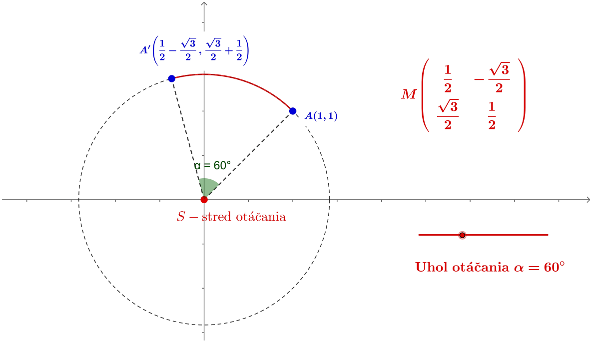
Otáčanie - tvrdenie

Otáčanie $\rho_{(S,\alpha)}$ so stredom $S\,[0,0]$ zobrazuje bod $A\,[x,y]$ do

$$A'\,[(x.\cos\ \alpha - y.\sin\ \alpha)\,,(x.\cos\ \alpha + y.\sin\ \alpha)]$$



Applet otvoríte Tu

Využitím polárnych súradníc dokážeme toto tvrdenie.

Tvrdenie

Tvrdenie

Nech je daný bod $A[x, y]$, potom pre bod $A'[x', y'] = \rho_{(S,\alpha)}(A)$ platí:

$$A' \left(x \cos(\alpha) - y \sin(\alpha),\ x \sin(\alpha) + y \cos(\alpha)\right).$$

Dôkaz:

1. **Polárne súradnice:** Bod $A(x, y)$ vyjadríme ako:

$$x = r\cos(\theta), \quad y = r\sin(\theta),$$

kde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ a θ je uhol medzi $\overrightarrow{OA}$ a osou x.

Dôkaz:

1. **Polárne súradnice:** Bod $A(x, y)$ vyjadríme ako:

$$x = r\cos(\theta), \quad y = r\sin(\theta),$$

kde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ a θ je uhol medzi $\overrightarrow{OA}$ a osou x.

2. **Otáčanie o uhol α:** Po otočení bude nový uhol bodu:

$$\theta' = \theta + \alpha.$$

Nové súradnice v polárnych súradniciach:

$$x' = r\cos(\theta + \alpha), \quad y' = r\sin(\theta + \alpha).$$

Dôkaz:

1. **Polárne súradnice:** Bod $A(x, y)$ vyjadríme ako:

$$x = r\cos(\theta), \quad y = r\sin(\theta),$$

kde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ a θ je uhol medzi $\overrightarrow{OA}$ a osou x.

2. **Otáčanie o uhol α:** Po otočení bude nový uhol bodu:

$$\theta' = \theta + \alpha.$$

Nové súradnice v polárnych súradniciach:

$$x' = r\cos(\theta + \alpha), \quad y' = r\sin(\theta + \alpha).$$

3. **Využijeme vzorce pre súčet uhlov:**

$$\cos(\theta + \alpha) = \cos(\theta)\cos(\alpha) - \sin(\theta)\sin(\alpha), \tag{1}$$

$$\sin(\theta + \alpha) = \sin(\theta)\cos(\alpha) + \cos(\theta)\sin(\alpha). \tag{2}$$

Dôkaz - pokračovanie

Po dosadení vzťahov (1) a (2) do polárnych súradníc dostaneme:

$$x' = r[\cos(\theta)\cos(\alpha) - \sin(\theta)\sin(\alpha)],$$
$$y' = r[\sin(\theta)\cos(\alpha) + \cos(\theta)\sin(\alpha)].$$

Dôkaz - pokračovanie

Po dosadení vzťahov (1) a (2) do polárnych súradníc dostaneme:

$$x' = r[\cos(\theta)\cos(\alpha) - \sin(\theta)\sin(\alpha)],$$
$$y' = r[\sin(\theta)\cos(\alpha) + \cos(\theta)\sin(\alpha)].$$

Návrat k karteziánskym súradniciam

Keďže $x = r\cos(\theta)$ a $y = r\sin(\theta)$, dostaneme:

$$x' = x\cos(\alpha) - y\sin(\alpha), \quad y' = x\sin(\alpha) + y\cos(\alpha).$$

Dôkaz - pokračovanie

Po dosadení vzťahov (1) a (2) do polárnych súradníc dostaneme:

$$x' = r[\cos(\theta)\cos(\alpha) - \sin(\theta)\sin(\alpha)],$$
$$y' = r[\sin(\theta)\cos(\alpha) + \cos(\theta)\sin(\alpha)].$$

Návrat k karteziánskym súradniciam

Keďže $x = r\cos(\theta)$ a $y = r\sin(\theta)$, dostaneme:

$$x' = x\cos(\alpha) - y\sin(\alpha), \quad y' = x\sin(\alpha) + y\cos(\alpha).$$

Záver:

Po otočení bodu $A(x, y)$ o uhol α okolo stredu $S(0, 0)$:

$$A'\left(x\cos(\alpha) - y\sin(\alpha),\ x\sin(\alpha) + y\cos(\alpha)\right).$$