Dôkaz, že $V_2(\mathbb{R})$ je vektorový priestor

Nech $V_2(\mathbb{R})$ je množina všetkých usporiadaných dvojíc reálnych čísel s operáciami:

$$\begin{aligned} \oplus : (a_1,a_2) \oplus (b_1,b_2) &= (a_1+b_1, a_2+b_2) \quad \text{(sčítanie po zložkách)}, \\ \odot : k \odot (a_1,a_2) &= (ka_1, ka_2), \quad \text{kde } k \in \mathbb{R} \text{ (násobenie skalárom)}. \end{aligned}$$

Ukážeme, že $V_2(\mathbb{R})$ spĺňa axiomy vektorového priestoru nad $\mathbb{R}$.

Overenie axióm vektorového priestoru

1. **Uzavretosť:**
Pre každé $(a_1,a_2),(b_1,b_2) \in V_2(\mathbb{R})$ platí, že $\oplus$ je uzavreté, pretože súčet dvoch dvojíc je opäť dvojica reálnych čísel. Podobne, $\odot$ je uzavreté, pretože násobenie skalárom vedie na dvojicu reálnych čísel.

2. **Komutatívnosť sčítania:**

$$\begin{aligned} (a_1,a_2) \oplus (b_1,b_2) &= (a_1+b_1, a_2+b_2) \\ &= (b_1+a_1, b_2+a_2) \\ &= (b_1,b_2) \oplus (a_1,a_2). \end{aligned}$$

3. **Associativita sčítania:**

$$\begin{aligned} [(a_1,a_2) \oplus (b_1,b_2)] \oplus (c_1,c_2) &= (a_1+b_1, a_2+b_2) \oplus (c_1,c_2) \\ &= ((a_1+b_1)+c_1, (a_2+b_2)+c_2) \\ &= (a_1+(b_1+c_1), a_2+(b_2+c_2)) \\ &= (a_1,a_2) \oplus [(b_1,b_2) \oplus (c_1,c_2)]. \end{aligned}$$

4. **Existencia nulového prvku:**
Nulovým prvkom je $(0,0)$, pretože pre každé $(a_1,a_2) \in V_2(\mathbb{R})$ platí:

$$(a_1,a_2) \oplus (0,0) = (a_1+0, a_2+0) = (a_1,a_2).$$

5. **Existencia opačného prvku:**
Pre každé $(a_1,a_2) \in V_2(\mathbb{R})$ existuje opačný prvok $(-a_1,-a_2)$, pretože:

$$(a_1,a_2) \oplus (-a_1,-a_2) = (a_1-a_1, a_2-a_2) = (0,0).$$

6. **Distributívne zákony:**

$$\begin{aligned} k \odot [(a_1, a_2) \oplus (b_1, b_2)] &= k \odot (a_1 + b_1, a_2 + b_2) \\ &= (k(a_1 + b_1), k(a_2 + b_2)) \\ &= (ka_1 + kb_1, ka_2 + kb_2) \\ &= (k \odot (a_1, a_2)) \oplus (k \odot (b_1, b_2)). \end{aligned}$$

Podobne platí aj ďalší distribučný zákon:

$$\begin{aligned} (k+m) \odot (a_1, a_2) &= ((k+m)a_1, (k+m)a_2) \\ &= (ka_1 + ma_1, ka_2 + ma_2) \\ &= k \odot (a_1, a_2) \oplus m \odot (a_1, a_2). \end{aligned}$$

7. **Asociativita násobenia skalárom:**

$$\begin{aligned} k \odot (m \odot (a_1, a_2)) &= k \odot (ma_1, ma_2) \\ &= (kma_1, kma_2) \\ &= (km) \odot (a_1, a_2). \end{aligned}$$

8. **Existencia jednotkového skalára:**

$$1 \odot (a_1, a_2) = (1a_1, 1a_2) = (a_1, a_2).$$

Keďže všetky axiómy vektorového priestoru sú splnené, množina $V_2(\mathbb{R})$ spolu s uvedenými operáciami tvorí vektorový priestor nad $\mathbb{R}$.