

Afinná geometria

Bilineárne formy

Pavol Hanzel
Fakulta prírodných vied UMB

Definícia

Bilineárna forma f je daná vzťahom

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sum_{i,j=1}^n x_i a_{ij} y_j \\ &= a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + \cdots + a_{1n}x_1y_n + \\ &\quad a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2 + \cdots + a_{2n}x_2y_n + \\ &\quad \cdots \\ &\quad a_{n1}x_ny_1 + a_{n2}x_ny_2 + \cdots + a_{nn}x_ny_n, \end{aligned}$$

Definícia

Bilineárna forma f je daná vzťahom

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sum_{i,j=1}^n x_i a_{ij} y_j \\ &= a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + \cdots + a_{1n}x_1y_n + \\ &\quad a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2 + \cdots + a_{2n}x_2y_n + \\ &\quad \cdots \\ &\quad a_{n1}x_ny_1 + a_{n2}x_ny_2 + \cdots + a_{nn}x_ny_n, \end{aligned}$$

Maticou bilineárnej formy f vzhľadom na bázu M , chápeme maticu

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Definícia

Bilineárna forma je symetrická, ak $f(x, y) = f(y, x)$, t. j. ak má symetrickú maticu.

Definícia

Bilineárna forma je symetrická, ak $f(x, y) = f(y, x)$, t. j. ak má symetrickú maticu.

Každú symetrickú maticu A možno nad poľom P , kde $\text{char } P \neq 2$ (číslo $2 = 1+1$ nie je nulový prvok poľa), previesť na diagonálnu maticu D .

Definícia

Bilinéárna forma je symetrická, ak $f(x, y) = f(y, x)$, t. j. ak má symetrickú maticu.

Každú symetrickú maticu A možno nad poľom P , kde $\text{char } P \neq 2$ (číslo $2 = 1+1$ nie je nulový prvok poľa), previesť na diagonálnu maticu D .

Danú maticu A prevedieme na diagonálnu pomocou symetrickej úpravy: každá úprava musí byť prevedená zároveň na riadky a aj na stĺpce.

Príklad

Upravte symetrickú maticu A na diagonálnu maticu D .

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\sim} IV-I$$

Príklad

Upravte symetrickú maticu A na diagonálnu maticu D .

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \underset{\sim}{IV-I} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Príklad

Upravte symetrickú maticu A na diagonálnu maticu D .

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\overset{IV-I}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\underset{\sim}{\overset{-3IV+2III}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Príklad

Upravte symetrickú maticu A na diagonálnu maticu D .

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\overset{IV-I}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\overset{-3IV+2III}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Diagonálny tvar matice bilineárnej formy sa nazýva **polárny tvar**.
Ak má (diagonálna) matica na hlavnej diagonále
najprv 1, potom -1 a nakoniec 0,
tak hovoríme, že **matica má normálny tvar**.

Diagonálny tvar matice bilineárnej formy sa nazýva **polárny tvar**.

Ak má (diagonálna) matica na hlavnej diagonále

najprv 1, potom -1 a nakoniec 0,

tak hovoríme, že **matica má normálny tvar**.

Počet jednotiek v normálnom tvare označme p , počet mínus jednotiek označme n a počet núl d .

Trojici (p, n, d) hovoríme **signatúra bilineárnej formy**.

Diagonálny tvar matice bilineárnej formy sa nazýva **polárny tvar**.

Ak má (diagonálna) matica na hlavnej diagonále

najprv 1, potom -1 a nakoniec 0,

tak hovoríme, že **matica má normálny tvar**.

Počet jednotiek v normálnom tvare označme p , počet mínus jednotiek označme n a počet núl d .

Trojici (p, n, d) hovoríme **signatúra bilineárnej formy**.

Bilineárna forma je **pozitívne definitná**, ak jej signatúra má tvar $(p, 0, 0)$, kde $p \neq 0$.

Bilineárna forma a Skalárny súčin

Vlastnosti skalárneho súčinu (symetria, linearita, pozitívnosť)

$$\forall a, b \in V : \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$$

$$\forall a, b, c \in V : (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$$

$$\forall a, b \in V, \forall r \in R : (r \cdot \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = r(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$$

$$\forall a \in V : \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} > 0$$

má pozitívne definitnú symetrickú bilineárnu formu na reálnom priestore.

Tvrdenie

Skalárny súčin je symetrická pozitívne definitná bilineárna forma.

Transformácia polárnej matice

Pri zisťovaní, či nejaká bilineárna forma predstavuje skalárny súčin skúmame:

- 1 Symetriu matice A bilineárnej formy f . To je zrejmé zo zápisu prvkov matice - symetria voči hlavnej diagonále.

Transformácia polárnej matice

Pri zisťovaní, či nejaká bilineárna forma predstavuje skalárny súčin skúmame:

- 1 Symetriu matice A bilineárnej formy f . To je zrejmé zo zápisu prvkov matice - symetria voči hlavnej diagonále.
- 2 Matica A je symetrická. Nájdite jej normálny tvar pomocou **symetrických úprav!**

Transformácia polárnej matice

Pri zisťovaní, či nejaká bilineárna forma predstavuje skalárny súčin skúmame:

- 1 Symetriu matice A bilineárnej formy f . To je zrejmé zo zápisu prvkov matice - symetria voči hlavnej diagonále.
- 2 Matica A je symetrická. Nájdite jej normálny tvar pomocou **symetrických úprav!**
- 3 Signatúra pozitívne definitnej formy musí byť $(p, 0, 0)$, $p \neq 0$.

Pri zisťovaní, či nejaká bilineárna forma predstavuje skalárny súčin skúmame:

- 1 Symetriu matice A bilineárnej formy f . To je zrejmé zo zápisu prvkov matice - symetria voči hlavnej diagonále.
- 2 Matica A je symetrická. Nájdite jej normálny tvar pomocou **symetrických úprav!**
- 3 Signatúra pozitívne definitnej formy musí byť $(p, 0, 0)$, $p \neq 0$.

Poznámka

Symetrická úprava – každá elementárna úprava prevedená na riadky je prevedená aj na stĺpce.

Veta (Positívna definitnosť)

Symetrická matica $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je pozitívne definitná, ak je splnená jedna z nasledujúcich ekvivalentných podmienok:

- 1 vlastné čísla matice A sú kladné
(Polynóm $\det(A - \lambda \cdot I) = 0$ má len kladné korene, I je jednotková matica.)
- 2 determinanty všetkých hlavných vedúcich podmatic sú kladné
(Hlavný vedúci podmatice je ľavá horná podmatice A_i veľkosti $i = 0, 1, \dots$, tj. vznikne z A odstránením posledných $n - i$ riadkov a stĺpcov; napr. $A_0 = A$).

Príklad pozitívne definitnej formy

Pre danú maticu A

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

vypočítame vlastné hodnoty riešením charakteristickej rovnice:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

kde I je jednotková matica a λ sú vlastné hodnoty.

Príklad pozitívne definitnej formy

Pre danú maticu A

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

vypočítame vlastné hodnoty riešením charakteristickej rovnice:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

kde I je jednotková matica a λ sú vlastné hodnoty.

Rozvinutím determinantov dostaneme charakteristický polynóm:

$$-\lambda^3 + 12\lambda^2 - 37\lambda + 28 = 0$$

Riešením tejto kubickej rovnice získame vlastné hodnoty:

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 4, \quad \lambda_3 = 6$$

Preto spektrum matice (vlastné čísla matice) A je $\{2, 4, 6\}$.