

UNIVERZITA MATEJA BELA V BANSKEJ  
BYSTRICI  
FAKULTA PRÍRODNÝCH VIED

**Kuželosečky v analytickej a projektívnej geometrii**

Pavol Hanzel, Patrik Voštinár



Banská Bystrica 2025

## ANALYTICKÁ GEOMETRIA - kuželosečky a kvadriky

Učebnica vznikla v rámci projektu KEGA 010TTU-4/2025 "Rozvoj informatického a algoritmického myslenia žiakov prostredníctvom efektívneho začlenenia moderných technológií do vyučovania informatiky a matematiky"

© Autori:

prof. RNDr. Pavol Hanzel, CSc.,  
doc. PaedDr. Patrik Voštinár, PhD.

Recenzenti:

doc. RNDr. Tomáš Zdráhal, CSc.  
doc. PaedDr. Milan Pokorný, PhD.

Vydavateľ:

© Belianum. Vydavateľstvo Univerzity Mateja Bela v Banskej Bystrici.  
Edícia: Fakulta prírodných vied, Prvé vydanie, 2025.

Schválila Edičná komisia FPV UMB v Banskej Bystrici ako vysokoškolskú učebnicu. Rukopis neprešiel jazykovou úpravou.

ISBN ..., (online: iPDF) EAN ...





# Obsah

<b>1</b>	<b>Pripomenutie pojmov</b>	<b>9</b>
1.1	Vektorový priestor . . . . .	9
1.2	Afinný bodový priestor . . . . .	11
1.3	(Ne)parametrické vyjadrenie podpriestoru . . . . .	15
1.4	Cvičenie . . . . .	22
<b>2</b>	<b>Projektívne priestory</b>	<b>27</b>
2.1	Stredová kolineácia . . . . .	29
2.2	Ideálne body . . . . .	31
2.3	Homogénna súradnicová sústava . . . . .	34
2.4	Lineárna závislosť bodov projektívnej roviny . . . . .	38
2.5	Priamka v projektívnej rovine . . . . .	39
2.6	Vektorový súčin pri určovaní priamky . . . . .	42
2.7	Všeobecná rovnica projektívnej priamky . . . . .	45
2.8	Princíp duality . . . . .	46
2.9	Desargov výrok, výrok k nemu duálny . . . . .	51
2.10	Cvičenie . . . . .	54
<b>3</b>	<b>Obraz kružnice v kolineácii</b>	<b>57</b>
3.1	Ideálne body kružnice v projektívnej rovine . . . . .	58
3.2	Kolineácia projektívnej roviny . . . . .	59
3.3	Klasifikácia kuželosečiek . . . . .	61
3.4	Matica kolineácie . . . . .	64
3.5	Kružnica a izotropické body . . . . .	69
3.6	Združené priemery kuželosečky . . . . .	75
3.7	Cvičenie . . . . .	79
<b>4</b>	<b>Kuželosečky - bodová množina</b>	<b>83</b>
4.1	Definícia kuželosečky . . . . .	84

4.1.1	Metrická definícia kuželosečky . . . . .	84
4.1.2	Projektívna definícia kuželosečky . . . . .	86
4.1.3	Kuželosečka ako rovinný rez kuželovej plochy . . . . .	88
4.2	Analytické vyjadrenie kuželosečiek . . . . .	90
4.3	Parametre ohnísk a riadiacich priamok . . . . .	91
<b>5</b>	<b>Kategorizácia kuželosečiek</b>	<b>95</b>
5.1	Prevod všeobecnej rovnice na štandardný tvar . . . . .	97
5.2	Vzťahy medzi parametrami kuželosečiek . . . . .	107
5.3	Polárne (ohniskové) rovnice kuželosečiek . . . . .	109
5.4	Cvičenie . . . . .	113
<b>6</b>	<b>Záver</b>	<b>115</b>
	<b>Literatúra</b>	<b>117</b>

# Úvod

*"Geometria je bránou k porozumeniu sveta – či už pomocou kružidla, alebo matrice."*

– anonymný geometer 20. storočia

Geometria nie je len vedou o tvare a priestore – je to jazyk, ktorým opisujeme priestorové vzťahy a štruktúry sveta okolo nás. V súčasnosti sa výučba geometrie posúva od výlučne syntetického či čistého analytického prístupu k hlbšiemu porozumeniu pomocou vizualizácie, dynamickej manipulácie a projektívnych transformácií. Práve projektívna geometria predstavuje elegantný rámec, ktorý spája klasickú euklidovskú geometriu s modernými vizualizačnými nástrojmi a digitálnym modelovaním a ponúka zjednotený pohľad na geometrické objekty.

V tejto publikácii sa zameriavame na tematický celok kuželosečiek a kvadrík z hľadiska analytickej aj projektívnej geometrie. Kuželosečky – elipsy, hyperboly, paraboly – sú nielen základnými objektmi vyššej matematiky, ale zároveň majú bohatú algebraickú, geometrickú a vizuálnu štruktúru. Ich prítomnosť nachádzame v optike, astronómii, architektúre či umelej inteligencii (napr. optimalizačné úlohy s kvadratickými obmedzeniami). Zovšeobecnením kuželosečiek do priestoru vznikajú kvadriky – geometrické objekty so širokým využitím v technickej praxi aj vo výpočtovej geometrii.

Koncepcia tejto publikácie vznikla ako snaha o prepojenie tradičného výkladu s moderným chápaním geometrie ako súboru vzťahov invariantných voči transformáciám. Projektívny prístup tu nezohráva len teoretickú úlohu – práve naopak – ukazuje, že zdanlivé „výnimky“ v afinnom ponímaní (napr. rovnobežné priamky sa nepretínajú) sú v projektívnej geometrii elegantne vyriešené. Každé dve priamky sa pretínajú, každá kvadratická krivka má jednotný algebraický opis, a úbežníky sa stávajú prirodzenou súčasťou analytického jazyka.

Významnú pozornosť venujeme práci s homogénnymi súradnicami, kvadratickými formami a ich využitiu pri popise kuželosečiek v projektívnej rovine. Súčasťou výkladu sú aj ukážky konštrukcií a vizualizácií pomocou dynamických geometrických systémov, predovšetkým GeoGebry, ktoré umožňujú študentovi vlastnú manipuláciu a objavovanie geometrických súvislostí.

Tento text nadväzuje na predchádzajúcu publikáciu „Afinná geometria – zobrazenia, vizualizácie, aplikácie“, v ktorej bola položená báza pre zobrazenia a súradnicový aparát.

Táto monografia je určená nielen študentom učiteľstva matematiky, ale aj všetkým, ktorí chcú pochopiť hlbší zmysel geometrie kvadrík z hľadiska ich jednotného analyticko-projektívneho popisu. Veríme, že text podporí nielen technické zvládnutie problematiky, ale aj estetické a zážitkové vnímanie geometrie ako súčasť matematického myslenia a kultúry.

# Kapitola 1

## Pripomenutie pojmov

### 1.1 Vektorový priestor

**Motivácia:** Afinný priestor možno chápať ako „priestor bez začiatku“ – neexistuje v ňom žiadny privilegovaný bod typu „nula“. Napriek tomu vieme v takomto priestore porovnávať pozície bodov pomocou vektorov. Nasledujúce definície a príklad ukazujú, ako môžeme vytvoriť afinný priestor z rovinného zadania – ako množinu bodov vybavenú vhodnou vektorovou štruktúrou.

#### Definícia 1.1.1

Nech  $T$  je komutatívne teleso. Množinu  $V$  nazveme **vektorový priestor nad telesom  $T$**  práve vtedy, keď sú na  $V$  definované dve operácie:

1. Sčítanie vektorov:

ľubovoľnej dvojici vektorov  $\vec{u}, \vec{v} \in V$  je jednoznačne priradený súčet (vektor)  $\vec{u} + \vec{v} \in V$ .

2. Násobenie skalárom:

pre ľubovoľný vektor  $\vec{u} \in V$  a skalár  $a \in T$  je jednoznačne priradený súčin  $a\vec{u} \in V$ .

Zároveň musia byť splnené nasledujúce vlastnosti:

- štruktúra  $(V, +)$  je komutatívna grupa,
- platí distributívnosť:  $(a + b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$ ,  $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$ ,
- pre jednotkový prvok skalárneho násobenia  $1 \in T$  platí:  $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$ .

**Príklady vektorových priestorov**

1. Množina  $\mathbb{R}^2$  všetkých usporiadaných dvojíc reálnych čísel s operáciami

- sčítania usporiadaných dvojíc:  $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$ ,
- násobenia:  $k \cdot (a_1, a_2) = (ka_1, ka_2)$ .

(tzv. aritmetický vektorový priestor  $\mathbb{R}^2$  nad telesom reálnych čísel)

2. Množina orientovaných úsečiek (vektorov) spolu s operáciou sčítania vektorov a násobenia reálnym číslom.

Dokážte, že uvedené štruktúry spĺňajú všetky podmienky vektorového priestoru.

3. Na množine  $\mathbb{V}$  usporiadaných trojíc

$$\mathbb{V} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 + x_2 - 2x_3 = 0\}$$

sú dané: operácia sčítania trojíc "po zložkách" a obvyklé násobenie trojíc skalárom.

- Dokážte, že  $(\mathbb{V}, +, \cdot)$  je dvojrozmerný vektorový priestor nad poľom  $\mathbb{R}$ .
- Určte jeho bázu. (Dva lineárne nezávislé vektory.)

## 1.2 Afinity bodový priestor

### Definícia 1.2.1

Afinný priestor je usporiadaná trojica  $(\mathcal{A}, \mathbb{V}, f)$ , kde:

1.  $\mathcal{A}$  je neprázdna množina bodov (nazývaná tiež afinný nosič),
2.  $\mathbb{V}$  je vektorový priestor nad poľom  $\mathbb{R}$ ,
3.  $f : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{V}$  je zobrazenie definované predpisom  $f(X, Y) = \vec{XY}$ , ktorá každému usporiadanému páru bodov priradí vektor (tzv. vektor rozdielu).

Táto aplikácia spĺňa:

(A1) Pre všetky  $X, Y, Z \in \mathcal{A}$  platí:  $\vec{XY} + \vec{YZ} = \vec{XZ}$ .

(A2) Pre každý bod  $X \in \mathcal{A}$  a každý vektor  $\vec{u} \in \mathbb{V}$  existuje práve jeden bod  $Y \in \mathcal{A}$  taký, že  $\vec{XY} = \vec{u}$ .

### Poznámka 1.2.1

Poznámky k definícii:

1. Axioma (A1) zabezpečuje „vektorovú transitivitu“ medzi bodmi.
2. Axioma (A2) definuje možnosť „posunu“ ľubovoľného bodu o daný vektor.
3. Vektorový priestor  $\mathbb{V}$  sa nazýva *zameranie* (alebo translačný priestor) afinného priestoru.
4. Ak  $\dim(\mathbb{V}) = n$ , hovoríme o  $n$ -rozmernom afinnom priestore.
5. Vektorový priestor  $\mathbb{V}$  je určený len do izomorfizmu, ale geometricky ho môžeme chápať ako „štruktúru smerov“ v priestore.
6. Funkcia  $f(X, Y) = \vec{XY}$  nie je „rozdiel bodov“ v klasickom zmysle – ide o abstraktnú operáciu s geometrickým významom. Zároveň k nej existuje duálna operácia  $g(X, \vec{u}) = Y$ , ktorá vyjadruje „pridanie“ vektora k bodu.

Dvojica operácií  $f(X, Y) = \vec{XY}$  a  $g(X, \vec{u}) = Y$  sú navzájom inverzné vo svojom pôsobení:

$$g(X, \vec{XY}) = Y, \quad \text{a zároveň} \quad f(X, g(X, \vec{u})) = \vec{u}$$

## Príklad 1.2.1

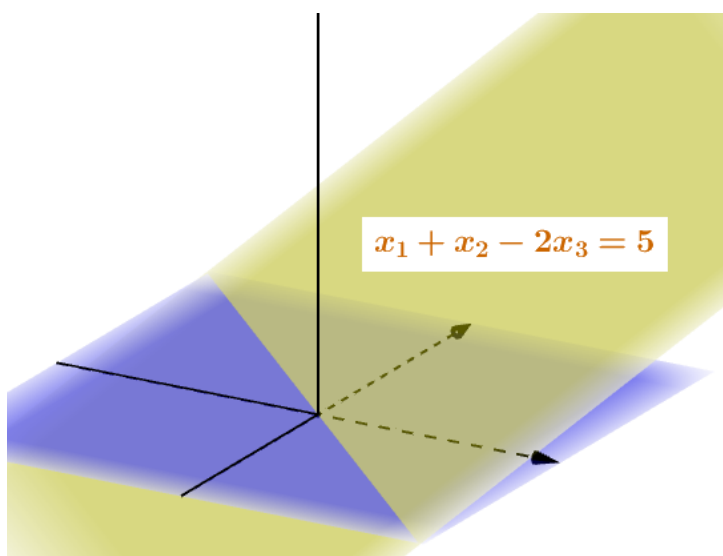
Nech  $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^3$  je rovina s parametrickým opisom:

$$\mathcal{A} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1\}$$

a nech  $\mathbb{V} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ .

Dokážte, že  $(\mathcal{A}, \mathbb{V}, f)$  je afinný priestor s  $f(X, Y) = Y - X$  (vektorový rozdiel).

Overte axiomy (A1), (A2).



Obr. 1.1: Dvozmerný afinný priestor:  $x_1 + x_2 - 2x_3 = 5$

**Riešenie.** Musíme overiť platnosť podmienok (A1) a (A2).

$$(A1) \quad \forall X, Y, Z \in \mathcal{A} \text{ platí } \overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ} = \overrightarrow{XZ}$$

$$(A2) \quad \forall X \in \mathcal{A}, \vec{u} \in \mathbb{V} \text{ existuje práve jeden bod } Y \in \mathcal{A}, \text{ pre ktorý } f(X, Y) = \overrightarrow{XY} = \vec{u}.$$

1 Nech

$$X = \left[ x_1, x_2, \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - 5) \right], Y = \left[ y_1, y_2, \frac{1}{2}(y_1 + y_2 - 5) \right], Z = \left[ z_1, z_2, \frac{1}{2}(z_1 + z_2 - 5) \right],$$

potom

$$\overrightarrow{XY} = \left( y_1 - x_1, y_2 - x_2, \frac{y_1 + y_2 - 5}{2} - \frac{x_1 + x_2 - 5}{2} \right) = \left( y_1 - x_1, y_2 - x_2, \frac{(y_1 - x_1) + (y_2 - x_2)}{2} \right)$$

$$\overrightarrow{YZ} = \left( z_1 - y_1, z_2 - y_2, \frac{z_1 + z_2 - 5}{2} - \frac{y_1 + y_2 - 5}{2} \right) = \left( z_1 - y_1, z_2 - y_2, \frac{(z_1 - y_1) + (z_2 - y_2)}{2} \right).$$

Po sčítaní dostaneme požadovaný výsledok - **podmienka (A1) je splnená.**

2 Nech je daný bod  $X = [x_1, x_2, \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - 5)]$  a vektor  $\vec{u} = (u_1, u_2, \frac{1}{2}(u_1 + u_2))$ . Potom zrejme existuje bod

$$Y = \left[ x_1 + u_1, x_2 + u_2, \frac{1}{2}((x_1 + u_1) + (x_2 + u_2) - 5) \right],$$

pre ktorý platí  $f(X, Y) = Y - X = \overrightarrow{XY} = \vec{u}$ . Teda zobrazenie  $f_P = f(P, X)$  je **surjektívne** - "na". Ukážeme, že zobrazenie  $f$  je **prosté** zobrazenie (injektívne). Nech  $X, Y \in \mathcal{A}$  sú ľubovoľné dva rôzne body a nech  $\vec{u} = (u_1, u_2, \frac{1}{2}(u_1 + u_2))$  je pevne zvolený vektor množiny  $\mathcal{V}$ . Potom je  $(x_1 \neq y_1) \vee (x_2 \neq y_2)$  a zrejme aj obrazy

$$f(P, X) = \left( p_1 - x_1, p_2 - x_2, \frac{1}{2}((p_1 - x_1) - (p_2 - x_2)) \right)$$

$$f(P, Y) = \left( p_1 - y_1, p_2 - y_2, \frac{1}{2}((p_1 - y_1) - (p_2 - y_2)) \right)$$

sú dva rôzne body. Teda zobrazenie  $f_P = f(P, X)$  je **prosté**.

Odtiaľ dostávame, že **podmienka (A2) je splnená**.

□

### Poznámka 1.2.2

Afinný priestor môžeme konštruovať nielen v celom  $\mathbb{R}^n$ , ale aj na podmnožinách, ktoré spĺňajú isté geometrické alebo algebraické vlastnosti. Nasledujúci príklad ukazuje, ako možno definovať afinný priestor na vetve hyperboly, pričom zmysel vektorového rozdielu zachytíme len cez jednu súradnicu.

### Príklad 1.2.2

Nech  $a, b > 0$  a nech množina

$$\mathcal{A} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, x < -|a| \right\}$$

predstavuje ľavú vetvu hyperboly. Zavedme zobrazenie  $f : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  predpisom:

$$f([x_1, y_1], [x_2, y_2]) = y_1 - y_2.$$

Potom  $(\mathcal{A}, \mathbb{R}, f)$  tvorí jednorozmerný afinný priestor.

Doplňujúce informácie k príkladu 1.2:

1. Množina  $\mathcal{A}$  nie je lineárny priestor ani jeho podpriestor, no výber bodov umožňuje dobre definovať vektorovú operáciu.
2. Zobrazenie  $f$  určuje vektorový rozdiel len cez  $y$ -ovú zložku — teda ide o projekciu zmeny výšky.

3. Tento príklad ukazuje, že afinná štruktúra môže byť zavedená aj netradične, pokiaľ sú zachované základné axiomy.

**Riešenie.** Ukážeme platnosť podmienky (A1) a dôkaz platnosti podmienky (A2) prenechávame čitateľovi.

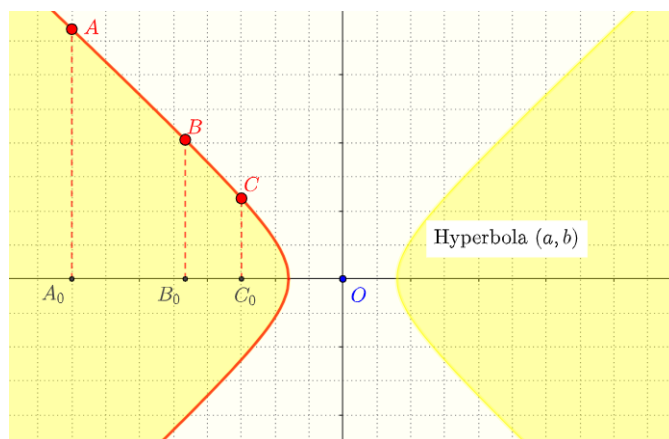
- (A1) Pre ľubovoľne zvolené tri body  $A[x_a, y_a], B[x_b, y_b], C[x_c, y_c]$  z definície zobrazenia  $f$  platí: (Otvorte si applet k obrázku 1.2)

$$f(A, B) = f([x_a, y_a], [x_b, y_b]) = y_a - y_b$$

$$f(B, C) = f([x_b, y_b], [x_c, y_c]) = y_b - y_c$$

po dosadení dostaneme

$$f(A, C) = f([x_a, y_a], [x_c, y_c]) = y_a - y_c = f(A, B) + f(B, C). \quad \square$$



Obr. 1.2: Afinný priestor - hyperbola [Applet otvoríte Tu](#)

- (A2) Preskúmame ako vyzerajú vektory priestoru  $\mathbb{V}$ . Podľa definície zobrazenia  $f$ , každé reálne číslo reprezentuje vektor vo vektorovom priestore afinného priestoru  $\mathcal{A}$  a naopak. Podmienke

$$\forall A[x_a, y_a] \in \mathcal{A}, \vec{u} \in \mathbb{R} \text{ existuje práve jeden bod } B \in \mathcal{A}, \text{ pre ktorý } f(X, Y) = \overrightarrow{AB},$$

zrejme vyhovuje bod  $B[x_b, y_a + u]$ . Prvú súradnicu  $x_b$  určíme z podmienky, že bod  $B$  je bodom hyperboly v II. alebo v III. kvadrante.

□

## 1.3 (Ne)parametrické vyjadrenie podpriestoru

Nech  $\mathbb{A}^n = (\mathcal{A}, V, f)$  je afinný priestor nad potom  $\mathbb{R}$ , kde  $f([X, Y]) = Y - X$  je obvyklá operácia odčítania  $n$ -tíc.

### Definícia 1.3.1

Neprázdnu podmnožinu  $\mathcal{A}' : \mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$  nazývame **afinný podpriestor** resp. lineárna varieta afinného priestoru  $\mathbb{A}$ , ak existuje vektorový podpriestor  $V' \subset V$ , pričom platí

1.  $\forall X, Y \in \mathcal{A}' : \vec{XY} = (Y - X) \in V'$
2.  $\forall X \in \mathcal{A}', \forall u \in V' : (X + u) \in \mathcal{A}'$

Pre ľubovoľný bod  $X$  patriaci  $k$ -rozmernému podpriestoru  $\mathcal{A}' = \mathbb{A}^k$  a pre jeho súradnice  $[x_1, x_2, \dots, x_n]$  platia vzťahy 1.3. Koefficienty  $(a_{1i}, \dots, a_{ni})$  pri parametri  $t_i$  sú súradnice vektora  $\vec{a}_i$  v kanonickej báze  $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k \rangle$  vektorového podpriestoru  $V' = V^k$ .

**Parametrické rovnice podpriestoru  $\mathbb{A}^k$**  majú známy tvar

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 + a_{11}t_1 + \dots + a_{1k}t_k \\ x_2 &= a_2 + a_{21}t_1 + \dots + a_{2k}t_k \\ &\vdots \\ x_n &= a_n + a_{n1}t_1 + \dots + a_{nk}t_k \end{aligned} \tag{1.1}$$

V maticovom tvare

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_k \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

V afinnom priestore  $\mathbb{A}^n$  môžeme lineárne podpriestory  $\mathbb{A}^k \subset \mathbb{A}^n$  vyjadriť aj **neparametricky** pomocou sústavy  $p$  lineárnych rovníc s  $n$  neznámymi. Ich počet je závislý od dimenzie podpriestoru  $k$  a od dimenzie daného priestoru  $n$ . Musí byť splnená rovnosť:  $p = n - k$ . V stredoškolskej analytickej geometrii sa stretávame s prípadmi:

1. Priamka ( $k = 1$ ) ležiaca v rovine ( $n = 2$ ) je vyjadrená jedinou lineárnou rovnicou s dvoma neznámymi.
2. Bod ( $k = 0$ ) je chápaný ako prienik dvoch priamok, teda môže byť vyjadrený ako sústava dvoch lineárnych rovníc.
3. V afinnom priestore  $\mathbb{A}^3$  rovina (nadrovina ( $k = 2$ )) je vyjadrená jedinou lineárnou

rovnícou s tromi neznámymi. Priamka je určená dvomi rovnicami.

### Príklad 1.3.1

Nájdite parametrické aj neparametrické vyjadrenie roviny v  $\mathbb{A}^3$ , ktorá prechádza bodom  $A = [1, 2, 3]$  a má smer  $\vec{u} = (-5, 6, 4)$ ,  $\vec{v} = (2, -1, 0)$ .

**Riešenie.** Použijeme metódu "step by step". Parametrické rovnice majú tvar

$$\begin{aligned}x &= 1 - 5t + 2s \\y &= 2 + 6t - s \\z &= 3 + 4t\end{aligned}\tag{1.3}$$

Zo vzťahov lineárnej sústavy (1.5) môžeme vyjadriť  $t = \frac{z-3}{4}$  a dosadiť do 1. a 2. rovnice tejto sústavy. Po úprave dostaneme sústavu dvoch lineárnych rovníc:

$$\begin{aligned}4x &= 4 - 5(z - 3) + 8s \\2y &= 4 + 3(z - 3) - 2s\end{aligned}\tag{1.4}$$

Z každej rovnice sústavy (1.6) môžeme vyjadriť parameter  $s$  a ich porovnaním získame len jednu (všeobecnú/neparametrickú) rovnicu.

$$4x + 8y - 7z + 1 = 0\tag{1.5}$$

□

Túto rovnicu nazveme **neparametrické vyjadrenie roviny** v afinnom priestore  $\mathbb{A}^3$ . Spôsob použitý v tomto príklade nazývame **eliminačná metóda**. Eliminovali sme parametre  $t, s$  v sústave (1.5).

Riešenie je tiež prezentované appletom na GeoGebra serveri [Tu](#).

### Poznámka 1.3.1

Ak je v afinnom priestore  $\mathbb{A}^n$  definovaný skalárny súčin, tak ho budeme nazývať euklidovským priestorom a symbolicky ho budeme označovať ako  $\mathbb{E}^n$ . Podrobnejšie informácie nájdete v práci [HAN, 2025].

## Lineárne podpriestory s danou dimenziou

1. Afinný podpriestor dimenzie 1 sa nazýva **afinná priamka**.
2. Afinný podpriestor dimenzie 2 sa nazýva **afinná rovina**.
3. Afinný podpriestor dimenzie  $n-1$  sa nazýva **nadrovina**.

4. Zrejme priamka je zároveň nadrovinou v priestore  $\mathbb{A}^2$  a rovina je nadrovinou v  $\mathbb{A}^3$ .

## Neparametrické vyjadrenie priamky a roviny

V euklidovskom priestore  $\mathbb{E}^n$  priamka je jednoznačne určená práve jedným z dvoch spôsobov

1. dvoma rôznymi bodmi
2. bodom a smerovým vektorom

V euklidovskom priestore rovina je jednoznačne určená práve jedným z dvoch spôsobov

1. troma nekolineárnymi bodmi
2. bodom a dvoma smerovými vektormi

Určiť neparametrickú rovnicu priamky ako nadroviny v  $\mathbb{E}^2$  môžeme aj iným ako eliminačným spôsobom. Napríklad môžeme využiť vlastnosť lineárne závislých vektorov. Pre neparametrické vyjadrenie priamky sa používa aj názov **všeobecná rovnica priamky**.

### A. Využitie determinantu

Zvoľme ľubovoľný bod  $X = [x_1, x_2]$  patriaci priamke, ktorá je určená dvoma rôznymi bodmi  $A = [a_1, a_2]$ ,  $B = [b_1, b_2]$ . Potom platí

$$\overrightarrow{XA} = k \cdot \overrightarrow{AB} \quad (1.6)$$

kde  $k$  je odpovedajúci skalár (reálne číslo). Pozrite si obrázok 1.3, ktorému odpovedá interaktívny applet na adrese [geogebra.com](http://geogebra.com).

Z lineárnej algebry (práca [ZLA, 2011]) vieme, že rovnosť (1.8) je splnená práve vtedy, ak determinant v rovnici (1.9)

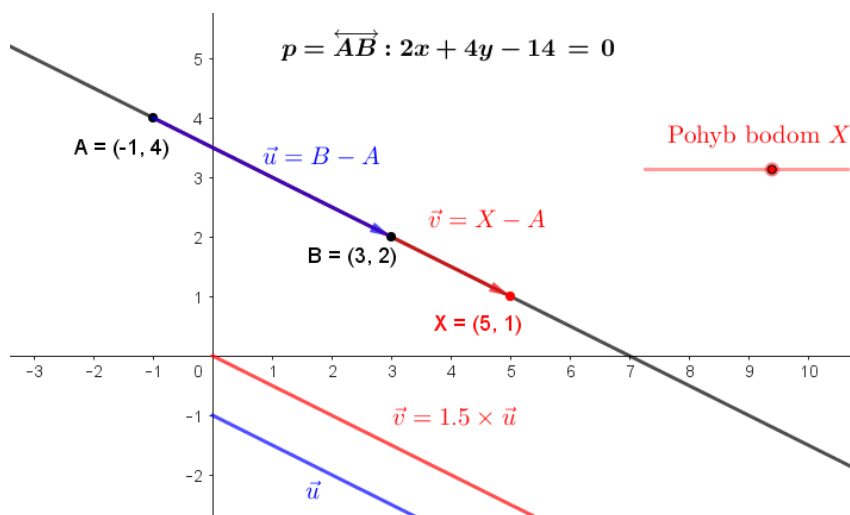
$$\begin{vmatrix} x - a_1 & y - a_2 \\ b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (1.7)$$

je singulárny tj. je rovný nule. Úpravou rovnice (1.9) dostaneme všeobecnú rovnicu priamky

$$(b_2 - a_2)x - (b_1 - a_1)y - (b_2 - a_2)a_1 - (b_1 - a_1)a_2 = 0$$

Ak priamka je určená jedným bodom  $A = [a_1, a_2]$  a nenulovým vektorom  $\vec{u} = (u_1, u_2)$ , tak v rovnici (1.9) stačí položiť

$$b_1 - a_1 = u_1, b_2 - a_2 = u_2.$$



Obr. 1.3: Priamka určená dvoma rôznymi bodmi

## B. Využitie normálového vektora

Koeficienty  $a, b, c$  vo všeobecnej rovnici priamky

$$ax + by + c = 0 \quad (1.8)$$

predstavujú súradnice normálového (kolmého) vektora  $\vec{n} = (n_1, n_2)$  na smerový vektor  $\vec{u} = (u_1, u_2)$  priamky. Pomocou skalárneho súčinu v rovnici  $\vec{n} \times \vec{u} = 0$  ľahko určíme súradnice normálového vektora. Stačí prehodiť a zmeniť jedno znamienko pri súradniciach vektora  $\vec{u}$ . Napríklad stačí položiť

$$(n_1, n_2) = (-u_1, u_2)$$

Analogicky môžeme postupovať pri rovine v euklidovskom priestore  $\mathbb{E}^3$ . Viac informácií nájdete napríklad v práci [HAS, 2020].

## C. Všeobecná rovnica nadroviny

Pojmy používané v tejto časti vychádzajú z práce [HAN, 2025]. Nadrovina  $\rho$  v afinnom priestore  $\mathbb{A}^n$  je jednoznačne určená  $n$  lineárne nezávislými bodmi  $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$ .

### Veta 1.3.1

Nech nadrovina  $\rho$  je určená lineárne nezávislými bodmi  $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$ , ktorých súradnice sú  $A_i = [a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}]$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$ . Potom súradnice ľubovoľného bodu  $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$  nadroviny  $\rho$  spĺňajú rovnosť 1.9.

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \cdots & x_n & 1 \\ a_{01} & a_{02} \cdots & a_{0n} & 1 \\ \vdots & & & \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} \cdots & a_{n-1,n} & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (1.9)$$

*Dôkaz.* Stačí dokázať, že rovnica

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \cdots & x_n & 1 \\ a_{01} & a_{02} \cdots & a_{0n} & 1 \\ \vdots & & & \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} \cdots & a_{n-1,n} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

je ekvivalentná s rovnicou

$$\begin{vmatrix} x_1 - a_{01} & x_2 - a_{02} \cdots & x_n - a_{0n} \\ a_{11} - a_{01} & a_{12} - a_{02} \cdots & a_{1n} - a_{0n} \\ \vdots & & \\ a_{n-1,1} - a_{01} & a_{n-1,2} - a_{02} \cdots & a_{n-1,n} - a_{0n} \end{vmatrix} = 0$$

To vyplýva z vety o rozvoji determinantu z rovnice (1.11) podľa posledného stĺpca. Predtým však musíte druhý riadok odpočítať od zvyšných riadkov. Prvý mínus druhý, tretí mínus druhý, ...  $\square$

#### D. Využitie zmiešaného súčinu vektorov

##### Príklad 1.3.2

Použitím zmiešaného súčinu určte vzdialenosť bodu  $A[2; 3; 4]$  od roviny  $e$ :

$$e : \begin{cases} x_1 = 2 - 3t + 2u, \\ x_2 = 3 + 2t - u, \\ x_3 = 2 + t + 4u. \end{cases}$$

**Riešenie.** Máme dva smerové vektory roviny  $e$ :

$$\vec{v}_1 = (-3, 2, 1), \quad \vec{v}_2 = (2, -1, 4).$$

Normálový vektor roviny je daný ich vektorovým súčynom:

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

Rozložme determinant:

$$\vec{n} = \vec{i} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

Vypočítajme determinanty:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = (2 \cdot 4) - (1 \cdot (-1)) = 8 + 1 = 9,$$

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = (-3 \cdot 4) - (1 \cdot 2) = -12 - 2 = -14,$$

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (-3 \cdot (-1)) - (2 \cdot 2) = 3 - 4 = -1.$$

Dostávame normálový vektor:

$$\vec{n} = (9, 14, -1).$$

Teraz upravme vzdialenosť bodu  $A(2, 3, 4)$  od roviny:

$$d = \frac{|\overrightarrow{PA} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$

Súradnice bodu  $P[2, 3, 2]$  získame dosadením  $t = u = 0$ . Vektor  $\overrightarrow{PA} = (0, 0, 2)$ ,

$$\overrightarrow{PA} \cdot \vec{n} = 0 \cdot 9 + 0 \cdot 14 + 2 \cdot (-1) = -2.$$

$$\|\vec{n}\| = \sqrt{9^2 + 14^2 + (-1)^2} = \sqrt{81 + 196 + 1} = \sqrt{278}.$$

Odpoveď:

$$d = \frac{|-2|}{\sqrt{278}} = \frac{2}{\sqrt{278}}.$$

□

**Kolineárnosť bodov a vektorov**

**Definícia 1.3.2**

Bod  $C$  je kolineárny s bodmi  $A$  a  $B$ , ak leží na priamke určenej bodmi  $A$  a  $B$ , t.j.  $C \in \overleftrightarrow{AB}$ . Trojica bodov  $A, B, C$  je **kolineárna**, ak existuje reálne číslo  $\lambda$  také, že:

$$\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB}.$$

Kolineárnosť je najjednoduchší geometrický vzťah medzi tromi bodmi – incidencia s jednou priamkou. Ak body nie sú kolineárne, hovoríme, že sú **nekolineárne** a určujú trojuholník.

**Definícia 1.3.3**

Vektory  $\vec{u}, \vec{v}$  sú lineárne závislé (kolineárne), ak existuje  $\lambda \in \mathbb{R}$ , že  $\vec{u} = \lambda \vec{v}$ .

Kolineárnosť bodov je možné algebraicky overiť pomocou vektorového rozdielu:

$$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC} \iff \overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AC}.$$

Tento prístup je obzvlášť užitočný v analytickej geometrii alebo pri výpočtoch.

**Príklad 1.3.3**

Rozhodnite, či sú body  $A = (1, 2), B = (3, 6), C = (5, 10)$  kolineárne.

**Riešenie.** Vypočítame vektory  $\vec{AB} = (2, 4)$  a  $\vec{AC} = (4, 8)$ . Zrejme  $\vec{AC} = 2 \cdot \vec{AB}$ , takže body sú kolineárne.  $\square$

**Poznámka 1.3.2**

Alternatívne môžeme využiť determinantovú podmienku:

$$\det \begin{pmatrix} x_B - x_A & x_C - x_A \\ y_B - y_A & y_C - y_A \end{pmatrix} = 0.$$

Táto metóda sa často využíva v informatike a programovaní pri riešení polohových úloh.

**Historický kontext**

Myšlienka kolineárnosti bola implicitne známa už v Euklidových *Základoch*, kde sa pracovalo s priamkami a ich priesečníkmi. Algebraické testy kolineárnosti sa objavili až s rozvojom analytickej geometrie v 17. storočí u Descarta a Fermata, pričom determinant ako nástroj sa udomácnil až v 19. storočí.

## 1.4 Cvičenie

### Vektory

1. Skalárny súčin je definovaný ako

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2,$$

kde  $\vec{x} = (x_1, x_2)$ ,  $\vec{y} = (y_1, y_2)$ . Určte veľkosť vektora  $\vec{u} = (2, 4)$

2. Nech  $f$  je bilineárna forma na priestore  $\mathbb{R}^3$  definovaná vzťahom:

$$f(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_2 + 2x_3y_3.$$

- (a) Overte, že  $f$  je skalárny súčin.
- (b) Overte, či sú vektory  $x = (1, -3, 2)$  a  $y = (2, 1, -1)$  ortogonálne.
- (c) Určte ortogonálny doplnok podpriestoru  $W = \{(1, 2, -1)\}$ .
3. Vypočítajte skalárny súčin, veľkosti a odchýlku vektorov  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ , ak viete, že
- (a)  $\vec{a} = (8, 4, 1)$ ,  $\vec{b} = (2, -2, 1)$ ,
- (b)  $\vec{a} = (2, 5, 1)$ ,  $\vec{b} = (3, -2, 4)$ .
4. Určte, pre akú hodnotu parametra  $\alpha$  sú vektory  $\vec{a} + \alpha\vec{b}$ ,  $\vec{a} - \alpha\vec{b}$  ortogonálne, ak  $\|\vec{a}\| = 3$ ,  $\|\vec{b}\| = 5$ .
5. Vypočítajte veľkosti vnútorných uhlov trojuholníka s vrcholmi  $A = [6, -4, 6]$ ,  $B = [-1, -4, 5]$ ,  $C = [2, -4, 9]$ .
6. Zistite, či štvoruholník s vrcholmi  $K = [5, 2, 6]$ ,  $L = [6, 4, 4]$ ,  $M = [4, 3, 2]$ ,  $N = [3, 1, 4]$  je štvorec.
7. Vektor  $\vec{x}$  je kolmý na vektory  $\vec{a} = (3, 2, 2)$ ,  $\vec{b} = (18, -22, -5)$  a so osou  $o_y$  zvierá tupý uhol. Vypočítajte jeho súradnice, ak  $\|\vec{x}\| = 14$ .
8. Vypočítajte vektorový súčin  $\vec{a} \times \vec{b}$ :
- (a)  $\vec{a} = (-2, 1, -3)$ ,  $\vec{b} = (-1, 2, 2)$ ,
- (b)  $\vec{a} = (-3, 0, -1)$ ,  $\vec{b} = (2, -1, -1)$ .
9. Zistite, aký uhol zvierajú vektory  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ , ak  $\|\vec{u}\| = 2$ ,  $\|\vec{v}\| = 4$  a  $\vec{a} = \vec{u} + \vec{v}$ ;  $\vec{b} = 3\vec{u}$  sú na seba kolmé.

10. Určte veľkosť vnútorného uhla pri vrchole  $A$  v trojuholníku  $ABC$ , ak  $A[0; 1]$ ,  $B[\sqrt{3}; 0]$ ,  $C[0; 3]$ .
11. Daný je trojuholník  $ABC$ . Vypočítajte skalárny súčin  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ , ak

$$\vec{a} = \vec{B} - \vec{A}, \quad \vec{b} = \vec{C} - \vec{B}, \quad |BC| = 5, \quad |AC| = 6, \quad |AB| = 7.$$

### Afinný priestor

1. (a) Zistite, či usporiadaná trojica  $(A; V; f)$  je afinným priestorom, ak

$$A = \{[x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = x_1^2\}$$

$$V = \mathbb{R}$$

$$f : A \times A \rightarrow V$$

$$f : [[x_1, x_2, x_3], [y_1, y_2, y_3]] \mapsto [x_1 - y_1]$$

- (b) Dokážte, že  $A' = \{(0, x, 0, 1) \mid x \in \mathbb{R}\}$  je afinný podpriestor priestoru  $A_3 = (A, V, f)$ , kde

$$A = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_4 = 1\}$$

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_4 = 0\}$$

a  $f$  je odčítanie po zložkách.

- (c) Určte vzájomnú polohu priamok  $p = [A; \vec{u}]$  a  $q = [B; \vec{v}]$  v afinnom priestore  $A_3$ :

a)  $A = [1, 2, 3], \vec{u} = (1, -3, 2), B = [0, 5, 1], \vec{v} = (-2, 6, -4)$

b)  $A = [1, -3, 4], \vec{u} = (2, 2, -1), B = [3, 0, -1], \vec{v} = (0, 1, 3)$

2. (Ne)parametrické vyjadrenie afinných podpriestorov

- (a) Napíšte všeobecnú rovnicu roviny  $\pi$ , ktorá je daná parametricky:

$$x = 1 + 2u - 3v,$$

$$y = 1 + 3u - 4v,$$

$$z = 3 - u + 2v,$$

kde  $u, v \in \mathbb{R}$ .

- (b) Všeobecnú rovnicu nadroviny štvorrozmerného afinného priestoru prepíšte do parametrického tvaru:

$$2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - 3 = 0.$$

(c) Napíšte všeobecnú rovnicu:

- a) priamky určenej bodmi  $A[1; 2]$ ,  $B[-3; 5]$ ,  
 b) roviny určenej bodmi  $A[2; 1; -2]$ ,  $B[4; -3; 1]$ ,  $C[-3; 2; 4]$ .

### Euklidovský priestor

1. Napíšte všeobecnú rovnicu roviny  $q$ , ktorá je určená bodmi  $A$ ,  $B$  a na súradnicovej osi  $z$  vytína úsek dĺžky 4:

$$A[-1; 3; 4], B[2; -3; -1].$$

2. Napíšte všeobecnú rovnicu priamky, na ktorej leží výška  $v_a$  trojuholníka  $ABC$ , kde  $A[2; 5]$ ,  $B[4; 2]$ ,  $C[1; -2]$

3. V  $E_3$  napíšte všeobecnú rovnicu roviny  $\beta$ , ktorá prechádza priamkou  $p$  a je kolmá na rovinu  $\alpha$ :

$$p : X = [2; 3; 0] + t(1; 0; -1),$$

$$\alpha : x_1 - x_2 + 2x_3 - 4 = 0.$$

4. Napíšte všeobecnú rovnicu roviny prechádzajúcu bodom  $M[1; 2; 1]$ , ktorá má od bodov  $M_1[2; 3; 2]$ ,  $M_2[4; 5; -4]$  rovnakú vzdialenosť.

5. Napíšte všeobecnú rovnicu nadroviny, ktorá prechádza bodom  $M$  a je kolmá na priamku  $p$ :

$$M[2; -1; 1; 1],$$

$$p : X = [7; 1; 4; -2] + t(3; 2; -2; 1).$$

6. V  $E_3$  napíšte všeobecnú rovnicu roviny  $\beta$ , ktorá prechádza priamkou  $p$  a je kolmá na rovinu  $\alpha$ :

$$p : X = [2; 3; 0] + t(1; 0; -1),$$

$$\alpha : x_1 - x_2 + 2x_3 - 4 = 0.$$

7. Použitím zmiešaného súčinu určte vzdialenosť bodu  $A[1; -2; 3]$  od roviny  $e$ :

$$e : \begin{cases} x_1 = 2 - 3t + 2u, \\ x_2 = 3 + 2t - u, \\ x_3 = 2 + t + 4u. \end{cases}$$

Určte veľkosti výšok trojuholníka  $KLM$ , ak:

$$KL : x + y - 1 = 0, \quad KM : x - 2y - 5 = 0, \quad LM : 3x + y = 0.$$

8. Rozhodnite, ktoré z nasledujúcich trojíc bodov sú kolineárne:

(a)  $A = (1, 0), B = (2, 3), C = (3, 6)$

(b)  $A = (0, 0), B = (1, 1), C = (2, 2)$

(c)  $A = (-1, 1), B = (0, 0), C = (1, 2)$

Použite oba prístupy – vektorový aj determinantový.



# Kapitola 2

## Projektívne priestory

**Motivácia:** Už starovekí grécki geometri pozorovali zvláštnosti „rovnobežiek“ pri skúmaní perspektívy. Prečo sa rovnobežné priamky zdajú zbiehať do jedného bodu na horizonte? Odpoveď na túto otázku podnietila vznik projektívnej geometrie – matematického jazyka pre to, čo vnímame opticky, ale čo klasická euklidovská geometria nevie vyjadriť v rámci svojich pravidiel. Projektívny priestor je rozšírením nášho vnímania sveta a zároveň nevyhnutným nástrojom pre porozumenie kuželosečkám a kvadrikám z jednotného hľadiska.

### Historický kontext

Základy projektívnej geometrie položili Desargues a Pascal v 17. storočí, keď sa pokúšali formalizovať zákonitosti perspektívneho zobrazovania. Ich diela sa však stali všeobecne známe až v 19. storočí vďaka prácam Ponceleta a Möbiusa, ktorí vytvorili nový geometrický jazyk – jazyk bodov v nekonečne a jednoty kuželosečiek.

Projektívna rovina mení pohľad na geometriu: v nej sa rovnobežné priamky pretínajú a body „v nekonečne“ prestávajú byť abstraktným únikom. Táto kapitola nás zavedie do priestoru, kde sa zjednocujú rôzne triedy kriviek a kde kuželosečky nadobúdajú elegantný algebraický tvar.

V práci [HAN, 2025] sme ukázali, že ľubovoľný bod euklidovského priestoru  $\mathbb{E}^n = (\mathcal{A}_n; \mathbb{V}_n; -)$  sa dá vyjadriť pomocou jeho simplexu. Uviedli sme vetu:

**Veta 2.0.1**

Lubovoľný bod  $X \in \mathbb{E}^n$  sa dá jednoznačne vyjadriť v tvare

$$X = x_0 O + x_1 E_1 + \cdots + x_n E_n,$$

kde  $x_0 + x_1 + \cdots + x_n = 1$  a  $\mathcal{S} = \{O, E_1, \dots, E_n\}$  je simplex afinného priestoru  $\mathbb{E}^n$ .

Predchádzajúca veta platí len pre body euklidovského priestoru  $\mathbb{E}^n$ . Body

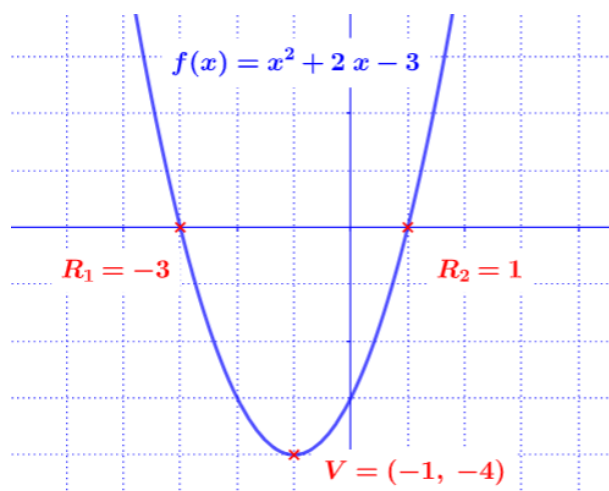
$$E_1 = [1, 0, \dots, 0], \dots, E_n = [0, 0, \dots, 1]$$

simplexu  $\mathcal{S}$  sú koncové body súradnicových vektorov  $O\vec{E}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) ortonormálnej bázy vektorového priestoru  $\mathbb{V}_n$ . Vo všeobecnosti definujeme lineárne nezávislé body nasledovne:

**Definícia 2.0.1**

Body  $A_1, \dots, A_k$  euklidovského priestoru  $\mathbb{E}^n$  nazveme lineárne nezávislé, ak sú vektory  $A_1\vec{A}_2, A_1\vec{A}_3, \dots, A_1\vec{A}_k$  lineárne nezávislé vo vektorovom priestore  $\mathbb{V}_n$ .

Predstavme si, že máme množinu všetkých bodov rovinatej paraboly. Takáto parabola má aj jeden nevlastný bod, ktorý nepatrí euklidovskej rovine a nedá sa vyjadriť pomocou súradníc vhodného simplexu. Na obrázku 2.1 je applet, v ktorom takýto nevlastný bod je určený priamkou  $x = -1$  alebo vektorom  $\vec{u} = (0, 1)$ .



Obr. 2.1: Parabola – kvadratická funkcia

Aktiváciou appletu na adrese [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org) vymodelujte viaceré nevlastné body pre rôzne kvadratické funkcie – paraboly.

**Poznámka 2.0.1**

Nevlastné body nepatria do euklidovského priestoru  $\mathbb{E}^2$  a nedajú sa reálne vyjadriť len použitím klasických súradníc. Preto sa v tejto kapitole zameriame na rozšírenie euklidovského priestoru na projektívny priestor, v ktorom už môžeme vyjadriť aj nevlastné body pomocou reálnych homogénnych súradníc.

**2.1 Stredová kolineácia**

**Motivácia:** Každý, kto niekedy kreslil 3D kocku na papier, intuitívne použil princíp stredovej kolineácie. Prečo sa kocka javí ako „skreslená“? Stredová kolineácia vystihuje zobrazenie z priestoru na rovinu – tak, ako ho poznáme z fotografie, maľby či architektúry. Je to most medzi euklidovskou geometriou a vizuálnym vnímaním priestoru.

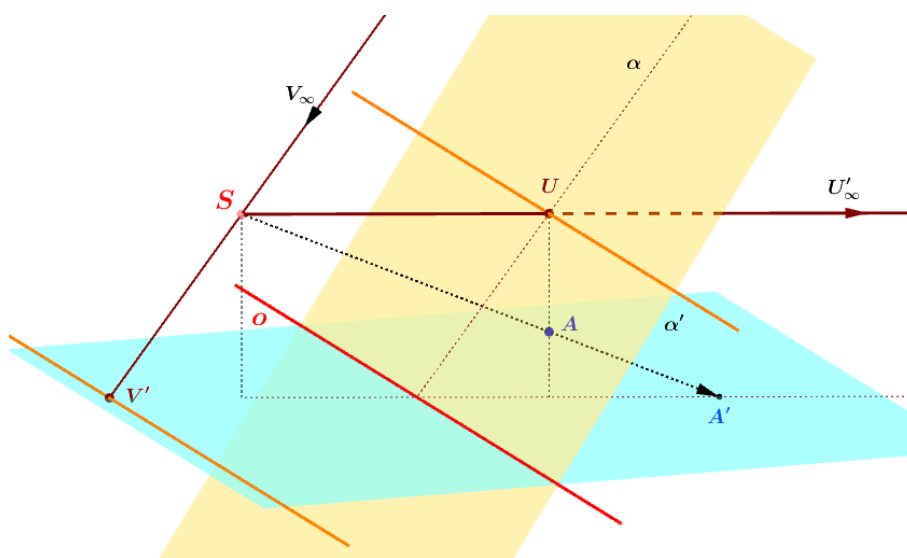
Nech sú dané dve rôznobežné roviny  $\alpha, \alpha'$  v euklidovskom priestore  $\mathbb{E}^3$ . Zvoľme bod  $S \in \mathbb{E}^3$ , ktorý nepatrí ani jednej z rovín. Nech  $o$  je ich priesečnica. Pozrite obrázok 2.2.

**Definícia 2.1.1**

Zobrazenie

$$\phi : \alpha \rightarrow \alpha'; A \mapsto A',$$

kde body  $S, A, A'$  sú kolineárne, nazývame *stredová kolineácia*. Bod  $S$  sa nazýva stred kolineácie, priamka  $o$  priesečnica rovín  $\alpha, \alpha'$  sa nazýva os kolineácie.



Obr. 2.2: Stredová kolineácia roviny  $\alpha$  do roviny  $\alpha'$ . [Applet Tu](#).

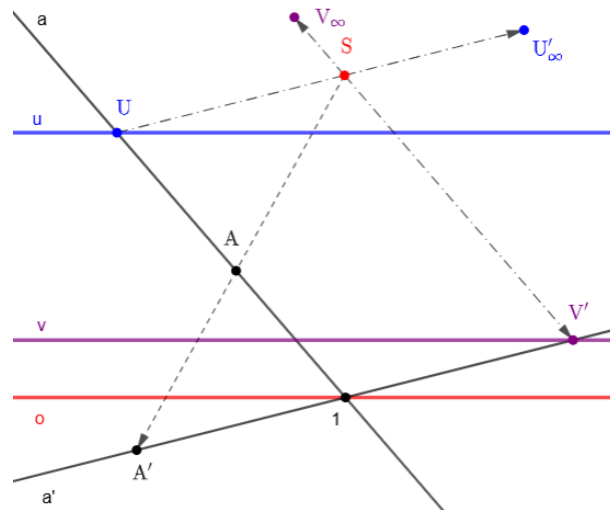


t. j. je určená stredom  $S$ , osou  $o$  a korešpondujúcou dvojicou bodov  $A \leftrightarrow A'$ .

### Príklad 2.1.1

V perspektívnej kolíneácii  $\mathcal{K}(S, o, A \rightarrow A')$  zostrojte obe úbežnice.

**Riešenie.** Riešenie formou konštrukcie „krok za krokom“ nájdete [Tu](#). □



Obr. 2.4: Konštrukcia úbežníc v kolíneácii

### Poznámka 2.1.2

- Perspektívna kolíneácia v  $\mathbb{E}^3$  je bijekcia medzi bodmi dvoch rovín  $\alpha, \alpha'$ .
- Obraz priamky a jej vzor sa pretínajú v osi kolíneácie.
- Deliaci pomer nie je invariantom kolíneácie, ale **dvoj pomer** áno.

## 2.2 Ideálne body

V tejto práci budeme nevlastné body označovať ako **ideálne body** a množinu všetkých nevlastných bodov ako **ideálnu priamku**. Zavedenie týchto prvkov prirodzene vychádza z pojmu rovnobežnosti – každá trieda rovnobežných priamok má spoločný ideálny bod. Uvedieme základné definície, ktoré zohrávajú kľúčovú úlohu pri algebraickom skúmaní kuželosečiek a kvadrík.

**Definícia 2.2.1**

Nech  $\mathbb{E}^2 = (\mathcal{A}, V_2(\mathbb{R}), -)$  je euklidovská rovina (afinný 2-rozmerný priestor, v ktorom je definovaný skalárny súčin).

**Ideálnym bodom** rozumieme jednorozmerný vektorový podpriestor smerového priestoru  $V_2(\mathbb{R})$ .

**Ideálna priamka** je množina všetkých ideálnych bodov tejto roviny.

**Didaktická poznámka.** Zavádzanie pojmu ideálny bod vo vyučovaní geometrie je často výzvou – odporúča sa kombinovať analytické, konštrukčné a vizualizačné prístupy. Ideálne body reprezentujú „smer“ – teda triedu všetkých priamok s rovnakým smerovým vektorom. V projektívnej rovine sa tieto body spájajú do jednej priamky „na nekonečne“, ktorú nazývame ideálna priamka.

Pripomeňme si, že afinný priestor  $\mathbb{A}^n = (\mathcal{A}, V_n(\mathbb{R}), -)$  je definovaný pomocou neprázdnej množiny bodov  $\mathcal{A}$  a vektorového priestoru  $V_n(\mathbb{R})$ .

**Veta 2.2.1**

Pre každý vektor  $\vec{v} \in V_n(\mathbb{R})$  existujú body  $A, B \in \mathcal{A}$  také, že  $\vec{v} = B - A$ .

Rozšírme euklidovský priestor  $\mathbb{E}^n$  o všetky ideálne body. Získame tak nový,  $(n + 1)$ -rozmerný projektívny priestor. Ideálny bod je v tomto priestore jednoznačne určený smerovým vektorom priamky. V tejto kapitole sa sústredíme na prípady  $n = 2$  a  $n = 3$ .

**Definícia 2.2.2**

Euklidovský priestor  $\mathbb{E}^3$  rozšírený o všetky ideálne body a ideálne priamky nazveme **projektívny priestor**. Projektívne rozšírenie roviny  $\mathbb{E}^2$  nazveme **projektívna rovina** a označíme ju symbolom  $\overline{\mathbb{E}}_2$ .

**Poznámka 2.2.1**

Každý ideálny bod v  $\mathbb{E}^2$  je určený svojím smerovým vektorom, t. j. jednorozmerným podpriestorom  $V_2(\mathbb{R})$ . Podobne, v  $\mathbb{E}^3$  má ideálny bod tiež vektorový charakter a ideálna priamka je dvojrozmerný podpriestor.

**Poznámky**

1. Lineárne závislé nenulové vektory určujú ten istý ideálny bod. Dve rôznobežné priamky určujú rôzne ideálne body.

2. Nevlastné (ideálne) prvky nemajú niektoré vlastnosti vlastných prvkov – nemožno napríklad hovoriť o ich smere alebo o veľkosti úsečky na ideálnej priamke.
3. V  $\mathbb{E}^3$ , ideálnym bodom rozumieme jednorozmerný podpriestor  $V_3(\mathbb{R})$ , ideálnou priamkou dvojrozmerný podpriestor a ideálnou rovinou množinu všetkých ideálnych bodov.

**Veta 2.2.2**

- a) Dve rôzne priamky v projektívnej rovine sa pretínajú v práve jednom bode.
- b) Dve rovnobežné priamky sa pretínajú v ideálnom bode – tento patrí na spoločnú ideálnu priamku.

Podľa [JAN, 2001] definujeme projektívny priestor ako algebraickú štruktúru:

**Definícia 2.2.3**

Projektívny priestor  $P^n$  nad telesom  $\mathbb{R}$  je množina všetkých jednorozmerných podpriestorov  $(n + 1)$ -rozmerného vektorového priestoru  $V_{n+1}(\mathbb{R})$ .

Každý bod  $X \in P^n$  je generovaný nenulovým vektorom  $\vec{x} \in V_{n+1}$ :

$$X = \{\alpha \cdot \vec{x}; \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Takýto vektor  $\vec{x}$  nazývame **aritmetický zástupca bodu  $X$** .

**Definícia 2.2.4**

Nech  $V$  je  $(n + 1)$ -rozmerný vektorový priestor nad  $\mathbb{R}$ . **Projektívnym podpriestorom** dimenzie  $k$  ( $0 \leq k \leq n$ ) nazveme množinu všetkých jednorozmerných podpriestorov  $U \subset V$ , ktoré ležia v pevne zvolenom  $(k + 1)$ -rozmernom lineárnom podpriestore  $W \subset V$ .

Každý projektívny podpriestor dimenzie  $k$  môžeme interpretovať geometricky:

- $k = 0$ : bod
- $k = 1$ : priamka
- $k = 2$ : rovina
- $k = n - 1$ : nadrovina

## 2.3 Homogénna súradnicová sústava

### Historický kontext

Prvý dôsledný koncept homogénnych súradníc zaviedol Jean-Victor Poncelet (1788–1867), ktorý ako vojnový zajatec vo Voroneži písal svoj slávny „Traité des propriétés projectives des figures“. Homogénne súradnice mu umožnili študovať vlastnosti geometrických útvarov nezávisle od euklidovskej metriky – čím položil základy modernej projektívnej geometrie.

Homogénna sústava súradníc v projektívnej rovine  $\mathbb{E}_2$  je rozšírením karteziánskej súradnicovej sústavy euklidovskej roviny  $\mathbb{E}^2$ . Nech je daný bod  $A \in \mathbb{E}^2$  určený karteziánskymi súradnicami  $x_A, y_A$ . Teda nech platí  $A = [a_1, a_2]$ .

### Definícia 2.3.1

**Homogénnymi súradnicami** vlastného bodu  $A$  rozšírenej projektívnej roviny  $\mathbb{E}_2$  rozumíme každú usporiadanú trojicu  $[a_1, a_2, a_0]$ ,  $a_0 \neq 0$ , pre ktorú platí

$$x_A = \frac{a_1}{a_0}, y_A = \frac{a_2}{a_0}$$

1. Z definície vyplýva, že každý vlastný bod projektívnej roviny  $\overline{\mathbb{E}}_2$  má nenulovú súradnicu  $a_0$ . (V našej práci túto súradnicu budeme umiestňovať na poslednom mieste usporiadanej  $n$ -tice.)
2. **Základný tvar homogénnych súradníc** vlastného bodu  $A$  projektívnej roviny  $\overline{\mathbb{E}}_2$  je usporiadaná trojica reálnych čísel  $A = [a_1, a_2, 1]$ .

Skúmame aké súradnice bude mať nevlastný bod  $U_\infty$  euklidovskej roviny  $\mathbb{E}^2$ . Teda aké súradnice bude mať ideálny bod projektívnej roviny  $\overline{\mathbb{E}}_2$ . Definícia ideálneho bodu hovorí, že ideálny bod je jednorozmerný vektorový podpriestor. Bod  $U_\infty$  môžeme chápať ako množinu  $\mathbf{u} = \{k \cdot \vec{u}; k \in \mathbb{R}\}$ , kde  $\vec{u}$  je smerový vektor nejakej priamky s nevlastným bodom  $U_\infty$ . Pozrite si obrázok 2.5.

**Reprezentantom vektora** (smeru resp. nevlastného bodu)  $\vec{u}$  je orientovaná úsečka  $\overrightarrow{BC}$  určená koncovými bodmi  $B, C$ . Homogénne súradnice smeru reprezentujúceho nevlastný bod  $U_\infty$  získame rozdielom homogénnych súradníc koncových bodov vektora, ktorý je jeho zvoleným reprezentantom. Napríklad pri voľbe koncových bodov  $B, C$  dostaneme rovnosť

$$\vec{u} = C - B = [c_1, c_2, 1] - [b_1, b_2, 1] = [c_1 - b_1, c_2 - b_2, 0]. \quad (2.1)$$

Všimnime si dôležitú skutočnosť: body  $B, C$  sú vlastné a teda ich tretia homogénna súradnica je rovná číslu 1 a ich rozdiel **bude vždy nulový**. To predstavuje tretiu homogénnu súradnicu ideálneho bodu projektívnej roviny.

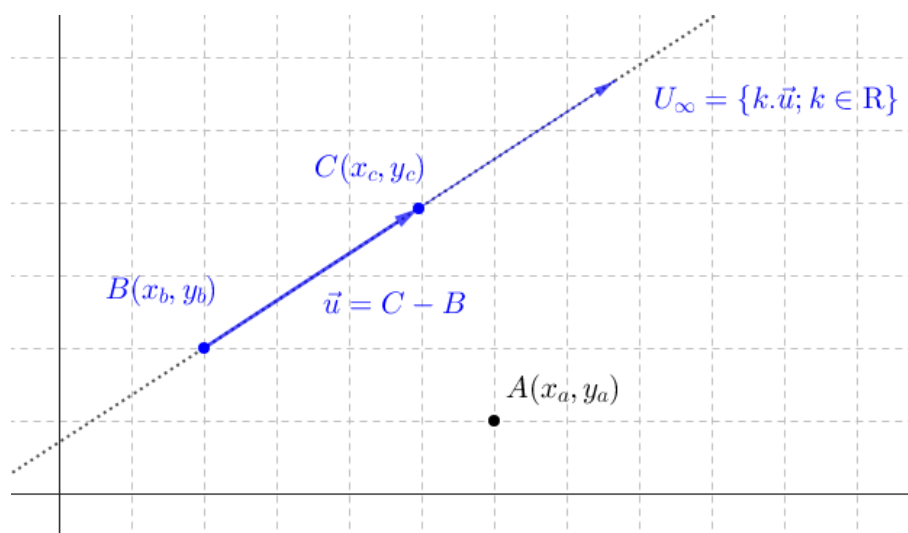
Z uvedeného vyplýva, že reprezentant nevlastného bodu je jednoznačne určený každou usporiadanou dvojicou  $[u_1, u_2]$ , pre ktorú platí  $u_1 = k(c_1 - b_1), u_2 = k(c_2 - b_2)$ . Rovnosť 2.1 umožňuje definovať homogénne súradnice ideálneho bodu projektívnej roviny  $\overline{\mathbb{E}}_2$ .

### Definícia 2.3.2

Homogénnymi súradnicami ideálneho bodu projektívnej roviny  $\overline{\mathbb{E}}_2$  (nevlastného bodu  $U_\infty$  euklidovskej roviny) je trojica reálnych čísel

$$[u_1, u_2, 0]$$

kde  $[u_1, u_2]$  sú karteziánske súradnice zvoleného reprezentanta nevlastného bodu (smeru) a tretia súradnica je rovná 0.



Obr. 2.5: Homogénny súradnicový systém

Predchádzajúce dve definície môžeme zahrnúť do jednej definície.

### Definícia 2.3.3

Homogénnymi súradnicami bodu  $X$  projektívnej roviny  $\overline{\mathbb{E}}_2$  rozumieme usporiadanú trojicu  $[kx, ky, kz]$ , kde  $k \in \mathbb{R} - \{0\}$  a  $[kx, ky, kz] \neq [0, 0, 0]$ .

**Komentár 1.** Homogénne súradnice projektívnej roviny  $\overline{\mathbb{E}}_2$  reprezentujú triedu všetkých nenulových násobkov tej istej trojice. Napr. body  $[2, 3, 1]$  a  $[4, 6, 2]$  sú totožné body v projek-

tívnej roviny. Táto invariantnosť voči násobeniu umožňuje spojiť afinné a nevlastné body do jedného rámca.

Ak bod  $X$  je ideálny, tak  $z = 0$  a ak  $X$  je vlastný bod, tak  $z \neq 0$ .

Nech  $(\mathbb{R})^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  je tretia karteziánska mocnina poľa reálnych čísel a nech  $P = (\mathbb{R})^3 - (0, 0, 0)$ . Definujeme binárnu reláciu  $R$  na množine  $P$  takto:

$$(x, y, z)R(x', y', z') \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : (x', y', z') = k(x, y, z).$$

Binárna relácia  $R$  je **relácia ekvivalencie** na množine  $P$ . Pre pevne zvolenú usporiadanú trojicu reálnych čísel  $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$  množina všetkých usporiadaných trojíc

$$X = \{(kx, ky, kz), k \in \mathbb{R}\}$$

je jedna trieda z rozkladu  $P/R$  podľa ekvivalencie  $R$  a predstavuje **súradnice toho istého bodu**. Triedy rozkladu budeme označovať pomocou hranatých zátvoriek:  $[x, y, z]$ .

### Poznámka 2.3.1

- ľubovoľnú usporiadanú trojicu reálnych čísel  $(x, y, z)$  patriacu do triedy  $X = [x, y, z]$  rozkladu  $P/R$  budeme nazývať **reprezentant bodu  $X$** .
- Ak  $[x, y, z]$  sú homogénne súradnice vlastného bodu  $X$  projektívnej roviny  $\overline{\mathbb{E}}_2$ , tak  $[\frac{x}{z}, \frac{y}{z}]$  sú karteziánske súradnice bodu  $X (X \in \overline{\mathbb{E}}_2)$ .

**Didaktická poznámka.** Projektívna geometria zjednocuje vlastné aj nevlastné objekty. Nevznikajú výnimky: každé dve priamky sa pretínajú.

Tento jednotný prístup zjednodušuje formuláciu a klasifikáciu geometrických útvarov. Napríklad: parabolu už nerozlišujeme podľa „otvorenosti“, ale podľa polohy jej ideálneho bodu.

Ako uvádza J. Čížmár:

💡 **Filozofické pozastavenie:** „Projektívna geometria nás oslobodzuje od nepotrebných metrických obmedzení a vyzdvihuje tie vlastnosti útvarov, ktoré sú invariantné vzhľadom na širokú triedu transformácií. Je to geometria pohľadu – geometria, kde je rovnobežnosť len špeciálnym prípadom prieniku.“

— J. Čížmár, *Grupy geometrických transformácií*

Preto má projektívna geometria nielen výpočtový, ale aj filozofický význam: ukazuje, že geometrické vlastnosti možno chápať nezávisle od konkrétneho priestoru, len z pohľadu vzťahov medzi bodmi a priamkami.

Uvedieme príklad, ktorý sa viaže na pojem *reprezentant bodu*. Nech je daná trojica bodov  $O_0 = [2, 5, 1]$ ,  $O_1 = [6, -4, 2]$ ,  $O_2 = [1, 3, 0]$ , ktorá je zrejme lineárne nezávislá. Každý bod  $X$  projektívnej roviny tvorí s takouto trojicou bodov množinu lineárne závislých bodov. Preto ho možno vyjadriť ako lineárnu kombináciu

$$X = \rho_0 O_0 + \rho_1 O_1 + \rho_2 O_2.$$

### Príklad 2.3.1

Určite reprezentantov  $(\rho_0, 0, 0)$ ,  $(0, \rho_1, 0)$ ,  $(0, 0, \rho_2)$  bodov  $O_0, O_1, O_2$  tak, aby bod  $Q = (2, 1, -3)$  mal vyjadrenie

$$Q = (\rho_0, 0, 0) - (0, \rho_1, 0) + 2(0, 0, \rho_2)$$

a zároveň, aby čísla  $\rho_i$  boli racionálne.

### Riešenie.

Nech sú dané body:

$$O_0 = [2, 5, 1], \quad O_1 = [6, -4, 2], \quad O_2 = [1, 3, 0].$$

Hľadáme reprezentantov

$$(\rho_0, 0, 0), \quad (0, \rho_1, 0), \quad (0, 0, \rho_2)$$

tak, aby pre lineárnu kombináciu platila rovnosť

$$Q = (\rho_0, 0, 0) - (0, \rho_1, 0) + 2(0, 0, \rho_2) = (2, 1, -3).$$

Dosadíme súradnice bodov:

$$\rho_0(2, 5, 1) - \rho_1(6, -4, 2) + 2\rho_2(1, 3, 0) = (2, 1, -3)$$

a získame **sústavu rovníc**:

$$\begin{aligned}2\rho_0 - 6\rho_1 + 2\rho_2 &= 2 \\5\rho_0 + 4\rho_1 + 6\rho_2 &= 1 \\ \rho_0 - 2\rho_1 &= -3\end{aligned}$$

Riešením sústavy je:  $\rho_0 = -\frac{19}{5}$ ,  $\rho_1 = -\frac{2}{5}$ ,  $\rho_2 = \frac{18}{5}$ .

**Záver.** Hľadání reprezentanti sú:

$$(\rho_0, 0, 0) = \left(-\frac{19}{5}, 0, 0\right), \quad (0, \rho_1, 0) = \left(0, -\frac{2}{5}, 0\right), \quad (0, 0, \rho_2) = \left(0, 0, \frac{18}{5}\right).$$

□

**Didaktická poznámka.** Táto úloha má zásadný význam: ide o analógiu rozkladu vektora vzhľadom na bázu, ale v homogénnom priestore. Takéto vyjadrenie bude nevyhnutné pri zavádzaní kvadratických foriem, matíc kvadrík a klasifikácií podľa hodnosti.

## 2.4 Lineárna závislosť bodov projektívnej roviny

V definícii 2 sme uviedli, že body  $A_1, A_2, A_3$  euklidovského priestoru  $\mathbb{E}^3$  sú lineárne závislé, ak sú lineárne závislé vektory  $a_i = \overrightarrow{OA_i}$  ( $i = 1, 2, 3$ ), kde  $O$  je počiatok súradnicového simplexu.

Homogénne súradnice projektívneho priestoru  $\overline{\mathbb{E}}_2$  umožňujú pomerne jednoducho charakterizovať závislosť bodov projektívneho priestoru.

### Definícia 2.4.1

Body  $A_1 = [x_{a1}, y_{a1}, z_{a1}], \dots, A_k = [x_{ak}, y_{ak}, z_{ak}]$  projektívnej roviny  $\overline{\mathbb{E}}_2$  sa nazývajú **lineárne závislé** práve vtedy, keď hodnosť matice

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} x_{a1} & y_{a1} & z_{a1} \\ x_{a2} & y_{a2} & z_{a2} \\ \vdots & & \\ x_{ak} & y_{ak} & z_{ak} \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

je menšia ako  $k$ . Body sú lineárne nezávislé, ak nie sú lineárne závislé. Dva **lineárne nezávislé body** sa nazývajú aj **rôzne body**.

**Príklad 2.4.1**

O nasledujúcich množinách bodov zistite, či sú lineárne závislé resp. nezávislé.

a)  $A_1 = (2, -1, 3)$ ,  $A_2 = (0, 2, -1)$ ,  $A_3 = (4, 0, 1)$ ,  $A_4 = (1, 1, -2)$ ;

b)  $A_1 = (-1, 2, -6.4)$ ,  $A_2 = (3, -6, 19.2)$ ;

V prípade lineárnej závislosti nájdite vyjadrenie tejto závislosti ako lineárnu kombináciu všetkých ostatných bodov množiny. Napríklad v tvare

$$X = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_k A_k$$

**Riešenie.**

a) Daná množina obsahuje štyri body; hodnosť matice

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

sa rovná 3, teda body  $A_1, A_2, A_3, A_4$  sú lineárne závislé. Napríklad lineárna kombinácia bodu  $A_1$  je v tvare

$$A_1 = \frac{1}{14}A_2 + \frac{11}{14}A_3 - \frac{16}{14}A_4$$

b) Hodnosť matice

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -6.4 \\ 3 & -6 & 19.2 \end{pmatrix}$$

sa rovná 1, body sú lineárne závislé. Ich lineárnu závislosť vyjadruje rovnosť

$$3A_1 + A_2 = 0$$

□

## 2.5 Priamka v projektívnej rovine

V konštrukčnej geometrii (v Hilbertovom axiomatickom systéme) **priamka sa nedefinuje**. Formuluje sa axióma incidencie *Dvoma rôznymi bodmi prechádza práve jedna*

*priamka* a popisuje sa primitívny vzťah *incidencia*. Pomocou axiómy incidencie a primitívneho vzťahu sa vyjadruje vzájomný vzťah bodu a priamky. Pritom sa predpokladá, že vieme vždy rozhodnúť o pravdivosti výrokov typu:

- priamka  $a$  prechádza bodom  $A$ ,
- bod  $A$  leží na priamke  $a$  (symbolicky zapísané  $A \in a$ ).

V afinnej geometrii (v euklidovskej rovine  $\mathbb{E}^2$ ) **priamka určená dvoma rôznymi bodmi**  $A, B$  sa **definuje** ako množina bodov

$$\overleftrightarrow{AB} = \{X \in \mathbb{E}^2; X = A + t(B - A)\} \quad (2.3)$$

V definícii 2.4 sme definovali rôzne body aj pre projektívnu rovinu  $\overline{\mathbb{E}}_2$ . Rôzne body sú lineárne nezávislé body.

#### Definícia 2.5.1

Množina všetkých bodov projektívnej roviny, ktoré sú lineárne závislé od dvoch rôznych bodov  $A, B \in \overline{\mathbb{E}}_2$  ( $A \neq B$ ), sa nazýva priamka (projektívnej roviny  $\overline{\mathbb{E}}_2$ ). Budeme ju tiež symbolicky označovať ako  $p = \overleftrightarrow{AB}$ .

V práci [CIZ, 1984] sa uvádza množinová forma definície priamky v projektívnej rovine  $\overline{\mathbb{E}}_2$  takto:

Všetky body priamky  $p = \overleftrightarrow{AB}$  možno vyjadriť zápisom

$$\forall X \in p \exists (k_0, k_1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; X = k_0A + k_1B \quad (2.4)$$

pričom  $(k_0, k_1) \neq (0, 0)$ . Body patriace jednej priamke sa nazývajú **kolineárne** body. Zápis (2.3) sa nazýva **lineárne vyjadrenie** bodu  $X$ , ktorý leží na priamke  $p = \overleftrightarrow{AB}$ .

Po zavedení definície priamky v projektívnej rovine dokážeme vetu 2.2.

*Dôkaz.* (vety 2.2.2 a) Máme dokázať fundamentálne tvrdenie, ktoré charakterizuje projektívnu rovinu:

*Každé dve rôzne priamky v projektívnej rovine  $\overline{\mathbb{E}}_2$  sa pretínajú v práve jednom bode.*

Nech sú dané priamky  $p = \overleftrightarrow{AB}$  a  $q = \overleftrightarrow{CD}$ . Potom lineárne vyjadrenie 2.4 priamok  $p, q$  má tvar

$$p = r_0A + r_1B$$

$$q = s_0C + s_1D$$

Pre spoločné body  $X \in p \cap q$  oboch priamok musí platiť

$$r_0A + r_1B = s_0C + s_1D \quad (2.5)$$

Po dosadení homogénnych súradníc  $A = [x_a, y_a, z_a]$ ,  $B = [x_b, y_b, z_b]$ ,  $C = [x_c, y_c, z_c]$ ,  $D = [x_d, y_d, z_d]$  bodov  $A, B, C, D$  dostaneme lineárnu sústavu troch rovníc o štyroch neznámych  $r_0, r_1, s_0, s_1$ . Keďže body  $A, B$  a tiež body  $C, D$  sú lineárne nezávislé, tak matica sústavy  $r_0A + r_1B = s_0C + s_1D$  má hodnotu rovnú 3. Teda vždy existuje 1-parametrické riešenie danej lineárnej sústavy - existuje aspoň jeden spoločný bod priamok.  $\square$

Tvrdenie vety 2.2 a) budeme interpretovať na dvoch príkladoch.

### Príklad 2.5.1

Nech sú dané priamky  $p = \overleftrightarrow{AB}$  a  $q = \overleftrightarrow{CD}$ , ktorých homogénne súradnice sú

$$1. A = [2, 1, 1], B = [5, -4, 1], C = [1, -2, 1], D = [7, 2, 1]$$

$$2. A = [2, 1, 1], B = [5, 3, 1], C = [1, -2, 1], D = [7, 2, 1]$$

Určite vzájomnú polohu priamok (určite súradnice ich spoločného bodu).

### Riešenie.

- V prípade homogénnych súradníc  $A = [2, 1, 1]$ ,  $B = [5, -4, 1]$ ,  $C = [1, -2, 1]$ ,  $D = [7, 2, 1]$  a ich prevodu (**normalizovaním**) na karteziánske súradnice dostaneme

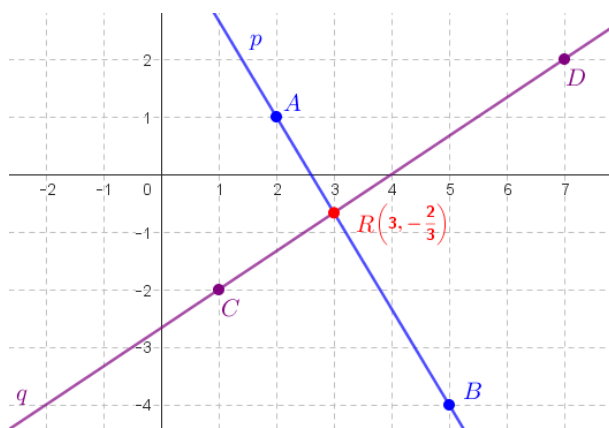
$$A := [2, 1], B := [5, -4], C := [1, -2], D := [7, 2].$$

V tomto prípade priamky  $p = \overleftrightarrow{AB}$ ;  $A = [2, 1], B = [5, -4]$  a  $q = \overleftrightarrow{CD}$ ;  $C = [1, -2], D = [7, 2]$  v euklidovskej rovine sú rôznobežné. Pozrite si obrázok 2.6.

Po dosadení homogénnych súradníc  $A = [2, 1, 1]$ ,  $B = [5, -4, 1]$ ,  $C = [1, -2, 1]$ ,  $D = [7, 2, 1]$  do rovnice (2.4) dostaneme lineárnu sústavu troch rovníc o štyroch neznámych. Matica tejto lineárnej sústavy je

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 & -7 & 0 \\ 1 & -4 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a má hodnotu 3. Preto sústave odpovedá 1-parametrické riešenie  $(2t, t, 2t, t)$ . Položme  $t = 1$  a opätovne dosadíme  $(2, 1)$  do ľavej strany rovnice (2.4). Získame súradnice



Obr. 2.6: Rôznobežné priamky

bodú  $R = 2A + 1B = [9, -2, 3]$  na priamke  $p$  resp. súradnice priesečníka priamok  $p, q$ . Po úprave na karteziánske súradnice  $[\frac{9}{3}, \frac{-2}{3}]$  dostávame riešenie

$$R = \left(3, -\frac{2}{3}\right).$$

**Záver.** Priamky majú spoločný vlastný bod  $R = \left(3, -\frac{2}{3}\right)$ .

2. V prípade homogénnych súradníc  $A = [2, 1, 1]$ ,  $B = [5, 3, 1]$ ,  $C = [1, -2, 1]$ ,  $D = [7, 2, 1]$  a ich prevodu na karteziánske súradnice dostaneme

$$A := [2, 1], B := [5, 3], C := [1, -2], D := [7, 2].$$

Euklidovské priamky  $p = \overleftrightarrow{AB}$ ,  $q = \overleftrightarrow{CD}$  v euklidovskej rovine sú rovnobežné. Pozrite si obrázok 2.7. Pri hľadaní spoločného bodu postupujeme ako v predchádzajúcom prípade. Získame riešenie

$$R = (6, 4, 0),$$

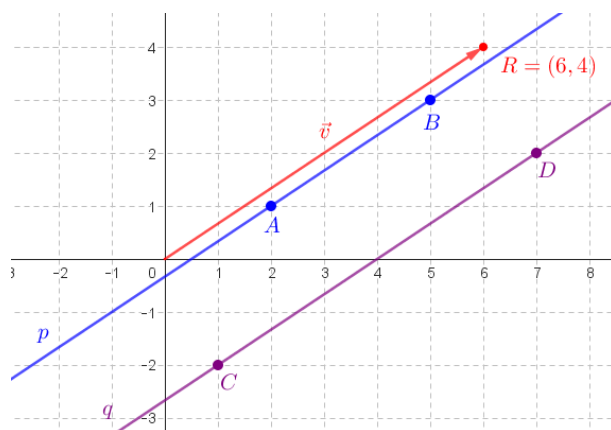
ktoré reprezentuje ideálny bod projektívnej roviny  $\overline{\mathbb{E}}_3$ . Zdôvodnenie riešenia si urobte podľa obrázka 2.7 ako samostatnú úlohu.

**Záver.** Priamky majú spoločný ideálny bod  $R(6, 4, 0)$ .

□

## 2.6 Vektorový súčin pri určovaní priamky

V projektívnej rovine  $\mathbb{P}^2$  pracujeme s homogénnymi súradnicami. Body aj priamky sú reprezentované trojrozmernými vektormi:



Obr. 2.7: Rovnobežné priamky

- bod:  $\vec{p} = (x, y, z)$ ,
- priamka:  $\vec{l} = (a : b : c)$ ,

pričom bod  $\vec{p}$  leží na priamke  $\vec{l}$  práve vtedy, keď (pre skalárny súčin!) platí:

$$\vec{l}^\top \vec{p} = ax + by + cz = 0. \quad (2.6)$$

Priamka v projektívnej rovine (samozrejme aj v euklidovskej) je jednoznačne určená dvoma rôznymi bodmi (axióma incidencie). Nech  $\vec{p}_1$  a  $\vec{p}_2$  sú dva rôzne body v projektívnej rovine.

Chceme určiť priamku  $\vec{l}$ , ktorá prechádza oboma bodmi. Na základe podmienky 2.6 bod  $\vec{p}_i$  pre  $i = 1, 2$  leží na priamke  $\vec{l}$ , ak platí  $\vec{l}^\top \vec{p}_i = 0$ . Teda musia byť splnené rovnosti:

$$\vec{l}^\top \vec{p}_1 = 0, \quad \vec{l}^\top \vec{p}_2 = 0.$$

To znamená, že vektor (priamka)  $\vec{l}$  je ortogonálny (v zmysle skalárneho súčinu) na oba vektory (body)  $\vec{p}_1$  a  $\vec{p}_2$ . Vektory  $\vec{p}_1$  a  $\vec{p}_2$  určujú rovinu prechádzajúcu počiatkom. Vektor kolmý na túto rovinu, dostaneme pomocou vektorového súčinu  $\vec{l} = \vec{p}_1 \times \vec{p}_2$ .

**Vektor  $\vec{l}$  predstavuje hľadanú priamku, ktorá je určená bodmi  $\vec{p}_1$  a  $\vec{p}_2$ .**

Napríklad pre body  $\vec{p}_1 = (1 : 2 : 1)$ ,  $\vec{p}_2 = (3 : -1 : 1)$  je ich vektorový súčin

$$\vec{l} = \vec{p}_1 \times \vec{p}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (2 \cdot 1 - 1 \cdot (-1), 1 \cdot 3 - 1 \cdot 1, 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 3) = (3, 2, -7).$$

Teda rovnica priamky je:

$$3x + 2y - 7z = 0.$$

Obrátená úloha - **priesečník dvoch priamok**. Analogicky, ak máme dve priamky  $\ell_1, \ell_2$ , tak ich priesečník (bod) vypočítame ako:

$$\vec{p} = \ell_1 \times \ell_2.$$

Hľadáme vektor kolmý na obidve priamky, teda vektorový súčin.

**Riešenie.** Príkladu 2.3.3 pomocou vektorového súčinu.

Pre získanie rovnice priamky v homogénnych súradniciach použijeme vektorový súčin bodov, ktoré ju určujú:

$$\vec{p} = A \times B, \quad \vec{q} = C \times D$$

Priesečník dvoch priamok  $p$  a  $q$  získame tiež vektorovým súčinom:

$$R = \vec{p} \times \vec{q}$$

### Prípad 1

Pre body  $A = [2, 1, 1]$ ,  $B = [5, -4, 1]$ ,  $C = [1, -2, 1]$ ,  $D = [7, 2, 1]$  a priamky  $p = \overleftrightarrow{AB}$ ,  $q = \overleftrightarrow{CD}$  dostaneme

$$\begin{aligned} \vec{p} = A \times B &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}(1 \cdot 1 - 1 \cdot (-4)) - \vec{j}(2 \cdot 1 - 1 \cdot 5) + \vec{k}(2 \cdot (-4) - 1 \cdot 5) = \\ &= \vec{i}(5) - \vec{j}(-3) + \vec{k}(-13) = [5, 3, -13] \end{aligned}$$

$$\vec{q} = C \times D = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 7 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}(-4) - \vec{j}(-6) + \vec{k}(16) = [-4, 6, 16].$$

**Priesečník**  $R = \vec{p} \times \vec{q}$  určíme zo vzťahu

$$R = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 3 & -13 \\ -4 & 6 & 16 \end{vmatrix} = \vec{i}(48 + 78) - \vec{j}(80 - 52) + \vec{k}(30 + 12) = [126, -28, 42].$$

Po normalizovaní súradníc dostaneme

**Záver.** Priamky  $p$  a  $q$  sa pretínajú v bode  $R = [3, -\frac{2}{3}, 1]$ .

### Prípad 2

Pre body  $A = [2, 1, 1]$ ,  $B = [5, 3, 1]$ ,  $C = [1, -2, 1]$ ,  $D = [7, 2, 1]$  a priamky  $p = \overleftrightarrow{AB}$ ,  $q = \overleftrightarrow{CD}$  (ako predtým) dostaneme

$$\vec{p} = [-2, 3, 1]$$

$$A \times B = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = [-2, 3, 1]$$

$$\vec{q} = [-4, 6, 16]$$

Priesečník  $R = p \times q$  určíme zo vzťahu

$$R = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 3 & 1 \\ -4 & 6 & 16 \end{vmatrix} = [42, 28, 0]$$

**Záver:**

Priesečník má tretiu súradnicu nulovú  $\Rightarrow$  leží na ideálnej priamke. Priamky  $p$  a  $q$  sú rovnobežné.  $\square$

## 2.7 Všeobecná rovnica projektívnej priamky

Nech sú dané dva rôzne body  $A, B$  projektívnej roviny  $\overline{\mathbb{E}}_2$  a ich homogénne súradnice  $A = [a_0, a_1, a_2]$ ,  $B = [b_0, b_1, b_2]$ .

- Pre súradnice ľubovoľného bodu  $X = [x, y, z]$  priamky  $p = \overleftrightarrow{AB}$  platí rovnosť 2.4. Po dosadení súradníc bodu  $X$  a po úprave dostaneme sústavu troch rovníc

$$\begin{aligned} x &= k_0 a_0 + k_1 b_0 \\ y &= k_0 a_1 + k_1 b_1 \\ z &= k_0 a_2 + k_1 b_2, \end{aligned} \tag{2.7}$$

kde  $k_0, k_1 \in \mathbb{R}$ ,  $k_0^2 + k_1^2 \neq 0$ .

Zápis 2.7 nazývame **parametrické vyjadrenie projektívnej priamky** určenej bodmi  $A = [a_0, a_1, a_2]$ ,  $B = [b_0, b_1, b_2]$ .

- Bod  $X = [x, y, z]$  priamky  $p = \overleftrightarrow{AB}$  je lineárne závislý od bodov  $A, B$ . Preto matica

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x & y & z \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{pmatrix}$$

má hodnotu 2 a determinant  $|\mathbf{X}|$  tejto matice musí byť rovný nule. Rozvinutím determinantu  $|\mathbf{X}|$  podľa prvého riadku získame rovnicu s tromi neznámymi  $x, y, z$

$$ax + by + cz = 0, \text{ kde } a = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}, b = - \begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ b_0 & b_2 \end{vmatrix}, c = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix} \quad (2.8)$$

Zápis 2.8 nazývame **všeobecná rovnica projektívnej priamky** určenej bodmi  $A = [a_0, a_1, a_2]$ ,  $B = [b_0, b_1, b_2]$ .

## 2.8 Princíp duality

V projektívnej geometrii platí princíp **duality**: každému výroku o bodoch a priamkach existuje *duálny výrok*, ktorý vznikne výmenou pojmov „bod“ a „priamka“.

Princíp duality umožňuje, aby sa mnohé tvrdenia (a ich dôkazy) dali jednoducho transformovať. Pri štúdiu kuželosečiek bude princíp duality užitočný napríklad pri prechode od bodového ku priamkovému pohľadu.

### Príklad 2.8.1

**Výrok:** „Dvoma rôznymi bodmi prechádza práve jedna priamka.“

**Duálny výrok:** „Dvoma rôznymi priamkami prechádza práve jeden bod.“

Tento príklad základného výroku a jeho duality odráža fakt, že v projektívnej rovine sa každé dve priamky pretínajú (tie, ktoré sú v euklidovskej rovine rovnobežné, sa v projektívnej rovine stretávajú v bode v nekonečne).

### Definícia 2.8.1:

*Každému výroku o bodoch a priamkach v projektívnej rovine zodpovedá pravdivý duálny výrok, ktorý sa získa výmenou pojmov „bod“ a „priamka“.*

**Algebraický pohľad** V predchádzajúcej časti sme ukázali, že v projektívnej rovine s homogénnymi súradnicami bod a priamka je určená trojicami reálnych bodov:

$$\text{Bod: } P = [x, y, z] \quad \text{Priamka: } p = (a, b, c)$$

Vzťah „bod  $P$  leží na priamke  $p$ “ (interpretuje sa ako incidentnosť bodu a priamky) formálne zapíšeme ako:

$$P \in p \iff ax + by + cz = 0.$$

Na rovnosť  $ax+by+cz=0$  sa môžeme pozerat' aj ako na „skalárny súčin bodu a priamky“. Tento skalárny súčin je symetrický – môžeme ho čítať aj ako „priamka prechádza bodom“. Algebraicky je teda pojem „bod na priamke“ a „priamka cez bod“ identický.

### Dôsledky a použitie duality

- Dualita umožňuje získať nové tvrdenia zo známych.
- Zjednodušuje dôkazy – stačí dokázať výrok a potom urobiť duálnu verziu.
- Má dôležitú úlohu pri analýze geometrických útvarov, ako sú kuželosečky.

### Tabuľka duálnych výrokov

Výrok	Duálny výrok
Dvoma bodmi prechádza práve jedna priamka.	Dvoma priamkami prechádza práve jeden bod.
Priesečník dvoch priamok je bod.	Spojnice dvoch bodov je priamka.
Množina priamok prechádzajúcich bodom $P$ .	Množina bodov ležiacich na priamke $p$ .
Tri body určujú práve jednu kružnicu.	Tri dotyčnice (kružnice) sa dotýkajú práve v jednom bode.

### Použitie pri kuželosečkách

V štúdiu kuželosečiek sa dualita používa na prechod medzi:

- *Bodovým pohľadom*: kuželosečka je množina bodov spĺňajúcich kvadratickú rovnicu. Bodová forma kuželosečky má tvar:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (2.9)$$

- *Priamkovým pohľadom (duálnym)*: kuželosečka je množina všetkých priamok, ktoré sú jej dotyčnicami. Duálna forma kuželosečky (v priamkových súradniciach):

$$A'a^2 + B'ab + C'b^2 + D'a + E'b + F' = 0 \quad (2.10)$$

#### Poznámka 2.8.1

Odvodenie vzťahov 2.9 a 2.10 urobíme v kapitole 4 - Kuželosečky.

### Priamkové súradnice

Priamkové súradnice kuželosečiek sú nástrojom projektívnej geometrie, ktorý využíva duálny pohľad na rovinu, kde miesto bodov uvažujeme priamky. Kuželosečka sa v tomto prístupe vyjadruje nie ako množina bodov, ale ako množina dotyčníc — teda priamok, ktoré sa jej dotýkajú. Tento prístup je úzko spätý s pojmom *duálnej kuželosečky*.

V projektívnej rovine  $\mathbb{E}^2$  je kuželosečka v bodových súradniciach  $C$  definovaná kvadratickou formou:

$$\mathbf{x}^\top Q \mathbf{x} = 0, \quad (2.11)$$

kde  $\mathbf{x} = (x, y, z)^\top$  je (transponovaný) homogénny bod a  $Q$  je symetrická matica  $3 \times 3$ . Porovnaj s rovnicou 2.9 a komentárom 3, ktorý popisuje "Vzťah medzi afinnou a projektívnou rovnicou kuželosečky". Ku vzájomnému vzťahu medzi afinnou a projektívnou formou sa budeme venovať v kapitole *Kuželosečky*.

V duálnom priestore  $\mathbb{E}^{2*}$  uvažujeme priamky v rovine. Každá priamka  $\ell = (a, b, c)^\top$  zodpovedá rovnici:

$$ax + by + cz = 0.$$

Duálna kuželosečka  $C^*$  je množina priamok, ktoré sú dotyčnicami ku pôvodnej kuželosečke  $C$ . Táto množina taktiež spĺňa kvadratickú rovnicu, ale tentoraz v priamkových súradniciach:

$$\ell^\top Q^* \ell = 0,$$

kde  $Q^*$  je matica definujúca duálnu kuželosečku. Vzťah medzi maticami  $Q$  a  $Q^*$  je možné popísať nasledovne. Ak je  $Q$  regulárna (t.j. nenulová hodnota determinantu, resp. má inverznú maticu), potom platí:

$$Q^* = Q^{-1}.$$

Vo všeobecnosti možno uvažovať aj adjungovanú maticu  $Q^* = \text{adj}(Q)$ , ktorá je definovaná aj vtedy, keď  $Q$  nie je invertibilná.

### Poznámka 2.8.2

Krátke porovnanie medzi degenerovanými a nedeformovanými kuželosečkami. Keď determinant  $Q$  je nulový – vtedy kuželosečka degeneruje na dvojicu priamok, bod, alebo vôbec neexistuje.

### Príklad 2.8.2

Uvažujme kuželosečku danú rovnicou:

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0,$$

čo zodpovedá kružnici v afinnom reze  $z = 1$ . (Rez - pozri komentár 2.)

V homogénnej forme má táto kuželosečka rovnicu:

$$\mathbf{x}^\top Q \mathbf{x} = 0, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Duálna kuželosečka je potom daná rovnicou:

$$\ell^\top Q^{-1} \ell = 0, \quad Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

teda

$$a^2 + b^2 - c^2 = 0.$$

Táto rovnica opisuje množinu všetkých priamok  $\ell = (a, b, c)$ , ktoré sa dotýkajú pôvodnej kuželosečky.

### Zhrnutie

- Kuželosečka v projektívnej rovine môže byť opísaná kvadratickou formou pomocou bodových súradníc.
- V duálnom priestore môžeme opísať tú istú kuželosečku ako množinu dotyčníc pomocou priamkových súradníc.
- Duálna kuželosečka je určená kvadratickou rovnicou  $\ell^\top Q^* \ell = 0$ , kde  $Q^*$  je inverzná alebo adjungovaná matica ku  $Q$ .

Princíp duality je hlboký geometrický nástroj, ktorý nielenže odhaľuje symetriu medzi bodmi a priamkami v projektívnej rovine, ale zároveň výrazne zjednodušuje prácu v dôkazoch a výpočtoch – najmä pri kuželosečkách, polárnych zobrazeniach a iných javoch projektívnej geometrie.

### Komentár 2.

*Ak chceme „vyrezať“ obyčajnú (afinnú) rovinu z projektívnej, urobíme to fixovaním poslednej súradnice  $z = 1$ . Tento „rez“ identifikuje všetky projektívne body, ktoré neležia na nekonečne vzdialených bodoch (tie majú  $z = 0$ ). Premieňa projektívne rovnice na klasické afinné rovnice.*

*V projektívnej rovine môže kuželosečka „prejsť do nekonečna“ (napr. parabola). V afinnom reze sa tá istá kuželosečka môže javiť ako kružnica, elipsa, parabola či hyperbola — podľa toho, ako „režeme“.*

V afinnom reze sú všetky body s  $z \neq 0$ , ideálne body majú  $z = 0$ . Tieto „body v nekonečne“ sú v projektívnej rovine neoddeliteľnou súčasťou geometrie.

### Komentár 3.

V obyčajnej (afinnej) rovine  $\mathbb{A}^2$  všeobecná rovnica kuželosečky má tvar 2.9, kde  $A, B, C, D, E, F$  sú reálne koeficienty.

Pri prechode do projektívnej roviny  $\mathbb{E}^2$ , vyjadríme rovnicu 2.9 v homogénnych súradniciach  $\mathbf{x} = (x, y, z)$ . Zavedieme substitúciu:

$$x \rightarrow \frac{x}{z}, \quad y \rightarrow \frac{y}{z}.$$

Vynásobíme celú rovnicu  $z^2$  a získame:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dxz + Eyz + Fz^2 = 0 \quad (2.12)$$

To je **homogenizovaná rovnica kuželosečky** v projektívnej rovine  $\mathbb{E}^2$ , ktorá odpovedá rovnici 2.11. Túto rovnicu môžeme zapísať pomocou kvadratickej formy:

$$\mathbf{x}^\top Q \mathbf{x} = 0, \quad \text{kde } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

Matica  $Q$  je symetrická matica  $3 \times 3$ :

$$Q = \begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} & \frac{D}{2} \\ \frac{B}{2} & C & \frac{E}{2} \\ \frac{D}{2} & \frac{E}{2} & F \end{pmatrix}$$

Kvadratická forma (2.13) je teda všeobecným zápisom kuželosečky v projektívnej rovine.

- Rovnica (2.13) je všeobecnejšia — platí pre celú projektívnu rovinu vrátane bodov v nekonečne ( $z = 0$ ).
- Afinná rovnica 2.9 vznikne, ak v projektívnej rovnici (2.13) položíme  $z = 1$ , čím získame afinný rez.
- Matica  $Q$  obsahuje všetky informácie o geometrii kuželosečky — typ (elipsa, parabola, hyperbola), orientáciu, stred atď.

Vzťah medzi afinnou rovnicou kuželosečky a kvadratickou formou v projektívnych súradniciach je priamy a prirodzený. Projektívna rovnica pomocou matice  $Q$  poskytuje kom-

paktný, súradnicovo nezávislý zápis kuželosečky a umožňuje jednoduché algebraické operácie (napr. transformácie, dualitu, prieniky).

## 2.9 Desargov výrok, výrok k nemu duálny

[Spracované podľa práce [SOL, 2013], pozri tiež <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Desargues.html>]

### Historický kontext

Girard Desargues (1591 – 1661) sa zaujímal o rôzne praktické veci ako lineárna perspektíva, navrhovanie stavebných objektov z tesaného kameňa alebo slnečné hodiny (1640). Jeho najvýznamnejšia práca bola o kuželosečkách, ale známa je aj Desargova veta o dvoch perspektívnych trojuholníkoch v projektívnej rovine  $\overline{\mathbb{E}}_3$ .

Pre úplnosť uvedieme tiež axiomatické poňatie projektívnej geometrie, ktoré sa opiera o štyri základné axiómy projektívnej geometrie:

- P1 Pre ľubovoľné dva rôzne body existuje jediná priamka, ktorá prechádza týmito bodmi (je incidentná s týmito bodmi).
- P2 K dvom rôznym priamkam existuje aspoň jeden bod, ktorý leží na týchto priamkach.
- P3 Existujú tri nekolineárne body.
- P4 Každá priamka má aspoň tri rôzne body, ktoré na nej ležia.

Axióma P2 hovorí, že v projektívnej geometrii neexistujú *rovnobežné* priamky. Pojmy trojuholníkov a štvoruholníkov sa definujú podobne ako v euklidovskej geometrii. Desargova výrok o dvoch perspektívnych trojuholníkoch neplatí v každej projektívnej geometrii. Napríklad neplatí v geometrii *Moulton Plane*, pozri [Moulton plane](#). Preto vo všeobecnosti hovoríme o Desargovom výroku a nie o Desargovej vete.

V rozšírenej euklidovskej rovine (v štandardnom modeli nad polom reálnych čísel) Desargov výrok je pravdivý, t.j. je vetou. Desargovu vetu možno dokázať buď analyticky pomocou homogénnych súradníc, alebo elegantným syntetickým dôkazom využívajúcim priestorovú perspektívu, konkrétne stredovú kolineáciu.

Roviny, v ktorých Desargov výrok platí, sa nazývajú desargovské. Tieto roviny sú algebraicky realizovateľné nad telesom. Rozšírená euklidovská rovina je teda desargovskou rovinou.

**Definícia 2.9.1**

Dva trojuholníky sú perspektívne z bodu, ak spojnice príslušných vrcholov prechádza jedným bodom (stredom perspektívy).

Dva trojuholníky sú perspektívne z priamky, ak priesečníky príslušných strán ležia na jednej priamke (os perspektívy).

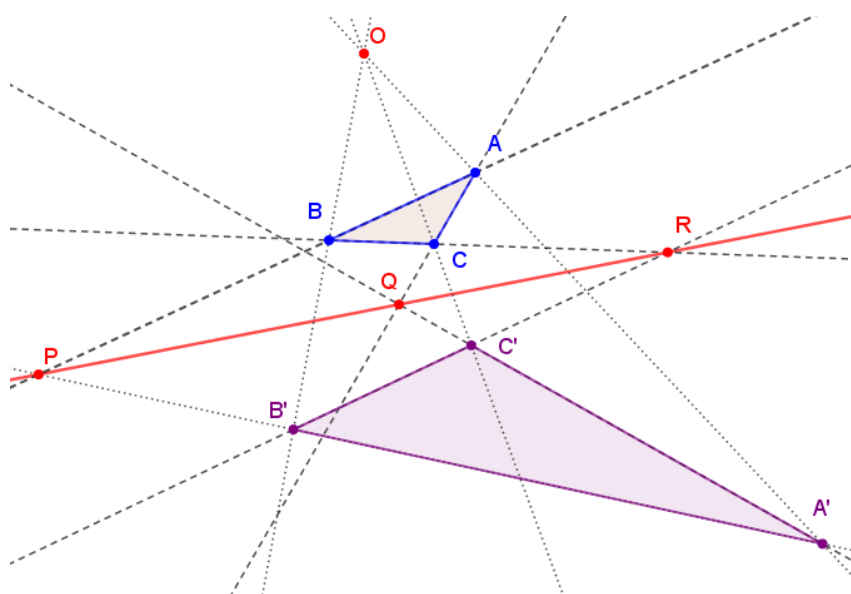
## Desargova veta

## Veta 2.9.1

Ak priamky  $\overleftrightarrow{AA'}$ ,  $\overleftrightarrow{BB'}$ ,  $\overleftrightarrow{CC'}$  sa pretínajú v bode  $O$ , tak body

$$P = \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{A'B'}, \quad Q = \overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{A'C'}, \quad R = \overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{B'C'}$$

sú kolineárne. Pozri obrázok 2.8.



Obr. 2.8: Desargova veta v projektívnej rovine  $\overline{\mathbb{E}}_3$

Keďže v projektívnej rovine platí princíp duality, tak platí aj obrátená veta k Desargovej vete - Duálny výrok k Desargovej vete.

## Veta 2.9.2

Ak body

$$P = AB \cap A'B', \quad Q = AC \cap A'C', \quad R = BC \cap B'C'$$

sú kolineárne, tak priamky  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  incidujú s jedným bodom  $O$ .

*Dôkaz.* Dôkaz obrátenej Desargovej vety nie je automatický – vyplýva z princípu duality, no nie všetky geometrie ho pripúšťajú.  $\square$

## Historický kontext

Desargova veta je považovaná za prvú významnú vetu projektívnej geometrie a tvorí základ pre neskoršie axiomatické systémy (napr. Hilbertovu axiomatiku).

## 2.10 Cvičenie

1. Určenosť perspektívnej kolineácie. Zo zadaných prvkov dourčíte stred kolineácie, os kolineácie a pár odpovedajúcich si bodov:

- (a) Os kolineácie  $o$  a dva páry odpovedajúcich si bodov  $A, A'; B, B'$ .
- (b) Tri páry odpovedajúcich si bodov  $A, A'; B, B'; C, C'$ .
- (c) Stred kolineácie  $S$ , os kolineácie  $o$  a úbežník 1. druhu  $U$ .

2. Lineárna závislosť bodov

- (a) Dokážte, že lineárna závislosť, resp. lineárna nezávislosť bodov projektívnej roviny  $\mathbb{E}_3$  nezávisí od výberu reprezentantov týchto bodov.
- (b) O nasledujúcich množinách bodov zistite, či sú lineárne závislé resp. nezávislé. Body sú určené svojimi reprezentantmi.

- $A_1 = (-1, 2, -6.4), A_2 = (3, -6, 19.2), A_3 = (0, 1, 1);$
- $A_1 = (2, 3, -2), A_2 = (I, 2, -4), A_3 = (O, 1, -6).;$

- (c) Trojica bodov  $O_0 = [1, 0, 0], O_1 = [0, 2, 0], O_2 = [0, 0, 1]$  je zrejme lineárne nezávislá. Každý bod  $X$  projektívnej roviny tvorí s takouto trojicou množinu lineárne závislých bodov. Preto ho možno vyjadriť ako lineárnu kombináciu  $X = \rho_0 O_0 + \rho_1 O_1 + \rho_2 O_2$ .

Určite reprezentantov  $(\rho_0, 0, 0), (0, \rho_1, 0), (0, 0, \rho_2)$  bodov  $O_0, O_1, O_2$  tak, aby bod  $Q = (2, 1, -3)$  mal vyjadrenie

$$Q = (\rho_0, 0, 0) - (0, \rho_1, 0) + 2(0, 0, \rho_2)$$

a zároveň, aby čísla  $\rho_i$  boli racionálne. Pozri prácu [CIZ, 1984], str. 29.

- (d) Ukážte, že body s reprezentantmi  $(a) = (2, 3, -2), (b) = (1, 2, -4), (c) = (0, 1, -6)$  incidujú s jednou priamkou. Určite  $\lambda, \mu$  tak, aby

$$(a) = \lambda(b) + \mu(c)$$

Určite  $t$  v trojici  $(4, -1, t)$  tak, aby bod s týmto reprezentantom incidoval s priamkou  $(a)(b)$  a nájdite  $\sigma, \tau$  tak, aby

$$(4, -1, t) = \sigma(a) + \tau(b)$$

3. Priamka v projektívnej rovine

- (a) Dané priamky  $p = \overleftrightarrow{AB}$  a  $q = \overleftrightarrow{CD}$ , ktorých homogénne súradnice bodov sú
- $A = [2, 1, 1], B = [5, -4, 1], C = [1, -2, 1], D = [7, 2, 1]$
  - $A = [2, 1, 1], B = [5, 3, 1], C = [1, -2, 1], D = [7, 2, 1]$

Určite nevlastné body priamok (určite ich homogénne súradnice).

- (b) Určite všeobecné aj parametrické vyjadrenie priamok  $\overleftrightarrow{AB}$  a  $\overleftrightarrow{CD}$  v projektívnej rovine, ktoré sú určené bodmi s reprezentantmi

$$A = (0, 0, 1), B = (-2, 3, 0), C = (0, -1, 3), D = (-2, 3, 0).$$

Určite súradnice ich spoločného bodu.

- (c) Napíšte rovnicu priamky, v projektívnej rovine, ktorá je určená priesečnicou priamok  $y + 2z + 9 = 0, x + z + 3 = 0$  a je rovnobežná s osou  $O_x$ .
- (d) Vzhľadom k afinnému repéru  $\langle O[0, 0, 0]; \vec{e}_1(1, 0, 0); \vec{e}_2(0, 1, 0); \vec{e}_3(0, 0, 1) \rangle$  v  $\mathbb{E}^3$  je daná priamka  $p$  všeobecným vyjadrením  $p : 2x + y - z - 2 = 0; x - y + z + 1 = 0$ . Určite rovnice priamky  $p$  v indukovaných homogénnych súradniciach a určite súradnice nevlastného bodu priamky  $p$ . Pozri prácu [JAN, 2001], str.27.

### Definícia 2.10.1

Štvorroh je geometrický útvar v projektívnej rovine, ktorý pozostáva zo štyroch bodov, z ktorých žiadne tri nie sú kolineárne a zo šiestich priamok, ktoré sú týmito bodmi určené.

- Geometrický útvar duálny k štvorrohu je štvorstran; sformulujte jeho definíciu.
- V rozšírenej euklidovskej rovine sú dané štyri body  $A, B, P, Q$ , z ktorých žiadne tri nie sú kolineárne. Nech  $C = AB \cap PQ, R = AQ \cap PB, S = AP \cap BQ, D = RS \cap AB, T = RS \cap PQ, U = AT \cap PD$ . Dokážte, že body  $R, U, C$  sú kolineárne.  
(Pri dôkaze využite Desargovu vetu.)
- Nech  $A, B, C$  sú tri rôzne kolineárne body rozšírenej euklidovskej roviny a  $P, Q, P', Q'$  sú také body, že priamky  $AB, PQ$  a  $P'Q'$  sú rôzne a pretínajú sa v bode  $C$ . Nech  $R = AQ \cap PB, S = AP \cap BQ, D = RS \cap AB, R' = AQ' \cap P'B, S' = AP' \cap BQ', D' = R'S' \cap AB$ . Dokážte, že  $D = D'$ .  
(Pri dôkaze využite Desargovu vetu.)
- Úlohy na výpočet deliaceho pomeru

- (a) **Vlastný bod medzi dvoma bodmi**

V projektívnej rovine sú dané body  $A = [1 : 2 : 1], B = [4 : 5 : 1], C = [2.5 :$

3.5 : 1].

Vypočítajte deliaci pomer bodu  $C$  vzhľadom na body  $A$  a  $B$ , t. j. určte  $\lambda_C = (ABC)$ .

(b) **Nevlastný bod**

Body  $A = [2 : 1 : 1]$ ,  $B = [5 : 4 : 1]$  určujú priamku. Bod  $C = [3 : 3 : 0]$  je nevlastný bod tejto priamky.

Určte deliaci pomer  $\lambda_C = (ABC)$ .

8. Úlohy na výpočet dvojpomeru

(a) **Štyri vlastné body**

V projektívnej rovine sú dané body  $A = [0 : 0 : 1]$ ,  $B = [1 : 0 : 1]$ ,  $C = [2 : 0 : 1]$ ,  $D = [4 : 0 : 1]$ .

Vypočítajte dvojpomer  $(A, B; C, D)$ .

(b) **Jeden bod nevlastný**

Body  $A = [1 : 0 : 1]$ ,  $B = [2 : 0 : 1]$ ,  $C = [3 : 0 : 1]$ ,  $D = [1 : 0 : 0]$  (nevlastný bod).

Vypočítajte dvojpomer  $(A, B; C, D)$ .

# Kapitola 3

## Obraz kružnice v kolineácii

**Motivácia:** Kružnica bola od antiky považovaná za dokonalý útvar. Jej symetria a jednoduchosť z nej robili základný stavebný kameň euklidovskej geometrie aj konštrukčných metód pomocou pravítka a kružidla. Všetky tzv. „elementárne konštrukcie“ (napr. delenie úsečky, zostrojenie kolmíc, trojuholníkov, ale aj pravidelných mnohoúhelníkov) využívajú vlastnosti kružnice ako množiny bodov s rovnakou vzdialenosťou od stredu.

Prvé dôsledné konštrukcie s kružnicou nájdeme v Euklidových *Základoch*, kde sa používajú na delenie úsečiek, zostrojenie pravouhlých trojuholníkov a konštrukciu pravidelných mnohoúhelníkov. Ešte predtým však babylonskí a egyptskí geometri poznali empirické vzťahy na výpočet obvodu a obsahu kruhu.

Vrcholom antickej geometrie bola Archimedova metóda aproximácie čísla  $\pi$  pomocou mnohoúhelníkov. Archimedes približoval obsah kruhu pomocou vpísaných a opísaných mnohoúhelníkov a vytvoril tak prvú numerickú aproximáciu čísla  $\pi$ . V diele *Merači kruhov* určil  $\pi$  s presnosťou medzi  $\frac{223}{71}$  a  $\frac{22}{7}$  – čo je presnosť, ktorú ľudstvo neprekročilo po ďalších 1000 rokov.

Neskôr sa kružnica objavila v analytickej rovine ako kvadratická rovnica tvaru

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2, \quad (3.1)$$

kde  $O = [a, b]$  je stred a  $r$  je polomer kružnice. Rovnica 3.1 predstavuje špeciálny prípad algebraickej krivky druhého stupňa. V novoveku sa kružnica algebraicky zapísala ako rovnica druhého stupňa – ako špeciálny prípad kuželosečky.

### 3.1 Ideálne body kružnice v projektívnej rovine

#### Historický kontext

V projektívnej geometrii (najmä v práci Ponceleta, Möbiusa a Cayleyho) sa ukázalo, že rozdiel medzi kružnicou, elipsou, parabolou a hyperbolou je len zdanlivý – závisí od polohy roviny rezu kužeľovej plochy.

**Kružnica tak prestala byť „výnimočná“, ale stala sa súčasťou širšej rodiny kriviek, ktorých spoločným základom je ich algebraický stupeň.**

Uvažujme o projektívnej rovine  $\overline{\mathbb{E}}_2$ , v ktorej je daná kružnica  $(O, r)$  so stredom (reprezentantom)  $O = [a, b, 1]$  a polomerom  $r$ . V predchádzajúcej časti 3.1 sme ukázali, že v afinných (karteziánskych) súradniciach má táto kružnica rovnicu

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Prechodom do homogénnych súradníc (zavedením projektívnej súradnice  $z$ ) dostávame rovnicu

$$(x - az)^2 + (y - bz)^2 - r^2 z^2 = 0, \quad (3.2)$$

ktorá opisuje kružnicu ako kvadratickú kužeľosečku v projektívnej rovine  $\overline{\mathbb{E}}_2$ . Aby sme určili, kde kružnica daná rovnicou 3.2 pretína ideálnu priamku, dosadíme  $z = 0$ :

$$x^2 + y^2 = 0. \quad (3.3)$$

Získaná rovnica je nezávislá od súradníc stredu  $[a : b : 1]$ . Rovnica 3.3 nemá reálne riešenia okrem nulového vektora, ktorý nezodpovedá žiadnemu projektívnemu bodu. Preto kružnica v reálnej projektívnej rovine  $\overline{\mathbb{E}}_2$  **nepretína ideálnu priamku v žiadnom reálnom bode.**

Riešenia rovnice  $x^2 + y^2 = 0$  však existujú v komplexnej rovine: sú to body s homogénnymi súradnicami

$$[1 : i : 0] \quad \text{a} \quad [1 : -i : 0],$$

teda dva navzájom združené komplexné ideálne body. V komplexnej projektívnej rovine  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  každá kružnica, bez ohľadu na svoj stred, **pretína ideálnu priamku v dvoch (komplexných) bodoch**, ktorých reprezentanti sú  $[1, i, 0]$  a  $[1, -i, 0]$ .

V reálnej projektívnej geometrii (teda aj v nami skúmanej projektívnej rovine  $\overline{\mathbb{E}}_2$ ) sa často uvažuje kružnica ako kužeľosečka, ku ktorej možno z pevných reálnych smerov viesť rovnobežné dotyčnice. Všetky dotyčnice v danom smere sa zbiehajú v jednom ideálnom

bode, ktorý tak možno chápať ako “príslušný” ideálny bod kružnice pre daný smer. Z tohto pohľadu možno povedať, že projektívne rozšírenie kružnice obsahuje práve tie ideálne body, ktorými prechádzajú dotyčnice kružnice v pevnom smere – teda pre každý takýto smer ide len o *jeden* ideálny bod.

## 3.2 Kolineácia projektívnej roviny

### Definícia 3.2.1

Nech  $\overline{\mathbb{E}}_2$  je projektívna rovina a  $K$  bijektívne zobrazenie

$$\mathcal{K} : \overline{\mathbb{E}}_2 \rightarrow \overline{\mathbb{E}}_2.$$

Zobrazenie  $\mathcal{K}$  nazývame *kolineáciou* roviny  $\overline{\mathbb{E}}_2$ , ak každú trojicu kolineárnych bodov  $A, B, C$ , ktoré sú po dvojiciach rôzne, zobrazí na trojicu  $A', B', C'$ , ktorá je takisto po dvojiciach rôzna a kolineárna.

### Poznámka 3.2.1

V práci [HVI, 2016] sa uvádza definícia: Kolineácia je bijektívna transformácia reálnej projektívnej roviny na seba, ktorá zobrazuje priamky na priamky a zachováva prieniky priamok.

Táto vlastnosť je ekvivalentná s formuláciou definície 3.2. Z nej vyplýva, že kolineácia  $\mathcal{K}$  zobrazuje body roviny  $\overline{\mathbb{E}}_2$  opäť na body tejto roviny a priamky roviny  $\overline{\mathbb{E}}_2$  na priamky tejto roviny, pričom zachováva incidenciu bodov a priamok.

### Samodružné prvky kolineácie

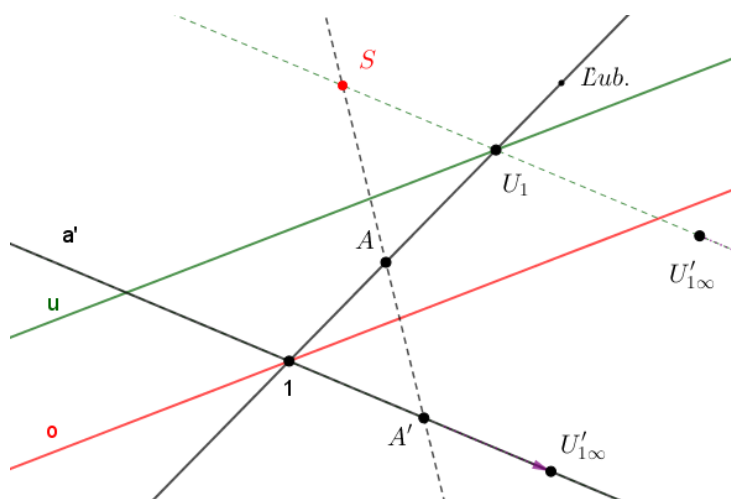
Nasledujúce pojmy sú relevantné práve vtedy, ak existujú spomínané samodružné prvky. [Pojmy sú prevzaté z práce [Sol,2013].]

- Bod  $M$  sa nazýva *samodružným bodom* kolineácie  $\mathcal{K}$ , ak  $\mathcal{K}(M) = M$ .
- Priamka  $m$  sa nazýva *samodružnou priamkou* kolineácie  $\mathcal{K}$ , ak  $\mathcal{K}(m) = m$ .
- Bod  $S$  sa nazýva *stredom* (tiež *silne samodružným bodom* alebo *priamkovo samodružným bodom*) kolineácie  $\mathcal{K}$ , ak  $\mathcal{K}(S) = S$  a navyše  $\mathcal{K}(m) = m$  pre každú priamku prechádzajúcu stredom  $S$ .
- Priamka  $o$  sa nazýva *osou* (*silne samodružnou priamkou* alebo *bodovo samodružnou priamkou*) kolineácie  $\mathcal{K}$ , ak  $\mathcal{K}(o) = o$  a  $\mathcal{K}(X) = X$  pre každý bod  $X$  priamky  $o$ .

- Kolineácia, pre ktorú existuje stred a os, sa nazýva *stredová kolineácia* alebo tiež **perspektívna kolineácia**. Porovnajte s definíciou 2.1.

V ďalšej časti tejto kapitoly budeme skúmať obraz kružnice v perspektívnej kolineácii  $\mathcal{K}(S, o, u)$ , ktorá je určená stredom  $S$  kolineácie, jej osou  $o$  a úbežnicou  $u$ . Perspektívna kolineácia je špeciálnym prípadom bijektívneho zobrazenia projektívnej roviny na seba, ktoré zachováva kolineárnosť. Uvedieme definíciu kolineácie.

Ako ukazuje obrázok 3.1 prvky  $S, o, u$  sú postačujúce na definovanie perspektívnej kolineácie v rovine  $\pi$ . V takto definovanej perspektívnej kolineácii vieme zostrojiť obraz ľubovoľného bodu roviny  $\pi$ , dokonca aj nevlastného (ideálneho bodu). Zostrojte obraz ideálneho bodu priamky  $a$  v interaktívnom applete: [Kolineácia -Obraz bodu](#). Využite konštrukciu z príkladu 2.1.



Obr. 3.1: Obraz bodu v kolineácii  $\mathcal{K}(S, o, u)$

V projektívnej geometrii hovoríme, že kružnica sa zobrazí na kuželosečku, pričom obrazy jej úbežníkov budú ideálne body. Tieto body – ktoré v euklidovskom svete „neexistujú“ – sú kľúčom k pochopeniu jednoty všetkých kvadratických kriviek. Perspektívne zobrazenie teda nie je len geometrickým trikom, ale nástrojom k hlbšiemu porozumeniu kružnice ako projektívneho objektu. Pri kategorizácii kuželosečiek sa budeme opierať o nasledujúce tvrdenie, ktoré uvádzame bez dôkazu. Dôkaz nájdete napríklad v práci [HAS, 2020].

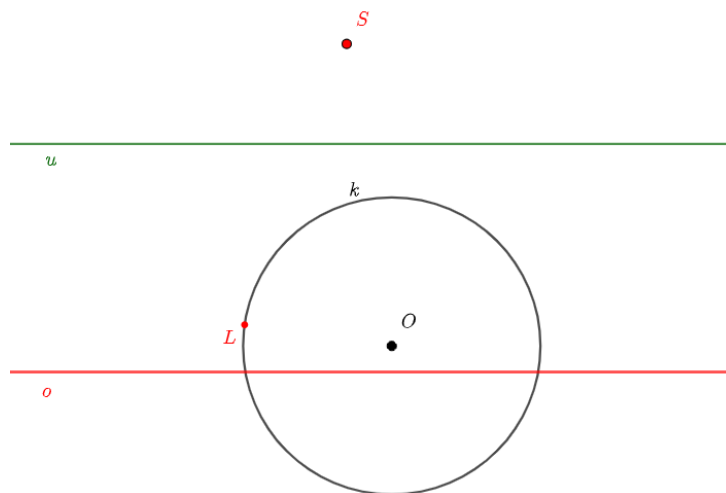
### Veta 3.2.1

Obrazom kružnice v stredovej kolineácii  $\mathcal{K}(S, o, A \rightarrow A')$  je regulárna kuželosečka:

**elipsa, parabola alebo hyperbola.**

Obraz kružnice v kolineácii je vo všeobecnosti kuželosečka. Výsledný typ závisí od polohy stredu, osi a smeru kolineácie.

Interpretácia vety 3.2. Podrobne popíšeme konštrukciu obrazu kružnice v prostredí GeoGebra. Nech je daná perspektívna kolineácia  $\mathcal{K}(S, o, u)$  v rovine  $\pi$ . Uvažujme o kružnici  $k = (O, r)$ , ktorá leží v rovine  $\pi$  ale nepretína úbežnicu  $u$ . Pozrite obrázok 3.2.



Obr. 3.2: Zadanie: Obraz kružnice v kolineácii

Otvorte si interaktívne zadanie <https://www.geogebra.org/m/peyhrwhf>. Pomocou nasledujúcich krokov konštruujte *obraz* kružnice  $k$  a určite *úbežníky*:

1. Určite dva ideálne body  $V_{\infty 1}$ ,  $V_{\infty 2}$  kružnice  $k$  (napr. ako smerové vektory dvoch rôznobežných dotyčníc).
2. Zobrazte ideálne body v kolineácii – vzniknú reálne body  $V'_1, V'_2$ .
3. Zostrojte obraz  $L'$  bodu  $L \in k$ .
4. Aktivujte GeoGebra nástroj *Množina bodov*. Postupne zvolte (kliknite na) bod  $L \in k$  a následne ukážte (kliknite na) bod  $L'$ . Program automaticky vykreslí stopu bodu  $L'$  v závislosti od dynamického pohybu bodu  $L \in k$ . Výsledkom (riešením) bude elipsa.

Riešenie <https://www.geogebra.org/m/zwx5vzdd>

Reálne body  $V'_1$  a  $V'_2$  predstavujú úbežníky druhého druhu elipsy a budeme ich nazývať ideálne body kružnice  $k$ .

### 3.3 Klasifikácia kuželosečiek

**Regulárne kuželosečky** môžeme klasifikovať podľa toho, koľko majú nevlastných bodov.

- E) Elipsa má všetky body vlastné. Teda nemá nevlastné body.  $\Leftrightarrow$  Kružnica s úbežnicou  $u$  nemá spoločný bod.
- P) Parabola má jeden nevlastný bod (má jednu vetvu).  $\Leftrightarrow$  Kružnica s úbežnicou  $u$  má spoločný jeden bod.
- H) Hyperbola má dva nevlastné body (dve vetvy), ktoré ležia v smere asymptót.  $\Leftrightarrow$  Kružnica s úbežnicou  $u$  má dva spoločné body.

### Poznámka 3.3.1

Pokúsme sa zodpovedať otázky:

- Ako sa mení v zornom poli kružnica, ak sa na ňu pozeráme „z diaľky“?
- Môže sa zobrazit kružnica v perspektívnej kolíneácii opäť do kružnice?

Pri hľadaní odpovedí na tieto a podobné otázky nám pomôže riešenie príkladu 3.3, ktorý demonštruje klasický výsledok projektívnej geometrie: kružnica sa pri kolíneácii zobrazuje na kuželosečku, pričom smer jej združených priemerov súvisí s obrazmi ideálnych bodov kružnice.

Kružnica je špeciálny prípad kuželosečky so súmernou geometriou. Ak sa však pozrieme na kružnicu z pohľadu projektívnej geometrie, jej obrazom pri perspektívnej kolíneácii môže byť ľubovoľná kuželosečka – typicky elipsa. Tento proces nám umožňuje premostiť afinné chápanie kružnice so zobrazovacími vlastnosťami projektívneho priestoru.

Uvažujme perspektívnu kolíneáciu  $\mathcal{K}(S, o, A \mapsto A')$  z roviny  $\pi$  do roviny  $\pi$ , kde obrazom kružnice  $k = (O, r)$  je elipsa. Nech sú dané dva ideálne body kružnice (napr. vektorovo:  $\vec{u}_1 = (1, 0)$  a  $\vec{u}_2 = (0, 1)$  - ako dvojice dotyčníc rovnobežných v horizontálnom a vertikálnom smere).

### Príklad 3.3.1

Zostrojte obraz kružnice pri tejto kolíneácii (elipsu) a určte jej združené priemery.

Pomoc. Využite zadanie <https://www.geogebra.org/m/zd6vhspX>, v ktorom je vytvorený nový nástroj pre zostrojenie obrazu ľubovoľného bodu v kolíneácii.

### Postup konštrukcie v GeoGebre:

1. Daná je kružnica  $k$  so stredom  $O[0, 0]$  a polomerom  $r = 1$ . Kolíneácia je daná stredom  $S$ , osou  $o$  a úbežníkom  $U$  (prvého druhu), pre názornosť je vytvorená dvojica odpovedajúcich bodov  $A, A'$ .

2. Zostroj dotyčnice ku kružnici v smeroch  $\vec{u}_1 = (1, 0)$  a  $\vec{u}_2 = (0, 1)$ . Vzniknú dva páry dotyčníc – rovnobežné dvojice v horizontálnom a vertikálnom smere. Ich priesečníky ležia na ideálnej priamke a určujú dva ideálne body kružnice.
3. Spoj každý z týchto dvoch ideálnych bodov so stredom kolineácie  $S$  a nájdi ich priesečníky s osou  $o$ . Tieto priesečníky predstavujú obrazy ideálnych bodov – teda určujú združené priemery elipsy.
4. Over, že jej dotyčnice v smeroch obrazu  $\vec{u}_1, \vec{u}_2$  sú združené – teda že ich nosiče sú navzájom združené priemery. Elipsu zostroj pomocou niektorej konštrukcie uvedenej v diplomovej práci [Effenberger, V., Kuželosečky](#).
5. Iný spôsob konštrukcie elipsy:
  - (a) Päť bodová: Vyber aspoň 5 bodov  $A_i$  na kružnici a zobraz ich kolineáciou. Nájdi obrazy  $A'_i$ . Zostroj elipsu ako kuželosečku prechádzajúcu bodmi  $A'_1, \dots, A'_5$ .
  - (b) Pomocou GeoGebra nástroja *Množina bodov*.
6. Analyzuj jednotlivé spôsoby riešenia. Zmeň polohu kružnice resp. jej polomer tak, aby pretínala úbežnicu v 0,1,2 bodoch. Riešením bude elipsa, parabola a hyperbola.

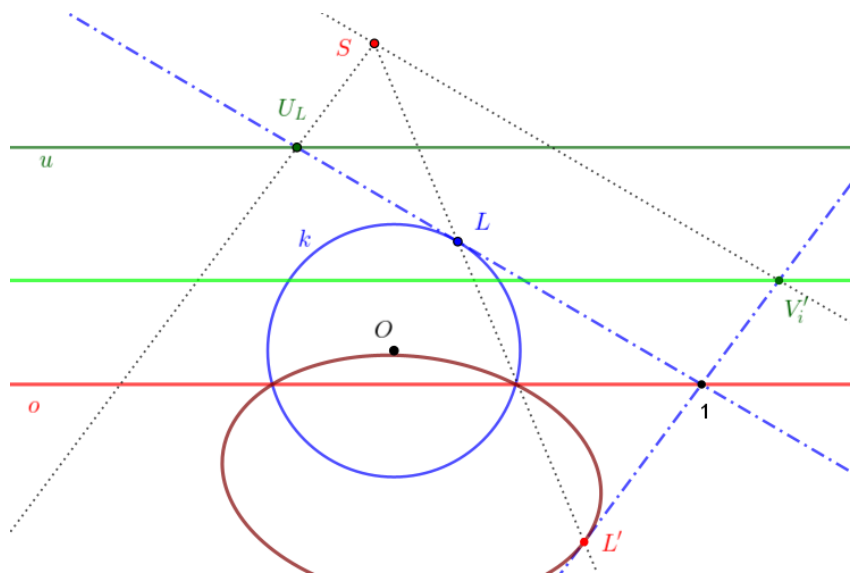
**Didaktická poznámka.** V euklidovskej rovine nemá kružnica žiadne ideálne body – je „uzavretá“. No ak sa na kružnicu pozeráme ako na množinu bodov s nekonečným počtom dotyčníc (z rôznych smerov), každá dotyčnica má svoj smerový vektor. Tomuto vektoru odpovedá jeden ideálny bod.

V projektívnej rovine každá trieda rovnobežných priamok určuje práve jeden ideálny bod. Z toho vyplýva, že:

- Každý **smer** dotyčníc ku kružnici definuje jeden **ideálny bod**.
- **Ideálne body kružnice** sú teda tie body „na nekonečne“, kde sa „pretínajú“ dotyčnice s daným smerom. Všetky ideálne body kružnice teda vytvárajú **ideálnu (nevlastnú) priamku**.
- Pri projektívnom zobrazení (kolineácii) sa tieto **ideálne body zobrazia do reálnych bodov**.
- Keďže kolineácia je aj lineárne zobrazenie, tak obrazom ideálnej priamky bude reálna priamka. Takúto priamku nazývame aj úbežnica 2. druhu. Pozri obrázok [3.3](#).
- Tieto obrazy nazývame **úbežníky elipsy**, pretože všetky priamky s daným smerom (v pôvodnej rovine) sa v obraze „zbiehajú“ do týchto bodov.

**Pozor!** Úbežníky elipsy nie sú „nové“ body, ale obrazy pôvodných ideálnych bodov kružnice – a práve tým získavajú svoju vizuálnu prítomnosť.

**Zhrnutie:** Ideálny bod = nevlastný bod kružnice (smer dotyčnic) Úbežník = obraz tohto ideálneho bodu cez kolineáciu. Aktivujte si konštrukciu z obrázka 3.3 a zostrojte niekoľko ďalších úbežníkov typu  $V'_i$ , napríklad nájdite úbežník 2. druhu pre dotyčnice idúce stredom kolineácie.



Obr. 3.3: Úbežníky elipsy  $V'_i$ , <https://www.geogebra.org/m/scbqguem>

Uvedené metódy umožňujú určiť obraz kružnice ako elipsu, parabolu či hyperbolu – v závislosti od polohy stredu, osi kolineácie a úbežnice 1. druhu vzhľadom na kružnicu. Elipsa ako obraz kružnice vzniká typicky vtedy, keď sa ideálne body kružnice zobrazia na ideálne body s reálnym smerom – teda na združené priemery výslednej elipsy.

### 3.4 Matica kolineácie

Nech  $\mathcal{K}(S, o, A \mapsto A')$  je perspektívna kolineácia roviny  $\pi$  do seba (autokolineácia), určená:

- **osou kolineácie**  $o$ , danou dvoma bodmi  $P = [p_1, p_2]$  a  $Q = [q_1, q_2]$ ,
- **stredom kolineácie**  $S = [s_1, s_2]$ ,
- **jednou dvojicou korešpondujúcich bodov**  $A = [a_1, a_2]$  a  $A' = [a'_1, a'_2]$ .

#### Poznámka 3.4.1

Perspektívna (stredová) kolineácia je špeciálny prípad lineárnej kolineácie, ktorá sa algebraicky reprezentuje maticou.

Pokúsme sa určiť **vzorec** pre maticu takejto autokolineácie  $H \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ , pozri prácu [Baltus, 2020]. Matica kolineácie v homogénnych súradniciach zobrazuje bod  $X$  na bod  $X'$  tak, aby platilo:

$$\mathbf{X}' = H \cdot \mathbf{X}.$$

### Výpočet matice kolineácie

Zavedme homogénne súradnice:

$$\mathbf{P} = [p_1, p_2, 1], \mathbf{Q} = [q_1, q_2, 1], \quad \mathbf{A} = [a_1, a_2, 1], \mathbf{B} = [b_1, b_2, 1]$$

Priamka  $o = PQ$  má vektorovú reprezentáciu ako vektorový súčin bodov  $\mathbf{P}$  a  $\mathbf{Q}$ :

$$\mathbf{l} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q}.$$

Potom je možné ukázať, že matica perspektívnej kolineácie nadobúda tvar:

$$H = I + \frac{(\mathbf{a}' - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{l}^\top}{\mathbf{l}^\top \cdot \mathbf{a}},$$

kde  $I$  je identická matica  $3 \times 3$ ,  $\mathbf{l}^\top$  je transponovaný vektor priamky  $o$ , a podiel vyjadruje lineárne zobrazenie v smere kolineácie.

#### Poznámka 3.4.2

Tento vzorec zaručuje:

- všetky body na priamke  $o$  sú invariantné ( $H \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$  pre  $\mathbf{x} \in o$ ),
- obraz bodu  $A$  je práve bod  $A'$ ,
- kolineácia je centrálna so stredom  $S$ , keďže každá spojnice  $XS$  prechádza odpovedajúcimi bodmi  $X \mapsto X'$ .

### Aplikácia v GeoGebre

#### Príklad 3.4.1

Nech je daná kolineácia  $\mathcal{K}$  osou  $o = PQ$ :  $P = [-3, 2]$  a  $Q = [5, -1]$ , stredom  $S = [3, 1]$  a dvojicou odpovedajúcich bodov  $A = [1, -1]$  a  $A' = [0, -2]$ . Určite maticu kolineácie  $\mathcal{K}$  pomocou GeoGebra nástrojov.

V GeoGebre si aktivujeme pracovné okná *Algebraické okno* a *Tabuľka*. Do tabuľky vložíme súradnice bodov, ale ako homogénne súradnice. Napríklad pre body  $P, A$  to predstavuje vektory

$$\mathbf{P} = [-3, 2, 1], \mathbf{A} = [1, -1, 1],$$

kde tretia súradnica je rovná 1. Priamka  $o = PQ$  je určená pomocou vektorového súčinu bodov  $\mathbf{P}$  a  $\mathbf{Q}$ :

$$\mathbf{l} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q} = (3, 8, -7),$$

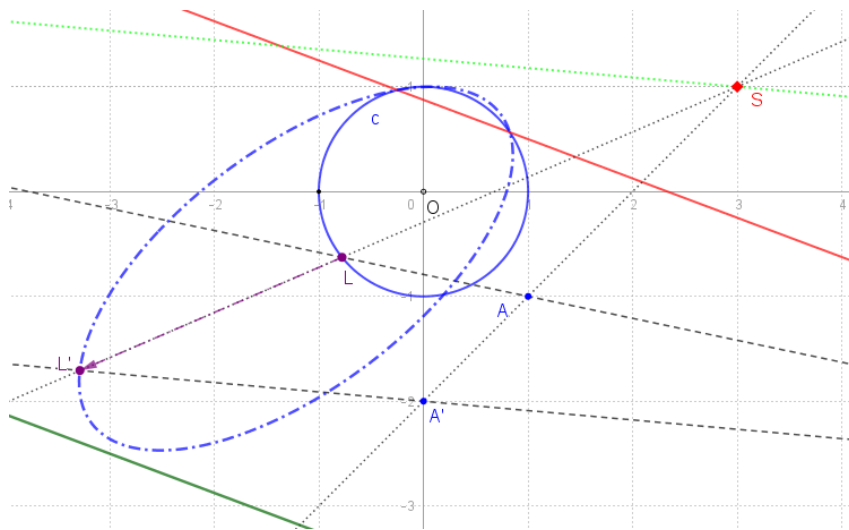
čo odpovedá rovnici priamky  $3x + 8y = 7$ . V matici perspektívnej kolineácie

$$H = I + \frac{m}{sk}$$

v čitateli zlomku je matica

$$m = \begin{pmatrix} -3 & 8 & 7 \\ -3 & -8 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

a  $sk = 12$  je skalárny súčin. Tento podiel vyjadruje lineárne zobrazenie v smere kolineácie. Pozri prácu [SOL, 2013] Výpočet výslednej matice kolineácie si môžete pozrieť v GeoGebre riešení na <https://www.geogebra.org/m/cxpezcex>.



Obr. 3.4: Konštrukčné riešenie príkladu 3.4 <https://www.geogebra.org/m/cxpezcex>

**Príklad 3.4.2**

Nájdite maticu kolineácie  $\mathcal{K}$ , ktorá body (projektívnej roviny  $\pi_2$ ) s homogénnymi súradnicami

$$A = [1, 0, 0], \quad B = [0, 1, 0], \quad C = [0, 0, 1], \quad D = [1, 1, 1]$$

zobrazí postupne na body (tej istej projektívnej roviny  $\pi_2$ )

$$A' = [2, 1, 1], \quad B' = [1, 2, 1], \quad C' = [1, 2, 2], \quad D' = [4, 5, 4].$$

**Riešenie.** Zostavíme dve matice  $M$  a  $M'$ , ktorých stĺpce sú homogénne súradnice pôvodných a obrazových bodov (v stĺpcoch):

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad M' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Pretože kolineácia  $\mathcal{K}$  zachováva pomerné vzťahy (dvoj pomer) v projektívnom priestore, jej matica  $K$  spĺňa:

$$K \cdot M = M'.$$

Ak je  $M$  regulárna (čo v tomto prípade je, pretože  $A, B, C$  sú základné body a  $D$  nie je ich lineárna kombinácia), môžeme vyjadriť:

$$K = M' \cdot M^{-1}.$$

Spočítame inverznú maticu  $M^{-1}$  a potom maticu  $K$ . Výsledok:

$$K = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Overením:

$$K \cdot A = A', \quad K \cdot B = B', \quad K \cdot C = C', \quad K \cdot D = D'.$$

Skutočne platí, že  $K$  je hľadaná matica kolineácie  $\mathcal{K}$ . Algebraický spôsob riešenia pomocou sústavy lineárnych rovníc (12 homogénnych lineárnych rovníc s 13 neznámymi) nájdete v práci[SOL, 2013] na str. 68.  $\square$

V tomto príklade ide o projektívnu kolineáciu (homografia), ktorá nemá spoločnú invariantnú os ani jednoznačný stred  $\rightarrow$  je to **všeobecná projektívna kolineácia**, nie je to elácia ani homológia, keďže tretí riadok nie je  $(0, 0, 1)$ . Nejde o čisto afinné zobrazenie.

Inými slovami: Ide o všeobecnú kolineáciu v projektívnej rovine, ktorá nie je špeciálnym afinným zobrazením (ako posunutie, otočenie, či zhodné zobrazenie), ale zachováva kolinearnosť, priamky sa zobrazujú na priamky, kuželosečky na kuželosečky, atď.

Príklad 3.4 môžeme zredukovať na afinnú transformáciu (z konštrukčného euklidovského hľadiska veľmi dôležitú), ktorá bude predstavovať afinné zobrazenie.

### Poznámka 3.4.3

Interaktívne GeoGebra nástroje pre afinné zobrazenia sú voľne dostupné v online učebnici: *Afinná geometria a jej aplikácie*, dostupné na <https://lms.umb.sk/mod/book/view.php?id=239318>.

Homogénne súradnice z príkladu 3.4 nahradíme karteziánskymi súradnicami

$$A = [1, 0], \quad A' = [2, 1], \quad B = [0, 1], \quad B' = [1, 2], \quad C = [0, 0], \quad C' = \left[ \frac{1}{2}, 1 \right]$$

V prípade bodov  $A$  a  $B$  nahradzame homogénne súradnice smerov reprezentujúceho tieto (projektívne) nevlastné body, karteziánskymi súradnicami (afinných) koncových bodov vektorov  $\vec{a} = (1, 0)$  a  $\vec{b} = (0, 1)$ . Zvyšné body sú zrejme vlastné body projektívnej roviny.

### Príklad 3.4.3

Určite afinné zobrazenie, ktoré zobrazuje body

$$A = [1, 0], \quad B = [0, 1], \quad C = [0, 0]$$

na body

$$A' = [2, 1], \quad B' = [1, 2], \quad C' = \left[ \frac{1}{2}, 1 \right].$$

Určte obraz kružnice, ktorá prechádza bodmi  $A, B, C$ .

**Riešenie.** Hľadáme afinné zobrazenie, ktoré má tvar (pozri prácu [HAN,2025])

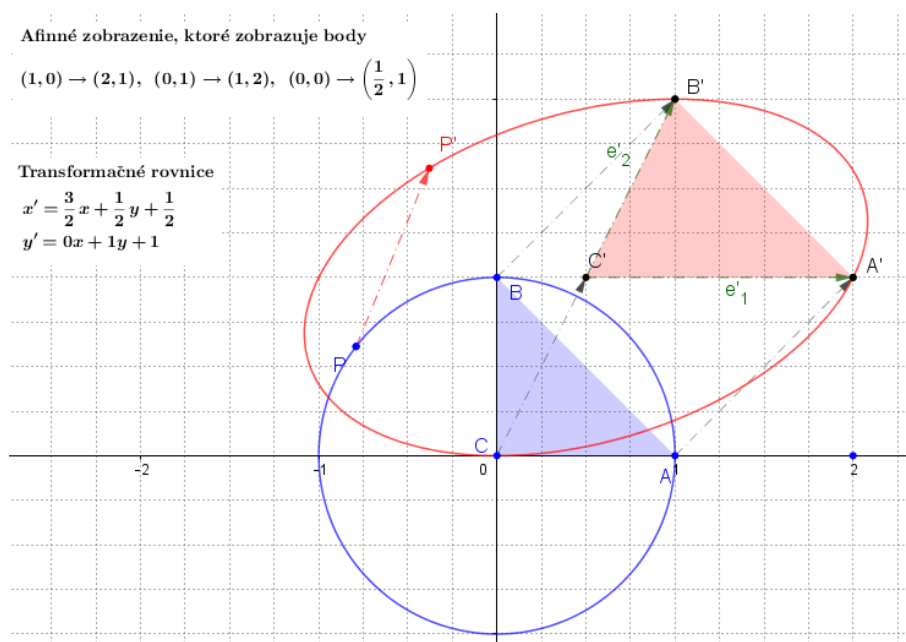
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}.$$

Dosadením súradníc do rovníc dostaneme sústavu, ktorej riešením sú:

$$x' = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}, \quad y' = y + 1.$$

Obrazom jednotkovej kružnice prechádzajúcej bodmi  $A, B, C$  je elipsa. Konštrukcia je znázornená na obrázku 3.5.

□



Obr. 3.5: Afinné zobrazenie kružnice na elipsu pomocou trojice bodov a ich obrazov.

**Didaktická poznámka.** Aj keď pôvodne bola úloha zadaná ako projektívna (so štyrmi bodmi v homogénnych súradniciach), táto interpretácia ukazuje, že zobrazenie kružnice na elipsu možno získať už pomocou trojbodového afinného zobrazenia.

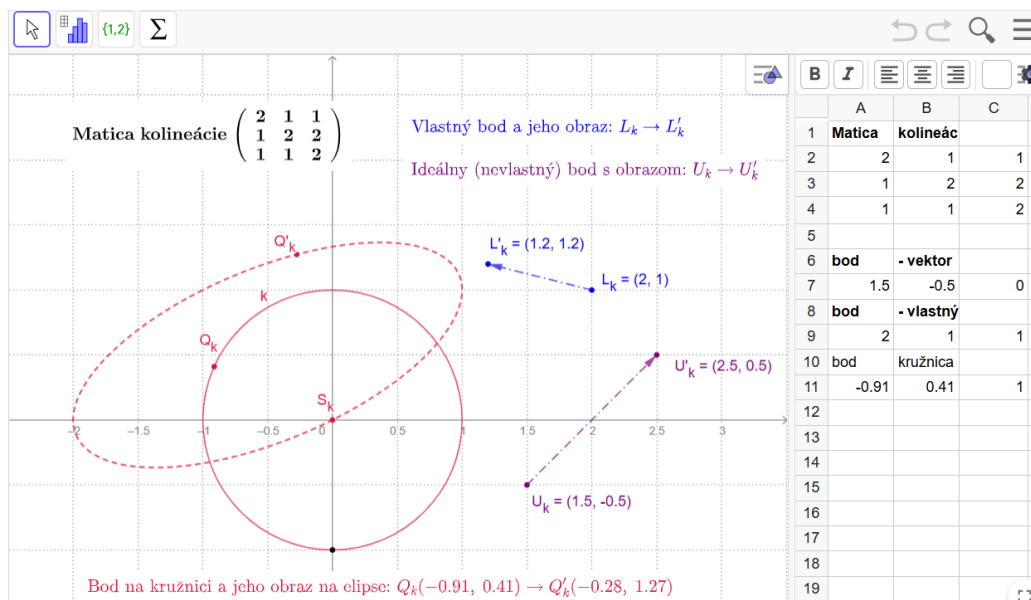
Afinné zobrazenie je podmnožinou projektívnych kolineácií — sú to tie, ktoré zachovávajú ideálnu priamku (úbežnicu). Výhodou tohto prístupu je jednoduchosť konštrukcie a možnosť analytického vyjadrenia v tvare lineárnych rovníc.

Príklad 3.4 možno využiť ako **\*\*motivačný mostík\*\*** pri prechode od afinnej geometrie ku všeobecnej projektívnej geometrii, kde neskôr rozšírime uvažovanie o body na ideálnej priamke a matice  $(3 \times 3)$ .

### 3.5 Kružnica a izotropické body

Pri analýze kolineácií v projektívnej rovine vyvstáva prirodzená otázka: ako sa zobrazujú body, ktoré neležia v euklidovskej (afinnej) časti roviny — teda body na ideálnej priamke? Budeme skúmať obraz množiny všetkých ideálnych bodov v danej kolineácii.

V nasledujúcom interaktívnom applete môžete meniť maticu projektívnej kolineácie a sledovať, ako sa jednotlivé body zobrazujú. Obzvlášť zaujímavé je zobrazenie *celej množiny ideálnych bodov* (napr. bodov so súradnicami  $[0, u, 0]$  pre jednotkový kruh). Tieto body sa transformujú do jednej priamky, do obrazu pôvodnej ideálnej priamky.



Obr. 3.6: Matica kolineácie: <https://www.geogebra.org/m/txbgwkgs>

Táto vizualizácia názorne potvrdzuje, že kolineácia zachováva incidenciu a zobrazuje priamky (aj ideálne) opäť na priamky.

V dynamickej vizualizácii reprezentovanej appletom z obrázka 3.7 sledujeme *kružnicu v projektívnej rovine*. Kružnica je daná (prechádza zvoleným) *reálnym bodom A* a zároveň dvoma špeciálnymi bodmi v nekonečne, teda dvoma ideálnymi bodmi.

Ako sme už uviedli v sekcii 3.1 tieto ideálne body majú špeciálne postavenie vzhľadom na ľubovoľnú kružnicu a v literatúre sa označujú ako *izotropické body* alebo *circular points at infinity*.

### Definícia 3.5.1

Izotropické body akejkoľvek (ľubovolnej) kružnice sú body projektívnej roviny, ktoré sú určené ideálnymi bodmi (imaginárnymi smermi)

$$I = (1 : i : 0), \quad J = (1 : -i : 0).$$

Korektnosť definície 3.5 je nutné overiť. Musíme ukázať, že pre ľubovoľnú kružnicu projektívnej roviny sú izometrické body pevne určené. Inými slovami:

**Každá kružnica projektívnej roviny prechádza izometrickými bodmi.**

Reálna kružnica v projektívnej rovine, ktorá je určená tromi nekolineárnymi bodmi, prechádza vždy aj dvoma špeciálnymi komplexnými bodmi na ideálnej priamke – tzv. *izotropickými bodmi*. Tieto body sú algebraicky určené ako riešenia rovnice

$$x^2 + y^2 = 0$$

na ideálnej priamke  $z = 0$ . V homogénnych súradniciach sú to body

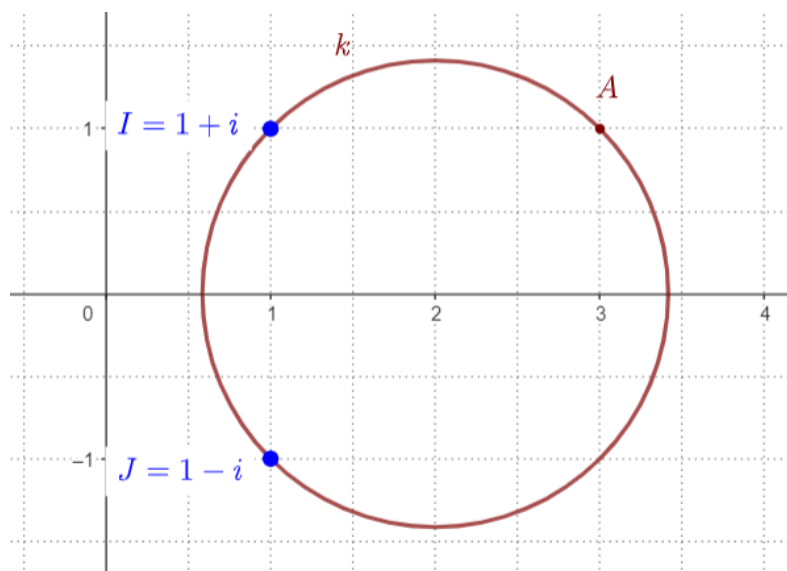
$$I = [1 : i : 0], \quad J = [1 : -i : 0].$$

Izotropické body neležia v reálnej projektívnej rovine  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ , ale v jej komplexnom rozšírení  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ .

Každá reálna kružnica sa teda projektívne uzatvára práve týmito dvoma komplexnými bodmi v nekonečne. Z tohto pohľadu možno reálnu kružnicu definovať aj ako *kuželosečku*, ktorá prechádza týmito dvoma fixnými komplexnými bodmi a ešte jedným reálnym bodom. Preto možno vysloviť tvrdenie:

#### Veta 3.5.1

Reálnu kružnicu v projektívnej rovine možno jednoznačne určiť pomocou dvoch izotropických bodov a jedného reálneho (vlastného) bodu.



Obr. 3.7: Kružnica prechádzajúca bodom A: <https://www.geogebra.org/m/rezrdftk>

Komplexná rovina s bodmi  $I, J$ . V GeoGebre sa body  $I, J$  zobrazujú ako body mimo reálnej osi:  $I = (1, i)$ ,  $J = (1, -i)$ . GeoGebra umožňuje zobrazenie komplexných čísel ako bodov v rovine:

- reálna časť =  $x$ -ová súradnica,
- imaginárna časť =  $y$ -ová súradnica.

Takto možno zobrazit aj body  $I, J$  ako body v tzv. komplexnej rovine. Tieto body sú spoločné pre všetky kružnice – v tom zmysle, že každá kružnica v projektívnej rovine „smeruje“ do rovnakých dvoch (komplexných) bodov v nekonečne. Obrázok 3.7 prezentuje konštrukciu na zostrojenie kružnice v projektívnej rovine, ktorá je určená jedným reálnym (vlastným) bodom.

### Rovnica kružnice, ktorá je určená 1 reálnym bodom a 2 izotropickými bodmi

Nech  $A = [0 : r : 1]$  je reálny bod, a nech  $I = [1 : i : 0]$ ,  $J = [1 : -i : 0]$  sú izotropické body. Hľadáme rovnicu kuželosečky prechádzajúcej týmito tromi bodmi.

#### Definícia 3.5.2

Homogénna kvadratická forma, ktorá reprezentuje kuželosečku v projektívnej rovine sa dá zapísať ako maticový súčin

$$\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} = 0, \quad (3.5)$$

kde  $Q$  je reálna symetrická matica

$$Q = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

a  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$  je projektívny bod patriaci danej kvadratickej forme.

Po prevedení maticového súčinu dostaneme všeobecný tvar tejto kvadratickej formy, ktorý predstavuje rovnica

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 = 0.$$

Hľadáme koniku (resp. kuželosečku), ktorá prechádza bodmi

$$I = [1 : i : 0], \quad J = [1 : -i : 0], \quad A = [0 : r : 1].$$

To znamená, že súradnice týchto bodov musia vyhovovať maticovému súčinu 3.5. Postupne určíme:

### 1. Podmienky pre izotropické body

Dosadíme  $I = (1, i, 0)$ :

$$(1, i, 0) Q (1, i, 0)^T = a_{11} + 2ia_{12} + a_{22}i^2 = a_{11} - a_{22} + 2ia_{12} = 0.$$

Podobne pre  $J = (1, -i, 0)$ :

$$a_{11} - a_{22} - 2ia_{12} = 0.$$

Z týchto dvoch podmienok dostávame

$$a_{11} = a_{22}, \quad a_{12} = 0.$$

### 2. Zredukovaný tvar matice

Po dosadení týchto podmienok má matica  $Q$  tvar

$$Q = \begin{bmatrix} a & 0 & a_{13} \\ 0 & a & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad a := a_{11} = a_{22}.$$

### 3. Podmienka pre bod $A = [0 : r : 1]$

Dosadíme  $A = (0, r, 1)$  do  $\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} = 0$ :

$$(0, r, 1) Q (0, r, 1)^T = ar^2 + 2a_{23}r + a_{33} = 0.$$

Teda platí lineárna väzba

$$ar^2 + 2a_{23}r + a_{33} = 0. \quad (*)$$

### 4. Normalizácia a voľné parametre

Matica  $Q$  má po zavedení podmienok tvar

$$Q = \begin{bmatrix} a & 0 & a_{13} \\ 0 & a & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix},$$

pričom koeficienty  $a, a_{13}, a_{23}, a_{33}$  spĺňajú iba jednu lineárnu väzbu (\*). Po započítaní projektívnej škály (násobenie matice  $Q$  nenulovým číslom nemení koniku) ostáva ešte jedna voľnosť. To znamená, že trojica bodov  $I, J, A$  určuje rodinu kuželosečiek.

### 5. Príklad: kružnica so stredom v $(0, 0)$

Ak zvolíme

$$a = 1, \quad a_{13} = 0, \quad a_{23} = 0,$$

potom z (\*) vyplýva

$$a_{33} = -r^2.$$

Dostávame teda

$$Q_{\text{kruh}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 \end{bmatrix}.$$

Homogenizovaná rovnica koniky je

$$x^2 + y^2 - r^2 z^2 = 0,$$

čo je klasická rovnica kružnice s polomerom  $r$  so stredom v počiatku.

—

**Zhrnutie.** Podmienky z izotropických bodov nútia koniku mať tvar

$$x^2 + y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 = 0,$$

pričom dosadením bodu  $A = [0 : r : 1]$  získame väzbu

$$r^2 + 2a_{23}r + a_{33} = 0.$$

Takto určujeme celú rodinu kuželosečiek prechádzajúcich bodmi  $I, J, A$ ; jednoznačná konika (napr. kružnica) sa získa doplnením ďalšej podmienky.

Táto konštrukcia je dôležitá najmä pri úvahách o projektívnych zobrazeniach: obraz kružnice je opäť kuželosečka, ktorá musí prechádzať obrazmi týchto dvoch komplexných izotropických bodov. Tie sa tak stávajú *projektívnymi invariantmi všetkých kružníc*.

## Záver

Z hľadiska projektívnej geometrie nie je kružnica výnimočnou kuželosečkou, ale špeciálnym prípadom kvadratickej krivky, ktorá má dva spoločné komplexné ideálne body – izotropické body. Tie sú základom pre jednotný algebraicko-geometrický opis kružníc a zohrávajú ústrednú úlohu v metrickom rozšírení projektívnej geometrie.

Aj keď izotropické body neležia v reálnom modeli projektívnej roviny, reprezentujú všetky možné smerové vektory dotyčníc ku kružnici – v komplexnom rozšírení. V tomto zmysle môžeme kružnicu chápať ako objekt, ktorý „smeruje“ do dvoch fixných komplexných bodov v nekonečne. Práve tieto izotropické body zabezpečujú, že všetky kružnice v projektívnej rovine patria do tej istej triedy kvadratických kriviek.

V tzv. *konformnej projektívnej geometrii* (napr. v modeli Cayley-Klein) zohrávajú izotropické body úlohu spoločných bodov všetkých kružníc a umožňujú definovať metrické pojmy ako pravý uhol alebo dĺžku pomocou čisto projektívnych nástrojov.

## 3.6 Združené priemery kuželosečky

### Historický kontext

Cayley (a neskôr Klein) ukázali, že kružnica môže v projektívnej geometrii slúžiť ako základný útvar, voči ktorému sa definujú metrické pojmy. Kružnica „na nekonečne“ (tzv. absolutum) umožňuje zdefinovať euklidovskú alebo hyperbolickú geometriu ako špeciálny prípad projektívnej geometrie. Tento pohľad nahrádza myšlienku „rovnobežnosti“ ideou „ideálneho dotyku“ – teda výskytu úbežníkov.

Jedným z kľúčových pojmov pri konštrukciách kuželosečiek sú *združené priemery*. Hoci majú metrický význam (napr. v prípade elipsy ako dvojice priemerov so špeciálnymi vlastnosťami), ich skutočný význam spočíva v ich *projektívnej* povahe. Pri prechode z afinnej roviny do projektívnej roviny sa totiž „rovnobežnosť“ dotyčníc zachováva v zmysle incidencie s ideálnym bodom (úbežníkom).

Konkrétne, dotyčnice ku kružnici, ktoré sa v afinnom modeli javia ako rovnobežné a teda sa pretínajú v ideálnom bode (na úbežnici), sa pri perspektívnej kolíneácii zobrazia na dotyčnice ku všeobecnej kuželosečke, ktoré sa síce už geometricky nepretínajú, ale stále majú rovnaký smer – ten určuje *smer združeného priemeru* ku danej množine dotyčníc. V tomto zmysle sa zachováva *projektívna incidencia* bodov a priamok, a to aj v prípade, že ide o bod v nekonečne.



## Poznámka

V prípade elipsy sú všetky združené priemery navzájom rôzne. Pre hyperbolu existujú také dvojice združených priemerov, kde jeden je asymptota, druhý je jej združená asymptota. V prípade paraboly sú všetky priemery združené s jedným spoločným smerom — smerom hlavnej osi paraboly.

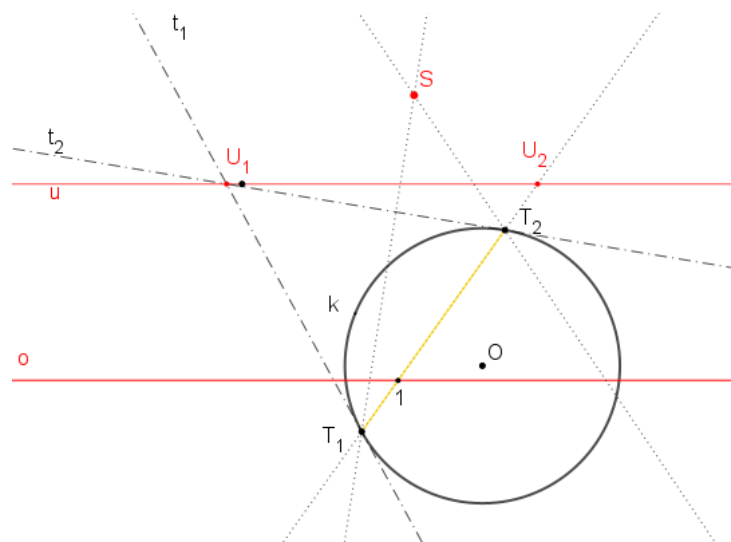
## Cvičenie

Zostrojte obraz kružnice  $k(O, r)$  v stredovej kolíneácii  $\mathcal{K}(S, o, u)$ , ak kružnica  $k$  nemá s úbežnicou  $u$  spoločný bod. Zadanie <https://www.geogebra.org/m/peyhrwhf>

## Riešenie.

Keďže kružnica  $k$  nemá s úbežnicou  $u$  spoločný bod, tak obrazom bude elipsa. Na jej zostrojenie nám stačí, ak poznáme jej združené priemery  $[T'_1T'_2], [R'_1R'_2]$ . Potom pomocou Rytzovej konštrukcie <https://www.geogebra.org/m/BJGBjSCh> zostrojíme hlavnú a vedľajšiu os elipsy.

Združené priemery sú také, že dotyčnice v ich koncových bodoch  $T'_1, T'_2$  sú rovnobežné s druhým priemerom  $[R'_1R'_2]$ .



Obr. 3.9: Zadanie: Elipsa určená združenými priermi

Zvoľme si ľubovoľný úbežník  $U_1$  a zostrojme z neho dotyčnice  $U_1T_1, U_1T_2$  ku kružnici. Zostrojme priesečník/úbežník  $U_2 \in \overleftrightarrow{T_1T_2} \cap u$  a opäť dotyčnice  $U_2R_1, U_2R_2$  ku kružnici. Úbežníky  $U_1, U_2$  sa zobrazujú do nevlastných bodov, preto obrazy dotyčníc  $U_1T_1, U_1T_2, U_2R_1, U_2R_2$  budú rovnobežné priamky. Teda budú združené priemery elipsy. Pozri obrázok [3.9](#)

**Komentár 4.** *V projektívnej rovine sa všetky kuželosečky líšia len polohou svojich ideálnych bodov. Preto kružnica, elipsa, parabola aj hyperbola sú z pohľadu projektívnej geometrie tým istým typom objektu: kvadratická krivka. Tvar, symetria a „zakrivenie“ sú len afinné vlastnosti – nie projektívne invarianty.*

Kružnica je jednou z najdôležitejších kriviek klasickej geometrie – jej symetria a konštrukčné vlastnosti z nej robia základ euklidovského sveta. Obrazom kružnice v projektívnej rovine je elipsa, pričom pôvodné „nekonečne vzdialené“ smery sa stanú reálnymi bodmi – tzv. **úbežníkmi 2. druhu**. Každý smer dotýčníc ku kružnici určuje v projektívnej rovine jeden **ideálny bod kružnice**. Tieto body nie sú viditeľné v euklidovskom zobrazení, ale pri kolineácii sa zobrazujú ako **úbežníky**.

Tento pohľad nielen unifikuje všetky kuželosečky, ale zároveň poskytuje účinný konštrukčný nástroj pre optiku, architektúru či vizualizáciu.

**Komentár 5.** *V projektívnej geometrii sa kružnica mení na kuželosečku – podľa polohy vzhľadom na úbežnicu vzniká elipsa, parabola alebo hyperbola.*

- *Úbežníky elipsy sú reálne body – sú to obrazy ideálnych bodov kružnice. Na elipse predstavujú body, kam sa zbiehajú priamky rovnobežné v pôvodnej rovine.*
- *Rovnica kružnice  $x^2 + y^2 = r^2$  je v projektívnej rovine zápisom  $x^2 + y^2 - r^2z^2 = 0$ . Nejde o zvláštnu krivku, ale o špeciálny prípad kvadratickej formy druhého stupňa.*
- *Projektívna klasifikácia kuželosečiek sa zakladá na počte a polohe ideálnych bodov: elipsa nemá reálne ideálne body, parabola má jeden, hyperbola dva.*
- *Konštrukcia elipsy ako obrazu kružnice využíva perspektívnu kolineáciu a obrazy ideálnych bodov – tieto úbežníky spolu s ďalšími bodmi určujú obrazovú krivku.*

## 3.7 Cvičenie

1. Nech  $\mathbb{E}_2$  je euklidovská rovina a  $R(M, \alpha)$  je otočenie okolo bodu  $M$  o uhol veľkosti  $\alpha$ . Rozšírme zobrazenie  $R$  z roviny  $\mathbb{E}_2$  do zobrazenia  $\bar{R}$  projektívnej roviny  $\bar{\mathbb{E}}_2$  nasledovne:

- Na množine vlastných bodov definujeme  $\bar{R} = R$ .
- Na množine nevlastných bodov projektívnej roviny  $\bar{\mathbb{E}}_2$  definujeme  $\bar{R}$  tak, že nevlastný bod  $U$  priamky  $m$  sa zobrazí na nevlastný bod  $U'$  priamky  $R(m)$ .

**Úloha:** Ukážte, že zobrazenie  $\bar{R}$  je kolineáciou roviny  $\bar{\mathbb{E}}_2$ .

Ak  $\alpha \neq k\pi$ , kde  $k \in \mathbb{Z}$ , jediným samodružným bodom tejto kolineácie je bod  $M$ .

Ak  $\alpha = k\pi$ , potom:

- pre párne  $k$  je  $\bar{R}$  identitou na  $\bar{\mathbb{E}}_2$ ,
- pre nepárne  $k$  je bod  $M$  silne samodružným bodom kolineácie  $\bar{R}$ , teda  $\bar{R}$  je stredovou kolineáciou.

2. Analogicky rozšírme rovnoľahlosť  $R$  so stredom  $S$  na kolineáciu  $\bar{R}$  rozšírenej euklidovskej roviny  $\bar{\mathbb{E}}_2$  na seba.

**Úloha:** Ukážte, že  $S$  je silne samodružným bodom kolineácie  $\bar{R}$ .

3. Obdobne rozšírme aj osovú súmernosť  $S$  euklidovskej roviny na kolineáciu  $\bar{S}$  rozšírenej euklidovskej roviny  $\bar{\mathbb{E}}_2$ .

**Úloha:** Zistite, či má  $\bar{S}$  silne samodružné body a (alebo) priamky.

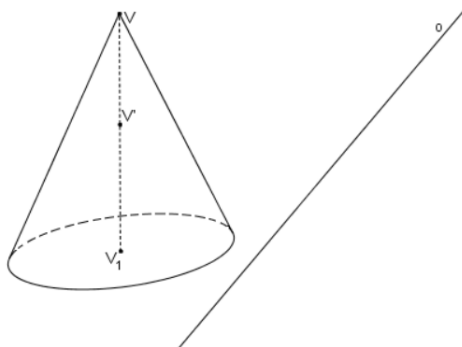
### Definícia 3.7.1

Identické zobrazenie projektívnej roviny na seba je zrejme kolineáciou; nazývame ju *identickou kolineáciou*. Kolineáciu, ktorá nie je identitou, voláme *neidentickou kolineáciou*.

4. Zostrojte obraz kružnice  $k(O, r)$  v stredovej kolineácii  $\mathcal{K}(S, o, u)$ , ak kružnica  $k$  má s úbežnicou  $u$  jeden spoločný bod:  $k \cap u = U$  a os kolineácie pretína v dvoch bodoch  $T, R$ .

*Návod.*

Keďže kružnica  $k$  má s úbežnicou  $u$  spoločný práve jeden bod, tak obrazom bude parabola. Na jej zostrojenie nám stačí, ak poznáme jej dve dotyčnice  $t, r$  s dotykovými



Obr. 3.10:

bodmi  $T, R$ . Pri použití lichobežníkovej metódy nám stačí zostrojiť obrazy dotyčníc  $t, r$ . Zostrojme priesečník/úbežník  $U_t$  a smer  $SU_t$ . Obrazom dotyčnice  $t$  bude priamka prechádzajúca samodružným bodom  $T$ , ktorá je rovnobežná so smerom  $SU_t$ .

Lichobežníková metóda: *Spojnice priesečníka dvoch rôznych dotyčníc paraboly so stredom tetivy určenej ich dotykovými bodmi je rovnobežná s osou paraboly.*

**Kružnica  $\rightarrow$  parabola**

5. Zostrojte obraz kružnice  $k(O, r)$  v stredovej kolíneácii  $K(S, o, u)$ , ak kružnica  $k$  má s úbežnicou  $u$  dva spoločné body:  $k \cap u = U, V$  a os kolíneácie pretína v dvoch bodoch  $X_u, X_v$ .

*Návod.*

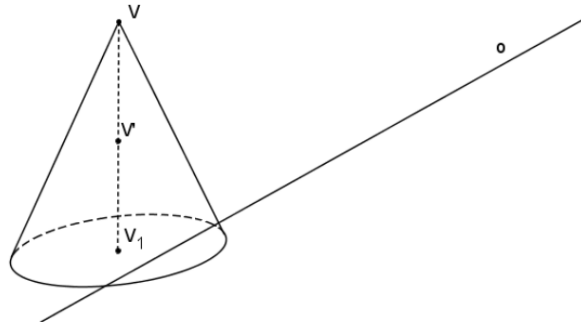
Keďže kružnica  $k$  má s úbežnicou  $u$  spoločné dva body, tak obrazom bude hyperbola. Na jej zostrojenie nám stačí, ak poznáme jej asymptoty a jej hlavné vrcholy. Zostrojme dotyčnice  $a_u, a_v$  v bodoch  $U, V$  ku kružnici  $k$ . Nájdime obrazy  $a'_u(a'_u \parallel US), a'_v(a'_v \parallel VS)$ . Priamky  $a'_u, a'_v$  sú asymptoty hyperboly.

6. Vo VRP zostrojte rez rotačným kuželom s vrcholom  $V$ . Rovina rezu  $\rho$  je určená priesečnicou  $o$  roviny podstavy a roviny  $\rho$  a bodom  $V'$  ležiacim na osi  $V_1V$ .

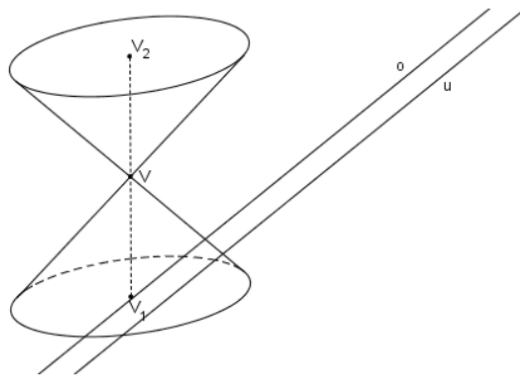
Zadanie podľa obrázka 3.10, 3.11 a 3.12.

*Návod.*

Perspektívna kolíneácia je daná:  $\mathcal{K}(V, o, V_1 \rightarrow V')$ . Niektoré riešené príklady nájdete v práci [PLI, 2025].



Obr. 3.11:



Obr. 3.12:



# Kapitola 4

## Kuželosečky - bodová množina

### Úvod

**Motivácia:** Štúdium kuželosečiek tvorí most medzi klasickou geometriou a lineárnou algebrou. Nielenže umožňuje analyzovať geometrické útvary pomocou súradníc, ale otvára dvere k zjednotenému pohľadu na zdanlivo odlišné krivky, ktoré v projektívnom rozšírení priestoru nadobúdajú nové, elegantné súvislosti.

#### Historický kontext

Základy štúdia kuželosečiek položil Apollónios z Pergy, ktorý systematicky skúmal vlastnosti elipsy, paraboly a hyperboly. Jeho dielo „Kuželosečky“ (Konika) malo zásadný vplyv na vývoj geometrie a zostalo autoritatívne po viac ako tisíc rokov. V novoveku sa kuželosečky stali predmetom analytického výskumu vďaka Fermatovi, Descartovi a Newtonovi. Projektívny prístup k nim sa naplno rozvinul až v 19. storočí.

V analytickej geometrii predstavujú kuželosečky jednu z najdôležitejších tried algebraických kriviek druhého stupňa. Apollónios v 3. storočí pred n. l. systematicky skúmal vlastnosti elipsy, paraboly a hyperboly ako rezov kuželovej plochy.

Kuželosečky sa prirodzene objavujú v mnohých oblastiach matematiky a fyziky: v optike, nebeskej mechanike, ako dráhy planét či projekcie pri zobrazovacích metódach. Okrem klasickej geometrie sa kuželosečky skúmajú aj v rámci projektívnej geometrie, lineárnej algebry či diferenciálnej geometrie.

Moderný prístup ku kuželosečkám spája metrické, algebraické aj projektívne pohľady. Základnou otázkou je zavedenie pojmu kuželosečka ako rovinnej krivky a klasifikácia kuželosečiek pomocou analýzy rovníc druhého stupňa, ktoré definujú tieto krivky.

## 4.1 Definícia kuželosečky

V predchádzajúcej kapitole *Obraz kružnice v kolineácii* sme odvodili pojem kuželosečky ako obraz kružnice v perspektívnej kolineácii. V tejto kapitole uvedieme ďalšie možné zavedenie pojmu kuželosečka.

1. Metrickú definíciu kuželosečky ako množina bodov danej vlastnosti.
2. Projektívnu definíciu kuželosečky ako množinu priesečníkov dvoch zväzkov priamok.
3. Kuželosečka ako rovinný rez rotačnej kuželovej plochy ( Quételet-Dandelin veta).

### 4.1.1 Metrická definícia kuželosečky

#### Definícia 4.1.1

Nech  $F \in \mathbb{E}^2$  je daný bod nazývaný *ohnisko*, nech  $d$  je daná priamka nazývaná *riadiaca priamka* (angl. *directrix*) a nech  $k \in \mathbb{R}^+$  je dané kladné reálne číslo nazývané *číselná excentricita* (tiež numerická výstrednosť). Potom *kuželosečka* je množina všetkých bodov  $X \in \mathbb{E}^2$ , ktoré spĺňajú vzťah:

$$\frac{\rho(X, F)}{\rho(X, d)} = k, \quad (4.1)$$

kde  $\rho(X, F)$  je euklidovská vzdialenosť bodov  $X$  a  $F$  a  $\rho(X, d)$  je vzdialenosť bodu  $X$  od priamky  $d$ .

#### Poznámka 4.1.1

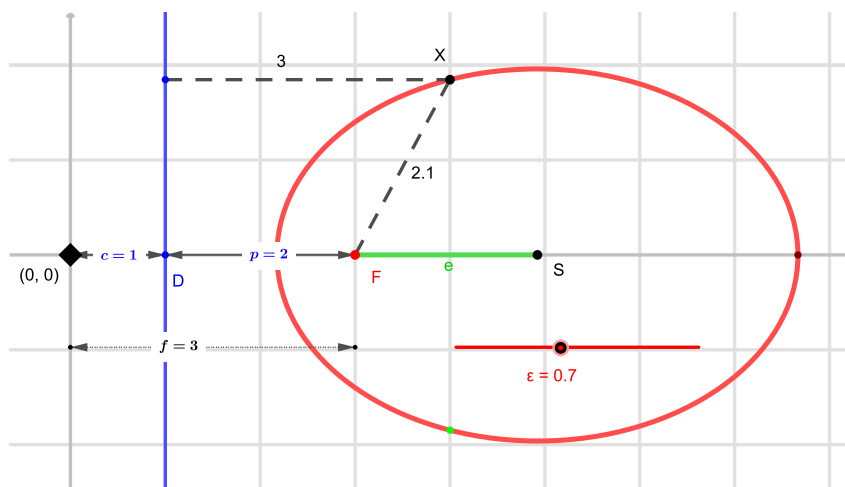
Táto definícia má zreteľný fyzikálny význam. Predstavme si bod  $X$ , ktorý sa pohybuje tak, že jeho vzdialenosť od pevného bodu (ohniska) a vzdialenosť od pevnej priamky sú vo fixnom pomere  $k$ . V niektorej literatúre sa tento pomer označuje gréckym epsilon  $\epsilon$ .

Výsledná dráha je práve kuželosečka, ktorej typ závisí od hodnoty  $k$ :

- $0 < k < 1$ : **elipsa**
- $k = 1$ : **parabola**
- $k > 1$ : **hyperbola**

**Didaktická poznámka.** Metrická definícia kuželosečky je výhodná vo vyučovaní pre jej názornosť a možnosť okamžitej vizualizácie v dynamickej geometrii (napr. pomocou GeoGebry). Odporúča sa žiakom ukázať experimentálny

dôkaz pomocou pohybu bodu, ako aj výpočet analytickej rovnice kuželosečky vychádzajúci z tejto definície.



Obr. 4.1: Vizualizácia kuželosečky pomocou pomeru vzdialeností od ohniska a riadiacej priamky.

[Interaktívny applet: Metrická definícia kuželosečky](#)

#### Historický kontext

Rozvoj projektívnej geometrie v 17. a 19. storočí priniesol nový pohľad na vzťahy medzi priamkami, bodmi a zväzkami priamok.

Prvé myšlienky perspektív a zobrazení zväzkov vznikli v súvislosti s dielami **Gérarda Desarguesa (1591–1661)**, ktorý skúmal zákonitosti perspektívneho zobrazovania pri architektonických a umeleckých projekciách. Jeho výroky o kolinearite a perspektívnosti sa stali základom syntetickej projektívnej geometrie.

#### Historický kontext

V 19. storočí na tieto základy nadviazali **Jean-Victor Poncelet (1788–1867)** a **August Ferdinand Möbius (1790–1868)**, ktorí rozvinuli systematickú teóriu projektívnych zobrazení. Poncelet zaviedol pojem projektívnosti medzi zväzkami priamok a ukázal, že množina priesečníkov zodpovedajúcich si priamok tvorí kuželosečku. Möbius doplnil teóriu o analytický aparát a pojem homogénnych súradníc.

Perspektíva zväzkov má prirodzenú geometrickú interpretáciu: predstavuje vzťah medzi dvoma pozorovateľmi (stredmi zväzkov) a spoločnou priamkou (osou), na ktorej sa jednotlivé smery priamok zodpovedajúce si v zobrazení premietajú. Tento princíp je kľúčový pre pochopenie projektívnej definície kuželosečiek.

### 4.1.2 Projektívna definícia kuželosečky

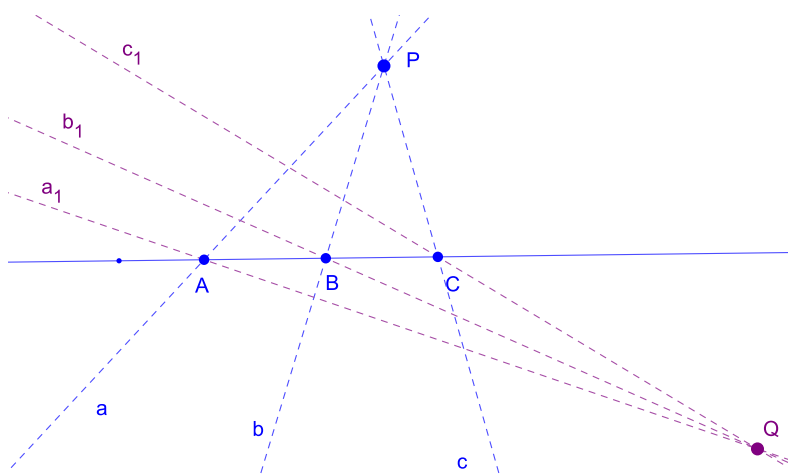
V kontexte projektívnej geometrie možno kuželosečku definovať ako množinu priesečníkov priamky  $m$  a jej obrazu  $\pi(m)$ , kde  $\pi$  je projektivnosť medzi dvoma zväzkami priamok. Projektivnosť medzi zväzkami priamok sa definuje pomocou ich perspektívnosti.

Nech  $[P]$  a  $[Q]$  sú dva zväzky priamok so stredmi  $P$  a  $Q$ . Sú dva zväzky priamok so stredmi  $P$  a  $Q$ . Pozri obrázok 4.2. Zobrazenie

$$\rho : [P] \rightarrow [Q]$$

nazývame **perspektívnosťou zväzkov**  $[P]$ ,  $[Q]$ , ak existuje priamková rada bodov (množina bodov na priamke)  $[o] = \{A, B, C\}$ , ktorá neprechádza stredmi zväzkov  $P$  ani  $Q$ , taká, že zobrazenie  $\rho$  je zložením dvoch perspektívností tejto priamkovej rady  $[o]$  na zväzky  $[P]$  a  $[Q]$ . Priamkovú radu bodov  $[o]$  nazývame *osou perspektivity zväzkov*  $[P]$ ,  $[Q]$  a zobrazenie - perspektívnosť značíme:

$$\rho : [P] \xrightarrow{o} [Q].$$



Obr. 4.2: Perspektívne zväzky priamok

Dva zväzky priamok sú medzi sebou projektívne ak sú vytvorené z konečného počtu perspektívnych zväzkov priamok. Podrobnejší výklad k projektívnosti nájdete v práci [CHO, 2013].

**Motivácia:** Perspektivita zväzkov priamok predstavuje prirodzené prepojenie medzi dvoma bodovými stredmi pozorovania. Predstavme si dva fotoaparáty umiestnené v bodoch  $P$  a  $Q$  a pevnú priamku  $o$ , ktorá leží mimo oboch fotoaparátov. Každý smer priamky zo zväzku  $[P]$  pretína priamku  $o$  v jednom

bode, a odtiaľ ho môžeme „premietnuť“ do druhého zväzku  $[Q]$ . Takto vzniká zobrazenie  $\rho : [P] \rightarrow [Q]$ , ktoré je určené práve osou  $o$ .

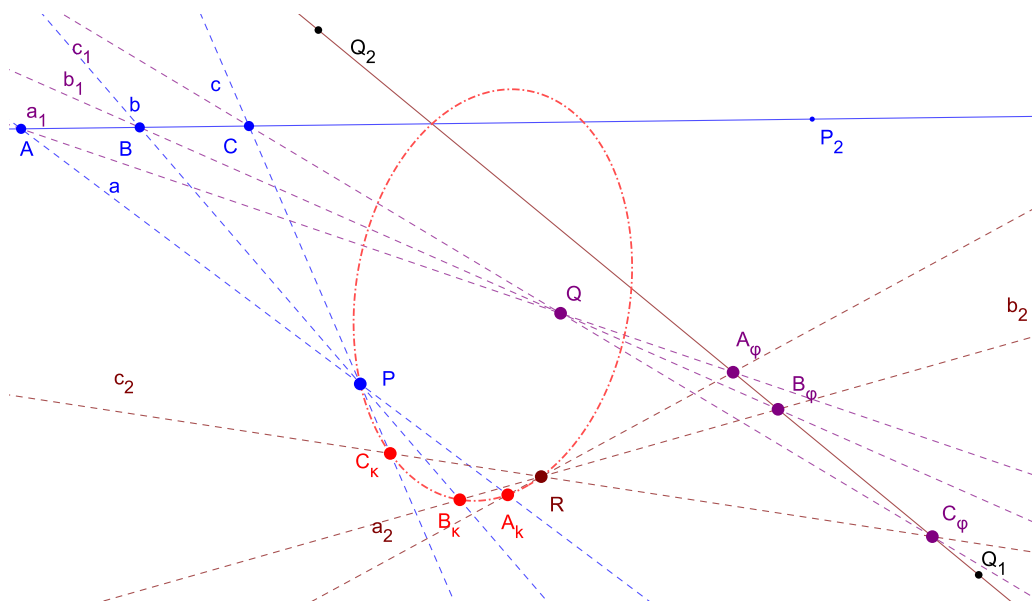
Tento princíp je základom pre projektívnu definíciu kuželosečiek: keď vezmeme dva zväzky priamok so stredmi  $P$  a  $Q$ , ich projektívne alebo perspektívne prepojenie určuje bodovú kuželosečku ako množinu všetkých priesečníkov zodpovedajúcich si priamok.

### Definícia 4.1.2

Nech  $P, Q$  sú dva rôzne body roviny  $\mathbb{E}^2$ , a nech  $Z(P), Z(Q)$  sú zväzky priamok so stredmi  $P, Q$ . Nech  $\pi : Z(P) \rightarrow Z(Q)$  je projektivnosť medzi týmito zväzkami.

**Kuželosečkou**  $K_q$  nazývame množinu všetkých bodov  $X$ , ktoré ležia súčasne na priamke  $m \in Z(P)$  a na jej obraze  $\pi(m) \in Z(Q)$ :

$$K_q = \{X \in m \cap \pi(m) \mid m \in Z(P)\}.$$



Obr. 4.3: Vizualizácia kuželosečky pomocou projektívnych zväzkov

[Interaktívny applet: Projektívna definícia kuželosečky](#)

Ak  $\pi$  nie je perspektivnosť, kuželosečka  $K_q$  sa nazýva **regulárna**; v opačnom prípade je **singulárna**.

### Poznámka 4.1.2

Značenie: kuželosečku určenú zväzkami  $Z(P), Z(Q)$  a projektivnosťou  $\pi$  budeme označovať  $K_q = K_q(P, Q; \pi)$ .

**Didaktická poznámka.** Táto definícia je základom pre syntetickú a projektívnu geometriu. Umožňuje elegantne dokazovať vlastnosti kuželosečiek pomocou Desargovho alebo Pascalovho výroku a je nezávislá od súradníc či mierky.

**Komentár 6.** V tejto kapitole sa zameriame na oba prístupy — metrický aj projektívny. Ukážeme, že vedú k tej istej množine bodov, ale každý z nich odhaľuje iné súvislosti.

### 4.1.3 Kuželosečka ako rovinný rez kuželovej plochy

**Motivácia:** Klasická predstava kuželosečiek vychádza zo starovekej geometrie: kuželosečka je krivka, ktorá vznikne pri prieniku roviny a rotačného kužela. Táto definícia je vizuálne veľmi názorná a vhodná na prvé oboznámenie študentov s elipsou, parabolou a hyperbolou. V spojení s Quételet-Dandelinovou vetou získava navyše elegantné prepojenie s metrickou definíciou cez ohniská a riadiace priamky.

#### Historický kontext

Už **Menaichmos** (4. storočie pred n. l.) skúmal rezy rotačného kužela pri hľadaní riešení problémov duplikácie kocky. **Apollónios z Pergy** potom v diele *Konika* (3. storočie pred n. l.) systematicky popísal vlastnosti kuželosečiek a zaviedol dnešné názvy elipsa, parabola a hyperbola.

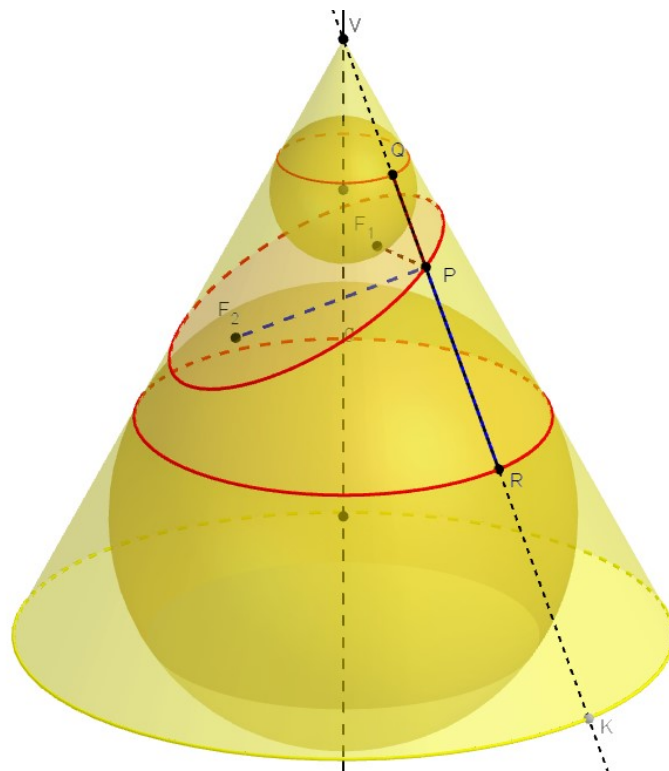
V novoveku **Lambert Quételet (1796–1874)** a **Germinal Pierre Dandelin (1794–1847)** dokázali, že kuželosečka ako rez rotačného kužela je ekvivalentná s metrickou definíciou pomocou ohnísk a riadiacich priamok. Ich veta o dotykových guľiach (*Dandelin spheres*) je dnes štandardným mostom medzi priestorovou a rovinnou definíciou kuželosečiek.

#### Veta 4.1.1: Quételet-Dandelinova veta

Nech je daná rotačná kuželová plocha a rovina rezu, ktorá neprechádza jeho vrcholom  $V$ . Nech sú  $S_1$  a  $S_2$  guľe (Dandelinove guľe) vpísané do rotačnej kuželovej plochy tak, že sa dotýkajú roviny rezu v bodoch  $F_1$  a  $F_2$ .

Potom krivka prieniku rotačnej kuželovej plochy a roviny rezu je kuželosečka s ohniskami  $F_1, F_2$ , pričom ohniská kuželosečky sú dotykové body gúl s rovinou rezu.

*Dôkaz.* Uvedieme základnú ideu dôkazu pre eliptický rez. Obrázok 4.4 približuje situáciu, keď rovina rezu pretína všetky tvoriace priamky  $\overleftrightarrow{VK}$  rotačnej kuželovej plochy. Nech  $P$  je ľubovoľný bod rezu, t. j. bod prieniku danej tvoriacej priamky  $\overleftrightarrow{VK}$  s rovinou rezu.



Obr. 4.4: Kuželosečka ako rez kužela podľa Quételet-Dandelinovej vety.

[Interaktívny applet: Quételet-Dandelinova veta](#)

Pre guľovú plochu platí, že vzdialenosť ľubovoľného vonkajšieho bodu  $P$  od dotykového bodu (napr.  $R$ ) na dotýčnici vedenej ku guľovej ploche bodom  $P$  je rovná konštante *konst.* To znamená, že platí:

$$|PR| = |PF_2|; |PQ| = |PF_1|,$$

ale zároveň platí

$$\textit{konst} = |PR| + |PQ| = |PF_2| + |PF_1|.$$

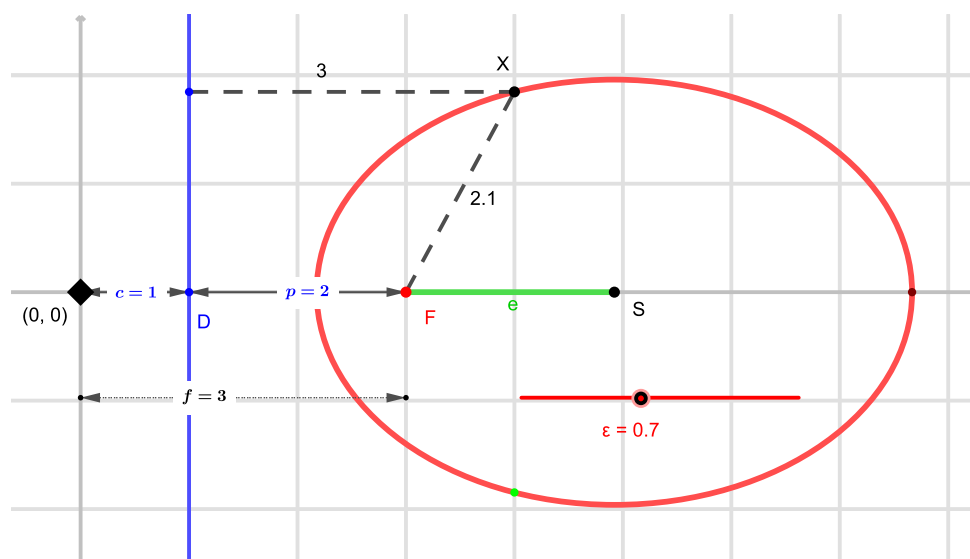
Posledná rovnosť predstavuje ohniskovú definíciu elipsy. Podrobný dôkaz Quételet-Dandelinovej vety nájdete napríklad v práci [EFF, 2007].  $\square$

**Didaktická poznámka.** Quételet-Dandelinova veta poskytuje názorný most medzi priestorovou a rovinnou geometriou. Vo vyučovaní je vhodné najprv vizualizovať pohyb dotykových gúľ pri zmene rezu a následne prepojiť ohniská s metrickou definíciou kuželosečiek. Žiaci tak získajú hlbšie pochopenie, že elipsa, parabola aj hyperbola sú len rôzne rezy toho istého rotačného kužela.

## 4.2 Analytické vyjadrenie kuželosečiek

Pri odvodení analytického vyjadrenia kuželosečky sa sústreďíme na kuželosečky z pohľadu množiny bodov danej vlastnosti. Budeme vychádzať z metrickej definície 4.1 kuželosečky, ktorá ju charakterizuje konštantným podielom vzdialeností:

$$\frac{\rho(X, F)}{\rho(X, d)} = k. \quad (4.2)$$



Obr. 4.5: Elipsa v karteziánskej súradnej sústave

Interaktívny applet: [Excentricita a parameter kuželosečky](#)

Zvoľme karteziánsku súradnú sústavu (KSS) tak, aby súradnicová os  $o_x$  prechádzala bodom  $F[f; 0]$  a bola kolmá na priamku  $d$  s rovnicou  $x = c$ . Nech  $X[x, y]$  je ľubovoľný bod kuželosečky. Pri takto zvolenej KSS bude pre  $k > 0$

$$d : x = c, \quad F[f; 0], \quad f = c + p. \quad (4.3)$$

Bod  $F$  budeme nazývať **ohnisko**, priamku  $d$  **riadiaca priamka** a číslo  $\epsilon > 0$  **excentricita** resp. numerická výstrednosť kuželosečky. Vzdialenosť  $p$  ohniska od riadiacej priamky nazveme parameter kuželosečky.

Vzdialenosť ohniska od stredu kuželosečky označíme  $e$  a nazveme **lineárna excentricita**. Pozri obrázok 4.5, ktorý predstavuje rovnosť 4.2 pre numerickú výstrednosť  $\epsilon = 0,7$ . Vzťah 4.2 po dosadení hodnôt 4.3 môžeme upraviť na tvar

$$\frac{\sqrt{(x-f)^2 + y^2}}{|x-c|} = \epsilon.$$

Umocnením a úpravou dostaneme

$$(x - f)^2 + y^2 = \epsilon^2(x - c)^2.$$

resp. rovnicu

$$x^2(1 - \epsilon^2) - 2(f - \epsilon^2 c)x + y^2 + f^2 - \epsilon^2 c^2 = 0 \quad (4.4)$$

Ide o všeobecnú rovnicu kuželosečky, o ktorej sme sa zmienili v kapitole 2. Teda všeobecná rovnica kuželosečiek je určená vzťahom 2.9.

Tvar resp. druh kuželosečky závisí od kladnej hodnoty  $\epsilon > 0$  v rovnici 4.4. Konkrétne v súlade s poznámkou 4.1.1 pre  $0 < \epsilon < 1$  kuželosečka je elipsa, pre  $\epsilon = 1$  je parabola a pre  $\epsilon > 1$  je hyperbola.

### 4.3 Parametre ohnisk a riadiacich priamok

Z analytickej rovnice kuželosečky môžeme odvodiť jej základné geometrické parametre: polohu ohnisk, excentricitu a rovnice riadiacich priamok. Najprv uvažujme štandardné polohy kuželosečiek s osou symetrie totožnou s osou  $x$  alebo  $y$ .

#### Elipsa

Štandardná rovnica elipsy so stredom v počiatku a veľkou poloosou  $a$  na osi  $o_x$  má tvar

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > b > 0.$$

#### Príklad 4.3.1

Dokážte, že pre elipsu v štandardnom tvare ohniská majú súradnice:  $F_1(-e, 0)$ ,  $F_2(e, 0)$  a zároveň platí:

$$e^2 = a^2 - b^2,$$

kde  $e$  je **vzdialenosť ohniska od stredu**, ktorú nazveme **lineárna excentricita elipsy**.

Pripomíname, že pre konštantu  $\epsilon$  používame názov len excentricita (alebo numerická výstrednosť), ktorej hodnota pre elipsu je v intervale  $(0 < \epsilon < 1)$ .

**Riešenie.** Pri riešení úlohy z príkladu 4.3 sa budeme zaoberať konkrétnou hodnotou  $\epsilon = 0,8$  tak, ako ju znázorňuje obrázok 4.6. Zovšeobecnenie na ľubovoľnú hodnotu  $0 < \epsilon < 1$  prenechávame na čitateľa. Pre vrcholy  $A, B$  danej elipsy musí platiť vzťah 4.2. Označme  $X(F) = -e$  prvú súradnicu ohniska  $F_1$  a  $X(A) = -a, X(D) = -d$ . Potom po dosadení



Ďalším umocňovaním a úpravami dostaneme:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - e^2} = 1. \quad (4.7)$$

Ak stred elipsy je bod  $S[m; n]$  a ohniská ležia na rovnobežke s osou  $x$  prechádzajúcou bodom  $S$ , potom **stredová rovnica elipsy** je daná vzťahom:

$$\frac{(x - m)^2}{a^2} + \frac{(y - n)^2}{b^2} = 1 \quad (4.8)$$

□

### Parabola

Štandardná rovnica paraboly s osou rovnobežnou s osou  $x$  je

$$y^2 = 2px,$$

kde  $p > 0$  je parameter paraboly (vzdialenosť ohniska od vrcholu). Ohnisko má súradnice  $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$  a riadiaca priamka má rovnicu:  $x = -\frac{p}{2}$ . Excentricita musí byť rovná 1:  $\epsilon = 1$ . Po dosadení súradníc ohniska paraboly dostaneme rovnicu

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}. \quad (4.9)$$

Ak vrchol paraboly je bod  $V[m; n]$  a ohnisko leží na rovnobežke s osou  $o_x$  prechádzajúcou bodom  $V$ , potom **vrcholová rovnica paraboly**:

$$(y - n)^2 = 2p(x - m). \quad (4.10)$$

**Didaktická poznámka.** Pri parabole je vzdialenosť bodu od ohniska a od riadiacej priamky vždy rovnaká, čo je názorné a ľahko overiteľné v dynamickej geometrii. Vytvorte vhodný applet v GeoGebre pre parabolu.

### Hyperbola

Štandardná rovnica hyperboly s centrom v počiatku a reálnou osou na osi  $x$  je

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a, b > 0.$$

Pre jej parametre platí:

$$c^2 = a^2 + b^2, \quad \epsilon = \frac{c}{a} > 1.$$

Ohniská:  $F_1(-c, 0)$ ,  $F_2(c, 0)$ . Riadiace priamky:

$$x = \pm \frac{a}{e}.$$

**Veta 4.3.2**

Rozdiel vzdialeností ľubovoľného bodu hyperboly od ohnísk je stály a rovný  $2a$ , pričom konštanta  $2a$  je menšia ako vzdialenosť ohnísk.

Podobne ako v časti *Elipsa* ľahko ukážeme, že **stredová rovnica hyperboly** má tvar

$$\frac{(x - m)^2}{a^2} - \frac{(y - n)^2}{b^2} = 1. \quad (4.11)$$

# Kapitola 5

## Kategorizácia kuželosečiek

V predchádzajúcich častiach sme ukázali, že všeobecná rovnica kuželosečky v afinných súradniciach má tvar:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad (5.1)$$

kde  $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}$ , pričom aspoň jeden z koeficientov  $A, B, C$  je nenulový.

### Definícia 5.0.1: Regulárne a singulárne kuželosečky

Pod **regulárnou kuželosečkou** rozumieme kružnicu, elipsu, hyperbolu alebo parabolu.

Pod **singulárnou kuželosečkou** rozumieme každú dvojicu priamok (dve rôzobežné priamky, dve rôzne rovnobežné priamky) alebo bod.

Všeobecnú rovnicu kuželosečky môžeme vyjadriť aj v **maticovom tvare**:

$$(x \ y \ 1) \cdot \sigma \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

kde matica  $\sigma$  pozostáva z koeficientov všeobecnej rovnice. Algebraickými úpravami môžeme ukázať, že matica  $\sigma$  má tvar

$$\sigma = \begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

Determinant matice  $\sigma$  nazývame **veľký diskriminant kuželosečky**.

**Malý diskriminant kuželosečky** je determinant matice:

$$\delta = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

Na určenie konkrétneho druhu kuželosečky pomocou veľkého diskriminantu (označenie  $\det \sigma = |\sigma|$ ) a malého diskriminantu (označenie  $\det \delta = |\delta|$ ) sme zostavili kvôli prehľadnosti nasledujúci algoritmus:

1. Ak veľký diskriminant je **rôzny od nuly** ( $\det \sigma \neq 0$ ), tak kuželosečka je **regulárna** a pre

- $\det \delta > 0$ 
  - $A \cdot |\sigma| < 0$  alebo  $C \cdot |\sigma| < 0 \Rightarrow$  **elipsa**,
  - $A \cdot |\sigma| > 0$  alebo  $C \cdot |\sigma| > 0 \Rightarrow$  **prázdna množina**.
- $\det \delta = 0 \Rightarrow$  **parabola**,
- $\det \delta < 0 \Rightarrow$  **hyperbola**.

2. Ak veľký diskriminant je **rovný nule** ( $\det \sigma = 0$ ), tak kuželosečka je **singulárna** a pre

- $|\delta| > 0 \Rightarrow$  kuželosečka je singulárnym bodom,
- $|\delta| = 0 \Rightarrow$  sú to rovnobežky alebo prázdna množina, špeciálne ak
  - $A \neq 0$ :
    - \*  $\begin{vmatrix} A & D \\ D & F \end{vmatrix} < 0 \Rightarrow$  dve rôzne rovnobežky,
    - \*  $\begin{vmatrix} A & D \\ D & F \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$  dve totožné rovnobežky,
    - \*  $\begin{vmatrix} A & D \\ D & F \end{vmatrix} > 0 \Rightarrow$  prázdna množina,
  - $A = 0, C \neq 0$ :
    - \*  $\begin{vmatrix} C & E \\ E & F \end{vmatrix} < 0 \Rightarrow$  dve rôzne rovnobežky,
    - \*  $\begin{vmatrix} C & E \\ E & F \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$  dve totožné rovnobežky,
    - \*  $\begin{vmatrix} C & E \\ E & F \end{vmatrix} > 0 \Rightarrow$  prázdna množina.

- $|\delta| < 0 \Rightarrow$  singularná kuželosečka predstavuje dve rôznobežky.

### Poznámka 5.0.1

Jednoduchší spôsob triedenia regulárnych kuželosečiek vychádza z preskúmania hodnoty diskriminantu  $\Delta$  kvadratickej formy 5.1, ktorý sa určí ako:

$$\Delta = B^2 - 4AC.$$

Tento spôsob triedenia je vhodný len pre regulárne kuželosečky.

Podľa hodnoty diskriminantu  $\Delta$  rozlišujeme tri prípady:

- $\Delta < 0$ : **elipsa** (vrátane kružnice, ak  $A = C, B = 0$ ),
- $\Delta = 0$ : **parabola**,
- $\Delta > 0$ : **hyperbola**.

**Didaktická poznámka.** Diskriminant  $\Delta = B^2 - 4AC$  kvadratickej formy 5.1 je spoľahlivým a štandardným kritériom na klasifikáciu kvadratických kriviek. Pri zavádzaní tejto klasifikácie je vhodné ukázať nielen analytickú interpretáciu, ale aj grafickú vizualizáciu — napríklad pomocou parametrov  $A, B, C$  meniť typ kuželosečky v reálnom čase.

### Príklad 5.0.1

Rozhodnite, o aký typ kuželosečky ide v nasledujúcich prípadoch:

1.  $x^2 + y^2 - 1 = 0 \rightarrow \Delta = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -4 \rightarrow$  **kružnica (elipsa)**,
2.  $x^2 - y^2 = 1 \rightarrow \Delta = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 4 \rightarrow$  **hyperbola**,
3.  $x^2 + 2y - 1 = 0 \rightarrow \Delta = 0 - 4 \cdot 1 \cdot 0 = 0 \rightarrow$  **parabola**.

## 5.1 Prevod všeobecnej rovnice na štandardný tvar

**Motivácia:** Pri skúmaní kuželosečiek je často potrebné previesť ich všeobecnú kvadratickú rovnicu 5.1 do tzv. *štandardného tvaru*, ktorý priamo odhaľuje typ kuželosečky a jej základné parametre (poloha stredu, osí, dĺžky hlavných a vedľajších poloosí).

Návrh postupu transformácie všeobecnej rovnice na štandardný tvar je založený na transformácii karteziánskej súradnej sústavy a následnej redukcii na štandardný tvar.

1. **Určenie typu kuželosečky** pomocou diskriminantu  $\Delta = B^2 - 4AC$ .
2. **Nájdenie stredu kuželosečky**  $S = [x_0, y_0]$ , ktorého súradnice  $x_0, y_0$  sú riešením sústavy

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}(Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial y}(Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F) &= 0,\end{aligned}$$

3. **Posunutím súradnicovej sústavy** o vektor  $\vec{u} = (-x_0, -y_0)$  získame stredovú rovnicu kuželosečky.
4. **Rotácia súradnicovej sústavy:** Pre odstránenie zmiešaného člena  $Bxy$  môžeme použiť substitúciu

$$x = X \cos \theta - Y \sin \theta, \quad y = X \sin \theta + Y \cos \theta,$$

kde uhol  $\theta$  spĺňa

$$\tan 2\theta = \frac{B}{A - C}.$$

Substitúcia predstavuje rotáciu o uhol, ktorý zvierá hlavná os stredovej kuželosečky so súradnicovou osou  $o_x$ .

5. **Redukcia na štandardný tvar:** Po transformácii dostaneme rovnicu tvaru

$$\frac{X^2}{a^2} \pm \frac{Y^2}{b^2} = 1 \quad \text{alebo} \quad Y^2 = 2pX.$$

V tejto podkapitole skúmame prepojenie analytickej a syntetickej geometrie. Vyučovanie s využitím dynamickej vizualizácie (napr. GeoGebra) umožňuje študentom sledovať, ako sa kuželosečka mení pri posune a rotácii súradnicovej sústavy. Uvedieme niekoľko príkladov transformácie.

### Príklad 5.1.1

**Elipsa.** Transformujte kuželosečku danú rovnicou

$$4x^2 + 3xy + 4y^2 - 12x - 12y + 9 = 0$$

na jej štandardný tvar.

**Riešenie:**

**1. Určenie typu kuželosečky pomocou diskriminantu.**

Všeobecná rovnica má koeficienty:

$$A = 4, \quad B = 3, \quad C = 4$$

Diskriminant kvadratickej formy je

$$\Delta = B^2 - 4AC = 3^2 - 4 \cdot 4 \cdot 4 = 9 - 64 = -55 < 0.$$

Kuželosečka je teda **elipsa** (resp. kružnica, ak by  $A = C$  a  $B = 0$ ).

**2. Nájdeme stred elipsy.** Stred je riešením sústavy

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 8x + 3y - 12 = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x + 8y - 12 = 0.$$

Po derivovaní riešime sústavu:

$$8x + 3y = 12,$$

$$3x + 8y = 12.$$

Vyriešením sústavy dostaneme súradnice stredu kuželosečky:

$$55x_0 = 60 \quad \Rightarrow \quad x_0 = \frac{60}{55} = \frac{12}{11}$$

$$33y_0 = 36 \quad \Rightarrow \quad y_0 = \frac{36}{33} = \frac{12}{11}.$$

**3. Posun súradnicovej sústavy do stredu.** Zavedieme nové súradnice

$$X = x - \frac{12}{11}, \quad Y = y - \frac{12}{11}.$$

Dosadením do pôvodnej rovnice dostaneme rovnicu v posunutej sústave:

$$4X^2 + 3XY + 4Y^2 - \frac{36}{11} = 0 \quad \Rightarrow \quad 4X^2 + 3XY + 4Y^2 = \frac{36}{11}.$$

**4. Rotácia súradnicovej sústavy.** Odstránime člen  $XY$  rotáciou o uhol  $\theta$ , kde

$$\tan 2\theta = \frac{B}{A - C} = \frac{3}{0} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{4}.$$

Použijeme substitúciu

$$X = \frac{U - V}{\sqrt{2}}, \quad Y = \frac{U + V}{\sqrt{2}}.$$

Po dosadení a zjednodušení získame:

$$\frac{11}{2}U^2 + \frac{5}{2}V^2 = \frac{36}{11}.$$

**5. Úprava na štandardný tvar.** Vydelíme celú rovnicu  $\frac{36}{11}$ :

$$\frac{11}{2}U^2 \cdot \frac{11}{36} + \frac{5}{2}V^2 \cdot \frac{11}{36} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{121}{72}U^2 + \frac{55}{72}V^2 = 1$$

Výmenou členov tak, aby väčšia poloos bola pri  $V$ , dostaneme:

$$\frac{V^2}{\frac{72}{55}} + \frac{U^2}{\frac{72}{121}} = 1$$

alebo ekvivalentne

$$\frac{V^2}{\frac{198}{121}} + \frac{U^2}{\frac{90}{121}} = 1,$$

čo vedie k poloosiam

$$a = \frac{3\sqrt{22}}{11}, \quad b = \frac{3\sqrt{10}}{11}.$$

Tento výsledok je v súlade s výsledkom, ktorý sme získali pomocou GeoGebry 5.1.

**Výsledok:** Štandardný tvar elipsy po posune a rotácii je

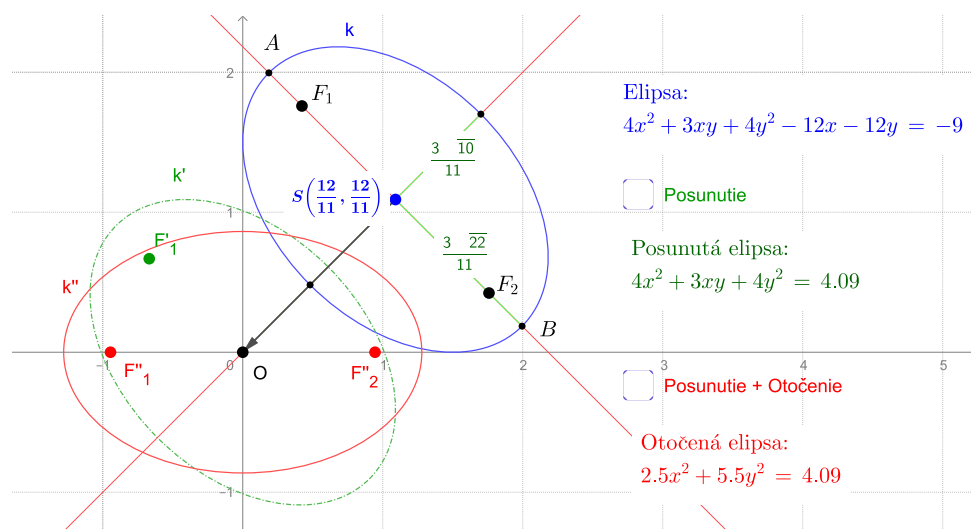
$$\frac{V^2}{\frac{198}{121}} + \frac{U^2}{\frac{90}{121}} = 1,$$

stred je  $S\left(\frac{12}{11}, \frac{12}{11}\right)$ , osi otočené o  $45^\circ$  a poloosi

$$a = \frac{3\sqrt{22}}{11}, \quad b = \frac{3\sqrt{10}}{11}.$$

**Stred elipsy je**  $S = \left(\frac{12}{11}, \frac{12}{11}\right)$ .

**Didaktická poznámka.** Pri elipse je dôležité nielen nájsť stred a typ kuželo-sečky, ale aj určiť orientáciu a dĺžky poloosí. Postup posunu a rotácie súradníc je univerzálny pre všetky kuželo-sečky.



Obr. 5.1: Grafické znázornenie riešenia príkladu 5.1

Interaktívny applet: [Transformácia kuželosečky - elipsa](#)

### Príklad 5.1.2

Parabola: Transformujte kuželosečku danú rovnicou

$$x^2 + 4x + 2y - 3 = 0$$

na jej štandardný tvar a určte vrchol paraboly.

#### Riešenie:

1. **Určenie typu kuželosečky pomocou diskriminantu.** Všeobecná rovnica má koeficienty:

$$A = 1, \quad B = 2, \quad C = 1$$

Diskriminant kvadratickej formy je

$$\Delta = B^2 - 4AC = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4 - 4 = 0$$

Kuželosečka je teda **parabola**.

2. **Nájdeme vrchol paraboly.** Pre parabolu sa vrchol nachádza v bode, kde gradient kvadratickej časti je ortogonálny na lineárnu časť, čo zodpovedá riešeniu sústavy

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2y - 2 = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x + 2y + 4 = 0.$$

Sústava dáva:

$$x + y = 1$$

$$x + y = -2$$

Sústava **nemá riešenie**, čo potvrdzuje, že parabola nemá stred. V takomto prípade pokračujeme transformáciou súradnicovej sústavy rotáciou tak, aby sme odstránili člen  $xy$ .

**3. Rotácia súradnicovej sústavy.** Odstránime člen  $XY$  rotáciou o uhol  $\theta$ , kde

$$\tan 2\theta = \frac{B}{A - C} = \frac{2}{0} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}.$$

Použijeme substitúciu

$$X = \frac{U - V}{\sqrt{2}}, \quad Y = \frac{U + V}{\sqrt{2}}.$$

Dosadením do pôvodnej rovnice (a po úprave) dostaneme

$$2U^2 + 4\sqrt{2}V - 3 = 0$$

alebo po úprave

$$V = -\frac{1}{2\sqrt{2}}U^2 + \frac{3}{4\sqrt{2}}.$$

To je **štandardný tvar paraboly** so smernicou osi  $V$ .

**4. Určenie vrcholu a parametrov.** Parabola má os rovnobežnú s osou  $V$  a vrchol v bode

$$V_0 = \left(0, \frac{3}{4\sqrt{2}}\right).$$

Otvára sa smerom **nadol**, pretože koeficient pri  $U^2$  je záporný. Parametrické vyjadrenie tvaru paraboly je

$$V - \frac{3}{4\sqrt{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}U^2$$

v tvare

$$V - k = -pU^2$$

s parametrom

$$p = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

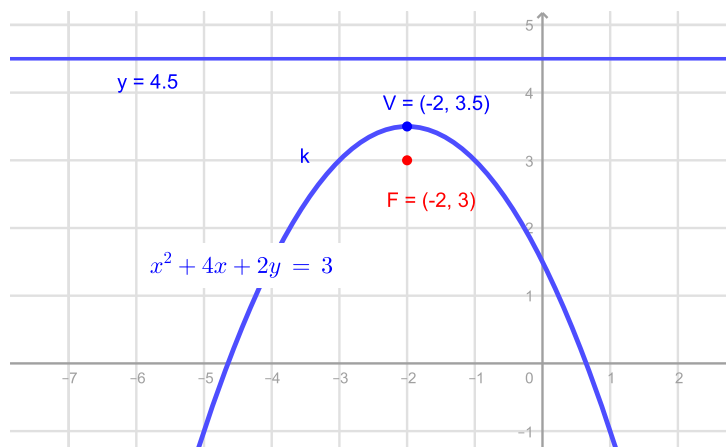
a vzdialenosť ohniska od vrcholu je

$$f = \frac{1}{4p} = 2\sqrt{2}.$$

**Výsledok:** Štandardný tvar paraboly v otočenej sústave je

$$V - \frac{3}{4\sqrt{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}U^2$$

s osou paraboly rovnobežnou s osou  $V$ . Vrchol je  $V_0 = \left(0, \frac{3}{4\sqrt{2}}\right)$  a ohnisko vo vzdialenosti  $2\sqrt{2}$  nad alebo pod vrcholom. Pozri obrázok 5.2.



Obr. 5.2: Transformácia kuželosečky na štandardný tvar paraboly

**Didaktická poznámka.** Pri parabole je transformácia jednoduchšia, pretože nie je potrebná rotácia súradnicovej sústavy (diskriminant  $\Delta = 0$  znamená, že os paraboly je v pôvodnej sústave rovnobežná s jednou z osí). Dynamický applet umožní študentom vizualizovať vrchol, ohnisko a riadiacu priamku pri rôznych posunoch.

### Príklad 5.1.3

**Hyperbola:** Transformujte kuželosečku danú rovnicou

$$3x^2 - 6xy - 3y^2 - 8x + 8y = 0 \quad (5.4)$$

na jej štandardný tvar.

**Riešenie:**

1. Určenie stredu kuželosečky.

Použijeme parciálne derivácie:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x - 6y - 8 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -6x - 6y + 8 = 0$$

Riešime sústavu:

$$6x - 6y = 8$$

$$-6x - 6y = -8$$

Po úpravách získame riešenie, ktoré predstavuje súradnice stredu:

$$x_0 = \frac{4}{3}, \quad y_0 = 0$$

Stred kuželošečky je

$$S = \left(\frac{4}{3}, 0\right)$$

## 2. Posun súradnicovej sústavy.

Zavedieme nové súradnice:

$$X = x, \quad Y = y + \frac{4}{3}$$

Po dosadení do rovnice 5.4 dostaneme (skrátene):

$$3X^2 - 6XY - 3Y^2 + \text{konštanta} = 0$$

Lineárne členy sa po posune redukujú, pričom konštantná hodnota nebude ovplyvňovať typ kuželošečky.

## 3. Rotácia súradnicovej sústavy.

Odstránime zmiešaný člen  $XY$  pomocou rotácie. Uhol rotácie  $\theta$  určíme z:

$$\tan 2\theta = \frac{B}{A - C} = \frac{-6}{3 - (-3)} = \frac{-6}{6} = -1 \Rightarrow 2\theta = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{8}$$

Použijeme substitúciu:

$$X = U \cos \theta - V \sin \theta, \quad Y = U \sin \theta + V \cos \theta$$

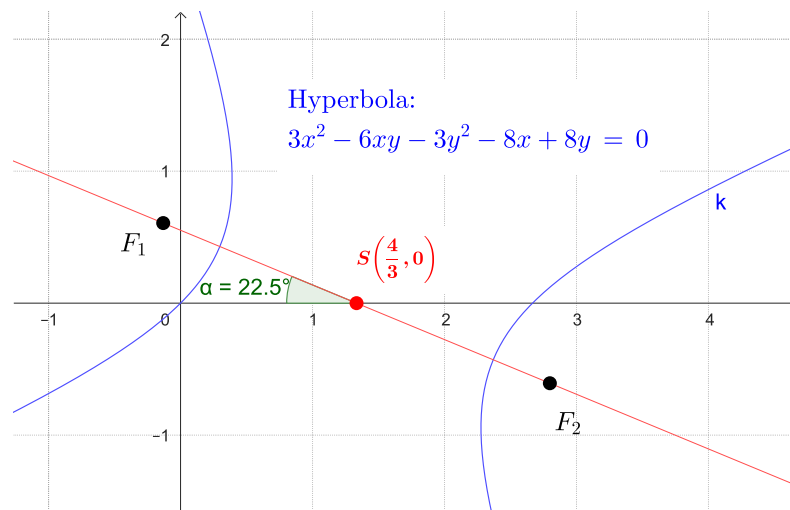
Po dosadení a zjednodušení dostaneme kvadratický tvar bez zmiešaného člena.

## 4. Redukcia na štandardný tvar.

Po odstránení zmiešaného člena a úprave rovnice dostaneme niečo ako:

$$\frac{U^2}{a^2} - \frac{V^2}{b^2} = 1$$

Ide o **hyperbolu** so stredom  $S = \left(\frac{4}{3}, 0\right)$  a osami otočenými o uhol  $\theta = -\frac{\pi}{8}$ .  
Pozri obrázok 5.3.



Obr. 5.3: Grafické znázornenie riešenia príkladu 5.1

**Didaktická poznámka.** Tento príklad ukazuje úplný postup transformácie kuželosečky na štandardný tvar: nájdenie stredu, posun súradnicovej sústavy, odstránenie zmiešaného člena rotáciou a úpravu do štandardného tvaru.

Hyperbola je jediná kuželosečka, ktorej vetvy sa v nekonečne približujú k priamkam. Tieto priamky nazývame **asymptoty** a ich určenie má význam nielen v analytickej geometrii, ale aj v aplikáciách, napríklad pri modelovaní trajektórií, optických vlastností alebo vo fyzike pri pohybe telies po hyperbolickej dráhe.

#### Definícia 5.1.1: Asymptota hyperboly

*Asymptotou* hyperboly  $H$  nazývame priamku  $p$ , ku ktorej sa body hyperboly ľubovoľne približujú, keď sa ich vzdialenosť od stredu súradnicovej sústavy zväčšuje do nekonečna. Formálne:

$$\lim_{|X| \rightarrow \infty} \rho(X, p) = 0,$$

kde  $X \in H$  a  $\rho(X, p)$  je vzdialenosť bodu  $X$  od priamky  $p$ .

Pri hyperbole s rovnicou vo všeobecnom tvare

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

sa asymptoty určujú ako priamky prechádzajúce stredom hyperboly a spĺňajúce rovnicu kvadratickej formy:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0.$$

Tento tzv. *homogénny člen* definuje smerové priamky v nekonečne, ku ktorým sa hyperbola približuje.

#### Príklad 5.1.4

Určite asymptoty hyperboly

$$4x^2 - 9y^2 - 8x + 36y - 44 = 0.$$

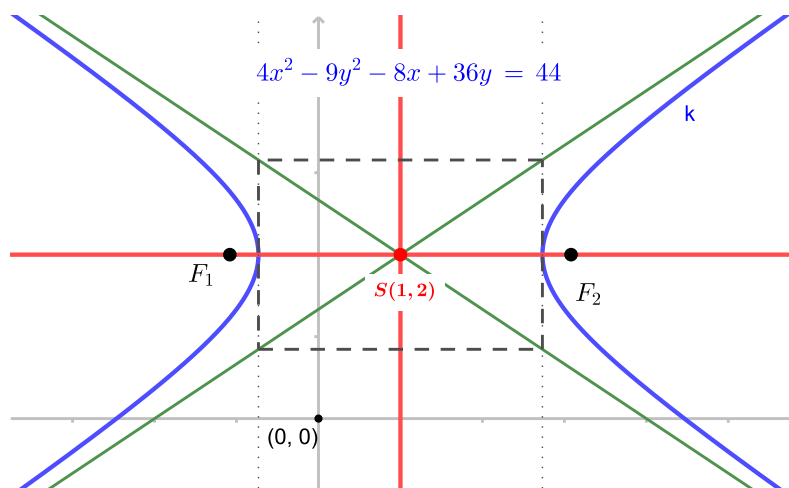
**Riešenie.**

1. Najprv nájdeme stred hyperboly:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 8x - 8 = 0 \implies x_s = 1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -18y + 36 = 0 \implies y_s = 2.$$

Stred hyperboly je teda  $S(1, 2)$ .



Obr. 5.4: Asymptoty hyperboly

2. Posunieme súradnicovú sústavu do stredu substitúciou  $X = x - 1$ ,  $Y = y - 2$ :

$$4(X + 1)^2 - 9(Y + 2)^2 - 8(X + 1) + 36(Y + 2) - 44 = 0.$$

Po úprave dostávame

$$4X^2 - 9Y^2 - 12 = 0,$$

alebo

$$\frac{X^2}{9} - \frac{Y^2}{4} = 1.$$

3. Štandardný tvar hyperboly ukazuje, že asymptoty majú smerové rovnice:

$$Y = \pm \frac{2}{3}X.$$

Po návrate do pôvodnej sústavy získame rovnice asymptot pôvodnej hyperboly, ktoré sú v tvare:

$$y - 2 = \pm \frac{2}{3}(x - 1).$$

□

**Didaktická poznámka.** Pri vyučovaní sa osvedčuje postupovať nasledovne:

1. zvýrazniť homogénnu časť kvadratickej rovnice,
2. posunúť súradnice do stredu hyperboly,
3. určiť smerové priamky asymptot a zakresliť ich do grafu.

## 5.2 Vzťahy medzi parametrami kuželosečiek

Pri práci s kuželosečkami sa často stretávame s viacerými parametrami: hlavnými a vedľajšími poloosami  $a$  a  $b$ , vzdialenosťou ohniska  $c$ , excentricitou  $e$  a parametrom kuželosečky  $p$  (vzdialenosť ohniska od priamky kolmice na hlavnú os cez vrchol). Tieto parametre sú navzájom prepojené vzťahmi, ktoré umožňujú jednoduchý prechod medzi rôznymi formami rovníc kuželosečiek.

Uvádzame stručný prehľad vzájomných vzťahov medzi týmito parametrami, ktorý zhrňuje výsledky z tejto a predchádzajúcej kapitoly..

### Elipsa

Pre elipsu so stredom v počiatku a hlavnou osou na osi  $x$  platia základné vzťahy:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad 0 < e < 1$$

$$c^2 = a^2 - b^2, \quad e = \frac{c}{a}, \quad p = \frac{b^2}{a}.$$

kde  $a, b$  sú hlavná a vedľajšia poloos,  $c$  je vzdialenosť ohniska od stredu elipsy,  $e$  je excentricita ( $0 < e < 1$ ) a  $p$  parameter elipsy (vzdialenosť ohniska od priamky kolmice na os cez vrchol).

**Poznámka 5.2.1**

Z vyššie uvedených vzťahov môžeme zostaviť užitočnú tabuľku:

Vztah	Význam
$c^2 = a^2 - b^2$	Ohnisko elipsy
$e = \frac{c}{a}$	Excentricita
$p = \frac{b^2}{a}$	Parameter kuželosečky
$b = a\sqrt{1 - e^2}$	Vedľajšia poloos cez $e$

**Parabola**

Pre parabolu s vrcholom v počiatku a osou  $x$  platí:

$$y^2 = 2px, \quad e = 1$$

$$c = \frac{p}{2}, \quad p = 2c.$$

Parabola má iba jeden ohniskový parameter  $c$ , excentricita je vždy  $e = 1$  a parameter  $p$  je dvojnásobkom vzdialenosti ohniska od vrcholu.

**Hyperbola**

Pre hyperbolu so stredom v počiatku a hlavnou osou na osi  $x$  platí:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad e > 1$$

$$c^2 = a^2 + b^2, \quad e = \frac{c}{a}, \quad p = \frac{b^2}{a}.$$

**Poznámka 5.2.2**

Tabuľka vzťahov je veľmi podobná ako pri elipse, iba s opačným znamienkom v základnom vzťahu medzi  $a, b, c$ :

$c^2 = a^2 + b^2$	Ohnisko hyperboly
$e = \frac{c}{a}$	Excentricita ( $e > 1$ )
$p = \frac{b^2}{a}$	Parameter kuželosečky
$b = a\sqrt{e^2 - 1}$	Vedľajšia poloos cez $e$

## 5.3 Polárne (ohniskové) rovnice kuželosečiek

**Motivácia:** Polárne rovnice kuželosečiek vyjadrujú polohu bodu kuželosečky vzhľadom na jej ohnisko. Sú dôležité najmä v analytickej geometrii a vo fyzike, kde sa kuželosečky často používajú na opis pohybu telies v centrálnom poli (napríklad Keplerove dráhy planét).

### Definícia 5.3.1: Polárna rovnica kuželosečky

Nech je kuželosečka určená ohniskom  $F$  a excentricitou  $e$ . Ak začiatok polárnej súradnicovej sústavy zvolíme v ohnisku  $F$  a os  $Or$  smerujeme rovnobežne s hlavnou osou kuželosečky, potom polárna rovnica má tvar:

$$r = \frac{p}{1 \pm e \cos \theta},$$

kde  $r$  je vzdialenosť bodu kuželosečky od ohniska,  $\theta$  je uhol polárnej súradnice meraný od osi,  $p$  je *parameter kuželosečky* (vzdialenosť ohniska od priamky kolmo na os cez vrchol),  $e$  je *excentricita* kuželosečky.

## Príklady

### Príklad 5.3.1: Elipsa

Rozhodnime polárnu rovnicu elipsy so semiosou  $a = 5$ , semiosou  $b = 3$ , a ohniskom v začiatku súradnicového systému.

**Riešenie.**

1. Excentricita:  $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$ .

2. Parameter:  $p = \frac{b^2}{a} = \frac{9}{5}$ .

3. Polárna rovnica:

$$r = \frac{9/5}{1 + \frac{4}{5} \cos \theta} = \frac{9}{5 + 4 \cos \theta}.$$

□

### Príklad 5.3.2: Parabola

Nech je daná parabola s vrcholom v bode  $V(0, 0)$  a ohniskom  $F(c, 0)$ ,  $c > 0$ . Nájdime jej polárnu rovnicu.

**Riešenie.**

1. Pre parabolu je  $e = 1$ , parameter  $p = 2c$ .

2. Polárna rovnica:

$$r = \frac{2c}{1 + \cos \theta}.$$

3. Ak  $c = 3$ , potom

$$r = \frac{6}{1 + \cos \theta}.$$

□

### Príklad 5.3.3: Hyperbola

Rozhodnime polárnu rovnicu hyperboly s hlavnou osou na osi  $x$ , semiosou  $a = 4$ , semiosou  $b = 3$ .

**Riešenie.**

1. Excentricita:  $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{9}{16}} = \frac{5}{4}$ .

2. Parameter:  $p = \frac{b^2}{a} = \frac{9}{4}$ .

3. Polárna rovnica (so znamienkom  $-$  pre vetvu v smere osi):

$$r = \frac{9/4}{1 - \frac{5}{4} \cos \theta} = \frac{9}{4 - 5 \cos \theta}.$$

□

**Didaktická poznámka.** Polárne rovnice sú mimoriadne vhodné pre interaktívne vizualizácie. V GeoGebre možno meniť excentricitu  $e$  a sledovať prechody medzi elipsou, parabolou a hyperbolou. Vo fyzike sa tento zápis používa na opis orbit planét a komét.

## Cvičenie

### I. Identifikácia a klasifikácia kuželosečiek

1. Určte typ kuželosečky a jej základné vlastnosti pomocou veľkého a malého diskriminantu:

(a)  $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$

(b)  $x^2 - 4y^2 - 2x + 8y + 1 = 0$

(c)  $9x^2 + 4y^2 - 36 = 0$

2. Rozhodnite, či sú nasledujúce kuželosečky regulárne alebo singulárne:

(a)  $x^2 - 2xy + y^2 = 0$

(b)  $x^2 + 4y^2 + 2x - 4y + 3 = 0$

(c)  $x^2 + 2xy + y^2 + x + y = 0$

3. Kuželosečka je daná rovnicou

$$3x^2 + 2xy + 2y^2 - 12x - 4y + 4 = 0.$$

- (a) Vypočítajte diskriminant kvadratickej formy a určte typ kuželosečky.

- (b) Nájdite jej stred.

4. Rozhodnite o polohe kuželosečky vzhľadom na súradnicovú sústavu:

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y + 9 = 0$$

Určte stred a polomer kuželosečky, ak ide o kružnicu.

5. Pre ktoré hodnoty parametra  $k$  je rovnica

$$x^2 + kxy + y^2 - 2x + 2y - 3 = 0$$

- (a) elipsa,

- (b) parabola,

- (c) hyperbola?

6. Určte typ kuželosečky a jej stred:

$$4x^2 + 9y^2 - 24x + 36y + 36 = 0$$

7. Rozhodnite, či je kuželosečka daná rovnicou

$$x^2 - 4xy + 4y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$$

degenerovaná. Ak áno, určte typ degenerácie.

8. Vyhľadajte v zbierke *Kopka–Tichý: Analytická geometrie* príklad s podobnou úlohou a vyriešte ho.

## 5.4 Cvičenie

### II. Transformácia na štandardný tvar a výpočty parametrov

1. Transformujte na štandardný tvar a určte parametre kuželoščky:

$$x^2 - 6x + y^2 + 4y - 3 = 0$$

2. Prevedte na štandardný tvar:

$$4x^2 + 3xy + 4y^2 - 12x - 12y + 9 = 0$$

Nájdite stred, osi a dĺžky poloosí.

3. Elipsa je daná rovnicou

$$9x^2 + 16y^2 - 36x + 64y + 4 = 0$$

- (a) Určte súradnice stredu elipsy.  
(b) Transformujte rovnicu na štandardný tvar.

4. Transformujte nasledujúcu rovnicu hyperboly a určte asymptoty:

$$x^2 - xy - y^2 - 2x + 4y - 1 = 0$$

5. Určte štandardný tvar paraboly:

$$x^2 + 2x - 4y - 1 = 0$$

a vypočítajte súradnice ohniska a rovnicu riadiacej priamky.

6. Transformujte rovnicu na štandardný tvar a určte excentricitu:

$$x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 2y = 0$$

7. Vypočítajte uhol otočenia súradnicovej sústavy, ktorým odstránite zmiešaný člen z rovnice kuželoščky:

$$2x^2 + 3xy + 2y^2 - 4 = 0$$

8. Transformujte na štandardný tvar a určte typ kuželosečky:

$$x^2 + xy + y^2 - 5x + 3y = 0$$

9. Zistite, či je nasledujúca rovnica regulárna alebo singulárna a upravte ju na štandardný tvar:

$$x^2 - 4xy + 4y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$$

10. Zo zbierky *Effa–Novotný: Úlohy z analytickej geometrie* vyberte úlohu na transformáciu kuželosečky so zmiešaným členom a riešte ju pomocou postupu z prednášky.

# Kapitola 6

## Záver

Kuželosečky predstavujú jeden z najkrajších príkladov prepojenia algebry a geometrie. V tejto učebnici sme ukázali, ako je možné ich skúmať z viacerých uhlov pohľadu – od klasického afinného a euklidovského prístupu, cez homogénne súradnice, až po projektívnu geometriu, ktorá poskytuje elegantný jednotiaci rámec.

Spojením analytických metód s vizualizáciou a dynamickými geometrickými systémami sa z kuželosečiek stáva nielen téma vysokoškolskej matematiky, ale aj priestor pre objavovanie, tvorivosť a rozvoj geometrickej intuície. Veríme, že text podnieti študentov a učiteľov k hlbšiemu záujmu o geometriu a ukáže im, že matematika nie je len súborom postupov, ale aj estetickým a konštruktívnym jazykovým nástrojom na opis sveta okolo nás.

Do budúcnosti zostáva veľkým potenciálom prepojenie týchto poznatkov s modernými informatickými metódami, ako je počítačová vizualizácia, symbolické výpočty či výučbové prostredia umožňujúce interaktívne modelovanie a experimentovanie s geometrickými objektmi.



# Bibliografia

- [1] Baltus, Ch., (2020). *Collineations and Conic Sections: An Introduction to Projective Geometry in its History*, Springer, ISBN 978-3-030-46677-3, doi 10.1007/978-3-030-46678-0
- [2] Belan, A., (2009). *Analytická geometria pre tých, ktorí jej potrebujú rozumieť*. Učebnica pre Gymnázia. EQUILIBRIA, Košice. EAN: 9788081432149. Dostupné [Tu](#).
- [3] Billich, M., Trenkler, M. (2006). *Zbierka úloh z analytickej geometrie*. Pedagogická fakulta Katolíckej univerzity v Ružomberku. Ružomberok 2006. ISBN 80-8084-113-6.
- [4] Brajerčík, J., Demko, M. (2018). *Matematika pre študentov prírodovedných odborov*. Prešov: Univerzitná knižnica PU.
- [5] Bydžovský, B.(1946). *Úvod do analytickej geometrie*. Vyd. 1. V Praze: Jednota československých matematiků a fyziků, 1946. 432 s. Knihovna spisů matematických a fyzikálních, sv. 8.
- [6] Čech, E., (1952). *Základy analytickej geometrie*. 2. díl (Czech) [Foundations of analytic geometry. 2]. Přírodovědecké vydavatelství, Praha. Dostupné [Tu](#).
- [7] Čížmár, J. (1984). *Grupy geometrických transformácií*. Bratislava: Alfa, 1984. ISBN (Brož.). Dostupné [Tu](#).
- [8] Descartes, R. (1954). *The Geometry of René Descartes*. (transl. D. E. Smith & M. L. Latham). Dover Publications. (Pôvodné dielo publikované 1637).
- [9] Duplák, J. (2004). *Afinná a Euklidovská geometria*. Prešov: FHPV PU, Katedra matematiky.
- [10] Věra Effenberger, V.,. (2007). *Kuželosečky*. Diplomová práca. Katedra didaktiky matematiky Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze. Dostupné [Tu](#).
- [11] Hanzel, P., Voštinár, P.,. (2025). *afinná ....* Fakulta prírodných vied UMB, ... Dostupné [Tu](#).

- [12] Haviar, M. (2000). *Algebra III. Lineárna algebra*. Pedagogická fakulta UMB, skriptá. Dostupné Tu.
- [13] Hašek, R. (2020). *Lineární algebra a geometrie*. Pedagogická fakulta JU, Č. Budějovice.
- [14] Hvidsten, M. (2016). *Exploring Geometry (2nd ed.)*. Chapman Hall/CRC. ISBN978-1498760805.  
kobza
- [15] Chalmoviansky, P. (2010). *Geometria afinných zobrazení euklidovských priestorov*. Dostupné Tu.
- [16] Chodorová, M. (2013). *Projektivní geometrie*. Univerzita Palackého v Olomouci. ISBN 978-80-244-4000-2. Dostupné na [https://kag.upol.cz/mdg/texty/Projektivni\\_geometrie.pdf](https://kag.upol.cz/mdg/texty/Projektivni_geometrie.pdf).
- [17] Janyška, J., Sekaninová, A. (2001) *Analytická teorie kuželoseček a kvadrik*. Masarykova univerzita 1996, 2. vydání 2001: Evropsky sociální fond a státního rozpočtu ČR. ISBN 80-210-2604-9. Dostupné Tu.
- [18] Kvapilová, B. (2020). *Sbírka řešených úloh z analytické geometrie*. MFF Univerzita Karlova Praha. Bakalárska práca. Dostupné Tu.
- [19] Monoszová, G. (2010–2012). *Analytická geometria I–III*. FPV UMB, Banská Bystrica. [Kapitoly I–III.
- [20] Plichtová, P. (2025) *Afinita a kolineace*. Univerzita Karlova v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta. DIPLOMOVÁ PRÁCE. Dostupné Tu.
- [21] Solčan, Š. (2013). *Projektívna geometria I*. FMFI UK Bratislava. ISBN 978-80-8147-051-6. EAN 9788081470516. Dostupné Tu.
- [22] Vranková, E. (2004). *Geometria 2 – Analytická geometria lineárnych útvarov*. Trnavská univerzita v Trnave. ISBN 978-80-8082-681-9.
- [23] Zlatoš, P. (2011). *Lineárna algebra a geometria*. Marenčin PT, Bratislava 2011. ISBN 9788081141119. Dostupné Tu.  
Internetové zdroje
- [24] World of mathematics, A Wolfram Web Resource, <http://mathworld.wolfram.com/>, WolframAlpha – computational knowledge engine, <http://www.wolframalpha.com/>.