1 Afinné zobrazenie určené obrazmi troch bodov

Príklad – Tri body.
Afinné zobrazenie f zobrazuje body

$$A[2,1], \quad B[3,0], \quad C[1,4]$$

do bodov

$$A'[1,6], \quad B'[1,9], \quad C'[3,1]$$

v tomto poradí.
Kam sa zobrazí bod $P[5,7]$, resp. bod $X[x,y]$?

Prevzaté z práce [CHP, 2010], cvičenie 28.

Riešenie

Body A, B, C nie sú kolineárne, preto určujú afinnú súradnicovú sústavu roviny.

Bod $P[5,7]$ vyjadríme ako afinnú kombináciu bodov A, B, C.
Existujú jednoznačne určené reálne čísla a, b, c také, že

$$P = aA + bB + cC, \qquad \boxed{a+b+c=1}. \tag{1}$$

Afinné zobrazenie zachováva afinné kombinácie bodov, preto pre obraz $P' = f(P)$ platí

$$P' = aA' + bB' + cC', \qquad a+b+c=1. \tag{2}$$

Sústavy vyplývajúce zo vzťahov (1) a (2) vyjadríme v maticovom tvare.

Pri riešení môžeme použiť kalkulátor **Matrix calculator**, ktorý je dostupný na stránke matrixcalc.org.

1. Matica vzorov

V homogénnych súradniciach dostaneme

$$\underbrace{\begin{pmatrix}5\\7\\1\end{pmatrix}}_{\mathbf{p}} = \underbrace{\begin{pmatrix}2&3&1\\1&0&4\\1&1&1\end{pmatrix}}_{M} \underbrace{\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\alpha}}.$$

Teda

$$\mathbf{p} = M\boldsymbol{\alpha}.$$

Matica vzorov × stĺpec koeficientov afinnej kombinácie.

2. Matica obrazov

Pre obraz bodu P platí

$$\underbrace{\begin{pmatrix}x'\\y'\\1\end{pmatrix}}_{\mathbf{p}'} = \underbrace{\begin{pmatrix}1&1&3\\6&9&1\\1&1&1\end{pmatrix}}_{M'} \underbrace{\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\alpha}}.$$

Teda

$$\mathbf{p}' = M'\boldsymbol{\alpha}.$$

Matica obrazov × stĺpec koeficientov afinnej kombinácie.

3. Určenie koeficientov

Z rovnice

$$\mathbf{p} = M\boldsymbol{\alpha}$$

dostaneme

$$\boldsymbol{\alpha} = M^{-1}\mathbf{p}.$$

Inverzná matica je

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 6 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Po dosadení

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 6 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ \frac{15}{2} \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}.$$

Teda

$$\boxed{a = -11, \qquad b = \frac{15}{2}, \qquad c = \frac{9}{2}.}$$

4. Určenie obrazu bodu

Dosadením do vzťahu (2) dostaneme

$$\mathbf{p}' = M'M^{-1}\mathbf{p}.$$

Matica obrazov × inverzná matica vzorov × súradnice zobrazovaného bodu

Po roznásobení matíc

$$M'M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Preto

$$\mathbf{p}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Porovnaním súradníc dostaneme

$$\boxed{P'[10, 6].}$$

Všeobecný bod roviny

Ak zvolíme bod $X[x, y]$, jeho obraz $X'[x', y']$ určíme zo vzťahu

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} x + y - 2 \\ 2x - y + 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Transformačné rovnice afinného zobrazenia
Porovnaním prvých dvoch súradníc dostaneme sústavu transformačných rovníc

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x + y - 2, \\ y' &= 2x - y + 3. \end{aligned}}$$

Dosadením súradníc bodu $P[5, 7]$ overíme, že jeho obrazom je bod $P'[10, 6]$.

Iný spôsob riešenia

Po dosadení súradníc do vzťahu (1) dostaneme

$$[5, 7] = a[2, 1] + b[3, 0] + c[1, 4].$$

Spolu s podmienkou $a+b+c = 1$ dostávame sústavu troch rovníc s tromi neznámymi:

$$\begin{aligned} 2a + 3b + c &= 5, \\ a + 4c &= 7, \\ a + b + c &= 1. \end{aligned}$$

Jej riešením je

$$a = -11, \qquad b = \frac{15}{2}, \qquad c = \frac{9}{2}.$$

Keďže afinné zobrazenie zachováva afinné kombinácie bodov, platí

$$P' = aA' + bB' + cC'.$$

Po dosadení vypočítame súradnice obrazu:

$$\begin{aligned} x(P') &= -11 + \frac{15}{2} + 3 \cdot \frac{9}{2} \\ &= 10, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(P') &= 6(-11) + 9 \cdot \frac{15}{2} + \frac{9}{2} \\ &= 6. \end{aligned}$$

Teda opäť

$$\boxed{P'[10, 6].}$$

GeoGebra a ďalšie úlohy
Riešenie v GeoGebre: Otvoriť applet.
Kompletné grafické riešenie afinného zobrazenia určeného obrazmi troch bodov: Otvoriť grafické riešenie.
Riešte úlohu 3.2 zo zbierky [BILL].
Pri riešení môžete využiť aj applet Obraz troch bodov.

2 Ťažisko trojuholníka ako afinné zobrazenie

Príklad – Ťažisko trojuholníka.
Nech A, B sú dva pevné body afinnnej roviny $\mathbb{E}_2$.
Premennému bodu $X \in \mathbb{E}_2$ priraďme ťažisko trojuholníka ABX:

$$f(X) = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}X.$$

Ukážte, že takto definované zobrazenie $f : \mathbb{E}_2 \to \mathbb{E}_2$ je afinným zobrazením.

Riešenie

Nech body A, B majú súradnice

$$A[a_1, a_2], \qquad B[b_1, b_2].$$

Pre ľubovoľný bod $X[x, y]$ dostaneme

$$f(X) = \left[\frac{a_1 + b_1 + x}{3}, \frac{a_2 + b_2 + y}{3}\right].$$

Transformačné rovnice sú

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= \frac{1}{3}x + \frac{a_1 + b_1}{3}, \\ y' &= \frac{1}{3}y + \frac{a_2 + b_2}{3}. \end{aligned}}$$

Tieto rovnice majú tvar

$$\mathbf{x}' = L\mathbf{x} + \mathbf{t},$$

kde

$$L = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{t} = \begin{pmatrix} \frac{a_1+b_1}{3} \\ \frac{a_2+b_2}{3} \end{pmatrix}.$$

Zobrazenie f je teda afinné.

Navyše, ak S označuje stred úsečky AB, potom

$$S = \frac{1}{2}(A + B)$$

a

$$f(X) = S + \frac{1}{3}(X - S).$$

Zobrazenie je preto rovnoľahlosť so stredom S a koeficientom $\frac{1}{3}$.

Dynamická interpretácia
Pozrite si dôkaz a geometrickú interpretáciu tohto afinného zobrazenia v GeoGebre:
Ťažisko trojuholníka – GeoGebra.