

Nech f je bilineárna forma na priestore \mathbb{R}^3 definovaná vzťahom:

$$f(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_2 + 2x_3y_3.$$

- 1 Overte, že f je skalárny súčin.
- 2 Overte, či sú vektory $x = (1, -3, 2)$ a $y = (2, 1, -1)$ ortogonálne.
- 3 Určte ortogonálny doplnok podpriestoru $W = \{(1, 2, -1)\}$.

Overenie skalárneho súčinu

Bilineárna forma f je skalárnym súčinom, ak spĺňa nasledujúce podmienky:

- Symetriu: $f(x, y) = f(y, x)$,
- Linearitu v oboch argumentoch,
- Pozitívnu definitnosť a $f(x, x) > 0$ pre všetky nenulové x .

Overenie skalárneho súčinu

Bilineárna forma f je skalárnym súčinom, ak spĺňa nasledujúce podmienky:

- Symetriu: $f(x, y) = f(y, x)$,
- Linearitu v oboch argumentoch,
- Pozitívnu definitnosť a $f(x, x) > 0$ pre všetky nenulové x .

Matica zodpovedajúca forme f vzhľadom na kanonickú bázu je:

$$f(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_2 + 2x_3y_3.$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21} & a_{21} \\ a_{31} & a_{31} & a_{31} \end{bmatrix}$$

Overenie skalárneho súčinu

Bilineárna forma f je skalárnym súčinom, ak spĺňa nasledujúce podmienky:

- Symetriu: $f(x, y) = f(y, x)$,
- Linearitu v oboch argumentoch,
- Pozitívnu definitnosť a $f(x, x) > 0$ pre všetky nenulové x .

Matica zodpovedajúca forme f vzhľadom na kanonickú bázu je:

$$f(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_2 + 2x_3y_3.$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21} & a_{21} \\ a_{31} & a_{31} & a_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{III} - \text{II}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Overenie skalárneho súčinu

Bilineárna forma f je skalárnym súčinom, ak spĺňa nasledujúce podmienky:

- Symetriu: $f(x, y) = f(y, x)$,
- Linearitu v oboch argumentoch,
- Pozitívnu definitnosť a $f(x, x) > 0$ pre všetky nenulové x .

Matica zodpovedajúca forme f vzhľadom na kanonickú bázu je:

$$f(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_2 + 2x_3y_3.$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21} & a_{21} \\ a_{31} & a_{31} & a_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{III} - \text{II}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matica A je symetrická a je pozitívne definitná.

Na diagonále sú tri jednotky, žiadne mínus jednotky a nuly. Signatúra formy je (3,0,0).

Overenie skalárneho súčinu

Bilineárna forma f je skalárnym súčinom, ak spĺňa nasledujúce podmienky:

- Symetriu: $f(x, y) = f(y, x)$,
- Linearitu v oboch argumentoch,
- Pozitívnu definitnosť a $f(x, x) > 0$ pre všetky nenulové x .

Matica zodpovedajúca forme f vzhľadom na kanonickú bázu je:

$$f(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_2 + 2x_3y_3.$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21} & a_{21} \\ a_{31} & a_{31} & a_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{III} - \text{II}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matica A je symetrická a je pozitívne definitná.

Na diagonále sú tri jednotky, žiadne mínus jednotky a nuly. Signatúra formy je (3,0,0).

To dokazuje, že f je skalárny súčin.

Viac o vzťahu skalárneho súčinu a bilineárnych foriem si pozrite [Tu](#).

Úloha

Overte, či sú vektory $x = (1, -3, 2)$ a $y = (2, 1, -1)$ ortogonálne.

Úloha

Overte, či sú vektory $x = (1, -3, 2)$ a $y = (2, 1, -1)$ ortogonálne.

Riešenie

Spočítajme skalárny súčin $f(x, y)$ daných vektorov :

- $f(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_2 + 2x_3y_3.$
- $f(x, y) = 1 \cdot 2 + (-3) \cdot 1 + (-3) \cdot (-1) + 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) \cdot 2$
 $= 2 - 3 + 3 + 2 - 2 = 2 \neq 0.$

Úloha

Overte, či sú vektory $x = (1, -3, 2)$ a $y = (2, 1, -1)$ ortogonálne.

Riešenie

Spočítajme skalárny súčin $f(x, y)$ daných vektorov :

- $f(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_2 + 2x_3y_3.$
- $f(x, y) = 1 \cdot 2 + (-3) \cdot 1 + (-3) \cdot (-1) + 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) \cdot 2$
 $= 2 - 3 + 3 + 2 - 2 = 2 \neq 0.$

Skalárny súčin nie je rovný nule - vektory **nie sú ortogonálne**.

Vypočítajte aký veľký uhol zvierajú dané vektory? [$\doteq 78^\circ$]

Úloha

Určte ortogonalný doplnok, ktorý je generovaný vektorom $\vec{u} = (1, 2, -1)$.

Úloha

Určte ortogonalný doplnok, ktorý je generovaný vektorom $\vec{u} = (1, 2, -1)$.

Riešenie: Hľadáme všetky vektory $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$, pre ktoré platí:

$$f(\vec{v}, \vec{u}) = 0 \quad \text{pre všetky } \vec{v} \in W.$$

Stačí nájsť všetky vektory \vec{v} , pre ktoré platí:

$$f(\vec{v}, (1, 2, -1)) = 0.$$

Úloha

Určte ortogonalný doplnok, ktorý je generovaný vektorom $\vec{u} = (1, 2, -1)$.

Riešenie: Hľadáme všetky vektory $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$, pre ktoré platí:

$$f(\vec{v}, \vec{u}) = 0 \quad \text{pre všetky } \vec{v} \in W.$$

Stačí nájsť všetky vektory \vec{v} , pre ktoré platí:

$$f(\vec{v}, (1, 2, -1)) = 0.$$

Bilineárna forma pre vektory $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ a $\vec{u} = (1, 2, -1)$:

$$f(\vec{v}, \vec{u}) = v_1 \cdot 1 + v_2 \cdot 2 + v_3 \cdot (-1) + v_3 \cdot 2 + 2v_3 \cdot (-1).$$

Úloha

Určte ortogonalný doplnok, ktorý je generovaný vektorom $\vec{u} = (1, 2, -1)$.

Riešenie: Hľadáme všetky vektory $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$, pre ktoré platí:

$$f(\vec{v}, \vec{u}) = 0 \quad \text{pre všetky } \vec{v} \in W.$$

Stačí nájsť všetky vektory \vec{v} , pre ktoré platí:

$$f(\vec{v}, (1, 2, -1)) = 0.$$

Bilineárna forma pre vektory $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ a $\vec{u} = (1, 2, -1)$:

$$f(\vec{v}, \vec{u}) = v_1 \cdot 1 + v_2 \cdot 2 + v_3 \cdot (-1) + v_3 \cdot 2 + 2v_3 \cdot (-1).$$

Zjednodušíme výrazy:

$$f(\vec{v}, \vec{u}) = v_1 + 2v_2 - v_3 + 2v_3 - 2v_3 = v_1 + v_2.$$

Úloha

Určte ortogonalný doplnok, ktorý je generovaný vektorom $\vec{u} = (1, 2, -1)$.

Riešenie: Hľadáme všetky vektory $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$, pre ktoré platí:

$$f(\vec{v}, \vec{u}) = 0 \quad \text{pre všetky } \vec{v} \in W.$$

Stačí nájsť všetky vektory \vec{v} , pre ktoré platí:

$$f(\vec{v}, (1, 2, -1)) = 0.$$

Bilineárna forma pre vektory $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ a $\vec{u} = (1, 2, -1)$:

$$f(\vec{v}, \vec{u}) = v_1 \cdot 1 + v_2 \cdot 2 + v_3 \cdot (-1) = v_1 + 2v_2 - v_3.$$

Zjednodušíme výrazy:

$$f(\vec{v}, \vec{u}) = v_1 + 2v_2 - v_3 = v_1 + v_2.$$

To znamená, že ortogonalný doplnok W^\perp obsahuje všetky vektory tvaru:

$$W^\perp = \{(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 \mid v_1 + v_2 = 0\}.$$

Ortogonalný doplnok je podpriestor generovaný vektormi $(-1, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$.