

Aritmetické a geometrické postupnosti

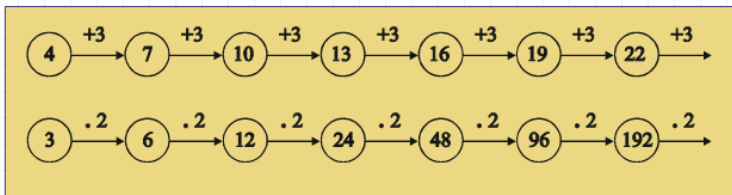
Jedna zaujímavá funkcionálna rovnica

Pavol Hanzel
Fakulta prírodných vied UMB

- Aritmetické a geometrické postupnosti a jedna zaujímavá funkcionálna rovnica.
- Spracované podľa prezentácie profesora Cihlářa z Ústi nad Labem.

Aritmetické a geometrické postupnosti

- Ako sa vytvárajú tieto postupnosti?
- Stačí poznať prvý člen a “pravidlo tvorby”:
 - Pri aritmetickej postupnosti sa neustále pripočítava isté číslo.
 - Pri geometrickej postupnosti sa neustále násobí istým číslom.



Obr.: Vytváranie postupnosti

Konštrukcia zaujímavej funkcie

- Vytvorme funkciu, kde hodnoty nezávislej premennej tvoria aritmetickú postupnosť a im zodpovedajúce hodnoty závislej premennej tvoria geometrickú postupnosť.
- Napríklad definujme funkciu $f(x)$:

$$x : 1, 2, 3, 4, \dots$$

$$f(x) : 2, 4, 8, 16, \dots$$

- Aké vlastnosti má táto funkcia?

Kľúčová vlastnosť tejto funkcie

- Zamerajme sa na to, ako získať hodnotu $f(x + y)$, ak poznáme funkčné hodnoty $f(x)$ a $f(y)$.

Kľúčová vlastnosť tejto funkcie

- Zamerajme sa na to, ako získať hodnotu $f(x + y)$, ak poznáme funkčné hodnoty $f(x)$ a $f(y)$.
- Napríklad:
 $x = 1, y = 3 : f(1 + 3) = f(4) = 16, f(1) = 2, f(3) = 8.$

Kľúčová vlastnosť tejto funkcie

- Zamerajme sa na to, ako získať hodnotu $f(x + y)$, ak poznáme funkčné hodnoty $f(x)$ a $f(y)$.

- Napríklad:

$$x = 1, y = 3 : f(1 + 3) = f(4) = 16, f(1) = 2, f(3) = 8.$$

$$x = 1, y = 3 : f(1 + 3) = f(4) = 16, f(1) = 2, f(3) = 8.$$

Klíčová vlastnosť tejto funkcie

- Zamerajme sa na to, ako získať hodnotu $f(x + y)$, ak poznáme funkčné hodnoty $f(x)$ a $f(y)$.
- Napríklad:

$$x = 1, y = 3 : f(1 + 3) = f(4) = 16, f(1) = 2, f(3) = 8.$$

$$x = 1, y = 3 : f(1 + 3) = f(4) = 16, f(1) = 2, f(3) = 8.$$

$$x = 1, y = 4 : f(1 + 4) = f(5) = 32, f(1) = 2, f(3) = 16.$$

Kľúčová vlastnosť tejto funkcie

- Zamerajme sa na to, ako získať hodnotu $f(x + y)$, ak poznáme funkčné hodnoty $f(x)$ a $f(y)$.
- Napríklad:
 $x = 1, y = 3 : f(1 + 3) = f(4) = 16, f(1) = 2, f(3) = 8.$
 $x = 1, y = 3 : f(1 + 3) = f(4) = 16, f(1) = 2, f(3) = 8.$
 $x = 1, y = 4 : f(1 + 4) = f(5) = 32, f(1) = 2, f(3) = 16.$
- Zovšeobecnenie: $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$.

- Rovnicu $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ spĺňa napríklad funkcia $f(x) = 2^x$.
- Prečo? Pretože platí:

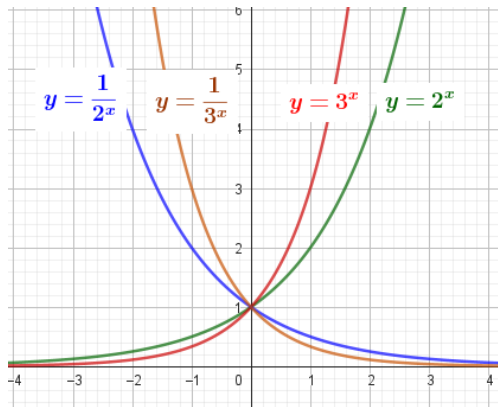
$$f(x + y) = 2^{x+y} = 2^x \cdot 2^y = f(x) \cdot f(y).$$

- Rovnicu $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ spĺňa napríklad funkcia $f(x) = 2^x$.
- Prečo? Pretože platí:

$$f(x + y) = 2^{x+y} = 2^x \cdot 2^y = f(x) \cdot f(y).$$

- Dokážete nájsť ďalšie analogické riešenia?
- Všeobecné riešenia sú všetky funkcie tvaru $f(x) = a^x$.

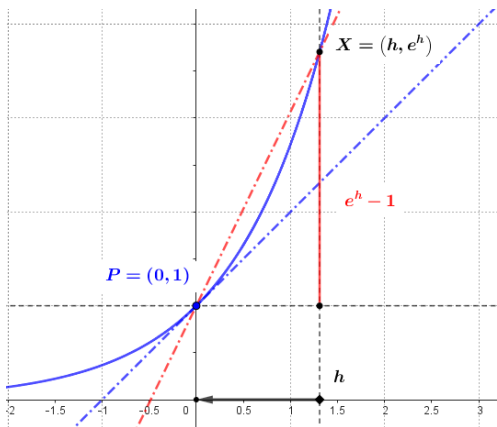
Grafy exponenciálních funkcí



Obr.: Grafy funkcí

Dotyčnica ku grafu funkcie e^x

Smernicu dotyčnice v bode P môžeme určiť ako limitu smernice priamky určenej bodom P a ďalším bodom $X = [h; e^h]$ na grafe funkcie $y = e^x$ pre $h \rightarrow 0$.



Obr.: Dotyčnica v bode $[0; 1]$

Exponenciála a jej derivácia

- Pre malé hodnoty h sa hodnota e^h približuje k $1 + h$ (z definície exponenciálnej funkcie ako limity).

Exponenciála a jej derivácia

- Pre malé hodnoty h sa hodnota e^h približuje k $1 + h$ (z definície exponenciálnej funkcie ako limity).
- To môžeme zapísať ako:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

Exponenciála a jej derivácia

- Pre malé hodnoty h sa hodnota e^h približuje k $1 + h$ (z definície exponenciálnej funkcie ako limity).
- To môžeme zapísať ako:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

- Odtiaľ plynie: exponenciála je rovná svojej derivácii.

$$(e^x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x(e^h - 1)}{h} = e^x.$$

Tvrdenie

Dotyčnica ku grafu funkcie $y = e^x$ v bode $[0, 1]$ zvierá s osou x uhol o veľkosti 45° .

Dôkaz. Využitím vlastnosti derivácie $(e^x)' = e^x$ smernicu dotyčnice v bode $(0, 1)$ môžeme vypočítať aj tak, keď dosadíme $x = 0$ do derivácie:

$$y'(0) = e^0 = 1.$$

Smernica dotyčnice je teda $k = 1$.

Uhol α medzi dotyčnicou a osou x je daný vzťahom:

$$\tan(\alpha) = k,$$

keďže $k = 1$, platí:

$$\tan(\alpha) = 1,$$

tak uhol α , pre ktorý je $\tan(\alpha) = 1$, je:

$$\alpha = 45^\circ$$

Tým je dôkaz ukončený.

Tvrdenie

Funkcia $y = e^x$ sa dá zapísať ako:

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

kde $k! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k$ (pričom $0! = 1$).

Eulerovo číslo e ako limita postupnosti (zložené úročenie):

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Číslo e je vyjadritelné postupnosťou:

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right),$$

kde $k! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k$ (pričom $0! = 1$).

Racionálnu aproximáciu čísla e môžeme počítať zo vzťahu:

$$e_{n-1} + \frac{1}{n!} = e_n.$$

Postupne pre $1, 2, \dots$ získame

$$e_1 = \frac{1 \cdot 1 + 1}{1} = \frac{2}{1} = 2.000$$

$$e_2 = \frac{2 \cdot 2 + 1}{2 \cdot 1} = \frac{5}{2} = 2.500$$

$$e_3 = \frac{3 \cdot 5 + 1}{3 \cdot 2} = \frac{16}{6} = 2.667$$

...

Prečo je exponenciálna funkcia dôležitá?

- Prepája aritmetické a geometrické postupnosti (napr. úroky).

Prečo je exponenciálna funkcia dôležitá?

- Prepája aritmetické a geometrické postupnosti (napr. úroky).
- Vyjadruje taký rast veličín, pri ktorom sú prírastky úmerné okamžitej hodnote veličiny (napr. rast populácie).

Prečo je exponenciálna funkcia dôležitá?

- Prepája aritmetické a geometrické postupnosti (napr. úroky).
- Vyjadruje taký rast veličín, pri ktorom sú prírastky úmerné okamžitej hodnote veličiny (napr. rast populácie).
- Môže popisovať kruhový (a teda aj kmitavý) pohyb (napr. pri striedavých prúdoch)

Problém

Ako sa odvodí formula, o ktorej väčšina matematikov tvrdí, že je „najkrajšou matematickou formulou“?

Problém

Ako sa odvodí formula, o ktorej väčšina matematikov tvrdí, že je „najkrajšou matematickou formulou“?

Musíme niečo vedieť o goniometrických funkciách. Podobnými úvahami ako pri exponenciále sa definujú funkcie sínus a kosínus:

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Ďalej musíme niečo vedieť o komplexnom čísle i . Základnou vlastnosťou imaginárnej jednotky je: $i^2 = -1$.

Ďalej musíme niečo vedieť o komplexnom čísle i . Základnou vlastnosťou imaginárnej jednotky je: $i^2 = -1$.

Z toho potom vyplýva, že:

$$i^3 = -i$$

$$i^4 = 1$$

$$i^5 = i$$

$$i^6 = -1$$

Najkrajšia formula

Teraz už môžeme odvodiť jeden dôležitý vzťah. Dosadením ix do vzťahu

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} =$$

Najkrajšia formula

Teraz už môžeme odvodiť jeden dôležitý vzťah. Dosadením ix do vzťahu

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} =$$

dostaneme:

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - i\frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} =$$

Najkrajšia formula

Teraz už môžeme odvodiť jeden dôležitý vzťah. Dosadením ix do vzťahu

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} =$$

dostaneme:

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - i\frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} =$$

odkiaľ

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} \dots\right) + i \left(x - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \dots\right)$$

Najkrajšia formula

Teraz už môžeme odvodiť jeden dôležitý vzťah. Dosadením ix do vzťahu

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} =$$

dostaneme:

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - i\frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} =$$

odkiaľ

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} \dots\right) + i \left(x - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \dots\right)$$

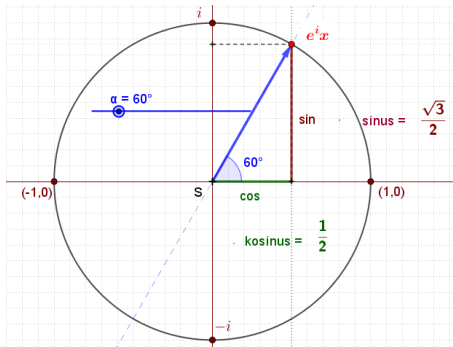
odkiaľ

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

Najkrajšia formula

Čo vzťah $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ znamená a čo z neho vyplýva?

Výraz e^{ix} je teda tzv. komplexnou jednotkou.



Obr.: Komplexná jednotka

Pre $x = \pi$ dostaneme najkrajšiu formulu na svete: $e^{i\pi} = -1$.

- Predstavili sme exponenciálnu funkciu $y = a^x$ a jej základné vlastnosti. Pomocou význačnej hodnoty derivácie sme z nich vybrali exponenciálu.

- Predstavili sme exponenciálnu funkciu $y = a^x$ a jej základné vlastnosti. Pomocou význačnej hodnoty derivácie sme z nich vybrali exponenciálu.
- Ukázali sme špeciálnu funkciu $y = e^x$ a jej význam. Ukázali sme niektoré pozoruhodné vlastnosti iracionálneho čísla e .

- Predstavili sme exponenciálnu funkciu $y = a^x$ a jej základné vlastnosti. Pomocou význačnej hodnoty derivácie sme z nich vybrali exponenciálu.
- Ukázali sme špeciálnu funkciu $y = e^x$ a jej význam. Ukázali sme niektoré pozoruhodné vlastnosti iracionálneho čísla e .
- Preskúmali sme vlastnosti čísla e a odhalili sme

„najkrajšiu formulu na svete“