Q, R mali ležať na jednej priamke. Práve túto prekvapujúcu incidenčnú vlastnosť vyjadruje Pappova veta.

Veta 2.5.2: Pappova veta

Nech A, B, C sú tri rôzne body jednej priamky a A', B', C' tri rôzne body druhej priamky. Potom body

$$P = AB' \cap A'B, \quad Q = AC' \cap A'C, \quad R = BC' \cap B'C$$

ležia na jednej priamke.

Priamku obsahujúcu body P, Q, R nazývame *Pappovou priamkou* danej konfigurácie.

Poznámka 2.5.3: Pappovská projektívna rovina

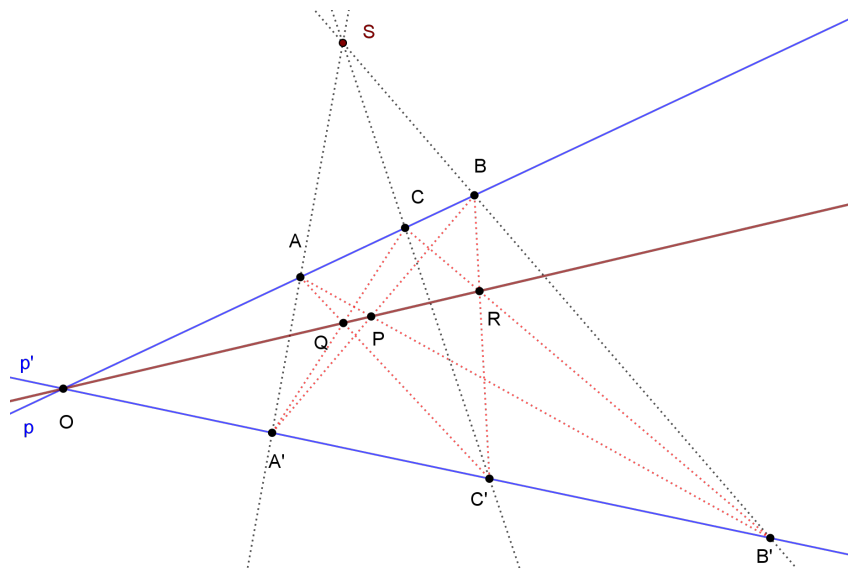
Pappova veta neplatí v každej projektívnej rovine určenej axiómami **P1–P3**. Reálna projektívna rovina je pappovská.

Pri axiomatickom budovaní projektívnej roviny možno platnosť Pappovej vety požadovať ako ďalšiu axiómu.

Definícia 2.5.4: Pappovská rovina

Projektívna rovina, v ktorej platí Pappova veta, sa nazýva *pappovská projektívna rovina*.

Didaktická poznámka. Pri práci s dynamickou konštrukciou 2.4 možno meniť polohu bodov A, B, C, A', B', C' na príslušných priamkach a sledovať, že body P, Q, R zostávajú kolineárne. Experiment vedie prirodzene k otázke, ktoré vlastnosti konštrukcie sú podstatné a ktoré závisia iba od konkrétnej polohy bodov.



Obr. 2.4: Pappova konfigurácia
Interaktívny GeoGebra applet: [PappovaAxioma.ggb](https://www.geogebra.org/m/PappovaAxioma.ggb).

2.5.4 Vzťah Pappovej a Desarguesovej vlastnosti

Desarguesova a Pappova veta predstavujú dve významné dodatočné incidenčné vlastnosti projektívnych rovín. Medzi nimi existuje dôležitý vzťah.

Veta 2.5.3: Pappos a Desargues

Každá pappovská projektívna rovina je desarguesovská.

Opačné tvrdenie vo všeobecnosti neplatí. Existujú desarguesovské projektívne roviny, ktoré nie sú pappovské. Vzťah medzi nimi možno znázorniť diagramom

$\text{pappovská projektívna rovina} \implies \text{desarguesovská projektívna rovina} \implies \text{projektívna rovina}$
--

Pre reálnu projektívnu rovinu, ktorou sa budeme v ďalšom texte zaoberať predovšetkým, platia obe vlastnosti.

2.6 Stredová kolineácia

Motivácia: Každý, kto niekedy kreslil 3D kocku na papier, intuitívne použil princíp stredovej kolineácie. Prečo sa kocka javí ako „skreslená“? Stredová kolineácia vystihuje zobrazenie z priestoru na rovinu – tak, ako ho poznáme z fotografie, maľby či architektúry. Je to most medzi euklidovskou geometriou a vizuálnym vnímaním priestoru.

Projektívna geometria vznikala v úzkej súvislosti s perspektívnym zobrazovaním. Pri stredovom premietaní sa body jednej roviny zobrazujú do druhej roviny pomocou priamok prechádzajúcich pevným bodom.

Nech α a α' sú dve rôzne roviny projektívneho priestoru a nech

$$S \notin \alpha, \quad S \notin \alpha'.$$

Pre bod $A \in \alpha$ zostrojme priamku SA . Jej priesečník s rovinou α' označme A' .

Definícia 2.6.1: Stredové premietanie

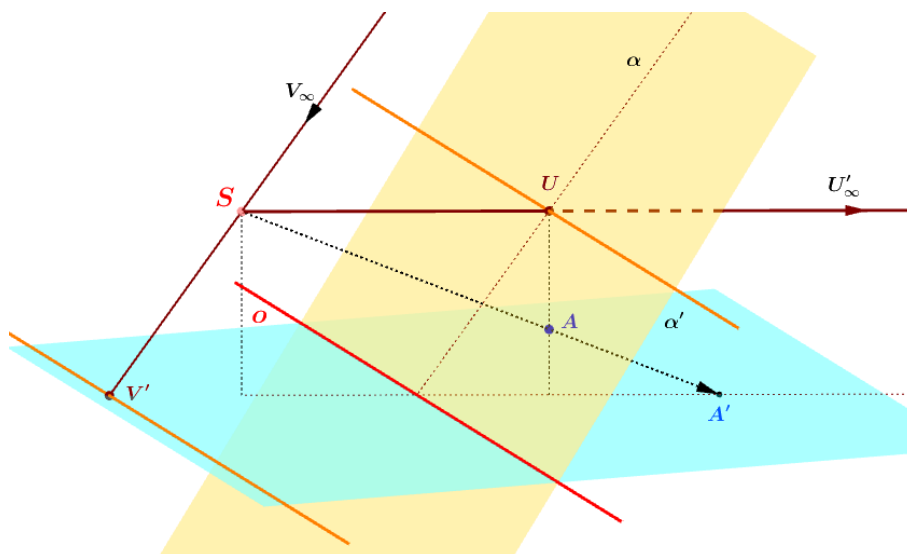
Zobrazenie

$$\varphi : \alpha \longrightarrow \alpha', \quad A \longmapsto A',$$

pri ktorom

$$A' = SA \cap \alpha',$$

nazývame *stredové premietanie* roviny α do roviny α' so stredom S .



Obr. 2.5: Stredové premietanie roviny α do roviny α' . [Applet Tu](#).

Body S , A , A' sú teda kolineárne.

Nech sú dané dve rôznobežné roviny α, α' v euklidovskom priestore $\mathbb{E}^3$. Zvoľme bod $S \in \mathbb{E}^3$, ktorý nepatrí ani jednej z rovín. Nech o je ich priesečnica. Pozrite obrázok 2.5.

Definícia 2.6.2

Zobrazenie

$$\phi : \alpha \rightarrow \alpha'; A \mapsto A',$$

kde body S, A, A' sú kolíneárne, nazývame *stredová kolíneácia*. Bod S sa nazýva stred kolíneácie, priamka o priesečnica rovín α, α' sa nazýva os kolíneácie.

Ak

$$o = \alpha \cap \alpha',$$

potom každý bod $X \in o$ patrí súčasne do oboch rovín. Preto

$$SX \cap \alpha' = X$$

a teda

$$\varphi(X) = X.$$

Priamku o nazývame *osou perspektivity*. Všetky jej body sú samodružné.

Stredové premietanie medzi dvoma rovinami môžeme vhodným projektívnym stotožnením oboch rovín preniesť do jednej projektívnej roviny π . Dostaneme tak projektívnu transformáciu roviny π na seba.

Definícia 2.6.3: Stredová kolíneácia

Kolíneáciu projektívnej roviny na seba, ktorá má stred S a os o , nazývame *stredová kolíneácia* alebo *perspektívna kolíneácia*.

Jej stred S je samodružný bod a každá priamka prechádzajúca bodom S sa zobrazuje sama na seba. Os o je samodružná priamka a každý jej bod je samodružný.

Ak okrem stredu S a osi o poznáme jednu dvojicu zodpovedajúcich si bodov

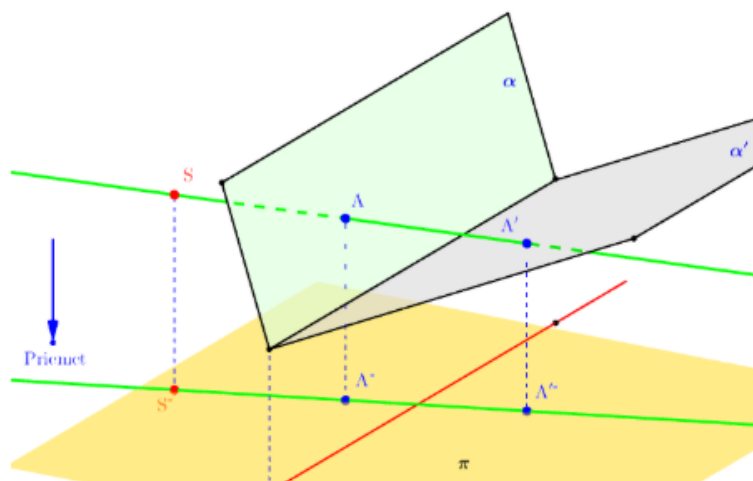
$$A \mapsto A',$$

budeme príslušnú stredovú kolíneáciu označovať

$$K(S, o, A \mapsto A').$$

Pritom pre dvojicu zodpovedajúcich si bodov mimo osi platí

$$S, A, A' \text{ sú kolíneárne.}$$



Obr. 2.6: Stredová (perspektívna) kolíneácia zobrazená v jednej projektívnej rovine π .

V stredovej kolíneácii platí:

1. Každý bod $A \in \alpha$, $A \neq U$, má obraz $A' \in \alpha'$, pričom body S, A, A' ležia na jednej priamke.

$$\forall A \in \alpha \setminus \{U\} \Rightarrow A' \in \alpha'$$

2. Existuje bod $U \in \alpha$, pre ktorý je $\overleftrightarrow{SU} \parallel \alpha'$, a ktorý sa zobrazí do nevlastného bodu α' :

$$U \mapsto U_{\infty} \in \alpha'$$

Takýto bod U nazývame **úbežník 1. druhu**. Naopak, obrazom nevlastného bodu z roviny α môže byť vlastný bod $V' \in \alpha'$, pričom $V_{\infty} \mapsto V'$ – tento bod V' nazývame **úbežník 2. druhu**.

Priamky, ktoré sú obrazom alebo vzorom nevlastných priamok, nazývame **úbežnice**.

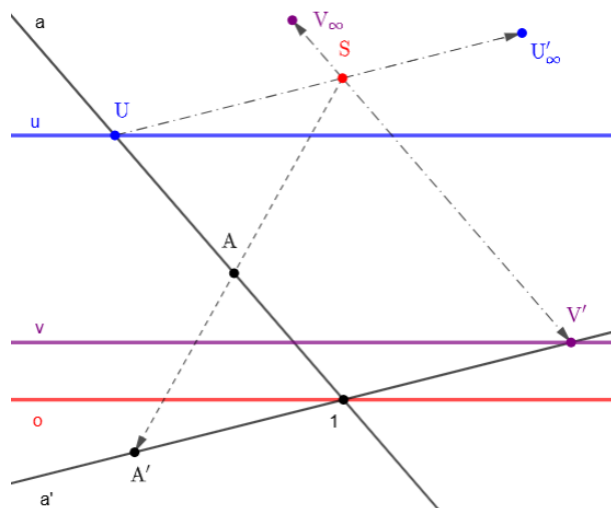
Príklad 2.6.1

V perspektívnej kolíneácii $\mathcal{K}(S, o, A \rightarrow A')$ zostrojte obe úbežnice.

Riešenie. Riešenie formou konštrukcie „krok za krokom“ nájdete [Tu](#). □

Poznámka 2.6.1

- Perspektívna kolíneácia v $\mathbb{E}^3$ je bijekcia medzi bodmi dvoch rovín α, α' .
- Obraz priamky a jej vzor sa pretínajú v osi kolíneácie.
- Deliaci pomer nie je invariantom kolíneácie, ale **dvojpomer** áno.



Obr. 2.7: Konštrukcia úbežníc v kolineácii

Definícia 2.6.4: Dvojpomer

Nech $(A, B; C, D)$ body ležia na jednej priamke. Dvojpomer usporiadanej štvorice bodov $(A, B; C, D)$ je definovaný ako číslo $(A, B; C, D) = \frac{AC \cdot BD}{BC \cdot AD}$, kde XY označuje orientovanú vzdialenosť medzi bodmi X, Y .

Didaktická poznámka. Projektívna geometria zjednocuje vlastné aj nevlastné objekty. Nevznikajú výnimky: každé dve priamky sa pretínajú.

Tento jednotný prístup zjednodušuje formuláciu a klasifikáciu geometrických útvarov.

Z projektívneho hľadiska sa elipsa, parabola a hyperbola nejavia ako tri navzájom oddelené typy kriviek. Ich rozdiel v afinnej rovine súvisí s ich vzťahom k nevlastnej priamke. K tejto myšlienke sa vrátíme pri projektívnej klasifikácii kužeľosečiek.

Ako uvádza J. Čižmár v práci [7]:

💡 **Filozofické pozastavenie** „Projektívna geometria nás oslobodzuje od nepotrebných metrických obmedzení a vyzdvihuje tie vlastnosti útvarov, ktoré sú invariantné vzhľadom na širokú triedu transformácií. Je to geometria pohľadu – geometria, kde je rovnobežnosť len špeciálnym prípadom prieniku.“

— J. Čižmár, *Grupy geometrických transformácií*

2.7 Cvičenie

1. V afinnej rovine sú dané priamky

$$p : 2x - y + 3 = 0, \quad q : 2x - y - 4 = 0.$$

Rozhodnite, či majú v afinnej rovine spoločný bod. Ak nie, určte smer, ktorý ich spoločný nevlastný bod reprezentuje.

[Priamky sú rovnobežné; spoločný nevlastný bod reprezentuje smer $(1, 2)$.]

2. Určte nevlastný bod priamky, ktorá prechádza bodmi

$$A = [1, 2], \quad B = [4, 5].$$

Výsledok zatiaľ zapíšte pomocou smerového vektora priamky.

[Nevlastný bod reprezentuje smer $(1, 1)$.]

3. Vysvetlite, prečo všetky navzájom rovnobežné priamky afinnej roviny majú po projektívnom rozšírení spoločný práve jeden nevlastný bod.

Ako sa zmení tento nevlastný bod, ak zmeníme smer priamok?

[Nevlastný bod závisí iba od smeru triedy rovnobežných priamok.]

4. Rozhodnite, ktoré z nasledujúcich tvrdení vyplývajú priamo z axióm projektívnej roviny:

- a) Každými dvoma rôznymi bodmi prechádza práve jedna priamka.
- b) Každé dve rôzne priamky majú práve jeden spoločný bod.
- c) Existujú štyri body, z ktorých žiadne tri neležia na jednej priamke.
- d) Každé dve trojice perspektívnych trojuholníkov sú perspektívne aj z priamky.

[a), b), c); tvrdenie d) je obsahom Desarguesovej vlastnosti.]

5. Formulujte tvrdenia duálne k nasledujúcim tvrdeniam:

- a) Dva rôzne body určujú práve jednu priamku.
- b) Tri rôzne kolineárne body ležia na jednej priamke.
- c) Bod A leží na priamke p .

[a) Dve rôzne priamky určujú práve jeden bod; b) tri rôzne priamky prechádzajú jedným bodom; c) priamka p prechádza bodom A .]

6. Nech A, B, C, D tvoria úplný štvorroh.

- a) Vypíšte jeho šesť strán.
- b) Určte tri diagonálne body.
- c) Sformulujte duálny objekt k úplnému štvorrohu.

[AB, AC, AD, BC, BD, CD ; diagonálne body sú priesečníky troch dvojíc protiľahlých strán; duálnym objektom je úplný štvorstran.]

7. Zostrojte úplný štvorroh zo štyroch bodov, z ktorých žiadne tri nie sú kolineárne, a vyznačte jeho tri diagonálne body.

Potom zostrojte duálnu konfiguráciu – úplný štvorstran.

8. Dva trojuholníky ABC a $A'B'C'$ sú perspektívne z bodu S , teda

$$AA' \cap BB' \cap CC' = S.$$

Označte

$$P = AB \cap A'B', \quad Q = BC \cap B'C', \quad R = CA \cap C'A'.$$

Čo možno podľa Desarguesovej vety povedať o bodoch P, Q, R ?

[Body P, Q, R sú kolineárne.]

9. Formulujte **duálnu verziu Desarguesovej vety**, teda tvrdenie, v ktorom sa navzájom vymenia úlohy bodov a priamok.

Vytvorte v GeoGebre applet, ktorý túto duálnu situáciu znázorňuje.

10. V rozšírenej euklidovskej rovine sú dané štyri body A, B, P, Q , z ktorých žiadne tri nie sú kolineárne.

Nech

$$\begin{aligned} C &= AB \cap PQ, & R &= AQ \cap PB, & S &= AP \cap BQ, \\ D &= RS \cap AB, & T &= RS \cap PQ, & U &= AT \cap PD. \end{aligned}$$

Dokážte, že body

$$R, U, C$$

sú kolineárne.

Pomoc: Pri dôkaze využite Desarguesovu vetu.

[Body R, U, C sú kolineárne.]

11. Nech A, B, C sú tri rôzne kolineárne body rozšírenej euklidovskej roviny a P, Q, P', Q' sú také body, že priamky

$$AB, \quad PQ, \quad P'Q'$$

sú rôzne a pretínajú sa v bode C .

Nech

$$R = AQ \cap PB, \quad S = AP \cap BQ, \quad D = RS \cap AB,$$

a

$$R' = AQ' \cap P'B, \quad S' = AP' \cap BQ', \quad D' = R'S' \cap AB.$$

Dokážte, že

$$D = D'.$$

Pomoc: Pri dôkaze využite Desarguesovu vetu.

$$[D = D'.]$$

12. Na dvoch rôznych priamkach p, q zvolte body

$$A, B, C \in p, \quad A', B', C' \in q.$$

Označte

$$P = AB' \cap A'B, \quad Q = AC' \cap A'C, \quad R = BC' \cap B'C.$$

Čo možno povedať o bodoch P, Q, R ? Ktorá veta toto tvrdenie vyjadruje?

[Body P, Q, R sú kolineárne; Pappova veta.]

13. Vytvorte dynamický applet, ktorý interpretuje Pappovu vetu. Pohybujte vstupnými bodmi po oboch nosných priamkach a sledujte, či zostáva záver vety zachovaný.

14. Porovnajte Desarguesovu a Pappovu vetu.

Určte, ktoré z nasledujúcich pojmov alebo vlastností sa v nich prirodzene objavujú:

perspektívnosť z bodu	perspektívnosť z priamky
kolinearita	konkurentnosť

[Desarguesova veta prepája perspektívnosť z bodu a z priamky; v Pappovej vete je záverom kolinearita troch priesečníkov.]

15. Nech $\mathcal{K}$ je stredová kolíneácia so stredom S a osou o . Bod X neleží ani na osi o , ani nie je totožný so stredom S .

Na ktorých priamkach musí ležať jeho obraz X' ? Čo možno povedať o bodoch osi o ?

$[X' \in SX; \text{každý bod osi } o \text{ je samodružný.}]$

16. Pri stredovej kolineácii $\mathcal{K}(S; o)$ je daný bod A a jeho obraz A' .

Zostrojte obraz bodu X , ktorý neleží na osi o ani na priamke AA' .

17. **Určenosť perspektívnej kolineácie.**

Zo zadaných prvkov dourčite stred kolineácie, os kolineácie a potrebné dvojice zodpovedajúcich si prvkov:

- a) os kolineácie o a dva páry zodpovedajúcich si bodov A, A' a B, B' ;
- b) tri páry zodpovedajúcich si bodov A, A', B, B', C, C' ;
- c) stred kolineácie S , os kolineácie o a úbežník 1. druhu U .

3 Homogénna súradnicová sústava

V predchádzajúcej kapitole sme projektívnu rovinu vytvorili rozšírením afinnej roviny o nevlastné body a nevlastnú priamku. Každému smeru afinných priamok sme priradili jeden nevlastný bod, takže aj dve rovnobežné priamky majú v projektívnej rovine spoločný bod.

Tento geometrický pohľad však prirodzene vedie k otázke:

Ako možno vlastné aj nevlastné body projektívnej roviny opísať pomocou jednej súradnicovej sústavy?

Bežné kartézske súradnice

$$(x, y)$$

opisujú iba vlastné body afinnej roviny. Nevlastné body, ktoré reprezentujú smery, pomocou nich nemožno vyjadriť ako body s konečnými súradnicami.

Potrebuje preto súradnicový systém, ktorý nebude oddeľovať vlastné a nevlastné body, ale umožní pracovať s nimi jednotným spôsobom. Takýto opis poskytujú *homogénne súradnice*.

Základná myšlienka je jednoduchá. Bod afinnej roviny so súradnicami

$$(x, y)$$

zapišeme pomocou trojice

$$[x : y : 1].$$

Táto trojica však nebude určená jednoznačne. Rovnaký bod budú reprezentovať všetky nenulové násobky tejto trojice:

$$[x : y : 1] = [\lambda x : \lambda y : \lambda], \quad \lambda \neq 0.$$

Práve táto zdanlivá nejednoznačnosť umožní zahrnúť do súradnicového opisu aj nevlastné body a vytvoriť jednotný analytický model projektívnej roviny.

3.1 Homogénne súradnice bodu

Uvažujme bod A afinnej roviny s kartézskymi súradnicami

$$A = (x, y).$$

Priradíme mu trojicu

$$(x, y, 1) \in \mathbb{R}^3.$$

Ak túto trojicu vynásobíme ľubovoľným nenulovým reálnym číslom λ , dostaneme

$$(\lambda x, \lambda y, \lambda).$$

Po vydelení tretej súradnice číslom λ sa opäť dostaneme k bodu

$$(x, y).$$

Trojice

$$(x, y, 1), \quad (\lambda x, \lambda y, \lambda), \quad \lambda \neq 0,$$

preto budeme považovať za rôzne reprezentácie toho istého projektívneho bodu.

Definícia 3.1.1: Homogénne súradnice bodu

Nech

$$(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}.$$

Všetky nenulové násobky tejto trojice

$$(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3), \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

reprezentujú ten istý bod projektívnej roviny.

Tento bod zapisujeme

$$A = [x_1 : x_2 : x_3]$$

a čísla x_1, x_2, x_3 nazývame jeho *homogénne súradnice*.

Platí teda

$$[x_1 : x_2 : x_3] = [\lambda x_1 : \lambda x_2 : \lambda x_3], \quad \lambda \neq 0.$$

Poznámka 3.1.1: Prečo sú homogénne súradnice určené až na násobok?

Zápis

$$A = [x_1 : x_2 : x_3]$$

neoznačuje jednu konkrétnu trojicu reálnych čísel. Označuje všetky nenulové trojice, ktoré sú navzájom proporcionálne.

Matematickú korektnosť tohto zápisu môžeme vyjadriť pomocou ekvivalenčnej relácie. Na množine

$$\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$$

definujeme reláciu

$$(x_1, x_2, x_3) \sim (y_1, y_2, y_3)$$

práve vtedy, keď existuje

$$\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

také, že

$$(y_1, y_2, y_3) = \lambda(x_1, x_2, x_3).$$

Táto relácia je reflexívna, symetrická a tranzitívna, a teda je reláciou ekvivalencie. Rozkladá množinu $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ na triedy ekvivalencie. Každá takáto trieda predstavuje jeden bod projektívnej roviny.

Zápis

$$A = [x_1 : x_2 : x_3]$$

preto označuje triedu

$$[(x_1, x_2, x_3)] = \{(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3); \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}.$$

Ľubovoľnú usporiadanú trojicu reálnych čísel (x, y, z) patriacu do triedy $[x_1 : x_2 : x_3]$ rozkladu nazývame **reprezentant bodu** $X = [x_1, x_2, x_3]$.

Geometricky všetky vektory

$$\lambda(x_1, x_2, x_3), \quad \lambda \neq 0,$$

ležia na tej istej priamke v $\mathbb{R}^3$ prechádzajúcej počiatkom. Projektívny bod teda môžeme interpretovať ako priamku v $\mathbb{R}^3$ prechádzajúcu počiatkom:

bod projektívnej roviny	$\longleftrightarrow$	priamka v $\mathbb{R}^3$ prechádzajúca počiatkom.
-------------------------	-----------------------	---

Príklad 3.1.1: Rôzne reprezentanty toho istého bodu

Trojice

$$(2, 4, 1), \quad (4, 8, 2), \quad (-2, -4, -1)$$

reprezentujú ten istý projektívny bod, pretože sú navzájom nenulovými násobkami. Môžeme teda písať

$$[2 : 4 : 1] = [4 : 8 : 2] = [-2 : -4 : -1].$$

Naopak, bod

$$[2 : 4 : 1]$$

nie je totožný s bodom

$$[2 : 4 : 2],$$

pretože príslušné trojice nie sú proporcionálne.

3.1.1 Vlastné a nevlastné body

Homogénne súradnice umožňujú jednotným spôsobom opisovať vlastné aj nevlastné body projektívnej roviny. Rozhodujúcu úlohu pritom zohráva tretia homogénna súradnica.

Uvažujme projektívny bod

$$A = [x_1 : x_2 : x_3].$$

Ak $x_3 \neq 0$, môžeme všetky homogénne súradnice vydeliť číslom x_3 :

$$[x_1 : x_2 : x_3] = \left[\frac{x_1}{x_3} : \frac{x_2}{x_3} : 1 \right].$$

Takýto bod teda zodpovedá bodu afinnej roviny s kartézskymi súradnicami

$$\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3} \right).$$

Definícia 3.1.2: Vlastný bod

Projektívny bod

$$A = [x_1 : x_2 : x_3]$$

nazývame *vlastný*, ak

$$x_3 \neq 0.$$

Každý vlastný bod možno zapísať v tvare

$$A = [x : y : 1].$$

Prechod od homogénnych súradníc

$$[x_1 : x_2 : x_3], \quad x_3 \neq 0,$$

k reprezentantu

$$\left[\frac{x_1}{x_3} : \frac{x_2}{x_3} : 1 \right]$$

nazývame *normalizáciou homogénnych súradníc*.

Príklad 3.1.2: Normalizácia homogénnych súradníc

Bod

$$A = [6 : 9 : 3]$$

je vlastný, pretože jeho tretia homogénna súradnica je nenulová. Po vydelení všetkých súradníc číslom 3 dostaneme

$$A = [2 : 3 : 1].$$

Bodu A teda v afinnej rovine zodpovedá bod s kartézskymi súradnicami

$$A = (2, 3).$$

Pre vlastný bod budeme používať normalizáciu, pri ktorej volíme reprezentanta s tretou homogénnou súradnicou rovnou 1:

Ak je naopak (nevlastný bod)

$$x_3 = 0,$$

normalizácia na tvar $[x : y : 1]$ nie je možná. Dostávame bod

$$A_\infty = [x_1 : x_2 : 0],$$

kde aspoň jedno z čísel x_1, x_2 je nenulové.

Definícia 3.1.3: Nevlastný bod

Projektívny bod

$$A_\infty = [x_1 : x_2 : 0], \quad (x_1, x_2) \neq (0, 0),$$

nazývame *nevlastný bod*.

Keďže homogénne súradnice sú určené iba až na nenulový násobok, platí

$$[x_1 : x_2 : 0] = [\lambda x_1 : \lambda x_2 : 0], \quad \lambda \neq 0.$$

Nevlastný bod teda nezávisí od veľkosti vektora

$$(x_1, x_2),$$

ale iba od jeho smeru. Bod

$$[x_1 : x_2 : 0]$$

preto reprezentuje smer všetkých nenulových vektorov

$$\lambda(x_1, x_2), \quad \lambda \neq 0.$$

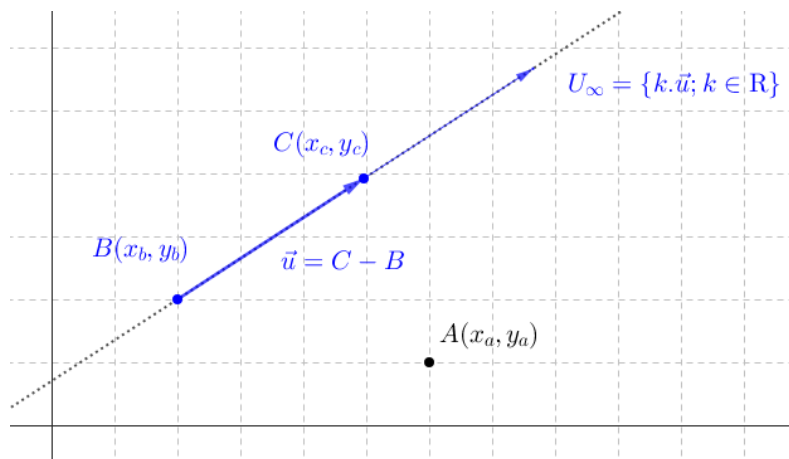
Poznámka 3.1.2: Geometrický a súradnicový pohľad

V predchádzajúcej kapitole sme nevlastný bod zaviedli geometricky ako bod reprezentujúci smer triedy rovnobežných priamok.

Homogénne súradnice teraz poskytujú algebraický zápis toho istého pojmu:

$$\text{smer } (x_1, x_2) \longleftrightarrow [x_1 : x_2 : 0].$$

Proporcionálne smerové vektory určujú ten istý nevlastný bod.



Obr. 3.1: Homogénne súradnice smeru a príslušného nevlastného bodu.

Obr. 3.1 ukazuje, ako možno homogénne súradnice nevlastného bodu získať priamo zo smerového vektora.

Nech B a C sú dva rôzne vlastné body afinnej roviny, ktoré v homogénnych súradniciach zapíšeme v normalizovanom tvare

$$B = [b_1 : b_2 : 1], \quad C = [c_1 : c_2 : 1].$$

Orientovaná úsečka $\overrightarrow{BC}$ určuje smerový vektor

$$\vec{u} = (c_1 - b_1, c_2 - b_2).$$

Tomuto smeru zodpovedá nevlastný bod

$$U_\infty = [c_1 - b_1 : c_2 - b_2 : 0]. \quad (3.1)$$

Nulová tretia súradnica vzniká prirodzene. Pri normalizovanom homogénnom zápise majú oba vlastné body tretiu súradnicu rovnú 1, a preto je rozdiel tretích súradníc

$$1 - 1 = 0.$$

Ak smerový vektor vynásobíme ľubovoľným nenulovým číslom λ , dostaneme proporcionálny vektor a tomu zodpovedajúci homogénny reprezentant

$$[\lambda(c_1 - b_1) : \lambda(c_2 - b_2) : 0].$$

Ide však stále o ten istý nevlastný bod.

Príklad 3.1.3: Nevlastný bod ako smer

Vektory

$$(1, 2), \quad (2, 4), \quad (-3, -6)$$

sú navzájom proporcionálne, a preto reprezentujú ten istý projektívny smer. Určujú teda ten istý nevlastný bod:

$$[1 : 2 : 0] = [2 : 4 : 0] = [-3 : -6 : 0].$$

Tento nevlastný bod reprezentuje spoločný smer všetkých afinných priamok, ktorých smerový vektor je nenulovým násobkom vektora $(1, 2)$.

Nevlastný bod teda nezávisí od konkrétneho nenulového vektora zvoleného na reprezentáciu smeru. Proporcionálne nenulové vektory určujú ten istý nevlastný bod.

Bod

$$[x_1 : x_2 : 0]$$

preto reprezentuje smer určený všetkými nenulovými vektormi

$$\lambda(x_1, x_2), \quad \lambda \neq 0.$$

Poznámka 3.1.3: Zapamätajte si

Homogénne súradnice umožňujú jednotne opísať vlastné aj nevlastné body projektívnej roviny:

$$[x_1 : x_2 : x_3] \longrightarrow \begin{cases} x_3 \neq 0 & \text{vlastný bod,} \\ x_3 = 0 & \text{nevlastný bod.} \end{cases}$$

Pre nevlastný bod navyše platí

$$[x_1 : x_2 : 0] \longleftrightarrow \text{smer } (x_1, x_2).$$

Uvedieme príklad, ktorý sa viaže na pojem *reprezentant bodu*. Nech je daná trojica bodov $O_0 = [2, 5, 1]$, $O_1 = [6, -4, 2]$, $O_2 = [1, 3, 0]$, ktorá je zrejme lineárne nezávislá. Každý bod X projektívnej roviny tvorí s takouto trojicou bodov množinu lineárne závislých bodov. Preto ho možno vyjadriť ako lineárnu kombináciu

$$X = \rho_0 O_0 + \rho_1 O_1 + \rho_2 O_2.$$

Príklad 3.1.4: Vyjadrenie reprezentanta bodu

Uvažujme projektívne body

$$O_0 = [2 : 5 : 1], \quad O_1 = [6 : -4 : 2], \quad O_2 = [1 : 3 : 0]$$

a zvolíme ich reprezentantov

$$\mathbf{o}_0 = (2, 5, 1), \quad \mathbf{o}_1 = (6, -4, 2), \quad \mathbf{o}_2 = (1, 3, 0).$$

Tieto tri vektory sú lineárne nezávislé, a preto tvoria bázu vektorového priestoru $\mathbb{R}^3$. Pre projektívny bod

$$Q = [2 : 1 : -3]$$

zvolíme reprezentanta

$$\mathbf{q} = (2, 1, -3).$$

Určte racionálne čísla ρ_0, ρ_1, ρ_2 tak, aby platilo

$$\mathbf{q} = \rho_0 \mathbf{o}_0 - \rho_1 \mathbf{o}_1 + 2\rho_2 \mathbf{o}_2.$$

Riešenie. Po dosadení zvolených reprezentantov dostaneme

$$(2, 1, -3) = \rho_0(2, 5, 1) - \rho_1(6, -4, 2) + 2\rho_2(1, 3, 0).$$

Porovnaním jednotlivých súradníc získame sústavu

$$\begin{aligned}2\rho_0 - 6\rho_1 + 2\rho_2 &= 2, \\5\rho_0 + 4\rho_1 + 6\rho_2 &= 1, \\ \rho_0 - 2\rho_1 &= -3.\end{aligned}$$

Jej riešením je

$$\rho_0 = -\frac{19}{5}, \quad \rho_1 = -\frac{2}{5}, \quad \rho_2 = \frac{18}{5}.$$

Skutočne,

$$-\frac{19}{5}(2, 5, 1) + \frac{2}{5}(6, -4, 2) + \frac{36}{5}(1, 3, 0) = (2, 1, -3).$$

Teda reprezentant $\mathbf{q}$ bodu Q má vzhľadom na zvolenú bázu $\mathbf{o}_0, \mathbf{o}_1, \mathbf{o}_2$ vyjadrenie

$$\boxed{\mathbf{q} = -\frac{19}{5}\mathbf{o}_0 + \frac{2}{5}\mathbf{o}_1 + \frac{36}{5}\mathbf{o}_2.}$$

□

Didaktická poznámka. Príklad zdôrazňuje rozdiel medzi projektívnym bodom a jeho reprezentantom. Projektívny bod Q je triedou proporcionálnych nenulových vektorov, zatiaľ čo lineárne operácie vykonávame s jeho reprezentantmi v priestore $\mathbb{R}^3$.

Práve tento prechod umožňuje využívať metódy lineárnej algebry pri analytickom opise projektívnej roviny.

3.2 Projektívna rovina v homogénnych súradniciach

V predchádzajúcej časti sme ukázali, že projektívny bod nie je reprezentovaný jedinou nenulovou trojicou reálnych čísel, ale celou triedou navzájom proporcionálnych trojíc. Homogénne súradnice nám tak umožňujú vytvoriť analytický model projektívnej roviny.

Uvažujme množinu

$$\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\},$$

teda množinu všetkých nenulových vektorov trojrozmerného reálneho vektorového priestoru. Na tejto množine sme zaviedli ekvivalenčnú reláciu

$$\mathbf{x} \sim \mathbf{y} \iff \mathbf{y} = \lambda \mathbf{x}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Každá trieda tejto ekvivalencie obsahuje všetky nenulové vektory ležiace na jednej priamke v $\mathbb{R}^3$ prechádzajúcej počiatkom. Jedna takáto trieda predstavuje jeden bod projektívnej roviny.

Definícia 3.2.1: Reálna projektívna rovina

Reálnu projektívnu rovinu definujeme ako množinu tried ekvivalencie nenulových vektorov priestoru $\mathbb{R}^3$ vzhľadom na reláciu proporcionality:

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = (\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}) / \sim.$$

Prvky množiny $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ nazývame *projektívne body*.

Ak

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \neq \mathbf{0},$$

príslušný projektívny bod zapisujeme

$$X = [x_1 : x_2 : x_3].$$

Pre každé $\lambda \neq 0$ pritom platí

$$[x_1 : x_2 : x_3] = [\lambda x_1 : \lambda x_2 : \lambda x_3].$$

Geometricky teda môžeme reálnu projektívnu rovinu interpretovať ako množinu všetkých priamok v $\mathbb{R}^3$, ktoré prechádzajú počiatkom:

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \longleftrightarrow \left\{ \text{priamky v } \mathbb{R}^3 \text{ prechádzajúce počiatkom} \right\}.$$

3.2.1 Afinná rovina ako časť projektívnej roviny

Každý vlastný projektívny bod

$$X = [x_1 : x_2 : x_3], \quad x_3 \neq 0,$$

má práve jedného reprezentanta s tretou súradnicou rovnou 1:

$$X = \left[\frac{x_1}{x_3} : \frac{x_2}{x_3} : 1 \right].$$

Vlastné body projektívnej roviny preto môžeme stotožniť s bodmi afinnej roviny pomocou priradenia

$$(x, y) \longleftrightarrow [x : y : 1].$$

Afinnú rovinu tak môžeme chápať ako časť projektívnej roviny tvorenú bodmi

$$[x_1 : x_2 : x_3], \quad x_3 \neq 0.$$

Body, pre ktoré

$$x_3 = 0,$$

sú nevlastné body. Tie nemajú zodpovedajúci bod s konečnými kartézskymi súradnicami a predstavujú smery afinnej roviny.

Poznámka 3.2.1: Zapamätajte si

Projektívna rovina obsahuje afinnú rovinu a navyše nevlastné body:

$$\begin{array}{lcl} (x, y) & \longleftrightarrow & [x : y : 1], \\ \text{směr } (u_1, u_2) & \longleftrightarrow & [u_1 : u_2 : 0]. \end{array}$$

Homogénne súradnice tak umožňujú opisovať vlastné body aj smery v jednom súradnicovom systéme.

Reálna projektívna rovina $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ je súradnicovým modelom projektívneho rozšírenia roviny, ktoré sme v predchádzajúcej kapitole označovali $\overline{\mathbb{E}}_2$.

3.3 Lineárna závislosť a kolinearita bodov

Homogénne súradnice umožňujú previesť geometrické vzťahy medzi bodmi projektívnej roviny na vzťahy medzi ich reprezentantmi v priestore $\mathbb{R}^3$. Jedným z najdôležitejších príkladov je kolinearita troch bodov.

Nech

$$A = [a_1 : a_2 : a_3], \quad B = [b_1 : b_2 : b_3], \quad C = [c_1 : c_2 : c_3]$$

sú tri body projektívnej roviny a nech

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3), \quad \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3), \quad \mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$$

sú ich zvolené reprezentanty v $\mathbb{R}^3$.

Body A, B, C ležia na jednej projektívnej priamke práve vtedy, keď vektory

$$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$$

sú lineárne závislé.

Definícia 3.3.1: Lineárna závislosť projektívnych bodov

Projektívne body

$$A_1, A_2, \dots, A_k$$

nazývame *lineárne závislé*, ak ich reprezentanty

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$$

sú lineárne závislé vektory.

Ak sú ich reprezentanty lineárne nezávislé, projektívne body nazývame *lineárne nezávislé*.

Táto definícia nezávisí od voľby reprezentantov. Ak totiž reprezentanty nahradíme ich nenulovými násobkami

$$\mathbf{a}'_i = \lambda_i \mathbf{a}_i, \quad \lambda_i \neq 0,$$

lineárna závislosť alebo nezávislosť sa nezmení.

Lineárna (ne)závislosť je teda vlastnosťou samotných projektívnych bodov, nie iba ich konkrétne zvolených reprezentantov.

Pre tri body projektívnej roviny má lineárna závislosť bezprostredný geometrický význam.

Veta 3.3.1: Kritérium kolinearit troch bodov

Tri projektívne body

$$A = [a_1 : a_2 : a_3], \quad B = [b_1 : b_2 : b_3], \quad C = [c_1 : c_2 : c_3]$$

sú kolineárne práve vtedy, keď ich reprezentanty sú lineárne závislé.

Dôkaz. Nech $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ sú reprezentanty dvoch rôznych projektívnych bodov A, B . Vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ sú lineárne nezávislé a určujú dvojrozmerný podpriestor

$$L = \text{span}\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Tento dvojrozmerný podpriestor reprezentuje projektívnu priamku prechádzajúcu bodmi A a B .

Bod C leží na tejto projektívnej priamke práve vtedy, keď jeho reprezentant $\mathbf{c}$ patrí do L , teda keď existujú čísla λ, μ , nie obe nulové, také, že

$$\mathbf{c} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}.$$

To nastáva práve vtedy, keď vektory

$$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$$

sú lineárne závislé. □

V priestore $\mathbb{R}^3$ sú tri vektory lineárne závislé práve vtedy, keď je determinant matice vytvorenej z ich súradníc rovný nule. Dostávame preto nasledujúce kritérium:

$$A, B, C \text{ sú kolineárne} \iff \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Ak niektorý reprezentant vynásobíme nenulovým číslom, príslušný riadok determinantu sa vynásobí tým istým číslom. Nulovosť determinantu sa preto nezmení. Kritérium kolinearity je teda korektne definované pre projektívne body.

Príklad 3.3.1: Kolinearita troch projektívnych bodov

Rozhodnite, či body

$$A = [1 : 1 : 1], \quad B = [2 : 3 : 1], \quad C = [3 : 5 : 1]$$

ležia na jednej projektívnej priamke.

Riešenie. Vypočítame determinant

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dostávame

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} = 1(3 - 5) - 1(2 - 3) + 1(10 - 9) = 0.$$

Reprezentanty bodov A, B, C sú teda lineárne závislé, a preto body A, B, C ležia na jednej projektívnej priamke. □

Poznámka 3.3.1: Úloha

V predchádzajúcom príklade sme pomocou homogénnych súradníc ukázali, že body

$$A = [1 : 1 : 1], \quad B = [2 : 3 : 1], \quad C = [3 : 5 : 1]$$

sú kolineárne.

- Zapíšte body A, B, C v kartézskych súradniciach.
- Určte v afinnej rovine rovnicu priamky AB .
- Overte, že bod C leží na priamke AB .
- Porovnajte tento postup s overením kolinearity pomocou determinantu homogénnych súradníc.

Príklad 3.3.2: Kolinearita s nevlastným bodom

Uvažujme body

$$A = [1 : 1 : 1], \quad B = [3 : 2 : 1], \quad U_{\infty} = [2 : 1 : 0].$$

Rozhodnite, či sú tieto body kolineárne.

Riešenie. Vypočítame

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Body A, B, U_{∞} sú preto kolineárne.

Vektor

$$(3 - 1, 2 - 1) = (2, 1)$$

určuje smer priamky AB . Nevlastný bod

$$U_{\infty} = [2 : 1 : 0]$$

je teda práve nevlastným bodom tejto priamky. □

Poznámka 3.3.2: Zapamätajte si

Geometrická kolinearita troch projektívnych bodov sa v homogénnych súradniciach prejaví ako lineárna závislosť ich reprezentantov:

$$A, B, C \text{ kolineárne} \iff \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \text{ lineárne závislé} \iff \det \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix} = 0.$$

3.4 Priamka v homogénnych súradniciach

Priamka patrí medzi základné geometrické objekty, jej chápanie však závisí od geometrického modelu, v ktorom pracujeme.

V syntetickom prístupe k euklidovskej geometrii, napríklad v Hilbertovom axiomatickom systéme, sa pojem priamky nedefinuje. Bod a priamka sú primitívne pojmy a ich vzájomný vzťah opisuje primitívny vzťah *incidencie*. Jedna zo základných axióm incidencie vyjadruje známu vlastnosť:

Dvoma rôznymi bodmi prechádza práve jedna priamka.

Výroky

$$A \in p \quad \text{alebo} \quad A \notin p$$

potom vyjadrujú, či bod A s priamkou p inciduje, teda či bod A leží alebo neleží na priamke p .

V analytickom modeli afinnej roviny už možno priamku opísať pomocou vektorových operácií. Priamka určená dvoma rôznymi bodmi A, B je množina

$$\overleftrightarrow{AB} = \{X \in \mathbb{E}_2; X = A + t(B - A), \quad t \in \mathbb{R}\}.$$

V projektívnej rovine chceme zachovať základnú incidenčnú vlastnosť priamky, ale zároveň ju vyjadriť pomocou lineárnej algebry. V predchádzajúcej časti sme ukázali, že tri projektívne body sú kolineárne práve vtedy, keď ich reprezentanty v $\mathbb{R}^3$ sú lineárne závislé. To prirodzene vedie k nasledujúcej definícii.

Definícia 3.4.1: Projektívna priamka

Nech $A, B \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ sú dva rôzne projektívne body. *Projektívnu priamku* určenou bodmi A, B nazývame množinu všetkých projektívnych bodov X , ktorých reprezentant je lineárnou kombináciou reprezentantov bodov A, B .

Priamku označujeme

$$p = \overleftrightarrow{AB}.$$

Ak

$$\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$$

sú zvolené reprezentanty bodov A, B , potom možno projektívnu priamku $p = \overleftrightarrow{AB}$ zapísať v množinovom tvare

$$p = \left\{ X = [\mathbf{x}] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}); \mathbf{x} = k_0 \mathbf{a} + k_1 \mathbf{b}, \quad (k_0, k_1) \neq (0, 0) \right\}.$$

Ekvivalentnú definíciu projektívnej priamky pomocou lineárneho vyjadrenia jej bodov uvádza aj Čižmár v práci [7].

Keďže body A a B sú rôzne, ich reprezentanty $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ sú lineárne nezávislé. Ich lineárny obal

$$L = \text{span}\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$$

je preto dvojrozmerný vektorový podpriestor priestoru $\mathbb{R}^3$.

Projektívna priamka p pozostáva práve z projektívnych bodov, ktorých reprezentanty ležia v tomto dvojrozmernom podpriestore. Geometricky teda platí

projektívna priamka v $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$	$\longleftrightarrow$	rovina v $\mathbb{R}^3$ prechádzajúca počiatkom.
--	-----------------------	--

V predchádzajúcej časti sme ukázali, že projektívne body možno reprezentovať nenulovými vektormi priestoru $\mathbb{R}^3$, pričom proporcionálne vektory predstavujú ten istý projektívny bod. Podobným spôsobom možno pomocou homogénnych súradníc opísať aj projektívne priamky.

Nech p je projektívna priamka. V priestore $\mathbb{R}^3$ jej zodpovedá dvojrozmerný vektorový podpriestor prechádzajúci počiatkom. Každý takýto podpriestor možno opísať homogénnou lineárnou rovnicou

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0,$$

kde

$$(a_1, a_2, a_3) \neq (0, 0, 0).$$

Projektívny bod

$$X = [x_1 : x_2 : x_3]$$

leží na priamke p práve vtedy, keď jeho homogénne súradnice spĺňajú rovnicu

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0.$$

Definícia 3.4.2: Homogénne súradnice priamky

Nech projektívna priamka p má rovnicu

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0, \quad (a_1, a_2, a_3) \neq (0, 0, 0).$$

Trojicu

$$[a_1 : a_2 : a_3]$$

nazývame *homogénnymi súradnicami priamky* p a píšeme

$$p = [a_1 : a_2 : a_3].$$

Rovnica projektívnej priamky nie je určená jednoznačne. Ak ju vynásobíme ľubovoľným nenulovým číslom λ , dostaneme rovnicu

$$\lambda a_1x_1 + \lambda a_2x_2 + \lambda a_3x_3 = 0,$$

ktorá opisuje tú istú priamku.

Preto platí

$$[a_1 : a_2 : a_3] = [\lambda a_1 : \lambda a_2 : \lambda a_3], \quad \lambda \neq 0.$$

Homogénne súradnice priamky sú teda, rovnako ako homogénne súradnice bodu, určené iba až na nenulový násobok.

Poznámka 3.4.1: Bod a priamka

Bod projektívnej roviny zapisujeme

$$X = [x_1 : x_2 : x_3],$$

priamku projektívnej roviny zapisujeme

$$p = [a_1 : a_2 : a_3].$$

V oboch prípadoch sú homogénne súradnice určené iba až na nenulový násobok.

3.4.1 Incidencia bodu a priamky

Nech

$$X = [x_1 : x_2 : x_3]$$

je projektívny bod a

$$p = [a_1 : a_2 : a_3]$$

projektívna priamka.

Bod X leží na priamke p práve vtedy, keď

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0.$$

Túto podmienku môžeme zapísať aj v maticovom tvare

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Algebraickým vyjadrením incidencie bodu a priamky je teda

$$\boxed{X \in p \iff a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0.}$$

Táto podmienka nezávisí od voľby homogénnych reprezentantov. Ak súradnice bodu vynásobíme nenulovým číslom μ a súradnice priamky nenulovým číslom λ , ľavá strana rovnice sa vynásobí číslom $\lambda\mu$:

$$(\lambda a_1)(\mu x_1) + (\lambda a_2)(\mu x_2) + (\lambda a_3)(\mu x_3) = \lambda\mu(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3).$$

Jej nulovosť sa teda nezmení.

3.4.2 Afinná a homogénna rovnica priamky

Uvažujme v afinnej rovine priamku s rovnicou

$$ax + by + c = 0.$$

Vlastný bod

$$X = [x_1 : x_2 : x_3], \quad x_3 \neq 0,$$

má kartézské súradnice

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}.$$

Po dosadení do afinnej rovnice dostaneme

$$a\frac{x_1}{x_3} + b\frac{x_2}{x_3} + c = 0.$$

Po vynásobení číslom x_3 získame homogénnu rovnicu

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0.$$

Afinná priamka

$$ax + by + c = 0$$

má teda v projektívnej rovine homogénnu rovnicu

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$$

a homogénne súradnice

$$p = [a : b : c].$$

Príklad 3.4.1: Homogénna rovnica priamky

V affinej rovine je daná priamka

$$p : 2x - y + 3 = 0.$$

Určte jej homogénnu rovnicu a homogénne súradnice. Overte, či projektívne body

$$A = [1 : 5 : 1], \quad B = [2 : 7 : 1], \quad U_\infty = [1 : 2 : 0]$$

ležia na priamke p .

Riešenie. Homogenizáciou rovnice

$$2x - y + 3 = 0$$

dostaneme

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0.$$

Homogénne súradnice priamky sú teda

$$p = [2 : -1 : 3].$$

Pre bod $A = [1 : 5 : 1]$ platí

$$2 \cdot 1 - 5 + 3 \cdot 1 = 0,$$

preto

$$A \in p.$$

Pre bod $B = [2 : 7 : 1]$ platí

$$2 \cdot 2 - 7 + 3 \cdot 1 = 0,$$

a teda

$$B \in p.$$

Pre nevlastný bod $U_\infty = [1 : 2 : 0]$ dostávame

$$2 \cdot 1 - 2 + 3 \cdot 0 = 0,$$

preto

$$U_\infty \in p.$$

Nevlastný bod $U_\infty = [1 : 2 : 0]$ reprezentuje smer priamky p . □

Poznámka 3.4.2: Úloha

V predchádzajúcom príklade sme zistili, že nevlastný bod

$$U_\infty = [1 : 2 : 0]$$

leží na projektívnom rozšírení priamky

$$p : 2x - y + 3 = 0.$$

- a) Určte smerový vektor priamky p v afinnej rovine.
- b) Porovnajte jeho súradnice s homogénnymi súradnicami nevlastného bodu U_∞ .
- c) Vysvetlite geometrický význam incidencie $U_\infty \in p$.

Poznámka 3.4.3: Zapamätajte si

Projektívna priamka

$$p = [a_1 : a_2 : a_3]$$

má homogénnu rovnicu

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0.$$

Pre projektívny bod $X = [x_1 : x_2 : x_3]$ platí

$$X \in p \iff a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0.$$

Súradnice bodu aj priamky sú určené iba až na nenulový násobok.

3.5 Spojnica dvoch bodov a priesečník dvoch priamok

Nech

$$A = [a_1 : a_2 : a_3], \quad B = [b_1 : b_2 : b_3]$$

sú dva rôzne projektívne body. Podľa axiómy incidencie nimi prechádza práve jedna projektívna priamka

$$p = \overleftrightarrow{AB}.$$

Ak

$$p = [p_1 : p_2 : p_3],$$

potom oba body ležia na priamke p , a preto platí

$$p_1 a_1 + p_2 a_2 + p_3 a_3 = 0,$$

$$p_1 b_1 + p_2 b_2 + p_3 b_3 = 0.$$

Vektor

$$\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$$

je teda kolmý na oba reprezentanty

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3), \quad \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3).$$

Takýto vektor získame pomocou vektorového súčinu

$$\mathbf{p} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}.$$

Veta 3.5.1: Spojnica dvoch projektívnych bodov

Nech

$$A = [a_1 : a_2 : a_3], \quad B = [b_1 : b_2 : b_3]$$

sú dva rôzne projektívne body. Homogénne súradnice ich spojnice $p = \overleftrightarrow{AB}$ možno určiť pomocou vektorového súčinu

$$\boxed{p = A \times B.}$$

Explicitne

$$p = [a_2 b_3 - a_3 b_2 : a_3 b_1 - a_1 b_3 : a_1 b_2 - a_2 b_1].$$

Zápis $A \times B$ chápeme ako skrátené označenie vektorového súčinu zvolených reprezentantov bodov A a B . Zmena reprezentantov iba vynásobí výsledok nenulovým číslom, a preto nezmení určenú projektívnu priamku.

Príklad 3.5.1: Spojnica dvoch bodov

Určte homogénne súradnice priamky prechádzajúcej bodmi

$$A = [1 : 2 : 1], \quad B = [3 : 1 : 1].$$

Riešenie. Použijeme vektorový súčin

$$p = A \times B.$$

Dostávame

$$p = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1, 2, -5).$$

Preto

$$p = [1 : 2 : -5]$$

a homogénna rovnica priamky je

$$x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0.$$

Dosadením súradníc bodov A a B ľahko overíme, že oba body rovnicu spĺňajú. $\square$

Priesečník dvoch projektívnych priamok

Nech

$$p = [p_1 : p_2 : p_3], \quad q = [q_1 : q_2 : q_3]$$

sú dve rôzne projektívne priamky.

Ich spoločný bod

$$X = [x_1 : x_2 : x_3]$$

musí spĺňať obe rovnice

$$p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 = 0,$$

$$q_1x_1 + q_2x_2 + q_3x_3 = 0.$$

Reprezentant bodu X je teda kolmý na oba vektory

$$\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3), \quad \mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3).$$

Preto ho môžeme určiť pomocou vektorového súčinu

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} \times \mathbf{q}.$$

Veta 3.5.2: Priesečník dvoch projektívnych priamok

Nech

$$p = [p_1 : p_2 : p_3], \quad q = [q_1 : q_2 : q_3]$$

sú dve rôzne projektívne priamky. Ich priesečník je projektívny bod

$$X = p \times q.$$

Explicitne

$$X = [p_2q_3 - p_3q_2 : p_3q_1 - p_1q_3 : p_1q_2 - p_2q_1].$$

Príklad 3.5.2: Priesečník rovnobežných priamok

V afinnej rovine sú dané rovnobežné priamky

$$p : 2x - y + 1 = 0, \quad q : 2x - y - 3 = 0.$$

Určte ich priesečník v projektívnej rovine.

Riešenie. Homogénne súradnice priamok sú

$$p = [2 : -1 : 1], \quad q = [2 : -1 : -3].$$

Ich priesečník vypočítame pomocou vektorového súčinu

$$X = p \times q.$$

Dostávame

$$X = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = (4, 8, 0).$$

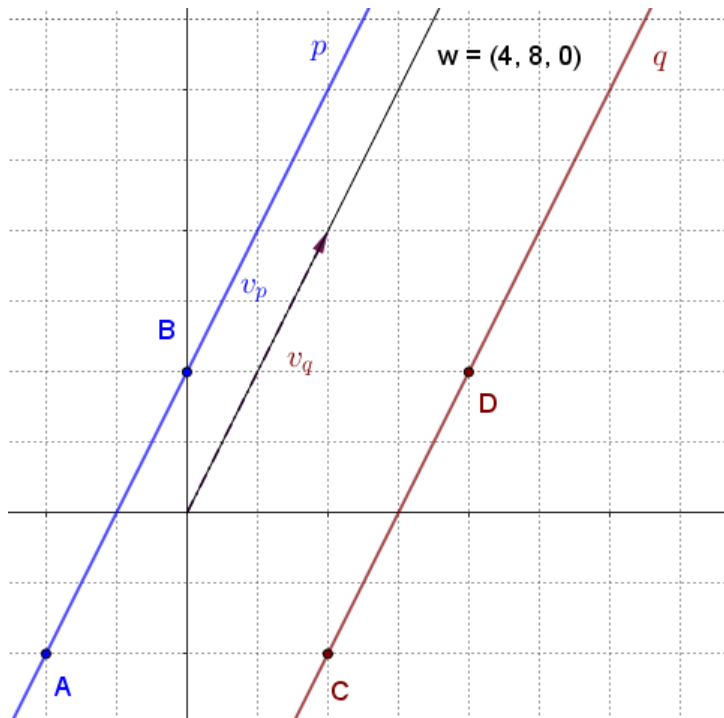
Po úprave homogénnych súradníc

$$X = [4 : 8 : 0] = [1 : 2 : 0].$$

Kedže tretia homogénna súradnica je nulová, X je nevlastný bod. Reprezentuje spoločný smer oboch rovnobežných priamok.

□

K riešeniu prikladáme aj GeoGebra applet, ktorý reprezentuje priesečník dvoch projektívnych priamok. Pozrite so obrázok [3.2](#)



Obr. 3.2: Homogénne súradnice priesečníka priamok
Interaktívny applet si otvoríte [Tu](#)

Komentár 1. V interaktívnom applete zmeníte polohu jednej z priamok a sledujte homogénne súradnice ich priesečníka. Ak sa priamky stanú rovnobežnými, tretia súradnica ich priesečníka je nulová:

$$X = [x : y : 0].$$

Takýto bod neleží v afinnej časti projektívnej roviny, ale na nevlastnej priamke. Reprezentuje spoločný smer oboch rovnobežných priamok. Projektívne rozšírenie roviny tak umožňuje chápať aj rovnobežné priamky ako priamky s práve jedným spoločným bodom.

Poznámka 3.5.1: Zapamätajte si

V homogénnych súradniciach majú dve základné incidenčné konštrukcie rovnaký algebraický tvar:

$$\begin{aligned} \text{spojnica bodov } A, B &: p = A \times B, \\ \text{priesečník priamok } p, q &: X = p \times q. \end{aligned}$$

Vektorový súčin tak umožňuje jednotne riešiť základné incidenčné úlohy projektívnej roviny.

Príklad 3.5.3: Priesečník spojnic dvoch dvojíc bodov

V projektívnej rovine sú dané body

$$A = [2 : 1 : 1], \quad B = [5 : -4 : 1], \quad C = [1 : -2 : 1], \quad D = [7 : 2 : 1].$$

Určte homogénne súradnice priamok

$$p = \overleftrightarrow{AB}, \quad q = \overleftrightarrow{CD},$$

a homogénne súradnice ich priesečníka

$$X = p \cap q.$$

Riešenie. Najskôr určíme spojnicu bodov A, B :

$$p = A \times B = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & -4 & 1 \end{vmatrix} = (5, 3, -13).$$

Teda

$$p = [5 : 3 : -13].$$

Podobne pre body C, D :

$$q = C \times D = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 7 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-4, 6, 16).$$

Po vydelení nenulovým číslom 2 môžeme písať

$$q = [-2 : 3 : 8].$$

Priesečník priamok p, q získame opäť pomocou vektorového súčinu:

$$X = p \times q = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 5 & 3 & -13 \\ -2 & 3 & 8 \end{vmatrix} = (63, -14, 21).$$

Po vydelení číslom 7 dostaneme

$$\boxed{X = [9 : -2 : 3]}.$$

Keďže tretia homogénna súradnica bodu X je nenulová, ide o vlastný bod. Jeho

normalizovaný zápis je

$$X = \left[3 : -\frac{2}{3} : 1 \right],$$

a preto mu v afinnej rovine zodpovedá bod

$$X = \left(3, -\frac{2}{3} \right).$$

□

Poznámka 3.5.2: Úloha

Overte výsledok predchádzajúceho príkladu metódami analytickej geometrie v afinnej rovine.

- Zapíšte body A, B, C, D v kartézskych súradniciach.
- Určte kartézske rovnice priamok AB a CD .
- Vyriešením sústavy ich rovníc určte priesečník.
- Porovnajzte tento postup s výpočtom pomocou vektorových súčinov v homogénnych súradniciach.

Homogénne súradnice tak poskytujú jednotný algebraický nástroj na riešenie základných incidenčných úloh projektívnej roviny. Spojnicu dvoch bodov aj priesečník dvoch priamok možno určiť pomocou vektorového súčinu, pričom výsledok môže reprezentovať vlastný aj nevlastný bod.

Táto jednotnosť sa naplno prejaví pri opise nevlastnej priamky, ktorej sa budeme venovať v nasledujúcej časti.

Zaujímavé postupy spojnic a priesečníkov priamok v afinnej rovine, ktoré využívajú vektorový súčin, nájdete v dostupnej práci [6] profesora Eduarda Čecha. Pre študenta učiteľstva matematiky doporučujeme aj prácu [5] akademika Bohumila Bydžovského. Obidve práce sú síce orientované na afinnú geometriu ale po homogenizácii súradníc ich môžete aplikovať na projektívny priestor.

3.6 Nevlastná priamka

V predchádzajúcej kapitole sme projektívnu rovinu vytvorili rozšírením afinnej roviny o nevlastné body. Každému smeru rovnobežných priamok sme priradili jeden nevlastný bod.

Homogénne súradnice nám teraz umožňujú opísať všetky nevlastné body jednotným algebraickým spôsobom.

Vieme, že nevlastný bod má homogénne súradnice

$$U_\infty = [u_1 : u_2 : 0], \quad (u_1, u_2) \neq (0, 0).$$

Všetky nevlastné body teda splňajú rovnicu

$$x_3 = 0.$$

Táto rovnica je homogénnou lineárnou rovnicou projektívnej priamky. Dostávame tak prirodzene nasledujúcu definíciu.

Definícia 3.6.1: Nevlastná priamka

Množinu všetkých nevlastných bodov reálnej projektívnej roviny nazývame *nevlastná priamka* a označujeme ju

$$\ell_\infty.$$

Jej homogénna rovnica je

$$\ell_\infty : x_3 = 0$$

a jej homogénne súradnice sú

$$\ell_\infty = [0 : 0 : 1].$$

Nevlastný bod a nevlastná priamka majú v homogénnych súradniciach formálne podobný zápis, predstavujú však rôzne geometrické objekty.

Nevlastný bod má tvar

$$U_\infty = [u_1 : u_2 : 0],$$

zatiaľ čo homogénne súradnice nevlastnej priamky sú

$$\ell_\infty = [0 : 0 : 1].$$

Skutočne, dosadením súradníc ľubovoľného nevlastného bodu do rovnice nevlastnej priamky dostávame

$$0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 1 \cdot 0 = 0.$$

Každý nevlastný bod teda leží na nevlastnej priamke.

Afinná rovina a nevlastná priamka

Vlastné body projektívnej roviny sú práve body

$$X = [x_1 : x_2 : x_3], \quad x_3 \neq 0.$$

Po normalizácii ich môžeme zapísať v tvare

$$X = [x : y : 1],$$

a teda stotožniť s bodmi afinnej roviny.

Naopak body, pre ktoré

$$x_3 = 0,$$

tvoria nevlastnú priamku ℓ_∞ .

Afinnú rovinu preto môžeme chápať ako projektívnu rovinu, z ktorej odstránime nevlastnú priamku:

$$\boxed{\mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \cong \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \setminus \ell_\infty.}$$

Projektívna rovina teda vzniká z afinnej roviny pridaním jednej priamky pozostávajúcej zo všetkých nevlastných bodov.

Z geometrického hľadiska tak nevlastná priamka združuje všetky smery afinnej roviny do jediného projektívneho objektu. Každý smer rovnobežných priamok určuje práve jeden bod na ℓ_∞ .

Nevlastný bod priamky

Uvažujme afinnú priamku

$$p : ax + by + c = 0, \quad (a, b) \neq (0, 0).$$

Jej projektívne rozšírenie má homogénnu rovnicu

$$p : ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0.$$

Nevlastný bod priamky p je jej priesečníkom s nevlastnou priamkou

$$\ell_\infty : x_3 = 0.$$

Po dosadení $x_3 = 0$ do rovnice priamky p dostávame

$$ax_1 + bx_2 = 0.$$

Jedným z nenulových riešení je dvojica

$$(x_1, x_2) = (b, -a).$$

Nevlastný bod priamky p má preto homogénne súradnice

$$U_{\infty} = [b : -a : 0].$$

Vektor

$$(b, -a)$$

je smerovým vektorom priamky

$$ax + by + c = 0,$$

pretože je kolmý na jej normálový vektor

$$(a, b).$$

Homogénne súradnice nevlastného bodu teda presne zachytávajú smer priamky, ktorý sme geometricky zaviedli už v predchádzajúcej kapitole.

Veta 3.6.1: Nevlastný bod rovnobežných priamok

Dve rôzne rovnobežné afinné priamky majú v projektívnej rovine spoločný nevlastný bod.

Ak

$$p : ax + by + c_1 = 0, \quad q : ax + by + c_2 = 0, \quad c_1 \neq c_2,$$

potom ich spoločným nevlastným bodom je

$$U_{\infty} = [b : -a : 0].$$

Príklad 3.6.1: Nevlastný bod priamky

Určte nevlastný bod projektívneho rozšírenia afinnej priamky

$$p : 3x - 2y + 5 = 0.$$

Riešenie. Homogénna rovnica priamky je

$$3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0.$$

Nevlastný bod leží na nevlastnej priamke, preto

$$x_3 = 0.$$

Dostávame

$$3x_1 - 2x_2 = 0.$$

Môžeme zvoliť

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 3,$$

a teda

$$U_\infty = [2 : 3 : 0].$$

Vektor $(2, 3)$ je zároveň smerovým vektorom afinnej priamky p . □

Poznámka 3.6.1: Úloha

Určte nevlastné body projektívnych rozšírení priamok

$$p : x + 2y - 3 = 0, \quad q : 2x + 4y + 5 = 0, \quad r : 2x - y + 1 = 0.$$

Ktoré z týchto priamok majú spoločný nevlastný bod? Interpretujte výsledok v afinnej rovine.

Poznámka 3.6.2: Zapamätajte si

Nevlastná priamka obsahuje všetky nevlastné body projektívnej roviny:

$$\ell_\infty : x_3 = 0, \quad \ell_\infty = [0 : 0 : 1].$$

Pre afinnú priamku

$$p : ax + by + c = 0$$

je jej nevlastným bodom

$$U_\infty = [b : -a : 0].$$

Rovnobežné afinné priamky majú rovnaký smer, a preto majú v projektívnej rovine spoločný nevlastný bod.

3.7 Princíp duality

V predchádzajúcich častiach sme si mohli všimnúť pozoruhodnú symetriu medzi bodmi a priamkami projektívnej roviny. Dva rôzne body určujú práve jednu priamku a dve rôzne priamky určujú práve jeden bod. Táto symetria nie je náhodná, ale patrí medzi základné vlastnosti projektívnej geometrie.

Prvýkrát sme sa s ňou stretli už pri axiomatickom zavedení projektívnej roviny. Pripomeňme si prvé dve incidenčné axiómy:

P1 Dvoma rôznymi bodmi prechádza práve jedna priamka.

P2 Dve rôzne priamky majú práve jeden spoločný bod.

Ak vo výroku **P1** navzájom vymeníme pojmy *bod* a *priamka* a súčasne zodpovedajúcim spôsobom zameníme incidenčné vzťahy, dostaneme výrok **P2**. A naopak, z výroku **P2** rovnakou zámenou získame **P1**.

Takéto dvojice výrokov nazývame *duálne výroky*.

bod	$\longleftrightarrow$	priamka,
dva body určujú priamku	$\longleftrightarrow$	dve priamky určujú bod,
$A \in p$	$\longleftrightarrow$	$p \ni A$.

Pri zámene bodov a priamok sa zachováva vzťah incidencie: výrok, že bod leží na priamke, sa duálne číta ako výrok, že priamka prechádza príslušným bodom.

Definícia 3.7.1: Princíp duality

Ak v incidenčnom tvrdení projektívnej roviny navzájom zameníme pojmy

$$bod \longleftrightarrow priamka$$

a súčasne zameníme zodpovedajúce incidenčné konštrukcie, dostaneme *duálne tvrdenie*.

Ak je pôvodné tvrdenie dôsledkom incidenčných axiém projektívnej roviny, potom je pravdivé aj jeho duálne tvrdenie. Túto vlastnosť nazývame *princíp duality*.

Princíp duality možno pozorovať aj na dvoch základných konštrukciách projektívnej roviny.

Dvoma rôznymi bodmi A, B je určená ich spojnice

$$p = \overleftrightarrow{AB},$$

zatiaľ čo dvoma rôznymi priamkami p, q je určený ich priesečník

$$X = p \cap q.$$

Tieto konštrukcie sú navzájom duálne:

A, B	$\longrightarrow$	$\overleftrightarrow{AB},$
p, q	$\longrightarrow$	$p \cap q.$

V homogénnych súradniciach sa táto symetria prejavuje ešte výraznejšie. Spojnicu

dvoch bodov určujeme vzťahom

$$p = A \times B,$$

zatiaľ čo priesečník dvoch priamok vzťahom

$$X = p \times q.$$

Formálne teda majú obe duálne konštrukcie rovnaký algebraický tvar.

Pojem	Duálny pojem
bod	priamka
priamka	bod
dva rôzne body	dve rôzne priamky
spojnica dvoch bodov	priesečník dvoch priamok
kolineárne body	konkurentné priamky
úplný štvoroh	úplný štvorstran

Symetria medzi bodmi a priamkami projektívnej roviny sa prejavuje aj v homogénnych súradniciach.

Projektívny bod zapisujeme v tvare

$$X = [x_1 : x_2 : x_3],$$

pričom jeho homogénne súradnice sú určené iba až na nenulový násobok. Podobne projektívnu priamku zapisujeme

$$p = [a_1 : a_2 : a_3],$$

pričom aj jej homogénne súradnice sú určené iba až na nenulový násobok.

Vzťah incidencie medzi bodom X a priamkou p je vyjadrený jedinou rovnicou

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0.$$

Teda

$$X \in p \iff a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0.$$

Všimnime si, že v tejto rovnici vystupujú súradnice bodu

$$(x_1, x_2, x_3)$$

a súradnice priamky

$$(a_1, a_2, a_3)$$

symetrickým spôsobom. Práve táto algebraická symetria je súradnicovým prejavom princípu duality.

Treba však rozlišovať medzi projektívnou rovinou a jej duálnou rovinou. Body

$$X = [x_1 : x_2 : x_3]$$

sú prvkami projektívnej roviny $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, zatiaľ čo priamky

$$p = [a_1 : a_2 : a_3]$$

možno chápať ako body jej *duálnej projektívnej roviny*.

Formálna podobnosť ich homogénnych súradníc teda neznamenaá, že bod a priamka sú tým istým geometrickým objektom. Vyjadruje skutočnosť, že bodová a priamková štruktúra projektívnej roviny sú navzájom duálne.

Algebraická symetria sa prejavuje aj pri základných incidenčných konštrukciách. Pre dva rôzne body A, B sme ich spojnicu určili pomocou vektorového súčinu

$$p = A \times B.$$

Pre dve rôzne priamky p, q sme ich priesečník určili analogicky vzťahom

$$X = p \times q.$$

Dostávame tak dvojicu navzájom duálnych konštrukcií:

$\begin{array}{ll} A, B & \longrightarrow p = A \times B, \\ p, q & \longrightarrow X = p \times q. \end{array}$
--

Rovnaký algebraický aparát teda opisuje spojnicu dvoch bodov aj priesečník dvoch priamok; mení sa iba geometrická interpretácia vstupných a výstupných objektov.

Príklad 3.7.1: Duálne tvrdenie

Uvažujme tvrdenie:

Ak tri rôzne body A, B, C ležia na jednej priamke p , potom sú kolinéárne.

Vytvorte jeho duálne tvrdenie.

Riešenie. Pri dualizácii vykonáme zámenny

bod $\longleftrightarrow$ priamka

a

priamka obsahujúca body $\longleftrightarrow$ bod, ktorým prechádzajú priamky.

Duálne tvrdenie preto znie:

Ak tri rôzne priamky a, b, c prechádzajú jedným bodom P , potom majú spoločný bod.

□

Príklad 3.7.2: Úplný štvorroh a úplný štvorstran

V predchádzajúcej kapitole sme zaviedli úplný štvorroh ako konfiguráciu štyroch bodov, z ktorých žiadne tri neležia na jednej priamke, spolu s ich šiestimi spojnicami. Určte duálnu konfiguráciu.

Riešenie. Pri zámene

bod $\longleftrightarrow$ priamka

prechádzajú štyri body úplného štvorrohu na štyri priamky a ich spojnice na príslušné priesečníky.

Dostávame konfiguráciu štyroch priamok, z ktorých žiadne tri neprechádzajú jedným bodom, spolu s ich šiestimi priesečníkmi. Táto konfigurácia sa nazýva *úplný štvorstran*.

Teda

úplný štvorroh $\longleftrightarrow$ úplný štvorstran.
--

□

Ďalším významným príkladom je Desarguesova veta. Jej formulácia pracuje s bodmi, priamkami, spojnicami a priesečníkmi, a preto ju možno dualizovať zámenou týchto pojmov.

Ak pôvodná formulácia vyjadruje súvislosť medzi perspektívnosťou dvoch trojuholníkov zo stredu a kolinearitou priesečníkov zodpovedajúcich strán, duálna formulácia zamieňa úlohu bodov a priamok, a teda aj úlohu spojnic a priesečníkov.

Podrobnú formuláciu duálnej Desarguesovej vety ponechávame ako úlohu, aby bolo možné princíp duality priamo aplikovať na známe projektívne tvrdenie.

Poznámka 3.7.1: Zapamätajte si

Princíp duality vyjadruje základnú symetriu projektívnej geometrie:

$$\boxed{\text{bod} \longleftrightarrow \text{priamka.}}$$

Pri dualizácii sa zodpovedajúcim spôsobom zamieňajú aj základné incidenčné konštrukcie:

$$\begin{array}{ll} \text{spojnica dvoch bodov} & \longleftrightarrow \text{priesečník dvoch priamok,} \\ \text{kolineárne body} & \longleftrightarrow \text{priamky prechádzajúce jedným bodom,} \\ \text{úplný štvoroh} & \longleftrightarrow \text{úplný štvorstran.} \end{array}$$

V homogénnych súradniciach sa táto symetria prejavuje rovnakým algebraickým tvarom základných incidenčných vzťahov.

Princíp duality tak umožňuje z jedného projektívneho tvrdenia získavať nové tvrdenie bez budovania úplne novej geometrickej konštrukcie. Nie je iba formálnou zámenou slov, ale dôsledkom incidenčnej štruktúry projektívnej roviny.

3.8 Deliaci pomer a dvojpomer

Pri práci s kolineárnymi bodmi sa stretávame s dvoma príbuznými pojmami – deliacim pomerom troch bodov a dvojpomerom štyroch bodov. Hoci ich zápisy sú si podobné, z geometrického hľadiska majú odlišný význam. Deliaci pomer patrí k afinnej geometrii, zatiaľ čo dvojpomer je základným invariantom projektívnych transformácií.

3.8.1 Deliaci pomer troch bodov

Nech A, B, C sú tri rôzne kolineárne vlastné body a zvolme orientáciu ich spoločnej priamky. Orientovanú vzdialenosť bodov X, Y budeme označovať

$$\overline{XY}.$$

Platí teda

$$\overline{YX} = -\overline{XY}.$$

Definícia 3.8.1: Deliaci pomer

Deliacim pomerom bodu C vzhľadom na usporiadanú dvojicu bodov A, B nazývame číslo

$$(ABC) = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}.$$

Z tejto znamienkovej konvencie vyplýva, že

$$(ABC) > 0,$$

ak bod C leží medzi bodmi A a B , a

$$(ABC) < 0,$$

ak bod C leží mimo úsečky AB .

Ak zvolíme na priamke afinnú súradnicu t a body majú súradnice

$$A = A(a), \quad B = B(b), \quad C = C(c),$$

potom

$$(ABC) = \frac{c - a}{b - c}.$$

Pre

$$(ABC) = \lambda, \quad \lambda \neq -1,$$

dostávame

$$c = \frac{a + \lambda b}{1 + \lambda}.$$

Vo vektorovom zápise teda

$$C = \frac{A + \lambda B}{1 + \lambda}.$$

Poznámka 3.8.1: Poznámka

Deliaci pomer sa zachováva pri afinných transformáciách, nie však pri všeobecných projektívnych transformáciách. Preto nejde o projektívny invariant.

3.8.2 Dvojpomer štyroch bodov

Pre štyri kolineárne body už možno vytvoriť veličinu, ktorá sa zachováva aj pri projektívnych transformáciách.

Definícia 3.8.2: Dvoj pomer

Nech A, B, C, D sú štyri rôzne kolineárne vlastné body. Dvoj pomerom usporiadanej štvorice $(A, B; C, D)$ nazývame číslo

$$(A, B; C, D) = \frac{\overline{AC} \overline{DB}}{\overline{CB} \overline{AD}}.$$

Pomocou deliacich pomerov môžeme tú istú definíciu zapísať v tvare

$$(A, B; C, D) = \frac{(ABC)}{(ABD)}.$$

Ak na spoločnej priamke zavedieme afinnú súradnicu t a

$$A = A(a), \quad B = B(b), \quad C = C(c), \quad D = D(d),$$

potom

$$(A, B; C, D) = \frac{(c-a)(b-d)}{(b-c)(d-a)}.$$

Na rozdiel od deliaceho pomeru je dvoj pomer projektívnym invariantom. Ak projektívna transformácia zobrazí

$$A \mapsto A', \quad B \mapsto B', \quad C \mapsto C', \quad D \mapsto D',$$

potom

$$(A, B; C, D) = (A', B'; C', D').$$

3.8.3 Dvoj pomer v homogénnych súradniciach

Homogénne súradnice umožňujú vyjadriť dvoj pomer bez použitia vzdialeností. Tento zápis je zvlášť výhodný v projektívnej geometrii, pretože zostáva použiteľný aj vtedy, keď je niektorý zo štvorice bodov nevlastný.

Nech A, B sú dva rôzne body projektívnej priamky a zvolme ich nenulových reprezentantov $\mathbf{a}, \mathbf{b}$. Každý ďalší bod tejto priamky možno reprezentovať lineárnou kombináciou týchto vektorov. Nech

$$\mathbf{c} = \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}, \quad \mathbf{d} = \gamma \mathbf{a} + \delta \mathbf{b},$$

pričom

$$\alpha\beta\gamma\delta \neq 0.$$

Potom pre dvojpomer bodov A, B, C, D platí

$$(A, B; C, D) = \frac{\beta\gamma}{\alpha\delta}.$$

Tento vzťah možno zapísať aj pomocou determinantov. Ak body projektívnej priamky vzhľadom na bázu $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ reprezentujeme dvojicami

$$A = [1 : 0], \quad B = [0 : 1], \quad C = [\alpha : \beta], \quad D = [\gamma : \delta],$$

potom

$$(A, B; C, D) = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ 1 & \delta \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & \delta \end{pmatrix}} = \frac{\beta\gamma}{\alpha\delta}.$$

Hodnota dvojpomeru nezávisí od voľby nenulových reprezentantov homogénnych súradníc bodov. Ich vynásobenie nenulovými skalármi sa vo výslednom podiele navzájom vykrátí.

Poznámka 3.8.2: Dvojpomer a nevlastný bod

Pri znamienkovej konvencii

$$(ABC) = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$$

používanej v tejto učebnici platí pre nevlastný bod D_∞ priamky AB

$$(A, B; C, D_\infty) = -(ABC).$$

Znamienko mínus je dôsledkom zvolenej orientácie v definícii deliaceho pomeru. Deliaci pomer troch vlastných bodov je teda, až na toto znamienko, osobitným prípadom dvojpomeru, v ktorom štvrtým bodom je nevlastný bod príslušnej priamky.

Didaktická poznámka. Deliaci pomer opisuje polohu troch bodov v afinnej geometrii. Dvojpomer ide o krok ďalej: porovnáva dve takéto delenia a práve táto kombinácia zostáva zachovaná aj pri projektívnej transformácii. Preto má dvojpomer v projektívnej geometrii podstatne väčší význam.

Príklad 3.8.1: Deliaci pomer

Na orientovanej priamke sú dané body

$$A = A(1), \quad B = B(7).$$

a) Určte deliaci pomer (ABC) , ak $C = C(3)$.

b) Určte súradnicu bodu C , ak

$$(ABC) = 2.$$

c) Určte súradnicu bodu C , ak

$$(ABC) = -2.$$

d) Porovnajte polohu bodu C v predchádzajúcich dvoch prípadoch so znamienkom deliaceho pomeru.

$$[\frac{1}{2}; C(5); C(13)]$$

Riešenie. Použijeme vzťah

$$(ABC) = \frac{c - a}{b - c}.$$

Pre $A = A(1)$, $B = B(7)$ a $C = C(3)$ dostávame

$$(ABC) = \frac{3 - 1}{7 - 3} = \frac{1}{2}.$$

Ak $(ABC) = 2$, potom

$$\frac{c - 1}{7 - c} = 2,$$

odkiaľ

$$c = 5.$$

Ak $(ABC) = -2$, potom

$$\frac{c - 1}{7 - c} = -2,$$

odkiaľ

$$c = 13.$$

V prvom prípade leží bod C medzi bodmi A , B , preto je deliaci pomer kladný. V druhom prípade leží mimo úsečky AB , preto je deliaci pomer záporný. $\square$

Príklad 3.8.2: Určenie bodu z deliaceho pomeru

Na priamke AB , kde

$$A = [1, 2], \quad B = [-3, -2],$$

určte súradnice bodu C tak, aby

$$(ABC) = \frac{2}{3}.$$

$$[C = [-\frac{3}{5}, \frac{2}{5}]]$$

Riešenie. Pre

$$(ABC) = \lambda$$

platí

$$C = \frac{A + \lambda B}{1 + \lambda}.$$

Po dosadení $\lambda = \frac{2}{3}$ dostávame

$$C = \frac{[1, 2] + \frac{2}{3}[-3, -2]}{1 + \frac{2}{3}} = \left[-\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right].$$

□

Príklad 3.8.3: Dvoj pomer štyroch vlastných bodov

Na jednej priamke sú dané body

$$A = A(0), \quad B = B(1), \quad C = C(2), \quad D = D(4).$$

Vypočítajte

$$(A, B; C, D).$$

$$[(A, B; C, D) = \frac{3}{2}]$$

Riešenie. Použijeme súradnicové vyjadrenie dvoj pomeru

$$(A, B; C, D) = \frac{(c - a)(b - d)}{(b - c)(d - a)}.$$

Po dosadení dostávame

$$(A, B; C, D) = \frac{(2 - 0)(1 - 4)}{(1 - 2)(4 - 0)} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}.$$

□

Príklad 3.8.4: Dvojpomer s nevlastným bodom

V projektívnej rovine sú dané kolineárne body

$$A = [1 : 0 : 1], \quad B = [2 : 0 : 1], \quad C = [3 : 0 : 1], \quad D_\infty = [1 : 0 : 0].$$

a) Určte deliaci pomer (ABC) .

b) Určte dvojpomer

$$(A, B; C, D_\infty).$$

c) Porovnajte oba výsledky.

$$[(ABC) = -2, \quad (A, B; C, D_\infty) = -2]$$

Riešenie. V afinnej časti majú body súradnice

$$A = A(1), \quad B = B(2), \quad C = C(3).$$

Preto

$$(ABC) = \frac{3-1}{2-3} = -2.$$

Keďže D_∞ je nevlastný bod priamky AB , platí

$$(A, B; C, D_\infty) = (ABC).$$

Teda

$$(A, B; C, D_\infty) = -2.$$

Tento príklad ukazuje, že deliaci pomer troch vlastných bodov možno chápať ako osobitný prípad dvojpomeru, v ktorom štvrtým bodom je nevlastný bod príslušnej priamky.

□

Príklad 3.8.5: Dvojpomer v homogénnych súradniciach

Nech

$$A = [1 : 0 : 1], \quad B = [2 : 0 : 1].$$

Zvoľte reprezentantov

$$\mathbf{a} = (1, 0, 1), \quad \mathbf{b} = (2, 0, 1)$$

a vyjadrite body

$$C = [3 : 0 : 1], \quad D_\infty = [1 : 0 : 0]$$

ako lineárne kombinácie

$$\mathbf{c} = \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}, \quad \mathbf{d} = \gamma \mathbf{a} + \delta \mathbf{b}.$$

Pomocou homogénneho vyjadrenia vypočítajte

$$(A, B; C, D_\infty).$$

$$[\mathbf{c} = -\mathbf{a} + 2\mathbf{b}, \quad \mathbf{d} = -\mathbf{a} + \mathbf{b}; \quad (A, B; C, D_\infty) = -2]$$

Riešenie. Pre bod C hľadáme čísla α, β tak, aby

$$(3, 0, 1) = \alpha(1, 0, 1) + \beta(2, 0, 1).$$

Dostávame

$$\alpha = -1, \quad \beta = 2,$$

teda

$$\mathbf{c} = -\mathbf{a} + 2\mathbf{b}.$$

Podobne

$$(1, 0, 0) = \gamma(1, 0, 1) + \delta(2, 0, 1)$$

dáva

$$\gamma = -1, \quad \delta = 1,$$

a preto

$$\mathbf{d} = -\mathbf{a} + \mathbf{b}.$$

Z homogénneho vyjadrenia dvojpomeru

$$(A, B; C, D) = \frac{\beta\gamma}{\alpha\delta}$$

potom dostávame

$$(A, B; C, D_\infty) = \frac{2(-1)}{(-1)(1)} = 2.$$

□

Príklad 3.8.6: Konštrukcia bodu pri zadanom dvojpomere

Na projektívnej priamke sú dané tri rôzne vlastné body A, B, C . Zostrojte bod D tak, aby

$$(A, B; C, D) = \mu, \quad \mu \in \left\{-1, 2, \frac{1}{2}\right\}.$$

Riešenie. *Pomoc: Pozrite prácu [17], s. 27.*

Ide o konštrukčnú úlohu. Pre každú zadanú hodnotu μ zostrojte bod D a správnosť konštrukcie overte výpočtom dvojpomeru

$$(A, B; C, D).$$

□

Príklad 3.8.7: Nevlastný bod a deliaci pomer

Na projektívnej priamke sú dané vlastné body A, B, C a jej nevlastný bod D_∞ . Preskúmajte podmienku

$$(A, B; C, D_\infty) = \mu, \quad \mu \in \left\{-1, 2, \frac{1}{2}\right\},$$

a porovnajte ju s deliacim pomerom (ABC) .

Riešenie. Pre nevlastný bod D_∞ príslušnej priamky platí

$$(A, B; C, D_\infty) = (ABC).$$

Preto podmienka

$$(A, B; C, D_\infty) = \mu$$

je ekvivalentná podmienke

$$(ABC) = \mu.$$

Úloha tak ukazuje vzťah medzi afinným deliacim pomerom a projektívnym dvojpomerom.

□

3.9 Cvičenie

1. Rozhodnite, ktoré z nasledujúcich trojíc reprezentujú ten istý projektívny bod:

$$(2, -4, 6), \quad (-1, 2, -3), \quad (3, -6, 9), \quad (1, -2, 4).$$

$$[(2, -4, 6) \sim (-1, 2, -3) \sim (3, -6, 9); (1, -2, 4) \text{ reprezentuje iný bod.}]$$

2. Rozhodnite, ktoré z bodov

$$A = [2 : -1 : 1], \quad B = [4 : 3 : 0], \quad C = [-6 : 9 : 3], \quad D = [0 : 1 : 0]$$

sú vlastné a ktoré nevlastné. Vlastné body zapíšte v normalizovanom tvare s poslednou súradnicou rovnou 1.

$$[A = [2 : -1 : 1], C = [-2 : 3 : 1] \text{ sú vlastné; } B, D \text{ sú nevlastné.}]$$

3. Dokážte, že lineárna závislosť, resp. lineárna nezávislosť projektívnych bodov nezávisí od výberu ich nenulových reprezentantov.
4. Rozhodnite, či sú nasledujúce trojice projektívnych bodov lineárne závislé:

a)

$$A_1 = [-1 : 2 : -6, 4], \quad A_2 = [3 : -6 : 19, 2], \quad A_3 = [0 : 1 : 1];$$

b)

$$B_1 = [2 : 3 : -2], \quad B_2 = [1 : 2 : -4], \quad B_3 = [0 : 1 : -6].$$

$$[a) \text{ lineárne závislé; } b) \text{ lineárne závislé.}]$$

5. Nech

$$O_0 = [1 : 0 : 0], \quad O_1 = [0 : 2 : 0], \quad O_2 = [0 : 0 : 1].$$

Určte racionálne čísla ρ_0, ρ_1, ρ_2 tak, aby reprezentant bodu

$$Q = [2 : 1 : -3]$$

bolo možné zapísať v tvare

$$(2, 1, -3) = (\rho_0, 0, 0) - (0, \rho_1, 0) + 2(0, 0, \rho_2).$$

$$[\rho_0 = 2, \rho_1 = -1, \rho_2 = -\frac{3}{2}]$$

6. Ukážte, že body s reprezentantmi

$$\mathbf{a} = (2, 3, -2), \quad \mathbf{b} = (1, 2, -4), \quad \mathbf{c} = (0, 1, -6)$$

sú kolineárne.

Určte λ, μ tak, aby

$$\mathbf{a} = \lambda \mathbf{b} + \mu \mathbf{c}.$$

Ďalej určte t tak, aby bod

$$X = [4 : -1 : t]$$

ležal na priamke AB , a nájdite σ, τ tak, aby

$$(4, -1, t) = \sigma \mathbf{a} + \tau \mathbf{b}.$$

$$[\lambda = 2, \mu = -1; \quad t = 38; \quad \sigma = 9, \tau = -14]$$

7. V projektívnej rovine sú dané body

$$A = [1 : 2 : 1], \quad B = [3 : 5 : 1], \quad C = [k : 8 : 1],$$

kde $k \in \mathbb{R}$.

- Určte hodnotu k , pre ktorú sú body A, B, C kolineárne.
- Podmienku kolinearity zapíšte pomocou determinantu.
- Určte v afinnej rovine rovnicu priamky AB a overte, že získaný bod C na nej leží.
- Ktorý z oboch postupov možno bez zmeny použiť aj vtedy, keď je jeden z bodov nevlastný?

$$[k = 5; \quad 3x - 2y + 1 = 0; \text{ determinantové kritérium.}]$$

8. Určte homogénnu rovnicu priamky prechádzajúcej bodmi

$$A = [2 : 1 : 1], \quad B = [5 : -4 : 1].$$

Určte aj jej nevlastný bod.

$$[p = [5 : 3 : -13], \text{ teda } 5x_1 + 3x_2 - 13x_3 = 0; P_\infty = [3 : -5 : 0]]$$

9. V projektívnej rovine sú dané priamky

$$p : 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0, \quad q : 4x_1 - 6x_2 - 5x_3 = 0.$$

Určte ich priesečník a interpretujte výsledok v afinnej rovine.

$$[X = [3 : 2 : 0]; \text{ priamky sú v afinnej rovine rovnobežné.}]$$

10. Uvažujte projektívne rozšírenia afinných priamok

$$p : 2x - 3y + 4 = 0, \quad q : 4x - 6y - 5 = 0, \quad r : 3x + 2y - 1 = 0.$$

- a) Zapište ich homogénne rovnice.
- b) Určte nevlastný bod každej priamky.
- c) Rozhodnite, ktoré priamky majú spoločný nevlastný bod.
- d) Interpretujte výsledok v afinnej rovine.

$$[P_\infty = Q_\infty = [3 : 2 : 0], R_\infty = [-2 : 3 : 0]; p \parallel q]$$

11. K bodu

$$A = [2 : -3 : 1]$$

priradte formálne duálnu priamku

$$a : 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0.$$

Na tomto príklade vysvetlite, ako sa v homogénnych súradniciach prejavuje dualita medzi bodom a priamkou.

[Homogénna trojica $[2 : -3 : 1]$ môže predstavovať súradnice bodu alebo koeficienty rovnice duálnej priamky.]

12. Na orientovanej priamke sú dané body

$$A = A(1), \quad B = B(7).$$

- a) Určte deliaci pomer (ABC) , ak $C = C(3)$.
- b) Určte súradnicu bodu C , ak

$$(ABC) = 2.$$

- c) Určte súradnicu bodu C , ak

$$(ABC) = -2.$$

- d) Porovnajte polohu bodu C v predchádzajúcich dvoch prípadoch so znamienkom deliaceho pomeru.

$[\frac{1}{2}; \quad C(5); \quad C(13);$ kladný pomer – vnútorné delenie, záporný – vonkajšie delenie.]

13. Na priamke AB , kde

$$A = [1, 2], \quad B = [-3, -2],$$

určte súradnice bodu C tak, aby

$$(ABC) = \frac{2}{3}.$$

$$[C = [-\frac{3}{5}, \frac{2}{5}]]$$

14. Na jednej priamke sú dané body

$$A = A(0), \quad B = B(1), \quad C = C(2), \quad D = D(4).$$

Vypočítajte

$$(A, B; C, D).$$

$$[(A, B; C, D) = \frac{3}{2}]$$

15. V projektívnej rovine sú dané kolineárne body

$$A = [1 : 0 : 1], \quad B = [2 : 0 : 1], \quad C = [3 : 0 : 1], \quad D_{\infty} = [1 : 0 : 0].$$

a) Určte deliaci pomer (ABC) .

b) Určte dvojpomer

$$(A, B; C, D_{\infty}).$$

c) Porovnajte oba výsledky.

$$[(ABC) = -2; \quad (A, B; C, D_{\infty}) = 2; \quad (A, B; C, D_{\infty}) = -(ABC)]$$

16. Nech

$$A = [1 : 0 : 1], \quad B = [2 : 0 : 1].$$

Zvoľte reprezentantov

$$\mathbf{a} = (1, 0, 1), \quad \mathbf{b} = (2, 0, 1)$$

a vyjadrite body

$$C = [3 : 0 : 1], \quad D_{\infty} = [1 : 0 : 0]$$

ako lineárne kombinácie

$$\mathbf{c} = \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}, \quad \mathbf{d} = \gamma \mathbf{a} + \delta \mathbf{b}.$$

Pomocou homogénneho vyjadrenia vypočítajte

$$(A, B; C, D_{\infty}).$$

$$[\mathbf{c} = -\mathbf{a} + 2\mathbf{b}, \quad \mathbf{d} = -\mathbf{a} + \mathbf{b}; \quad (A, B; C, D_{\infty}) = 2]$$

17. Na projektívnej priamke sú dané tri rôzne vlastné body A, B, C . Zostrojte bod D tak, aby

$$(A, B; C, D) = \mu, \quad \mu \in \left\{-1, 2, \frac{1}{2}\right\}.$$

Pomoc: Pozrite prácu [17], s. 27.

18. Na projektívnej priamke sú dané vlastné body A, B, C a jej nevlastný bod D_∞ .

Preskúmajte vzťah medzi

$$(A, B; C, D_\infty)$$

a deliacim pomerom

$$(ABC).$$

Ako sa tento vzťah prejaví pre hodnoty

$$(ABC) \in \left\{-1, 2, \frac{1}{2}\right\}?$$

$$[(A, B; C, D_\infty) = -(ABC); 1, -2, -\frac{1}{2}]$$

4 Kružnica

Motivácia: Kružnica patrí medzi geometrické útvary, s ktorými sa stretávame už od elementárnej geometrie. Poznáme jej stred, polomer, dotyčnice, stredové a obvodové uhly a v analytickej geometrii aj jej rovnicu. Mohlo by sa preto zdať, že nás na kružnici už nemá čo prekvapiť.

V tejto kapitole sa však na ňu pozrieme z iného pohľadu.

*Čo sa stane so známou euklidovskou kružnicou,
ak ju začneme skúmať v projektívnej rovine?*

Ukáže sa, že stred a polomer, ktoré sú pre euklidovskú kružnicu charakteristické, nie sú projektívnymi vlastnosťami. Objavia sa však iné vlastnosti, ktoré všetky kružnice spájajú a ktoré nás neskôr privedú k všeobecnému pojmu kuželosečky.

V euklidovskej rovine je kružnica so stredom

$$O = [a, b]$$

a polomerom $r > 0$ množinou všetkých bodov $X = [x, y]$, ktorých vzdialenosť od bodu O je rovná r . Jej rovnica má tvar

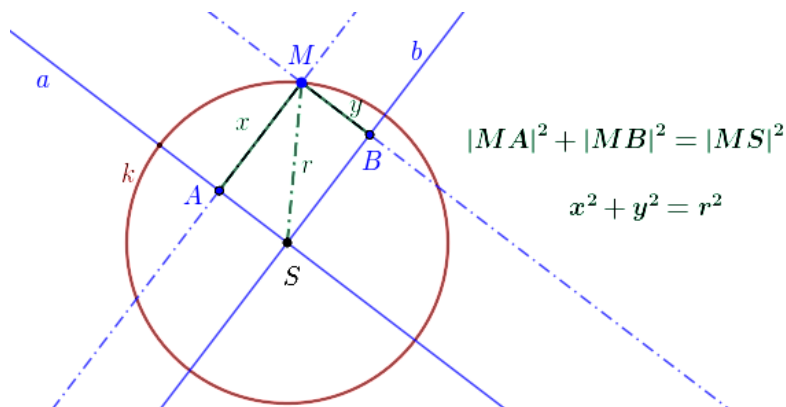
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2. \quad (4.1)$$

Táto rovnica vyjadruje kružnicu pomocou vzdialenosti, a je teda založená na metrike euklidovskej roviny. Pri prechode do projektívnej geometrie však vzdialenosť ani stred kružnice nie sú základnými pojmami. Budeme preto hľadať taký opis kružnice, ktorý možno preniesť aj do projektívnej roviny.

4.1 Od geometrickej konštrukcie k rovnici kružnice

Kružnicu môžeme skúmať rôznymi spôsobmi. Môžeme ju zostrojiť, opísať pomocou vzdialenosti alebo vyjadriť rovnicou. Tieto pohľady sa navzájom dopĺňajú a každý z nich zvyrazňuje inú stránku toho istého geometrického objektu.

Nasledujúci GeoGebra applet vychádza z klasickej konštrukcie kružnice a umožňuje sledovať jej vznik dynamicky.



Obr. 4.1: Fermatova kružnica – v prostredí GeoGebra
Dynamickú konštrukciu s pohyblivým bodom M si otvoríte [Tu](#).

Didaktická poznámka. Skúmajte dynamickú konštrukciu Pri práci s appletom nemeňte iba jednotlivé prvky konštrukcie. Sledujte predovšetkým, ktoré vlastnosti kružnice sa pri pohybe zachovávajú.

1. Pohybujte určujúcimi bodmi konštrukcie. Čo sa pri zmene ich polohy mení a ktoré vlastnosti výslednej kružnice zostávajú zachované?
2. Ktoré z vlastností, ktoré pri kružnici pozorujete, súvisia so vzdialenosťou, dĺžkou alebo uhlom? Ktoré z nich by teda stratili svoj význam, keby sme prestali používať euklidovskú metriku?
3. Skúste odhliadnuť od veľkosti a polohy konkrétnej kružnice. Čo majú všetky kružnice vytvorené v applete spoločné? Ktoré z týchto spoločných vlastností by mohli zostať podstatné aj pri prechode k všeobecnejšiemu geometrickému pohľadu?

Dynamická konštrukcia je v tomto prípade viac než iba ilustráciou. Predstavuje prirodzený východiskový bod ďalšieho výkladu. Pri pohybe určujúcich prvkov sa mení konkrétna poloha a veľkosť kružnice, jej geometrická podstata však zostáva zachovaná.

Práve tu sa stretávajú dva spôsoby práce s geometriou. V GeoGebre kružnicu *vidíme a meníme*; v analytickej geometrii ten istý objekt *opisujeme rovnicou*. Ak má kružnica stred

$$O = [a, b]$$

a polomer $r > 0$, jej rovnica je

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2. \quad (4.2)$$

Po roznásobení dostávame

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0.$$

Tento zápis je dôležitý pre ďalší výklad. Kružnica sa v ňom objavuje ako krivka druhého stupňa. Zatiaľ stále pracujeme v afinnej rovine a body zapisujeme pomocou dvojice súradníc

$$[x, y].$$

Teraz však urobíme krok, ktorý nemení samotný geometrický objekt, ale spôsob jeho matematického opisu. Bod afinnej roviny

$$[x, y]$$

budeme v projektívnej rovine reprezentovať homogénnymi súradnicami

$$[x : y : 1].$$

Všeobecnejšie budeme pracovať s trojicami

$$[x : y : z],$$

pričom nenulový násobok tej istej trojice predstavuje ten istý projektívny bod.

Tretia homogénna súradnica z nám umožní algebraicky zachytiť aj body, ktoré v afinnej rovine nemajú konečné súradnice. Nezavádzame teda nový geometrický objekt. Rozširujeme matematický jazyk, v ktorom môžeme známu kružnicu skúmať.

Poznámka 4.1.1: Od kružnice k projektívnej geometrii

Fermatova kružnica predstavuje ten istý geometrický objekt bez ohľadu na to, z akého geometrického pohľadu ho budeme skúmať. Mení sa predovšetkým jazyk jeho opisu. V euklidovskej a afinnej rovine pracujeme so súradnicami

$$[x, y],$$

kým v projektívnej rovine prechádzame k homogénnym súradniciam

$$[x : y : z].$$

Práve tento krok nám umožní pozrieť sa na známu kružnicu novým spôsobom a neskôr ju zaradiť do širšej rodiny kužeľosečiek.

Tieto otázky naznačujú smer, ktorým sa budeme ďalej uberať. Kružnicu najskôr opíšeme

analyticky a následne jej rovnicu preniesieme do homogénnych súradníc. Geometrický objekt pritom nemeníme – meníme jazyk, ktorým ho opisujeme, a vlastnosti, ktoré pri jeho skúmaní považujeme za podstatné.

4.2 Kružnica v projektívnej rovine

Prejdime teraz od afinného opisu kružnice k jej projektívnemu rozšíreniu. Homogenizáciou rovnice

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

dostávame

$$(x - az)^2 + (y - bz)^2 - r^2 z^2 = 0. \quad (4.3)$$

V afinnej časti projektívnej roviny, kde $z \neq 0$, môžeme zvoliť reprezentanta s $z = 1$ a dostávame späť pôvodnú rovnicu kružnice. Nový opis teda pôvodnú kružnicu nemení, ale rozširuje možnosti, ako o nej môžeme uvažovať.

A práve teraz môžeme položiť otázku, ktorá v euklidovskej rovine nemala zmysel:

Stretáva sa kružnica s nevlastnou priamkou?

Nevlastná priamka projektívnej roviny má rovnicu

$$p_\infty : \quad z = 0.$$

Ak chceme zistiť, či má kružnica nevlastné body, položíme v rovnici (4.3) $z = 0$. Dostávame

$$x^2 + y^2 = 0. \quad (4.4)$$

Nad polom reálnych čísel má táto rovnica iba riešenie $x = y = 0$, ktoré však nepredstavuje projektívny bod. Kružnica teda v reálnej projektívnej rovine nemá žiadny nevlastný bod.

Tento algebraický výsledok zodpovedá našej geometrickej skúsenosti: kružnica je v euklidovskej rovine uzavretá a nemá žiadny reálny smer, v ktorom by smerovala do nekonečna.

Rovnica (4.4) však naznačuje ešte jednu možnosť. Ak dovolíme komplexné súradnice, môžeme ju zapísať v tvare

$$x^2 + y^2 = (x + iy)(x - iy) = 0.$$

Na nevlastnej priamke tak dostávame dva body

$$I = [1 : i : 0], \quad J = [1 : -i : 0].$$

Tieto body nazývame *izotropické body*, prípadne *kruhové body v nekonečne*.

Poznámka 4.2.1: Čo majú všetky kružnice spoločné?

Body

$$I = [1 : i : 0], \quad J = [1 : -i : 0]$$

nezávisia od stredu kružnice ani od jej polomeru.

Každá euklidovská kružnica teda vo svojom komplexnom projektívnom rozšírení prechádza tými istými dvoma nevlastnými bodmi I a J .

To, čo sme pri práci s GeoGebra appletom hľadali ako vlastnosť spoločnú všetkým kružniciam, tak dostáva presné algebraické vyjadrenie.

4.3 Izotropické body a priamky

Výskyt komplexných bodov I a J nie je iba formálnym dôsledkom riešenia rovnice $x^2 + y^2 = 0$. Súvisí priamo s euklidovskou metrikou.

Uvažujme vektor

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2).$$

Jeho euklidovská norma je určená vzťahom

$$\|\mathbf{u}\|^2 = u_1^2 + u_2^2.$$

V reálnej rovine platí

$$u_1^2 + u_2^2 = 0 \implies u_1 = u_2 = 0.$$

Po rozšírení nad komplexné čísla však existujú aj nenulové vektory s nulovou hodnotou tejto kvadratickej formy. Napríklad

$$(1, i), \quad (1, -i). \quad (4.5)$$

Smery určené týmito vektormi nazývame *izotropické smery*. Ich nevlastnými bodmi sú práve body

$$I = [1 : i : 0], \quad J = [1 : -i : 0].$$

Priamky prechádzajúce bodom I alebo J nazývame *izotropické priamky*. Z algebraického hľadiska teda môžeme povedať, že izotropické vektory majú vzhľadom na kvadratickú formu

$$u_1^2 + u_2^2 \quad (4.6)$$

„nulovú dĺžku“, hoci ide o nenulové vektory.

Dosadením súradníc 4.5 do formy 4.6 vznikne veľmi prirodzená postupnosť:

$$\|\mathbf{u}\|^2 = u_1^2 + u_2^2 = 0 \implies \text{„nulová dĺžka“} \implies \text{izotropický smer} \implies I, J$$

Smery týchto vektorov sú izotropické smery a ich nevlastnými bodmi sú práve body

$$I = [1 : i : 0], \quad J = [1 : -i : 0].$$

Táto formulácia si však vyžaduje istú opatrnosť.

Poznámka 4.3.1: Pozor na význam slova „dĺžka“

Izotropický smer nemožno interpretovať ako reálny smer nulovej dĺžky. Body I a J nie sú bodmi reálnej projektívnej roviny $\mathbb{RP}^2$.

Objavia sa až po komplexnom rozšírení projektívnej roviny a ich význam spočíva predovšetkým v tom, že algebraicky zachytávajú euklidovskú metrickú štruktúru.

Kružnica sa nám tak po projektívnom rozšírení ukázala v novom svetle: jej stred ani polomer nie sú projektívnymi vlastnosťami, všetky kružnice však vo svojom komplexnom projektívnom rozšírení prechádzajú dvojicou pevných izotropických bodov I a J .

V ďalšej kapitole urobíme rozhodujúci krok: budeme sledovať, čo sa s kružnicou stane pri kolíneácii projektívnej roviny.

5 Obraz kružnice v kolineácii

V predchádzajúcej kapitole sme kružnicu rozšírili do projektívnej roviny. Ukázali sme, že v reálnej projektívnej rovine nemá žiadny nevlastný bod, zatiaľ čo v komplexnom projektívnom rozšírení všetky kružnice prechádzajú dvojicou izotropických bodov

$$I = [1 : i : 0], \quad J = [1 : -i : 0].$$

Teraz urobíme ďalší krok. Kružnicu už nebudeme iba opisovať v projektívnej rovine, ale budeme ju *zobrazovať* kolineáciou.

Motivácia: Predstavme si kružnicu a začnime meniť spôsob, akým sa na ňu pozeráme. Projektívne zobrazenie môže výrazne zmeniť jej tvar. Zachová však incidenciu bodov a priamok a kružnica ako krivka druhého stupňa sa nestratí.

Vzniká preto prirodzená otázka:

Aký obraz môže mať kružnica pri kolineácii projektívnej roviny?

Práve odpoveď na túto otázku nás privedie od kružnice k elipse, parabole a hyperbole a ukáže ich spoločnú projektívnu podstatu.

5.1 Kružnica a úbežnica kolineácie

Budeme uvažovať perspektívnu kolineáciu

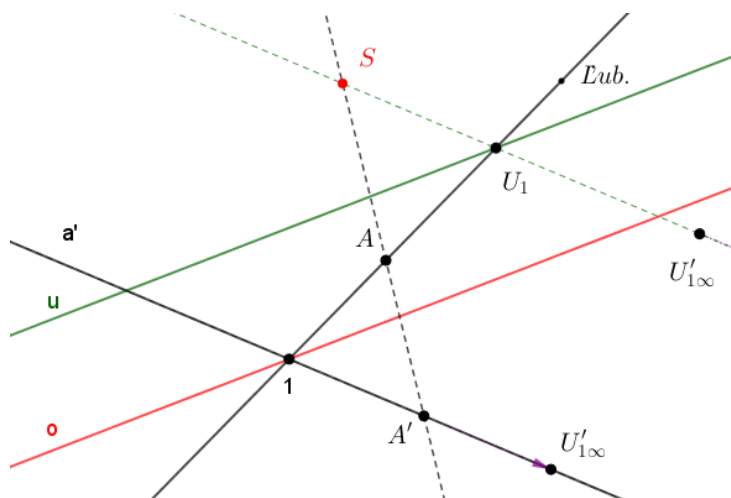
$$\mathcal{K}(S, o, u),$$

určenú stredom S , osou o a úbežnicou u . Pojmy perspektívnej kolineácie a jej úbežníc sme zaviedli v predchádzajúcej kapitole.

Pripomeňme iba vlastnosť, ktorá bude pre ďalší výklad rozhodujúca: body úbežnice u sa pri kolineácii zobrazujú na nevlastnú priamku obrazu. Schematicky

$$u \xrightarrow{\mathcal{K}} p_{\infty}.$$

Pre obraz kružnice je preto podstatné, v koľkých reálnych bodoch kružnica k pretína úbežnicu u .



Obr. 5.1: Perspektívna kolineácia $\mathcal{K}(S, o, u)$

V interaktívnom applete [Kolineácia – obraz bodu](#) možno meniť polohu bodu A a sledovať jeho obraz. Osobitne si všimnite, čo sa deje s bodom, ktorý sa približuje k úbežnici u .

Veta 5.1.1: Obraz kružnice v kolineácii

Obrazom kružnice v regulárnej kolineácii projektívnej roviny je regulárna kuželosečka.

Z projektívneho hľadiska teda kružnica, elipsa, parabola a hyperbola nepredstavujú štyri navzájom oddelené typy kriviek. Kolineácia môže jednu z nich zobrazíť na inú, pričom projektívna podstata kuželosečky zostáva zachovaná.

O tom, ako bude obraz kružnice vyzeráť v zvolenej afinnej časti projektívnej roviny, rozhoduje vzťah kružnice k úbežnici u .

5.2 Od kružnice k elipse, parabole a hyperbole

Nech k je kružnica a

$$k' = \mathcal{K}(k)$$

jej obraz v perspektívnej kolineácii.

Keďže úbežnica u sa zobrazí na nevlastnú priamku p_∞ , každý bod

$$X \in k \cap u$$

sa zobrazí na nevlastný bod kuželosečky k' .

Počet reálnych bodov prieniku

$$k \cap u$$

preto určuje počet reálnych nevlastných bodov obrazu k' .

Nastávajú tri prípady.

E) Ak

$$k \cap u = \emptyset,$$

obraz k' nemá žiadny reálny nevlastný bod. V afinnej časti projektívnej roviny je preto **elipsou**.

P) Ak sa úbežnica u dotýka kružnice v jedinom bode U , teda

$$k \cap u = \{U\},$$

potom

$$U' = \mathcal{K}(U) \in p_\infty$$

je jediným reálnym nevlastným bodom obrazu. Obraz k' je **parabola**.

H) Ak úbežnica pretína kružnicu v dvoch rôznych bodoch U, V ,

$$k \cap u = \{U, V\},$$

potom ich obrazy

$$U' = \mathcal{K}(U), \quad V' = \mathcal{K}(V)$$

sú dva rôzne reálne nevlastné body obrazu. Obraz k' je **hyperbola**.

Túto klasifikáciu môžeme stručne zapísať:

$k \cap u = \emptyset \implies$	elipsa,
$ k \cap u = 1 \implies$	parabola,
$ k \cap u = 2 \implies$	hyperbola.

Poznámka 5.2.1: Rozhoduje poloha úbežnice

Pri kolineácii sa nemení projektívna podstata kuželosečky. Rozdelenie na elipsu, parabolu a hyperbolu vzniká až vzhľadom na zvolenú nevlastnú priamku afinnej časti.

V našej situácii je preto rozhodujúce, ako úbežnica u , ktorá je vzorom nevlastnej priamky obrazu, pretína pôvodnú kružnicu.

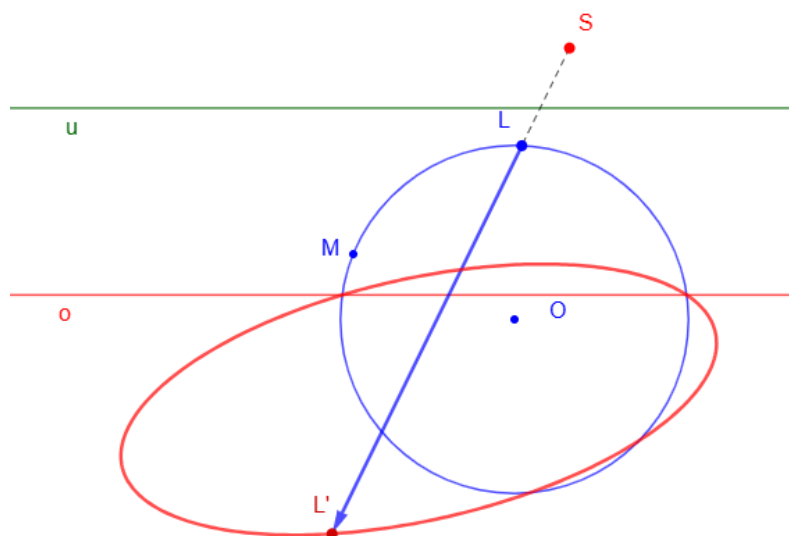
5.3 Dynamický experiment: od kružnice ku kuželosečkám

Predchádzajúcu klasifikáciu môžeme sledovať priamo v jednej dynamickej konštrukcii. Uvažujme perspektívnu kolineáciu

$$\mathcal{K}(S, o, u)$$

a kružnicu k so stredom O .

V nasledujúcom GeoGebra applete nemeníme samotnú kolineáciu. Pohybujeme iba stredom kružnice O , a tým meníme polohu kružnice vzhľadom na úbežnicu u .



Obr. 5.2: Kružnica v kolineácii
[Interaktívny GeoGebra applet si otvoríte Tu.](#)

Pri pohybe bodu O nahor a nadol sledujte súčasne pôvodnú kružnicu k , jej polohu vzhľadom na úbežnicu u a jej obraz

$$k' = \mathcal{K}(k).$$

Didaktická poznámka. Skúmajte dynamickú konštrukciu Pohybujte stredom kružnice O predovšetkým vo zvislom smere. Neskôr skúste meniť jeho polohu aj do strán.

1. Nájdite polohu bodu O , pri ktorej kružnica k nepretína úbežnicu u . Aký tvar má jej obraz k' ?
2. Posúvajte bod O tak, aby sa kružnica postupne približovala k úbežnici. Nájdite okamih, keď má kružnica s úbežnicou práve jeden spoločný bod. Aká kuželosečka vzniká v obraze?

3. Pokračujte v pohybe bodu O , až úbežnica pretne kružnicu v dvoch bodoch. Ako sa zmení obraz kružnice? Skúste vysvetliť túto zmenu pomocou obrazov oboch priesečníkov na nevlastnej priamke.
4. Pohybujte tiež bodom L a pozorujte jeho obraz L' .

Potom pohybujte bodom O aj do strán.

Čo rozhoduje o type výslednej kuželosečky?

Konkrétna poloha stredu O , alebo vzájomná poloha kružnice k a úbežnice u ?

Poznámka 5.3.1: Čo ukázal experiment?

Typ obrazu kružnice nezávisí od konkrétnej polohy jej stredu, ale od počtu reálnych priesečníkov kružnice s úbežnicou u :

$$k \cap u = \emptyset \implies \text{elipsa,}$$

$$|k \cap u| = 1 \implies \text{parabola,}$$

$$|k \cap u| = 2 \implies \text{hyperbola.}$$

5.4 Čo sa pri kolineácii zachovalo?

Dynamický experiment ukázal, že obraz kružnice môže mať v afinnej časti projektívnej roviny veľmi rozdielny tvar. Z kružnice môže vzniknúť elipsa, parabola alebo hyperbola.

Na prvý pohľad sa teda zdá, že kolineácia pôvodný geometrický objekt výrazne zmenila. Z projektívneho pohľadu však zostalo zachované to podstatné.

Kolineácia zachováva incidenciu bodov a priamok. Ak bod leží na priamke, jeho obraz leží na obraze tejto priamky. Priamky sa zobrazujú na priamky a priesečníky priamok na priesečníky ich obrazov. Zachováva sa tiež dotyk priamky s kuželosečkou.

Na druhej strane sa vo všeobecnosti nezachovávajú vzdialenosti, veľkosti uhlov ani rovnobežnosť. Preto obraz kružnice nemusí mať stred a polomer v tom istom metrickom zmysle ako pôvodná kružnica.

Poznámka 5.4.1: Čo sa zmenilo a čo zostalo?

Pri kolineácii sa môžu zmeniť metrické vlastnosti kružnice: jej tvar, vzdialenosti, uhly a ďalšie vlastnosti závislé od euklidovskej metriky.

Zachováva sa však jej projektívna podstata: regulárna kuželosečka sa zobrazí opäť na regulárnu kuželosečku.

Kružnica, elipsa, parabola a hyperbola sa nám tak prvýkrát ukazujú nie ako štyri oddelené geometrické objekty, ale ako rôzne afinné podoby jedného projektívneho objektu.

To, čo rozlišuje euklidovská a afinná geometria, môže projektívna geometria zjednotiť.

Motivácia: Doteraz sme ku kuželosečkám prišli projektívnou cestou: ako k obrazom kružnice v kolineácii.

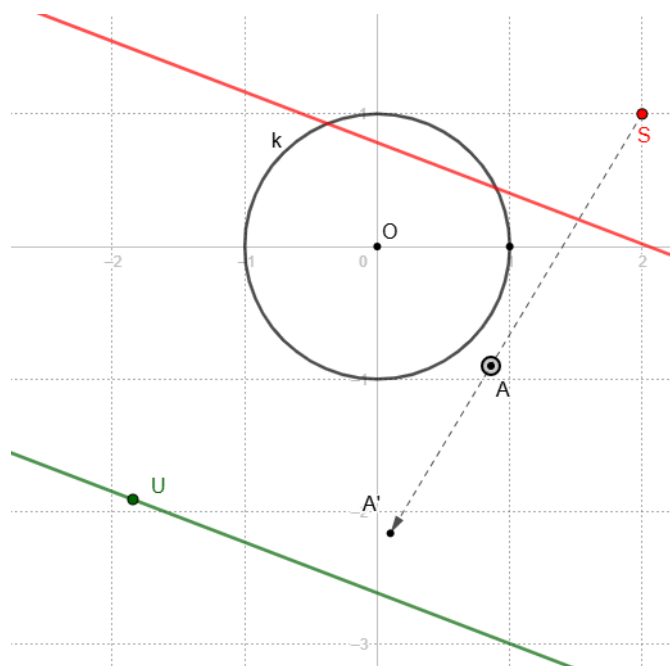
Zo stredoškolskej geometrie ich však poznáme aj inak – pomocou ohnísk, radiacich priamok, vzdialeností a ich rovníc.

Vzniká preto prirodzená otázka:

Ako spolu súvisia projektívny, analytický a metrický pohľad na kuželosečku?

Príklad 5.4.1: Obraz kružnice, ktorá nepretína úbežnicu

Zostrojte obraz kružnice $k = (O, r)$ v kolineácii $\mathcal{K}(S, o, A \mapsto A')$ z roviny π do roviny π a určte typ kuželosečky. Zadanie je zobrazené na obrázku 5.3.

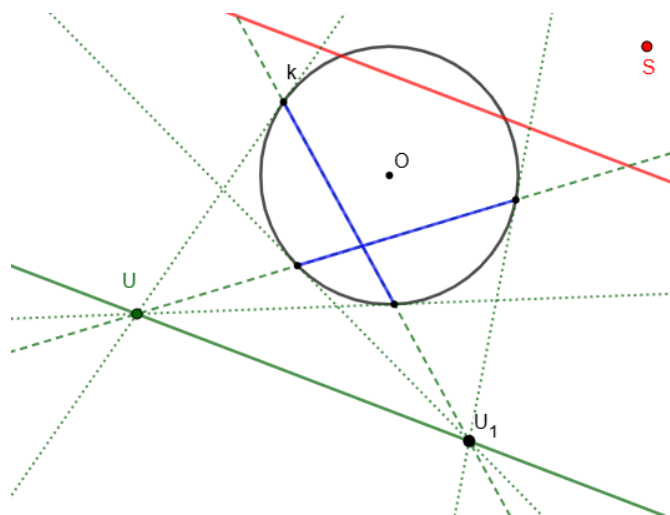


Obr. 5.3: Obraz kružnice v kolineácii

Pomoc: Využite zadanie vo forme appletu [Obraz kružnice v kolineácii](#), v ktorom je vytvorený nový nástroj pre zostrojenie obrazu ľubovoľného bodu v kolineácii. Nástroj aktivujete postupným kliknutím na zvolený bod roviny, potom na stred S , potom na os kolineácie o a nakoniec na úbežník U . Automaticky sa zobrazí obraz zvoleného bodu.

Postup konštrukcie v GeoGebre:

1. Daná je kružnica k so stredom $O[0,0]$ a polomerom $r = 1$, ktorá nepretína úbežnicu. Obrazom bude elipsa. Kolineácia je daná stredom S , osou o a úbežníkom U (prvého druhu), pre názornosť je vytvorená dvojica odpovedajúcich bodov A, A' .



Obr. 5.4: Združené priemery

2. Zostrojte dotyčnice ku kružnici v dvoch smeroch, ktoré sú určené úbežníkmi U, U_1 . Pozri obrázok 5.4. Vzniknú dva páry dotyčníc, ktorých obrazy zrejme budú – dvojice rovnobežných priamok. Totiž ich priesečníky sú obrazy úbežníkov, ktoré ležia na nevlastnej priamke.
3. Dva páry dotyčníc vytínajú na kružnici združené priemery (modré úsečky). Nájdite obrazy týchto združených priemerov. Využite nový nástroj, ktorý je umiestnený na paneli nástrojov (tretí sprava).
4. Over, že jej dotyčnice v smeroch obrazu $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ sú združené – teda že ich nosiče sú navzájom združené priemery. Elipsu zostroj pomocou niektorej konštrukcie uvedenej v diplomovej práci [10] [Effenberger, V., Kuželosečky](#).
5. Iný spôsob konštrukcie elipsy:
 - (a) Päť bodová: Vyber aspoň 5 bodov A_i na kružnici a zobraz ich kolíneáciou. Nájdí obrazy A'_i . Zostroj elipsu ako kuželosečku prechádzajúcu bodmi $A'_1, \dots, A'_5$.
 - (b) Pomocou GeoGebra nástroja *Množina bodov*.
6. Analyzuj jednotlivé spôsoby riešenia. Zmeň polohu kružnice resp. jej polomer tak, aby pretínala úbežnicu v 0,1,2 bodoch. Riešením bude elipsa, parabola a hyperbola.
7. Kompletné riešenie v prípade, že kružnica nepretína úbežnicu, nájdete [Tu](#). Po aktivovaní appletu *Obraz kružnice v kolíneácii - riešenie* použite navigačný panel.

5.5 Cvičenie

1. V afinnej rovine je daná kružnica všeobecnou rovnicou

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0.$$

- a) Upravte rovnicu kružnice na stredový tvar.
- b) Určte súradnice jej stredu S a polomer r .
- c) Rozhodnite, či kružnica pretína súradnicové osi, a určte príslušné priesečníky.
- d) Homogenizujte všeobecnú rovnicu kružnice a zapíšte jej projektívne rozšírenie.
- e) Overte, že pre $z = 1$ dostaneme späť pôvodnú afinnú rovnicu.

$$[(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9; S = [2, -1], r = 3; o_x : [2 \pm 2\sqrt{2}, 0], o_y : [0, -1 \pm \sqrt{5}]; \\ x^2 + y^2 - 4xz + 2yz - 4z^2 = 0]$$

2. V projektívnej rovine je daná kružnica

$$k : x^2 + y^2 - 4xz + 2yz - 4z^2 = 0$$

a priamka

$$p : y - z = 0.$$

- a) Určte priesečníky kružnice k s priamkou p .
- b) Rozhodnite, či sú získané priesečníky vlastné alebo nevlastné.
- c) Interpretujte výsledok v afinnej časti projektívnej roviny.

$$[k \cap p = \{[2 + \sqrt{2} : 1 : 1], [2 - \sqrt{2} : 1 : 1]\}; \text{oba body sú vlastné.}]$$

3. V projektívnej rovine je daná kružnica

$$k : x^2 + y^2 - 4xz + 2yz - 4z^2 = 0$$

a sústava priamok

$$p_\lambda : x - \lambda z = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

- a) Určte priesečníky kružnice k s priamkou p_λ v závislosti od parametra λ .
- b) Určte hodnoty parametra λ , pre ktoré má priamka p_λ s kružnicou dva rôzne reálne spoločné body.
- c) Určte hodnoty λ , pre ktoré je p_λ dotyčnicou kružnice.
- d) Určte hodnoty λ , pre ktoré nemajú p_λ a k žiadny spoločný reálny bod.

- e) Interpretujte získané výsledky geometricky vzhľadom na stred a polomer kružnice.

$[-1 < \lambda < 5$: dva rôzne body; $\lambda = -1, 5$: dotyk; $\lambda < -1$ alebo $\lambda > 5$: bez reálneho priesečníka.]

4. Určte prienik projektívneho rozšírenia kružnice

$$x^2 + y^2 - 4xz + 2yz - 4z^2 = 0$$

s nevlastnou priamkou

$$p_\infty : z = 0.$$

Rozhodnite, či má kružnica reálne nevlastné body.

$[x^2 + y^2 = 0$; v reálnej projektívnej rovine nemá kružnica nevlastné body.]

5. Predchádzajúcu úlohu riešte v komplexnej projektívnej rovine. Určte nevlastné body kružnice.

$$[I = [1 : i : 0], J = [1 : -i : 0]]$$

6. Ukážte, že každá kružnica

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

prechádza vo svojom komplexnom projektívnom rozšírení bodmi

$$I = [1 : i : 0], \quad J = [1 : -i : 0].$$

Aký význam má skutočnosť, že výsledok nezávisí od stredy $[a, b]$ ani od polomeru r ?

[Body I, J sú spoločnými nevlastnými bodmi všetkých euklidovských kružníc.]

7. Pre vektory

$$\mathbf{u} = (1, i), \quad \mathbf{v} = (1, -i)$$

vypočítajte hodnotu kvadratickej formy

$$q(x, y) = x^2 + y^2.$$

Vysvetlite súvislosť výsledku s pojmom izotropický smer.

$[q(\mathbf{u}) = q(\mathbf{v}) = 0$; oba vektory určujú izotropické smery.]

8. Určte rovnice izotropických priamok prechádzajúcich bodom

$$O = [0 : 0 : 1].$$

Použite izotropické body

$$I = [1 : i : 0], \quad J = [1 : -i : 0].$$

$$[y = ix, y = -ix]$$

9. V perspektívnej kolíneácii $\mathcal{K}$ je u úbežnica, teda vzor nevlastnej priamky obrazu. Kružnica k má podľa svojej polohy vzhľadom na u tieto možnosti:

- a) $k \cap u = \emptyset$,
- b) $k \cap u = \{U\}$,
- c) $k \cap u = \{U, V\}$, $U \neq V$.

Určte v každom prípade typ kužeľosečky

$$k' = \mathcal{K}(k)$$

v afinnej časti obrazu.

[a) elipsa; b) parabola; c) hyperbola.]

10. Uvažujte kružnicu

$$k : (x - 2)^2 + y^2 = 4.$$

Rozhodnite, aký typ kužeľosečky vznikne ako jej obraz v kolíneácii, ak jej úbežnica má postupne rovnice

$$u_1 : x = 5, \quad u_2 : x = 4, \quad u_3 : x = 3.$$

Svoje rozhodnutie zdôvodnite počtom reálnych priesečníkov kružnice s príslušnou úbežnicou.

[u_1 : elipsa; u_2 : parabola; u_3 : hyperbola.]

11. Pre kružnicu a úbežnice z predchádzajúcej úlohy určte konkrétne priesečníky $k \cap u_i$.

$$[k \cap u_1 = \emptyset; k \cap u_2 = \{[4, 0]\}; k \cap u_3 = \{[3, \sqrt{3}], [3, -\sqrt{3}]\}.]$$

12. V dynamickom applete [Kružnica v kolineácii](#) pohybujte stredom kružnice O tak, aby jej obrazom bola postupne

elipsa, parabola, hyperbola.

V každom prípade sledujte:

- a) počet priesečníkov kružnice s úbežnicou u ,
- b) obrazy týchto priesečníkov,
- c) počet nevlastných bodov výslednej kuželosečky.

Formulujte na základe experimentu pravidlo, ktoré určuje typ obrazu kružnice.

$[0 \rightarrow \text{elipsa}, 1 \rightarrow \text{parabola}, 2 \rightarrow \text{hyperbola}.]$

13. Rozhodnite, ktoré z nasledujúcich vlastností sa pri projektívnej kolineácii vo všeobecnosti zachovávajú:

- a) incidencia, b) vzdialenosť, c) kolinearita,
- d) veľkosť uhla, e) dotyk priamky s kuželosečkou, f) rovnobežnosť.

$[Zachovávajú sa a), c), e).]$

14. Vysvetlite, prečo obraz kružnice v projektívnej kolineácii nemusí byť kružnicou, hoci zostáva regulárnou kuželosečkou.

Ktoré vlastnosti kružnice sú metrické a ktoré vlastnosti použité pri projektívnom opise zostávajú zachované?

$[Kolineácia nezachováva vo všeobecnosti vzdialenosti ani uhly, ale zachováva incidenciu, kolinearitu a dotyk.]$

15. Zostrojte obraz kružnice $k(O, r)$ v stredovej kolineácii

$$\mathcal{K}(S, o, u),$$

ak kružnica k má s úbežnicou u práve jeden spoločný bod

$$k \cap u = \{U\}$$

a os kolineácie pretína kružnicu v dvoch bodoch T, R .

Určte najskôr typ výslednej kuželosečky. Pri konštrukcii využite obrazy dotyčníc kružnice v bodoch T, R .

Návod: Keďže kružnica má s úbežnicou práve jeden spoločný bod, jej obrazom je parabola. Body T, R ležiace na osi kolineácie sú samodružné. Zostrojte dotyčnice ku

kružnici v bodoch T, R a určte ich obrazy. Na dokončenie paraboly môžete použiť lichobežníkovú metódu.

Lichobežníková metóda: Spojnica priesečníka dvoch rôznych dotyčníc paraboly so stredom tetivy určenej ich dotykovými bodmi je rovnobežná s osou paraboly.

16. Zostrojte obraz kružnice $k(O, r)$ v stredovej kolíneácii

$$\mathcal{K}(S, o, u),$$

ak

$$k \cap u = \{U, V\}, \quad U \neq V,$$

a os kolíneácie pretína kružnicu v dvoch bodoch.

Určte najskôr typ výslednej kuželosečky a potom zostrojte jej asymptoty.

Návod: Obrazom kružnice je hyperbola. Zostrojte dotyčnice a_U, a_V ku kružnici v bodoch U, V . Ich obrazy sú asymptotami výslednej hyperboly. Smery obrazov možno určiť pomocou stredu kolíneácie S .

17. Zostrojte v prostredí GeoGebra vlastný príklad perspektívnej kolíneácie a kružnice tak, aby obrazom kružnice bola:

- a) elipsa,
- b) parabola,
- c) hyperbola.

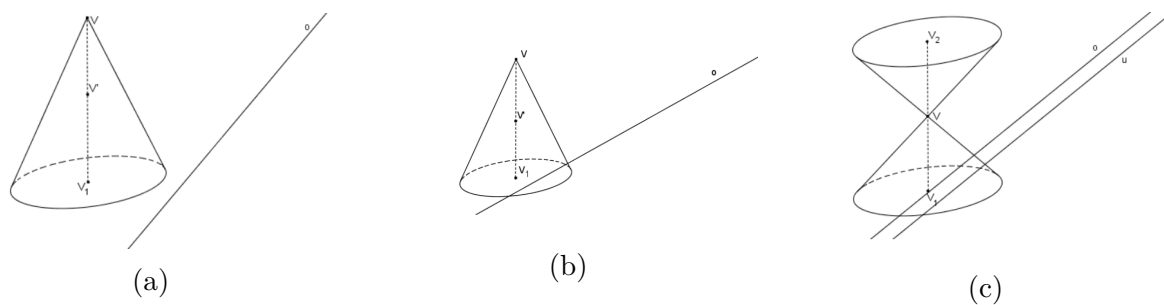
V každom prípade vyznačte úbežnicu a graficky overte príslušný počet jej priesečníkov s kružnicou.

18. Vo VRP zostrojte rez rotačným kuželom s vrcholom V . Rovina rezu ρ je určená priesečnicou o roviny podstavy a roviny ρ a bodom V' ležiacim na osi V_1V .

Zadanie podľa obrázka 5.5.

Návod.

Perspektívna kolíneácia je daná: $\mathcal{K}(V, o, V_1 \rightarrow V')$. Niektoré riešené príklady nájdete v práci [21].



Obr. 5.5: Projektívna transformácia kuželosečky.

6 Kuželosečka – tri pohľady

Motivácia: Štúdium kuželosečiek vytvára prirodzený most medzi klasickou geometriou, analytickou geometriou a lineárnou algebrou. Elipsu, parabolu a hyperbolu môžeme opisovať pomocou ich geometrických vlastností, rovníc alebo projektívnych vzťahov. Každý z týchto pohľadov zvýrazňuje inú stránku toho istého geometrického objektu.

V predchádzajúcej kapitole sme navyše pomocou dynamickej konštrukcie videli, že z projektívneho pohľadu sa hranice medzi jednotlivými typmi kuželosečiek strácajú. Elipsa, parabola a hyperbola sa ukázali ako rôzne afinné podoby jedného projektívneho objektu.

Historický kontext

Základy systematického štúdia kuželosečiek položil Apollónios z Pergy (3. storočie pred n. l.), ktorý skúmal elipsu, parabolu a hyperbolu ako rezy kužeľovej plochy. Jeho dielo *Kuželosečky* (*Konika*) patrilo po stáročia k základným dielam geometrie. V novoveku priniesli Fermat a Descartes analytický spôsob skúmania geometrických kriviek pomocou súradníc a rovníc. Newton ukázal význam kuželosečiek aj pri opise pohybu telies a projektívna geometria 19. storočia napokon odkryla ich spoločnú projektívnu podstatu.

Kuželosečky sa prirodzene objavujú aj mimo samotnej geometrie. Stretávame sa s nimi v optike, nebeskej mechanike, pri opise dráh telies či v rôznych zobrazovacích metódach. Ich význam však nespočíva iba v množstve aplikácií. Z matematického hľadiska sú zaujímavé najmä tým, že ich možno skúmať viacerými spôsobmi, ktoré sa navzájom dopĺňajú.

V predchádzajúcej kapitole *Obraz kružnice v kolíneácii* sme dospeli ku kuželosečke projektívnou cestou. Obrazom kružnice v regulárnej kolíneácii projektívnej roviny je regulárna kuželosečka. Dynamický experiment zároveň ukázal, ako sa podľa vzájomnej polohy kružnice a úbežnice objavujú elipsa, parabola a hyperbola.

To však nie je jediný spôsob, ako možno pojem kuželosečky zaviesť. V klasickej geometrii sa historicky i matematicky stretávame s viacerými charakterizáciami toho istého objektu.

V tejto kapitole sa zameriame najmä na tri z nich:

1. **metrickú charakterizáciu** kuželosečky pomocou vzdialeností od daného bodu a priamky,
2. **projektívnu charakterizáciu** kuželosečky pomocou dvoch projektívnych zväzkov priamok,
3. **priestorovú charakterizáciu** kuželosečky ako rovinného rezu rotačnej kuželovej plochy, ktorú s metrickým opisom prepája Quételetova–Dandelinova veta.

Popri týchto geometrických charakterizáciách budeme kuželosečku opisovať aj **analyticky**, ako množinu bodov spĺňajúcich kvadratickú rovnicu. Práve analytický opis vytvorí spojenie s lineárnou algebrou a umožní nám neskôr kuželosečky systematicky klasifikovať.

Nejde o rôzne kuželosečky, ale o rôzne spôsoby, ako sa pozerať na ten istý geometrický objekt.

6.1 Metrický pohľad na kuželosečku

Začnime charakterizáciou, ktorá vychádza z euklidovskej metriky. Nech F je pevný bod roviny a r priamka, ktorá bodom F neprechádza. Pre bod X porovnáваме jeho vzdialenosť od bodu F so vzdialenosťou od priamky r .

Definícia 6.1.1: Metrická definícia kuželosečky

Nech F je bod, r priamka, pričom $F \notin r$, a nech $\varepsilon > 0$ je reálne číslo.

Kuželosečkou nazývame množinu všetkých bodov X roviny, pre ktoré platí

$$d(X, F) = \varepsilon d(X, r),$$

resp.

$$\frac{d(X, F)}{d(X, r)} = \varepsilon.$$

Bod F nazývame *ohniskom*, priamku r *riadiacou priamkou* a číslo ε *numerickou excentricitou* kuželosečky.

Podľa hodnoty excentricity dostávame

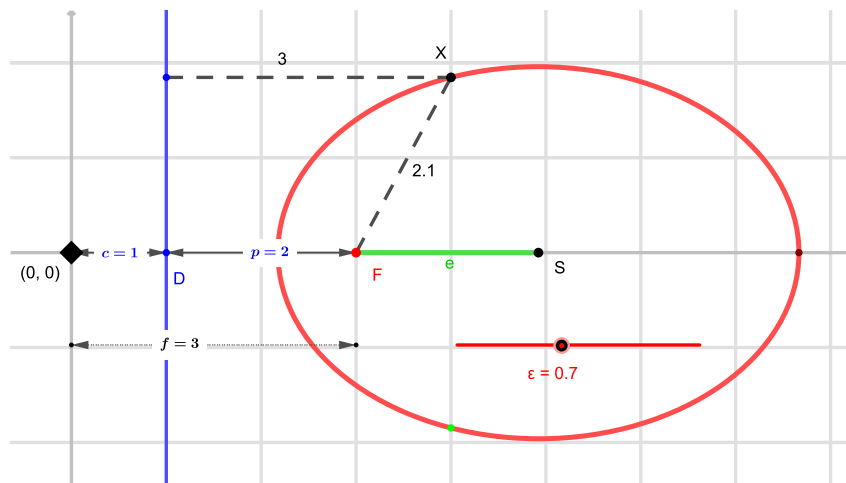
$$0 < \varepsilon < 1 \implies \text{elipsa,}$$

$$\varepsilon = 1 \implies \text{parabola,}$$

$$\varepsilon > 1 \implies \text{hyperbola.}$$

Táto definícia poskytuje jednotný metrický opis troch typov kuželosečiek. Rozdiel medzi nimi je vyjadrený jediným parametrom – excentricitou ε .

Metrická definícia kuželosečky je výhodná vo vyučovaní pre jej názornosť a možnosť okamžitej vizualizácie v dynamickej geometrii (napr. pomocou GeoGebry).



Obr. 6.1: Vizualizácia kuželosečky pomocou pomeru vzdialeností od ohniska a riadiacej priamky.

[Interaktívny applet: Metrická definícia kuželosečky](#)

Didaktická poznámka. Skúmajte metrickú definíciu V applete meníte hodnotu excentricity e a sledujte tvar vznikajúcej kuželosečky.

1. Čo sa deje s kuželosečkou, keď sa hodnota ε postupne približuje k hodnote 1? V applete je použité označenie $k \leftrightarrow \varepsilon$.
2. Porovnajte prípady $\varepsilon < 1$, $\varepsilon = 1$ a $\varepsilon > 1$. Ako sa zmena jediného parametra prejaví na tvare kuželosečky?
3. V predchádzajúcej kapitole sme elipsu, parabolu a hyperbolu rozlišovali podľa počtu reálnych nevlastných bodov. Čím ich rozlišujeme teraz?

Od geometrickej konštrukcie k analytickej rovnici

Predchádzajúci applet vytvára kuželosečku ako množinu bodov, ktorých vzdialenosť od ohniska a riadiacej priamky je v konštantnom pomere. V algebraickom okne GeoGebry sa súčasne zobrazuje rovnica vznikajúcej kuželosečky. Pri zmene vstupných údajov tak môžeme bezprostredne sledovať nielen zmenu jej geometrického tvaru, ale aj zmenu jej analytického vyjadrenia. Ukážeme, ako možno túto rovnicu odvodiť priamo z metrickej definície.

Zvoľme karteziánsku súradnicovú sústavu tak, aby ohnisko malo súradnice $F(f, 0)$ a riadiaca priamka mala rovnicu

$$d : x = c.$$

Nech $X(x, y)$ je ľubovoľný bod kuželosečky s numerickou excentricitou $\varepsilon > 0$. Metrická definícia dáva vzťah

$$\frac{d(X, F)}{d(X, d)} = \varepsilon.$$

Kedže

$$d(X, F) = \sqrt{(x - f)^2 + y^2}, \quad d(X, d) = |x - c|,$$

dostávame

$$\frac{\sqrt{(x - f)^2 + y^2}}{|x - c|} = \varepsilon.$$

Po umocnení oboch strán vznikne rovnica

$$(x - f)^2 + y^2 = \varepsilon^2(x - c)^2,$$

ktorú po roznásobení upravíme na všeobecný tvar

$$(1 - \varepsilon^2)x^2 - 2(f - \varepsilon^2 c)x + y^2 + f^2 - \varepsilon^2 c^2 = 0. \quad (6.1)$$

Rovnica (6.1) predstavuje všeobecnú kvadratickú rovnicu kužeľosečky. Jej konkrétny typ závisí iba od hodnoty numerickej excentricity:

$$\begin{aligned} 0 < \varepsilon < 1 &\implies \text{elipsa,} \\ \varepsilon = 1 &\implies \text{parabola,} \\ \varepsilon > 1 &\implies \text{hyperbola.} \end{aligned}$$

Komentár 2. Pri práci s appletom sledujte súčasne geometrické okno a algebraické okno GeoGebry. Zmena polohy ohniska, riadiacej priamky alebo numerickej excentricity sa prejaví nielen zmenou tvaru kužeľosečky, ale aj zmenou koeficientov jej rovnice. Geometrická konštrukcia a analytické vyjadrenie tak opisujú ten istý objekt dvoma rôznymi spôsobmi.

Príklad 6.1.1: Od konštrukcie k rovnici

Pracujte s appletom *Metrická definícia kuželosečky*. Sledujte súčasne geometrické a algebraické okno GeoGebry a zmenou vstupných údajov vytvorte postupne elipsu, parabolu a hyperbolu.

1. Sledujte, ako sa pri zmene numerickej excentricity ε mení tvar kuželosečky a jej rovnica v algebraickom okne.
2. Pre každý z troch typov kuželosečiek si zaznamenajte hodnotu ε a rovnicu, ktorú zobrazí GeoGebra. Porovnajte svoje pozorovanie s podmienkami

$$0 < \varepsilon < 1, \quad \varepsilon = 1, \quad \varepsilon > 1.$$

3. Vyberte jednu zo získaných rovníc a porovnajte ju s rovnicou (6.1). Identifikujte v nej údaje, ktoré zodpovedajú geometrickej konštrukcii.
4. Upravte vybranú rovnicu na kanonický tvar a určte z nej základné parametre kuželosečky. Potrebný postup si môžete vopred naštudovať v sekcii 7.6.
5. Porovnajte analyticky získané parametre s geometricou konštrukciou v applete.

6.1.1 Projektívna definícia kuželosečky

Metrická definícia kuželosečky využíva vzdialenosť, ohnisko, riadiacu priamku a excentricitu. V projektívnej geometrii však vzdialenosť nie je invariantom. Kuželosečku preto potrebujeme charakterizovať pomocou vlastností, ktoré majú projektívny význam.

Jednu z takýchto možností poskytujú projektívne zväzky priamok.

Nech $[P]$ a $[Q]$ sú dva zväzky priamok so stredmi v rôznych bodoch P a Q . Najskôr pripomeňme osobitný spôsob, akým môžeme tieto dva zväzky navzájom priradiť.

Nech o je priamka, ktorá neprechádza bodmi P ani Q . Každej priamke $p \in [P]$ priradíme jej priesečník

$$A = p \cap o$$

a bod A následne spojíme s bodom Q . Dostaneme priamku

$$q = QA \in [Q].$$

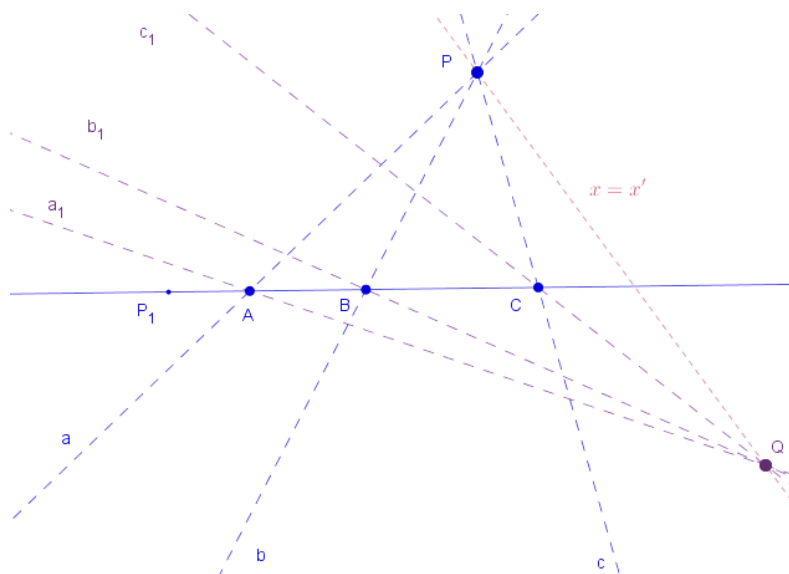
Takto vzniká zobrazenie

$$\rho : [P] \longrightarrow [Q], \quad p \longmapsto q,$$

ktoré nazývame *perspektívnosťou zväzkov priamok*. Priamku o nazývame *osou perspektív-*

nosti a píšeme

$$\rho : [P] \xrightarrow{o} [Q].$$



Obr. 6.2: Perspektívne zväzky priamok

Všeobecnejšie zobrazenie medzi dvoma zväzkami, ktoré možno získať zložením konečného počtu perspektívností, nazývame *projektívnosťou zväzkov*.

Podrobnejší výklad projektívnosti zväzkov možno nájsť v práci [CHO, 2013].

Motivácia: Perspektívnosť zväzkov si môžeme predstaviť ako dva rôzne stredy pozorovania P a Q . Priamka o sprostredkuje medzi nimi priradenie smerov: priamka prechádzajúca bodom P pretne o v bode A a ten istý bod A určí zodpovedajúcu priamku prechádzajúcu bodom Q .

Projektívnosť je všeobecnejšie priradenie medzi oboma zväzkami. Ak teraz budeme sledovať priesečníky zodpovedajúcich si priamok oboch zväzkov, dostaneme nový geometrický objekt.

Akú množinu vytvoria priesečníky zodpovedajúcich si priamok dvoch projektívnych zväzkov?

Definícia 6.1.2: Projektívna definícia kuželošky

Nech P, Q sú dva rôzne body projektívnej roviny $\mathbb{P}^2$ a nech $[P], [Q]$ sú zväzky priamok so stredmi P, Q .

Nech

$$\pi : [P] \longrightarrow [Q]$$

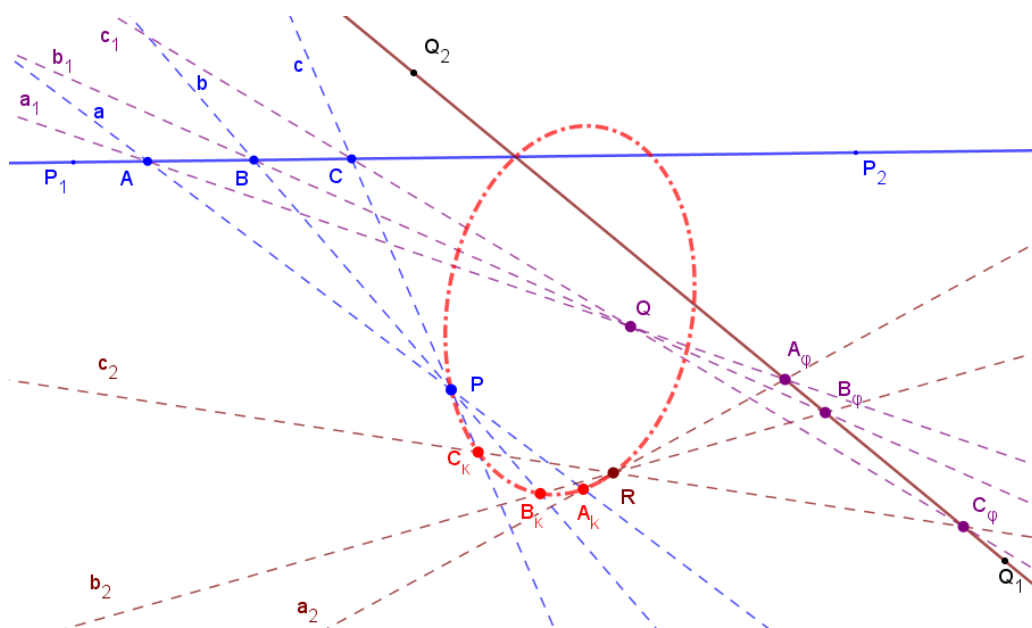
je projektívnosť medzi týmito zväzkami, ktorá nie je perspektívnosťou.

Kuželoškou K_q nazývame množinu priesečníkov zodpovedajúcich si priamok oboch zväzkov:

$$K_q = \{X = m \cap \pi(m) ; m \in [P]\}.$$

Kuželošku určenú zväzkami $[P], [Q]$ a projektívnosťou π označujeme

$$K_q = K_q(P, Q; \pi).$$



Obr. 6.3: Kuželoška určená dvoma projektívnymi zväzkami priamok

Interaktívny GeoGebra applet: Projektívna definícia kuželošky

Didaktická poznámka. Skúmajte projektívnu konštrukciu V applete sledujte dvojice zodpovedajúcich si priamok

$$m \in [P], \quad \pi(m) \in [Q]$$

a ich priesečník X .

1. Pohybujte určujúcimi prvkami konštrukcie a sledujte pohyb bodu

$$X = m \cap \pi(m).$$

Akú krivku tento bod vytvára?

2. Čo sa pri pohybe mení a čo zostáva zachované vo vzťahu medzi oboma zväzkami priamok?
3. Ktoré metrické pojmy z predchádzajúcej definície – ohnisko, vzdialenosť, riadiaca priamka alebo excentricita – sme pri tejto konštrukcii potrebovali?

Komentár 3. Podmienka, že projektivnosť π nie je perspektívnosťou, je podstatná. Ak by π bola perspektívnosťou s osou o , zodpovedajúce si priamky by sa pretínali práve v bodoch osi o . Namiesto regulárnej kužeľosečky by sme tak dostali degenerovaný, resp. singulárny prípad.

Teda ak π nie je perspektívnosť, kužeľosečka K_q sa nazýva **regulárna**; v opačnom prípade je **singulárna**.

Poznámka 6.1.1

Značenie: kužeľosečku určenú zväzkami $[P]$ a $[Q]$ a projektivnosťou π budeme označovať $K_q = K_q(P, Q; \pi)$.

6.1.2 Kužeľosečka ako rovinný rez kužeľovej plochy

Historický kontext

Myšlienka skúmať kužeľosečky ako rovinné rezy kužeľovej plochy siaha až do antickej matematiky. Už **Menaichmos** (4. storočie pred n. l.) využíval kužeľosečky pri hľadaní riešenia problému zdvojenia kocky. O storočie neskôr **Apollónios z Pergy** vo svojom diele *Konika* systematicky rozvinul ich teóriu a zaviedol názvy elipsa, parabola a hyperbola, ktoré používame dodnes.

Pozoruhodné prepojenie priestorového a rovinného pohľadu prinieslo až 19. storočie. **Adolphe Quetelet** (1796–1874) a **Germinal Pierre Dandelin** (1794–1847) nezávisle skúmali vzťah medzi rezmi rotačnej kužeľovej plochy a ohniskovými vlastnosťami vznikajúcich kužeľosečiek.

Kľúčovú úlohu pritom zohrávajú guľové plochy vpísané do kužeľovej plochy a dotýkajúce sa roviny rezu. Dnes ich poznáme ako *Dandelinove sféry*. Ich konštrukcia vytvára prirodzený most medzi priestorovým rezom kužeľovej plochy a metrickými vlastnosťami kužeľosečky v rovine.

Doteraz sme kuželosečku charakterizovali dvoma spôsobmi. Metrický pohľad využíval vzdialenosť od ohniska a riadiacej priamky, projektívny pohľad zasa priesečníky zodpovedajúcich si priamok dvoch projektívnych zväzkov.

Historicky však pojem kuželosečky vznikol inak – skúmaním rovinných rezov kuželovej plochy.

Uvažujme rotačnú kuželovú plochu a rovinu ρ , ktorá ju pretína. Podľa polohy roviny ρ vzhľadom na kuželovú plochu môže byť rezom kružnica, elipsa, parabola alebo hyperbola.

- Ak je rovina ρ kolmá na os kuželovej plochy, rezom je **kružnica**.
- Ak rovina pretína iba jednu časť kuželovej plochy a nie je rovnobežná so žiadnou jej tvoriacou priamkou, rezom je **elipsa**.
- Ak je rovina rovnobežná s niektorou tvoriacou priamkou kuželovej plochy, rezom je **parabola**.
- Ak rovina pretína obe časti kuželovej plochy, rezom je **hyperbola**.

Takto vznikol aj samotný názov *kuželosečka*: ide o krivku, ktorú dostaneme ako prienik roviny s kuželovou plochou.

Ako však súvisí priestorový rez kuželovej plochy s ohniskami a riadiacimi priamkami, ktoré sme použili v metrickej definícii?

Odpoveď poskytuje pozoruhodná konštrukcia pomocou guľových plôch, ktoré dnes nazývame *Dandelinove sféry*.

Quételetova–Dandelinova veta

Do kuželovej plochy vložme guľovú plochu tak, aby sa dotýkala kuželovej plochy a zároveň roviny rezu ρ . Aktivujte si applet popísaný na obrázku 6.4 Bod dotyku guľovej plochy s rovinou ρ označme F .

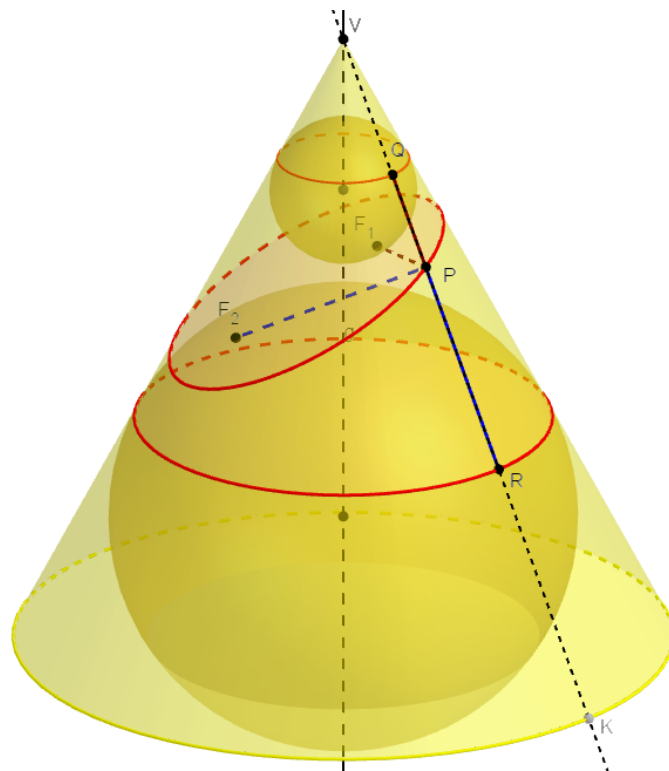
Ukazuje sa, že tento bod nie je náhodným bodom rezu. Je práve ohniskom vznikajúcej kuželosečky.

Veta 6.1.1: Quételetova–Dandelinova veta

Nech rovina ρ pretína rotačnú kuželovú plochu v regulárnej kuželosečke.

Guľové plochy vpísané do kuželovej plochy, ktoré sa súčasne dotýkajú roviny ρ , určujú svojimi bodmi dotyku s rovinou ρ ohniská tejto kuželosečky.

Myšlienka Quételetovej–Dandelinovej vety vychádza z jednoduchej vlastnosti dotyčnic ku guľovej ploche. Dve dotyčnicové úsečky vedené z toho istého bodu ku guľovej ploche majú rovnakú dĺžku.



Obr. 6.4: Dandelinove sféry a ohniská kuželosečky

[Interaktívny applet: Quételet-Dandelinova veta](#)

Nech X je bod kuželosečky. Tvoríaca priamka kuželovej plochy prechádzajúca bodom X sa dotýka Dandelinovej sféry v určitom bode. Z rovnosti príslušných dotyčnicových úsečiek potom možno vyjadriť vzdialenosť bodu X od bodu dotyku F pomocou geometrie kuželovej plochy.

Práve táto vlastnosť vytvára spojenie medzi priestorovým rezom kuželovej plochy a metrickými vlastnosťami kuželosečky v rovine ρ .

Počet Dandelinových sfér závisí od typu rezu.

1. Pri elipse možno umiestniť dve Dandelinove sféry dotýkajúce sa roviny rezu. Ich body dotyku určujú dve ohniská elipsy.
2. Pri parabole vzniká jedna Dandelinova sféra a jej bod dotyku s rovinou rezu určuje ohnisko paraboly.
3. Pri hyperbole možno opäť uvažovať dve Dandelinove sféry, zodpovedajúce dvom ohniskám hyperboly.

Poznámka 6.1.2: Prečo sú Dandelinove sféry dôležité?

Kuželosečku sme najskôr získali ako rovinný rez kuželovej plochy. V takomto priestorovom opise sa ohniská na prvý pohľad vôbec nevyskytujú.

Quételetova–Dandelinova veta ukazuje, že ohniská nie sú dodatočne zavedenými bodmi. Vznikajú prirodzene z geometrie samotného rezu.

Priestorová a metrická charakterizácia kuželosečky tak opisujú ten istý geometrický objekt z dvoch rôznych pohľadov.

6.2 Tri cesty ku kuželosečke

V tejto kapitole sme sa k pojmu kuželosečky dostali tromi geometrickými cestami:

metrická	projektívna	priestorová
$d(X, F) = \varepsilon d(X, r)$	$X = m \cap \pi(m)$	$K = \rho \cap \mathcal{C}$

kde $\mathcal{C}$ označuje kuželovú plochu.

Každá z týchto charakterizácií vychádza z iných geometrických pojmov. Metrická pracuje so vzdialenosťou, projektívna s incidenciou a projektívnosťou zväzkov a priestorová s rezom kuželovej plochy.

Napriek rozdielnym východiskám opisujú ten istý geometrický objekt.

Algebraický pohľad

Zostáva ešte jeden pohľad, ktorý bude pre ďalšie štúdium rozhodujúci. Kuželosečku môžeme opísať rovnicou druhého stupňa

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0.$$

Geometrická otázka sa tým mení na algebraickú:

Ako možno z koeficientov rovnice rozpoznať, či opisuje elipsu, parabolu alebo hyperbolu?

Touto otázkou prejdeme k analytickej klasifikácii kuželosečiek.

6.3 Cvičenie

1. Rozhodnite, aká kuželosečka vznikne rezom rotačnej kuželovej plochy rovinou ρ v nasledujúcich prípadoch:

- a) rovina ρ pretína iba jednu časť kuželovej plochy a nie je rovnobežná so žiadnou jej tvoriacou priamkou;
- b) rovina ρ je rovnobežná s jednou tvoriacou priamkou kuželovej plochy;
- c) rovina ρ pretína obe časti kuželovej plochy;
- d) rovina ρ je kolmá na os rotačnej kuželovej plochy.

Porovnajte jednotlivé prípady s konštrukciou rezu rotačného kužela, ktorú ste realizovali v cvičení 18 pomocou perspektívnej kolineácie v prostredí GeoGebra 3D.

[a) elipsa; b) parabola; c) hyperbola; d) kružnica.]

2. Vysvetlite pomocou Dandelinových gúl, prečo možno pri reze rotačnej kuželovej plochy elipsou interpretovať body dotyku gúl s rovinou rezu ako ohniská elipsy.

Ktorá vlastnosť dotyčníc ku guli je pri tejto argumentácii rozhodujúca?

[Úsečky dotyčníc vedených z toho istého bodu ku guli majú rovnakú dĺžku.]

3. Nech F je pevný bod, r pevná priamka, $F \notin r$, a $\varepsilon > 0$. Bod X sa pohybuje tak, že

$$d(X, F) = \varepsilon d(X, r).$$

Určte typ kuželosečky pre

$$\varepsilon = \frac{1}{2}, \quad \varepsilon = 1, \quad \varepsilon = 2.$$

[$\varepsilon = \frac{1}{2}$: elipsa; $\varepsilon = 1$: parabola; $\varepsilon = 2$: hyperbola.]

4. V karteziánskej súradnicovej sústave je dané ohnisko

$$F = [2, 0]$$

a riadiaca priamka

$$r : x = -2.$$

Určte rovnicu množiny všetkých bodov $X = [x, y]$, pre ktoré platí

$$d(X, F) = d(X, r).$$

Určte typ získanej kužeľosečky a jej vrchol.

$$[y^2 = 8x; \text{ parabola; } V = [0, 0].]$$

5. Je dané ohnisko

$$F = [3, 0],$$

radiaca priamka

$$r : x = 5$$

a numerická excentricita

$$\varepsilon = \frac{1}{2}.$$

Zostavte rovnicu príslušnej kužeľosečky a určte jej typ.

$$[3x^2 + 4y^2 - 14x + 11 = 0; \text{ elipsa}.]$$

6. Je dané ohnisko

$$F = [3, 0],$$

radiaca priamka

$$r : x = 1$$

a numerická excentricita

$$\varepsilon = 2.$$

Zostavte rovnicu príslušnej kužeľosečky a určte jej typ.

$$[3x^2 - y^2 - 2x - 5 = 0; \text{ hyperbola}.]$$

7. Vysvetlite, prečo metrická definícia

$$d(X, F) = \varepsilon d(X, r)$$

rozlišuje elipsu, parabolu a hyperbolu podľa hodnoty ε , zatiaľ čo z projektívneho hľadiska tieto tri krivky predstavujú ten istý typ geometrického objektu.

8. Nech $[P]$ a $[Q]$ sú dva rôzne zväzky priamok a nech

$$\pi : [P] \longrightarrow [Q]$$

je projektivita, ktorá nie je perspektivitou.

Pre každú priamku $p \in [P]$ označme jej obraz

$$p' = \pi(p) \in [Q].$$

Akú množinu vytvárajú priesečníky

$$X = p \cap p'?$$

[Projektívnu kuželosečku prechádzajúcu bodmi P a Q .]

9. V predchádzajúcej úlohe predpokladajme, že projektivita $\pi : [P] \rightarrow [Q]$ je perspektivitou.

Preskúmajte, čo sa stane s množinou bodov

$$X = p \cap \pi(p).$$

Porovnajte výsledok s prípadom, keď projektivita perspektivitou nie je.

[Vzniká degenerovaný prípad; nedostávame regulárnu kuželosečku.]

10. Vysvetlite, v čom sa líšia a v čom sa dopĺňajú nasledujúce tri charakteristiky kuželosečky:

- a) rez rotačnej kuželovej plochy rovinou;
- b) množina bodov spĺňajúcich

$$d(X, F) = \varepsilon d(X, r);$$

- c) množina priesečníkov zodpovedajúcich si priamok dvoch projektívne združených zväzkov.

Uvedte, ktorý z týchto pohľadov je *priestorový*, ktorý *metrický* a ktorý *projektívny*.

[a) priestorový; b) metrický; c) projektívny.]

11. Otvorte interaktívny applet [Metrická definícia kuželosečky](#).

Meňte polohu ohniska, riadiacej priamky a hodnotu numerickej excentricity ε .

- a) Vytvorte postupne elipsu, parabolu a hyperbolu.
- b) Pri každom prípade sledujte rovnicu, ktorú GeoGebra zobrazuje v algebraickom okne.
- c) Porovnajte geometrickú konštrukciu s analytickou rovnicou vytvorenej kuželosečky.
- d) Pokúste sa formulovať, ktorá časť všeobecnej rovnice signalizuje prechod medzi jednotlivými typmi kuželosečiek.

7 Analytická klasifikácia kuželosečiek

Motivácia: V predchádzajúcich kapitolách sme sa ku kuželosečkám dostali geometrickou cestou. Sledovali sme obraz kružnice v kolíneácii, porovnávali metrický a projektívny pohľad a kuželosečku sme charakterizovali aj ako rovinný rez kuželovej plochy.

Teraz zmeníme jazyk.

Kuželosečku budeme opisovať pomocou rovnice a položíme si otázku:

Čo možno o geometrickom tvare kuželosečky vyčítať priamo z jej rovnice?

Ukáže sa, že koeficienty kvadratickej rovnice v sebe nesú informáciu nielen o type kuželosečky, ale aj o jej polohe, orientácii a prípadnej singularite. Geometrický problém sa tak prirodzene prepája s lineárnou algebrou.

7.1 Všeobecná rovnica kuželosečky

V afinných súradniciach má všeobecná kvadratická rovnica tvar

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \quad (7.1)$$

kde

$$A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R},$$

pričom aspoň jeden z koeficientov A, B, C je nenulový.

Rovnica (7.1) môže opisovať regulárnu kuželosečku, ale v osobitných prípadoch aj degenerovaný geometrický útvar alebo prázdnu množinu reálnych bodov. Samotný zápis rovnice teda ešte neprezrádza, aký geometrický objekt predstavuje.

Prvým krokom bude preto nájsť algebraický zápis, ktorý umožní koeficienty rovnice skúmať systematickejšie.

7.2 Homogénna a maticová rovnica kužeľosečky

Prejdime k homogénnym súradniciam

$$X = [x : y : z].$$

Homogenizáciou rovnice (7.1) dostávame

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxz + 2Eyz + Fz^2 = 0. \quad (7.2)$$

Rovnicu môžeme zapísať pomocou symetrickej matice

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix}.$$

Ak homogénne súradnice bodu zapíšeme ako stĺpcový vektor

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

potom rovnica kužeľosečky nadobúda kompaktný tvar

$$\mathbf{X}^T \mathcal{A} \mathbf{X} = 0. \quad (7.3)$$

Poznámka 7.2.1: Prečo je maticový zápis užitočný?

Matica $\mathcal{A}$ obsahuje všetky koeficienty kužeľosečky v jedinom algebraickom objekte. Geometrické vlastnosti kužeľosečky tak môžeme skúmať pomocou vlastností tejto matice – jej determinantu, hodnosti, vlastných čísel a transformácií pri zmene súradnicovej sústavy alebo pri kolíneácii.

Poznámka 7.2.2: Poznámka k označeniu koeficientov

V celej učebnici používame všeobecnú rovnicu kuželosečky v tvare

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Koeficienty B, D, E sú teda polovicami koeficientov, ktoré v rovnici priamo stoja pri členoch xy, x, y .

Toto označenie budeme dôsledne používať najmä preto, že vedie k prirodzenému symetrickému maticovému zápisu

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix}.$$

7.3 Regulárna a singulárna kuželosečka

Maticový zápis umožňuje prirodzene rozlíšiť regulárny a singulárny prípad kuželosečky.

Nech je kuželosečka v projektívnej rovine daná homogénnou rovnicou

$$\mathbf{X}^T \mathcal{A} \mathbf{X} = 0,$$

kde

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix}$$

je symetrická matica kuželosečky.

Definícia 7.3.1: Regulárna a singulárna kuželosečka

Kuželosečku

$$\mathbf{X}^T \mathcal{A} \mathbf{X} = 0$$

nazývame *regulárnou*, ak

$$\det \mathcal{A} \neq 0.$$

Ak

$$\det \mathcal{A} = 0,$$

kuželosečku nazývame *singulárnou* alebo *degenerovanou*.

Singulárna kuželosečka môže v reálnej afinnej časti projektívnej roviny predstavovať napríklad dvojicu rôznobežných alebo rovnobežných priamok, dvojnásobnú priamku či

jediný bod. V niektorých prípadoch nemusí mať žiadne reálne vlastné body.

Determinant

$$\Delta_3 = \det \mathcal{A}$$

budeme nazývať *veľkým diskriminantom kužeľosečky*.

Pri klasifikácii regulárnych kužeľosečiek zohráva dôležitú úlohu aj kvadratická časť všeobecnej rovnice

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2.$$

Je určená symetrickou maticou

$$\mathcal{A}_2 = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}.$$

Jej determinant

$$\delta = \det \mathcal{A}_2 = AC - B^2$$

umožňuje rozlíšiť tri základné typy kvadratickej časti:

$$\delta > 0 \implies \text{eliptický typ,}$$

$$\delta = 0 \implies \text{parabolický typ,}$$

$$\delta < 0 \implies \text{hyperbolický typ.}$$

Pri regulárnych reálnych kužeľosečkách s reálnymi bodmi zodpovedajú tieto tri prípady elipse, parabole a hyperbole. Úplnú analytickú klasifikáciu, vrátane degenerovaných prípadov, uvedieme neskôr.

Poznámka 7.3.1: Tretia klasifikácia toho istého objektu

Tie isté tri základné typy kužeľosečiek sme už rozlišovali dvoma geometrickými spôsobmi.

Projektívne podľa počtu reálnych nevlastných bodov:

$$0, \quad 1, \quad 2.$$

Metricky podľa hodnoty excentricity:

$$e < 1, \quad e = 1, \quad e > 1.$$

Analyticky ich teraz rozlišujeme pomocou znamienka

$$\delta = AC - B^2.$$

Tri rôzne jazyky geometrie tak vedú k tej istej základnej klasifikácii kužeľosečiek.

7.4 Kolineácia projektívnej roviny

V predchádzajúcich kapitolách sme pracovali najmä so stredovou (perspektívnou) kolineáciou. Jej geometrický opis pomocou stredu, osi a úbežníc nám umožnil dynamicky sledovať, ako sa kružnica zobrazuje na elipsu, parabolu alebo hyperbolu.

Pre analytické skúmanie kuželosečiek však potrebujeme všeobecnejší pohľad na kolineáciu projektívnej roviny.

Definícia 7.4.1: Kolineácia projektívnej roviny

Kolineácia reálnej projektívnej roviny je bijektívne zobrazenie

$$\mathcal{K} : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R}),$$

ktoré zachováva incidenciu bodov a priamok.

Ekvivalentne, kolineácia zobrazuje priamky na priamky a kolineárne body na kolineárne body.

Pripomeňme, že reálna projektívna rovina bola zavedená ako množina tried ekvivalencie

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = (\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}) / \sim,$$

kde

$$\mathbf{x} \sim \mathbf{y} \iff \mathbf{y} = \lambda \mathbf{x}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Projektívny bod preto reprezentujeme homogénnymi súradnicami

$$X = [x : y : z],$$

pričom

$$[x : y : z] = [\lambda x : \lambda y : \lambda z], \quad \lambda \neq 0.$$

Tento spôsob zavedenia projektívnej roviny umožňuje opísať kolineáciu pomocou lineárnej algebry.

Poznámka 7.4.1

V práci [14] sa uvádza definícia: Kolineácia je bijektívna transformácia reálnej projektívnej roviny na seba, ktorá zobrazuje priamky na priamky a zachováva prieniky priamok.

Táto vlastnosť je ekvivalentná s formuláciou definície 7.4. Z nej vyplýva, že kolineácia $\mathcal{K}$ zobrazuje body roviny $\mathbb{E}_2$ opäť na body tejto roviny a priamky roviny $\mathbb{E}_2$ na priamky tejto roviny, pričom zachováva incidenciu bodov a priamok.

7.4.1 Maticové vyjadrenie kolineácie

Nech

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix}$$

je regulárna matica, teda

$$\det H \neq 0.$$

Regulárna lineárna transformácia

$$\mathbf{X} \longmapsto H\mathbf{X}$$

zobrazuje nenulové vektory z $\mathbb{R}^3$ opäť na nenulové vektory a zachováva ich proporionalitu. Preto indukuje zobrazenie tried ekvivalencie v projektívnej rovine.

Podrobnejšie informácie o matici kolineácie nájdete v práci [1].

Definícia 7.4.2: Maticové vyjadrenie kolineácie

Nech

$$H \in GL(3, \mathbb{R}).$$

Regulárna lineárna transformácia

$$\mathbf{X} \longmapsto H\mathbf{X}$$

indukuje kolineáciu

$$\mathcal{K}_H : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$$

predpisom

$$\mathcal{K}_H([\mathbf{X}]) = [H\mathbf{X}].$$

Maticu H nazývame *maticou kolineácie*.

Ak bod X prejde pri kolineácii na bod X' , môžeme túto skutočnosť v homogénnych súradniciach zapisovať

$$\mathbf{X}' \sim H\mathbf{X}.$$

Symbol $\sim$ pripomína, že homogénne súradnice bodu sú určené iba do nenulového skalárneho násobku.

Pre každé $\lambda \neq 0$ platí

$$[H\mathbf{X}] = [\lambda H\mathbf{X}],$$

preto matice

$$H \quad \text{a} \quad \lambda H$$

určujú tú istú kolineáciu projektívnej roviny.

Poznámka 7.4.2: Čo znamená $GL(3, \mathbb{R})$?

Symbol

$$GL(3, \mathbb{R})$$

označuje *všeobecnú lineárnu grupu* (angl. *General Linear Group*), teda množinu všetkých regulárnych reálnych matíc rozmeru 3×3 :

$$GL(3, \mathbb{R}) = \{H \in \mathbb{R}^{3 \times 3} ; \det H \neq 0\}.$$

Označenie GL pochádza zo slov *General Linear*, číslo 3 udáva rozmer matice a $\mathbb{R}$ označuje teleso reálnych čísel.

Tieto matice tvoria grupu vzhľadom na násobenie matíc. Pre naše potreby je najdôležitejšie, že podmienka

$$\det H \neq 0$$

zaručuje existenciu inverznej matice H^{-1} .

Podmienka

$$\det H \neq 0$$

zaručuje existenciu inverznej matice H^{-1} , a teda aj jednoznačnosť spätnej transformácie.

Ak by bola matica H singulárna, niektorý nenulový vektor by sa mohol zobrazíť na nulový vektor, ktorý nereprezentuje žiadny projektívny bod. Takéto zobrazenie preto neurčuje kolineáciu projektívnej roviny.

Poznámka 7.4.3: Perspektívna kolineácia ako špeciálny prípad

Stredová (perspektívna) kolineácia, s ktorou sme pracovali v predchádzajúcich kapitolách, je špeciálnym prípadom všeobecnej kolineácie projektívnej roviny.

Je charakterizovaná existenciou stredu S a osi o :

- všetky body osi o sú samodružné,
- všetky priamky prechádzajúce stredom S sú samodružné.

Aj takáto kolineácia je v homogénnych súradniciach reprezentovaná regulárnou maticou H .

Príklad 7.4.1: Určenie matice kolineácie

Nájdite maticu kolineácie $\mathcal{K}$ projektívnej roviny $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, ktorá body

$$A = [1 : 0 : 0], \quad B = [0 : 1 : 0], \quad C = [0 : 0 : 1], \quad D = [1 : 1 : 1]$$

zobrazí postupne na body

$$A' = [2 : 1 : 1], \quad B' = [1 : 2 : 1], \quad C' = [1 : 2 : 2], \quad D' = [4 : 5 : 4].$$

Riešenie. Pri určovaní matice kolineácie využijeme najskôr tri lineárne nezávislé homogénne vektory bodov A, B, C .

Zostavíme matice

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

ktorých stĺpce tvoria zvolení reprezentanti homogénnych súradníc bodov A, B, C a ich obrazov A', B', C' .

Pre maticu kolineácie H potom v tomto prípade platí

$$HM = M'.$$

Keďže

$$M = I,$$

dostávame

$$H = M'M^{-1} = M',$$

teda

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Overíme, či takto určená matica správne zobrazí aj štvrtý bod. Pre

$$D = [1 : 1 : 1]$$

platí

$$H \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix},$$

a teda

$$HD = D'.$$

Navyše

$$\det H = 1 \neq 0,$$

preto $H \in GL(3, \mathbb{R})$ a matica skutočne určuje kolineáciu projektívnej roviny.

Hľadaná matica kolineácie je

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Vo všeobecnom prípade treba pritom rešpektovať, že homogénne súradnice každého obrazového bodu sú určené iba do nenulového skalárneho násobku. Preto nemožno pri ľubovoľne zadanych dvojiciach bodov automaticky použiť ich zapísané súradnice ako stĺpce matice M' . □

Poznámka 7.4.4: Praktický postup

Pri podobných úlohách môžeme postupovať takto:

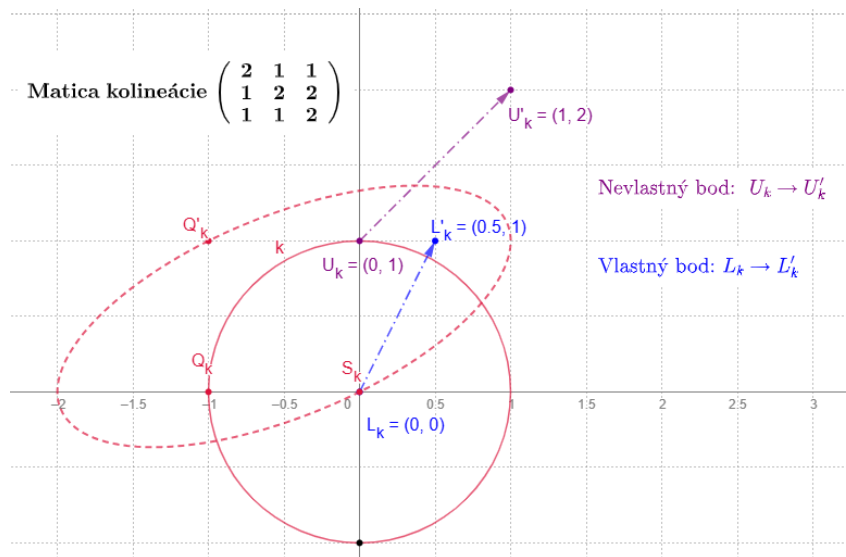
1. vyberieme tri body, ktorých homogénne vektory sú lineárne nezávislé,
2. z ich súradnicových vektorov zostavíme štvorcovú maticu M ,
3. analogicky zostavíme maticu M' z vhodne zvolených reprezentantov ich obrazov,
4. určíme kandidáta na maticu kolineácie zo vzťahu

$$H = M'M^{-1},$$

5. pomocou ďalšej dvojice zodpovedajúcich si bodov overíme, či získaná matica spĺňa požadované projektívne zobrazenie.

Didaktická poznámka. Skúmajte kolineáciu pomocou jej matice V applete môžete meniť polohu vlastného bodu L_k a nevlastného bodu U_k a sledovať ich obrazy v danej kolineácii. Experiment tak umožňuje porovnať správanie vlastných a nevlastných bodov pri projektívnom zobrazení.

1. Zvoľte niekoľko polôh vlastného bodu L_k a sledujte, ako sa mení jeho



Obr. 7.1: GeoGebra applet k príkladu 7.4.1 aktivujete [Tu](#)

obraz. Porovnajete pozorovanie s maticovým zápisom kolineácie

$$\mathbf{X}' \sim H\mathbf{X}.$$

2. Meňte polohu nevlastného bodu U_k a sledujte jeho obraz. Je obraz nevlastného bodu vždy opäť nevlastným bodom?
3. Pokúste sa nájsť takú polohu nevlastného bodu U_k , pri ktorej je jeho obraz vlastným bodom. Čo tento experiment naznačuje o obraze nevlastnej priamky pri všeobecnej projektívnej kolineácii?
4. Porovnajete obrazy bodov L_k a U_k . Ktoré vlastnosti ich obrazov sú dôsledkom projektívnej kolineácie a ktoré už závisia od zvolenej afinnej časti projektívnej roviny?

Experiment s bodom U_k prirodzene vedie k otázke, ako sa pri kolineácii zobrazí celá nevlastná priamka.

V projektívnej rovine predstavuje U_k nevlastný bod. Keďže však GeoGebra pracuje v tomto applete v afinnej rovine, nevlastný bod U_k je reprezentovaný smerovým vektorom. Zmenou smeru tohto vektora teda meníme nevlastný bod U_k na nevlastnej priamke.

Zapnite v applete stopu obrazového bodu U'_k a pohybujte nevlastným bodom U_k . Sledujte množinu polôh jeho obrazu U'_k . Zistíte, že obrazy nevlastných bodov ležia v tomto prípade na jednej priamke – *úbežnici*.

Dynamický experiment tak názorne ukazuje, že obrazom nevlastnej priamky pri kolineácii je opäť priamka. Nemusí však byť nevlastnou priamkou; vo všeobecnej projektívnej kolineácii môže byť jej obrazom vlastná priamka.

Prirodzene sa preto môžeme pýtať: *Kedy kolineácia zachováva nevlastnú priamku?*

Poznámka 7.4.5: Projektívna a afinná transformácia

Nie každá projektívna kolineácia zachováva nevlastnú priamku zvolenej afinnej časti projektívnej roviny.

Ak kolineácia nevlastnú priamku zachováva, môžeme jej maticu po vhodnej normalizácii zapísať v tvare

$$H = \begin{pmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

V affinej časti potom dostávame známy predpis

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}.$$

Afinné zobrazenia teda predstavujú osobitnú triedu projektívnych kolineácií – práve tie, ktoré zachovávajú nevlastnú priamku.

7.4.2 Obraz priamky v kolineácii

Maticový zápis zároveň ukazuje, ako sa pri kolineácii transformuje priamka.

Nech priamka p má homogénnu rovnicu

$$\mathbf{p}^T \mathbf{X} = 0,$$

kde

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Ak

$$\mathbf{X}' = H\mathbf{X},$$

potom

$$\mathbf{X} = H^{-1}\mathbf{X}'.$$

Dosadením do rovnice priamky dostávame

$$\mathbf{p}^T H^{-1} \mathbf{X}' = 0,$$

čiže

$$(H^{-T} \mathbf{p})^T \mathbf{X}' = 0.$$

Obrazová priamka p' je preto reprezentovaná vektorom

$$\boxed{\mathbf{p}' \sim H^{-T} \mathbf{p}.} \quad (7.4)$$

Máme teda dva základné transformačné vzťahy:

bod:	$\mathbf{X}' \sim H\mathbf{X},$
priamka:	$\mathbf{p}' \sim H^{-T}\mathbf{p}.$

Tieto vzťahy pripravujú algebraický základ pre nasledujúcu otázku: ako sa pri kolíneácii transformuje samotná kuželosečka?

7.5 Kuželosečka a matica kolíneácie

V kapitole o obraze kružnice sme kolíneáciu skúmali predovšetkým geometricky a dynamicky. Teraz sa na ten istý proces pozrieme algebraicky.

Nech kolíneácia projektívnej roviny je reprezentovaná regulárnou maticou

$$H \in GL(3, \mathbb{R})$$

a nech bod X prejde na bod X' . Po výbere reprezentantov homogénnych súradníc môžeme písať

$$\mathbf{X}' = H\mathbf{X},$$

a teda

$$\mathbf{X} = H^{-1}\mathbf{X}'.$$

Nech pôvodná kuželosečka má maticovú rovnicu

$$\mathbf{X}^T \mathcal{A} \mathbf{X} = 0.$$

Po dosadení

$$\mathbf{X} = H^{-1}\mathbf{X}'$$

dostávame

$$(H^{-1}\mathbf{X}')^T \mathcal{A} (H^{-1}\mathbf{X}') = 0.$$

Kedže

$$(H^{-1}\mathbf{X}')^T = \mathbf{X}'^T H^{-T},$$

môžeme písať

$$\mathbf{X}'^T H^{-T} \mathcal{A} H^{-1} \mathbf{X}' = 0.$$

Obrazová kuželosečka má teda maticu

$$\boxed{\mathcal{A}' = H^{-T} \mathcal{A} H^{-1}}. \quad (7.5)$$

Poznámka 7.5.1: Geometria ukrytá v maticiach

Vzťah

$$\mathcal{A}' = H^{-T} \mathcal{A} H^{-1}$$

je algebraickým vyjadrením toho, čo sme v GeoGebra applete pozorovali geometricky:

Kolineácia zobrazuje kuželosečku opäť na kuželosečku.

Matica H opisuje transformáciu projektívnej roviny a matica $\mathcal{A}$ opisuje kuželosečku.

Vzťah

$$\mathcal{A}' = H^{-T} \mathcal{A} H^{-1}$$

ukazuje, ako sa pri kolineácii mení jej rovnica.

Maticové vyjadrenie tak spája tri objekty, s ktorými sme postupne pracovali:

bod : $\mathbf{X}' \sim H\mathbf{X}$, priamka : $\mathbf{p}' \sim H^{-T}\mathbf{p}$, kuželosečka : $\mathcal{A}' = H^{-T}\mathcal{A}H^{-1}$.
--

Geometrický obraz kolineácie, ktorý sme doteraz skúmali konštrukčne a dynamicky, tak získava jednotný algebraický opis.

7.6 Zmena súradnicovej sústavy a kanonický tvar kuželosečky

Všeobecná rovnica kuželosečky

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

môže mať na prvý pohľad pomerne zložitý tvar. Samotná kuželosečka však môže byť geometricky veľmi jednoduchá. Zložitost rovnice často súvisí iba s tým, že jej osi nie sú rovnobežné so súradnicovými osami alebo že jej stred neleží v počiatku súradnicovej sústavy.

Prirodzenou otázkou preto je:

Možno vhodnou zmenou súradnicovej sústavy upraviť všeobecnú rovnicu kuželosečky na

jednoduchší tvar?

Odpoveď je kladná. Vhodnou kombináciou otočenia a posunutia súradnicovej sústavy možno rovnicu regulárnej kuželosečky previesť na jej *kanonický tvar*.

Motivácia: Pri zmene súradnicovej sústavy nemeníme samotnú kuželosečku. Meníme iba spôsob, akým opisujeme jej body pomocou súradníc.

Je to podobné, ako keby sme ten istý geometrický útvar pozorovali z inak zvolenej súradnicovej sústavy. Vhodnou voľbou jej počiatku a smerov súradnicových osí môžeme dosiahnuť, že rovnica kuželosečky nadobudne podstatne jednoduchší tvar.

7.6.1 Otočenie súradnicovej sústavy

Zmiešaný člen

$$2Bxy$$

vo všeobecnej rovnici kuželosečky naznačuje, že prirodzené osi kuželosečky nie sú rovnobežné so súradnicovými osami.

Otočme súradnicovú sústavu o uhol φ . Vzťah medzi pôvodnými súradnicami x, y a novými súradnicami x', y' môžeme zapísať

$$\begin{aligned}x &= x' \cos \varphi - y' \sin \varphi, \\y &= x' \sin \varphi + y' \cos \varphi.\end{aligned}$$

V maticovom tvare

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Matica

$$R = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

je matica otočenia.

Po vhodnej voľbe uhla φ možno zmiešaný člen $x'y'$ z rovnice odstrániť. Ak $A \neq C$, príslušný uhol možno určiť zo vzťahu

$$\tan 2\varphi = \frac{2B}{A - C}. \quad (7.6)$$

Ak $A = C$ a $B \neq 0$, možno zvoliť

$$\varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Po otočení má kvadratická časť rovnice tvar

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2,$$

kde λ_1, λ_2 sú vlastné čísla symetrickej matice

$$\mathcal{A}_2 = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}.$$

Poznámka 7.6.1: Prečo možno člen xy odstrániť?

Matica

$$\mathcal{A}_2 = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

je symetrická. Symetrickú reálnu maticu možno vhodným otočením súradnicovej sústavy previesť na diagonálny tvar

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Z geometrického hľadiska to znamená, že nové súradnicové osi zvolíme v smeroch vlastných vektorov matice $\mathcal{A}_2$. Práve v týchto smeroch zmiešaný člen xy zmizne.

Pre ďalšie úvahy nie je potrebné podrobne rozvíjať teóriu vlastných čísel a vlastných vektorov. Dôležité je vedieť, že pri reálnej symetrickej matici možno takéto navzájom kolmé smery vždy nájsť.

7.6.2 Posunutie súradnicovej sústavy

Po odstránení zmiešaného člena môže rovnica obsahovať lineárne členy. Tie možno v prípadoch, keď kuželosečka má stred, odstrániť vhodným posunutím počiatku súradnicovej sústavy.

Nech nový počiatok má v pôvodnej súradnicovej sústave súradnice

$$S = [x_0, y_0].$$

Položíme

$$x = x' + x_0, \quad y = y' + y_0.$$

V prípade stredových kuželosečiek – elipsy a hyperboly – volíme bod S tak, aby bol stredom kuželosečky. Po posunutí počiatku do jej stredu lineárne členy z rovnice vymiznú.

Stred možno vo všeobecnej rovnici

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

hľadať ako riešenie sústavy

$$\begin{aligned} Ax_0 + By_0 + D &= 0, \\ Bx_0 + Cy_0 + E &= 0. \end{aligned} \tag{7.7}$$

V maticovom tvare

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} D \\ E \end{pmatrix}.$$

Ak

$$\delta = AC - B^2 \neq 0,$$

sústava má práve jedno riešenie. Kuželosečka má teda jednoznačne určený stred.

Poznámka 7.6.2: A čo parabola?

Pre parabolický typ platí

$$\delta = AC - B^2 = 0.$$

Kvadratická časť je singulárna a postup založený na presunutí počiatku do stredu nemožno použiť, pretože parabola nemá stred.

Po vhodnom otočení súradnicovej sústavy však možno ďalším posunutím súradníc dostať jej rovnicu do kanonického tvaru.

7.6.3 Kanonický tvar

Po vhodnom otočení a posunutí súradnicovej sústavy dostávame najjednoduchšie rovnice jednotlivých typov regulárnych reálnych kuželosečiek.

Pre elipsu:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1, \quad a, b > 0.$$

Pre hyperbolu:

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1, \quad a, b > 0.$$

Pre parabolu, podľa orientácie jej osi, napríklad:

$$y'^2 = 2px', \quad p \neq 0.$$

Tieto rovnice nazývame *kanonickými rovnicami kuželosečiek*.

Definícia 7.6.1: Kanonický tvar kuželosečky

Kanonickým tvarom rovnice kuželosečky nazývame jej najjednoduchší tvar získaný vhodnou zmenou súradnicovej sústavy, v ktorej sú súradnicové osi prispôbené geometrickým vlastnostiam danej kuželosečky.

Didaktická poznámka. Prechod ku kanonickému tvaru nie je iba algebraickou úpravou rovnice. Každý krok má svoj geometrický význam:

- **otočením** súradnicovej sústavy hľadáme prirodzené smery osí kuželosečky,
- **posunutím** vhodne volíme nový počiatok,
- **kanonická rovnica** potom odhaľuje základné geometrické vlastnosti kuželosečky.

Pri úprave rovnice sa teda nemení geometrický objekt, ale iba súradnicový systém, v ktorom ho opisujeme.

Príklad 7.6.1: Prevod elipsy na kanonický tvar

Transformujte kuželosečku danú rovnicou

$$4x^2 + 3xy + 4y^2 - 12x - 12y + 9 = 0 \quad (7.8)$$

na kanonický tvar. Určte jej stred, smer hlavných osí a dĺžky poloosí.

Riešenie. Budeme postupovať v niekoľkých krokoch. Najskôr určíme typ kuželosečky a jej stred, potom posunieme počiatok súradnicovej sústavy do stredu a napokon vhodným otočením odstránime zmiešaný člen.

1. Určenie typu kuželosečky

V celej kapitole používame všeobecnú rovnicu v tvare

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Porovnaním s rovnicou (7.8) dostávame

$$A = 4, \quad B = \frac{3}{2}, \quad C = 4,$$

$$D = -6, \quad E = -6, \quad F = 9.$$

Determinant kvadratickej časti je

$$\delta = AC - B^2 = 4 \cdot 4 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 16 - \frac{9}{4} = \frac{55}{4} > 0.$$

Kuželosečka je teda eliptického typu.

2. Určenie stredu elipsy

Stred stredovej kuželosečky je riešením sústavy

$$Ax_0 + By_0 + D = 0, \quad Bx_0 + Cy_0 + E = 0.$$

V našom prípade

$$4x_0 + \frac{3}{2}y_0 - 6 = 0, \quad \frac{3}{2}x_0 + 4y_0 - 6 = 0.$$

Po vynásobení rovníc číslom 2 dostávame

$$8x_0 + 3y_0 = 12,$$

$$3x_0 + 8y_0 = 12.$$

Odtiaľ

$$x_0 = y_0 = \frac{12}{11}.$$

Stred elipsy je teda

$$S = \left[\frac{12}{11}, \frac{12}{11} \right].$$

3. Posunutie súradnicovej sústavy do stredu

Zavedieme nové súradnice

$$X = x - \frac{12}{11}, \quad Y = y - \frac{12}{11},$$

teda

$$x = X + \frac{12}{11}, \quad y = Y + \frac{12}{11}.$$

Po dosadení do rovnice (7.8) a úprave dostávame

$$4X^2 + 3XY + 4Y^2 - \frac{45}{11} = 0,$$

čiže

$$4X^2 + 3XY + 4Y^2 = \frac{45}{11}. \quad (7.9)$$

Lineárne členy zmizli, pretože počiatok novej súradnicovej sústavy leží v strede elipsy. Zmiešaný člen XY však zostal. To znamená, že osi elipsy ešte nie sú rovnobežné so súradnicovými osami X, Y .

4. Otočenie súradnicovej sústavy

Uhol otočenia určuje vzťah

$$\tan 2\varphi = \frac{2B}{A - C}.$$

Keďže

$$A = C = 4, \quad B = \frac{3}{2} \neq 0,$$

môžeme zvoliť

$$\varphi = \frac{\pi}{4} = 45^\circ.$$

Použijeme transformáciu

$$X = \frac{U - V}{\sqrt{2}}, \quad Y = \frac{U + V}{\sqrt{2}}.$$

Po dosadení do rovnice (7.9) zmiešaný člen zanikne a dostávame

$$\frac{11}{2}U^2 + \frac{5}{2}V^2 = \frac{45}{11}.$$

5. Kanonický tvar

Vydelením rovnice číslom $\frac{45}{11}$ dostávame

$$\frac{121}{90}U^2 + \frac{11}{18}V^2 = 1,$$

teda

$$\boxed{\frac{U^2}{\frac{90}{121}} + \frac{V^2}{\frac{18}{11}} = 1.} \quad (7.10)$$

Keďže

$$\frac{18}{11} > \frac{90}{121},$$

hlavná poloos leží v smere osi V .

Dĺžky poloosí sú

$$a = \sqrt{\frac{18}{11}} = \frac{3\sqrt{22}}{11}, \quad b = \sqrt{\frac{90}{121}} = \frac{3\sqrt{10}}{11}.$$

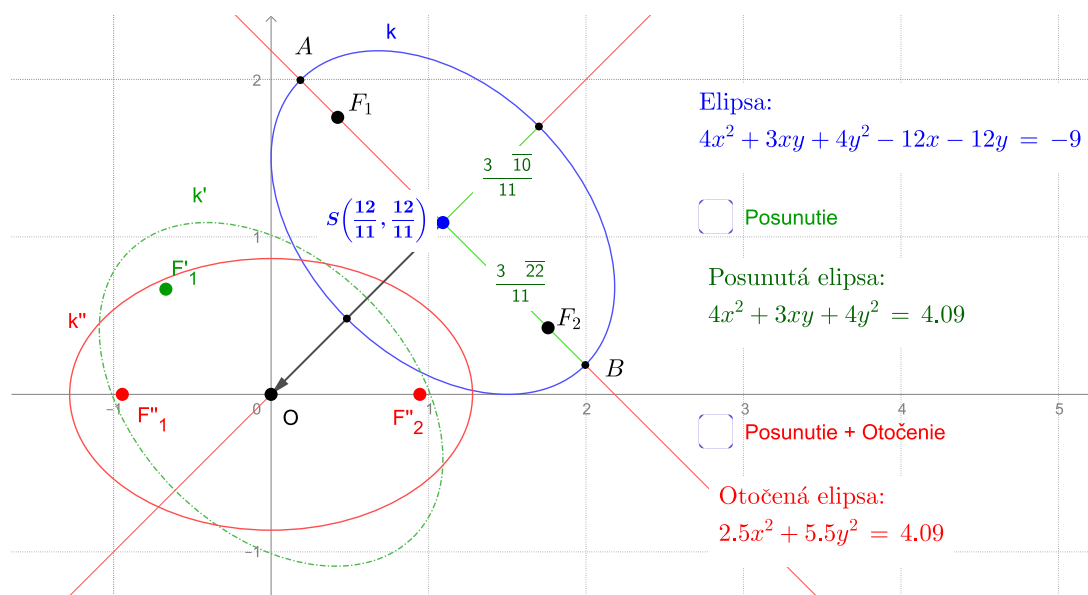
Výsledkom je teda elipsa so stredom

$$S = \left[\frac{12}{11}, \frac{12}{11} \right],$$

ktorej hlavné osi sú vzhľadom na pôvodnú súradnicovú sústavu otočené o 45° a ktorej poloosi majú dĺžky

$$\boxed{a = \frac{3\sqrt{22}}{11}, \quad b = \frac{3\sqrt{10}}{11}.$$

□



Obr. 7.2: Transformácia elipsy na kanonický tvar

Interaktívny GeoGebra applet: Transformácia kužeľosečky – elipsa

Didaktická poznámka. Sledujte geometrický význam transformácie V applete porovnajte pôvodnú elipsu s jej opisom po posunutí a otočení súradnicovej sústavy.

1. Čo sa v rovnici zmení po presunutí počiatku do stredu

$$S = \left[\frac{12}{11}, \frac{12}{11} \right] ?$$

Ktoré členy rovnice zmiznú?

2. Prečo po samotnom posunutí zostáva v rovnici zmiešaný člen XY ?
3. Sledujte otočenie súradnicových osí o 45° . Ako sú nové osi U, V orientované vzhľadom na osi elipsy a čo sa pritom stane so zmiešaným členom?
4. Mení sa pri posunutí a otočení samotná elipsa, alebo iba jej súradnicový opis?

Príklad 7.6.2: Parabola – prevod na kanonický tvar

Transformujte kužeľosečku danú rovnicou

$$x^2 + 4x + 2y - 3 = 0$$

na jej kanonický tvar a určte vrchol paraboly.

Riešenie. Najskôr určíme typ kuželosečky. Všeobecnú rovnicu zapisujeme v tvare

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Porovnaním dostávame

$$\begin{aligned} A &= 1, & B &= 0, & C &= 0, \\ D &= 2, & E &= 1, & F &= -3. \end{aligned}$$

Pre determinant kvadratickej časti platí

$$\delta = AC - B^2 = 0,$$

preto ide o kuželosečku parabolického typu.

1. Má parabola stred?

Pri elipse sme začali určením jej stredu. Skúsme rovnaký postup použiť aj teraz. Stred by musel spĺňať sústavu

$$Ax_0 + By_0 + D = 0, \quad Bx_0 + Cy_0 + E = 0.$$

Po dosadení dostávame

$$x_0 + 2 = 0, \quad 1 = 0.$$

Druhá rovnica nemá riešenie. Parabola teda nemá stred.

Poznámka 7.6.3: Prečo pri parabole postupujeme inak?

Pri elipse a hyperbole môžeme presunúť počiatok súradnicovej sústavy do stredu kuželosečky. Parabola však stred nemá.

Hľadáme preto namiesto stredu jej *vrchol* a súradnicovú sústavu prispôbime osi paraboly.

2. Úprava rovnice

V rovnici

$$x^2 + 4x + 2y - 3 = 0$$

doplníme prvé dva členy na štvorec:

$$x^2 + 4x = (x + 2)^2 - 4.$$

Dostávame

$$(x + 2)^2 - 4 + 2y - 3 = 0,$$

teda

$$(x+2)^2 = -2\left(y - \frac{7}{2}\right).$$

Zavedieme nové súradnice

$$X = x + 2, \quad Y = y - \frac{7}{2}.$$

V novej súradnicovej sústave má parabola rovnicu

$$\boxed{X^2 = -2Y.}$$

Porovnaním s kanonickou rovnicou

$$X^2 = 2pY$$

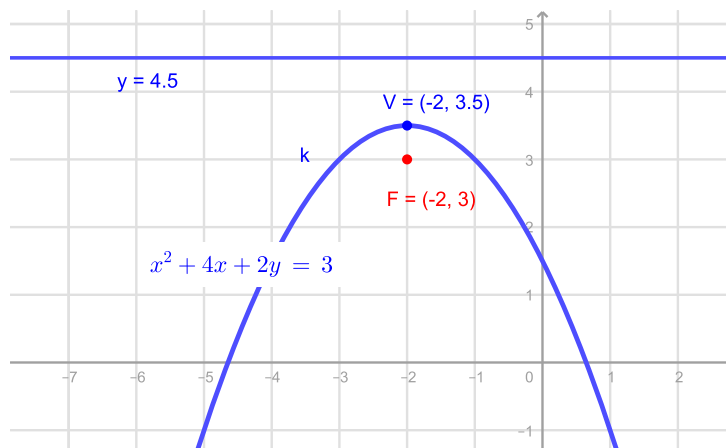
dostávame

$$p = -1.$$

Vrchol paraboly je

$$\boxed{V = \left[-2, \frac{7}{2}\right].}$$

Os paraboly je rovnobežná s osou y a parabola je otvorená smerom nadol. □



Obr. 7.3: Transformácia kuželošky na štandardný tvar paraboly

Didaktická poznámka. Sledujte transformáciu paraboly V applete sledujte, ako sa mení súradnicový opis paraboly pri prechode ku kanonickému tvaru.

1. Porovnajzte tento postup s predchádzajúcim príkladom elipsy. Prečo tentoraz nehľadáme stred kuželošky?
2. Prečo v tomto prípade nie je potrebné otáčať súradnicovú sústavu?

3. Sledujte presunutie počiatku do vrcholu

$$V = \left[-2, \frac{7}{2}\right].$$

Čo sa pritom zmení v rovnici paraboly?

4. Mení sa pri transformácii samotná parabola, alebo iba jej opis vzhľadom na zvolenú súradnicovú sústavu?

Príklad 7.6.3: Hyperbola – prevod na kanonický tvar

Transformujte kuželosečku danú rovnicou

$$3x^2 - 6xy - 3y^2 - 8x + 8y = 0 \quad (7.11)$$

na jej kanonický tvar. Určte jej stred a smer hlavných osí.

Riešenie. Najskôr určíme typ kuželosečky. Všeobecnú rovnicu zapisujeme v tvare

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Porovnaním s rovnicou (7.11) dostávame

$$A = 3, \quad B = -3, \quad C = -3,$$

$$D = -4, \quad E = 4, \quad F = 0.$$

Determinant kvadratickej časti je

$$\delta = AC - B^2 = 3(-3) - (-3)^2 = -18 < 0.$$

Kuželosečka je teda hyperbolického typu.

1. Určenie stredu hyperboly

Stred stredovej kuželosečky určíme zo sústavy

$$Ax_0 + By_0 + D = 0, \quad Bx_0 + Cy_0 + E = 0.$$

Po dosadení dostávame

$$3x_0 - 3y_0 - 4 = 0,$$

$$-3x_0 - 3y_0 + 4 = 0.$$

Riešením sústavy je

$$x_0 = \frac{4}{3}, \quad y_0 = 0.$$

Stred hyperboly je teda

$$S = \left[\frac{4}{3}, 0 \right].$$

2. Posunutie súradnicovej sústavy

Počiatok novej súradnicovej sústavy presunieme do stredu hyperboly. Položíme

$$X = x - \frac{4}{3}, \quad Y = y,$$

teda

$$x = X + \frac{4}{3}, \quad y = Y.$$

Po dosadení do rovnice (7.11) a úprave dostávame

$$3X^2 - 6XY - 3Y^2 = -\frac{16}{3}. \quad (7.12)$$

Lineárne členy zmizli, ale zostal zmiešaný člen XY . Súradnicové osi preto ešte nie sú totožné s hlavnými osami hyperboly.

3. Otočenie súradnicovej sústavy

Kvadratickej časti rovnice zodpovedá symetrická matica

$$\mathcal{A}_2 = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Uhol otočenia určíme zo vzťahu

$$\tan 2\varphi = \frac{2B}{A - C}.$$

V našom prípade

$$\tan 2\varphi = \frac{-6}{3 - (-3)} = -1.$$

Môžeme teda zvoliť

$$2\varphi = -\frac{\pi}{4}, \quad \boxed{\varphi = -\frac{\pi}{8}}.$$

Použijeme transformáciu

$$X = U \cos \varphi - V \sin \varphi, \quad Y = U \sin \varphi + V \cos \varphi.$$

Po otočení súradnicovej sústavy zmiešaný člen zanikne. Vlastné čísla matice $\mathcal{A}_2$ sú

$$\lambda_1 = 3\sqrt{2}, \quad \lambda_2 = -3\sqrt{2}.$$

Rovnica (7.12) preto nadobudne tvar

$$3\sqrt{2}U^2 - 3\sqrt{2}V^2 = -\frac{16}{3}.$$

Po úprave

$$V^2 - U^2 = \frac{8\sqrt{2}}{9}.$$

4. Kanonický tvar

Vydelením pravej strany dostávame

$$\frac{V^2}{\frac{8\sqrt{2}}{9}} - \frac{U^2}{\frac{8\sqrt{2}}{9}} = 1.$$

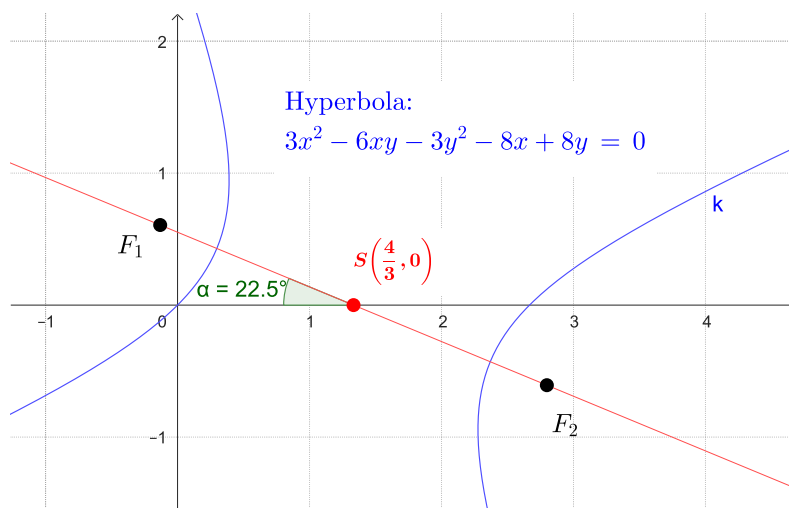
Ide teda o hyperbolu so stredom

$$S = \left[\frac{4}{3}, 0 \right]$$

a hlavnými osami otočenými vzhľadom na pôvodnú súradnicovú sústavu o uhol

$$\varphi = -\frac{\pi}{8}.$$

V tomto osobitnom prípade sú menovatele oboch členov rovnaké, preto ide o *rovnoosú hyperbolu*. □



Obr. 7.4: Transformácia hyperboly na kanonický tvar

Didaktická poznámka. Porovnajzte s predchádzajúcimi príkladmi Pri práci s appletom sledujte jednotlivé kroky transformácie a porovnajzte ich s elipsou a parabolou.

1. Čo spôsobí presunutie počiatku do stredu hyperboly?
2. Prečo je potrebné súradnicovú sústavu ešte otočiť?
3. Čo sa stane so zmiešaným členom XY po otočení?
4. V čom sa postup podobá transformácii elipsy a v čom sa odlišuje od transformácie paraboly?

7.7 Vzťahy medzi parametrami kuželosečiek

Pri práci s kuželosečkami sa stretávame s viacerými charakteristickými veličinami. Pri elipse a hyperbole sú to najmä poloosi a, b , vzdialenosť ohniska od stredu c , excentricita e a parameter kuželosečky p . Pri parabole vystupuje vzdialenosť ohniska od vrcholu a parameter jej kanonickej rovnice.

Tieto veličiny nie sú nezávislé. Ich vzájomné vzťahy umožňujú prechádzať medzi analytickým opisom kuželosečky a jej geometrickými vlastnosťami.

Nasledujúci prehľad zhrňuje základné vzťahy, s ktorými sme sa stretli v tejto a predchádzajúcej kapitole.

Elipsa

Pre elipsu v kanonickom tvare

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > b > 0,$$

platí

$$e^2 = a^2 - b^2, \quad \varepsilon = \frac{e}{a}, \quad 0 < \varepsilon < 1,$$

kde e je lineárna excentricita a ε numerická excentricita elipsy.

Zo vzťahu

$$\varepsilon = \frac{e}{a}$$

dostávame

$$e = a\varepsilon.$$

Po dosadení do vzťahu

$$e^2 = a^2 - b^2$$

dostaneme

$$b = a\sqrt{1 - \varepsilon^2}.$$

Parameter elipsy je

$$p = \frac{b^2}{a} = a(1 - \varepsilon^2).$$

Poznámka 7.7.1: Základné vzťahy pre elipsu

Vzťah	Význam
$e^2 = a^2 - b^2$	vzťah medzi poloosami a lineárnou excentricitou
$\varepsilon = \frac{e}{a}$	numerická excentricita
$p = \frac{b^2}{a}$	parameter elipsy
$b = a\sqrt{1 - \varepsilon^2}$	vedľajšia poloos pomocou numerickej excentricity

Parabola

Pre parabolu s vrcholom v počiatku a osou totožnou s osou x budeme používať kanonický tvar

$$y^2 = 2px.$$

Jej excentricita je

$$e = 1.$$

Ohnisko má súradnice

$$F = \left[\frac{p}{2}, 0 \right]$$

a riadiaca priamka má rovnicu

$$x = -\frac{p}{2}.$$

Ak označíme vzdialenosť ohniska od vrcholu c , potom

$$c = \frac{|p|}{2}.$$

Pre $p > 0$ je parabola otvorená v kladnom smere osi x , pre $p < 0$ v opačnom smere.

Poznámka 7.7.2: Pozor na označenie parametra paraboly

V literatúre sa možno stretnúť aj s kanonickou rovnicou

$$y^2 = 4ax,$$

kde a označuje vzdialenosť ohniska od vrcholu.

Pri našom označení

$$y^2 = 2px$$

preto platí

$$p = 2a.$$

Pri porovnávaní rôznych zdrojov je teda potrebné vždy overiť, akú konvenciu autor používa.

Hyperbola

Pre hyperbolu v kanonickom tvare

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a, b > 0,$$

platí

$$c^2 = a^2 + b^2, \quad e = \frac{c}{a}, \quad e > 1.$$

Odtiaľ

$$b = a\sqrt{e^2 - 1}.$$

Parameter hyperboly je

$$p = \frac{b^2}{a} = a(e^2 - 1).$$

Poznámka 7.7.3: Základné vzťahy pre hyperbolu

Vzťah	Význam
$c^2 = a^2 + b^2$	vzťah medzi poloosami a ohniskom
$e = \frac{c}{a}$	excentricita, $e > 1$
$p = \frac{b^2}{a}$	parameter hyperboly
$b = a\sqrt{e^2 - 1}$	vedľajšia poloos pomocou e

7.8 Cvičenie

1. Daná je kuželosečka všeobecnou kvadratickou rovnicou

$$3x^2 + 2xy + 3y^2 - 8x + 4y - 4 = 0.$$

- a) Homogenizujte danú rovnicu.
- b) Určte prienik projektívneho rozšírenia kuželosečky s nevlastnou priamkou

$$z = 0.$$

- c) Rozhodnite, či má kuželosečka reálne nevlastné body.
- d) Na základe počtu reálnych nevlastných bodov určte projektívny typ kuželosečky.
- e) Porovnajte výsledok so znamienkom

$$B^2 - 4AC$$

pôvodnej kvadratickej rovnice.

[$3x^2 + 2xy + 3y^2 - 8xz + 4yz - 4z^2 = 0$; $3x^2 + 2xy + 3y^2 = 0$; žiadny reálny nevlastný bod; eliptický typ; $B^2 - 4AC = -32 < 0$.]

2. Daná je kuželosečka

$$x^2 - 4xy + 4y^2 + 2x + 4y - 3 = 0.$$

- a) Homogenizujte jej rovnicu.
- b) Určte nevlastné body projektívneho rozšírenia.
- c) Rozhodnite o type kuželosečky podľa počtu jej reálnych nevlastných bodov.
- d) Overte klasifikáciu pomocou výrazu

$$B^2 - 4AC.$$

[$x^2 - 4xy + 4y^2 + 2xz + 4yz - 3z^2 = 0$; $X_\infty = [2 : 1 : 0]$ je dvojnásobný nevlastný bod; parabolický typ; $B^2 - 4AC = 0$.]

3. Daná je kuželosečka

$$x^2 - 3y^2 - 2x + 6y - 5 = 0.$$

- a) Homogenizujte jej rovnicu.
- b) Určte nevlastné body projektívneho rozšírenia.

- c) Určte typ kužeľosečky podľa počtu reálnych nevlastných bodov.
 d) Porovnajte výsledok s hodnotou

$$B^2 - 4AC.$$

$$[x^2 - 3y^2 - 2xz + 6yz - 5z^2 = 0; X_\infty = [\sqrt{3} : 1 : 0], Y_\infty = [-\sqrt{3} : 1 : 0]; \text{hyperbolický typ;} \\ B^2 - 4AC = 12 > 0.]$$

4. Uvažujte všeobecnú kvadratickú rovnicu kužeľosečky

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

- a) Homogenizujte rovnicu.
 b) Určte rovnicu, ktorú musia spĺňať jej nevlastné body.
 c) Ukážte, že počet reálnych nevlastných bodov závisí od diskriminantu

$$B^2 - 4AC.$$

- d) Formulujte klasifikáciu regulárnej kužeľosečky podľa znamienka tohto diskriminantu.

$$[Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dxz + Eyz + Fz^2 = 0; Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0; B^2 - 4AC < 0: \\ \text{eliptický typ; } B^2 - 4AC = 0: \text{parabolický typ; } B^2 - 4AC > 0: \text{hyperbolický typ.}]$$

5. Kružnica

$$k : x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

je zobrazená projektívnou kolineáciou s maticou

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Určte obraz bodu

$$X = [x : y : z]$$

v tejto kolineácii.

- b) Určte inverznú maticu H^{-1} .
 c) Dosadením inverznej transformácie do rovnice kružnice určte rovnicu obrazovej kužeľosečky k' .
 d) Určte nevlastné body kužeľosečky k' a na ich základe klasifikujte jej afinný typ.

$$[X' = [x : y : x + z]; H^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; y^2 + 2xz - z^2 = 0; \text{dvojnásobný nevlastný bod} \\ [1 : 0 : 0]; \text{parabola.}]$$

6. Nech je kuželosečka k v homogénnych súradniciach zapísaná maticovou rovnicou

$$X^T Q X = 0$$

a projektívna kolineácia je daná

$$X' = HX, \quad \det H \neq 0.$$

- a) Vyjadrite X pomocou X' .
- b) Odvodte maticu Q' obrazovej kuželosečky

$$X'^T Q' X' = 0.$$

- c) Ukážte, že regulárna kuželosečka sa regulárnou projektívnou kolineáciou zobrazí opäť na regulárnu kuželosečku.

$$[X = H^{-1}X'; Q' = H^{-T}QH^{-1}; \det Q' = (\det H)^{-2} \det Q \neq 0.]$$

7. Vráťte sa k interaktívnemu appletu [Obraz kružnice v kolineácii](#) a k príkladu, v ktorom sa kružnica zobrazuje perspektívnou kolineáciou na kuželosečku.

- a) Zvoľte polohu úbežnice tak, aby obrazom kružnice bola elipsa, parabola a hyperbola.
- b) V každom prípade zapíšte rovnicu obrazovej kuželosečky z algebraického okna GeoGebry.
- c) Homogenizujte získanú rovnicu a určte jej nevlastné body.
- d) Porovnajte počet nevlastných bodov s polohou pôvodnej kružnice vzhľadom na úbežnicu kolineácie.
- e) Formulujte súvislosť medzi geometrickou konštrukciou obrazu kružnice a analytickou klasifikáciou výslednej kuželosečky.

8. Daná je kuželosečka

$$5x^2 + 9y^2 - 20x + 36y + 11 = 0.$$

- a) Určte jej typ podľa kvadratickej časti rovnice.
- b) Vhodnou transformáciou súradnicovej sústavy upravte rovnicu na kanonický tvar.

- c) Určte stred kuželosečky a dĺžky jej poloosí.
 d) Určte lineárnu excentricitu e , súradnice ohnisk a numerickú excentricitu ε .

$$\left[\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{5} = 1; S = [2, -2]; a = 3, b = \sqrt{5}, e = 2, \varepsilon = \frac{2}{3}; F_{1,2} = [2 \pm 2, -2].\right]$$

9. Daná je kuželosečka

$$x^2 - 4x - 8y + 12 = 0.$$

- a) Určte jej typ.
 b) Vhodnou transformáciou súradnicovej sústavy upravte rovnicu na kanonický tvar.
 c) Určte vrchol, os paraboly a parameter p .
 d) Určte súradnice ohniska a rovnicu riadiacej priamky.

$$[(x-2)^2 = 8(y-1); V = [2, 1]; os x = 2; p = 4; F = [2, 3]; r : y = -1.]$$

10. Daná je kuželosečka

$$4x^2 - 9y^2 - 8x - 36y - 68 = 0.$$

- a) Určte jej typ podľa kvadratickej časti rovnice.
 b) Vhodnou transformáciou súradnicovej sústavy upravte rovnicu na kanonický tvar.
 c) Určte stred kuželosečky a dĺžky jej poloosí.
 d) Určte lineárnu excentricitu e , súradnice ohnisk a numerickú excentricitu ε .
 e) Určte rovnice asymptôt.

$$\left[\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{4} = 1; S = [1, -2]; a = 3, b = 2, e = \sqrt{13}, \varepsilon = \frac{\sqrt{13}}{3}; F_{1,2} = [1 \pm \sqrt{13}, -2]; y + 2 = \pm \frac{2}{3}(x - 1).\right]$$

11. Vypočítajte uhol otočenia súradnicovej sústavy, ktorým odstránite zmiešaný člen z rovnice

$$2x^2 + 3xy + 2y^2 - 4 = 0.$$

Rovnicu následne zapíšte v nových súradniciach a určte typ kuželosečky.

$$[\varphi = \frac{\pi}{4}; \frac{7}{2}u^2 + \frac{1}{2}v^2 = 4, \text{ teda } \frac{u^2}{8/7} + \frac{v^2}{8} = 1; \text{ elipsa.}]$$

12. Transformujte na kanonický tvar a určte typ kuželosečky

$$x^2 + xy + y^2 - 5x + 3y = 0.$$

Určte aj jej stred.

$$[S = [\frac{13}{3}, -\frac{11}{3}]; \text{ po otočení o } \varphi = \frac{\pi}{4}: 9u^2 + 3v^2 = 98; \text{ elipsa.}]$$

13. Zistite, či je kuželosečka

$$x^2 - 4xy + 4y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$$

regulárna alebo singulárna. Rovnicu upravte na čo najjednoduchší tvar a geometricky interpretujte výsledok.

$$[(x - 2y + 1)^2 = 0; \text{singulárna kuželosečka} - \text{dvojnásobná priamka } x - 2y + 1 = 0.]$$

14. Zo zbierky *Effa–Novotný: Úlohy z analytickej geometrie* vyberte úlohu na transformáciu kuželosečky so zmiešaným členom a riešte ju pomocou postupu uvedeného v tejto kapitole.

15. Uvažujte jednoparametrickú sústavu kuželosečiek

$$k_\lambda : x^2 + \lambda y^2 - 4x + 2y - 1 = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

- Zapište maticu kvadratickej časti rovnice a určte jej determinant v závislosti od parametra λ .
- Homogenizujte rovnicu kuželosečky k_λ a určte jej nevlastné body, t. j. priesečníky s nevlastnou priamkou $z = 0$.
- Na základe počtu reálnych nevlastných bodov rozhodnite, pre ktoré hodnoty parametra λ má kuželosečka eliptický, parabolický alebo hyperbolický typ.
- Porovnajte získanú klasifikáciu so znamienkom determinantu matice kvadratickej časti.
- Preskúmajte osobitne hraničný prípad $\lambda = 0$. Upravte rovnicu na kanonický tvar a určte základné geometrické prvky získanej kuželosečky.

[$\det A = \lambda$; $\lambda > 0$: eliptický typ; $\lambda = 0$: parabolický typ; $\lambda < 0$: hyperbolický typ; pre $\lambda = 0$: $(x - 2)^2 = -2(y - \frac{5}{2})$, $V = [2, \frac{5}{2}]$.]

16. Elipsa má poloosi

$$a = 5, \quad b = 4.$$

Určte lineárnu excentricitu e , numerickú excentricitu ε , parameter p a súradnice ohnisk, ak jej stred je v počiatku a hlavná os je totožná s osou x .

$$[e = 3; \varepsilon = \frac{3}{5}; p = \frac{16}{5}; F_{1,2} = [\pm 3, 0].]$$

17. Pre elipsu je daná numerická excentricita

$$\varepsilon = \frac{3}{5}$$

a parameter

$$p = \frac{16}{5}.$$

Určte poloosi a, b a lineárnu excentricitu e .

$$[a = 5, b = 4, e = 3.]$$

18. Hyperbola má poloosi

$$a = 3, \quad b = 4.$$

Určte lineárnu excentricitu e , numerickú excentricitu ε , parameter p , súradnice ohnisk a rovnice asymptôt, ak jej stred je v počiatku a hlavná os je totožná s osou x .

$$[e = 5; \varepsilon = \frac{5}{3}; p = \frac{16}{3}; F_{1,2} = [\pm 5, 0]; y = \pm \frac{4}{3}x.]$$

19. Pre hyperbolu je daná numerická excentricita

$$\varepsilon = \frac{5}{3}$$

a parameter

$$p = \frac{16}{3}.$$

Určte poloosi a, b a lineárnu excentricitu e .

$$[a = 3, b = 4, e = 5.]$$

20. Parabola má kanonickú rovnicu

$$y^2 = 12x.$$

Určte parameter p , vzdialenosť ohniska od vrcholu, súradnice ohniska a rovnicu riadiacej priamky.

$$[p = 6; d(V, F) = 3; F = [3, 0]; r : x = -3.]$$

21. Doplňte chýbajúce údaje:

kuželosečka	a	b	e	ε
elipsa	13	5	?	?
elipsa	10	?	6	?
hyperbola	5	12	?	?
hyperbola	?	8	10	?

$$[12, \frac{12}{13}; 8, \frac{3}{5}; 13, \frac{13}{5}; 6, \frac{5}{3}.]$$

22. Porovnajte vzťahy medzi parametrami elipsy a hyperboly:

$$e^2 = a^2 - b^2, \quad e^2 = a^2 + b^2.$$

Vysvetlite, prečo z nich vyplýva

$$0 < \varepsilon < 1$$

pre elipsu a

$$\varepsilon > 1$$

pre hyperbolu, ak

$$\varepsilon = \frac{e}{a}.$$

[Pre elipsu $e < a$, pre hyperbolu $e > a$.]

23. Ukážte, že parameter p možno pomocou numerickej excentricity vyjadriť v tvare

$$p = a(1 - \varepsilon^2)$$

pre elipsu a

$$p = a(\varepsilon^2 - 1)$$

pre hyperbolu.

8 Záver

Cieľom tejto učebnice nebolo iba systematicky spracovať teóriu kuželosečiek. Chceli sme ukázať aj to, ako sa pohľad na ten istý geometrický objekt mení pri prechode od euklidovskej a afinnej geometrie ku geometrii projektívnej a ako sa pritom stretávajú geometrické, analytické a algebraické metódy.

Začali sme afinnou rovinou a pripomenutím jej základných pojmov. Doplnením nevlastných bodov a nevlastnej priamky sme prešli k projektívnej rovine. Mnohé situácie, ktoré bolo v afinnej geometrii potrebné posudzovať osobitne, tak dostali spoločný geometrický rámec. Homogénne súradnice nám umožnili pracovať s projektívnou rovinou analyticky a neskôr opisovať aj projektívne transformácie.

Osobitné miesto mala v našom výklade kružnica. Tento dobre známy geometrický útvar sa v projektívnej rovine ukázal v trochu inom svetle. Pri sledovaní jeho obrazu v kolíneácii sme sa dostali k elipse, parabole a hyperbole. Zároveň sme mohli rozlišovať medzi vlastnosťami, ktoré závisia od euklidovskej metriky, a tými, ktoré sa pri projektívnych transformáciách zachovávajú. Kružnica, elipsa, parabola a hyperbola sa tak prestali javiť ako štyri navzájom oddelené objekty a ukázala sa ich spoločná projektívna podstata.

Geometrický pohľad sme postupne dopĺňali analytickým opisom pomocou homogénnych rovníc, matic a kvadratických foriem. Maticové vyjadrenie transformácií a kuželosečiek prepojilo geometrické úvahy s lineárnou algebrou. Pri klasifikácii kuželosečiek a ich prevode na kanonické tvary sme sa potom vydali opačným smerom: z rovnice sme sa vracali ku geometrickým vlastnostiam príslušnej kuželosečky. V priebehu učebnice sme sa teda viackrát stretli s tým istým objektom raz v geometrickej konštrukcii, inokedy v rovnici alebo v maticovom vyjadrení.

Pri tomto pohľade na geometriu nám pomáhali aj dynamické konštrukcie v prostredí GeoGebra. Neslúžili ako náhrada matematického zdôvodnenia. Umožňovali však meniť geometrickú situáciu, pozorovať, čo sa pri tejto zmene deje, a porovnávať geometrický obraz s jeho analytickým opisom. Na niektorých miestach boli iba ilustráciou preberaného pojmu, inde mohli byť podnetom na experimentovanie a hľadanie vlastných odpovedí.

Tým sa možnosti skúmania kuželosečiek, samozrejme, nevyčerpávajú. Konštrukcie a postupy uvedené v učebnici možno ďalej meniť, dopĺňať a skúšať v nových situáciách. GeoGebra je na takéto experimentovanie vhodným prostredím. Pozorovanie na obrazovke však môže byť iba prvým krokom. Zaujímavá geometrická otázka vzniká najmä vtedy, keď

sa z pozorovania stane hypotéza a začneme hľadať jej matematické zdôvodnenie.

Na začiatku učebnice sme sa na kuželosečky pozerali predovšetkým ako na útvary s rozdielnymi tvarmi a metrickými vlastnosťami. Projektívna geometria nám umožnila vidieť za týmito rozdielmi aj to, čo majú spoločné. Možno práve v tom spočíva jeden z prínosov geometrie: známy objekt môžeme vidieť z iného pohľadu a medzi vecami, ktoré sa na prvý pohľad zdajú odlišné, objaviť spoločnú súvislosť.

Literatúra

- [1] Baltus, Ch., (2020). *Collineations and Conic Sections: An Introduction to Projective Geometry in its History*, Springer, ISBN 978-3-030-46677-3, doi 10.1007/978-3-030-46678-0
- [2] Belan, A., (2009). *Analytická geometria pre tých, ktorí jej potrebujú rozumieť*. Učebnica pre Gymnaziá. EQUILIBRIA, Košice. EAN: 9788081432149. Dostupné [Tu](#).
- [3] Billich, M., Trenkler, M. (2006). *Zbierka úloh z analytickej geometrie*. Pedagogická fakulta Katolíckej univerzity v Ružomberku. Ružomberok 2006. ISBN 80-8084-113-6.
- [4] Brajerčík, J., Demko, M. (2018). *Matematika pre študentov prírodovedných odborov*. Prešov: Univerzitná knižnica PU.
- [5] Bydžovský, B. (1946). *Úvod do analytické geometrie*. Vyd. 1. V Praze: Jednota československých matematiků a fyziků, 1946. 432 s. Knihovna spisů matematických a fyzikálních, sv. 8.
- [6] Čech, E., (1952). *Základy analytické geometrie*. 2. díl (Czech) [Foundations of analytic geometry. 2]. Přírodovědecké vydavatelství, Praha. Dostupné [Tu](#). Pozrite tiež [Tu](#).
- [7] Čížmár, J. (1984). *Grupy geometrických transformací*. Bratislava: Alfa, 1984. ISBN (Brož.). Dostupné [Tu](#).
- [8] Descartes, R. (1954). *The Geometry of René Descartes*. (transl. D. E. Smith & M. L. Latham). Dover Publications. (Pôvodné dielo publikované 1637).
- [9] Duplák, J. (2004). *Afinná a Euklidovská geometria*. Prešov: FHPV PU, Katedra matematiky.
- [10] Věra Effenberger, V.,. (2007). *Kuželosečky*. Diplomová práce. Katedra didaktiky matematiky Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze. Dostupné [Tu](#).
- [11] Hanzel, P., Voštinár, P.,. (2025). *Afinná geometria v analytickom a didaktickom kontexte*. Fakulta prírodných vied UMB, 2025. Dostupné [Tu](#).

- [12] Haviar, M. (2000). *Algebra III. Lineárna algebra*. Pedagogická fakulta UMB, skriptá. Dostupné Tu.
 - [13] Hašek, R. (2020). *Lineární algebra a geometrie*. Pedagogická fakulta JU, Č. Budějovice.
 - [14] Hvidsten, M. (2016). *Exploring Geometry* (2nd ed.). Chapman & Hall/CRC. ISBN 978-1498760805.
 - [15] Kobza, V. (2024) *Interaktívna geometria*. Belianum. Vydavateľstvo Univerzity Mateja Bela v Banskej Bystrici. ISBN 978-80-557-2155-2, EAN 9788055721552, <https://doi.org/10.24040/2024.9788055721552>
 - [16] Chalmoviansky, P. (2010). *Geometria afinných zobrazení euklidovských priestorov*. Dostupné Tu.
 - [17] Chodorová, M. (2013). *Projektivní geometrie*. Univerzita Palackého v Olomouci. ISBN 978-80-244-4000-2. Dostupné na https://kag.upol.cz/m-dg/texty/Projektivni_geometrie.pdf.
 - [18] Janyška, J., Sekaninová, A. (2001) *Analytická teorie kuželoseček a kvadrik*. Masarykova univerzita 1996, 2. vydání 2001: Evropsky sociální fond a státního rozpočtu ČR. ISBN 80-210-2604-9. Dostupné Tu.
 - [19] Kvapilová, B. (2020). *Sbírka řešených úloh z analytické geometrie*. MFF Univerzita Karlova Praha. Bakalárska práca. Dostupné Tu.
 - [20] Monoszová, G. (2010–2012). *Analytická geometria I–III*. FPV UMB, Banská Bystrica. [Kapitoly I–III.
 - [21] Plichtová, P. (2025) *Afinita a kolineace*. Univerzita Karlova v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta. DIPLOMOVÁ PRÁCE. Dostupné Tu.
 - [22] Solčan, Š. (2013). *Projektívna geometria I*. FMFI UK Bratislava. ISBN 978-80-8147-051-6. EAN 9788081470516. Dostupné Tu.
 - [23] Vranková, E. (2004). *Geometria 2 – Analytická geometria lineárnych útvarov*. Trnavská univerzita v Trnave. ISBN 978-80-8082-681-9.
 - [24] Zlatoš, P. (2011). *Lineárna algebra a geometria*. Marenčin PT, Bratislava 2011. ISBN 9788081141119. Dostupné Tu.
- Internetové zdroje
- [25] World of mathematics, A Wolfram Web Resource, <http://mathworld.wolfram.com/>, WolframAlpha – computational knowledge engine, <http://www.wolframalpha.com/>.