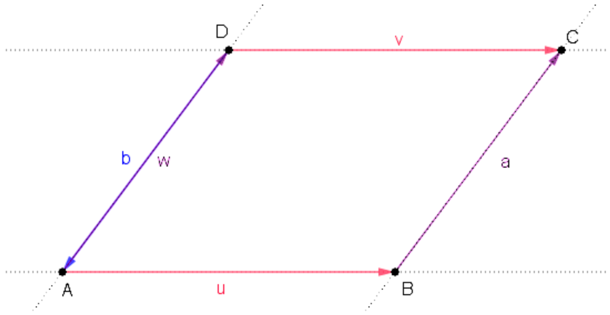
Príklad MON 1.1.16

Daný je kosodĺžnik $ABCD$. Označme $\overrightarrow{BC} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{DA} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{AB} = \mathbf{u}$, $\overrightarrow{DC} = \mathbf{v}$, $\overrightarrow{AD} = \mathbf{w}$.



Otvorte si applet Tu.

a) Napíšte, či sú vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ lineárne závislé alebo nezávislé a svoje tvrdenie zdôvodnite.

Riešenie.

Vektory $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ sú lineárne závislé. Prečo? Kosodĺžnik $ABCD$ má dve rôzne strany BC, AD rovnobežné a rovnako veľké. Zrejme vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ sú násobky jeden druhého: $\mathbf{a} = (-1).\mathbf{b}$ a teda sú lineárne závislé.

b) Určte, koľko vektorov a koľko viazaných vektorov je určených vrcholmi daného kosodĺžnika.

Riešenie.

Kosodĺžnik $ABCD$ má 4 vrcholy (A, B, C, D), takže môžeme vytvoriť:

- 8 rôznych voľných vektorov (zodpovedajú všetkým **usporiadaným rozdielom** medzi dvojicami vrcholov) + 1 nulový vektor, teda spolu je 9 voľných vektorov,
- 12 rôznych viazaných vektorov (každý vrchol môže byť začiatkom alebo koncom vektora).

c) Určte nasledujúce výrazy:

(a) $\mathbf{u} + \mathbf{w}$

Riešenie.

$$\mathbf{u} + \mathbf{w} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

(b) $\mathbf{u} + \mathbf{a} - \mathbf{v}$

Riešenie.

$$\mathbf{u}+\mathbf{a}-\mathbf{v}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{DC}.$$

Použitím vlastností kosodĺžnika, kde $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ a $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$, máme:

$$\mathbf{u}+\mathbf{a}-\mathbf{v}=\overrightarrow{AD}=\mathbf{w}.$$

(c) $\mathbf{u}-\mathbf{a}$

Riešenie.

$$\mathbf{u}-\mathbf{a}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DB}.$$

(d) $\mathbf{u}-(-\mathbf{u})$

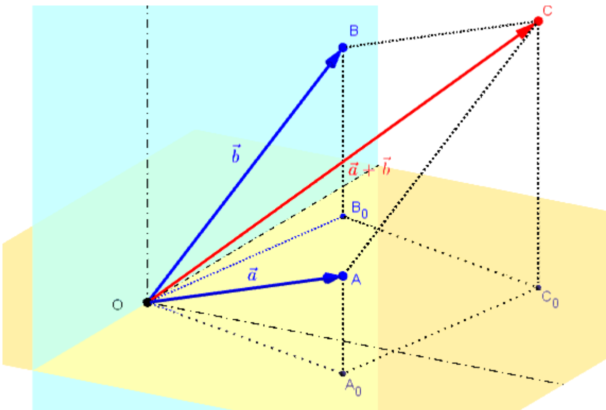
Riešenie.

$$\mathbf{u}-(-\mathbf{u})=\overrightarrow{AB}-(-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{-BA})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}=2.\overrightarrow{AB}=2\mathbf{u}.$$

V príkladoch 1 až 3 je daná množina V usporiadaných trojíc resp. dvojíc s obvyklým sčitovaním "po zložkách"trojíc resp. dvojíc reálnych čísel.

Príklad 1

Nech $V = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 - 2x_3 = 0\}$. **Overenie vlastností vektorového priestoru:**



Otvorte si applet Tu.

1. **Uzavretosť na sčítanie:** Pre $(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3) \in V$, máme:

$$x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \quad \text{a} \quad y_1 + y_2 - 2y_3 = 0.$$

   Pre ich súčet:

$$(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) - 2(x_3 + y_3) = (x_1 + x_2 - 2x_3) + (y_1 + y_2 - 2y_3) = 0.$$

   Uzavretosť na sčítanie je splnená.

2. **Uzavretosť na násobenie skalárom:** Pre $a \in \mathbb{R}$ a $(x_1,x_2,x_3) \in V$, máme:

$$a(x_1 + x_2 - 2x_3) = a \cdot 0 = 0.$$

   Uzavretosť na násobenie skalárom je splnená.

3. **Nulový vektor:** Nulový vektor $(0,0,0)$ patrí do V, pretože:

$$0 + 0 - 2 \cdot 0 = 0.$$

Záver: Množina V je vektorový priestor nad $\mathbb{R}$.

—

Príklad 2

Nech $V = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x - 3y = 0\}$.

Riešenie: Táto množina obsahuje dvojice celých čísel spĺňajúce $x = 3y$.

1. **Uzavretosť na sčítanie:** Pre $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in V$, máme:

$$x_1 = 3y_1 \quad \text{a} \quad x_2 = 3y_2.$$

   Pre ich súčet:

$$(x_1 + x_2) = 3(y_1 + y_2),$$

   teda súčet patrí do V.

2. **Uzavretosť na násobenie skalárom:** Pre $a \in \mathbb{R}$ a $(x,y) \in V$, máme:

$$ax = a(3y).$$

   Ak $a \notin \mathbb{Z}$, výsledok už nemusí byť v $\mathbb{Z}$.

Záver: Množina V nie je vektorový priestor nad $\mathbb{R}$, pretože operácie nie sú uzavreté.

—

Príklad 3

Nech $V = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x + 3y = 1\}$.

Riešenie: Táto množina obsahuje dvojice celých čísel spĺňajúce $x = 1 - 3y$.

1. **Uzavretosť na sčítanie:** Pre $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in V$, máme:

$$x_1 + 3y_1 = 1 \quad \text{a} \quad x_2 + 3y_2 = 1.$$

   Pre ich súčet:

$$(x_1 + x_2) + 3(y_1 + y_2) = 2,$$

   čo už nepatrí do V.

Záver: Množina V nie je vektorový priestor.

—

Príklad 4

Nech $V = \{p(x) \mid 8p(0)+6p(1)=0\}$.

Riešenie: Táto množina obsahuje polynómy $p(x)$, pre ktoré platí $8p(0)+6p(1)=0$.

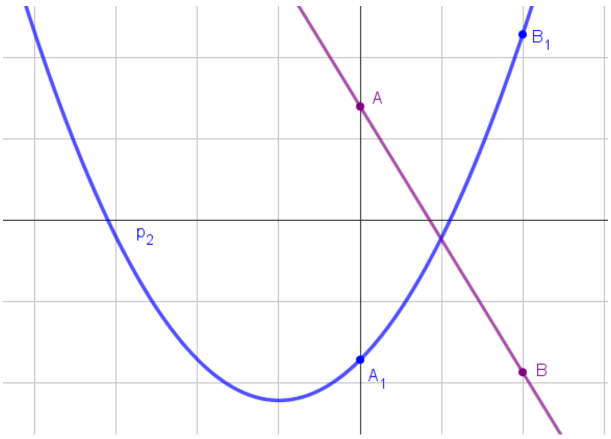
1. **Uzavretosť na sčítanie:** Pre $p_1(x), p_2(x) \in V$, máme:

$$8p_1(0)+6p_1(1)=0 \quad \text{a} \quad 8p_2(0)+6p_2(1)=0.$$

Pre ich súčet:

$$8(p_1(0)+p_2(0))+6(p_1(1)+p_2(1))=0,$$

teda súčet patrí do V.



Polynómy 1. a 2. stupňa, dynamický obrázok Tu.

2. **Uzavretosť na násobenie skalárom:** Pre $a \in \mathbb{R}$ a $p(x) \in V$, máme:

$$8(ap(0))+6(ap(1)) = a\cdot(8p(0)+6p(1)) = 0.$$

Uzavretosť na násobenie skalárom je splnená.

Záver: Množina V je vektorový priestor nad $\mathbb{R}$.