

1 Kladná ortonormálna báza

Kladná ortonormálna báza je špeciálny typ bázy vektorového priestoru, ktorá spĺňa dve hlavné podmienky:

1. **Ortonormalita** – Báza $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ je ortonormálna, ak:
 - Vektory sú **navzájom ortogonálne**, t. j. $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ pre všetky $i \neq j$.
 - Každý vektor má jednotkovú dĺžku, t. j. $\|e_i\| = 1$.
2. **Kladnosť (orientácia)** – Báza je kladná (alebo pravotočivá), ak má rovnakú orientáciu ako štandardná báza priestoru.
 - To znamená, že determinant matice prechodu zo štandardnej bázy do tejto bázy je kladný ($\det P > 0$).
 - V \mathbb{R}^3 to znamená, že ak použijeme pravidlo pravej ruky na vektory, zodpovedajú pravotočivej súradnicovej sústave.

Použitie:

- V analytickej geometrii a fyzike sa kladné ortonormálne bázy používajú na zachovanie orientácie pri transformáciách.
- V kvantovej mechanike alebo numerických výpočtoch sa ortonormálne bázy využívajú na jednoduchšie výpočty (napr. diagonalizácia operátorov).

2 Determinant matice prechodu

2.1 Definícia matice prechodu

Nech máme dve bázy vektorového priestoru:

- Pôvodnú bázu $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$
- Novú bázu $\mathcal{B}' = \{b'_1, b'_2, \dots, b'_n\}$

Matica prechodu P z bázy \mathcal{B} do bázy \mathcal{B}' je matica, ktorej stĺpce sú súradnice nových báзовých vektorov vyjadrené v pôvodnej báze:

$$P = \left[\begin{array}{c|c|c|c} | & | & | & | \\ [b'_1]_{\mathcal{B}} & [b'_2]_{\mathcal{B}} & \dots & [b'_n]_{\mathcal{B}} \\ | & | & | & | \end{array} \right]$$

kde $[b'_i]_{\mathcal{B}}$ označuje súradnice vektora b'_i vzhľadom na bázu \mathcal{B} .

2.2 Interpretácia determinantu matice prechodu

Nech determinant matice prechodu je daný ako:

$$\det P$$

- Ak $\det P > 0$, nová báza má rovnakú orientáciu ako pôvodná (kladná báza).
- Ak $\det P < 0$, nová báza má opačnú orientáciu (zámena pravotočivej a ľavotočivej bázy).
- Ak $\det P = 0$, matica nie je regulárna, čo znamená, že vektory v novej báze nie sú lineárne nezávislé.

2.3 Príklad výpočtu determinantu matice prechodu

Majme v \mathbb{R}^2 dve bázy:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\mathcal{B}' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Matica prechodu P má ako stĺpce súradnice vektorov novej bázy vzhľadom na pôvodnú:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Výpočet determinantu:

$$\det P = (1 \cdot 1) - (-1 \cdot 1) = 1 + 1 = 2$$

Keďže $\det P > 0$, báza \mathcal{B}' má rovnakú orientáciu ako pôvodná báza \mathcal{B} .

Záver: Ak chceme určiť, či nová ortonormálna báza je kladná, stačí vypočítať determinant matice prechodu do nej a overiť, či je kladný.