

# Afinná geometria

---

Riešené príklady

**Pavol Hanzel**  
Fakulta prírodných vied UMB

## MON: Úloha 2.1.3

Skalárny súčin je definovaný ako

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2,$$

kde  $\vec{x} = (x_1, x_2)$ ,  $\vec{y} = (y_1, y_2)$ . Určte veľkosť vektora  $\vec{u} = (2, 4)$ :

## MON: Úloha 2.1.3

Skalárny súčin je definovaný ako

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2,$$

kde  $\vec{x} = (x_1, x_2)$ ,  $\vec{y} = (y_1, y_2)$ . Určte veľkosť vektora  $\vec{u} = (2, 4)$ :

**Riešenie:**

## MON: Úloha 2.1.3

Skalárny súčin je definovaný ako

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2,$$

kde  $\vec{x} = (x_1, x_2)$ ,  $\vec{y} = (y_1, y_2)$ . Určte veľkosť vektora  $\vec{u} = (2, 4)$ :

**Riešenie:**

$$\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$$

## MON: Úloha 2.1.3

Skalárny súčin je definovaný ako

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 - 2x_1 y_2 - 2x_2 y_1 + 5x_2 y_2,$$

kde  $\vec{x} = (x_1, x_2)$ ,  $\vec{y} = (y_1, y_2)$ . Určte veľkosť vektora  $\vec{u} = (2, 4)$ :

**Riešenie:**

$$\begin{aligned} \|\vec{u}\|^2 &= \vec{u} \cdot \vec{u} \\ &= 2 \cdot 2 - 2(2 \cdot 4) - 2(4 \cdot 2) + 5(4 \cdot 4) \end{aligned}$$

## MON: Úloha 2.1.3

Skalárny súčin je definovaný ako

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 - 2x_1 y_2 - 2x_2 y_1 + 5x_2 y_2,$$

kde  $\vec{x} = (x_1, x_2)$ ,  $\vec{y} = (y_1, y_2)$ . Určte veľkosť vektora  $\vec{u} = (2, 4)$ :

**Riešenie:**

$$\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$$

$$= 2 \cdot 2 - 2(2 \cdot 4) - 2(4 \cdot 2) + 5(4 \cdot 4)$$

$$= 4 - 16 - 16 + 80$$

## MON: Úloha 2.1.3

Skalárny súčin je definovaný ako

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2,$$

kde  $\vec{x} = (x_1, x_2)$ ,  $\vec{y} = (y_1, y_2)$ . Určte veľkosť vektora  $\vec{u} = (2, 4)$ :

**Riešenie:**

$$\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$$

$$= 2 \cdot 2 - 2(2 \cdot 4) - 2(4 \cdot 2) + 5(4 \cdot 4)$$

$$= 4 - 16 - 16 + 80$$

$$= 52.$$

## MON: Úloha 2.1.3

Skalárny súčin je definovaný ako

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2,$$

kde  $\vec{x} = (x_1, x_2)$ ,  $\vec{y} = (y_1, y_2)$ . Určte veľkosť vektora  $\vec{u} = (2, 4)$ :

**Riešenie:**

$$\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$$

$$= 2 \cdot 2 - 2(2 \cdot 4) - 2(4 \cdot 2) + 5(4 \cdot 4)$$

$$= 4 - 16 - 16 + 80$$

$$= 52.$$

Teda

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}.$$

## MON: Úloha 2.1.9

Zistite, aký uhol zvierajú jednotkové vektory  $\vec{a}, \vec{b}$ , ak  $\vec{x} = \vec{a} + 2\vec{b}$ ,  $\vec{y} = 5\vec{a} - 4\vec{b}$  sú na seba kolmé vektory.

## MON: Úloha 2.1.9

Zistite, aký uhol zvierajú jednotkové vektory  $\vec{a}, \vec{b}$ , ak  $\vec{x} = \vec{a} + 2\vec{b}$ ,  $\vec{y} = 5\vec{a} - 4\vec{b}$  sú na seba kolmé vektory.

Vektory  $\vec{x} = \vec{a} + 2\vec{b}$  a  $\vec{y} = 5\vec{a} - 4\vec{b}$  sú na seba kolmé, t. j.

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = 0.$$

Po dosadení:

$$(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (5\vec{a} - 4\vec{b}) = \vec{a} \cdot (5\vec{a} - 4\vec{b}) + 2\vec{b} \cdot (5\vec{a} - 4\vec{b})$$

## MON: Úloha 2.1.9

Zistite, aký uhol zvierajú jednotkové vektory  $\vec{a}, \vec{b}$ , ak  $\vec{x} = \vec{a} + 2\vec{b}$ ,  $\vec{y} = 5\vec{a} - 4\vec{b}$  sú na seba kolmé vektory.

Vektory  $\vec{x} = \vec{a} + 2\vec{b}$  a  $\vec{y} = 5\vec{a} - 4\vec{b}$  sú na seba kolmé, t. j.

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = 0.$$

Po dosadení:

$$\begin{aligned}(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (5\vec{a} - 4\vec{b}) &= \vec{a} \cdot (5\vec{a} - 4\vec{b}) + 2\vec{b} \cdot (5\vec{a} - 4\vec{b}) \\ &= 5(\vec{a} \cdot \vec{a}) - 4(\vec{a} \cdot \vec{b}) + 10(\vec{b} \cdot \vec{a}) - 8(\vec{b} \cdot \vec{b})\end{aligned}$$

## MON: Úloha 2.1.9

Zistite, aký uhol zvierajú jednotkové vektory  $\vec{a}, \vec{b}$ , ak  $\vec{x} = \vec{a} + 2\vec{b}$ ,  $\vec{y} = 5\vec{a} - 4\vec{b}$  sú na seba kolmé vektory.

Vektory  $\vec{x} = \vec{a} + 2\vec{b}$  a  $\vec{y} = 5\vec{a} - 4\vec{b}$  sú na seba kolmé, t. j.

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = 0.$$

Po dosadení:

$$(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (5\vec{a} - 4\vec{b}) = \vec{a} \cdot (5\vec{a} - 4\vec{b}) + 2\vec{b} \cdot (5\vec{a} - 4\vec{b})$$

$$= 5(\vec{a} \cdot \vec{a}) - 4(\vec{a} \cdot \vec{b}) + 10(\vec{b} \cdot \vec{a}) - 8(\vec{b} \cdot \vec{b})$$

$$= 5 - 4 \cos \theta + 10 \cos \theta - 8 = 0.$$

## MON: Úloha 2.1.9

Zistite, aký uhol zvierajú jednotkové vektory  $\vec{a}, \vec{b}$ , ak  $\vec{x} = \vec{a} + 2\vec{b}$ ,  $\vec{y} = 5\vec{a} - 4\vec{b}$  sú na seba kolmé vektory.

Vektory  $\vec{x} = \vec{a} + 2\vec{b}$  a  $\vec{y} = 5\vec{a} - 4\vec{b}$  sú na seba kolmé, t. j.

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = 0.$$

Po dosadení:

$$(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (5\vec{a} - 4\vec{b}) = \vec{a} \cdot (5\vec{a} - 4\vec{b}) + 2\vec{b} \cdot (5\vec{a} - 4\vec{b})$$

$$= 5(\vec{a} \cdot \vec{a}) - 4(\vec{a} \cdot \vec{b}) + 10(\vec{b} \cdot \vec{a}) - 8(\vec{b} \cdot \vec{b})$$

$$= 5 - 4 \cos \theta + 10 \cos \theta - 8 = 0.$$

Zjednodušíme:

$$-3 + 6 \cos \theta = 0 \Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{2}.$$

Teda uhol medzi vektormi je  $\theta = 60^\circ$ .

## MON: Úloha 2.1.22

Pomocou skalárneho súčinu určte veľkosť vektora  $\vec{a} = \vec{AL}$ , kde  $L$  je stred strany  $BC$  rovnobežníka  $ABCD$ , ak

$$|AB| = 5, \quad |BC| = 6, \quad \langle(DAB)\rangle = 60^\circ.$$

# MON: Úloha 2.1.22

Pomocou skalárneho súčinu určte veľkosť vektora  $\vec{a} = \vec{AL}$ , kde  $L$  je stred strany  $BC$  rovnobežníka  $ABCD$ , ak

$$|AB| = 5, \quad |BC| = 6, \quad \langle(DAB)\rangle = 60^\circ.$$

Použijeme skalárny súčin:

$$\|\vec{a}\|^2 = \left(\frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AD})\right) \cdot \left(\frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AD})\right)$$

## MON: Úloha 2.1.22

Pomocou skalárneho súčinu určte veľkosť vektora  $\vec{a} = \vec{AL}$ , kde  $L$  je stred strany  $BC$  rovnobežníka  $ABCD$ , ak

$$|AB| = 5, \quad |BC| = 6, \quad \langle(DAB)\rangle = 60^\circ.$$

Použijeme skalárny súčin:

$$\begin{aligned}\|\vec{a}\|^2 &= \left(\frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AD})\right) \cdot \left(\frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AD})\right) \\ &= \frac{1}{4} (\|\vec{AB}\|^2 + 2\vec{AB} \cdot \vec{AD} + \|\vec{AD}\|^2).\end{aligned}$$

# MON: Úloha 2.1.22

Pomocou skalárneho súčinu určte veľkosť vektora  $\vec{a} = \vec{AL}$ , kde  $L$  je stred strany  $BC$  rovnobežníka  $ABCD$ , ak

$$|AB| = 5, \quad |BC| = 6, \quad \langle(DAB)\rangle = 60^\circ.$$

Použijeme skalárny súčin:

$$\begin{aligned}\|\vec{a}\|^2 &= \left(\frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AD})\right) \cdot \left(\frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AD})\right) \\ &= \frac{1}{4} (\|\vec{AB}\|^2 + 2\vec{AB} \cdot \vec{AD} + \|\vec{AD}\|^2).\end{aligned}$$

Použijeme

$$\vec{AB} \cdot \vec{AD} = |AB||AD| \cos 60^\circ = 5 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = 15.$$

$$\begin{aligned}\|\vec{a}\|^2 &= \frac{1}{4}(5^2 + 6^2 + 2 \cdot 15) \\ &= \frac{1}{4}(25 + 36 + 30) = \frac{91}{4}.\end{aligned}$$

# MON: Úloha 2.1.22

Pomocou skalárneho súčinu určte veľkosť vektora  $\vec{a} = \vec{AL}$ , kde  $L$  je stred strany  $BC$  rovnobežníka  $ABCD$ , ak

$$|AB| = 5, \quad |BC| = 6, \quad \langle(DAB)\rangle = 60^\circ.$$

Použijeme skalárny súčin:

$$\begin{aligned}\|\vec{a}\|^2 &= \left(\frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AD})\right) \cdot \left(\frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AD})\right) \\ &= \frac{1}{4} (\|\vec{AB}\|^2 + 2\vec{AB} \cdot \vec{AD} + \|\vec{AD}\|^2).\end{aligned}$$

Použijeme

$$\vec{AB} \cdot \vec{AD} = |AB||AD| \cos 60^\circ = 5 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = 15.$$

$$\begin{aligned}\|\vec{a}\|^2 &= \frac{1}{4}(5^2 + 6^2 + 2 \cdot 15) \\ &= \frac{1}{4}(25 + 36 + 30) = \frac{91}{4}.\end{aligned}$$

Teda

$$\|\vec{a}\| = \frac{\sqrt{91}}{2}.$$

Nech  $f$  je bilineárna forma na priestore  $\mathbb{R}^3$  definovaná vzťahom:

$$f(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_2 + 2x_3y_3.$$

- 1 Overte, že  $f$  je skalárny súčin.
- 2 Overte, či sú vektory  $x = (1, -3, 2)$  a  $y = (2, 1, -1)$  ortogonálne.
- 3 Určte ortogonálny doplnok podpriestoru  $W = \{(1, 2, -1)\}$ .

# Overenie skalárneho súčinu

Bilineárna forma  $f$  je skalárnym súčinom, ak spĺňa nasledujúce podmienky:

- Symetriu:  $f(x, y) = f(y, x)$ ,
- Linearitu v oboch argumentoch,
- Pozitívnu definitnosť a  $f(x, x) > 0$  pre všetky nenulové  $x$ .

# Overenie skalárneho súčinu

Bilineárna forma  $f$  je skalárnym súčinom, ak spĺňa nasledujúce podmienky:

- Symetriu:  $f(x, y) = f(y, x)$ ,
- Linearitu v oboch argumentoch,
- Pozitívnu definitnosť a  $f(x, x) > 0$  pre všetky nenulové  $x$ .

Matica zodpovedajúca forme  $f$  vzhľadom na kanonickú bázu je:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21} & a_{21} \\ a_{31} & a_{31} & a_{31} \end{bmatrix}$$

# Overenie skalárneho súčinu

Bilineárna forma  $f$  je skalárnym súčinom, ak spĺňa nasledujúce podmienky:

- Symetriu:  $f(x, y) = f(y, x)$ ,
- Linearitu v oboch argumentoch,
- Pozitívnu definitnosť a  $f(x, x) > 0$  pre všetky nenulové  $x$ .

Matica zodpovedajúca forme  $f$  vzhľadom na kanonickú bázu je:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21} & a_{21} \\ a_{31} & a_{31} & a_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{III} - \text{II}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Overenie skalárneho súčinu

Bilineárna forma  $f$  je skalárnym súčinom, ak spĺňa nasledujúce podmienky:

- Symetriu:  $f(x, y) = f(y, x)$ ,
- Linearitu v oboch argumentoch,
- Pozitívnu definitnosť a  $f(x, x) > 0$  pre všetky nenulové  $x$ .

Matica zodpovedajúca forme  $f$  vzhľadom na kanonickú bázu je:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21} & a_{21} \\ a_{31} & a_{31} & a_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{III} - \text{II}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Matica  $A$  je symetrická a je pozitívne definitná.**

Na diagonále sú tri jednotky, žiadne mínus jednotky a nuly. Signatúra formy je (3,0,0).

# Overenie skalárneho súčinu

Bilineárna forma  $f$  je skalárnym súčinom, ak spĺňa nasledujúce podmienky:

- Symetriu:  $f(x, y) = f(y, x)$ ,
- Linearitu v oboch argumentoch,
- Pozitívnu definitnosť a  $f(x, x) > 0$  pre všetky nenulové  $x$ .

Matica zodpovedajúca forme  $f$  vzhľadom na kanonickú bázu je:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21} & a_{21} \\ a_{31} & a_{31} & a_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{III} - \text{II}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Matica  $A$  je symetrická a je pozitívne definitná.**

Na diagonále sú tri jednotky, žiadne mínus jednotky a nuly. Signatúra formy je (3,0,0).

**To dokazuje, že  $f$  je skalárny súčin.**

Viac o vzťahu skalárneho súčinu a bilineárnych foriem si pozrite Tu.

Spočítame  $f(x, y)$ :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 1 \cdot 2 + (-3) \cdot 1 + (-3) \cdot (-1) + 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) \cdot 2 \\ &= 2 - 3 + 3 + 2 - 2 = 2 \neq 0. \end{aligned}$$

Preto vektory nie sú ortogonálne.

Podpriestor  $W$  je generovaný vektorom  $(1, 2, -1)$ . Nájďme ortogonalný doplnok ako množinu všetkých vektorov  $z = (z_1, z_2, z_3)$  spĺňajúcich podmienku:

$$f((1, 2, -1), (z_1, z_2, z_3)) = 0.$$

Riešením je rovnica  $z_1 + 2z_2 - z_3 = 0$ , čo definuje rovinu v  $\mathbb{R}^3$ .