

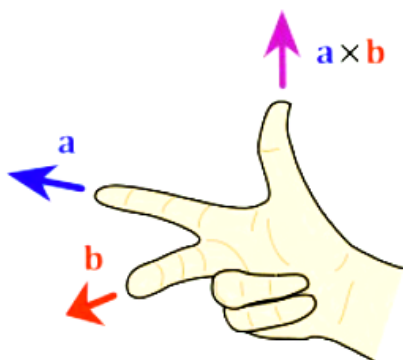
Vektorový súčin

Na rozdiel od skalárneho súčinu, vektorový súčin (po anglicky cross product) je definovaný len v troch rozmeroch. Matematická definícia je:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (a_1, a_2, a_3) \times (b_1, b_2, b_3) = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) \quad (1)$$

Výsledkom vektorového súčinu je vektor, ktorý je kolmý na oba vektory a jeho dĺžka je rovná obsahu štvoruholníka $((0, 0), \mathbf{A}, \mathbf{A} + \mathbf{B}, \mathbf{B})$. Existujú dva opačné vektory s takouto dĺžkou ($\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -(\mathbf{B} \times \mathbf{A})$).

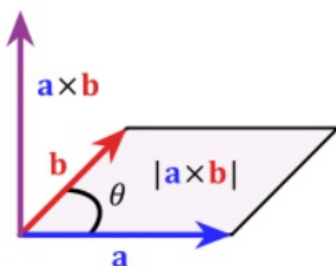
Ak chceme zistiť, ktorý z nich je výsledkom súčinu, použijeme pravidlo pravej ruky. Ukazovák ukazuje v smere prvého vektora, prostredník v smere druhého a palec bude ukazovať v smere vektorového súčinu. Špeciálne ak sú pôvodné vektory lineárne závislé (jeden je násobkom druhého), výsledkom vektorového súčinu je nula (t.j. vektor $(0, 0, 0)$).



Ak potrebujeme vektorovo vynásobiť dvojrozmerné vektory $\mathbf{A} = (a_1, a_2)$ a $\mathbf{B} = (b_1, b_2)$, jednoducho vektorovo vynásobíme trojrozmerné vektory \mathbf{A}' a \mathbf{B}' , ktoré majú prvé dve súradnice rovnaké ako \mathbf{A} a \mathbf{B} a tretiu súradnicu majú nulovú:

$$(a_1, a_2, 0) \times (b_1, b_2, 0) = (0, 0, a_1b_2 - a_2b_1) \quad (2)$$

Zaujímavá je orientovaná dĺžka výsledného vektora, čiže $a_1b_2 - a_2b_1$. Keď hovoríme o vektorovom súčine ako o čísle, máme na mysli práve túto hodnotu: $a_1b_2 - a_2b_1$



Opäť ním dokážeme zistiť niečo o uhle medzi vektormi.

$$\|\mathbf{A} \times \mathbf{B}\| = \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{B}\| \cdot \sin \theta \quad (3)$$

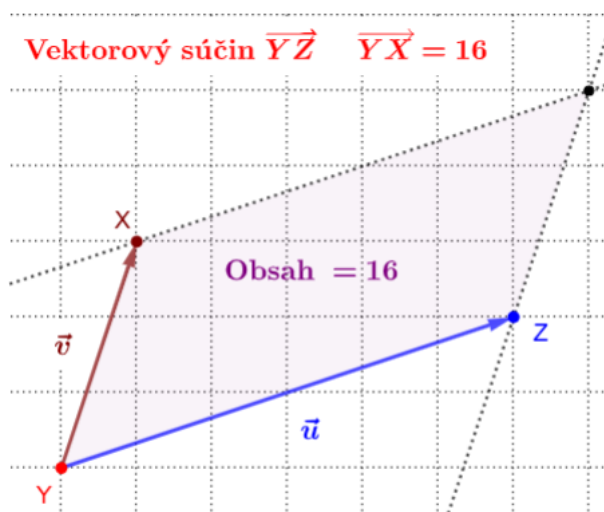
Ak sú vektory kolineárne, výsledok je 0. Ak je \mathbf{A} "naľavo od \mathbf{B} , ich vektorový súčin je kladný, a ak je \mathbf{A} "napravo od \mathbf{B} , je ich vektorový súčin záporný (čiže $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -(\mathbf{B} \times \mathbf{A})$). Vďaka tomu vieme zisťovať, či daný bod leží na danej priamke, či je bod vo vnútri konvexného n -uholníka, či sa dve úsečky pretínajú, či je bod vo vnútri ľubovoľného n -uholníka a mnoho ďalších vecí.

Príklady

Bod a priamka Máme daný bod X a priamku prechádzajúcu bodmi Y, Z a máme zistiť, či sa bod nachádza na priamke, naľavo od nej alebo napravo od nej (keď sa pozeráme v smere z Y do Z). Spočítame:

$$(\mathbf{Z} - \mathbf{Y}) \times (\mathbf{X} - \mathbf{Y}) \quad (4)$$

Ak vyjde 0, bod leží na priamke. Ak vyjde kladné číslo, bod X je naľavo, ak vyjde záporné číslo, bod je napravo. Otvorte si dynamický obrázok 1 Tu a pohybuje bodom X .



Obr. 1: $\vec{u} \times \vec{v}$

Bod a konvexný n -uholník Máme daný bod X a konvexný n -uholník s vrcholmi Y_1, \dots, Y_n a máme zistiť, či je bod vo vnútri n -uholníka. n -uholník je konvexný, ak má každý jeho vnútorný uhol menej ako 180° . Spočítame:

$$z_i = (\mathbf{Y}_{i+1} - \mathbf{Y}_i) \times (\mathbf{X} - \mathbf{Y}_i) \quad (5)$$

pričom $Y_{n+1} = Y_1$. Ak sú všetky hodnoty kladné alebo všetky záporné, tak je bod X vo vnútri.

Pretínanie úsečiek Máme dané dve úsečky XY a ZW a máme zistiť, či sa pretínajú. Overíme, či úsečka XY pretína priamku ZW a úsečka ZW pretína priamku XY . Overenie prvej podmienky spravíme napríklad tak, že sa pozrieme na vektorové súčiny:

$$(\mathbf{X} - \mathbf{Z}) \times (\mathbf{W} - \mathbf{Z}) \quad \text{a} \quad (\mathbf{Y} - \mathbf{Z}) \times (\mathbf{W} - \mathbf{Z}) \quad (6)$$

Tieto musia mať opačné znamienka, resp. ich súčin musí byť záporný.

Zdôvodneie.

Ak sa dve úsečky v rovine pretínajú, znamená to, že koncové body jednej úsečky ležia na opačných stranách druhej úsečky a naopak. To môžeme matematicky vyjadriť pomocou vektorového súčinu.

Nech máme dve úsečky AB a CD , kde:

$$\overrightarrow{AB} = B[b_x, b_y] - A[a_x, a_y], \quad \overrightarrow{CD} = D[d_x, d_y] - C[c_x, c_y].$$

Bod C leží na jednej strane úsečky AB a bod D na druhej strane práve vtedy, keď vektorové súčiny

$$(B - A) \times (C - A) \quad \text{a} \quad (B - A) \times (D - A)$$

majú opačné znamienka, teda ich súčin je záporný:

$$[(B - A) \times (C - A)] \cdot [(B - A) \times (D - A)] < 0.$$

Analogicky, ak body A a B ležia na opačných stranách úsečky CD , musí platiť:

$$[(D - C) \times (A - C)] \cdot [(D - C) \times (B - C)] < 0.$$

Ak sú obe nerovnosti splnené, úsečky sa pretínajú.

Bod a ľubovoľný n -uholník Máme daný bod X a ľubovoľný n -uholník s vrcholmi Y_1, \dots, Y_n a máme zistiť, či je bod vo vnútri n -uholníka. Ak je bod X vo vnútri, každá polpriamka, ktorá v ňom začína, pretína n -uholník nepárny počet krát. Ak je X vonku, tak je počet pretnutí vždy párny. Takže pomocou vektorového súčinu spočítame priesečníky nejakej polpriamky s hranami n -uholníka. Treba si však dávať pozor na prípady, kedy vrcholy n -uholníka ležia na priamke.

Obsah trojuholníka Máme daný trojuholník pomocou bodov A, B, C a chceme spočítať jeho obsah. Tu využijeme to, že dvojrozmerné vektory vieme preniesť do trojrozmerného priestoru pridaním nulových súradníc. Potom je výsledok:

$$\frac{\|(\mathbf{A} - \mathbf{C}) \times (\mathbf{B} - \mathbf{C})\|}{2} \tag{7}$$

Špeciálne, keď je jeden z bodov (povedzme C) nulovým $-(0, 0)$, tak výsledok je:

$$\frac{|a_1 b_2 - a_2 b_1|}{2} \tag{8}$$