UNIVERZITA MATEJA BELA V BANSKEJ BYSTRICI

FAKULTA PRÍRODNÝCH VIED

Didaktika matematiky

medzi obsahom, porozumením a modelovaním

Pavol Hanzel, ...

Banská Bystrica 2027

Didaktika matematiky medzi obsahom, porozumením a modelovaním

Autori: Pavol Hanzel, ...

Recenzenti: Meno Priezvisko, Meno Priezvisko

Vydala: Univerzita Mateja Bela v Banskej Bystrici, Fakulta prírodných vied

Rok vydania: 2026

Rozsah: **??** strán

Vydanie: prvé

ISBN: 978-80-XXXX-XXXX-X

DOI: doplniť podľa vydavateľa

© Pavol Hanzel, Vladimír Kobza, 2027

Všetky práva vyhradené. Toto dielo ani žiadnu jeho časť nemožno reprodukovať, ukladať do informačných systémov alebo inak šíriť bez súhlasu držiteľov autorských práv, okrem prípadov povolených zákonom.

Obsah

1 Úvod **1**

2 Didaktika matematiky **3**

2.1 Východiská . . . 3

2.2 Vzťah didaktiky matematiky k dejinám matematiky . . . 4

2.2.1 Historický vývoj pojmu zlomok . . . 7

2.3 Didaktika matematiky ako vedná disciplína . . . 9

3 Vedecké poznávanie vo vyučovaní **17**

3.0.1 Prepojenie s IKT . . . 18

3.1 Vedecké poznávanie vo vyučovaní matematiky . . . 19

3.1.1 Fázy vedeckého poznávania . . . 20

3.1.2 Výskumné metódy v kontexte vyučovania . . . 21

3.1.3 Využitie výskumných metód v školskej matematike . . . 22

3.1.4 Heuristické stratégie vo vyučovaní matematiky . . . 22

3.1.5 Analógia s problémovým vyučovaním . . . 23

3.2 Problémové vyučovanie . . . 24

3.3 Vizualizácia problému . . . 26

3.3.1 Formy vizualizácie v matematike . . . 26

3.4 Význam a poslanie matematického vzdelávania . . . 26

4 Artificial Intelligence a matematika **31**

4.1 Mikro-ukážky z triednej praxe . . . 33

4.1.1 Operácie so zlomkami . . . 34

4.1.2 Chyba ako informácia . . . 36

4.1.3 Model ako reprezentácia . . . 38

4.2 Možnosti využitia AI v didaktike matematiky . . . 39

4.2.1 AI vo vzdelávaní a jazykové modely v matematike . . . 39

4.2.2 AI ako didaktický sparingpartner . . . 41

4.3 Prompt ako nástroj didaktického navrhovania . . . 42

4.3.1 Tri režimy práce s AI asistentom . . . 44

4.3.2 Prompt „Tútor v matematike“ . . . 46
4.4 Návrhy scenárov práce so študentmi (VŠ) . . . 49
4.4.1 Úrovne práce s AI v didaktike matematiky . . . 54

5 Slovné úlohy **57**
5.1 Historické poznámky . . . 58
5.2 Vymedzenie pojmov . . . 64
5.2.1 Ukážka matematických úloh . . . 65
5.3 Matematizácia a vizualizácia slovnej úlohy . . . 66
5.3.1 Ukážka matematizácie . . . 68
5.3.2 Vizualizácia – modely . . . 69
5.3.3 Úlohy na priamu a nepriamu úmernosť . . . 71
5.4 Typológia a klasifikácia slovných úloh . . . 74
5.4.1 Klasifikácia podľa matematickej štruktúry . . . 74
5.4.2 Klasifikácia podľa obsahového zamerania . . . 76
5.4.3 Jednoduché a zložené slovné úlohy . . . 76
5.4.4 Anatomický prístup k slovnej úlohe . . . 78
5.4.5 Úlohy o veku ako modelový typ . . . 79
5.4.6 Fragmentácia textu a cesta k rovnicovému modelu . . . 80
5.5 Využitie AI pri riešení slovných úloh . . . 82
5.5.1 AI ako nástroj kritickej analýzy pojmu slovná úloha . . . 82
5.5.2 AI pri porozumení a fragmentácii textu . . . 83
5.5.3 AI pri matematizácii a voľbe matematického modelu . . . 85
5.5.4 AI pri kontrole matematického modelu a práci s chybou . . . 87
5.5.5 AI pri posudzovaní dostatočnosti údajov . . . 88
5.5.6 Od riešenia s AI k didakticky riadenej spolupráci . . . 91

6 Číselné obory **93**
6.1 Historické poznámky . . . 93
6.1.1 Školská matematika . . . 97
6.2 Prirodzené čísla . . . 100
6.2.1 Desiatková sústava . . . 102
6.3 Celé čísla . . . 105
6.3.1 Opačné čísla . . . 109
6.3.2 Generické modely . . . 111
6.3.3 Operácie s celými číslami . . . 115
6.4 Racionálne čísla . . . 121
6.4.1 Zlomky . . . 124
6.4.2 Výsledok - porozumenie . . . 130
6.5 Reálne čísla . . . 131

6.5.1 Odmocnina z dvoch . . . 136

7 Analytická geometria v rovine a v priestore 139

7.1 Historický vývoj analytickej geometrie . . . 141
7.2 Vektory – od geometrickej predstavy k algebraickému zápisu . . . 143
7.2.1 Geometrický vektor . . . 143
7.2.2 Experiment v prostredí GeoGebra . . . 145
7.2.3 Od geometrického vektora k súradniciam . . . 146
7.2.4 Prvá aktivita s nástrojom umelej inteligencie . . . 148
7.2.5 Ako ďalej? . . . 149
7.3 Vektory a ich lineárne kombinácie . . . 150
7.3.1 Násobok vektora . . . 150
7.3.2 Súčet vektorov . . . 153
7.3.3 Od operácií s vektormi k lineárnej kombinácii . . . 156
7.4 Od vektorov k podpriestorom . . . 160
7.4.1 Súradnice bodu . . . 161
7.4.2 Analytické vyjadrenie priamky . . . 163
7.4.3 Polohové vlastnosti . . . 166
7.4.4 Metrické úlohy analytickej geometrie . . . 169

8 Záver 175

Použité zdroje 177

1 Úvod

Didaktika matematiky ako analýza myslenia v triede

Táto kniha vznikla z presvedčenia, že didaktika matematiky by nemala byť len suchým zoznamom pedagogických pravidiel. Mali by sme ju vnímať skôr ako systematickú analýzu toho, ako žiaci v konkrétnych situáciách počas vyučovania skutočne matematicky uvažujú.

Tradičné učebnice sa zvyčajne zameriavajú na to, čo by sa malo učiť a aké metódy k tomu vybrať. Len málokedy sa však venujú tomu, ako presne žiak počas učenia premýšľa, aké si vytvára predstavy, kde presne robí chyby a ako sa tieto predstavy postupne menia.

Matematika je však v tomto zmysle špecifická. Nejde totiž len o to, aby sa žiak naučil postupovať podľa vzorcov. Predovšetkým nám ide o:

- pochopenie vzťahov,
- schopnosť rozlíšiť domnienku od istoty,
- dôraznú argumentáciu,
- prácu so separovanými modelmi.

Ak tieto procesy nebudeme analyzovať, zostane didaktika matematiky len abstraktnou teóriou, ktorá nemá v reálnej triede veľký význam.

Zámerom tejto knihy je preto presunúť pozornosť od všeobecných odporúčaní k detailnému skúmaniu toho, čo sa v triede skutočne deje. Chceme sledovať, ako žiak

- experimentuje,
- formuluje hypotézy,
- sa vyrovnáva s chybou a ako
- prechádza od intuitívneho pozorovania k čistému matematickému zdôvodneniu.

Veľmi dôležitá je aj dynamika vyučovania. Vďaka moderným technológiám môžeme dnes pracovať s matematickými objektmi, ktoré sú v pohybe a neustále sa menia. To úplne mení spôsob, akým sa matematika učí. Žiak už nie je len pasívnym prijímateľom hotových informácií,

ale stáva sa aktívnym účastníkom. Experimentovanie, vizualizácia a diskusia sa tak stávajú prirodzenou súčasťou toho, ako si buduje nové pojmy.

Didaktiku matematiky tu vnímame práve ako reflexiu týchto procesov.Ide o skúmanie toho, čo sa vlastne deje v hlave žiaka, keď rieši úlohu, keď urobí chybu, keď hľadá pravidlá alebo keď sa snaží svoje výsledky logicky obhájiť. Tento prístup neponúka žiadne hotové recepty. Namiesto toho dáva učiteľovi nástroje, vďaka ktorým môže lepšie pochopiť, ako žiaci myslia, a tak cielene vytvárať situácie, kde matematické poznanie vzniká prirodzene a dáva zmysel.

Predkladaná monografia zdôrazňuje tri základné dimenzie vyučovania matematiky:

- matematický obsah,
- porozumenie žiaka,
- proces matematického modelovania,

ktorý spája matematiku so svetom reálnych situácií.

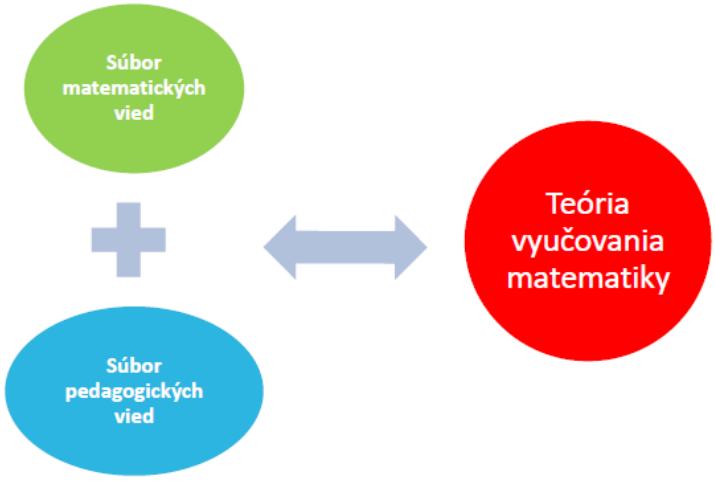
2 Didaktika matematiky

2.1 Východiská

Výučbu matematiky na všetkých stupňoch vzdelávania treba chápať ako
tvorivý a neopakovateľný proces,
ktorý sa nedá spútať do presných schém, modelov, či spojiť len s jedinou teóriou.

Moderné koncepcie dnes stavajú učiteľa matematiky skôr do úlohy koordinátora a manažéra procesu. Jeho hlavným cieľom je pomáhať žiakom rozvíjať ich kľúčové matematické kompetencie. Rolu autoritatívneho školiteľa, ktorý vyžaduje hlavne memorovanie definícií a tvrdení, ako to bolo v minulosti, už dnes vnímame skôr ako podpornú funkciu.

Moderná didaktika je disciplína, ktorá skúma proces výučby ako prepojenie činnosti učiteľa (učenie) a činnosti žiakov (učenie sa). V tomto kontexte je dobré pripomenúť myšlienku J. A. Komenského, ktorý tvrdil, že didaktika sa zaoberá samotným procesom výučby vo všeobecnosti, bez ohľadu na to, o aký konkrétny predmet ide. Viac informácií nájdete v jeho práci [KOM, 1948]. Na druhej strane existujú odborové didaktiky, ktoré sa sústreďujú na výučbu v rámci špecifických skupín predmetov.



Obr. 2.1: Synergetický vzťah medzi vednými disciplínami

Teória vyučovania matematiky skúma procesy prostredníctvom analýzy
obsahu, prostriedkov, metód a foriem
vyučovania a štúdia matematiky usiluje o hlbšie porozumenie učebnému procesu.

V niektorých prácach [HEJ, 1989] sa namiesto termínu *Didaktika matematiky* používa *Teória vyučovania matematiky*. V práci [KUR, 2016] sa objavuje aj anglický termín od E. Whittmann „*Mathematics Education*". V tejto práci však budeme používať termín Didaktika matematiky.

Komparáciou viacerých prác a viacerých autorov uvedieme hlavné charakteristiky pre vymedzenie pojmu didaktika matematiky.

Definícia 1: Didaktika matematiky (DM)

- Cieľom DM je výskum nových, efektívnejších metód vyučovania matematiky na všetkých stupňoch vzdelávania a ich aplikácie do školskej praxe.
- DM je založená predovšetkým na poznatkoch základných matematických disciplín, na historickom vývoji matematiky ako vedy a ich aplikácií do školskej matematiky.
- Výsledky experimentov DM aplikuje do prípravy budúcich učiteľov matematiky, pričom využíva najnovšie výsledky v oblasti pedagogicko-psychologických disciplín a moderné informačno-komunikačné technológie.

Teoretici v oblasti vyučovania matematiky sa v súčasnosti opierajú o významnú publikáciu [BAL, 2005].

2.2 Vzťah didaktiky matematiky k dejinám matematiky

Historický kontext

Korene didaktiky matematiky a medzníky jej vývoja v 20. storočí

1. V roku 1872 **Felix Klein** publikoval Erlangenský program[1] a predniesol prednášku o matematickom vzdelávaní, v ktorej apeloval na väčšiu aplikovateľnosť matematiky pri jej vyučovaní. Ku konci svojej kariéry sa začal zaujímať i o výuku matematiky na nemeckých školách, **snažil sa o modernizáciu matematiky**. Presadil, aby sa na stredných školách vyučovali základy teorie funkcií a základy diferenciálneho a integrálneho počtu (tzv. Kleinsche Reform). Neskôr aktívne prispel k tomu, aby bola didaktika matematiky uznaná ako vedná disciplína. Podrobnejšie informácie nájdete v práci [TRK, 2007].

[1] Erlangenský program je v matematike metóda, ktorá charakterizuje geometriu na základe teórie grúp.

2. Dôležitým medzníkom bol rok 1908 a Štvrtý medzinárodný kongres matematikov v Ríme, počas ktorého bola ustanovená nová organizácia: **International Commision on Mathematical Instruction** (Medzinárodný výbor pre výučbu matematiky), ktorej prezidentom sa stal práve Felix Klein. Linka na web Tu.

3. Ďalším významným krokom bolo vytvorenie **Commission for the Study and Improvement of Mathematics Teaching - CIEAEM** (Komisia pre štúdium a rozvoj vyučovania matematiky) v roku 1950. Linka na web Tu.

4. Šesťdesiate roky 20. storočia sú obdobím, keď matematici „znovu objavujú" školu. Objavuje sa hnutie New Math (Nová matematika) u nás známe ako **Modernizácia vyučovania matematiky**.

5. V roku 1970 časopis **Journal for Research in Mathematics Education**, ktorý sa zaradil medzi najrenomovanejšie vedecké časopisy týkajúce sa problematiky didaktiky matematiky.

Dejiny matematiky pomáhajú prepojiť matematiku s reálnym životom a ukazujú, ako vznikajú matematické pojmy a tvrdenia. Ak učitelia v hodine využívajú historické vsuvky, žiaci sa majú radšej a zároveň odbúda ich strach z tohto predmetu. Cez históriu môžeme lepšie pochopiť, ako sa vyvíja matematické myslenie, a tieto poznatky potom využiť aj pri výučbe. Podľa P. M. Erdnija [ERN, 1978]:

„***Rast stromu matematických znalostí v hlave jedného človeka bude úspešný len vtedy, keď v určitej miere zopakuje históriu rozvoja tejto vedy***".

Keď sledujeme, ako vznikali jednotlivé matematické pojmy, často vidíme zaujímavú paralelu s tým, ako uvažujú naši žiaci. Môžeme porovnávať vývoj myslenia od starovekých civilizácií, ako boli Egypt či Mezopotámia, až po Grékov, Arabov a Európanov v neskoršom období.

Matematické myslenie u Grékov je jasný posun k abstraktnejšiemu mysleniu.

Gréci vychádzali z matematických poznatkov starého Egypta a Mezopotámie. Ako prví sa neuspokojili len s otázkou **ako**, ale hľadali aj odpovede na otázku **prečo**. To prinieslo niekoľko zmien:

1. Bol vytvorený systém základných vzťahov (axióm) a požiadaviek (postulátov).

2. Matematika sa stáva deduktívnou vedou.

3. Gréci začali matematické tvrdenia dokazovať.

Viac o gréckej matematike nájdete v Moodle kurze *Historický pohľad na vývoj matematiky*.

Poznámka 1

Proces abstrahovania prebieha aj v školskej matematike. Žiaci začínajú v mladšom veku **experimentovať** a postupne sa v staršom veku presúvajú ku **kauzálnemu mysleniu**.

Tento proces budeme interpretovať porovnaním riešenia príkladu (R403) pochádzajúceho zo starovekého Egypta s možnosťami, ktoré poskytuje súčasná školská matematika. Upravená verzia riešeného príkladu zapísaného v Rhindovom papyruse je prevzatá z práce [BEC, 2003].

Príklad 1: R403 - Rhindov papyrus

Je treba rozdeliť 100 chlebov medzi 5 mužov tak, aby bola jedna sedmina z troch horných pre dvoch mužov dole.

Riešenie.

Myšlienka pôvodného riešenia, ktoré je uvedené na papyruse je založená na ***metóde chybného predpokladu***.

Celkový počet chlebov je 100, ktoré je potrebné nejakým spôsobom rozdeliť medzi 5 mužov. V úlohe sa spomínajú traja horní muži a dvaja dolní.

1. Egyptskí pisári vychádzali z predstavy, že ide o aritmetickú postupnosť tvaru:

$$1, 1+d, 1+2d, 1+3d, 1+4d \tag{2.1}$$

2. Ďalej je tu podmienka, ktorú je možné interpretovať tak, že súčet počtu chlebov troch horných mužov v usporiadaní sa rovná súčtu chlebov dvoch mužov dole v usporiadaní.

3. Chybným predpokladom je to, že prvým členom tejto postupnosti explicitne stanovili číslo 1. Stručný prepis riešenia tejto úlohy zaznamenaného na papyruse:

   - Zo vzťahu 2.1 vypočítame $d = 5\frac{1}{2}$ $(= \frac{11}{2})$
   - Ide teda o postupnosť $1,\ 6\frac{1}{2},\ 12,\ 17\frac{1}{2},\ 23$, ktorej súčet je 60.
   - Číslo 60 musíme vynásobiť číslom $1\frac{2}{3}$, aby sme získali súčet 100.

4. Hľadaná aritmetická postupnosť je $1\frac{2}{3},\ 10\frac{5}{6},\ 20,\ 29\frac{1}{6},\ 38\frac{2}{3}$, ktorej diferencia je $9\frac{1}{6}$.

□

V súčasnosti by sa táto úloha mohla riešiť ako sústava dvoch lineárnych rovníc o dvoch neznámych. Chybný predpoklad **nahradíme neznámou** a. Dostaneme rovnice:

$$a + (a+d) + (a+2d) + (a+3d) + (a+4d) = 100$$

$$a + (a + d) = 1/7[(a + 2d) + (a + 3d) + (a + 4d)]$$

Jednoduchým výpočtom by sme sa dostali k tomu istému riešeniu.
Rozdiel medzi egyptským a súčasným riešením nespočíva len v zovšeobecňovaní pomocou neznámych, ale aj v povahe matematického prístupu k problému, ktorý riešime.

2.2.1 Historický vývoj pojmu zlomok

To, ako sa pojem zlomok vyvíjal a ako sa neskôr zavádzal do škôl, je skvelým príkladom toho, že matematické myslenie sa vyvíja postupne, v etapách, a nie skokovo. Historický vývoj zlomku má pozoruhodnú paralelu so spôsobom, akým si pojem zlomok osvojujú žiaci v školskej matematike. V oboch prípadoch ide o **špirálovitý proces**, v ktorom sa pojem opakovane vracia, no zakaždým na vyššej úrovni abstrakcie a porozumenia.

Zlomok v starovekom Egypte – zlomok ako operátor

Najstaršie zachované matematické texty zo starovekého Egypta (napr. Rhindov papyrus, približne 1650 pred n. l.) ukazujú, že Egypťania pracovali so zlomkami výlučne v podobe **kmeňových zlomkov**, teda zlomkov tvaru

$$\frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zlomok v ich chápaní nepredstavoval samostatné číslo (množstvo), ale **operáciu**: „vezmi jednu n-tinu z celku“. Aj v príklade R403 vidíme, že zlomky vystupujú ako pokyny na rozdelenie, nie ako objekty, s ktorými by bolo možné voľne operovať. Hodnota diferencie $d = 5\frac{1}{2}$ nie je chápaná ako číslo $\frac{11}{2}$, ale ako výsledok procedurálneho postupu, ktorý je následne škálovaný. Z didaktického hľadiska je dôležité zdôrazniť, že egyptská matematika:

- nepoznala všeobecný zápis zlomku $\frac{p}{q}$,
- nepracovala so zlomkom ako s číselným objektom,
- využívala metódu chybného predpokladu a škálovania namiesto algebraických vzťahov.

Paralela so školskou matematikou – prvá etapa zavádzania zlomkov

Analogická situácia nastáva v školskej matematike, najmä v **nižších ročníkoch 2. stupňa ZŠ (5. – 6. ročník)**. Zlomok sa tu zavádza predovšetkým:

- ako **operátor** („vezmi polovicu“, „vezmi tri štvrtiny z koláča“),
- prostredníctvom konkrétnych modelov (delenie celku, meranie, separované modely).

V tejto fáze žiaci často:

- nevnímajú zlomok ako číslo,
- nedokážu ho umiestniť na číselnú os,
- pracujú so zlomkami prevažne procedurálne.

Zlomok tu plní rovnakú funkciu ako v egyptskej matematike: je nástrojom konania, nie abstraktným objektom.

Grécka matematika – zlomok ako pomer

Výrazný posun nastáva v antickom Grécku. Grécki matematici začali chápať zlomky najmä ako **pomery dvoch veľkostí**, pričom kládli dôraz na geometrickú interpretáciu. Pomer bol vzťahom, nie číselným objektom. Aj tu nachádzame paralelu so školskou matematikou približne od 7. ročníka ZŠ:

- žiaci porovnávajú kmeňové zlomky, pričom využívajú adresu v intevale $\langle 0, 1 \rangle$,
- zlomky už chápu ako množstvá, vedia rozhodnúť „väčší – menší zlomok“,
- využívajú úsečky, obrázky a pomerové modely bez explicitnej numerickej reprezentácie.

Stredovek a novovek – zlomok ako číslo

Až s rozvojom aritmetiky v islamskom svete a neskôr v Európe sa postupne začalo uvažovať o zlomku ako o čísle v tom modernom zmysle. Zlomok sa stáva prvkom číselného oboru, s ktorým možno vykonávať operácie, zapisovať ho v jednotnom tvare $\frac{p}{q}$ a umiestňovať ho na číselnú os. Táto etapa zodpovedá vyšším ročníkom ZŠ a SŠ, keď:

- žiak chápe zlomok ako bod na číselnej osi (adresa),
- rozumie ekvivalencii zlomkov,
- dokáže pracovať so zlomkami algebraicky.

Poznámka 2

Cieľom práce s historickými kontextmi nie je len nejaká rekonštrukcia dejín matematiky. Ide skôr o porozumenie procesu vzniku pojmov, ktorý sa analogicky objavuje aj v myslení žiakov pri budovaní týchto matematických pojmov.

Didaktická interpretácia – špirálovitý vývoj pojmu zlomok

Historický vývoj ukazuje, že porozumenie zlomkom sa nedá pochopiť naraz. Každá etapa vývoja má svoj zmysel a funguje vo svojom kontexte. Ak budeme etapy preskakovať, žiakovi sa učivo síce podarí zvládnuť, ale bude to len formálne a povrchné.

Rovnaký princíp platí aj v školskej matematike. Špirálovitý návrat k pojmu zlomok na vyššej úrovni abstrakcie nie je prejavom neefektívnosti vyučovania, ale nevyhnutnou podmienkou hlbokého porozumenia.

Z tohto pohľadu môžeme tvrdiť, že vývin matematického myslenia u žiaka v oblasti zlomkov v mnohom kopíruje historický vývoj tohto pojmu v dejinách matematiky – od operátora, cez pomer, až po číslo.

Metodické odporúčania pre vyučujúceho

- V nižších ročníkoch ZŠ klásť dôraz na zlomok ako operátor a pracovať s konkrétnymi modelmi (delenie celku, meranie, reálne situácie).
- Neurýchľovať prechod k formálnym algoritmom operácií so zlomkami.
- V vo vyšších ročníkoch ZŠ systematicky prepájať rôzne významy zlomku (mnohosť – operátor – adresa).
- Zdôrazňovať, že návrat k pojmu zlomok na vyššej úrovni nie je opakovanie, ale prehĺbenie porozumenia.
- Využívať historické úlohy (napr. egyptské rozdeľovanie) ako motivačný a diagnostický nástroj.
- Pri hodnotení práce so zlomkami je potrebné dôsledne odlišovať správny výpočet od správneho porozumenia pojmu.

2.3 Didaktika matematiky ako vedná disciplína

Didaktika matematiky je **samostatná vedná disciplína**, ktorá skúma zákonitosti procesu vyučovania a učenia sa matematiky. Jej vedecký výskum sa zameriava na tri prepojené oblasti:

Predmet výskumu: sleduje vzťah medzi učiteľom a žiakom, obsah učiva a prostriedky, ktorými sa učí. Skúma kognitívne procesy, ktoré prebiehajú pri osvojovaní nových poznatkov. V podstate ide o celý proces sprostredkovania a učenia sa matematiky.

Metódy výskumu: využíva analýzu učebníc, pedagogické experimenty, didaktické testy, pozorovanie, rozhovory so žiakmi či historicko-komparatívne štúdie. Metódy sú zamerané

predovšetkým na empirické a experimentálne prístupy.

Úlohy didaktiky matematiky: objasňovať ciele matematického vzdelávania, určovať optimálny obsah, vypracúvať metódy výučby a hodnotenia, skúmať efektívnosť edukačných postupov.

Didaktika matematiky analyzuje

- ciele, obsah;
- metódy, prostriedky;
- výsledky vyučovania.

Učiteľ, ktorý chápe didaktiku matematiky ako vedu, sa opiera o overené výsledky a nie iba o vlastnú skúsenosť či improvizáciu. Tým rastie profesionalita jeho práce. Ak chceme porozumieť didaktike matematiky v plnom rozsahu, musíme ju vnímať v súvislosti s inými vedami.

Obsah vyučovania matematiky na ZŠ a SŠ

Obsah školského vyučovania matematiky je výsledkom didaktickej transformácie – výberu, úpravy a usporiadania poznatkov matematiky do podoby vhodnej pre žiakov. Zohľadňuje:

1. Vekové osobitosti: pre nižšie ročníky sú typické intuitívne a názorné prístupy, pre vyššie ročníky abstrakcia a formalizácia.
2. Základná škola: prirodzené čísla, operácie, zlomky, percentá, elementárna geometria, úvod do algebry, štatistika a pravdepodobnosť.
3. Stredná škola: algebraické štruktúry, funkcie a ich grafy, planimetria a stereometria, analytická geometria, kombinatorika, diferenciálny a integrálny počet v elementárnej podobe.
4. Vertikálne prepojenie: obsah sa buduje v špirále – žiak sa k témam vracia na vyššej úrovni, čím sa rozvíja kontinuita poznania.
5. Didaktické ciele: formovanie logického myslenia, schopnosti riešiť problémy a pripraviť žiaka na praktické aj vysokoškolské využitie matematiky.

Poznámka

Dôležité je, aby učiteľ dokázal vidieť „veľkú mapu“ obsahu a ukázal žiakom zmysel jednotlivých tém v širšom kontexte matematiky a reálneho života.

Didaktika matematiky neskúma len to, ***čo*** sa má učiť, ale aj ***prečo*** a ***ako***. Nejde len o výber pojmov či algoritmov, ale o hlbšie otázky o zmysle, poradí a spôsobe, akým sa učivo

sprostredkuje. Tieto tri otázky (čo, prečo, ako) nie sú oddelené, ale tvoria jeden prepojený didaktický celok. Zvolený obsah totiž priamo ovplyvňuje to, aké metódy použijete, a tie zase určujú, čo sa žiak reálne dokáže naučiť.

Čo sa má učiť, ale aj prečo a ako

1. Otázka *čo učiť* priamo súvisí s obsahovou stránkou matematiky:

   - ktoré pojmy, vzťahy a postupy považujeme za základné,
   - v akom poradí ich zavádzame a akú mieru presnosti od žiakov vyžadujeme.

   Táto rovina je do veľkej miery daná učebnými plánmi a kurikulom. Zároveň musíme upozorniť, že rovnaký obsah môže byť žiakmi pochopený veľmi rozdielne.

2. Otázka *prečo učiť* smeruje k cieľom matematického vzdelávania. **Matematika** nie je len nástrojom na riešenie praktických úloh, ale aj **prostriedkom rozvoja myslenia**:

   - učí presne formulovať problémy, hľadať vzťahy,
   - rozlišuje medzi domnienkou a istotou,
   - argumentuje na základe dôkazov.

   Didaktika matematiky sa preto nezaoberá iba okamžitou využiteľnosťou učiva, ale aj jeho **dlhodobým vplyvom na kognitívny rozvoj** žiaka.

   Otázke *prečo učiť* sa budeme venovať v nasledujúcej kapitole a priebežne v ďalších kapitolách.

3. Otázka *ako učiť* patrí k jadru didaktického skúmania. Didaktický proces vyučovania matematiky zahŕňa:

   - výber metód, foriem práce, ktoré umožňujú zvyšovať efektívnosť matematického vzdelávania,
   - návrh aj tvorbu modelov a reprezentácií, ktoré podporujú porozumenie pojmov a pomáhajú zvládnuť zložitejšie algoritmy.

   Rozdiel medzi mechanickým nácvikom a zmysluplným učením spočíva práve v spôsobe, akým je učivo sprostredkované.

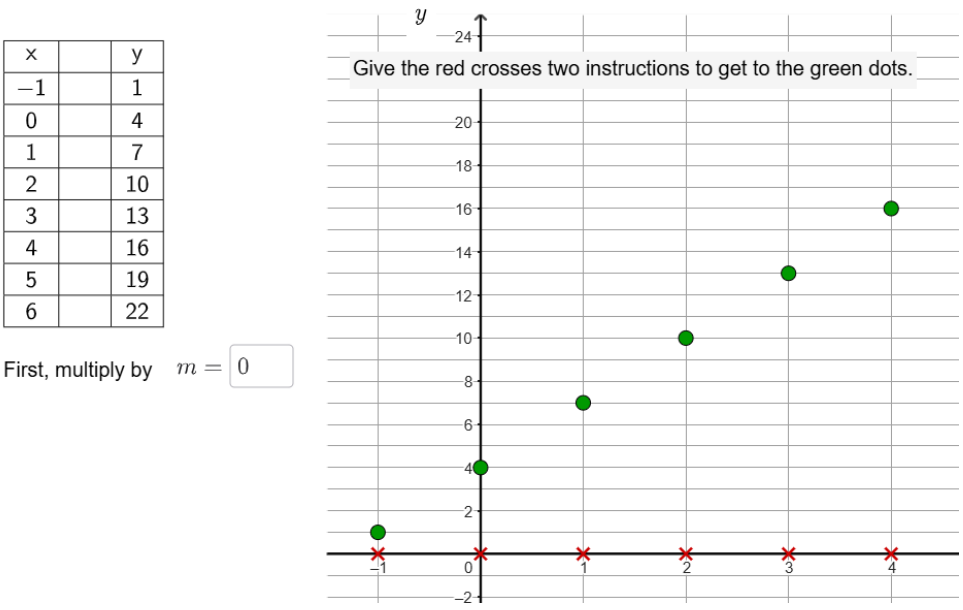
Didaktika matematiky preto sleduje, ako žiaci uvažujú, aké chyby robia, aké predstavy si vytvárajú a ako tieto predstavy postupne menia.

Interpretácia *Čo sa má učiť, ale aj prečo a ako.*

Príklad: Lineárne funkcie

Nie grafy, ale vzťahy

Pri vyučovaní lineárnych funkcií nejde len o kreslenie priamok, ale o pochopenie vzťahu medzi dvoma veličinami. Rovnica $y = ax + b$ opisuje, ako sa jedna veličina mení v závislosti od druhej. Nasledujúci applet ilustruje túto myšlienku.



Obr. 2.2: Lineárna funkcia
Applet je dostupný na: https://www.geogebra.org/m/zeqcunfr

Cieľom práce s appletom nie je nájsť čísla a a b mechanicky, ale porozumieť významu jednotlivých krokov ako modelu vzťahu medzi veličinami. V applete (obr. 2.2) sú červené krížiky priradené k jednotlivým hodnotám premennej x. Zelené body predstavujú výsledné hodnoty premennej y.

1. Vašou úlohou je pomocou **dvoch opakovaných výpočtových krokov** (s možnosťou iterovať tieto 2 kroky) presunúť červené krížiky do polohy zelených bodov. Kroky pre iterácie:
   - zadajte m a stlačte Enter,
   - zadajte b a stlačte Enter,
   - „try again“ - iterujte až dôjdete k požadovanému výsledku.
2. Každý krok predstavuje jednu operáciu, ktorá sa vykonáva so všetkými hodnotami rovnako.
3. Vyriešte ďalšie úlohy zo stránky https://www.geogebra.org/m/zeqcunfr.

Prípadný mikro-dialóg pri práci s appletom

Žiak: Zelené body sú pevne umiestnené. Červené zmenia polohu ak zadám číslo m ?

Učiteľ: Áno, ale *úloha spočíva v nájdení vhodného čísla* m.

Žiak: Takže ide o to, čo sa stane s červenými bodmi, ak zmením číslo x urobí?

Učiteľ: Presne tak. Skús povedať, čo sa stane s hodnotou y, keď sa x zväčší o 1.
Sleduj tabuľku vľavo.

Žiak: Zdá sa, že hodnoty v stĺpci pre y sa každé zväčší o 3.

Učiteľ: A to je veľmi dôležitá informácia. Čo nám to hovorí o vzťahu medzi x a y?

Žiak: Že sa nemenia náhodne, ale pravidelne?

Učiteľ: Presne. A práve toto pravidlo sa snažíme zapísať rovnicou.
Graf je len spôsob, ako toto pravidlo vidíme.

Pomocné otázky pre žiakov:

1. Ako sa mení hodnota y, keď sa hodnota x zväčší o 1?
2. Ktorý výpočtový krok zodpovedá *násobeniu* premennej x?
3. Ktorý krok predstavuje *posun grafu* nahor alebo nadol?
4. Viete zapísať vzťah medzi x a y pomocou rovnice?
5. Zovšeobecnenie: Na základe pozorovania určte predpis funkcie v tvare $y = ax + b$.

Po takomto experimentovaní by učiteľ mohol uviesť vhodnú interpretáciu z reálneho života, ktorý zodpovedá modelovej matematickej situácii z obrázka 2.2. Uvádzame možnú reálnu situáciu.

Reálna situácia

Cena služby

Učiteľ: Predstavme si, že ide o cenu taxi služby.

- Premenná x označuje počet kilometrov jazdy.
- Premenná y označuje celkovú cenu v eurách.

Taxi má:

- nástupný poplatok 4 €,
- cenu 3 € za každý kilometer.

Učiteľ: Úlohou žiakov je:

1. opísať slovami, ako sa cena mení so vzdialenosťou,
2. určiť, ktorý krok v applete zodpovedá nástupnému poplatku,
3. určiť, ktorý krok zodpovedá cene za kilometer,
4. zapísať vzťah medzi vzdialenosťou a cenou pomocou rovnice.

$$y = 3x + 4$$

Dôležité

Didakticky je dôležité, aby žiak nevidel graf len ako geometrický objekt, ale ako model situácie: rast nákladov, závislosť ceny od množstva, alebo vzťah medzi časom a dráhou pri rovnomernom pohybe.

Pre hlbšie pochopenie otázok *Čo sa má učiť*? *Ale aj prečo a ako*? a hľadaní odpovedí na tieto otázky, študentom učiteľstva matematiky pomáha **analyzovať rôzne reálne situácie**.

Podobne ako pri úlohe o lineárnej funkcii, učitelia matematiky sa môžu zamerať na didaktický problémy z iných tematických oblasti. Napríklad na témy týkajúce sa

- zlomkov,
- záporných čísel,
- matematických dôkazov resp. argumentácie.

To sú témy, pri ktorých žiaci základných škôl zvládajú formálny postup, ale bez dôsledného poznania vzájomných vzťahov zostávajú s ich porozumením.Uvádzame niektoré východiskové myšlienky pri spracovaní vyššie uvedených tematických celkov.

Zlomky

Viac než „počítanie s koláčmi“.

Zlomky sa v škole často motivujú delením koláča alebo pizze. Didakticky však nejde primárne o jedlo, ale o budovanie predstavy *vzťahu časti a celku*. Táto predstava sa neskôr prenáša do práce s mierami, percentami, hustotou, rýchlosťou či pravdepodobnosťou.

Ak žiak chápe zlomok len ako symbolický zápis, dokáže síce vykonať algoritmus, no má ťažkosti pri interpretácii výsledku. Didaktická otázka preto neznie, či vie žiak zlomky sčítavať, ale či rozumie tomu, *čo sa v skutočnosti sčítava.*

Reálny presah: pomery v recepte, podiel práce, percentuálne zľavy, pravdepodobnosť.

Záporné čísla

Skúsenosť, nie pravidlo.

Záporné čísla nie sú len formálnym rozšírením číselnej osi. Predstavujú nový typ myslenia, v ktorom sa pracuje s opačnosťou, smerom a kompenzáciou.

Didakticky je dôležité, aby žiak mal skúsenosť so situáciami, kde záporné čísla dávajú zmysel: dlh a kredit, teplota pod nulou, zmena výšky alebo posun v opačnom smere. Bez tejto skúsenosti sa pravidlá pre sčítanie a násobenie záporných čísel javia ako umelé a nezrozumiteľné.

Matematický dôkaz

Nie formalizmus, ale istota.

Matematický dôkaz sa v škole často vníma ako formalizmus bez praktického významu. Z didaktického hľadiska však ide o kľúčový nástroj rozlišovania medzi tým, čo „funguje v niekoľkých prípadoch“, a tým, čo platí vždy.

Dôkaz učí žiaka, že presvedčenie nestačí, ak nie je podložené argumentmi. Tento spôsob myslenia má presah aj mimo matematiky: do prírodných vied, techniky a kritického hodnotenia informácií.

Didaktika matematiky sa preto nezaoberá len výberom učiva, ale skúma hlbší zmysel vyučovania: aké predstavy si žiaci vytvárajú, ako sa ich myslenie vyvíja a aké nástroje učiteľ používa, aby tento vývoj podporil.

Čo, prečo, ako?

Otázky *čo*, *prečo* a *ako* sú v matematickom vzdelávaní neoddeliteľné a tvoria základ didaktického uvažovania.

3 Vedecké poznávanie vo vyučovaní

Úvod

Vedecké poznávanie vo vyučovaní matematiky možno chápať ako sled metodických krokov, v ktorom sa z pozorovania a experimentovania postupne rodia hypotézy, tieto sa overujú, korigujú a nakoniec zovšeobecňujú do teórií. Analogicky vo vyučovaní matematiky učiteľ vedie žiakov od problémovej situácie k formulovaniu predpokladov, ich skúmaniu, k dôkazom a aplikáciám. Takýto prístup nielen rozvíja matematické myslenie, ale zároveň napodobňuje proces poznávania v samotnej matematike.

Názornosť v matematike má významné miesto vo vyučovaní: **vizualizácia**, teda názorné znázorňovanie matematických štruktúr. Už Euklides zdôrazňoval kreslenie obrazcov ako súčasť dôkazu a moderné technológie tento princíp posúvajú ďalej – umožňujú žiakovi nielen sledovať obrázok, ale aj dynamicky manipulovať s objektmi.

Didaktické ciele kapitoly

Po absolvovaní kapitoly by mal študent učiteľstva matematiky:

1. rozumieť analógii medzi vedeckým poznávaním (pozorovanie – hypotéza – overenie – zovšeobecnenie) a procesom učenia sa matematiky v triede,
2. účelne využívať vizualizáciu a IKT (GeoGebra, AI) ako podporu experimentovania a formulovania dôkazov.
3. vedieť plánovať problémové vyučovanie tak, aby žiak prešiel od skúmania k argumentácii,
4. poznať a cielene používať heuristické stratégie a typické učiteľské otázky,

V tejto kapitole sledujeme prepojenie vedeckého poznávania s vyučovaním matematiky najmä prostredníctvom problémového vyučovania a heuristických stratégií. Konkrétne sa zameriame na:

1. fázy bádateľského cyklu a ich analógiu vo vyučovaní matematiky,

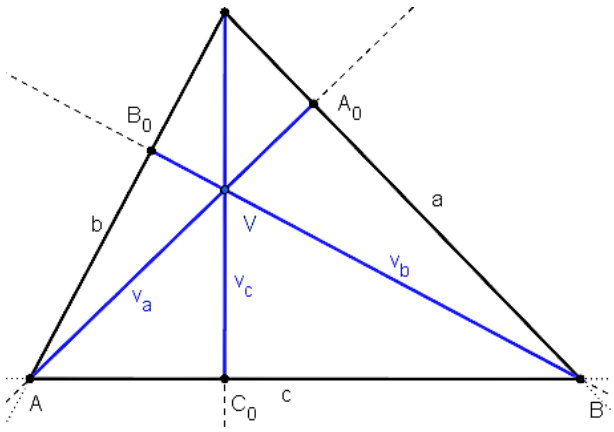
2. problémové vyučovanie a jeho metodické postupy,

3. heuristické stratégie a typické učiteľské otázky,

4. možnosti IKT podpory (Moodle, GeoGebra) na konkrétnych príkladoch.

Didaktická poznámka

Názornosť a problémovosť sa nedajú vnímať izolovane – učiteľ vytvára pre žiakov „mikro-model“ vedeckého bádania. Pri probléme *„Kde sa pretínajú výšky trojuholníka?“* môže žiak najprv pozorovať, potom experimentovať (GeoGebra), vysloviť hypotézu a nakoniec dôjsť k dôkazu (porovnaj obr. 3.1). Takto sa krokmi približuje k metodológii matematiky ako vedy.



Obr. 3.1: Priesečník výšok, applet si otvoríte Tu.

3.0.1 Prepojenie s IKT

Informačné a komunikačné technológie (napr. GeoGebra, Moodle) umožňujú vizualizovať problémy, zbierať dáta a analyzovať výsledky žiakov, čím podporujú experimentovanie aj argumentáciu.

- **GeoGebra:** dynamická manipulácia s objektmi umožňuje rýchle testovanie hypotéz.

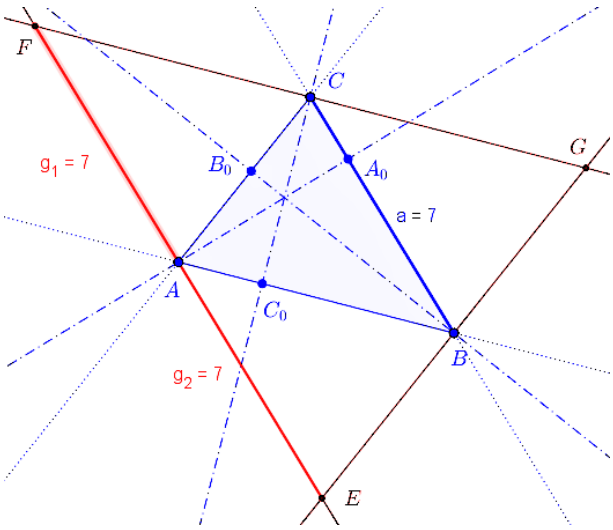
- **Moodle:** úloha typu *otvorená odpoveď* vedie žiakov k zapísaniu hypotézy a opisu postupu; učiteľ môže oceniť originálne heuristické prístupy.

Stredná škola: Scenár využitia IKT

Učiteľ zadá (napr. v Moodle) úlohu: „Skúmajte, či sa výšky trojuholníka vždy pretínajú v jednom bode.“ Žiaci majú:

1. zostrojiť trojuholník v GeoGebre a zakresliť jeho výšky,
2. v Moodle zapísať hypotézu a krátky opis postupu,
3. diskutovať vo fóre o rôznych polohách ortocentra.

Na záver učiteľ poskytne spätnú väzbu a vyzdvihne jasnú argumentáciu alebo originálny prístup (porovnaj obr. 3.2)



Obr. 3.2: Výšky v trojuholníku - dôkaz. Applet si otvoríte Tu.

3.1 Vedecké poznávanie vo vyučovaní matematiky

Charakteristickou črtou vedeckého poznávania je proces systematického skúmania, dôslednej analýzy a následného vysvetľovania javov a vzťahov vo svete. V matematike a didaktike matematiky ide o spôsob, ako systematicky zisťovať pravidlá, princípy a postupy, ktoré umožňujú efektívne vyučovanie a učenie sa. Cieľom tejto sekcie je ukázať, ako sa metódy vedeckého skúmania dajú analogicky uplatniť vo vyučovaní matematiky.

Proces skúmania v matematike sa v školskom prostredí neprejavuje formálnymi dôkazmi, ale spôsobom kladenia otázok, hľadania vzťahov, overovania tvrdení a práce s chybou.

Empirické overenie a matematická istota

V školskom experimente (napr. v GeoGebre) môžeme získať vysokú mieru presvedčenia, že tvrdenie platí. Ide však o *empirickú istotu* založenú na pozorovaní mnohých prípadov. Matematická istota vzniká až vtedy, keď žiak dokáže vysvetliť, *prečo* tvrdenie platí vždy. Úlohou učiteľa je preto viesť žiaka od experimentu k argumentácii a podľa úrovne aj k dôkazu.

Úlohou učiteľa nie je sprostredkovať hotové poznatky, ale vytvárať situácie, v ktorých sa žiak učí myslieť podobne ako matematik: formuluje hypotézy, skúša ich, opravuje sa a postupne spresňuje svoje predstavy.

Typická žiacka miskoncepcia

Žiaci často považujú tvrdenie za dokázané, ak sa „potvrdilo na mnohých príkladoch“. Tento spôsob uvažovania je prirodzený, ale v matematike nestačí. Didaktickou úlohou učiteľa je oceniť experiment ako zdroj hypotézy, no zároveň dôsledne odlišovať *overenie* od *zdôvodnenia*.

3.1.1 Fázy vedeckého poznávania

Vedecké skúmanie možno rozdeliť do niekoľkých fáz, ktoré sú užitočné aj pre učiteľov a študentov matematiky:

1. **Formulácia problému alebo výskumnej otázky** – určenie presného cieľa a definovanie, čo chceme skúmať.

2. **Hypotéza alebo predpoklad** – predpoklad, ktorý je možné testovať experimentom alebo pozorovaním.

3. **Zber dát** – využitie pozorovania, experimentu, dotazníkov alebo iných nástrojov na získanie relevantných informácií.

4. **Analýza dát** – spracovanie zozbieraných informácií pomocou kvantitatívnych alebo kvalitatívnych metód.

5. **Interpretácia a diskusia výsledkov** – hodnotenie a vysvetlenie zistení, identifikácia vzťahov a súvislostí.

6. **Záver a odporúčania do praxe** – formulácia záverov a odporúčaní pre ďalšie vyučovanie alebo výskum.

3.1.2 Výskumné metódy v kontexte vyučovania

Profesor Kopka navrhol viacero metód, ktoré podporujú systematické a kritické myslenie vo vedeckom poznávaní. Zdôrazňuje, že stratégia alebo taktika pri riešení problémov sa nazýva **heuristika**. Výskumný prístup pri výučbe školskej matematiky sa v značnej miere opiera o **experimentovanie**. Uvedieme použitie heuristickej metódy na jednoduchom matematickom príklade.

Experimentovanie ako heuristická stratégia

Je dané celé číslo. Vydelím ho číslom 3. K výsledku pripočítam číslo 7. Takto získané číslo ešte vynásobím číslom -2. Výsledné číslo je -6. Aké číslo bolo dané na začiatku?

Riešenie. Budeme experimentovať:

1. Skúsime, či by „dané číslo“ nemohlo byť napr. číslo 6 (skúšame len čísla deliteľné tromi?).
2. Vypočítame, že v tomto prípade výsledné číslo je $(2+7)\cdot(-2)=-18$.
3. Teda číslo 6 nemôže byť daným začiatočným číslom.
4. Zvolíme iné číslo, napr. 3 a budeme si všímať, ako sa približujeme k výsledku: dostaneme -16.
5. Ak „nemáme šťastie“, pokračujeme v experimentovaní.

Priebežné zistenie. Experimentálne číslo sa zmenšilo o 3 a „výsledné číslo“ sa zväčšilo o 2. K výsledku (t. j. k číslu -6) sa „približujeme“. Pokračujeme v experimentovaní a výsledky zapíšeme do tabuľky.

Dané číslo	Výsledné číslo
6	-18
3	-16
0	-14
...	...

Tabuľka 3.1: Experimentálne výsledky

Pokúsme sa postup zovšeobecniť:

1. K číslu -18 je nutné 6-krát pripočítať číslo 2, aby sme získali výsledné číslo -6.
2. K číslu 6 je nutné 6-krát odpočítať číslo 3: $6+6\cdot(-3)=-12$.

Dané číslo by teda mohlo byť -12, o čom sa presvedčíme skúškou.

Odpoveď. Na začiatku bolo dané číslo -12. □

Experimentovanie v predchádzajúcej úlohe **nie je náhodné skúšanie**, ale **je riadené pozorovanie zmien**: zmena vstupu o -3 spôsobuje zmenu výstupu o $+2$. Žiak tak objavuje vzťah medzi veličinami, ktorý potom umožní zovšeobecnenie a spätné určenie hľadaného čísla.

Tieto všeobecné fázy a výskumné metódy sa neobmedzujú iba na akademický výskum. Pri vhodnej didaktickej adaptácii ich môžeme využiť aj v školskej matematike, kde majú potenciál viesť žiakov k aktívnemu objavovaniu a kritickému mysleniu.

Terminologická poznámka

Pojem *výskumná metóda* označuje všeobecný rámec skúmania (pozorovacia, analytická, experimentálna), kým *heuristická stratégia* sa vzťahuje na konkrétny postup alebo taktiku, ktorú žiak volí pri riešení problému (analógia, náčrt, špeciálny prípad a pod.). Vo vyučovaní sa obe roviny prirodzene prelínajú.

3.1.3 Využitie výskumných metód v školskej matematike

Celý proces poznávania s využitím výskumných metód môžeme stotožniť so schémou:

$$\text{konkretizácia (špecializácia)} \rightarrow \text{zovšeobecňovanie} \rightarrow \text{hypotéza} \rightarrow \text{zdôvodnenie / dôkaz.}$$

Uvedená schéma je v súlade so štruktúrou separovaných a generických modelov (Hejný) a zároveň odráža hlavné rysy problémového vyučovania v matematike na ZŠ a SŠ. Preto heuristické výskumné metódy možno výhodne využiť aj pri problémovom vyučovaní matematiky. Sú to predovšetkým:

- **Analytická metóda** – systematické rozkladanie problému, identifikácia jeho častí a vzťahov.
- **Experimentálno-pozorovacia metóda** – získavanie empirických dát o správaní a úspešnosti žiakov pri riešení úloh.
- **Historicko-porovnávacia metóda** – skúmanie zmien didaktických postupov v čase; ukazuje vývoj matematického myslenia.
- **Matematická modelácia** – využitie modelov na kvantifikáciu vzťahov, napr. medzi typom úlohy a úspešnosťou žiakov.

3.1.4 Heuristické stratégie vo vyučovaní matematiky

Heuristické stratégie predstavujú osvedčené postupy, ktorými sa žiak alebo učiteľ usiluje o riešenie problémovej úlohy. Ich význam spočíva v tom, že poskytujú nástroje na prekonanie tzv. *blokád v myslení*, keď priama cesta k riešeniu nie je zrejmá. Učiteľ môže tieto stratégie nielen uplatňovať, ale aj reflektovať spolu so žiakmi, čím rozvíja metakogníciu – schopnosť „učiť sa učiť“.

Príklady stratégií.

- **Analógia** – hľadanie podobnosti medzi novou úlohou a už riešenou situáciou.
- **Špeciálny prípad** – skúmanie jednoduchej alebo hraničnej situácie.
- **Náčrt** – vizualizácia problému pomocou obrázku, grafu alebo schémy.
- **Experimentovanie** – skúšanie viacerých možností a sledovanie vzorcov či pravidelností.
- **Algoritmizácia** – systematizovanie postupu do krokov alebo pravidiel.
- **Rozklad problému** – dekompozícia na menšie, ľahšie riešiteľné podproblémy.

Prepojenie s metakogníciou. Učiteľ, ktorý pracuje s heuristickými stratégiami, vedie žiakov k uvedomovaniu si *ako uvažujú*: ktoré stratégie im pomohli a ktoré boli menej účinné. Žiaci sa učia plánovať kroky, sledovať priebeh riešenia a spätne hodnotiť vlastné myslenie.

3.1.5 Analógia s problémovým vyučovaním

Vedecké poznávanie a problémové vyučovanie sú príbuzné procesy:

- začínajú identifikáciou problému,
- vyžadujú tvorbu hypotéz a predpokladov,
- spoliehajú sa na pozorovanie a experiment,
- končia analýzou, interpretáciou a závermi.

Ukážka: Súčet prvých n nepárnych čísel

Majme určiť súčet prvých n nepárnych čísel.

Riešenie.

- **Špeciálny prípad:**
  pre $n = 1$: $1 = 1^2$,
  pre $n = 2$: $1 + 3 = 4 = 2^2$,
  pre $n = 3$: $1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$.
- **Experimentovanie:** pre $n = 4$: $1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$.
- **Náčrt:** rastúci štvorec z jednotkových štvorčekov (1, potom 3 okolo, potom 5 okolo, …).
- **Záver:** $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$.

□

Metodická poznámka

Úloha je vhodná na ukážku viacerých heuristických stratégií v praxi. Učiteľ môže viesť diskusiu tak, že nechá žiakov najprv vypočítať niekoľko *špeciálnych prípadov* a hľadať pravidelnosť. Nasleduje *experimentovanie* – skúšanie ďalších hodnôt a preverovanie hypotézy. Pri otázke *„Nepodobá sa to na niečo, čo už poznáte?“* sa dá využiť *analógia*. Vizuálny *náčrt* podporuje porozumenie a zároveň metakognitívnu reflexiu („Ako som prišiel na tento vzorec?“).

Typické heuristické otázky učiteľa.

1. Otázky pri fáze „hľadania“.
   - Čo sa stane, ak skúsiš jednoduchší alebo špeciálny prípad?
   - Vyskytuje sa podobný problém, ktorý už poznáme?
   - Ako by sme situáciu znázornili na obrázku?
   - Je možné rozdeliť úlohu na viac menších častí?
   - Aký je ďalší krok, ktorý by si mohol urobiť?
   - Ako môžeš overiť, či je tvoje riešenie správne?
   - Vieš opísať, akú stratégiu práve používaš?
2. Otázky na prechod k dôkazu.
   - Prečo si myslíš, že to bude platiť vždy, nie len v tomto príklade?
   - Ktorý krok je v tvojom uvažovaní rozhodujúci a prečo?
   - Vieš vysvetliť, čo sa v riešení *nemôže* zmeniť (čo je invariant)?
   - Ako by si presvedčil spolužiaka, ktorý ti neverí?

3.2 Problémové vyučovanie

Problémové vyučovanie predstavuje taký prístup k vyučovaniu matematiky, v ktorom sa nové poznatky odvodzujú z riešenia problémových úloh. Žiaci sú vedení k aktívnej činnosti, k objavovaniu a k hľadaniu vlastných riešení. Úlohou učiteľa nie je podať hotový poznatok, ale vhodne viesť proces riešenia problému.

Heuristické stratégie tvoria praktickú výbavu žiaka pri riešení problémov. Problémové vyučovanie je didaktické usporiadanie výučby, v ktorom sa táto výbava cielene rozvíja. Problémové vyučovanie:

- rozvíja tvorivé a kritické myslenie žiakov,
- vedie k hlbšiemu porozumeniu matematických pojmov,
- podporuje motiváciu žiakov prostredníctvom otázok a výziev,
- umožňuje rozvíjať spoluprácu v skupine pri riešení.

Historická vsuvka

Thalés z Milétu (6. stor. pred n. l.) je považovaný za jedného z prvých, ktorí matematické poznatky systematicky odvodzovali z pozorovania a logickej úvahy. **Euklides** (3. stor. pred n. l.) vytvoril v *Elementoch* súbor definícií, postulátov a dôkazov a vo svojich dôkazoch využíval názorné znázorňovanie (konštrukciu obrazcov), ktoré je predchodcom dnešnej vizualizácie v softvéroch typu GeoGebra.

Kde sa pretínajú výšky trojuholníka?

V danom trojuholníku skúmajte priesečník výšok a overte, či sa všetky výšky pretínajú v jednom bode. Aktivujte applet Ortocentrum – experiment.

Riešenie. Odporúčaný postup (riadené bádanie):

1. Formulácia problému: Zistite, či priesečníky dvojíc výšok predstavujú ten istý bod.
2. Stanovenie hypotézy: Výšky trojuholníka sa pretínajú v jednom bode (ortocentrum).
3. Experimentálne overenie: Meníte polohu vrcholov a sledujete, či sa hypotéza potvrdzuje.
4. Zovšeobecnenie: Formulujte tvrdenie a diskutujte o polohe ortocentra (vnútri, mimo, na vrchole).

□

Za problémovú považujeme úlohu vtedy, keď:

1. žiak nemá k dispozícii okamžitý algoritmus,
2. úloha umožňuje viac stratégií alebo viac ciest riešenia,
3. poskytuje priestor na hypotézu, overenie a zovšeobecnenie,
4. vedie k potrebe zdôvodniť postup alebo výsledok.

Žiaci pri riešení problémových úloh prechádzajú „malým vedeckým procesom“:

1. z pozorovania vytvoria hypotézu,
2. experimentujú s jej overovaním a nakoniec

3. dospejú k formulácii všeobecného tvrdenia.

Vizualizácia tu neplní len ilustračnú funkciu, ale vytvára podmienky pre následnú argumentáciu.

3.3 Vizualizácia problému

Vizualizácia patrí medzi kľúčové heuristické stratégie riešenia problémov. Umožňuje zmeniť abstraktný problém na konkrétnejší, odhaliť vzory a podporiť diskusiu. Je však potrebné zdôrazniť, že **vizualizácia nenahrádza dôkaz** – pripravuje pôdu pre jeho formuláciu.

3.3.1 Formy vizualizácie v matematike

V didaktike matematiky rozlišujeme napr.:

- *symbolické reprezentácie* (algebraické zápisy),
- *grafické reprezentácie* (grafy, tabuľky),
- *dynamické vizualizácie* (GeoGebra, Maple),
- *pojmové mapy a schémy.*

Didaktická poznámka

Súčasná prax často trpí nedostatkom názorného zdôvodňovania. Formálne sprostredkovanie poznatkov bez vizualizácie vedie k povrchnej reprodukcii učiva. Preto je dôležité cielene rozvíjať vizualizačné stratégie a integrovať ich s modernými technológiami.

3.4 Význam a poslanie matematického vzdelávania

V časti 2.3 sme sa zaoberali hlavným poslaním didaktiky matematiky, pričom sme hľadali odpovede na otázky: Čo učiť, ako a prečo učiť? S týmito otázkami úzko súvisí problém zdôvodnenia významu matematického vzdelávania pre potreby bežného života. Žiaci, študenti ale aj ľudia v aktívnom pracovnom prostredí kladú otázky typu

- „Načo mi je matematika?“,
- „Prečo musíme dokazovať?“
- „Prečo investovať do matematiky?“

Pritom očakávajú fundovanú či dokonca vedecky podloženú odpoveď. Žiaci často chcú „praktické využitie“, ale učiteľ ponúka viac typov legitimizácie matematiky (kognitívna, kultúrna, spoločenská).

Otázky o zmysle matematiky majú viac vrstiev: (1) praktickú, (2) kognitívnu (rozvoj myslenia), (3) kultúrnu (jazyk vedy) a (4) spoločenskú (kritické rozhodovanie). Nasledujúce dialógy ponúkajú učiteľovi možné odpovede primerané rôznym adresátom.

V tejto kapitole ponúkame odpovede na otázky sformulované na začiatku kapitoly vo forme simulovaných dialógov, ktoré ilustrujú rôzne roviny významu matematického vzdelávania.

Dialóg 1: Žiak ZŠ – učiteľ matematiky

Žiak: Načo sa vlastne učíme zlomky? Veď kalkulačka to spočíta.
Učiteľ: Kalkulačka vie počítať, ale nevie pochopiť, čo tie čísla znamenajú. Keď pracuješ so zlomkami, učíš sa premýšľať o častiach celku a o vzťahoch medzi nimi.
Žiak: A prečo je to dôležité?
Učiteľ: Pretože rovnakým spôsobom budeš neskôr premýšľať o rýchlosti, hustote alebo pravdepodobnosti. Matematika ťa učí rozumieť vzťahom, nie len počítať výsledky.

Analýza situácie:

- Žiak vníma matematiku ako nástroj na výpočet.
- Očakáva praktické zdôvodnenie (“na čo mi to bude”).
- Nevidí rozdiel medzi výpočtom a porozumením.

Didaktická reakcia učiteľa:

- presúva pozornosť od výsledku k významu,
- zdôrazňuje prácu so vzťahmi,
- prepája matematiku s budúcimi pojmami.

Matematika neplní len funkciu nástroja na výpočty, ale predstavuje prostriedok na budovanie pojmov a porozumenie vzťahom.
Úlohou učiteľa je viesť žiakov k tomu, aby za symbolickým zápisom videli význam — napríklad zlomok ako vzťah časti a celku, nie len ako výsledok výpočtu.

Dialóg 2: Žiak SŠ – učiteľ matematiky

Žiak: Ja tomu verím, že to platí. Prečo to ešte musíme dokazovať?
Učiteľ: Pretože v matematike nestačí, že niečo funguje v niekoľkých príkladoch. Dôkaz nám ukazuje, prečo to platí vždy.
Žiak: A na čo je to dobré?
Učiteľ: Učí ťa rozlišovať medzi domnienkou a istotou. To je základ vedeckého myslenia — vedieť, prečo niečo platí, nielen že to funguje.

Analýza situácie:

- Žiak akceptuje empirickú pravdivosť (“funguje to”).
- Nevidí potrebu všeobecného zdôvodnenia.
- Vníma dôkaz ako nadbytočný formalizmus.

Didaktická reakcia učiteľa:

- odlišuje príklad od všeobecného tvrdenia,
- zdôrazňuje univerzálnosť matematického poznania,
- prepája dôkaz s pojmom istoty a vedeckosti.

Dôkaz nie je cieľom sám o sebe, ale nástrojom kultivácie argumentácie a presného myslenia. Žiak sa učí rozlišovať medzi tým, čo sa javí ako pravdivé, a tým, čo je logicky zdôvodnené.

Dialóg 3: Štátnik – didaktik matematiky

Štátnik: Prečo by sme mali venovať toľko času matematike, keď ju väčšina ľudí v živote priamo nepoužije?
Didaktik: Pretože matematika neučí konkrétne postupy, ale spôsob, ako pracovať s problémami, neistotou a dôkazmi.
Štátnik: To nestačia digitálne nástroje?
Didaktik: Nástroje riešia úlohy. Matematika pripravuje ľudí na to, aby rozumeli dôsledkom rozhodnutí a vedeli ich zdôvodniť.

Analýza situácie:

- otázka smeruje k utilitárnemu chápaniu vzdelávania,
- matematika je redukovaná na praktickú použiteľnosť,
- ignoruje sa jej kognitívny a spoločenský význam.

Didaktická reakcia:

- presúva dôraz od použitia k mysleniu,
- zdôrazňuje prácu s argumentáciou a dôkazom,
- poukazuje na spoločenský význam matematického vzdelávania.

Matematické vzdelávanie má zásadný spoločenský význam. Rozvíja kritické a analytické myslenie, ktoré je nevyhnutné pre orientáciu v informáciách a prijímanie rozhodnutí. Matematika tak nepripravuje žiakov len na riešenie úloh, ale na porozumenie svetu, v ktorom žijú.

Záver kapitoly
Otázky „Načo je matematika?“ alebo „Prečo dokazujeme?“ nepredstavujú prekážku vo vyučovaní, ale prirodzený prejav žiackeho myslenia.
Úlohou učiteľa nie je tieto otázky obchádzať, ale využiť ich ako príležitosť na prehĺbenie porozumenia.
Matematika sa tak neprejavuje ako súbor pravidiel, ale ako spôsob myslenia, ktorý umožňuje chápať vzťahy, argumentovať a rozhodovať sa.

V tejto kapitole sme ukázali, že vedecké poznávanie nie je pre školskú matematiku „niečo navyše“, ale prirodzený rámec, v ktorom sa rodí porozumenie: od problémovej situácie cez pozorovanie, experimentovanie a formulovanie hypotéz až po argumentáciu a (primeraný) dôkaz. Takto organizované vyučovanie vedie žiakov k tomu, aby matematiku nevnímali ako súbor pravidiel, ale ako spôsob myslenia, ktorý sa dá kultivovať a rozvíjať.

Problémové vyučovanie a heuristické stratégie predstavujú praktické nástroje učiteľa, ako tento poznávací proces cielene podporovať. Typické učiteľské otázky pritom neslúžia na „prezrádzanie“ riešenia, ale na usmernenie skúmania, pomenovanie použitých stratégií a rozvoj metakognície (učenie sa učiť). Osobitnú úlohu má vizualizácia: experiment v GeoGebre alebo iná názorná reprezentácia môže byť silným zdrojom hypotézy, no didaktickou úlohou učiteľa zostáva viesť žiakov od empirického presvedčenia k matematickej istote.

Záverečné dialógy naznačili, že otázka „prečo sa učiť matematiku“ sa v triede prirodzene spája s týmto obrazom matematiky ako poznávacieho procesu: matematika rozvíja schopnosť pracovať s problémami, presne argumentovať a rozlišovať medzi domnienkou a zdôvodneným tvrdením. Na tieto východiská nadviažu ďalšie kapitoly, v ktorých sa vedecké poznávanie prejaví pri práci s modelmi, diagnostike porozumenia a pri využití umelej inteligencie ako nástroja na reflexiu žiackeho myslenia.

4 Artificial Intelligence a matematika

Východiská kapitoly

V posledných rokoch sa umelá inteligencia (AI) stáva čoraz významnejším nástrojom v oblasti vzdelávania. Jej rozvoj neovplyvňuje len technické aspekty výučby, ale zásadným spôsobom mení aj to, ako chápeme proces učenia, vyučovania a nadobúdania poznatkov. AI dnes nevystupuje iba ako podporná technológia, ale ako systém schopný pracovať s jazykom, reprezentáciami a argumentáciou, čo sú oblasti kľúčové aj pre matematické vzdelávanie.

Matematika ako jeden z najviac štruktúrovaných a logicky usporiadaných predmetov predstavuje prirodzené prostredie pre zmysluplné využitie umelej inteligencie. Jej integrácia do vyučovania matematiky otvára nové možnosti najmä v oblastiach

1. personalizovaného učenia,
2. automatizovanej spätnej väzby a hodnotenia,
3. interaktívnych výučbových nástrojov a adaptívnych systémov.

V oblasti personalizovaného učenia dokáže AI reagovať na individuálne potreby žiakov a študentov. Na základe analýzy ich odpovedí, spôsobu argumentácie alebo typických chýb môže

- identifikovať slabé miesta v porozumení matematických pojmov,
- rozlíšiť medzi chybou výpočtu a chybnou predstavou,
- navrhnúť úlohy alebo vysvetlenia zodpovedajúce aktuálnej úrovni porozumenia.

Takýto prístup je v súlade s didaktickým dôrazom na porozumenie pojmov, ktorý je v matematike dôležitejší než samotné zvládnutie algoritmov.

V oblasti hodnotenia môže AI preberať časť rutinných činností, ako je

- kontrola výsledkov,
- generovanie variantov úloh,
- poskytovanie okamžitej spätnej väzby.

Kontrola výsledkov s aktívnou pomocou AI učiteľovi pomáha sústrediť sa na kvalitatívne aspekty vyučovania, predovšetkým na analýzu žiackeho myslenia, vedenie diskusie a podporu argumentácie. Dôležité však je zdôrazniť, že AI v tomto kontexte nemá nahrádzať pedagogické rozhodovanie učiteľa, ale slúžiť ako podporný nástroj.

Osobitný význam má **využitie AI ako interaktívneho didaktického partnera.** V takomto poňatí AI

- nevystupuje ako autorita poskytujúca správne odpovede,
- ale vystupuje ako prostriedok na vyvolanie otázok, pochybností a diskusie.

Odpovede AI sa tak stávajú predmetom analýzy, porovnávania a kritického hodnotenia, čo je v súlade s cieľmi matematického vzdelávania.

Integrácia umelej inteligencie do vyučovania matematiky však so sebou prináša aj viaceré výzvy. Medzi najvýznamnejšie patria otázky didaktickej vhodnosti jej použitia, riziko povrchného osvojovania poznatkov a etické aspekty spojené s hodnotením a zodpovednosťou za rozhodovanie. Preto je nevyhnutné, aby bolo využívanie AI vo vzdelávaní sprevádzané jasným didaktickým zámerom a kritickou reflexiou zo strany učiteľa.

V tomto kontexte sa otvára diskusia o tom, ako môže umelá inteligencia prispieť ku kultivácii matematického myslenia, a zároveň o hraniciach jej využitia v školskom prostredí. Odpovede na tieto otázky nie sú technického, ale predovšetkým pedagogického charakteru.

V tejto kapitole sa umelá inteligencia nechápe ako nástroj nahrádzajúci matematické myslenie, ale ako prostriedok na jeho analýzu, rozvíjanie a reflexiu.
Základnou myšlienkou je, že odpovede AI nepredstavujú cieľ vyučovania, ale východisko pre didaktický dialóg.

Z didaktického hľadiska preto AI nechápeme ako náhradu učiteľa ani žiaka, ale ako didaktického sparingpartnera.

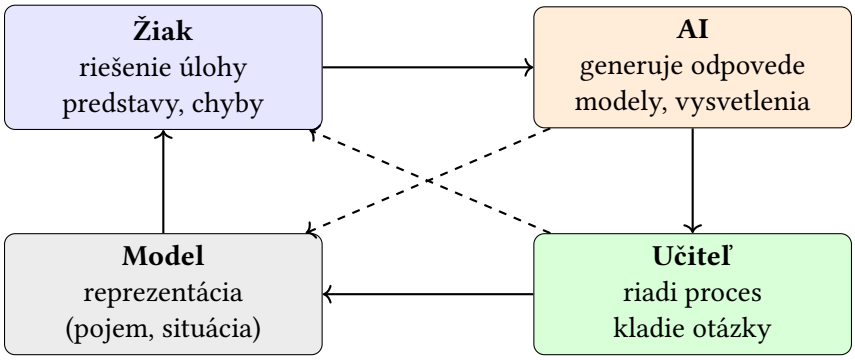
AI ako didaktický sparingpartner

Funkcia AI, ktorá umožňuje analyzovať rôzne podoby matematického myslenia.

Proces interakcie žiaka, učiteľa a AI znázorňuje diagram 4.1. Diagram znázorňuje základný didaktický cyklus práce s AI vo vyučovaní matematiky.

- Žiak vstupuje do procesu so svojím riešením, otázkami, predstavami alebo chybami.
- AI poskytuje odpovede, vysvetlenia a možné modely.
- Učiteľ tieto odpovede didakticky interpretuje, kladie doplňujúce otázky a prepája ich s vhodným matematickým modelom.

Cieľom celého procesu nie je prevzatie odpovede AI, ale hlbšie porozumenie matematickému pojmu alebo situácii.



Obr. 4.1: Didaktický model využitia AI vo vyučovaní matematiky

Plné šípky vyjadrujú základný cyklus porozumenia. Prerušované šípky označujú doplnkové väzby: AI môže navrhovať modely a učiteľ môže priamo usmerňovať žiakovo uvažovanie.

4.1 Mikro-ukážky z triednej praxe

Nasledujúce mikro-ukážky ilustrujú situácie, v ktorých AI neslúži na riešenie úloh, ale na odhaľovanie a analýzu žiackeho myslenia. Uvedené mikro-ukážky sú rozpracované do troch úrovní

1. odpoveď AI ako algoritmický vysvetľovateľ,
2. odpoveď AI ako významový vysvetľovateľ,
3. porovnanie odpovedí s možnosťou rozhodnúť žiaka, ktorá je didakticky vhodnejšia.

Spoločným znakom uvedených situácií je, že odpoveď AI nie je prijímaná ako autoritatívna, ale stáva sa predmetom diskusie, porovnávania a interpretácie. Rozhodovanie o tom, čo je pedagogicky vhodné, zostáva vždy v kompetencii učiteľa.

4.1.1 Operácie so zlomkami

Mikro-ukážka 1a: Algoritmické vysvetlenie

Žiak vyrieši úlohu

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{4}$$

a zapíše správny výsledok $\frac{11}{12}$, no nedokáže vysvetliť význam jednotlivých krokov.

1. Učiteľ požiada AI o vysvetlenie riešenia pre žiaka 7. ročníka.
2. **Možná odpoveď AI**
   - Pri sčítavaní zlomkov $\frac{2}{3}$ a $\frac{1}{4}$ najprv nájdeme spoločného menovateľa.
   - Spoločným menovateľom čísel 3 a 4 je 12.
   - Zlomok $\frac{2}{3}$ rozšírime na $\frac{8}{12}$ a zlomok $\frac{1}{4}$ na $\frac{3}{12}$.
   - Potom sčítame čitatele: $\frac{8}{12} + \frac{3}{12} = \frac{11}{12}$.
3. Učiteľ so žiakmi analyzuje odpoveď AI a kladie otázky:
   - Kde sa v tomto vysvetlení objavuje význam zlomku?
   - Čo znamená zlomok $\frac{2}{3}$?
   - Prečo práve menovateľ 12? Je to pravidlo alebo dôsledok významu zlomku?
   - Čo vlastne sčítavame? Je to práca s časťami celku alebo len so symbolmi?
   - Ako by sme to znázornili pomocou obrázka alebo modelu?

Odpoveď AI je algoritmicky správna, no pracuje so zlomkami ako so symbolmi. Nevysvetľuje, čo zlomok znamená ako časť celku. To umožňuje učiteľovi otvoriť diskusiu o rozdiele medzi postupom a porozumením.

Mikro-ukážka 1b: Vysvetlenie pomocou významu

Učiteľ požiada AI, aby tú istú úlohu vysvetlila pomocou významu zlomku ako časti celku.

1. Zadanie pre AI: „Vysvetli sčítanie zlomkov tak, aby bolo jasné, čo tieto zlomky znamenajú.“
2. **Možná odpoveď AI**
   - $\frac{2}{3}$ znamená dve tretiny jedného celku.

- $\frac{1}{4}$ znamená jednu štvrtinu toho istého celku.
- Aby sme ich mohli sčítať, musíme pracovať s rovnako veľkými časťami.
- Celok rozdelíme na 12 častí.
- Potom máme $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$ a $\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$.
- To znamená, že sčítať $\frac{2}{3}$ a $\frac{1}{4}$ predstavuje to isté ako sčítať časti:

$$\frac{8}{12} + \frac{3}{12} = \frac{11}{12},$$

  čo je už zrejmé ľahké.

3. Diskusia:
   - V čom sa toto vysvetlenie líši od predchádzajúceho?
   - Prečo je dôležité hovoriť o „tom istom celku“?
   - Kedy má menovateľ význam?

Odpoveď AI pracuje so zlomkami ako s reprezentáciami častí celku. Algoritmus je tu dôsledkom významu, nie pravidlom bez kontextu. Takéto vysvetlenie podporuje pojmové porozumenie.

Mikro-ukážka 1c: Porovnanie vysvetlení

Učiteľ porovnáva so žiakmi odpovede 1a, 1b od AI: algoritmickú a významovo orientovanú.

1. Učiteľ predloží obe odpovede vedľa seba.
2. Úloha pre žiakov:
   - Ktoré vysvetlenie je zrozumiteľnejšie?
   - Ktoré pomáha pochopiť zlomok?
   - Ktoré je vhodné len na výpočet?
3. Diskusia:
   - Môže byť správny postup bez porozumenia?
   - Stačí vedieť pravidlo?
   - Ako súvisí model a výpočet?

Porovnanie dvoch odpovedí umožňuje žiakom uvedomiť si, že matematické porozumenie nespočíva len v správnom výsledku. AI tu neplní úlohu riešiteľa, ale nástroja na reflexiu rôznych podôb matematického myslenia.

4.1.2 Chyba ako informácia

Mikro-ukážka 2a: Formálna oprava chyby

Žiak tvrdí:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{6}.$$

1. Učiteľ požiada AI o vysvetlenie chyby.
2. **Možná odpoveď AI:**
   - Žiak sčítal čitatele aj menovatele.
   - Menovatele sa nesčítavajú.
3. Diskusia:
   - Vysvetľuje AI chybu alebo len opravuje postup?
   - Čo sa žiak dozvie o zlomkoch?

AI identifikuje formálnu chybu, no nepracuje s jej významom. Oprava postupu sama o sebe nevedie k porozumeniu.

Mikro-ukážka 2b: Interpretácia chyby

Učiteľ požiada AI, aby vysvetlila, čo si žiak pravdepodobne myslí o zlomkoch.

1. Zadanie pre AI: „Vysvetli, akú predstavu o zlomkoch má žiak, ktorý napíše $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{6}$.“
2. **Možná odpoveď AI:**
   - Žiak pravdepodobne chápe zlomok ako dve nezávislé čísla.
   - Myslí si, že $\frac{1}{3}$ znamená „1 a 3“, ktoré možno sčítavať zvlášť.
   - Nechápe zlomok ako jednu hodnotu, ktorá vyjadruje časť celku.
   - Preto sčíta čitatele aj menovatele, ako keby pracoval s dvojicami čísel.
3. Diskusia:

- V čom spočíva žiakova predstava?
- Prečo vedie táto predstava k chybe?
- Ako by sme túto predstavu mohli zmeniť?

Odpoveď AI sa posúva od opravy k interpretácii. Chyba je chápaná ako dôsledok určitej predstavy, nie ako náhodné zlyhanie. To umožňuje učiteľovi pracovať s myslením žiaka, nie len s výsledkom.

Mikro-ukážka 2c: Chyba ako diagnostický nástroj

Učiteľ porovnáva so žiakmi dve odpovede AI: formálnu opravu a interpretáciu chyby.

1. Učiteľ predloží obe odpovede.
2. Úloha pre žiakov:
   - Ktorá odpoveď lepšie vysvetľuje chybu?
   - Ktorá pomáha pochopiť zlomok?
   - Ktorá vedie len k oprave výsledku?
3. Diskusia:
   - Je chyba náhodná alebo zmysluplná?
   - Čo sa môžeme z chyby naučiť?
   - Ako súvisí chyba s porozumením?

Mikro-ukážky 2a–2c ukazujú postupný prechod od formálnej opravy chyby k jej interpretácii a didaktickému využitiu. Chyba tu nevystupuje iba ako nesprávny výsledok, ale ako možný zdroj informácie o spôsobe žiakovho uvažovania.

AI môže ponúknuť rôzne interpretácie tej istej chyby. Tieto interpretácie však nemožno automaticky považovať za diagnózu žiackeho myslenia. Stávajú sa skôr podnetom pre ďalšie otázky a rozhovor so žiakom.

Chyba ako informácia

Chyba nie je iba odchýlkou od správneho riešenia. Môže odrážať konkrétnu predstavu žiaka a stať sa východiskom pre ďalšiu didaktickú prácu.

4.1.3 Model ako reprezentácia

Uvedené mikro-ukážky ukazujú, že odpovede AI možno chápať ako špecifický typ **reprezentácie matematického myslenia**. Pri riešení úloh AI generuje rôzne podoby vysvetlení: od algoritmických postupov až po významovo orientované interpretácie. Pri práci s chybou AI umožňuje prechádzať od formálnej opravy k interpretácii žiackej predstavy a k jej didaktickému využitiu.

Z didaktického hľadiska tak AI neposkytuje len odpovede, ale predovšetkým **rôzne reprezentácie toho istého problému**, ktoré možno porovnávať, analyzovať a interpretovať. Úlohou učiteľa je tieto reprezentácie organizovať, viesť žiakov k ich porovnávaniu a podporovať prechod od formálneho postupu k pojmovému porozumeniu. AI sa tak nestáva riešiteľom úloh, ale nástrojom na skúmanie a rozvíjanie matematického myslenia.

Uvedieme ešte jednu ukážku. Jej rozpracovanie do troch úrovní prenechávame na čitateľa.

Mikro-ukážka 3: Model ako reprezentácia

Učiteľ požiada AI o vysvetlenie pojmu reálne číslo.

1. **Možná odpoveď AI:**
    - Reálne čísla môžeme znázorniť ako body na číselnej osi.
    - Každé číslo zodpovedá jednej polohe na priamke.
    - Reálne čísla možno interpretovať aj ako výsledky merania (napr. dĺžky alebo teploty).
2. Úloha pre študentov:
    - Aký model AI použila?
    - Ide o jeden model alebo viac rôznych modelov?
    - Čo tieto modely vysvetľujú?
    - Ktorý z modelov je generický a ktorý separovaný?

AI ponúka viacero reprezentácií toho istého pojmu, no nerozlišuje medzi ich didaktickou funkciou. Ich didaktická hodnota závisí od interpretácie.
Učiteľ rozhoduje, či model podporuje porozumenie, alebo vedie k zjednodušeniu bez významu.

Matematické poznanie sa v školskom prostredí sprostredkúva prostredníctvom modelov. Žiaci pracujú s číselnou osou, obrázkami, situáciami z reálneho života, ktoré reprezentujú abstraktné pojmy. AI dokáže tieto modely generovať, no často ich používa implicitne a bez reflexie.

Didaktický problém nespočíva v dostupnosti modelov, ale v ich interpretácii.

Využitie AI tak prirodzene nadväzuje na prácu s modelmi: odpoveď AI možno chápať ako špecifický typ reprezentácie, ktorú je potrebné analyzovať. Úlohou učiteľa je viesť žiakov k tomu, aby modely nielen používali, ale aj rozumeli ich významu a obmedzeniam.

4.2 Možnosti využitia AI v didaktike matematiky

Umelej inteligencii nemožno v súčasnom vzdelávaní rozumieť len ako ďalšiemu digitálnemu nástroju podobnému kalkulačke či dynamickému softvéru. Jej potenciál spočíva predovšetkým v práci s jazykom, reprezentáciami a argumentáciou, teda v oblastiach, ktoré sú pre didaktiku matematiky kľúčové.

Úlohou AI teda nie je poskytovať hotové odpovede, ale vytvárať priestor na analýzu, porovnávanie a reflexiu. Tento prístup prirodzene nadväzuje na dôraz na modely, porozumenie pojmov a diagnostiku žiackeho myslenia, ktoré boli systematicky rozvíjané v predchádzajúcich častiach. Z uvedeného vyplýva, že AI môže v didaktike matematiky plniť viacero funkcií:

- generovanie úloh rôznej náročnosti,
- formulovanie alternatívnych vysvetlení,
- simulácia žiackych chýb,
- podpora reflexie matematickej argumentácie.

Pedagogická hodnota AI nevzniká automaticky. Závisí od toho, ako je jej využitie začlenené do vyučovania. Základnou myšlienkou využitia AI vo funkcii didaktického sparingpartnera je dialóg. Odpoveď AI

- nie je cieľom,
- ale **východiskom pre analýzu**.

Rovnako ako model, ani odpoveď AI nepredstavuje „pravdu“, ale jednu z možných reprezentácií, ktorú je potrebné interpretovať.

4.2.1 AI vo vzdelávaní a jazykové modely v matematike

Rozvoj umelej inteligencie v posledných rokoch priniesol do vzdelávania nové typy nástrojov, ktoré dokážu pracovať s prirodzeným jazykom, analyzovať odpovede používateľov a generovať nové reprezentácie matematických úloh. Z pedagogického hľadiska nejde len o technologickú inováciu, ale o zmenu spôsobu, akým možno organizovať proces učenia a vyučovania.

Vo vzdelávaní možno úlohu umelej inteligencie chápať v niekoľkých rovinách. AI môže vystupovať ako

- **tutoriálny systém**, ktorý poskytuje vysvetlenia a spätnú väzbu,
- **didaktický partner**, ktorý vstupuje do dialógu so žiakom alebo študentom,
- **nástroj pre učiteľa**, ktorý podporuje prípravu výučby a tvorbu didaktických materiálov.

Najmä posledná z uvedených rovín je v súčasnosti pedagogicky veľmi významná. Jazykové modely dokážu generovať matematické úlohy ako aj monotematické testy, pracovné listy, návrhy vysvetlení alebo alternatívne formulácie pojmov, čo môže učiteľovi pomôcť pri príprave diferencovaných aktivít pre žiakov s rôznou úrovňou porozumenia.

Z didaktického hľadiska však tieto nástroje nemožno chápať ako zdroj hotových riešení, ale ako **prostriedok na podporu reflexie a analýzy**. Odpoveď AI predstavuje jednu z možných reprezentácií matematického problému, ktorú je potrebné interpretovať a kriticky posúdiť.

Didaktický potenciál jazykových modelov

Jazykové modely umožňujú pracovať s matematikou spôsobom, ktorý spája symbolické vyjadrenie s prirodzeným jazykom. Práve táto vlastnosť je pre didaktiku matematiky mimoriadne dôležitá, pretože matematické porozumenie sa neprejavuje len v správnom výsledku, ale aj v schopnosti vysvetliť postup riešenia a interpretovať jeho význam.

V pedagogickej praxi možno jazykové modely využívať najmä v týchto oblastiach:

1. **Generovanie matematických úloh**

   AI môže navrhovať varianty úloh rôznej náročnosti, čím podporuje diferenciáciu vyučovania. Učiteľ môže rýchlo pripraviť viacero verzií rovnakého typu úlohy alebo vytvoriť slovné úlohy v rôznych kontextoch.

2. **Alternatívne vysvetlenia pojmov**

   AI dokáže formulovať viacero spôsobov vysvetlenia rovnakého matematického pojmu. Učiteľ tak môže porovnávať rôzne formy vysvetlenia a diskutovať so žiakmi o ich presnosti a zrozumiteľnosti.

3. **Analýza žiackych riešení**

   Zadaním typickej chyby do AI možno simulovať diagnostický rozhovor, ktorý by inak vyžadoval veľké pedagogické skúsenosti. Takýto postup môže pomôcť učiteľovi pri identifikovaní miskoncepcií a chybných predstáv žiakov.

Potenciálne prínosy využitia AI

Pri vhodnom pedagogickom využití môže AI priniesť viacero pozitívnych efektov pre vyučovanie matematiky.

- **Podpora diferenciácie** AI umožňuje generovať úlohy rôznej náročnosti a reagovať na individuálne potreby žiakov.
- **Okamžitá spätná väzba** Digitálne systémy môžu žiakom poskytovať rýchlu informáciu o správnosti riešenia a naznačiť ďalšie kroky.
- **Podpora reflexie** Odpovede AI sa môžu stať predmetom diskusie, porovnávania a kritickej analýzy.
- **Efektívnejšia príprava učiteľa** Automatizácia niektorých rutinných činností môže uvoľniť čas pre pedagogickú prácu s triedou.

Tieto prínosy však nevznikajú automaticky. Ich realizácia závisí od didaktického kontextu, v ktorom je AI používaná.

Riziká a obmedzenia využívania AI

Popri uvedených prínosoch je potrebné zohľadniť aj obmedzenia umelej inteligencie v matematickom vzdelávaní.

Jedným z najvýznamnejších problémov je skutočnosť, že jazykové modely pracujú na princípe pravdepodobnostného generovania textu. Ich odpovede môžu byť formálne presvedčivé, ale obsahovo nepresné alebo didakticky nevhodné.

Riziká

Jedným z najväčších rizík je skutočnosť, že žiaci začnú AI používať ako náhradu vlastného premýšľania.

Takéto využitie môže viesť k povrchnému osvojovaniu matematických postupov bez hlbšieho porozumenia pojmov. Z pedagogického hľadiska preto platí zásada, že AI by mala byť využívaná predovšetkým ako **podnet na diskusiu a analýzu**, nie ako autoritatívny zdroj riešení.

4.2.2 AI ako didaktický sparingpartner

V kontexte tejto publikácie chápeme AI predovšetkým ako **didaktického sparingpartnera**. Odpoveď umelej inteligencie nie je cieľom vyučovania, ale východiskom pre ďalšiu prácu so žiakmi alebo študentmi učiteľstva matematiky. Takýto prístup je v súlade s koncepciou matematického vzdelávania založeného na

- diagnostike žiackeho myslenia,
- práci s modelmi,
- argumentácii a diskusii o matematických pojmoch.

Správne využitá AI tak môže podporiť reflexiu matematických reprezentácií a prehĺbiť porozumenie pojmov. Rozhodujúce pedagogické rozhodnutia však vždy zostávajú v rukách učiteľa. AI by v procese vyučovania matematiky nemala:

- nahrádzať riešenie úloh za žiaka,
- poskytovať hotové riešenia bez vysvetlenia,
- obchádzať proces porozumenia prostredníctvom mechanického kopírovania odpovedí.

Základnou myšlienkou využitia AI v didaktike matematiky je dialóg. Rovnako ako pri práci s modelmi, ani odpoveď AI nepredstavuje „pravdu“, ale jednu z možných reprezentácií, ktorú je potrebné interpretovať a kriticky posúdiť.

Metodická poznámka

Z didaktického hľadiska je AI osobitne prínosná vtedy, keď jej odpoveď vyvolá ďalšiu otázku, pochybnosť alebo diskusiu. Pri formulovaní zadania preto treba premýšľať nielen o očakávanej odpovedi AI, ale aj o tom, akú následnú aktivitu žiaka má táto odpoveď podporiť.

4.3 Prompt ako nástroj didaktického navrhovania

Ak má AI vo vyučovaní matematiky vystupovať ako didaktický sparingpartner, nestačí žiakovi alebo študentovi iba sprístupniť jazykový model. Spôsob, akým model reaguje, vo veľkej miere závisí od toho, aké zadanie dostane. Rovnaká matematická úloha preto môže viesť k veľmi odlišnej komunikácii.

Jednoduchá požiadavka

„Vyrieš túto úlohu.“

spravidla smeruje k hotovému riešeniu. Ak však model dostane pokyn

„Pomôž mi úlohe porozumieť. Pýtaj sa ma postupne a celé riešenie mi zatiaľ neprezraď.“

mení sa charakter celej interakcie. Matematický obsah zostáva rovnaký, ale mení sa spôsob, akým s ním žiak pracuje. Pozornosť sa môže presunúť od získania výsledku k analýze zadania, hľadaniu vzťahov a postupnému vytváraniu riešenia.

Textové zadanie, ktorým používateľ usmerňuje komunikáciu s jazykovým modelom, označujeme ako **prompt**. V bežnom používaní môže ísť o jednoduchú otázku alebo príkaz. Z didaktického hľadiska však prompt môže mať širšiu funkciu. Učiteľ ním môže určiť nielen to, *čo* má AI robiť, ale aj *ako* má so žiakom komunikovať.

Môže napríklad požadovať, aby AI

- neprezradila riešenie predčasne,
- kládla žiakovi postupné otázky,
- poskytovala iba malé nápovede,
- reagovala na chybu otázkou alebo vysvetlením,
- prispôsobila jazyk veku a vedomostiam žiaka,
- viedla žiaka ku kontrole výsledku a k vysvetleniu vlastného postupu.

Prompt sa tak stáva súčasťou didaktického návrhu učebnej situácie. Učiteľ pri jeho tvorbe premýšľa podobne ako pri príprave úlohy, pracovného listu alebo aktivity v dynamickom matematickom prostredí. Rozhoduje, aký je cieľ činnosti, aký priestor má zostať žiakovi na samostatné uvažovanie, kedy má prísť nápoveda a čo má byť predmetom záverečnej reflexie.

Prompt nie je iba technickou inštrukciou pre AI. V didaktickom prostredí môže byť nástrojom na vytváranie a regulovanie učebnej situácie.
Jeho kvalitu preto nemožno posudzovať iba podľa toho, či AI poskytne správnu odpoveď. Dôležitejšie je, aký spôsob matematického uvažovania prompt podporuje.

V tomto zmysle možno prompt chápať aj ako nový typ didaktického materiálu. Na rozdiel od pracovného listu alebo pripraveného vysvetlenia však nevytvára vopred určenú postupnosť krokov. Vytvára skôr rámec pre dialóg, ktorý sa ďalej rozvíja podľa odpovedí žiaka.

To zároveň znamená, že ani dobre pripravený prompt nezaručuje vždy rovnakú reakciu AI. Jazykový model môže niekedy ponúknuť príliš veľkú nápovedu, zvoliť nevhodnú formuláciu alebo prejsť k riešeniu skôr, než by bolo z didaktického hľadiska vhodné. Prompt preto treba vnímať ako nástroj, ktorý je potrebné skúšať, upravovať a hodnotiť podľa toho, ako funguje v konkrétnej učebnej situácii.

Metodická poznámka

Pri tvorbe didaktického promptu si možno položiť jednoduchú otázku:

Čo má počas rozhovoru s AI robiť žiak?

Ak prompt vedie predovšetkým k tomu, že AI vysvetľuje, počíta a rozhoduje namiesto žiaka, jeho didaktická hodnota je obmedzená. Ak vytvára priestor na otázky, vlastné návrhy, chyby, argumentáciu a kontrolu výsledku, môže podporovať aktívnejšie matematické myslenie.

4.3.1 Tri režimy práce s AI asistentom

Spôsob formulácie promptu úzko súvisí s tým, akú úlohu má AI v učebnej situácii plniť. V praxi možno rozlíšiť tri základné režimy práce: **vysvetlenie**, **sprevádzanie pri riešení** a **spätnú väzbu k vlastnému riešeniu**. Nejde pritom o navzájom oddelené možnosti. V jednom rozhovore sa môžu postupne striedať podľa toho, čo žiak v danej chvíli potrebuje.

AI ako nástroj vysvetlenia

V prvom režime žiak alebo učiteľ využíva AI na objasnenie matematického pojmu, vzťahu alebo postupu. Najjednoduchšia požiadavka môže mať podobu:

„Vysvetli mi, ako sa sčítavajú zlomky.“

Takto formulovaný prompt však ponecháva modelu veľkú voľnosť. AI môže ponúknuť správny algoritmus, ale nemusí vysvetliť jeho význam. S týmto rozdielom sme sa stretli už v mikro-ukážkach pri sčítavaní zlomkov.

Didakticky presnejší prompt môže preto znieť napríklad:

„Vysvetli žiakovi 7. ročníka, prečo pri sčítavaní zlomkov potrebujeme pracovať s rovnakými časťami celku. Použi jednoduchý príklad a nevychádzaj iba z pravidla o spoločnom menovateli.“

V tomto prípade prompt neurčuje iba matematický obsah. Určuje aj vek žiaka, požadovanú úroveň vysvetlenia a dôraz na význam matematického pojmu.

> Pri vysvetľovaní pomocou AI nie je dôležité iba to, či je vysvetlenie správne. Učiteľ by mal sledovať aj to, akú reprezentáciu matematického pojmu model používa a či táto reprezentácia podporuje porozumenie.

AI ako sprievodca pri riešení

Druhý režim mení postavenie AI výraznejšie. Model už nemá úlohu vysvetliť celé riešenie, ale sprevádzať žiaka pri jeho hľadaní. Namiesto odpovede ponúka otázku, menšiu nápovedu alebo podnet na ďalší krok.

Prompt môže obsahovať napríklad pokyn:

„Nevyrieš úlohu za žiaka. Veď ho krátkymi otázkami. Polož vždy iba jednu otázku a ďalšiu polož až po jeho odpovedi. Ak sa pomýli, neprezraď správny postup, ale pomôž mu chybu nájsť.“

Takáto komunikácia sa viac približuje prirodzenému didaktickému dialógu. Žiak zostáva aktívnym riešiteľom a AI vytvára podnety, ktoré mu môžu pomôcť pokračovať.

Z didaktického hľadiska je tento režim osobitne zaujímavý pri slovných úlohách a matematickom modelovaní. AI sa môže pýtať, čo je v úlohe dané, čo treba zistiť, ktoré veličiny spolu súvisia alebo či získaný výsledok zodpovedá pôvodnej situácii. Nemusí teda vytvoriť matematický model namiesto žiaka, ale môže ho viesť k tomu, aby model postupne vytvoril sám.

Rozhodujúca otázka v tomto režime neznie:

Ako má AI vyriešiť úlohu?

ale:

Akú otázku má AI položiť, aby mohol v riešení pokračovať žiak?

AI ako nástroj spätnej väzby

V treťom režime už žiak prichádza s vlastným riešením, vysvetlením alebo argumentom. Úlohou AI nie je vytvoriť nové riešenie, ale reagovať na to, čo žiak urobil.

Aj tu záleží na formulácii promptu. Pokyn

„Skontroluj moje riešenie.“

môže viesť iba k označeniu správnych a nesprávnych krokov. Didakticky zaujímavejšia požiadavka môže mať podobu:

„Prečítaj moje riešenie. Neopravuj ho hneď. Najskôr označ miesto, ktoré by som mal ešte raz premyslieť, a polož mi otázku, ktorá mi pomôže zistiť, či je môj postup správny.“

Chyba sa v takomto rozhovore nestáva iba miestom, ktoré treba opraviť. Môže byť informáciou o tom, ako žiak matematickému pojmu rozumie. Tento spôsob práce prirodzene nadväzuje na mikro-ukážky, v ktorých sme rozlišovali medzi formálnou opravou chyby, jej interpretáciou a diagnostikou žiackeho myslenia.

Spätná väzba má didaktickú hodnotu vtedy, keď žiakovi neoznámi iba to, *že* sa pomýlil, ale pomáha mu porozumieť, *prečo* jeho úvaha viedla k chybe a ako ju môže sám prehodnotiť.

Uvedené tri režimy sa líšia mierou aktivity, ktorú ponechávajú žiakovi. Pri vysvetlení je aktivita vo väčšej miere na strane AI. Pri sprevádzaní sa presúva k žiakovi a AI predovšetkým reguluje ďalší krok. Pri spätnej väzbe vychádza komunikácia priamo zo žiakovho vlastného riešenia.

Nejde preto iba o tri technické spôsoby používania jazykového modelu. Každý z nich vytvára inú didaktickú situáciu a vyžaduje inak formulovaný prompt.

Tri režimy práce s AI asistentom

AI môže vo vyučovaní matematiky **vysvetľovať**, **sprevádzať pri riešení** alebo poskytovať **spätnú väzbu**. Didaktická hodnota každého režimu závisí od toho, koľko priestoru ponecháva žiakovi na vlastné matematické uvažovanie.

4.3.2 Prompt „Tútor v matematike“

Predchádzajúce úvahy ukazujú, že spôsob komunikácie AI so žiakom možno do určitej miery usmerňovať vhodne pripraveným promptom. Otázkou však zostáva, ako takýto prompt navrhnúť, aby neostal iba súborom technických pokynov, ale vyjadroval určitý didaktický zámer.

Ako konkrétny príklad uvedieme prompt „Tútor v matematike“, ktorý bol vytvorený pre komunikáciu so žiakom základnej školy. Jeho cieľom nie je vyriešiť matematickú úlohu čo najrýchlejšie, ale viesť žiaka podobným spôsobom, ako by ho pri riešení viedol učiteľ: najskôr porozumieť zadaniu, potom hľadať vzťahy, navrhnúť postup, riešiť po jednotlivých krokoch a napokon výsledok skontrolovať.

Základný didaktický zámer možno vyjadriť jednoducho:

AI nemá riešiť namiesto žiaka, ale pomáhať žiakovi, aby riešil sám.

Aby sa tento zámer premietol aj do komunikácie modelu, prompt obsahuje niekoľko vzájomne prepojených vrstiev.

1. **Rola AI**

   “‘ Model má vystupovať ako trpezlivý sprievodca. Má používať jazyk primeraný žiakovi, reagovať prirodzene a vytvárať priestor na jeho vlastné odpovede.

2. **Cieľ rozhovoru**

   Cieľom nie je iba správny výsledok. Dôležité je, aby žiak rozumel zadaniu, vedel vysvetliť zvolený postup a na záver posúdil, či jeho výsledok dáva zmysel.

3. **Miera poskytovanej pomoci**

   AI nemá predčasne zobraziť celé riešenie. Pomoc má poskytovať postupne, najskôr otázkou a až potom, ak je to potrebné, menšou nápovedou.

4. **Práca s chybou**

   Nesprávna odpoveď žiaka nemá automaticky viesť k zobrazeniu správneho riešenia. AI sa má najskôr pokúsiť otázkou odhaliť, z akej predstavy alebo z ktorého kroku chyba vznikla.

5. **Kontrola a reflexia**

   Rozhovor sa nemá skončiť získaním výsledku. Žiak má byť vedený ku kontrole riešenia a k stručnému vysvetleniu toho, ako postupoval. “‘

Takto pripravený prompt neurčuje presný obsah každej odpovede AI. Vytvára skôr rámec, v ktorom sa má rozhovor pohybovať. Konkrétna cesta riešenia potom závisí od úlohy a predovšetkým od odpovedí žiaka.

Didaktický prompt neurčuje iba to, čo má AI povedať. Určuje najmä to, *kedy má hovoriť, kedy sa má pýtať a kedy má ponechať priestor žiakovi.*
Práve miera poskytovanej pomoci rozhoduje o tom, či AI zostane riešiteľom úlohy, alebo sa stane sprievodcom pri jej riešení.

Od zadania k reflexii

Komunikáciu pri použití promptu „Tútor v matematike“ možno schematicky rozdeliť do niekoľkých fáz:

porozumenie zadaniu $\longrightarrow$ **hľadanie vzťahov** $\longrightarrow$ **návrh postupu** $\longrightarrow$ **riešenie** $\longrightarrow$ **kontrola a reflexia**.

Jednotlivé fázy nemožno chápať ako pevný algoritmus. Žiak sa môže počas riešenia vrátiť k zadaniu, zmeniť navrhnutý postup alebo opraviť svoju pôvodnú predstavu. Schéma skôr vyjadruje didaktickú logiku rozhovoru.

V prvej fáze AI neponúka výpočet, ale zisťuje, či žiak úlohe rozumie. Môže sa napríklad pýtať:

- Čo je v úlohe dané?
- Čo máme zistiť?
- Ktoré údaje budeme potrebovať?

V ďalšej fáze sa pozornosť presúva k matematickým vzťahom:

- Ktoré veličiny spolu súvisia?
- Čo sa stane s jednou veličinou, ak sa zmení druhá?
- Poznáš podobnú úlohu?

Až potom prichádza návrh postupu a samotný výpočet. Ani tu však AI nemusí vykonať jednotlivé kroky namiesto žiaka. Môže sa pýtať, aký krok by urobil ako prvý, prečo ho zvolil a čo z neho vyplýva.

Posledná fáza vracia pozornosť od výpočtu k významu výsledku:

- Zodpovedá výsledok pôvodnému zadaniu?
- Je jeho veľkosť rozumná?
- Vedel by si vysvetliť, prečo sme postupovali práve takto?
- Dá sa výsledok overiť iným spôsobom?

Metodická poznámka

Uvedená postupnosť pripomína prirodzené fázy riešenia matematického problému. Rozdiel spočíva v tom, že AI môže žiaka jednotlivými fázami sprevádzať prostredníctvom dialógu.
Didaktická hodnota takéhoto rozhovoru však závisí od toho, či otázky AI skutočne podporujú žiakovo uvažovanie, alebo iba rozdeľujú hotové riešenie na sériu malých krokov.

Pilotné overovanie promptu

Prompt „Tútor v matematike“ bol pilotne overovaný v prostredí seminárov z didaktiky matematiky so študentmi učiteľstva matematiky. Nešlo o experimentálne overovanie jeho účinnosti, ale o kvalitatívne sledovanie toho, ako sa pri jeho použití mení charakter komunikácie medzi používateľom a AI.

Pri analýze sme si nevšímali iba správnosť matematických odpovedí. Sledovali sme najmä,

- či AI neprezrádza riešenie predčasne,
- či kladie otázky smerujúce k porozumeniu zadaniu,
- či pracuje s malými nápovedami a postupnými krokmi,
- či reaguje na chybu ako na informáciu o žiackom myslení,
- či používa jazyk primeraný žiakovi,
- či vedie ku kontrole výsledku a k vysvetleniu postupu.

Pri pilotnom používaní sa ukázalo, že takto formulovaný prompt spravidla obmedzuje tendenciu modelu okamžite predložiť celé riešenie. AI častejšie začína otázkami zameranými na porozumenie zadaniu a ďalší postup prispôsobuje odpovediam používateľa.

Zaujímavá bola aj práca s chybou. Namiesto okamžitej opravy sa AI častejšie pokúšala upozorniť na problematické miesto otázkou alebo menšou nápovedou. Chyba sa tak mohla stať súčasťou ďalšieho rozhovoru, čo zodpovedá spôsobu práce s chybou uvedenému v predchádzajúcich mikro-ukážkach tejto kapitoly.

Ukázalo sa však aj to, že správanie modelu nie je úplne stabilné. V niektorých situáciách poskytla AI väčšiu nápovedu, než bolo potrebné, inokedy prešla k riešeniu príliš skoro alebo použila formuláciu, ktorá nebola primeraná predpokladanej úrovni žiaka.

Dobre pripravený prompt môže ovplyvniť charakter komunikácie s AI, nemôže však zaručiť jej didaktickú správnosť.
Aj pri práci s didakticky nastaveným AI asistentom zostáva učiteľ tým, kto posudzuje matematickú správnosť, primeranosť nápovede a zmysel celej učebnej situácie.

Pilotné overovanie zároveň ukazuje ešte jednu možnosť využitia promptov v príprave budúcich učiteľov. Študent učiteľstva nemusí hodnotiť iba odpoveď AI. Môže skúmať aj samotný prompt: meniť jeho jednotlivé pokyny, porovnávať výsledné rozhovory a sledovať, ako zmena formulácie ovplyvňuje mieru aktivity žiaka.

Tvorba promptu sa tak môže stať osobitnou didaktickou úlohou. Študent pri nej nepremýšľa iba o umelej inteligencii. Premýšľa predovšetkým o tom, *akú otázku položiť žiakovi, kedy mu pomôcť a koľko pomoci mu poskytnúť.*

4.4 Návrhy scenárov práce so študentmi (VŠ)

Nasledujúce scenáre sú určené predovšetkým pre prácu so študentmi učiteľstva matematiky. Ich cieľom nie je precvičovať technické používanie AI, ale vytvárať situácie, v ktorých študent premýšľa o matematickom obsahu, žiackom porozumení a o didaktickej primeranosti poskytovanej pomoci.

V jednotlivých scenároch preto pracujeme s AI rôznym spôsobom: ako so zdrojom vysvetlenia, nástrojom na interpretáciu žiackej chyby, generátorom matematických modelov a napokon ako s asistentom, ktorého spôsob komunikácie možno usmerňovať didakticky formulovaným promptom.

Spoločným prvkom všetkých scenárov je záverečná reflexia. Študent neposudzuje iba to, či AI odpovedala matematicky správne, ale aj to, *aký typ porozumenia jej odpoveď podporuje a akú aktivitu ponecháva žiakovi.*

Scenár 1: Diagnostika porozumenia pojmu

Cieľ: Rozlíšiť medzi správnym matematickým postupom a pojmovým porozumením.

Postup:

1. Študent vyberie matematický pojem alebo úlohu, pri ktorej možno dobre rozlíšiť algoritmický postup od porozumenia významu. Môže ísť napríklad o sčítanie zlomkov, úpravu algebraického výrazu alebo riešenie jednoduchej rovnice.

2. Požiada AI o vysvetlenie zvoleného postupu pre žiaka príslušného ročníka, napríklad:

„Vysvetli žiakovi 7. ročníka, ako sa sčítavajú zlomky.“

3. Následne prompt spresní tak, aby vysvetlenie nebolo založené iba na algoritme:

   „Vysvetli žiakovi 7. ročníka, prečo pri sčítavaní zlomkov potrebujeme pracovať s rovnakými časťami celku. Nepouži iba pravidlo o spoločnom menovateli.“

4. Študent obe odpovede porovná. Sleduje najmä,

   - aké matematické pojmy AI používa,
   - či iba opisuje postup, alebo vysvetľuje aj jeho význam,
   - aké reprezentácie matematického pojmu využíva,
   - ktoré miesta vysvetlenia by mohli viesť k nesprávnej predstave žiaka.

Otázky na reflexiu:

- Je matematicky správne vysvetlenie automaticky aj didakticky vhodné?
- V čom sa líši vysvetlenie algoritmu od vysvetlenia významu?
- Ktorá odpoveď vytvára lepšie podmienky na pojmové porozumenie?
- Čo by bolo potrebné vo vysvetlení AI zmeniť alebo doplniť?

Didaktický prínos:

Študent sa učí posudzovať vysvetlenie nielen podľa správnosti výsledku a postupu, ale aj podľa toho, aký význam matematického pojmu sprostredkúva.
Porovnávanie odpovedí AI tak vytvára priestor na rozlišovanie medzi zvládnutím algoritmu a pojmovým porozumením.

Scenár 2: Analýza žiackej chyby

Cieľ: Rozvíjať schopnosť interpretovať chybu ako informáciu o matematickom myslení žiaka.

Postup:

1. Študent vyberie typické chybné žiacke riešenie. Môže napríklad pracovať s tvrdením $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{6}$.

2. Najskôr požiada AI:

   „Nájdi a oprav chybu v tomto riešení.“

3. Potom zmení zadanie:

   „Neopravuj chybu hneď. Pokús sa vysvetliť, aká predstava o zlomkoch mohla žiaka viesť k tomuto riešeniu.“

4. V treťom kroku požiada AI, aby navrhla dve alebo tri otázky, ktorými by učiteľ mohol žiaka viesť k tomu, aby svoju chybu odhalil sám.

5. Študent porovná všetky tri reakcie AI a sleduje prechod

   oprava $\longrightarrow$ **interpretácia** $\longrightarrow$ **diagnostika**.

Otázky na reflexiu:

- Ktorá odpoveď iba pomenovala nesprávny krok?
- Ktorá sa pokúsila vysvetliť žiakovu predstavu?
- Je interpretácia chyby navrhnutá AI jediným možným vysvetlením?
- Ktoré otázky AI by mohli žiakovi skutočne pomôcť a ktoré už príliš naznačujú správne riešenie?
- Ako by učiteľ overil, či jeho interpretácia žiakovej chyby bola správna?

Didaktický prínos:

Študent sa učí vnímať chybu nielen ako odchýlku od správneho riešenia, ale ako možný prejav určitej žiackej predstavy.
AI môže navrhnúť možné interpretácie chyby, nemôže však spoľahlivo určiť, čo si konkrétny žiak skutočne myslí. Jej odpoveď je preto východiskom pre diagnostický rozhovor, nie jeho náhradou.

Scenár 3: AI a modely matematických pojmov

Cieľ: Rozvíjať schopnosť posudzovať matematické modely a reprezentácie z didaktického hľadiska.

Postup:

1. Študent vyberie matematický pojem, ktorý možno reprezentovať viacerými spôsobmi, napríklad záporné číslo, zlomok alebo reálne číslo.

2. Požiada AI:

   „Navrhni model, pomocou ktorého by si tento pojem vysvetlil žiakovi.“

3. Následne požiada AI o ďalšie dve odlišné reprezentácie toho istého pojmu.
4. Študent jednotlivé návrhy analyzuje. Pri každom modeli si všíma,
    - čo model reprezentuje,
    - ktoré vlastnosti matematického pojmu zvýrazňuje,
    - ktoré vlastnosti naopak zostávajú skryté,
    - pre akú úroveň žiakov môže byť model vhodný,
    - či môže pri jeho použití vzniknúť nežiaduca predstava.
5. Ak to povaha zvolených modelov umožňuje, študent posúdi, či ide o model generický alebo separovaný, a svoje rozhodnutie zdôvodní.
6. Na záver vyberie model, ktorý považuje pre zvolenú učebnú situáciu za najvhodnejší, a navrhne otázku alebo aktivitu, pomocou ktorej by s ním pracoval so žiakmi.

Otázky na reflexiu:

- Existuje pre daný matematický pojem jeden „najlepší“ model?
- Čo jednotlivé modely umožňujú žiakovi vidieť a čo naopak zakrývajú?
- Rozlišuje AI medzi matematickou správnosťou modelu a jeho didaktickou vhodnosťou?
- Ako sa môže meniť vhodnosť modelu podľa veku a predchádzajúcich vedomostí žiaka?
- Kedy je vhodné prejsť od jedného modelu k inému?

Didaktický prínos:

Študent sa učí modely generované AI nepreberať automaticky, ale posudzovať ich vzhľadom na konkrétny matematický pojem a učebnú situáciu.
AI môže rozšíriť súbor dostupných reprezentácií. Rozhodnutie o tom, ktorý model podporuje porozumenie a kedy ho použiť, však zostáva didaktickou úlohou učiteľa.

Scenár 4: Tvorba a overovanie didaktického promptu

Cieľ: Uvedomiť si, ako formulácia promptu ovplyvňuje charakter komunikácie medzi žiakom a AI.

Postup:

1. Študent vyberie matematickú úlohu primeranú žiakovi základnej alebo strednej školy.
2. Najskôr zadá AI jednoduchý pokyn:

„Vyrieš túto úlohu a vysvetli postup.“

3. Následne vytvorí druhý prompt, v ktorom AI požiada, aby úlohu nevyriešila, ale viedla žiaka postupnými otázkami. Prompt by mal určiť aspoň:
    - komu je vysvetlenie určené,
    - akú úlohu má AI v rozhovore,
    - akú mieru nápovede môže poskytovať,
    - ako má reagovať na chybu,
    - ako má viesť žiaka ku kontrole výsledku.
4. Študent porovná komunikáciu vytvorenú oboma promptmi a sleduje najmä:
    - kto vykonáva podstatné matematické kroky,
    - koľko priestoru zostáva na uvažovanie žiaka,
    - aký typ otázok AI používa,
    - kedy poskytuje nápovedu,
    - ako reaguje na nesprávnu odpoveď.
5. Na základe pozorovania študent svoj didaktický prompt upraví a overí ho ešte raz.

Otázky na reflexiu:

- Ktorá formulácia promptu viedla k väčšej aktivite žiaka?
- Ktoré pokyny mali na správanie AI najväčší vplyv?
- Poskytla AI niekedy väčšiu pomoc, než prompt požadoval?
- Dá sa prompt upraviť tak, aby viac podporoval porozumenie?
- Čo ani dobre pripravený prompt nedokáže zabezpečiť?

Didaktický prínos:

Študent sa pri tvorbe promptu učí premýšľať o miere poskytovanej pomoci, o poradí otázok a o priestore, ktorý zostáva žiakovi na vlastné uvažovanie.
Overovanie promptu preto nie je iba skúšaním možností AI. Je zároveň reflexiou vlastného didaktického rozhodovania.

4.4.1 Úrovne práce s AI v didaktike matematiky

Predchádzajúce mikro-ukážky a scenáre ukazujú, že samotná prítomnosť AI ešte neurčuje didaktickú hodnotu učebnej situácie. Rozhodujúce je, *akým spôsobom* s jej odpoveďou ďalej pracuje žiak, študent alebo učiteľ.

Diagram „Didaktický model využitia AI vo vyučovaní matematiky“ na obrázku 4.1 zachytáva základné vzťahy medzi žiakom, AI, učiteľom a matematickým modelom. Tieto vzťahy však môžu mať rôznu didaktickú hĺbku. AI môže zostať zdrojom hotovej odpovede, ale môže sa stať aj podnetom na interpretáciu, porovnávanie, diagnostiku alebo reflexiu vlastného uvažovania.

V predchádzajúcich častiach sme tento rozdiel sledovali v štyroch oblastiach: pri práci s riešením, chybou, matematickým modelom a promptom. V každej z nich možno rozlíšiť tri úrovne práce.

Oblasť	**Úroveň 1**	**Úroveň 2**	**Úroveň 3**
Riešenie	algoritmus	význam	porovnanie
Chyba	oprava	interpretácia	diagnostika
Model	návrh	analýza	porovnanie modelov
Prompt	príkaz	usmernenie	didaktický návrh

Tabuľka 4.1: Úrovne práce s AI v didaktike matematiky

Na **prvej úrovni** AI predovšetkým poskytuje určitý výstup. Ponúkne algoritmus, opraví chybu, navrhne model alebo reaguje na jednoduchý príkaz. Takéto využitie môže byť praktické, ale aktivita používateľa zostáva obmedzená najmä na prijatie alebo kontrolu odpovede.

Na **druhej úrovni** sa pozornosť presúva od samotného výstupu k jeho významu. Pri riešení nás zaujíma význam použitého postupu, pri chybe predstava, ktorá k nej mohla viesť, pri modeli jeho možnosti a obmedzenia a pri prompte spôsob, akým formulácia zadania usmerňuje komunikáciu AI.

Na **tretej úrovni** sa odpoveď AI stáva predmetom vedomej didaktickej práce. Žiak alebo študent porovnáva rôzne riešenia a reprezentácie, učiteľ využíva chybu na diagnostiku myslenia, modely sa posudzujú vzhľadom na konkrétnu učebnú situáciu a prompt sa navrhuje a overuje podľa toho, aký priestor vytvára pre aktivitu žiaka.

Vyššia úroveň práce s AI neznamená zložitejšiu technológiu. Znamená predovšetkým hlbšiu didaktickú prácu s jej výstupom.
Rozdiel medzi jednotlivými úrovňami preto nespočíva v tom, *čo AI dokáže*, ale v tom, *čo s jej odpoveďou robí žiak, študent alebo učiteľ.*

Uvedené úrovne netreba chápať ako pevnú postupnosť, ktorou musí prejsť každá učebná situácia. Aj jednoduchá odpoveď AI môže byť užitočná, ak zodpovedá cieľu vyučovania. Roz-

líšenie úrovní má skôr pomôcť učiteľovi uvedomiť si, aký typ činnosti od žiaka očakáva a či využitie AI podporuje matematické porozumenie alebo iba uľahčuje získanie výsledku.

Z tohto pohľadu sa mení aj význam promptu. Na prvej úrovni je prompt najmä príkazom na vykonanie určitej činnosti. Na druhej úrovni usmerňuje spôsob vysvetlenia alebo komunikácie. Na tretej úrovni sa stáva súčasťou didaktického návrhu: učiteľ alebo študent ho cielene vytvára, overuje a upravuje podľa toho, ako ovplyvňuje matematickú aktivitu žiaka.

Od odpovede k didaktickému dialógu

Didaktická hodnota AI rastie vtedy, keď sa jej výstup prestáva iba preberať a stáva sa predmetom otázok, porovnávania, interpretácie a reflexie.

Záver

Využitie umelej inteligencie vo vyučovaní matematiky nemožno posudzovať iba podľa toho, ako rýchlo a presne dokáže vyriešiť úlohu. Z didaktického hľadiska je podstatnejšie, čo sa pri práci s AI deje s matematickým myslením žiaka: či zostáva aktívnym riešiteľom, či rozumie použitým pojmom a vzťahom, či dokáže pracovať s vlastnou chybou a či vie získaný výsledok interpretovať.

V tejto kapitole sme preto AI nechápali ako náhradu učiteľa ani ako zdroj hotových riešení. Pracovali sme s ňou ako s **didaktickým sparingpartnerom**, ktorého odpovede možno analyzovať, porovnávať a kriticky hodnotiť. Na mikro-ukážkach sme sledovali rozdiel medzi algoritmickým a významovým vysvetlením, medzi opravou chyby a jej interpretáciou i medzi jednoduchým použitím modelu a jeho didaktickou analýzou.

Dôležitú úlohu pritom zohráva spôsob, akým komunikáciu s AI nastavíme. Prompt nie je iba technickým príkazom. Môže určovať rolu AI, mieru poskytovanej pomoci, spôsob práce s chybou aj priestor, ktorý zostáva žiakovi na vlastné uvažovanie. V tomto zmysle sa stáva súčasťou didaktického návrhu učebnej situácie.

Príklad promptu „Tútor v matematike“ ukázal jednu z možností, ako možno AI posunúť od poskytovania hotových odpovedí k sprevádzaniu žiaka pri riešení. Ani dobre pripravený prompt však nezaručuje didakticky vhodnú komunikáciu. Odpovede AI treba naďalej posudzovať z hľadiska matematickej správnosti, primeranosti vysvetlenia a cieľa konkrétnej učebnej situácie.

Pre prípravu budúcich učiteľov matematiky sa tým otvára zaujímavý priestor. Študent sa nemusí učiť iba používať nový nástroj. Môže porovnávať vysvetlenia, interpretovať chyby, hodnotiť modely, vytvárať prompty a sledovať, ako jednotlivé didaktické rozhodnutia menia charakter komunikácie so žiakom. Práca s AI sa tak môže stať aj príležitosťou na reflexiu vlastného učiteľského uvažovania.

Umelá inteligencia preto nepredstavuje opustenie základných princípov didaktiky matematiky. Naopak, znovu otvára otázky, ktoré sú pre vyučovanie matematiky dlhodobo podstatné: čo znamená pojmu porozumieť, ako pracovať s chybou, akú úlohu majú modely a reprezentácie,

koľko pomoci má učiteľ žiakovi poskytnúť a kedy mu má ponechať priestor na samostatné hľadanie.

Technológia môže meniť prostredie, v ktorom sa matematika učí, základný didaktický problém však zostáva rovnaký:

Ako vytvoriť situáciu, v ktorej žiak matematike nielen odpovie, ale jej aj porozumie?

Význam AI nespočíva v tom, že rieši úlohy, ale v tom, že umožňuje o nich premýšľať novým spôsobom.

5 Slovné úlohy

Úvod

Slovná úloha predstavuje v školskej matematike osobitný typ činnosti, pri ktorej žiak nepracuje iba s číslami a symbolmi, ale predovšetkým s významom. Nestačí poznať matematický postup; treba porozumieť textu, rozpoznať vzťahy medzi údajmi, rozhodnúť, čo je dôležité, a až potom vytvoriť matematický model situácie.

Práve v tomto spočíva didaktická hodnota slovných úloh. Učia žiaka prechádzať od bežného jazyka k matematickému jazyku a späť. Rozvíjajú nielen počítanie, ale aj čítanie s porozumením, predstavivosť, schopnosť argumentácie a kontrolu výsledku v kontexte zadania.

Pre budúceho učiteľa matematiky je preto dôležité chápať slovné úlohy nielen ako aplikačné cvičenia, ale ako prostriedok rozvoja matematického myslenia. Otázkou nie je iba to, „ako úlohu vypočítať“, ale aj to, „ako žiak úlohe porozumie, aké reprezentácie si zvolí a kde sa pri riešení môže dopustiť chyby“.

Didaktické ciele kapitoly

Po absolvovaní kapitoly by mal študent učiteľstva matematiky:

1. rozlišovať medzi **matematickou úlohou** a **slovnou úlohou** a chápať význam jazykovej zložky pri jej riešení,
2. vedieť opísať proces **matematizácie slovnej úlohy**, teda prechod od textu situácie k matematickému modelu,
3. ovládať základné **modely vizualizácie** slovných úloh a vedieť posúdiť ich didaktickú vhodnosť na jednotlivých stupňoch školy,
4. rozlišovať medzi **jednoduchou** a **zloženou** slovnou úlohou a medzi **analytickým** a **syntetickým** spôsobom riešenia,
5. navrhovať také metodické postupy, ktoré vedú žiaka **od porozumenia textu** k samostatnej **formulácii riešenia** a slovnej odpovede.

Slovné úlohy tvoria významnú súčasť školskej matematiky. Ich riešenie prepája matematické vedomosti s bežnými životnými situáciami a zároveň rozvíja čítanie s porozumením, jazykové kompetencie, schopnosť analýzy a interpretácie vzťahov. Práve preto patria slovné úlohy k tým tematickým okruhom, ktoré sú z didaktického hľadiska mimoriadne dôležité.

5.1 Historické poznámky

Historický kontext

Už najstaršie zachované matematické texty obsahujú úlohy formulované slovne. Egyptské papyrusy, babylonské tabuľky aj stredoveké početnice pracovali s príbehmi o rozdeľovaní chleba, obchode, meraní alebo pohybe. Slovná úloha teda nevznikla ako doplnok „hotovej“ matematiky, ale ako prirodzený spôsob, ktorým sa matematika viazala na potreby života.

Historicky mali slovné úlohy predovšetkým praktickú funkciu. V starovekých a stredovekých textoch sa objavujú úlohy o delení zásob, výmene tovaru, meraní pozemkov alebo spoločnej práci. Postupne sa z nich stával aj didaktický nástroj: žiak nemal iba vykonať výpočet, ale musel pochopiť situáciu, rozlíšiť známe a neznáme údaje a zostaviť primeraný postup riešenia. Tento aspekt zostáva aktuálny aj v súčasnosti.

Historické ukážky

Jedným z najstarších zachovaných matematických textov je *Rhindov papyrus* (cca 1650 pred n. l.). Obsahuje zbierku praktických úloh z aritmetiky a geometrie.

Príklad 1: Úloha R49 - Rhindov papyrus

Príklad výpočtu obsahu obdĺžnikového poľa.
Ak pole má dĺžku 10 khet a šírku 2 khet, aký je jeho obsah?

Riešenie. Vynásob 10 a 2. Dostaneš 20 setat.

V modernom zápise ide o výpočet obsahu obdĺžnika

$$S = a \cdot b,$$

teda

$$S = 10 \cdot 2 = 20.$$

□

Úloha ukazuje praktický charakter egyptskej matematiky, ktorá vznikala najmä z potrieb merania, hospodárenia a správy majetku. Z didaktického hľadiska je zaujímavá aj tým, že

matematický problém nevystupuje izolovane, ale je zasadený do konkrétnej situácie. Táto úloha ilustruje

1. jednu z najstarších foriem slovnej úlohy v dejinách matematiky,
2. prepojenie matematiky s praktickým meraním pôdy,
3. jednoduchý algoritmický štýl riešenia.

Slovné úlohy sa riešili už v starovekom Babylone (cca 1800 pred n. l.). Na hlinených tabuľkách sa objavujú problémy určovania dĺžky a šírky poľa, keď je známy súčet strán a obsah.

Príklad 2: Babylon – úlohy o dĺžke a šírke poľa

Pole má tvar obdĺžnika. Súčet jeho dĺžky a šírky je 20 jednotiek a obsah poľa je 96 štvorcových jednotiek. Určte rozmery poľa.

Riešenie. V modernom zápise dostaneme sústavu

$$x + y = 20, \qquad xy = 96.$$

Babylonský postup riešenia Babylončania by takúto úlohu riešili algoritmicky, bez symbolického zápisu rovníc. Pri probléme, keď je známy súčet strán a obsah obdĺžnika, postupovali približne takto:

1. vezmi polovicu súčtu strán,
$$\frac{20}{2} = 10$$
2. umocni ju,
$$10^2 = 100$$
3. odčítaj obsah,
$$100 - 96 = 4$$
4. vezmi druhú odmocninu,
$$\sqrt{4} = 2$$
5. pripočítaj a odpočítaj výsledok k polovici súčtu:
$$10 + 2 = 12, \; 10 - 2 = 8.$$

Babylonský postup – algebraické zdôvodnenie Moderný algebraický zápis umožňuje jednotlivé kroky babylonského postupu zdôvodniť nasledujúcim spôsobom. Označme dĺžky strán obdĺžnika a a b a položme

$$\frac{a+b}{2} = \mu.$$

Potom:

1. vezmeme polovicu súčtu strán,
$$\frac{a+b}{2} = \mu;$$

2. umocníme ju,
$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{a^2+2ab+b^2}{4} = \mu^2;$$

3. odčítame obsah obdĺžnika ab,
$$\frac{a^2+2ab+b^2}{4} - ab = \frac{a^2-2ab+b^2}{4} = \frac{(a-b)^2}{4};$$

4. vezmeme druhú odmocninu; bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať $a \geq b$,
$$\sqrt{\frac{(a-b)^2}{4}} = \frac{a-b}{2};$$

5. výsledok pripočítame k polovici súčtu a odčítame od nej:
$$\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} = a, \qquad \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2} = b.$$

V modernom algebraickom zápise možno túto úlohu formulovať aj pomocou kvadratickej rovnice. Ak jedna strana obdĺžnika má dĺžku x, druhá má dĺžku $20-x$ a obsah je 96, dostávame

$$x(20-x) = 96,$$

teda

$$x^2 - 20x + 96 = 0.$$

Korene rovnice sú $x_1 = 12$ a $x_2 = 8$, čo zodpovedá dĺžkam oboch strán obdĺžnika.

Porovnanie babylonského postupu s moderným algebraickým zápisom je didakticky zaujímavé z viacerých dôvodov. Ten istý problém sa rieši v odlišných matematických jazykoch: babylonský postup pracuje s konkrétnymi aritmetickými a geometrickými operáciami, zatiaľ čo moderná algebra vyjadruje vzťahy medzi veličinami symbolicky.
Z dnešného pohľadu možno vo vzťahoch medzi súčtom a súčinom hľadaných veličín rozpoznať aj štruktúru, ktorú neskôr vyjadrujú Vietove vzorce. Historický vývoj algebraických metód riešenia kvadratických rovníc pritom pokračoval cez indickú a arabskú matematiku až k symbolickej algebre novoveku.
Pre vyučovanie je podstatné, že nejde iba o porovnanie starého a nového algoritmu. Ukážka umožňuje sledovať, ako možno tú istú matematickú situáciu postupne vyjadrovať rôznymi reprezentáciami a ako sa mení matematický jazyk používaný na jej riešenie.

V európskych aritmetikách 16. storočia sa často objavovali praktické úlohy týkajúce sa merania polí a záhrad. Jedným z autorov, ktorí popularizovali aritmetiku v mestskom prostredí, bol nemecký matematik *Adam Ries* (1492–1559). V jeho učebniciach sa nachádzajú úlohy, ktoré dnes interpretujeme pomocou algebraických rovníc. Uvádzame ukážku slovnej úlohy, ktorú je vhodné použiť ako motivačnú na strednej škole.

Príklad 3: Adam Ries, 16. storočie

Záhrada má obdĺžnikový tvar. Jej obvod je 40 stôp a obsah je 96 štvorcových stôp. Aké sú rozmery záhrady?

Riešenie. *Riešenie v modernom zápise*

Nech x označuje dĺžku a y šírku obdĺžnika. Z podmienky o obvode dostávame

$$2(x + y) = 40,$$

teda

$$x + y = 20.$$

Z podmienky o obsahu platí

$$xy = 96.$$

Dosadením $y = 20 - x$ do druhej rovnice dostávame

$$x(20 - x) = 96,$$

$$x^2 - 20x + 96 = 0.$$

Po úprave dostaneme riešenia

$$x = 12, \qquad y = 8.$$

Rozmery záhrady sú teda 12 stôp a 8 stôp. □

V zbierkach matematických úloh určených pre gymnáziá v 19. storočí sa často objavovali úlohy spájajúce geometrické a algebraické uvažovanie. Tieto zbierky sú dnes dostupné v digitálnej knižnici *DML-CZ*.

Príklad 4: Gymnaziálna zbierka úloh – [STU, 1877]

Obdélníkové pole má obsah 480 čtverečních jednotek. Jeho úhlopříčka měří $\sqrt{976}$ jednotek. Určete délku a šířku pole.

Riešenie. Označme x dĺžku a y šírku poľa.

$$xy = 480$$

Pre uhlopriečku platí podľa Pytagorovej vety

$$x^2 + y^2 = 976.$$

Použijeme vzťah

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy,$$

odkiaľ

$$(x + y)^2 = 976 + 960 = 1936.$$

Riešením vzniknutej sústavy dostaneme

$$x = 24, \qquad y = 20.$$

Rozmery poľa sú teda 24 a 20 jednotiek. □

Didaktický význam historických ukážok

Úlohy s historickým kontextom sú vhodné na prepojenie matematických tém:

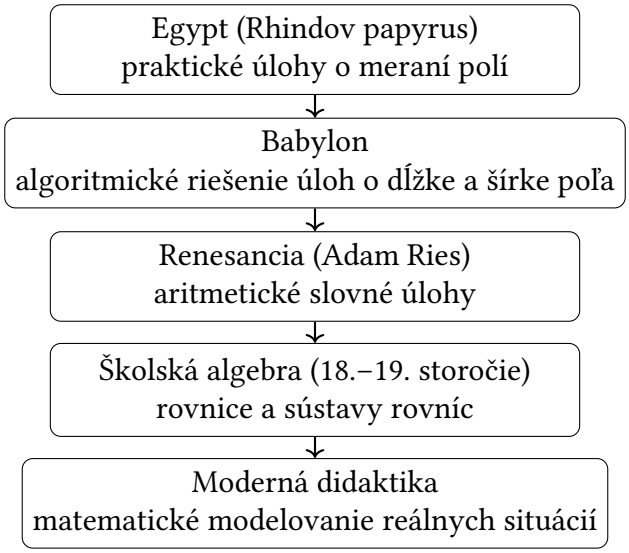
- vzťahu medzi **geometrickými veličinami** (obvod, obsah),
- **matematizácie slovnej úlohy**,
- prechodu od **aritmetického uvažovania** k **algebraickému modelu**.

Žiaci nižších ročníkov ZŠ často riešia podobné úlohy ešte bez formálneho použitia rovníc. Využívajú napríklad systematické skúšanie alebo tabuľku hodnôt. Vo vyšších ročníkoch ZŠ a na SŠ žiaci zisťujú, že rovnaký problém sa dá zapísať pomocou matematického modelu, najčastejšie pomocou algebraických rovníc.

Historické ukážky učiteľovi umožňujú poukázať na to, že podobné praktické problémy stáli pri zrode algebry.

Diskusia o rôznych stratégiách riešenia pomáha budúcim učiteľom pochopiť, ako sa u žiakov postupne formuje prechod od aritmetického k algebraickému mysleniu.

Historické ukážky zároveň naznačujú, že slovné úlohy sprevádzajú školskú matematiku od jej počiatkov a dodnes zostávajú dôležitým mostom medzi praktickou skúsenosťou a matematickým modelovaním.



Obr. 5.1: Vývoj slovných úloh v dejinách matematiky

Metodické poznámky pre vyučujúceho

1. Historický kontext je vhodné využívať **motivačne**, nie encyklopedicky. Dôležitejšie než presné dátumy je ukázať, že potreba riešiť slovné úlohy vyrastá z praktických problémov.

2. V školskej matematike sa osvedčuje otázka: „Ktoré dnešné školské slovné úlohy majú blízko k historickým úlohám o delení, výmene alebo meraní?“

3. Študentov je vhodné viesť k tomu, aby historický materiál nepoužívali ako ozdobu výkladu, ale ako prostriedok na vysvetlenie, **prečo sa určitý typ úlohy v škole vôbec objavuje**.

Reflexné otázky pre študentov

1. Prečo sú slovné úlohy vhodným prostredím na prepájanie matematiky s reálnym životom?
2. V čom sa v súčasnosti slovná úloha podobá historickým úlohám a v čom sa od nich odlišuje?
3. Aké matematické pojmy alebo postupy sa v historických slovných úlohách objavujú v implicitnej forme?

Diagram na obrázku 5.1 naznačuje postupný vývoj slovných úloh od praktických výpočtov v starovekých civilizáciách k dnešnému matematickému modelovaniu reálnych situácií.

Historický pohľad ukazuje, že slovná úloha nevznikla predovšetkým ako prostriedok na precvičovanie už známeho algoritmu. Jej prirodzeným východiskom bola potreba matematicky uchopiť konkrétnu situáciu.

V školskom prostredí sa tento vzťah môže obrátiť: matematický postup je už známy a slovný kontext slúži iba ako jeho obal. Z didaktického hľadiska je preto dôležité rozlišovať medzi úlohou, v ktorej žiak skutočne vytvára matematický model situácie, a úlohou, v ktorej iba rozpoznáva, ktorý naučený postup má použiť.

5.2 Vymedzenie pojmov

Slovné úlohy tvoria dôležitú súčasť didaktiky matematiky. Ich riešenie kladie na žiaka požiadavky, ktoré presahujú samotné vykonanie matematických operácií. Žiak musí porozumieť textu, vytvoriť si predstavu o opísanej situácii, rozpoznať podstatné údaje a vzťahy medzi nimi a následne ich vyjadriť matematickými prostriedkami.

Jednou z hlavných prekážok úspešného riešenia preto býva **nedostatočné porozumenie zadaniu**: žiak síce môže ovládať potrebný matematický aparát, nemusí však správne pochopiť situáciu alebo problém, ktorý úloha opisuje.

Definícia 1: Slovná úloha

Slovná úloha je matematická úloha, v ktorej je problém formulovaný v prirodzenom jazyku a vzťahy medzi danými a hľadanými veličinami vychádzajú z opísanej situácie. Jej riešenie preto zahŕňa nielen matematické operácie, ale aj porozumenie textu, interpretáciu situácie a vytvorenie vhodného matematického modelu.

Pojem slovná úloha nie je v didaktickej literatúre vymedzený úplne jednotne. V niektorých prístupoch sa za slovnú úlohu považuje matematická úloha formulovaná slovami, v iných sa zdôrazňuje aj jej **väzba na určitú situáciu alebo životnú skúsenosť riešiteľa**.

Z didaktického hľadiska je toto rozlíšenie podstatné. Samotná slovná formulácia ešte nevytvára slovnú úlohu v hlbšom zmysle. Rozhodujúce je, či musí riešiteľ opísanú situáciu interpretovať, rozpoznať v nej matematické vzťahy a vytvoriť ich matematickú reprezentáciu.

5.2.1 Ukážka matematických úloh

Nasledujúce štyri úlohy, prevzaté z práce [HEJ, 2003], možno využiť na diskusiu o tom, čím sa slovná úloha odlišuje od matematickej úlohy formulovanej slovami.

1. Učiteľ napísal na tabuľu rovnicu $5x + 4 = 19$ a spýtal sa triedy, či by ju niekto vedel vyriešiť.

2. Súčet dvoch čísel je 19 a ich rozdiel je 3. Ktoré sú to čísla?

3. Sestry Klára a Lenka majú dokopy 19 rokov. Klára je o 3 roky staršia ako Lenka. Koľko rokov má Klára a koľko Lenka?

4. Sestry Klára a Lenka majú dokopy 19 rokov. Klára mala 3 roky, keď sa Lenka narodila. Koľko rokov má Klára a koľko Lenka?

Porovnanie týchto úloh ukazuje, že samotná slovná formulácia ešte nestačí na to, aby sme úlohu považovali za slovnú v didaktickom zmysle.

1. V prvej úlohe je matematický problém zadaný priamo symbolicky. Slovný text vytvára iba rámec, v ktorom sa objaví rovnica

   $$5x + 4 = 19.$$

   Riešiteľ nemusí opisovanú situáciu matematizovať; matematický model už dostáva v hotovej podobe.

2. Druhá úloha je formulovaná slovami, ale vzťahy medzi hľadanými číslami sú uvedené priamo matematickým jazykom: poznáme ich súčet a rozdiel. Nepracujeme tu s konkrétnou životnou situáciou, ktorú by bolo potrebné interpretovať. V ďalšom texte preto tento typ úloh nebudeme považovať za slovné úlohy v užšom didaktickom zmysle.

3. Tretia úloha už opisuje konkrétnu situáciu. Údaj „Klára je o 3 roky staršia ako Lenka“ vyjadruje vzťah medzi vekmi oboch sestier v tom istom okamihu. Ide teda o **statickú slovnú úlohu**.

4. Vo štvrtej úlohe je ten istý vekový rozdiel vyjadrený prostredníctvom udalosti v čase: „Klára mala 3 roky, keď sa Lenka narodila“. Riešiteľ musí pochopiť, že rozdiel vekov sestier zostáva v čase nezmenený. Úloha preto obsahuje **dynamický prvok** a vyžaduje interpretáciu časového vzťahu.

Rozdiel medzi uvedenými úlohami nespočíva iba v množstve textu. Podstatná je činnosť, ktorú musí vykonať riešiteľ.
V prvej úlohe je matematický model zadaný priamo, v druhej sú matematické vzťahy pomenované slovami, zatiaľ čo v tretej a štvrtej úlohe ich musí riešiteľ z opísanej situácie najskôr rozpoznať a matematicky vyjadriť.

Poznámka

V školskej praxi sa pojmy „príklad“, „matematická úloha“ a „slovná úloha“ často používajú bez presného rozlíšenia. Z didaktického hľadiska je však užitočné rozlišovať medzi úlohou, v ktorej je matematická štruktúra zadaná priamo, a slovnou úlohou, v ktorej musí riešiteľ najskôr interpretovať opísanú situáciu a vytvoriť jej matematickú reprezentáciu.

5.3 Matematizácia a vizualizácia slovnej úlohy

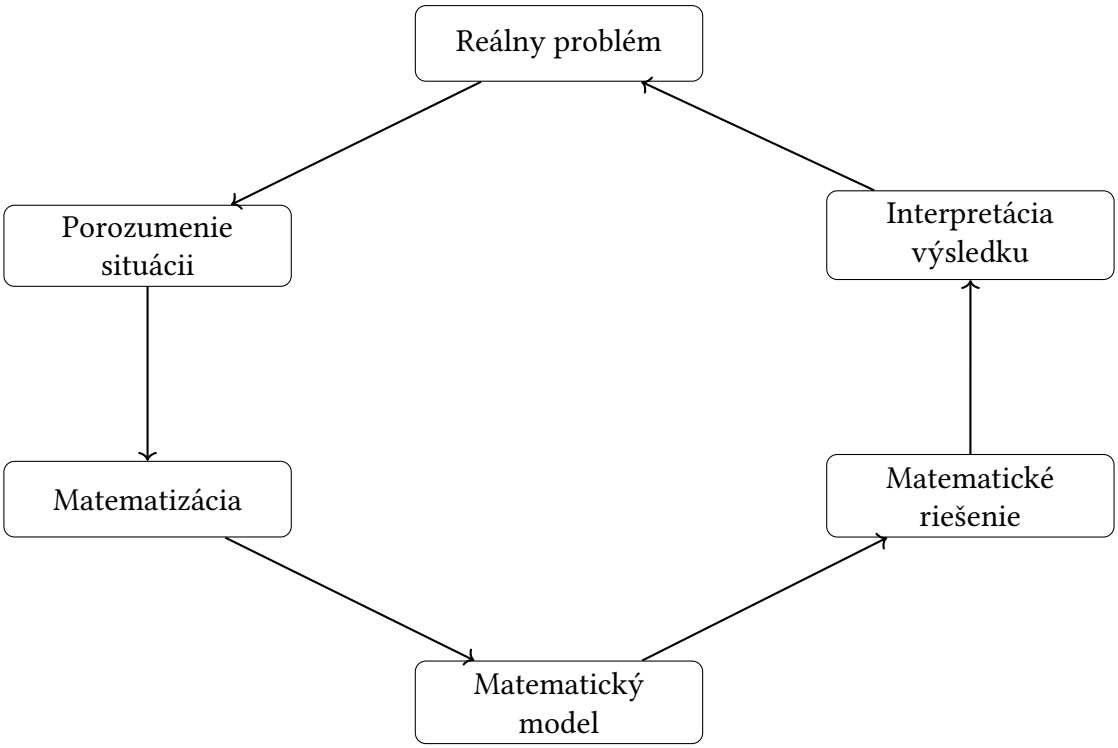
V texte slovnej úlohy možno rozlíšiť tri základné zložky:

1. opis situácie alebo kontextu, v ktorom je problém formulovaný,
2. údaje a vzťahy potrebné na riešenie; spolu vytvárajú **podmienky úlohy**,
3. otázku alebo požiadavku, ktorá určuje, čo má riešiteľ zistiť.

Riešenie slovnej úlohy možno chápať ako špecifický prípad matematického modelovania. Žiak pri riešení postupne prechádza od reálnej situácie opísanej v texte úlohy k matematickému modelu a následne späť k interpretácii výsledku v kontexte pôvodného problému.

Na obrázku 5.2 je znázornený diagram založený na modelovacom cykle (Blum–Leiss), ktorý patrí medzi najčastejšie používané schémy opisujúce proces matematického modelovania. Cyklus začína formuláciou reálneho problému a pokračuje jeho porozumením a analýzou situácie. Nasleduje matematizácia, v ktorej sa vzťahy medzi veličinami zapisujú pomocou matematických symbolov a vzniká matematický model úlohy.

Po vyriešení matematického problému je potrebné výsledok interpretovať v pôvodnom kontexte a posúdiť jeho zmysluplnosť. Ak výsledok nezodpovedá reálnej situácii, proces modelovania sa opakuje a model sa upravuje. Modelovací cyklus tak zdôrazňuje, že riešenie slovnej úlohy nie je iba výpočtový postup, ale proces prepájajúci reálnu situáciu, matematický model a interpretáciu výsledku.



Obr. 5.2: Modelovací cyklus pri riešení slovnej úlohy

Didaktická poznámka

Z didaktického hľadiska je osobitne dôležitý prechod od **reálnej situácie** k **matematickému modelu**. Žiak môže vedieť vyriešiť rovnicu, ale nemusí ešte vedieť vytvoriť rovnicu, ktorá správne vyjadruje vzťahy opísané v slovnej úlohe.
Porozumenie textu, rozpoznanie podstatných veličín a vzťahov medzi nimi a voľba vhodnej reprezentácie preto predchádzajú samotnému výpočtu. Práve v tomto prechode spočíva podstatná časť didaktickej náročnosti slovných úloh.

Proces, v ktorom riešiteľ prechádza od situácie opísanej prirodzeným jazykom k jej matematickému vyjadreniu, nazývame **matematizácia slovnej úlohy** [SED, 2013]. Jeho výsledkom je matematický model, ktorý môže mať podobu rovnice, tabuľky, diagramu, schémy alebo inej vhodnej reprezentácie.

Spätný prechod od matematického výsledku k pôvodnej situácii nazývame **interpretácia výsledku**. Riešiteľ pritom neposudzuje iba správnosť výpočtu, ale aj to, či získaný výsledok dáva v kontexte pôvodnej úlohy zmysel.

5.3.1 Ukážka matematizácie

Príklad: Statická slovná úloha

Sestry Klára a Lenka majú spolu 19 rokov. Klára je o 3 roky staršia ako Lenka. Koľko rokov má Klára a koľko Lenka?

Riešenie. Na nižšom stupni vzdelávania sa pri riešení takejto úlohy často využívajú názorné alebo experimentálne stratégie. Žiak môže napríklad pracovať s „bodkovým“ alebo úsečkovým modelom a postupne hľadať dve hodnoty, ktorých súčet je 19 a rozdiel 3.

Jedna z možností je začať dvojicou, ktorá zachováva rozdiel troch:

Klára ●●●●● ●●●●●

a potom o tri bodky menej k Lenke

Lenka ●●●●● ●●

V tomto modeli predstavujú rady 10 a 7 bodiek, teda spolu 17. Ak do každého radu pridáme po jednej bodke, rozdiel zostane zachovaný a dostaneme $11 + 8 = 19$. Klára má teda 11 rokov a Lenka 8 rokov.

Starší žiaci môžu využiť **rovnicový model**, napríklad:

$$K + L = 19, \qquad K = L + 3,$$

kde K je vek Kláry a L je vek Lenky. □

Metodické poznámky pre vyučujúceho

1. Pri výklade treba zdôrazniť, že matematizácia nie je mechanický prepis slov na symboly, ale výsledok **porozumenia situácii**.
2. Je vhodné porovnávať viacero spôsobov riešenia tej istej úlohy: aritmetický, modelový a algebraický. Študent tak lepšie uvidí, že matematizácia sa môže uskutočniť na rôznych úrovniach abstrakcie.
3. Hodnotenie žiackeho riešenia by malo rozlišovať medzi chybou vo výpočte a chybou v porozumení textu.

Reflexné otázky pre študentov

1. V ktorom momente riešenia žiak prechádza od opísanej situácie k jej matematickému modelu?
2. Aké nebezpečenstvo hrozí, ak žiaka priveľmi skoro vedieme priamo k rovnici?

5.3.2 Vizualizácia – modely

Pri riešení slovnej úlohy významnú úlohu zohráva **vizualizácia**. Vizualizácia môže mať podobu náčrtu, schémy, diagramu, tabuľky alebo úsečkového modelu. Nie je iba pomôckou k výpočtu; často sa stáva súčasťou samotného procesu riešenia.

Na vizualizáciu slovnej úlohy sa využívajú rôzne modely, ktoré žiakom umožňujú ľahšie porozumieť vzájomným vzťahom medzi objektmi skúmaného príbehu. Uvedieme štyri typy modelov, ktoré sa pomerne často používajú na 2. stupni základnej školy:

1. rovnicový alebo algebraický model,
2. tabuľkový model,
3. úsečkový model,
4. množinový model.

Použitie uvedených modelov budeme porovnávať pri riešení nasledujúcej úlohy. Nie každý model je rovnako vhodný pre každý vek a každú úroveň abstrakcie. Jeho didaktická hodnota spočíva nielen v matematickej správnosti, ale aj v tom, či pomáha žiakovi porozumieť vzťahom v opísanej situácii.

Pripomíname, že nie každý model je vhodný pre každý vek a každú úroveň abstrakcie. Didaktická hodnota modelu spočíva nielen v jeho matematickej presnosti, ale aj v tom, či je pre žiaka interpretačne prístupný.

Nasledujúca úloha umožňuje porovnať viacero modelov tej istej situácie.

Príklad: Úloha o žiakoch v triede

V triede je 25 žiakov, z ktorých je 12 chlapcov. Na hodine telesnej výchovy učiteľ zistil, že 5 chlapcov vie plávať a 2 dievčatá nevedia plávať. Koľko žiakov v triede vie plávať?

Rovnicový model

Rovnicový model je vhodný skôr pre vyššie ročníky alebo pre nadanejších žiakov ZŠ. Jeho výhodou je prehľadné vyjadrenie údajov a vzťahov pomocou symbolov. V našej úlohe môžeme označiť počet plávajúcich dievčat neznámou x. Zo zadania ľahko odvodíme vzťahy

plávajúci chlapci: 5 plávajúce dievčatá: x

neplávajúci chlapci: $12 - 5 = 7$ neplávajúce dievčatá: 2

Teraz zostavíme zápis pre riešenie úlohy:

spolu chlapci a dievčatá : $(5 + 7) + (x + 2)$
spolu žiakov v triede: 25

Riešime rovnicu: $12 + (x + 2) = 25$,

Z rovnice dostávame $x = 11$, teda plávať vie 11 dievčat. Spolu preto vie plávať

$$5 + 11 = 16$$

žiakov.

Tabuľkový model

Tabuľkový model umožňuje prehľadne zorganizovať údaje a vzťahy medzi nimi. V tomto prípade možno zostaviť tabuľku podľa pohlavia a podľa toho, či žiak pláva alebo nepláva.

	chlapci	dievčatá	spolu
plávajú	5	x	$5 + x$
neplávajú	7	2	9
spolu	12	13	25

Tabuľka 5.1: Tabuľkový model riešenia slovnej úlohy

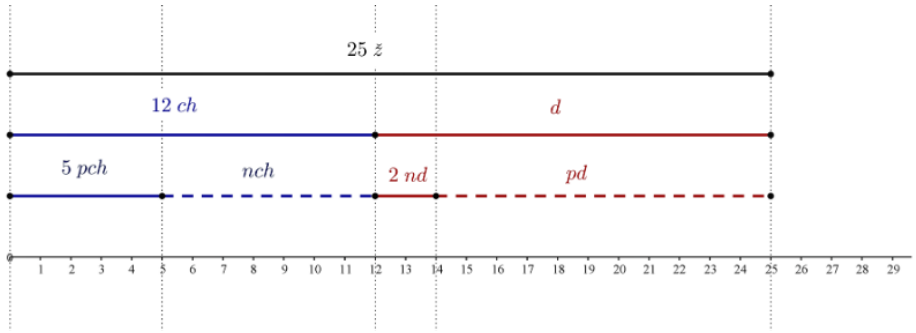
Dynamickú prezentáciu tabuľky si môžete spustiť na stránke https://www.geogebra.org/m/fsujg9p3.

Úsečkový model

Úsečkový model patrí medzi veľmi účinné prostriedky vizualizácie, najmä pri úlohách o porovnávaní, častiach celku a veku. Úsečkový model môže v tejto úlohe znázorniť rozdelenie celkového počtu žiakov na čiastkové skupiny a pomôcť sledovať, ktoré údaje sú známe a ktoré treba dopočítať.

Množinový model

Množinový model využíva najmä Vennove diagramy, ktoré môžu byť upravené podľa požiadaviek zadania. Pri úlohách o spoločných vlastnostiach žiakov pomáha rozlišovať prienik a



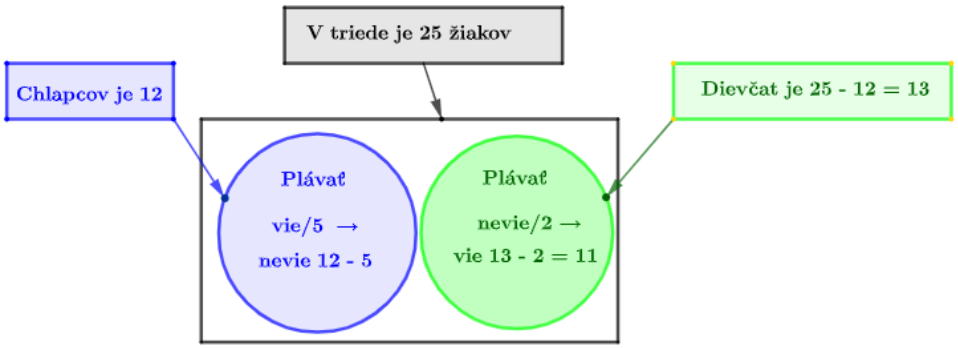
Obr. 5.3: Úsečkový model

doplnok množín. V našom príklade môžeme pracovať len s množinou chlapcov a s množinou plavcov alebo si zvolíme Vennov diagram pre 3 množiny.

Ak označíme množinu chlapcov Ch, množinu dievčat D a množinu plavcov P, potom z údajov úlohy vyplýva

$$|Ch| = 12, \qquad |P \cap Ch| = 5, \qquad |D \setminus P| = 2,$$

pričom počet dievčat je 13, teda počet plávajúcich dievčat je 11.



Obr. 5.4: Množinový model

Dynamickú prezentáciu množinového modelu si môžete spustiť na stránke https://www.geogebra.org/m/sqjpdddt.

Viac o využití rôznych modelov vhodných na interpretáciu slovných úloh nájdete v práci [NOV, 2004] a [HOF, 2019].

5.3.3 Úlohy na priamu a nepriamu úmernosť

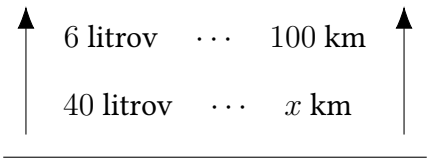
Slovné úlohy na priamu a nepriamu úmernosť podporujú rozvoj funkčného myslenia žiakov, pretože vedú k skúmaniu závislosti medzi veličinami. Pri ich riešení sa v školskej matematike často používa **trojčlenka**. Jej použitiu však musí predchádzať porozumenie vzťahu medzi veličinami a rozhodnutie, či ide o priamu alebo nepriamu úmernosť.

Priama úmernosť

Príklad: Úloha - priama úmernosť

Priemerná spotreba automobilu je 6 litrov benzínu na 100 kilometrov. Akú vzdialenosť prejde automobil pri tejto spotrebe na plnú nádrž s objemom 40 litrov?

Riešenie. Pri nezmenenej priemernej spotrebe je množstvo spotrebovaného benzínu priamo úmerné prejdenej vzdialenosti. Zapíšeme trojčlenku



Dostávame

$$\frac{6}{40} = \frac{100}{x}, \qquad x = \frac{40 \cdot 100}{6} \approx 666{,}7 \text{ km}.$$

Aktivujte si dynamický model na stránke https://www.geogebra.org/m/ywxgcnmk.

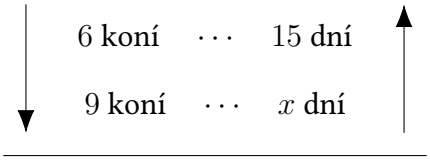
□

Nepriama úmernosť

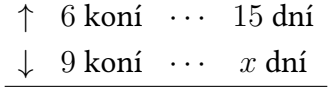
Príklad: Úloha - nepriama úmernosť

Šiestim koňom vydrží zásoba sena 15 dní. Ako dlho vydrží táto zásoba sena deviatim koňom?

Riešenie. Ak predpokladáme rovnakú dennú spotrebu sena na jedného koňa, počet koní a počet dní, na ktoré zásoba vystačí, sú nepriamo úmerné. Zapíšeme trojčlenku



niekedy sa náčrtok uvádza vo formáte



Pretože ide o nepriamu úmernosť, dostávame

$$6 \cdot 15 = 9 \cdot x,$$

a teda $x = 10$ dní.

Aktivujte si dynamický model https://www.geogebra.org/m/mtrueuhn. □

Kombinácia modelov

V niektorých slovných úlohách je vhodné kombinovať viacero vizualizácií. Typickým príkladom sú úlohy o veku, v ktorých sa osvedčuje spojenie tabuľkového modelu s rovnicovým modelom.

Príklad: Úloha o veku, pozrite tiež 5.4.6

Keď bude mať Katka toľko rokov, koľko má dnes Janko, bude Janko o 10 rokov starší ako je Katka dnes. Určte, o koľko rokov bol Janko starší od Katky v čase jej narodenia.

V tejto úlohe je vhodné vytvoriť tabuľkové modely pre osoby (Janko, Katka) a pre tri časové hladiny (vtedy, dnes, potom). Takéto usporiadanie pomáha rozlíšiť otvorené a skryté vzťahy medzi údajmi.

Údaje a vzťahy priamo uvedené v zadaní možno zachytiť pomocou tabuľkového modelu na obrázku 5.5. Ďalšie vzťahy, ktoré zo zadania vyplývajú až po jeho interpretácii, zachytáva model na obrázku 5.6. Riešenie *Katka sa narodila v čase, keď mal Janko 5 rokov* nájdete v časti *Fragmentácia textu a cesta k rovnicovému modelu.*

	vtedy	dnes	potom
Katka	0	y	
Janko	x		y + 10

Obr. 5.5: Otvorený výskyt – počiatočný stav

	vtedy	dnes	potom
Katka	0	y	y – x + 10
Janko	x	y + x	y + 10

Obr. 5.6: Skrytý výskyt – konečný stav

Metodické poznámky pre vyučujúceho

1. Pri úlohách o veku sa veľmi osvedčuje viesť žiakov k rozlíšeniu časových hladín „vtedy – dnes – potom“.
2. Trojčlenku netreba vyučovať ako mechanický postup; dôležité je, aby žiak vedel najprv rozhodnúť, či ide o priamu alebo nepriamu úmernosť.
3. Kombinovanie modelov je didakticky hodnotné: ukazuje, že rôzne reprezentácie tej istej situácie sa navzájom dopĺňajú.

Reflexné otázky pre študentov

1. Ktorý model je podľa vás pre žiaka na 2. stupni ZŠ najprístupnejší a prečo?
2. Pri ktorých typoch úloh by ste preferovali tabuľkový model a pri ktorých úsečkový model?

5.4 Typológia a klasifikácia slovných úloh

Slovné úlohy možno triediť z viacerých hľadísk. V didaktike matematiky nejde iba o formálne rozdelenie, ale o také triedenie, ktoré pomáha učiteľovi lepšie porozumieť povahe úlohy, predvídať typické chyby žiakov a zvoliť vhodný spôsob riešenia alebo reprezentácie.

Pri triedení slovných úloh sa najčastejšie uplatňujú tri hľadiská:

1. **matematická štruktúra úlohy**,
2. **obsahové zameranie úlohy**,
3. **náročnosť riešenia** z hľadiska počtu potrebných krokov.

5.4.1 Klasifikácia podľa matematickej štruktúry

Z hľadiska matematických vzťahov, ktoré tvoria jadro úlohy, možno rozlišovať najmä úlohy:

- aditívne,
- multiplikatívne,
- proporcionálne,
- kombinatorické,
- úlohy založené na funkčných vzťahoch.

Takéto členenie nie je vždy jednoznačné. Zložitejšia slovná úloha môže spájať viacero matematických štruktúr a tú istú úlohu možno niekedy vyjadriť rôznymi matematickými modelmi.

Aditívne úlohy Aditívne slovné úlohy sú založené na vzťahoch typu „o koľko viac“, „o koľko menej“, „koľko spolu“, „koľko zostalo“. V nižších ročníkoch sú dôležitým východiskom pre pochopenie významu sčítania a odčítania.

Príklad: Ilustračná úloha

Marta má 12 jabĺk a Eva má o 5 jabĺk viac. Koľko jabĺk majú spolu?

Riešenie. Najprv určíme počet jabĺk Evy:

$$12 + 5 = 17.$$

Potom určíme spoločný počet:

$$12 + 17 = 29.$$

Odpoveď: Marta a Eva majú spolu 29 jabĺk. □

Multiplikatívne úlohy Multiplikatívne úlohy pracujú so vzťahmi typu „koľkokrát viac“, „rovnaké skupiny“, „delenie na časti“, „delenie podľa obsahu“. Sú základom pre pochopenie násobenia a delenia.

Príklad: Ilustračná úloha

V každom balíčku je 6 ceruziek. Koľko ceruziek je v 8 balíčkoch?

Riešenie. Počet ceruziek určíme násobením:

$$6 \cdot 8 = 48.$$

Odpoveď: V 8 balíčkoch je 48 ceruziek. □

Proporcionálne úlohy Do tejto skupiny patria najmä úlohy na priamu a nepriamu úmernosť, percentá a mierku. Ich didaktický význam spočíva v rozvíjaní vzťahového a funkčného myslenia a v porozumení závislostiam medzi veličinami.

Rovnicový model slovnej úlohy Mnohé slovné úlohy možno po matematizácii vyjadriť pomocou jednej rovnice alebo sústavy rovníc. Typické sú napríklad úlohy o veku, pohybe, spoločnej práci alebo zmesiach.

Rovnicový zápis však nepredstavuje osobitný typ matematickej štruktúry v rovnakom zmysle ako aditívne, multiplikatívne alebo proporcionálne vzťahy. Je predovšetkým jedným

zo spôsobov matematickej reprezentácie úlohy. Jeho použitie má byť primerané veku žiakov, charakteru úlohy a cieľu vyučovania.

Didaktický význam klasifikácie slovných úloh nespočíva len v ich pomenovaní, ale v tom, že učiteľovi umožňuje lepšie odhadnúť náročnosť matematizácie, zvoliť vhodný model a predvídať typické chyby žiakov.

5.4.2 Klasifikácia podľa obsahového zamerania

Z obsahového hľadiska sa v školskej matematike často rozlišujú slovné úlohy:

- o veku,
- o pohybe,
- o spoločnej práci,
- o percentách a zlomkoch,
- o peniazoch, nákupoch a zľavách,
- o geometrických veličinách,
- o zmesiach a zloženiach,
- o kombinatorických situáciách.

Toto triedenie je pre učiteľa užitočné najmä preto, že jednotlivé skupiny úloh majú svoje typické jazykové konštrukcie, typické vzťahy medzi veličinami a typické chyby pri matematizácii.

5.4.3 Jednoduché a zložené slovné úlohy

Podľa náročnosti riešenia rozlišujeme:

1. **jednoduché slovné úlohy**, pri ktorých stačí jeden výpočtový krok alebo jedna základná operácia,
2. **zložené slovné úlohy**, pri ktorých treba postupovať vo viacerých nadväzujúcich krokoch.

Pri jednoduchej slovnej úlohe žiak identifikuje známe a neznáme veličiny, rozpoznáva vzťah medzi nimi a na jeho základe volí zodpovedajúcu matematickú operáciu. V nižších ročníkoch ZŠ sa jednoduché slovné úlohy riešia spravidla v obore prirodzených čísel a členia sa podľa dominantnej operácie.

Zloženú slovnú úlohu riešime tak, že ju postupne transformujeme na postupnosť nadväzujúcich jednoduchých slovných úloh, aby výsledok jednej jednoduchej úlohy bol východiskom

pre druhú. Táto transformácia sa najčastejšie uskutočňuje dvoma spôsobmi: **analyticky** a **syntheticky**. V praxi sa často využíva aj **analyticko–syntetický postup**.

Zloženú slovnú úlohu možno rozložiť na postupnosť jednoduchších čiastkových problémov. Pri zostavovaní plánu riešenia sa tradične rozlišuje **analytický** a **syntetický** postup; v praxi sa oba spôsoby uvažovania často navzájom dopĺňajú.

Pri **analytickom postupe** vychádzame z otázky úlohy a pýtame sa, ktoré údaje alebo medzivýsledky potrebujeme poznať, aby sme na ňu mohli odpovedať. Postupujeme teda od hľadaného výsledku späť k známym údajom.

Pri **syntetickom postupe** naopak vychádzame zo známych údajov a skúmame, ktoré nové informácie z nich môžeme postupne odvodiť. Postupujeme teda od daných údajov smerom k hľadanému výsledku.

Pri riešení konkrétnej úlohy sa analytické a syntetické uvažovanie spravidla neoddeľujú striktne. Analýza pomáha vytvoriť plán riešenia, kým syntéza umožňuje tento plán postupne uskutočniť.

Riešenie zloženej slovnej úlohy možno členiť na tri základné fázy:

1. **porozumenie a rozbor úlohy** – identifikácia údajov, vzťahov a požiadavky úlohy, prípadne vytvorenie náčrtu alebo diagramu,
2. **matematizácia a riešenie** – vytvorenie vhodného matematického modelu, zostavenie plánu a uskutočnenie výpočtu,
3. **interpretácia a kontrola** – posúdenie výsledku vzhľadom na pôvodnú situáciu a formulácia odpovede.

Príklad: Analytický a syntetický postup

Osem cyklistov prejde spolu za sedem dní 2632 km. Koľko kilometrov pripadá na jedného cyklistu za jeden deň, ak predpokladáme, že každý z nich prejde denne rovnakú vzdialenosť?

Analytický postup

Vychádzame z otázky úlohy:

- Chceme zistiť, koľko kilometrov pripadá na jedného cyklistu za jeden deň.
- Aby sme to mohli určiť, potrebujeme vedieť, koľko kilometrov pripadá na jedného cyklistu za všetkých sedem dní.
- Tento údaj získame z celkovej vzdialenosti 2632 km, ktorú prešlo osem cyklistov.

Analýzou sme teda dospeli od otázky úlohy späť k údajom, ktoré máme k dispozícii. Podľa vytvoreného plánu potom postupujeme opačným smerom:

$$2632 : 8 = 329,$$

teda na jedného cyklistu pripadá za sedem dní 329 km. Za jeden deň preto pripadá

$$329 : 7 = 47$$

kilometrov.
Jeden cyklista teda prejde za jeden deň 47 km.

Syntetický postup

Pri syntetickom postupe vychádzame z údajov uvedených v zadaní. Osem cyklistov jazdí sedem dní, takže celkovú vzdialenosť 2632 km možno rozdeliť najprv medzi osem cyklistov:

$$2632 : 8 = 329.$$

Na jedného cyklistu teda pripadá za sedem dní 329 km. Túto vzdialenosť ďalej rozdelíme na sedem dní:

$$329 : 7 = 47.$$

Postupným spájaním a spracovaním známych údajov sme dospeli k hľadanému výsledku: na jedného cyklistu za jeden deň pripadá 47 km.

Poznámka

Matematické operácie pri analytickom a syntetickom postupe môžu byť rovnaké. Rozdiel nespočíva predovšetkým vo výpočte, ale v **smere uvažovania pri vytváraní plánu riešenia**.
Analytický postup vychádza z otázky a hľadá údaje potrebné na jej zodpovedanie, zatiaľ čo syntetický postup vychádza zo známych údajov a postupne z nich odvodzuje nové informácie. Pri prirodzenom riešení slovnej úlohy sa oba spôsoby uvažovania často prelínajú.

5.4.4 Anatomický prístup k slovnej úlohe

Pri riešení slovnej úlohy je užitočné rozlišovať jej **anatómiu**, teda jednotlivé stavebné časti textu a ich funkciu v procese matematizácie. Slovná úloha nie je iba súbor viet; je to štruktúrovaný text, v ktorom jednotlivé jazykové prvky nesú rôzne druhy informácií.

Z didaktického hľadiska možno v slovnej úlohe rozlišovať najmä:

1. **kontextové jadro** – kto alebo čo v úlohe vystupuje,
2. **dané údaje** – explicitne uvedené veličiny,
3. **vzťahy medzi veličinami** – otvorené alebo skryté,
4. **časové a situačné roviny** – napr. vtedy, dnes, potom,
5. **požiadavku úlohy** – čo máme určiť.

Takéto anatomické čítanie úlohy pomáha žiakovi aj budúcemu učiteľovi uvedomiť si, že matematizácia nezačína písaním rovnice, ale rozpoznaním štruktúry situácie.

Anatomický prístup vedie študenta k tomu, aby pri každej slovnej úlohe pomenoval:

- kto alebo čo je nositeľom veličín,
- ktoré údaje sú priamo dané,
- ktoré vzťahy musíme odvodiť,
- aký model bude pre riešenie najvhodnejší.

5.4.5 Úlohy o veku ako modelový typ

Úlohy o veku tvoria osobitne významnú skupinu slovných úloh. Ich didaktická hodnota spočíva v tom, že prepájajú jazykové porozumenie, časové vzťahy, prácu s neznámou a často aj potrebu tabuľkového alebo rovnicového modelu.

Pre tieto úlohy je charakteristické:

- vystupujú v nich **časové hladiny** („vtedy – dnes – potom“),
- rozdiel vekov osôb ostáva **konštantný**,
- text často obsahuje **skryté vzťahy**, ktoré nie sú vyjadrené priamo.

Jednoduchým príkladom statickej úlohy o veku je už uvedená úloha o Kláre a Lenke. Všetky údaje v nej opisujú vek osôb v tom istom časovom okamihu. Náročnejšie sú úlohy, v ktorých sa prepájajú údaje z viacerých časových hladín.

Príklad: Dynamická úloha o veku

Otec má dnes 40 rokov a syn 10 rokov. O koľko rokov bude mať otec práve dvojnásobok veku syna?

Riešenie. Nech hľadaný čas je x rokov. Potom o x rokov bude mať otec

$$40 + x$$

rokov a syn

$$10 + x$$

rokov.

Podmienka, že vek otca bude dvojnásobkom veku syna, vedie na rovnicu

$$40 + x = 2(10 + x).$$

Po úprave:

$$40 + x = 20 + 2x,$$

$$20 = x.$$

Odpoveď: O 20 rokov bude otec práve dvakrát starší ako syn. □

5.4.6 Fragmentácia textu a cesta k rovnicovému modelu

Jednou z účinných didaktických stratégií pri náročnejších slovných úlohách je **fragmentácia textu**. Znamená to, že text úlohy nerozoberáme naraz, ale po menších významových úsekoch. Každý fragment priraďujeme k určitej časti modelu: k osobe, veličine, časovej hladine alebo vzťahu.

Tento postup je mimoriadne užitočný práve pri úlohách o veku, pretože v nich bývajú dôležité vzťahy rozptýlené vo viacerých vetách a žiaci ich ľahko prehliadnu. Fragmentácia textu nevedie priamo k výsledku, ale pomáha identifikovať tie časti zadania, ktoré nesú matematicky podstatné informácie.

Príklad: Náročnejšia úloha o veku, pozrite tiež 5.3.3

Keď bude mať Katka toľko rokov, koľko má dnes Janko, bude Janko o 10 rokov starší, ako je Katka dnes. Koľko rokov má Janko a Katka dnes?

Riešenie. Najprv rozdelíme text na významové fragmenty:

1. „Keď bude mať Katka toľko rokov, koľko má dnes Janko“
2. „ Janko bude o 10 rokov starší, ako je Katka dnes“

Označme dnešný vek Janka J a Katky K. Z prvého fragmentu vyplýva, že od dneška po daný budúci okamih uplynie

$$J - K$$

rokov. V tom istom okamihu bude Janko vek

$$J + (J - K).$$

Druhý fragment hovorí, že v tomto okamihu bude Janko o 10 rokov starší, ako je Katka dnes, teda

$$J + (J - K) = K + 10.$$

Po úprave dostaneme $J - K = 5$. To znamená, že Janko je dnes o 5 rokov starší ako Katka. □

Samotné zadanie teda **neurčuje ich presný vek jednotlivo**, ale určuje ich vekový rozdiel. Ak by sme chceli určiť oba veky jednoznačne, museli by sme mať v zadaní ešte jednu doplňujúcu informáciu.

Úloha je zámerne formulovaná tak, že otázka vyvoláva očakávanie konkrétnych vekov oboch osôb. Analýza zadania však ukáže, že dostupné informácie určujú iba ich vekový rozdiel:

$$J - K = 5.$$

Presný vek Janka a Katky preto nemožno zo zadania jednoznačne určiť. Na určenie oboch vekov by bola potrebná ešte jedna nezávislá informácia.

Metodické poznámky pre vyučujúceho

1. Pri klasifikácii slovných úloh je vhodné prepájať formálne triedenie s analýzou ich didaktickej náročnosti.
2. Úlohy o veku sú výborným prostredím na rozvíjanie schopnosti rozlišovať medzi explicitnými a implicitnými vzťahmi.
3. Fragmentácia textu pomáha žiakovi prejsť od intuitívneho porozumenia k presnejšiemu matematickému modelu.
4. Odporúča sa porovnávať úlohy, ktoré majú jednoznačné riešenie, s úlohami, ktoré určujú iba niektorý vzťah medzi veličinami.

Reflexné otázky pre študentov

1. Ktoré triedenie slovných úloh považujete za najvhodnejšie pre učiteľa na 2. stupni ZŠ?
2. V čom sa líši obsahové triedenie slovných úloh od triedenia podľa matematickej štruktúry?
3. Prečo sú úlohy o veku didakticky náročnejšie než bežné aditívne úlohy?

4. Akým spôsobom môže fragmentácia textu pomôcť žiakovi pri zostavovaní rovnice?
5. Ako by ste vysvetlili rozdiel medzi analytickým a syntetickým riešením na konkrétnom príklade?
6. Kedy je pri slovnej úlohe vhodnejšie zostať pri aritmetickom riešení a kedy už prejsť k algebraickému modelu?

5.5 Využitie AI pri riešení slovných úloh

Riešenie slovnej úlohy možno chápať ako modelovací proces, v ktorom žiak prechádza od porozumenia situácii cez matematizáciu a vytvorenie matematického modelu až k riešeniu a interpretácii výsledku. Zapojenie umelej inteligencie do tohto procesu preto nemožno zužovať iba na získanie správneho výsledku.

Z didaktického hľadiska je podstatné, **v ktorej fáze modelovacieho cyklu AI vstupuje do práce žiaka a akú činnosť v nej preberá**. Ak AI hneď vytvorí matematický model, zostaví rovnicu a vykoná výpočet, môže žiaka pripraviť práve o tie činnosti, ktoré majú slovné úlohy rozvíjať: porozumenie situácii, rozpoznanie vzťahov medzi veličinami, matematizáciu a voľbu vhodnej reprezentácie.

Didakticky zmysluplnejšie je preto využívať AI ako **sprievodcu a sparingpartnera**, ktorý vhodnými otázkami podporuje žiakovo uvažovanie, pomáha mu analyzovať zadanie, porovnávať možné reprezentácie a overovať zmysluplnosť vytvoreného modelu a výsledku, ale nepreberá samotný proces riešenia.

Pri práci so slovnou úlohou nie je rozhodujúce iba to, či AI poskytne správnu odpoveď. Dôležitejšia je otázka, **ktoré matematické a poznávacie činnosti zostávajú na žiakovi**. Vhodne navrhnutá interakcia s AI by preto mala podporovať modelovací cyklus, nie ho skracovať tým, že jeho podstatné fázy vykoná namiesto žiaka.

5.5.1 AI ako nástroj kritickej analýzy pojmu slovná úloha

Umelú inteligenciu možno pri práci so slovnými úlohami využiť ešte pred samotným riešením konkrétnej úlohy. Predmetom skúmania sa môže stať aj to, **ako AI rozumie pojmu slovná úloha** a podľa akých znakov jednotlivé úlohy do tejto kategórie zaraďuje.

Vráťme sa k štvorici úloh uvedených v časti *Od matematickej úlohy k slovnej úlohe*. Jednotlivé úlohy sa líšia spôsobom formulácie aj mierou, v akej musí riešiteľ interpretovať opísanú situáciu a vytvoriť jej matematickú reprezentáciu.

Namiesto požiadavky, aby AI tieto úlohy vyriešila, jej môžeme zadať nasledujúcu úlohu:

Príklad: Námet na prácu s AI

Predložte AI všetky štyri úlohy a použite napríklad tento prompt:

Ktoré z nasledujúcich úloh považuješ za slovné úlohy? Pri každej úlohe uveď kritérium, podľa ktorého si sa rozhodol. Úlohy nerieš.

Odpoveď AI následne porovnajte s vymedzením pojmu slovná úloha uvedeným v tejto kapitole.

Podstatou aktivity nie je zistiť, či AI priradí jednotlivým úlohám „správne“ označenie. Dôležitejšie je analyzovať **kritériá, ktorými svoje rozhodnutie zdôvodňuje**. AI môže napríklad prisudzovať príliš veľký význam samotnej prítomnosti slovného textu a nedostatočne rozlišovať medzi úlohou formulovanou slovami a úlohou, pri ktorej musí riešiteľ interpretovať situáciu a vytvoriť jej matematický model.

Odpoveď AI sa tak stáva predmetom kritického posúdenia. Študent nepreberá jej klasifikáciu ako hotový výsledok, ale konfrontuje ju s didaktickým vymedzením pojmu a formuluje vlastné stanovisko.

V tejto aktivite AI nevystupuje ako riešiteľ ani ako zdroj hotového poznatku. Jej odpoveď vytvára podnet na didaktickú diskusiu.
Takéto využitie AI rozvíja schopnosť študenta kriticky posudzovať argumentáciu generovanú AI, porovnávať ju s odbornými kritériami a svoje rozhodnutie zdôvodniť.

5.5.2 AI pri porozumení a fragmentácii textu

Prvou fázou riešenia slovnej úlohy je porozumenie situácii opísanej v zadaní. Skôr než žiak začne počítať alebo vytvárať matematický model, musí rozpoznať, ktoré informácie text obsahuje, aké veličiny v ňom vystupujú a aké vzťahy medzi nimi zadanie vyjadruje.

Práve v tejto fáze môže AI pôsobiť ako didaktický sparingpartner. Jej úlohou nemusí byť vysvetliť žiakovi, ako má úlohu vyriešiť. Môže mu pomôcť spomaliť čítanie textu, rozčleniť ho na významové časti a upriamiť pozornosť na informácie, ktoré bude potrebné ďalej interpretovať.

Fragmentácia textu nevedie priamo k výsledku, ale pomáha identifikovať tie časti zadania, ktoré nesú matematicky podstatné informácie.
AI možno v tejto fáze využiť tak, aby podporovala porozumenie textu, ale ešte nepreberala jeho matematizáciu.

Príklad: Námet na prácu s AI

Vyberte slovnú úlohu, ktorej zadanie obsahuje viacero údajov a vzťahov, a zadajte AI napríklad tento prompt:

Rozdeľ zadanie na významové fragmenty podľa informácií, ktoré obsahujú. Pri každom fragmente stručne uveď, čo sa z neho dozvedáme. Zatiaľ nevytváraj rovnicu ani iný matematický model a úlohu nerieš.

Porovnajte vytvorenú fragmentáciu s vlastným rozborom zadania. Posúďte, či AI zachytila všetky podstatné informácie a či niektorej časti textu neprisúdila význam, ktorý zo zadania nevyplýva.

Ešte väčší priestor pre aktivitu žiaka vzniká vtedy, keď AI fragmentáciu nevykoná sama, ale vedie ho k nej otázkami. Prompt možno preto formulovať aj reštriktívnejšie:

Príklad: AI ako sprievodca porozumením

Pomôž mi porozumieť zadaniu slovnej úlohy. Úlohu za mňa nerozdeľuj, nevytváraj matematický model a nepočítaj. Pýtaj sa ma postupne, vždy iba jednu otázku. Veď ma k tomu, aby som sám rozpoznal jednotlivé informácie, veličiny a vzťahy medzi nimi. Ak odpoviem nesprávne alebo neúplne, neprezraď mi hneď správnu odpoveď, ale polož ďalšiu otázku, ktorá mi pomôže moje tvrdenie prehodnotiť.

V oboch prípadoch pracuje AI s tou istou slovnou úlohou, ale **rozdelenie činností medzi AI a žiaka je odlišné**. V prvom prípade AI vytvorí návrh fragmentácie a žiak ho kriticky posudzuje. V druhom prípade zostáva samotná analýza textu na žiakovi a AI riadi proces pomocou otázok.

Druhý spôsob preto výraznejšie zachováva poznávaciu aktivitu žiaka. AI neposkytuje hotovú analýzu, ale vytvára podmienky na to, aby ju žiak uskutočnil sám.

Otázky na reflexiu

- Ktoré časti zadania AI označila za matematicky podstatné?
- Rozlíšila údaje, vzťahy medzi veličinami a otázku úlohy?
- Nevložila do interpretácie informáciu, ktorá v texte nie je?
- V ktorom z oboch spôsobov práce zostáva väčšia časť porozumenia zadaniu na žiakovi?

5.5.3 AI pri matematizácii a voľbe matematického modelu

Po porozumení zadaniu nasleduje jedna z najdôležitejších fáz riešenia slovnej úlohy – matematizácia. Riešiteľ v nej prechádza od situácie opísanej prirodzeným jazykom k matematickému vyjadreniu vzťahov medzi veličinami. Výsledkom nemusí byť iba rovnica. Vhodným modelom môže byť aj tabuľka, diagram, schéma, graf alebo iná matematická reprezentácia.

Práve v tejto fáze vzniká pri využívaní AI osobitný didaktický problém. Ak žiak zadá AI slovnú úlohu s požiadavkou na jej vyriešenie, AI môže veľmi rýchlo vytvoriť matematický model a pokračovať vo výpočte. Žiak tak síce získa riešenie, ale nemusí uskutočniť samotný prechod od opísanej situácie k matematickej štruktúre.

Zmyslom využitia AI preto nemusí byť vytvorenie modelu namiesto žiaka. AI môže pôsobiť ako partner, ktorý pomáha žiakovi model postupne vytvoriť, porovnať viacero možných reprezentácií a zdôvodniť ich vhodnosť.

Pri matematizácii je dôležité rozlišovať medzi **pomocou pri vytváraní modelu** a **vytvorením modelu namiesto žiaka**.
Ak je cieľom vyučovania rozvíjať schopnosť matematizovať reálnu situáciu, potom by táto poznávacia činnosť mala zostať predovšetkým na strane žiaka. AI môže proces podporovať otázkami, spätnou väzbou a porovnávaním alternatív, nemala by však automaticky vykonať jeho podstatnú časť.

Od hotového modelu k vedeniu žiaka

Rozdiel medzi jednotlivými spôsobmi využitia AI možno ukázať už na formulácii promptu. Predstavme si, že žiak pracuje so slovnou úlohou a potrebuje vytvoriť jej matematický model.

Najjednoduchšia požiadavka môže mať podobu:

Príklad: AI vytvára model

Vyrieš túto slovnú úlohu krok za krokom. Zostav potrebnú rovnicu a vypočítaj výsledok.

Takto formulovaný prompt prenáša na AI nielen výpočet, ale aj matematizáciu. Žiak dostáva hotový model bez toho, aby ho musel sám vytvoriť.

Vhodnejšou možnosťou môže byť požiadavka, pri ktorej AI navrhne niekoľko reprezentácií, ale rozhodnutie ponechá na žiakovi:

Príklad: AI ponúka možné reprezentácie

Navrhni dva možné spôsoby, ako možno situáciu matematicky znázorniť, napríklad pomocou diagramu, tabuľky alebo rovnice. Úlohu nevypočítavaj. Vysvetli iba, čo jednotlivé reprezentácie zachytávajú.

Žiak následne posudzuje, ktorá reprezentácia najlepšie vystihuje vzťahy v zadanej situácii, a svoje rozhodnutie zdôvodňuje.

Najväčší priestor pre vlastnú matematizáciu žiaka vzniká vtedy, keď AI model sama nenavrhuje, ale vedie žiaka otázkami:

Príklad: AI vedie žiaka k vytvoreniu modelu

Pomôž mi vytvoriť matematický model tejto slovnej úlohy, ale nevytváraj ho za mňa. Pýtaj sa ma vždy iba jednu otázku. Najprv ma veď k určeniu veličín a vzťahov medzi nimi. Potom sa ma pýtaj, ako by som tieto vzťahy mohol matematicky zapísať. Ak navrhnem model, neposkytuj hneď vlastné riešenie, ale pomôž mi overiť, či môj model zodpovedá pôvodnému zadaniu.

Vo všetkých troch prípadoch má AI k dispozícii rovnakú slovnú úlohu. Mení sa však rozdelenie poznávacích činností medzi AI a žiaka.

V prvom prípade AI matematický model vytvorí. V druhom ponúka možné reprezentácie a žiak medzi nimi rozhoduje. V treťom zostáva vytvorenie modelu na žiakovi a AI podporuje proces matematizácie otázkami a spätnou väzbou.

Nejde teda iba o rozdiel medzi tromi promptmi. Ide o tri odlišné didaktické situácie, v ktorých žiak preberá rozdielnu mieru zodpovednosti za vytvorenie matematického modelu.

Didaktická poznámka

Pri návrhu práce s AI možno položiť jednoduchú kontrolnú otázku:

Ktorú poznávaciu činnosť má v tejto úlohe vykonať žiak?

Ak ju prompt bez ďalšieho prenesie na AI, môže byť potrebné spôsob interakcie prehodnotiť. Cieľom nie je obmedzovať možnosti AI, ale vedome rozhodovať, ktoré činnosti má technológia podporovať a ktoré majú zostať súčasťou učenia žiaka.

Iterácia promptu ako didaktické rozhodovanie

Prompt nemusí byť konečným zadaním vytvoreným na prvý pokus. Jeho formuláciu možno na základe odpovede AI ďalej upravovať. Tento proces označujeme ako **iteráciu promptu**.

Vo vyučovaní matematiky však nemusí byť cieľom iterácie iba získanie presnejšej alebo kvalitnejšej odpovede AI. Učiteľ môže prompt upravovať aj podľa toho, **akú časť poznávacej činnosti AI preberá a akú ponecháva žiakovi**.

Ak napríklad AI vytvorí matematický model skôr, než mal žiak príležitosť vytvoriť ho sám, ďalšia verzia promptu môže túto činnosť AI obmedziť a nahradiť ju otázkami, ktoré podporia vlastné uvažovanie žiaka. Iterácia promptu sa tak stáva súčasťou didaktického rozhodovania učiteľa.

Schopnosť iterovať prompt podľa didaktického cieľa možno preto chápať ako jednu z nových profesijných kompetencií učiteľa pri práci s umelou inteligenciou. K tejto otázke sa vrátime v závere monografie.

5.5.4 AI pri kontrole matematického modelu a práci s chybou

Vytvorením matematického modelu sa proces matematizácie nekončí. Riešiteľ by mal posúdiť, či zvolená reprezentácia skutočne vyjadruje vzťahy opísané v pôvodnej situácii. Práve kontrola modelu môže byť ďalším miestom zmysluplného zapojenia AI.

Ak žiak predloží AI svoj model, najjednoduchšou reakciou je jeho vyhodnotenie a prípadná oprava. Z didaktického hľadiska však môže byť cennejšie, ak AI chybu priamo neoznámi, ale pomôže žiakovi preskúmať vlastné uvažovanie a odhaliť problém samostatne.

AI tak nevytvára model namiesto žiaka. Vstupuje do procesu až vtedy, keď už žiak formuloval vlastnú predstavu o matematickej štruktúre úlohy.

Príklad: Práca s chybným matematickým modelom

Uvažujme slovnú úlohu:

Klára a Lenka majú spolu 19 rokov. Klára je o 3 roky staršia ako Lenka. Koľko rokov má Klára a koľko Lenka?

Žiak označil vek Lenky ako x a zapísal rovnicu

$$x + (x - 3) = 19.$$

Namiesto požiadavky, aby AI riešenie opravila, jej môžeme predložiť žiakov zápis a požiadať ju, aby podporila jeho vlastnú kontrolu.

Príklad: AI opravuje chybu

Skontroluj žiakovo riešenie. Ak je v ňom chyba, vysvetli ju a napíš správnu rovnicu.

Príklad: AI vedie žiaka k odhaleniu chyby

Žiak vytvoril uvedený matematický model. Nehovor mu, či je správny alebo nesprávny, a neopravuj ho. Polož mu vždy iba jednu otázku, ktorá ho vedie k porovnaniu jednotlivých častí jeho zápisu s pôvodným zadaním. Ak chybu odhalí, veď ho k tomu, aby ju sám vysvetlil a navrhol opravu.

V druhom prípade sa mení úloha AI. Namiesto hodnotenia výsledku podporuje proces sebakontroly. Vhodná otázka môže napríklad upriamiť pozornosť žiaka na význam výrazu $x - 3$ a na jeho súlad s vetou *Klára je o 3 roky staršia ako Lenka.* Samotné rozpoznanie rozporu a oprava modelu však zostávajú na žiakovi.

AI ako sparingpartner učiteľa

AI nemusí pracovať iba priamo so žiakom. Učiteľ ju môže využiť pri príprave spätnej väzby k žiackemu riešeniu. Namiesto otázky *„Akú chybu žiak urobil?“* možno formulovať požiadavku, ktorá smeruje k didaktickej reakcii:

Príklad: Námet pre učiteľa

Prečítaj si zadanie a žiakov matematický model. Navrhni tri otázky, ktorými by učiteľ mohol žiaka viesť ku kontrole jeho zápisu. Chybu žiakovi priamo neprezrádzaj. Pri každej otázke stručne vysvetli, na ktorú časť jeho uvažovania je zameraná.

Takto formulovaná interakcia nežiada AI, aby nahradila učiteľovo didaktické rozhodovanie. Poskytuje návrhy, ktoré učiteľ následne posudzuje vzhľadom na konkrétneho žiaka, cieľ vyučovania a situáciu v triede.

Z jedného chybného riešenia nemožno spoľahlivo usudzovať na príčinu žiakovho neporozumenia. Rovnaký chybný zápis môže vzniknúť z rôznych dôvodov.
AI preto môže učiteľovi navrhovať **možné interpretácie chyby** a vhodné otázky na ich overenie, nemala by však z jedného výkonu formulovať jednoznačnú diagnózu žiakovho myslenia.

Práca s chybou tak ponúka najmenej dve možnosti využitia AI. V interakcii so žiakom môže AI podporovať sebakontrolu a viesť ho k odhaleniu rozporu. V práci učiteľa môže pôsobiť ako sparingpartner pri hľadaní otázok a možných didaktických reakcií.

V oboch prípadoch zostáva rozhodujúce, aby AI neprebrala činnosť, ktorú chceme prostredníctvom práce s chybou rozvíjať.

5.5.5 AI pri posudzovaní dostatočnosti údajov

Pri riešení slovnej úlohy sa zvyčajne predpokladá, že zadanie obsahuje všetky údaje potrebné na jednoznačné určenie výsledku. Ani tento predpoklad však nemusí byť vždy splnený. Súčasťou matematického uvažovania je preto aj posúdenie, či dostupné informácie skutočne postačujú na zodpovedanie položenej otázky.

Takáto situácia vytvára zaujímavý priestor na prácu s AI. Namiesto overovania správnosti výpočtu môžeme skúmať, či AI kriticky posúdi samotné zadanie, alebo sa napriek nedostatku údajov pokúsi vytvoriť konkrétnu odpoveď.

Príklad: Katka a Janko – je možné určiť ich vek?

Vráťme sa k úlohe o Katke a Jankovi analyzovanej v predchádzajúcej časti kapitoly.

Jej rozbor ukázal, že zo zadaných informácií možno určiť vzťah

$$J - K = 5,$$

teda vekový rozdiel medzi Jankom a Katkou. Presný vek oboch osôb však bez ďalšej nezávislej informácie nemožno jednoznačne určiť.

Práve táto vlastnosť úlohy umožňuje skúmať, ako spôsob formulácie promptu ovplyvní reakciu AI.

AI orientovaná na získanie odpovede

Najjednoduchšia požiadavka môže mať podobu:

Príklad: Prompt A

Vyrieš nasledujúcu slovnú úlohu. Urči vek Katky a Janka a vysvetli postup riešenia.

Takto formulovaný prompt predpokladá, že konkrétne veky možno určiť. Kvalitná odpoveď AI by mala napriek tejto formulácii rozpoznať nedostatočnosť údajov. Aktivita je však zaujímavá práve tým, že študent nemá tento výsledok vopred považovať za samozrejmý. Má posúdiť, či AI predpoklad ukrytý v požiadavke kriticky preverí.

Po získaní odpovede AI študent posudzuje:

- Rozpoznala AI, že údaje nepostačujú na jednoznačné určenie oboch vekov?
- Vysvetlila, ktorú informáciu možno zo zadania skutočne odvodiť?
- Nevložila do riešenia dodatočný predpoklad, ktorý zadanie neobsahuje?
- Rozlíšila medzi vzťahom $J - K = 5$ a určením konkrétnych hodnôt J a K?

AI ako kritik zadania

V druhej situácii zmeníme poradie činností. AI nemá začať riešením, ale najprv preskúmať, či je problém z dostupných údajov vôbec jednoznačne riešiteľný.

Príklad: Prompt B

Skôr než začneš túto slovnú úlohu riešiť, preskúmaj jej zadanie. Urči, čo možno z uvedených informácií jednoznačne odvodiť a či údaje postačujú na zodpovedanie položenej otázky. Nepridávaj žiadne predpoklady, ktoré nie sú uvedené v zadaní.

Zmena promptu presúva pozornosť od výpočtu ku kontrole podmienok problému. AI dostáva explicitnú požiadavku odlíšiť informácie vyplývajúce zo zadania od predpokladov, ktoré by doň mohla doplniť.

Aj v tomto prípade však AI vykonáva podstatnú časť analýzy sama. Pre študenta môže byť jej odpoveď vhodným predmetom kritického posúdenia, ale samotné odhalenie nedostatočnosti údajov ešte zostáva na strane AI.

AI-tútor vedie študenta k odhaleniu problému

Ak chceme, aby dostatočnosť údajov posúdil samotný študent, môžeme úlohu AI opäť obmedziť. Namiesto analýzy zadania dostane za úlohu riadiť proces otázkami.

Príklad: Prompt C

Pomôž mi preskúmať, či možno túto slovnú úlohu jednoznačne vyriešiť. Zatiaľ mi nehovor, či má alebo nemá dostatok údajov. Pýtaj sa ma vždy iba jednu otázku.
Veď ma k tomu, aby som sám určil neznáme veličiny, zapísal vzťahy, ktoré zo zadania vyplývajú, a posúdil, čo z nich možno jednoznačne určiť. Ak urobím nepodložený predpoklad, neprezraď mi hneď chybu, ale otázkou ma veď k tomu, aby som zistil, či tento predpoklad skutočne vyplýva zo zadania.

V tejto podobe AI neoznamuje, že úloha nemá jednoznačné riešenie. Študent musí sám rozpoznať, že z dostupných informácií získava iba jeden nezávislý vzťah medzi dvoma neznámymi veličinami.

AI tak nepôsobí ako kontrolór zadania, ale ako partner pri jeho kritickom skúmaní. Výsledkom interakcie nemá byť iba poznatok, že údaje nestačia, ale porozumenie tomu, **prečo nestačia**.

Režim	Úloha AI	Úloha študenta
AI riešiteľ	pokúša sa odpovedať na otázku zadania	kriticky posudzuje, či AI rešpektovala dostupné údaje
AI kritik	kontroluje dostatočnosť údajov pred riešením	posudzuje argumentáciu AI
AI-tútor	kladie otázky a riadi proces skúmania	sám zisťuje, čo z údajov vyplýva a či postačujú

Úloha s nedostatočnými údajmi mení tradičnú otázku *„Dokáže AI úlohu vyriešiť?“* na didakticky podstatnejšiu otázku:

Dokáže interakcia s AI podporiť študenta v tom, aby rozpoznal, či je vôbec čo jednoznačne vyriešiť?

Kritické čítanie zadania, kontrola dostatočnosti údajov a rozlišovanie medzi informáciou a nepodloženým predpokladom sú pritom súčasťou matematického myslenia, nie iba kontrolou vykonaného výpočtu.

Námet na seminár

Vyskúšajte všetky tri prompty s tou istou úlohou o Katke a Jankovi a porovnajte priebeh interakcie s AI.
Potom upravte Prompt C tak, aby AI ešte menej naznačovala záver a väčšiu časť kontroly dostatočnosti údajov ponechala študentovi. Zdôvodnite, ktoré formulácie promptu ste zmenili a aký didaktický dôsledok od tejto zmeny očakávate.

5.5.6 Od riešenia s AI k didakticky riadenej spolupráci

Uvedené príklady ukazujú, že využitie AI pri slovných úlohách nemožno redukovať na získanie správneho riešenia. AI môže vstupovať do rôznych fáz modelovacieho procesu a v každej z nich môže preberať odlišnú úlohu. Môže pomáhať pri analýze zadania, podporovať fragmentáciu textu, sprevádzať žiaka pri vytváraní matematického modelu, poskytovať podnety na jeho kontrolu alebo viesť k posúdeniu, či údaje v zadaní vôbec postačujú na jednoznačné riešenie.

Didaktický význam takejto interakcie však nezávisí iba od toho, **čo dokáže AI**, ale predovšetkým od toho, **čo pri práci s ňou zostáva úlohou žiaka**. Rovnaká technológia môže matematické myslenie nahrádzať, ale môže ho aj podporovať. Rozhodujúci je spôsob, akým učiteľ navrhne situáciu a prostredníctvom promptu rozdelí poznávaciu činnosť medzi žiaka a AI.

Z tohto pohľadu možno využitie AI premietnuť do jednotlivých fáz modelovacieho cyklu:

$$\text{porozumenie} \longrightarrow \text{matematizácia} \longrightarrow \text{matematický model} \longrightarrow \text{riešenie} \longrightarrow \text{interpretácia a kontrola.}$$

V každej fáze si učiteľ môže položiť rovnakú otázku: *Ktorú poznávaciu činnosť má vykonať žiak a akú podporu mu v tejto chvíli môže poskytnúť AI?*

Takáto otázka presúva pozornosť od samotného používania technológie k didaktickému návrhu interakcie.

Zmysluplné využitie AI vo vyučovaní matematiky nespočíva v tom, že AI vykoná čo najväčšiu časť riešenia. Jej prínos môže spočívať práve v tom, že vhodnými otázkami, podnetmi a spätnou väzbou vytvára priestor pre matematickú činnosť žiaka.
Učiteľ preto pri návrhu interakcie s AI nerozhoduje iba o tom, **ako AI použiť**, ale aj o tom, **čo jej zámerne neponechať**.

Prompt sa v tomto chápaní stáva súčasťou didaktického dizajnu. Jeho iterácia umožňuje učiteľovi reagovať na spôsob, akým AI vstupuje do riešenia, a postupne upravovať mieru jej podpory tak, aby poznávacia aktivita zostávala primerane na strane žiaka.

Schopnosť navrhovať a didakticky iterovať prompty preto možno chápať ako jednu z nových profesijných kompetencií učiteľa matematiky v prostredí AI. K širším dôsledkom tejto zmeny

pre prácu učiteľa sa vrátime v závere monografie.

Slovné úlohy tak v prostredí AI nestrácajú svoj tradičný význam. Naopak, ešte výraznejšie vystupuje do popredia ich úloha pri rozvíjaní porozumenia, matematizácie, kritického posudzovania informácií a interpretácie matematických výsledkov. Práve tieto činnosti nemožno stotožniť so samotným získaním správnej odpovede.

Cieľom práce so slovnou úlohou preto zostáva, aby žiak dokázal porozumieť opísanej situácii, vytvoriť jej primeraný matematický model, riešenie interpretovať a posúdiť jeho zmysluplnosť. AI môže byť v tomto procese cenným partnerom – za predpokladu, že podporuje cestu žiaka k porozumeniu namiesto toho, aby ju absolvovala za neho.

6 Číselné obory

6.1 Historické poznámky

Didaktické ciele kapitoly
Po absolvovaní kapitoly by mal študent učiteľstva matematiky::

1. rozlišovať medzi intuitívnym školským zavádzaním pojmu čísla a jeho abstraktnou matematickou definíciou,
2. chápať **historický vývoj** pojmu čísla ako **didaktický zdroj**, nie ako encyklopedickú informáciu,
3. vedieť vysvetliť **rozdiel** medzi pojmami **číslo a číslica** na úrovni ZŠ.

V priebehu školskej matematiky sa žiaci postupne zoznamujú so základmi aritmetiky a geometrie, dvoch najstarších matematických oblastí. V školskej matematike sa pojem čísla zavádza intuitívne, zatiaľ čo na VŠ je definovaný abstraktne (ako prvok množiny s operáciami). Tento študijný materiál je zameraný na aritmetické učivo, teda na prácu s číslami a početnými operáciami, ktoré tvoria neoddeliteľnú súčasť každodenného života. **Slovo aritmetika pochádza z gréckeho slova arithmos, čo znamená číslo**.

Definícia 1: Aritmetika

Aritmetika je matematická disciplína, ktorá sa zaoberá najmä rozširovaním číselných oborov a základnými početnými operáciami v týchto oboroch – sčítaním, odčítaním, násobením a delením.

Definícia 2: Číslo a číslica

Číslo je matematický pojem, ktorým vyjadrujeme počet, množstvo alebo poradie.
Číslica je znak, pomocou ktorého čísla zapisujeme.

V školskej matematike je **dôležité rozlišovať pojmy číslo a číslica**. V súčasnosti používame desať arabských číslic:

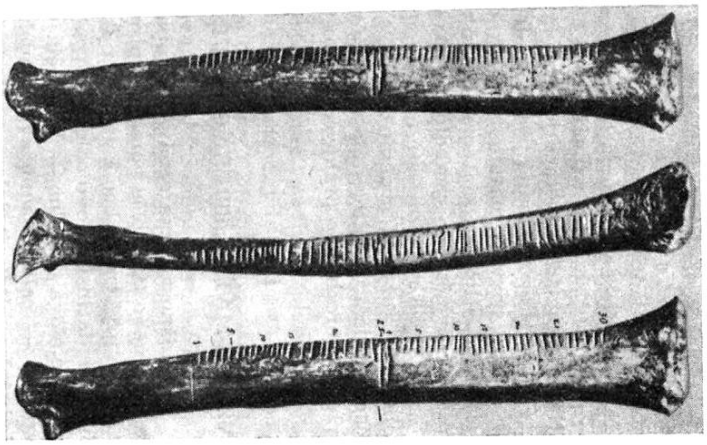
0, 1, 2,3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Každá z týchto číslic môže sama o sebe vyjadrovať aj príslušné číslo. V bežnom živote tieto pojmy často nerozlišujeme, no v matematike je presné vyjadrovanie nevyhnutné. Arabské číslice majú pôvod v Indii, do Európy sa však rozšírili prostredníctvom arabských učencov a obchodníkov. Okrem slova číslica sa používa aj výraz cifra. S pojmom číslo sa stretávame aj v slovách ako numerický či číselný.

Historické ukážky vývoja číselných oborov

Pojem čísla si ľudia osvojili už veľmi dávno, ešte v období bez písomných záznamov, keď sa učili rozlišovať počet predmetov v skupinách. Spočiatku ľudia pomenúvali len malé počty a znázorňovali ich jednoduchými spôsobmi – napríklad zárezmi do dreva, uzlíkmi na povraze alebo hromádkami kamienkov. Väčšie množstvá vyjadrovali neurčito, slovom „mnoho“. S rozvojom hospodárstva, obchodu a remesiel rástla potreba presnejšieho a úspornejšieho zaznamenávania počtov, čo viedlo k vzniku číselných sústav a k zdokonaľovaniu výpočtových postupov.

O vysokej úrovni aritmetických poznatkov v staroveku svedčia napríklad egyptské papyrusy a babylonské hlinené tabuľky. Významný prínos mali aj matematici v Číne, Indii a najmä v starovekom Grécku, kde sa poznatky o číslach systematizovali a aritmetika sa postupne formovala ako vedecká disciplína. Tieto základy umožnili neskorší rozvoj ďalších oblastí matematiky. Základným stavebným prvkom aritmetiky je číslo. Hoci ľudia používali prirodzené čísla už

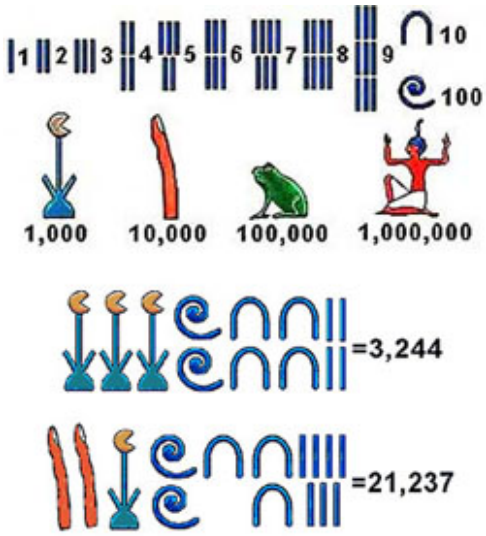


Obr. 6.1: Věstonická vrubovka

tisíce rokov, rozhodujúcim krokom pre rozvoj matematiky bol vznik desiatkovej sústavy a jej zápisu pomocou arabských číslic. Prvé predstavy o čísle pochádzajú už z dávneho obdobia staršej doby kamennej, paleolitu. Sú nerozlučne spojené s obdobím, keď na začiatku štvrtohôr začína človek získavať pomocou nástrojov prostriedky k obžive. Za prvý dôkaz, že človek už vedel počítať sa považujú vrubovky. Pozri obrázok 6.1.

Egypťania a Babylončania (2000 – 500 pred n. l.) používali všetky základné aritmetické operácie už v roku 2000 pred Kristom. Hieroglyfický systém pre egyptské číslice vychádzal zo sčítacích značiek používaných na počítanie. Pozri obrázok 6.2. Tento pôvod viedol k hodno-

tám, ktoré používali desatinný základ, ale nezahŕňali pozičný zápis. Babylončania používali šesťdesiatkový systém.



Obr. 6.2: Egyptská číselná sústava

Babylončania a Egypťania poznali základné vlastnosti operácií s prirodzenými číslami, ako je komutatívnosť, asociatívnosť a distributívnosť. Tiež skúmali niektoré vlastnosti súvisiace s deliteľnosťou v obore prirodzených čísel. Nepoznali pojem prvočísla, nebol im známy explicitne. Ich poznatky boli **zamerané skôr na praktické výpočty a zlomky**.

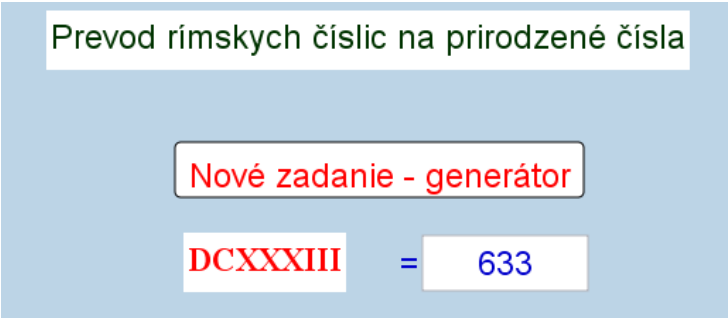
Nepretržitý vývoj modernej aritmetiky nastal s érou Gréckej civilizácie. Euklides zhromaždil všetky znalosti tej doby z matematiky a napísal knihu Základy. Jeho práca obsahuje nielen geometriu, ale sú tu zhrnuté všetky výsledky bádania v oblasti matematiky. Na vznik matematických pojmov a operácií s nimi, pôsobili praktické podnety (obchod, peňažníctvo, zememeračstvo, moreplavby, astronómia...). Starovekým Grékom až do helenistického obdobia chýbal symbol pre nulu a ako číslice používali tri samostatné sady symbolov: jednu pre jednotky, jednu pre desiatky a jednu pre stovky. Pre tisícky by znovu použili symboly pre umiestnenie jednotiek atď. Algoritmus pre sčítanie, odčítanie a delenie bol rovnaký ako dnešný, len algoritmus násobenia sa mierne líšil. Komplexné výpočty s rímskymi číslicami si na získanie výsledkov vyžadovali pomoc počítacej dosky (alebo rímskeho počítadla). Pozri obrázky 6.5 a 6.4. Skoré číselné systémy, ktoré obsahovali pozičný zápis, neboli desiatkové, vrátane šesťdesiatkového (základ 60) systému pre babylonské číslice a vigezimálneho (základ 20) systému, ktorý definoval mayské číslice. Vďaka tomuto konceptu hodnoty miesta prispela možnosť opätovného použitia rovnakých číslic pre rôzne hodnoty k jednoduchším a efektívnejším metódam výpočtu.

Zásadným medzníkom vo vývoji aritmetiky bolo vznik desiatkového zápisu prirodzeného čísla v v stredovekom islamskom svete.

Axiomatické budovanie aritmetiky nastalo až v 19. storočí. Základom pri výstavbe aritmetiky bol Giuseppe Peano (1858 –1932), ktorý zaviedol obor prirodzených čísel pomocou axióm. Na jeho počesť nazývame súbor Peanových axióm ako **Peanova aritmetika**.

1	I	11	XI	50	L
2	II	12	XII	100	C
3	III	13	XIII	500	D
4	IV	14	XIV	1000	M
5	V	15	XV		
6	VI	16	XVI		
7	VII	17	XVII		
8	VIII	18	XVIII		
9	IX	19	XIX		
10	X	20	XX		

Obr. 6.3: Rímske číslice



Obr. 6.4: Rímske počítadlo - aktivuj Tu.

Historický vývoj pojmu čísla je vhodným zdrojom motivačných situácií najmä na základnej škole. Budúci učiteľ by mal vedieť rozlíšiť, kedy historický príbeh podporuje porozumenie a kedy sa stáva len zaujímavosťou. Podrobnejšie k historickému vývoju aritmetiky nájdete v kurze Vybrané kapitoly z aritmetiky Tu .

Metodické poznámky pre vyučujúceho

1. Nejde o historickú exkurziu, ale o **legitimizáciu intuitívnych predstáv žiakov**.
2. Zdôrazniť, že: „Žiak neobjavuje matematiku historicky správne, ale psychologicky primerane.“
3. V seminári sa osvedčuje otázka: „Ktorá historická predstava sa podobá dnešnej detskej predstave?“

Reflexné otázky pre študentov

1. Prečo je presné rozlišovanie pojmov dôležité práve pre učiteľa?
2. Kedy môže byť história matematiky kontraproduktívna?

6.1.1 Školská matematika

Didaktické ciele
Po absolvovaní kapitoly by mal študent učiteľstva matematiky::

1. pochopiť **rozširovanie číselných oborov ako odpoveď na problém**, nie ako formálny krok,
2. vedieť identifikovať **didaktický moment zlyhania starého oboru**,
3. rozlišovať medzi **kurikulárnym faktom** („je to v osnovách“) a **didaktickým dôvodom**.

Definícia 3: Číselný obor

Číselný oborje množina čísel (číselná množina), na ktorej sú zavedené základné aritmetické operácie: sčítanie a násobenie.

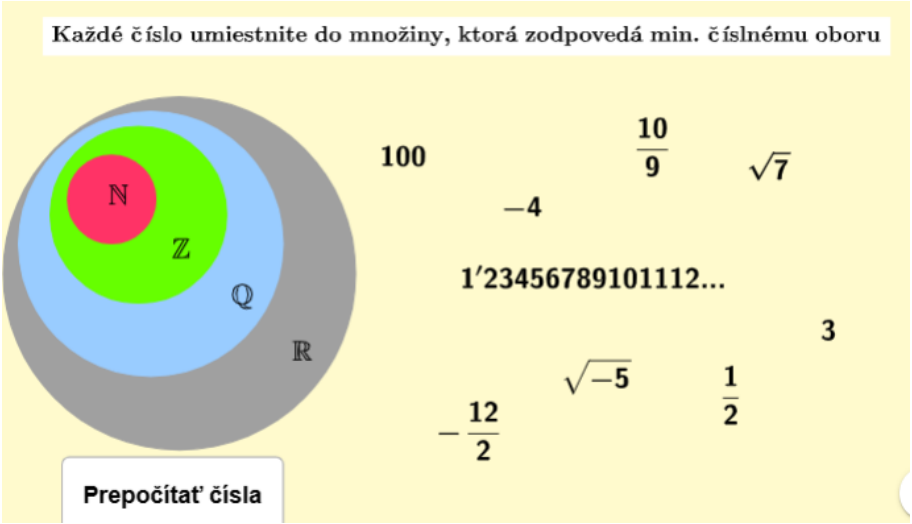
Číselné obory zavádzame postupne:

1. Na 1. stupni ZŠ **začíname oborom prirodzených** čísel menších ako 10 000.
2. Na 2. stupni ZŠ **rozširujeme** tento obor pre čísla väčšie 10 000.
   (a) V 6. ročníku priblížime zápis prirodzeného čísla v desiatkovej číselnej sústave; plus **desatinné čísla**.
   (b) V 7. ročníku vybudujeme **zlomky** a operácie s nimi.
   (c) Obor celých čísel zavádzame **pomocou záporných čísel v 8. ročníku**.
   (d) V poslednom ročníku ZŠ sa žiaci oboznamujú s mocninami a odmocninami. Pozrite si ukážku öbohatenia"z učebnice Bero a kol.: Matematika 9; strana 9, cvičenie 1.
3. Obor racionálnych čísel obohatíme o **iracionálne čísla** až na SŠ. Komplexné čísla v súčasnosti tvoria nepovinný tematický okruh na SŠ. Zavádzajú sa ako množina všetkých usporiadaných dvojíc reálnych čísel, na ktorej sú vhodne definované operácie sčítania a násobenia. Významným prvkom - komplexným číslom - je **komplexná jednotka**

$$i = (0, 1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

pričom platí vzťah $i \times i = i^2 = -1$.

Potrebu rozširovania číselných oborov môžeme demonštrovať **na riešení rovníc**.



Obr. 6.5: Číselná klasifikácia. Applet si môžete aktivovať Tu.

1. Na prvom stupni ZŠ sa žiaci stretávajú s rovnicami, v ktorých je použitý *rámik* na označenie neznámej

$$\square + 2 = 5$$

   Pri riešení rovníc tohto typu žiaci používajú metódu priameho dosadzovania/zapisovania. Do rámika $\square$ vpisujú prirodzené čísla a zisťujú, či vzniknutá rovnosť platí. Na tomto stupni vzdelávania základnou metódou pri riešení jednoduchých lineárnych rovníc je **experimentálna metóda**.

2. Na druhom stupni ZŠ pri niektorých lineárnych rovniciach

$$6x + 2 = 5 \tag{6.1}$$

   Už nevystačia s prirodzenými číslami. Pri riešení lineárnych rovníc typu 6.1 žiaci ZŠ sa naučia využívať **ekvivalentné úpravy**.

3. Náročnejšia situácia nastane pri rovnici

$$x + 5 = 2 \tag{6.2}$$

   Pri tejto rovnici ešte ani žiaci 8. ročníka ZŠ nedokážu nájsť správne riešenie. Nevedia zdôvodniť, že **riešením je záporné číslo**.

4. Na strednej škole sú to kvadratické rovnice

   (a)

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \tag{6.3}$$

Pri riešení kvadratických rovníc žiaci 1. ročníka SŠ využívajú okrem ekvivalentných úprav aj **vzorce pre výpočet koreňov** kvadratických rovníc.

Na tomto stupni vzdelávania žiaci sa stretávajú aj s grafickým riešením rovníc. Pozrite si applet Tu.

(b)

$$x^2 + 2x + 3 = 0 = 0 \tag{6.4}$$

Pri riešení kvadratických rovníc so záporným diskriminantom žiaci SŠ **musia poznať komplexné čísla**.

Cvičenie

Riešte v obore reálnych čísel rovnicu

$$3x + 2 = \sqrt{26 + 5x}. \tag{6.5}$$

Urobte skúšku. Riešenie Tu.

Metodické poznámky pre vyučujúceho

1. Dôležité je explicitne zdôrazniť: „Nový číselný obor nevzniká preto, že ho chceme, ale preto, že ho potrebujeme.“
2. **Rovnice sú tu diagnostický nástroj, nie cieľ.**
3. Odporúčané porovnanie:
   - „Ako by som túto potrebu vysvetlil žiakovi?“
   - „Ako by som ju vysvetlil rodičovi?“

Reflexné otázky pre študentov

1. Kedy žiak cíti potrebu nového pojmu?
2. Ako dlho je didakticky únosné „nechať problém otvorený“?

6.2 Prirodzené čísla

Didaktické ciele
Po absolvovaní kapitoly by mal študent učiteľstva matematiky:

1. rozumieť pojmu prirodzené číslo **ako symbol** rovnakých množstiev,
2. chápať porovnávanie množín ako **predprípravu pojmu kardinality**,
3. chápať desiatkovú sústavu ako **pozičný systém**, nie len zápis,
4. vedel identifikovať **typické žiacke miskoncepcie** (číslica & pozícia).

Prirodzené čísla si ľudia utvárali pri skúmaní vzťahov medzi skupinami reálnych objektov. Pri takomto skúmaní vzťahov medzi skupinami objektov sa abstrahovalo od veľkosti, farby a ďalších vlastností. **Podstatné** bolo len to, či predmety dvoch súborov možno vzájomne (bezo zvyšku) zoradiť do dvojíc.

Za najdôležitejšie zistenie pri „zoskupovaní objektov“ bol objav ľudstva, pomocou ktorého ľudia dokázali odpovedať na otázku:

V ktorej skupine je menej, viac resp. rovnako objektov?

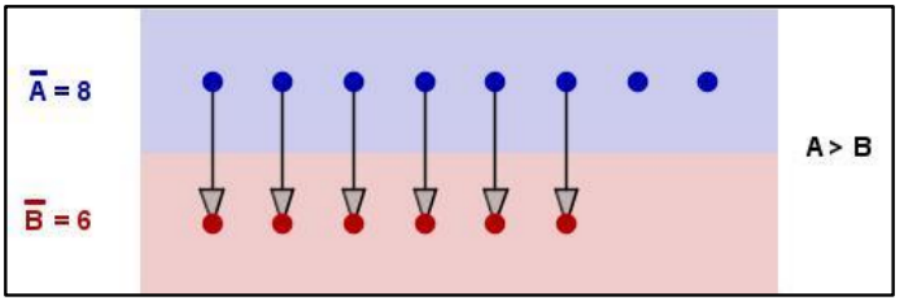
V podstate ide určovanie "**Veľkosť množiny**". Princíp resp. **metóda porovnávania** je východisková metóda pri zavádzaní pojmu prirodzeného čísla aj na 1. stupni ZŠ. Žiaci na tomto stupni vzdelávania porovnávajú množiny z pohľadu množstva prvkov. Osvoja si situácie, kedy množiny majú rovnaký počet prvkov.

Ide o predprípravu pojmu kardinality.

Predstavme si, že nepoznáme žiadnu teóriu o číslach ale poznáme len pojmy jeden, dva a viac. **Našou úlohou bude zistiť, ktorých krúžkov je viac** – modrých alebo červených? Pozrite si obrázok 6.6.

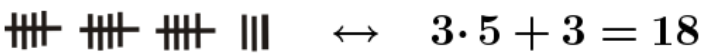
Úlohu môžeme jednoducho vyriešime tak, že budeme spájať jeden modrý krúžok s jedným červeným krúžkom. Dostaneme sa do situácie, keď už nemôžeme spájať a pritom máme ešte voľné dva modré krúžky. Vtedy „***slávnostne***“ vyhlásime, že ***modrých krúžkov je viac*** ako červených krúžkov.

Žiaci porovnávajú konečné množiny s reálnymi prvkami - skupiny domácich zvierat; deti pri rôznych hrách; peniaze, ktoré musia zaplatiť v obchode a pod. Po získaní zručností v metóde porovnávania, žiaci sa zoznamujú s pojmom prirodzeného čísla ako symbolom pre všetky množiny s rovnakým počtom prvkov. ***Takýmto symbolom budú hovoriť prirodzené čísla***.



Obr. 6.6: Porovnávanie množín.

Naučia sa ako tieto symboly zapísať (pomocou čiarok, číslic , ...) a čítať. Pozrite si obrázok 6.7. ***Žiaci často zamieňajú hodnotu číslice a jej pozíciu v zápise čísla***.



Obr. 6.7: Symboly pre prirodzené čísla.

Z histórie vývoja matematiky sú známe tzv. vrubovky, ktoré slúžili na primitívne určovanie počtu prvkov v skupine. Jedna z najstarších vruboviek bola objavená na Morave v roku 1936.

Poznámka 1

V siedmom storočí nášho letopočtu indo-arabská matematika zaviedla desiatkovú číselnú sústavu.

Uvedieme zjednodušenú definícia pojmu prirodzeného čísla, ktorá je vhodná pre 2. stupeň ZŠ.

Definícia 1: Prirodzené čísla

Prirodzené čísla sú prvky množiny

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots\}.$$

Prirodzené číslo vyjadruje počet prvkov danej konečnej a zároveň neprázdnej množiny.

Definícia 2: Nula

Nula predstavuje počet prvkov prázdnej množiny.

Nulu z praktických dôvodov na základnej škole nezaraďujeme medzi prirodzené čísla. Má samostatné postavenie v číselných oboroch.

6.2.1 Desiatková sústava

Dnes zapisujeme čísla pomocou skupín založených na čísle 10 (desiatková číselná sústava). Zostavujeme postupne skupiny o 10, 100, 1000, 10 000, ... Počet núl za jednotkou označuje veľkosť skupiny a nazýva se **rád**.

Desiatková číselná sústava je spôsob zapisovania prirodzených čísel pomocou desiatich číslic: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.



Obr. 6.8: Zápis čísla v desiatkovej číselnej sústave.

Pri zápise hodnota čísla závisí od jej miesta číslice v zápise čísle (jednotky, desiatky, stovky, ...). Napríklad žiaci už na 1. stupni ZŠ sa rýchlo naučia (a aj pochopia), že zápisy 12 a 21 predstavujú rôzne čísla resp. rôzne počty prvkov.

Prevzatý riešený príklad

Přečti (zapiš slovy) následující přirozená čísla zapsaná v desítkové soustavě. U každého z nich uveď počet čeho mohou udávat (například číslo 58 může udávat počet maturantů ve dvou maturitních třídách).
Čísla napiš v rozvinutém zápisu čísla. U každého čísla urči jeho nejvyšší řád.

a) 14 b) 301 c) 6 520 012 304

(Prevzaté z Matematika ZŠ.realisticky.cz)

Riešenie.

1. 14 - počet dívek v primě, nejvyšší řád 1 (desítky)
2. 301 - počet žáků školy, nejvyšší řád 2 (stovky)
3. 6 520 012 304 - počet obyvatel Země, nejvyšší řád 9 (miliardy).

□

Porovnávanie a usporadúvanie prirodzených čísel.

Čísla zapísané pomocou desiatkovej číselnej sústavy je možné aj ľahko porovnávať. Pozrite si interaktívne obohatenia z učebnice pre 5. ročník od autorov Bero a kolektív.



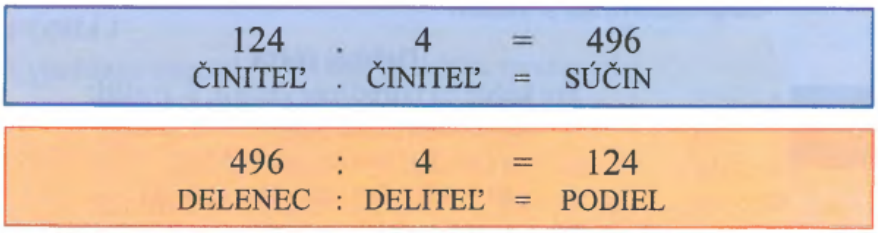
Obr. 6.9: Bero a kol., Matematika pre 5. ročník, str. 9

Operácie na množine prirodzených čísel.

V nižších ročníkoch 2. stupňa ZŠ sa pri operáciách s prirodzenými číslami kladie dôraz na **porozumenie významu operácií**, ich vzájomných vzťahov a využitie v reálnych situáciách, nie len na zvládnutie výpočtových algoritmov.

Uvádzame príklady z učebníc v 5. ročníku.

1. Žiaci si opakujú základné pojmy a vzťahy pre sčítanie a odčítanie.
2. Osvojujú si operácie násobenie a delenie prirodzených čísel.
3. Rozširujú obor násobenia a delenia.



Obr. 6.10: Šedivý a kol., Matematika pre 5. ročník, str. 23.

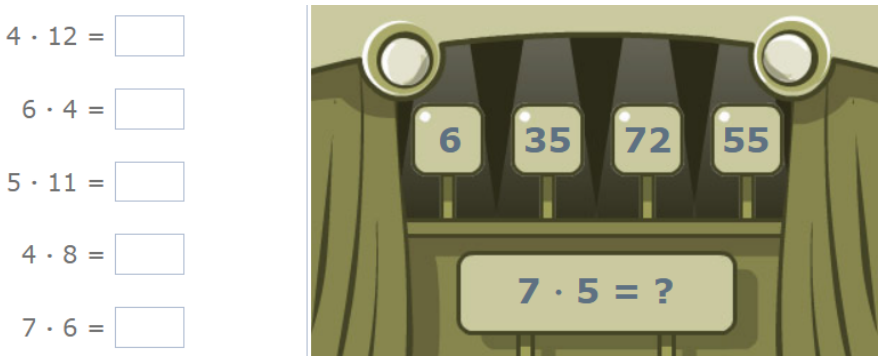
Učebnica Šedivý a kol. je dostupná v elektronickej forme Tu.

Rôzne prístupy

Rôzne prístupy k zavádzaniu a precvičovaniu pojmov, ktoré sa viažu k operáciám na množine prirodzených čísel.

1. Ukážka z učebnice od autorov Šedivý a kolektív je statická. Neumožňuje žiakom interaktívne si overovať znalosti, ktoré dosiahli pri operáciách s prirodzenými číslami.

2. Učebnica Bero a kol.: Matematika pre 5. ročník na strane 48 ponúka žiakom obohatenie „Násobilka“.



Obr. 6.11: Bero a kol., Násobilka3.

Príklad: samostatné cvičenie

Využitím AI navrhnite (prípadne vyhľadajte) interaktívne materiály, ktoré učitelia v 5. ročníku ZŠ môžu využiť v tematickom okruhu „Operácie s prirodzenými číslami“.

Metodické poznámky pre vyučujúceho

1. Neurýchľovať prechod k symbolike.
2. Pracovať s reálnymi situáciami, nie abstraktnými objektmi.
3. AI môže generovať:
    - chybné žiacke odpovede na analýzu,
    - diferenciované úlohy pre slabších žiakov.

Reflexné otázky pre študentov

1. Prečo je „počítanie“ viac než mechanická zručnosť?
2. Kedy má zmysel zavádzať nulu?
3. Čo sa zmení, ak presunieme číslicu?

6.3 Celé čísla

Didaktické ciele
Po absolvovaní kapitoly ba mal študent učiteľstva matematiky:

1. chápať zavedenie celých čísel ako **nevyhnutný krok**, nielen ako rozšírenie „pre pohodlie“,
2. vedieť vysvetliť význam pojmu **opačné číslo**,
3. rozumieť rozdielu medzi **školskou a vysokoškolskou konštrukciou** $\mathbb{Z}$,
4. rozlišovať **separovaný a generický model**,
5. vedel vysvetliť, že **číselná os patrí medzi najabstraktnejšie modely**.

Jedna z náročných ale zároveň dôležitých etáp pri rozširovaní číselných oborov na základnej škole je rozšírenie oboru prirodzených čísle na **obor celých čísel**. Zavedenie oboru celých čísel je v súčasnosti zakotvené v učebných osnovách pre 8. ročník ZŠ. Východiskovým pojmom je **opačné číslo**.

Prv než začneme s charakteristikou procesu výstavby celých čísel na ZŠ a komparáciou učebníc matematiky používaných na ZŠ, uvedieme teoretické východiská k tejto problematike. **Motiváciou pri zavádzaní celých čísel** môže byť problém, ktorý nastane pri pokuse riešiť niektoré lineárne rovnice v obore prirodzených čísel. Napríklad jednoduchá algebraická rovnica

$$x + 5 = 2,$$

ktorej koeficienty $1, 2, 5$ sú prirodzené čísla nemá v obore prirodzených čísel riešenie.

1. Ak budeme aplikovať ekvivalentnú úpravu „odčítanie“ čísla 5 k obidvom stranám rovnice, tak dostaneme
$$(x + 5) - 5 = 2 - 5.$$

2. Po úprave na ľavej strane rovnice dostaneme len neznámu x a na pravej strane to bude **rozdiel** $(2 - 5)$.

3. Veľmi ľahko sa presvedčíme, že rozdiel $(2 - 5)$ v obore prirodzených čísle neexistuje. Preto **je nutné vytvoriť nový číselný obor**, v ktorom takýto rozdiel existuje.

4. Pri rozširovaní oboru prirodzených čísel na obor prirodzených čísel je vhodné (aj keď nie nutné) zaviesť pojem opačného čísla.

Definícia 1

Pre ľubovoľné prirodzené číslo n definujeme **opačné číslo** m také, pre ktoré platí rovnosť

$$n + m = 0. \tag{6.6}$$

Na rovnosť 6.6 sa môžeme pozerať aj ako rozdiel $n = 0 - m$. Myšlienka vytvorenia nového číselného oboru pomocou „**rozdielov prirodzených čísel**“ je nosnou pri zavádzaní oboru celých čísel v teoretickej aritmetike na VŠ. Pre žiakov ZŠ je nutné sformulovať definíciu, ktorá je viac-menej intuitívna.

Základná škola.

Uvedieme definíciu pojmu celého čísla, ktorá je vhodná pre 2. stupeň ZŠ.

Definícia 2

Celé čísla sú všetky prirodzené (kladné celé) čísla a čísla k nim opačné (záporné celé) plus číslo nula.

Symbolicky to zapíšeme ako množinu

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n, \ldots\} \tag{6.7}$$

Záporné celé čísla umožňujú vyjadriť aj veľkosť úbytku resp. poklesu v reálnych situáciách, ktoré sa týkajú výpočtov.

Hovoríme aj o odbore celých nezáporných čísel, ktorý predstavuje množinu

$$\mathbb{Z}^+ = \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$$

Vysoká škola - teoretická aritmetika.

Jednou z možností ako zaviesť obor celých čísel je využitie vhodnej relácie ekvivalencie na karteziánskom súčine $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ množiny prirodzených čísel. Na prednáškach z teoretickej aritmetiky sa táto relácia zvykne definovať nasledovne:

Nech $\mathbb{N}$ je množina všetkých prirodzených čísel. Definujme binárnu reláciu R na množine $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ takto:

$$(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow a + d = c + b, \tag{6.8}$$

kde a, b, c, d sú prirodzené čísla.

Tvrdenie

Relácia 6.8 je reláciou ekvivalencie.
D*ôkaz tohto tvrdenia je predmetom cvičenia z teoretickej aritmetiky.*

Pozrite si vlastnosti tejto relácie Tu. V kurze z vyššej algebry ste sa presvedčili, že každá relácia ekvivalencie indukuje rozklad množiny na disjunktné triedy. Zrejme môžeme vysloviť tvrdenie/vetu, ktoré zároveň definuje množinu celých čísel.

Veta 1

Nech $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/R$ je rozklad karteziánskeho súčinu $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ podľa relácie6.8. Potom triedy tohto rozkladu budeme považovať za celé čísla.

Pre úplnosť je nutné zadefinovať vhodné operácie súčtu a súčinu.

Definícia 3: Súčet celých čísel.

Nech $T_{(a,b)}, T_{(c,d)}$ sú dve celé čísla (dve triedy rozkladu), potom ich súčtom

$$T_{(a,b)} \oplus T_{(c,d)}$$

bude trieda

$$T_{(a+c,b+d)}.$$

Teda súčet tried je určený vzťahom

$$T_{(a+c,b+d)} := T_{(a,b)} \oplus T_{(c,d)} \tag{6.9}$$

Samostatné cvičenia

Vyriešte nasledujúce úlohy!

1. Ukážte, že usporiadané dvojice prirodzených čísel sel $(2, 5)$ a a $(0, 3)$ patria do tej istej triedy rozkladu a teda predstavujú to isté „záporné“ číslo -3.

2. Zvoľte si ľubovoľné prvky $x \in T_{(0,2)}, y \in T_{(3,5)}$ a vypočítajte súčet $x + y$. Určte triedu rozkladu, do ktorej tento súčet patrí.

3. **Vyslovte definíciu pre súčin** dvoch tried. *Pomoc*: pozrite si definíciu v kurze Budovanie číselných oborov.

Tento prístup nie je určený pre žiakov ZŠ, ale budúcim učiteľom ponúka hlbšie porozumenie podstate záporných čísel.

Základná škola celé čísla.

Vráťme sa teraz do 8. ročníka základnej školy a pokúsme sa vyriešiť rovnicu $x + 5 = 2$. Pri jej riešení môžeme **použiť aj nasledovný postup**.

- žiaci už na ZŠ vedia, že platí rovnosť $3 + (-3) = 0$,
- pri riešení rovnice $x + 5 = 2$ využijú asociatívnosť: $(x + 3) + 2 = 2$,
- od obidvoch strán rovnice žiaci odčítajú to isté číslo: 2
- po odčítaní získajú „jednoduchšiu“ rovnicu $x + 3 = 0$,
- keďže platí aj rovnosť $(-3) + 3 = 0$.

Iná možnosť riešenia rovnice $x + 5 = 2$

- ak „odčítame“ číslo 5 od obidvoch strán rovnice,
- dostaneme $(x + 5) - 5 = 2 - 5$,
- odkiaľ $x = (2 - 5)$.

Zistili sme, že riešenie môžeme zapísať dvomi spôsobmi: $x = (-3)$ resp. $x = (2 - 5)$.
Závery:

1. Keďže rovnica má len jedno riešenie (prečo?), tak musí platiť $(-3) = (2 - 5)$.
2. Namiesto zápisu (-3) budeme používať zápis -3.
3. Zavedieme označenie $2 - 5 = -3$.
4. Čísla zapísané v tvare -3 budeme nazývať **záporné čísla** a čítať ...

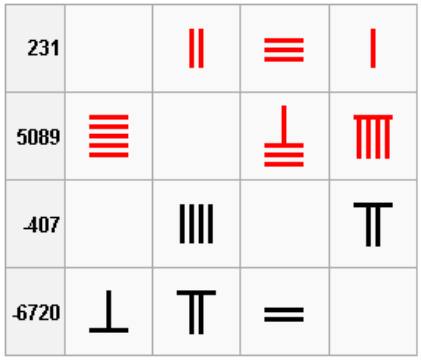
Historický kontext

Záporné čísla sa objavili po prvýkrát v čínskej matematike. V knihe „Deväť kapitol matematického umenia“ (202 pred n.l.) sú použité červené „úsečky“ pre kladné čísla a čierne pre záporné čísla.

Tento systém je opak súčasného zapisovania kladných a záporných čísel v oblasti bankovníctva, účtovníctva a obchode.

Poznámka 1

Matematici v rôznych historických obdobiach považovali záporné čísla za ***absurdné*** (Diofantos), ***klamné*** (Descart) a ***fiktívne*** (Bombelli).



Obr. 6.12: Čínsky zápis záporných čísel

6.3.1 Opačné čísla

Úloha ZŠ (Zmena teploty)

Janko a Marienka mali za úlohu zistiť ako sa zmenila vonkajšia teplota na školskom dvore medzi 7 hodinou a 10 hodinou. Janko zistil, že teplota vzduchu v tomto časovom úseku **stúpla o 5 stupňov**, Marienka zistila, že teplota vzduchu o 10 hodine **dosiahla len 2 stupne**.
Na hodine matematiky mali žiaci 8. triedy vypočítať aká bola teplota vzduchu na školskom dvore ráno o 7 hodine.

Riešenie.

1. Žiaci pri riešení dospeli k rovnici ci $x + 5 = 2$, ktorej koeficienty $1, 2, 5$ sú prirodzené čísla.

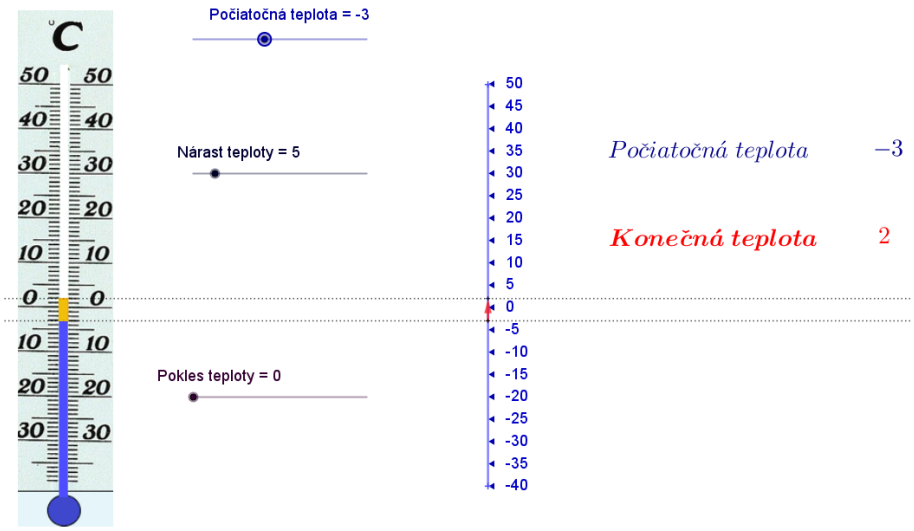
2. Zistili, že rovnica v obore prirodzených čísel **nemá riešenie**.

3. **Otázka**: Prečo rovnica $x + 5 = 2$ nemá riešenie v obore prirodzených čísel?
   Odpoveď: Ekvivalentnou úpravou - pričítaním ľubovoľného prirodzeného čísla $n \geq 0$ k číslu 5 dostaneme $n + 5 \geq 0 + 5 = 5 > 2$. Teda výraz $x + 5$ v obore prirodzených čísel nikdy nenadobudne hodnotu 2.

□

Žiaci intuitívne prijímajú záporné čísla v kontexte teploty skôr než v čisto algebraickej forme. Pri riešení je vhodné použiť dynamický applet „**Teplomer**“, ktorý si aktivujete Tu. V applete nastavte posuvník „Nárast teploty“ na hodnotu 5 a posuvník „Počiatočná teplota“ plynule posúvajte tak, aby „Konečná teplota"dosiahla hodnotu 2. Applet zobrazí v textovom poli „Počiatočná teplota“ hodnotu -3, ktorá je riešením úlohy.

Východisko pri zavádzaní celých resp. záporných čísel v školskej matematike je **pojem opačného čísla**. Opačné čísla sú zavádzané pomocou modelov, ktoré reprezentujú názorné reálne situácie. Z pohľadu metodológie ide teóriu separovaných a generických modelov.



Obr. 6.13: Ilustrácia riešenie úlohy „ Zmena teploty“

Osvojovanie matematických schopností je úzko spojené s duševným výkonom žiaka, ktorého dôležitou súčasťou je **proces abstrakcie**. Viac v práci [Hejný, 2004]. Poznávací proces vychádza z toho, že vo vzdelávacom procese žiak/študent

1. najskôr vníma a pochopí elementárne javy asúvislosti na viacerých konkrétnych situáciách (**separované modely**),

2. neskôr hľadá čo majú spoločné tieto elementárne javy (**generické modely**) a následne objavuje obecnejšie javy a vzťahy, pričom **prichádza k abstraktnému poznaniu.**

Základná škola

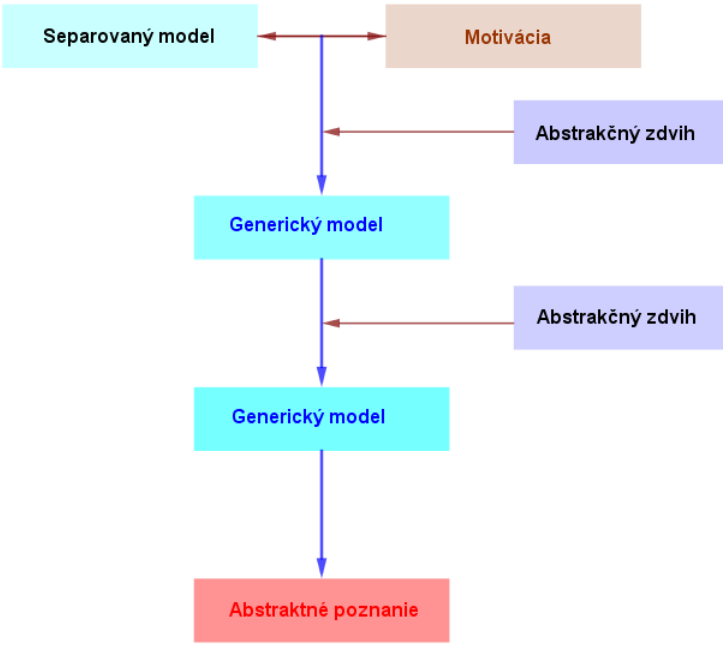
Uvedieme ukážky tematického bloku „Opačné číslo“, ktoré sú zahrnuté v najčastejšie používaných učebniciach. Za najabstraktnejší generický model sa považuje model „Číselná os“. Pravdepodobne najmenej výhodný je model „Výťah“, keďže reálne v našej geografickej oblasti máme veľmi málo budov s podlažiami označenými zápornými číslami. Ako najúčinnejší sa javí model „Teplomer“, ktorý je akýmsi prechodom od separovaného modelu ku generickému. Tu sú tri ukážky z rôznych učebníc.

1. Šedivý, O. a kol.: Matematika pre 6. roč. ZŠ, 1. časť, str. 41.

   Na číselnej osi sú zobrazené symetricky umiestnené body.

2. Žabka, J.,Černek, P.: Matematika pre ZŠ, 8. roč, 1. časť, str. 49.

3. Berovci: Interaktívna kniha - Matematika - Učebnica pre 8. ročník, str. 5. Pozrite si na tejto stránke obohatenie „Prečo sú záporné čísla potrebné?“



Obr. 6.14: Vzťahy medzi separovanými a generickým modelmi

Pri ukážke záporných čísel sa používajú tiež príklady z oblasti financií a meteorológie (teplota), ktoré sa naviac približujú reálnemu životu. Na priblíženie pojmu záporného čísla (Žabka) sa používa aj výťah alebo nadmorská výška, ale to sú nie celkom reálne situácie.

1. Situácie typu $2-5$ alebo $2+(-5)$ výhodne môžeme modelovať napríklad na financiách (pokúste sa interpretovať toto odčítanie pri platbe platobnou kartou).

2. K pojmu záporného/opačného čísla si v rámci cvičenia vytvoríme dynamický applet, na ktorom budeme modelovať situácie o zmene teploty. Pozrite si ukážku **teplomeru**Tu a **výťahu** Tu. Na dynamickom teplomere vymodelujte situáciu, ktorá prezentuje riešenie rovnice e $x+5=2$.

Zapamätajte si závery:

1. Rovnica má len jedno riešenie, preto musí platiť $(-3)=(2-5)$.

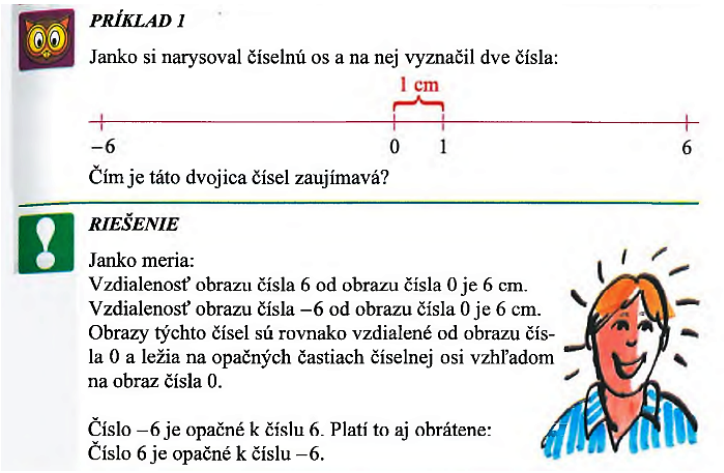
2. Namiesto zápisu (-3) budeme používať aj zápis -3.

3. Čísla zapísané v tvare -3 budeme nazývať **záporné čísla** a čítať ***mínus tri***.

6.3.2 Generické modely

Modely pre upevňovanie pojmu záporné číslo

1. **Farebný model - operácie**. Žiaci intuitívne prijímajú záporné čísla v kontexte teploty skôr než v čisto algebraickej forme.predstavujú ***čierne a červené paličky.***.



PRÍKLAD 1

Janko si narysoval číselnú os a na nej vyznačil dve čísla:

1 cm

−6 0 1 6

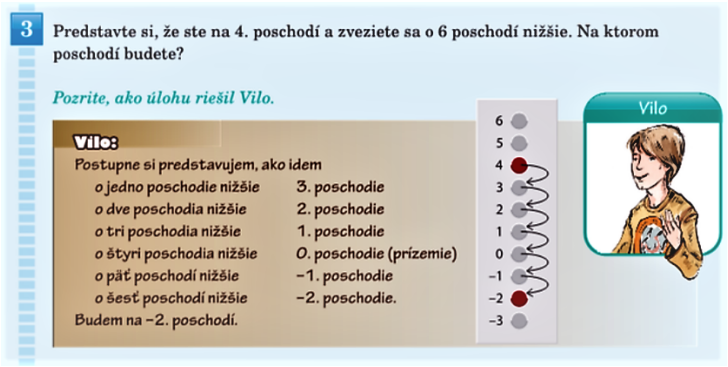
Čím je táto dvojica čísel zaujímavá?

RIEŠENIE

Janko meria:
Vzdialenosť obrazu čísla 6 od obrazu čísla 0 je 6 cm.
Vzdialenosť obrazu čísla −6 od obrazu čísla 0 je 6 cm.
Obrazy týchto čísel sú rovnako vzdialené od obrazu čísla 0 a ležia na opačných častiach číselnej osi vzhľadom na obraz čísla 0.

Číslo −6 je opačné k číslu 6. Platí to aj obrátene:
Číslo 6 je opačné k číslu −6.

Obr. 6.15: Číselná os - Šedivý



3 Predstavte si, že ste na 4. poschodí a zveziete sa o 6 poschodí nižšie. Na ktorom poschodí budete?

Pozrite, ako úlohu riešil Vilo.

Vilo:
Postupne si predstavujem, ako idem

o jedno poschodie nižšie	3. poschodie
o dve poschodia nižšie	2. poschodie
o tri poschodia nižšie	1. poschodie
o štyri poschodia nižšie	0. poschodie (prízemie)
o päť poschodí nižšie	−1. poschodie
o šesť poschodí nižšie	−2. poschodie.

Budem na −2. poschodí.

6 5 4 3 2 1 0 −1 −2 −3

Vilo

Obr. 6.16: Vozenie hore - dole výťahom

Tento model vychádza z čínskeho spôsobu zápisu záporných čísel. Tento model je vhodný aj pre žiakov základných škôl. Stačí im povedať pravidlo: Jedna čierna a jedna červená palička sa vyruší. Teda rovnaký počet čiernych a červených paličiek dáva nulu. Potom napríklad rovnosť

$$3 + (-2) = 1$$

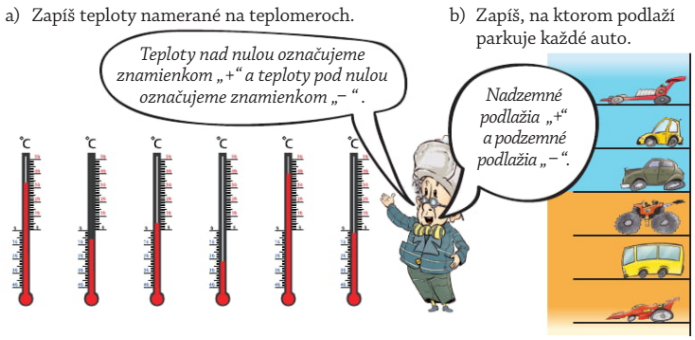
môžeme reprezentovať tak, ako je znázornené na obrázku „Čínsky model“.

2. Model profesora Milana Hejného **Tajná chodba** používa pravidlo:

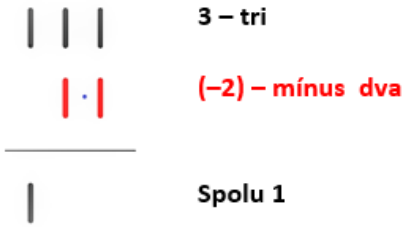
   - Výstup o jeden schod predstavuje prirodzené číslo 1
   - Zostup o jeden schod predstavuje záporné číslo (-1)
   - Potom matematickú úlohu na sčítanie v obore celých čísel môžeme prezentovať ako prechádzku po chodbe, v ktorej sa nachádzajú viaceré schodištia v smere nahor ako aj nadol.

   Analogickú funkciu má model **Výťah - zmena stavu**.

3. **Číselná os**



Obr. 6.17: Meranie teploty



Obr. 6.18: Čínsky model

Pravdepodobne najprirodzenejším a najpraktickejším modelom pre zobrazovanie celých čísel zrejme ostane číselná os. Prechod od dynamických modelov k číselnej osi predstavuje prechod od konkrétneho k abstraktnému mysleniu.
Nech je daná priamka a nej body 0 a 1, pričom $d(0,1) = 1$. Applet „Číselná os“ je dostupný Tu.

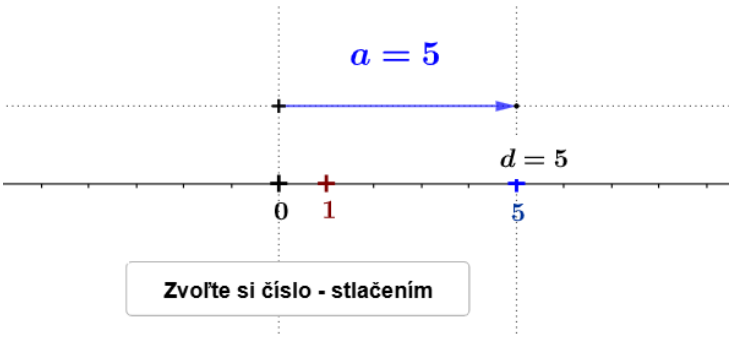
Celému číslu u $a \in Z$ priradíme bod A na osi x podľa pravidiel:

(a) Pre nezáporné číslo a bude jeho obraz bod na polpriamke $\vec{01}$, pričom bude platiť $d(0, A) = a$.

(b) Ak číslo a je záporné, tak jeho obraz bude bod A' na opačnej polpriamke k polpriamke $\vec{01}$, pričom pre vzdialenosť bodu A' od počiatku bude platiť $d(0, A') = |a|$.

Cvičenie (7. - 8. ročník ZŠ)

Na obrázku 6.20 je narysovaná číselná os a na nej sú vyznačené tri čísla x, y, z.. Narysujte na tejto číselnej osi obraz nuly, ak viete, že súčet dvoch vyznačených čísel se rovná tretiemu. Nájdite všetky riešenia.
Otvorte si applet „Číselná os“, ktorý je dostupný Tu.



Obr. 6.19: Číselná os



Obr. 6.20: Číselná os - usporiadanie čísel

Metodické poznámky pre vyučujúceho

1. Model je most, nie cieľ.
2. Výťah, teplomer, financie – každý model má obmedzenia.
3. Každý model niečo zvýrazňuje a niečo potláča.
4. Úlohou učiteľa je vedieť, kedy model opustiť a prejsť k číselnej osi.
5. Zdôrazniť, že:„Abstrakcia nie je odstránenie kontextu, ale jeho zovšeobecnenie.“

Reflexné otázky pre študentov

1. Ktorý model je prečo účinný?
2. Kedy model začne žiaka brzdiť?

6.3.3 Operácie s celými číslami

Didaktické ciele
Po absolvovaní kapitoly ba mal študent učiteľstva matematiky:

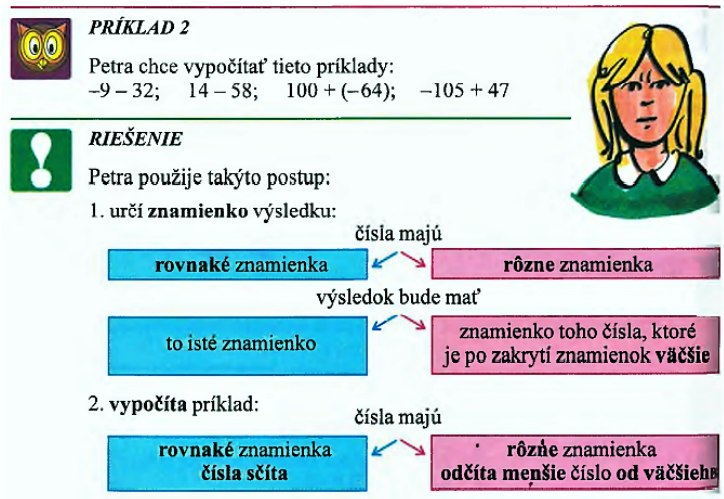
1. chápe pravidlá znamienok ako výsledok pozorovania,
2. vie identifikovať nevhodné verbálne algoritmy,
3. vie navrhnúť sekvenciu úloh vedúcu k objavu pravidla.

Sčitovanie a odčitovanie

Sčitovanie a odčitovanie celých čísel sa v dostupných učebniciach matematiky zavádza postupne ako súčet:

1. dvoch kladných čísel
2. dvoch záporných čísel
3. kladného a záporného dvoch,

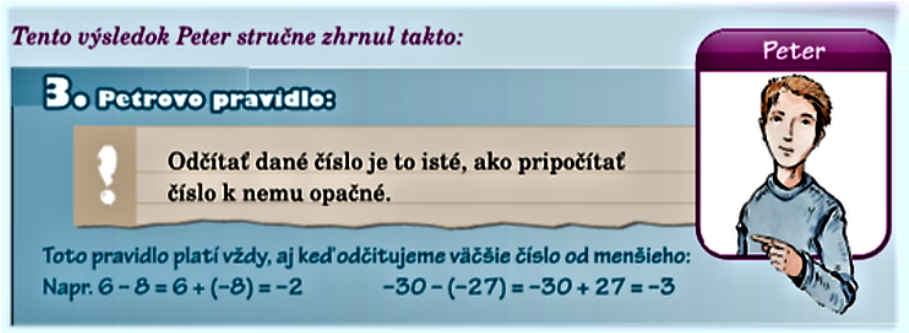
pričom sa zdôrazňuje tvrdenie: „**Odčítať záporné číslo znamená pričítať číslo opačné.**“



Obr. 6.21: Ukážka z učebnice (Šedivý, Matematika 6/1, str. 60)

V učebnici od autorov Žabka, Černek je odčítanie dvoch celých čísel prezentované pomocou pričítania opačného čísla:

V učebniciach didaktiky matematiky spravidla nájdeme len symbolické zápisy vlastností sčítania. Napríklad:

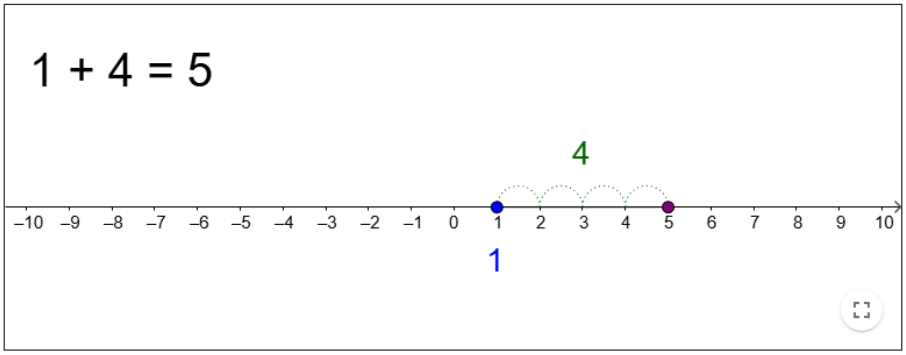


Obr. 6.22: Žabka: Odčítanie celých čísel

1. $a + (-a) = 0, \ ; \cdot 0 = 0, \ a \cdot 1 = a,$
2. $a + (-b) = a - b$ ak $a > b$, kde $a, b \in N$.

Poznámky

1. Pre žiakov 8. ročníka sčítanie a odčítanie nepredstavuje náročné učivo, keďže sa s v bežnom živote stretávajú aj s úlohami pre odčítanie, v ktorých je výsledok záporné číslo. Sú to prevažne úlohy o teplote a financiách.
2. Ak chceme žiakov dosiahnuť dobré zručnosti pri sčitovaní a odčitovaní dvoch celých čísel, tak musíme s nimi riešiť dostatočné množstvo príkladov. Dbáme na to, aby príklady korešpondovali so situáciami v bežnom živote.
3. Pre sčítanie a odčítanie celých čísel môžete využiť celú škálu modelov vytvorených v prostredí GeoGebra. Ako príklady uvádzame dostupné modely
   - „**Číselný rad** na sčítanie a odčítanie“ od autora Bo Kristensen



Obr. 6.23: Sčítanie a odčítanie

V applete z obrázka 6.23 posúvajte čierny a modrý bod. Applet je dostupný na stránke GeoGebra Tu.

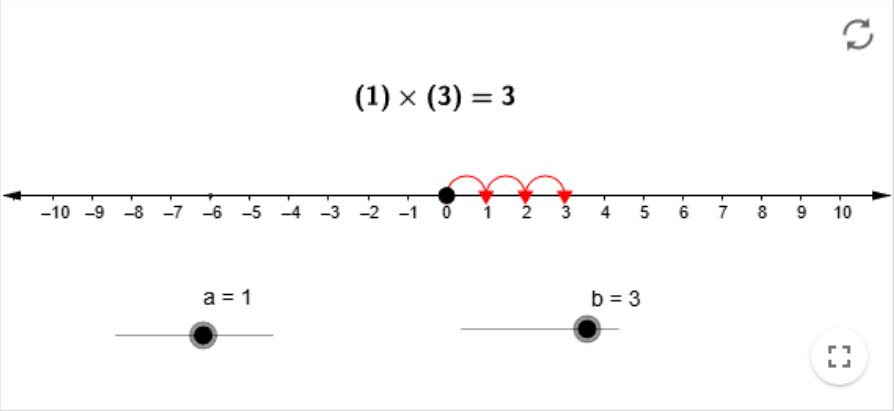
- „**Odčítanie** dvoch celých čísel“ od autora Kwanchau. V applete zmeníte hodnoty pomocou posuvníkov. Dostupnosť appleta Tu.

4. Pri riešení úloh sa používajú aj formulácie typu: *„Ak absolútna hodnota čísla je väčšia ..., tak odčítame ...“*, ktoré sú pre žiakov málo vypovedajúce. Preto uprednostňujeme formulácie: *„Ktorá z "cifier“ a, b predstavuje väčšie prirodzené číslo".*

5. **Pravidlá pre znamienka by mali byť výsledkom pozorovania, nie memorovania**.

Násobenie a delenie

Medzi základné operácie v aritmetike celých čísel patrí násobenie a delenie celých čísel. Pri násobení sa využíva skutočnosť, že súčin predstavuje opakované sčítanie rovnakých sčítancov, čo umožňuje nadviazať na skúsenosti žiakov s násobením v obore prirodzených čísel. Rozšírenie násobenia na záporné celé čísla si však vyžaduje didakticky citlivý prístup, v ktorom sa význam znamienka postupne objasňuje prostredníctvom modelov, pozorovania a zovšeobecňovania pravidelností, nie mechanickým zavedením pravidiel pre znamienka. Pri delení celých čísel

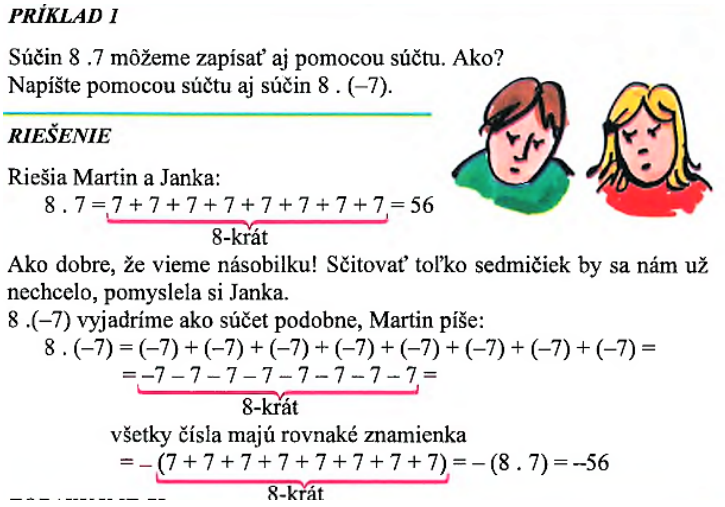


Obr. 6.24: Odčítanie dvoch celých čísel

vychádzame z chápania delenia ako inverznej operácie k násobeniu. Dôraz sa kladie na pochopenie vzťahu medzi deliteľom, delencom a podielom, pričom žiaci postupne objavujú, za akých podmienok je podiel celým číslom a kedy je potrebné rozšíriť číselný obor. Aj pri delení je vhodné opierať sa o reálne situácie a modely, ktoré žiakom pomáhajú porozumieť významu operácie a správnemu používaniu znamienok.

Študijné texty v dostupných učebniciach majú rôzne zameranie. Pozrite si dve ukážky.

Ukážky, ktoré sme prevzali z učebníc matematiky používaných na našich základných školách **sú statické**.
Nevyužívajú dnešné moderné technické vybavenie ani možnosti poskytované AI vo vyučovaní matematiky.



PRÍKLAD 1

Súčin 8 .7 môžeme zapísať aj pomocou súčtu. Ako?
Napíšte pomocou súčtu aj súčin 8 . (–7).

RIEŠENIE

Rieša Martin a Janka:

$8 . 7 = \underbrace{7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7}_{8\text{-krát}} = 56$

Ako dobre, že vieme násobilku! Sčitovať toľko sedmičiek by sa nám už nechcelo, pomyslela si Janka.

8 .(–7) vyjadríme ako súčet podobne, Martin píše:

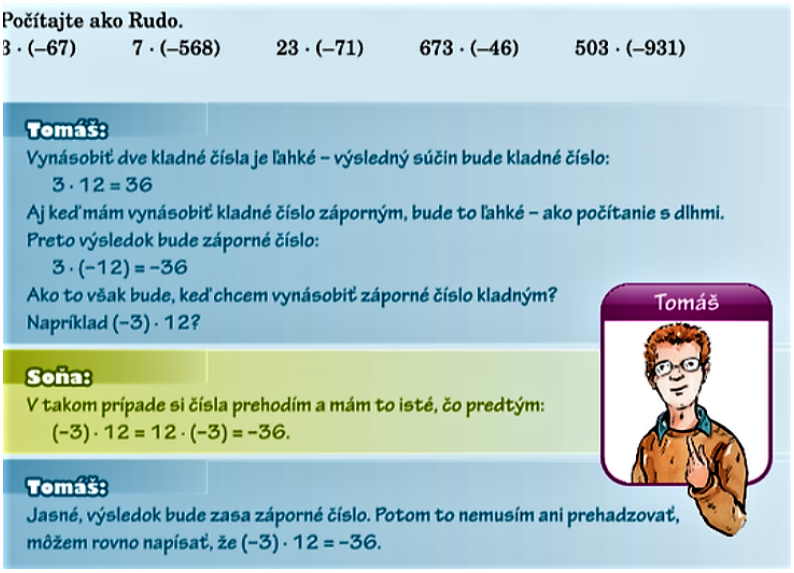
$8 . (-7) = (-7) + (-7) + (-7) + (-7) + (-7) + (-7) + (-7) + (-7) =$

$= \underbrace{-7 - 7 - 7 - 7 - 7 - 7 - 7 - 7}_{8\text{-krát}} =$

všetky čísla majú rovnaké znamienka

$= -\underbrace{(7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7)}_{8\text{-krát}} = -(8 . 7) = -56$

Obr. 6.25: Ukážka z učebnice Šedivý



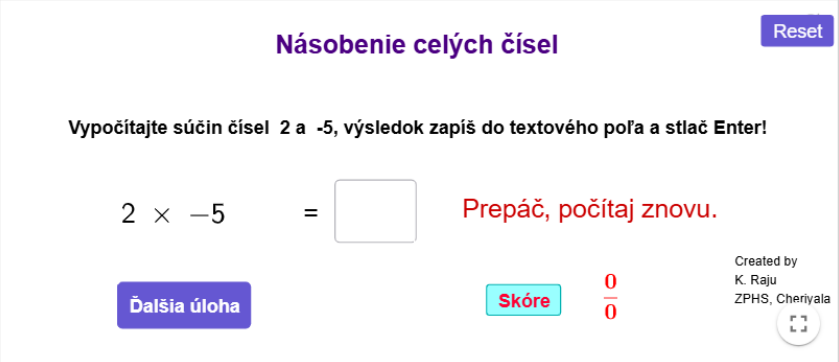
Obr. 6.26: Ukážka z učebnice Žabka

Na upevňovanie vedomostí súvisiacich s operáciami s celými číslami však v dnešnom rozvinutom svete existuje celý rad vhodných GeoGebra appletov, ktoré interpretujú algebraické operácie v rôznych číselných oboroch.

Takéto dynamické applety učiteľovi môžu významne pomôcť pri výklade násobenia resp. delenia dvoch záporných celých čísel. Applety sú vytvorené v prostredí GeoGebra, ktoré možno jednoducho zdieľať aj v systéme Moodle, kde si zachovávajú svoju dynamičnosť ale aj interaktívnosť. Uvedieme niekoľko ukážok, ktoré sú voľne dostupné sa serveri https://www.geogebra.org/.

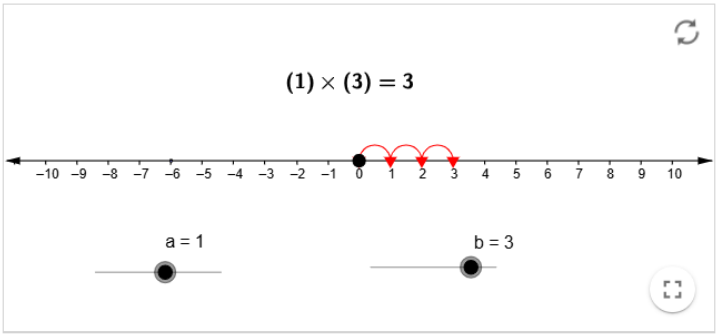
1. Applet z obrázka 6.27 od K. Raju sme upravili (preložili do SK jazyka) pre potreby nášho školského systému.

   Plná verzia appletu s didaktickými poznámkami je na GeoGebra serveri pod názvom Multiplication of Integers - Translation from Raju to SK. Applet si aktivujete Tu.



Obr. 6.27: Násobenie celých čísel

2. Applet z obrázka 6.28 od Kwanchau je dostupný Tu.



Obr. 6.28: Multiplication of Directed Numbers

3. Applet z obrázka 6.29 od Silverman je dostupný Tu.

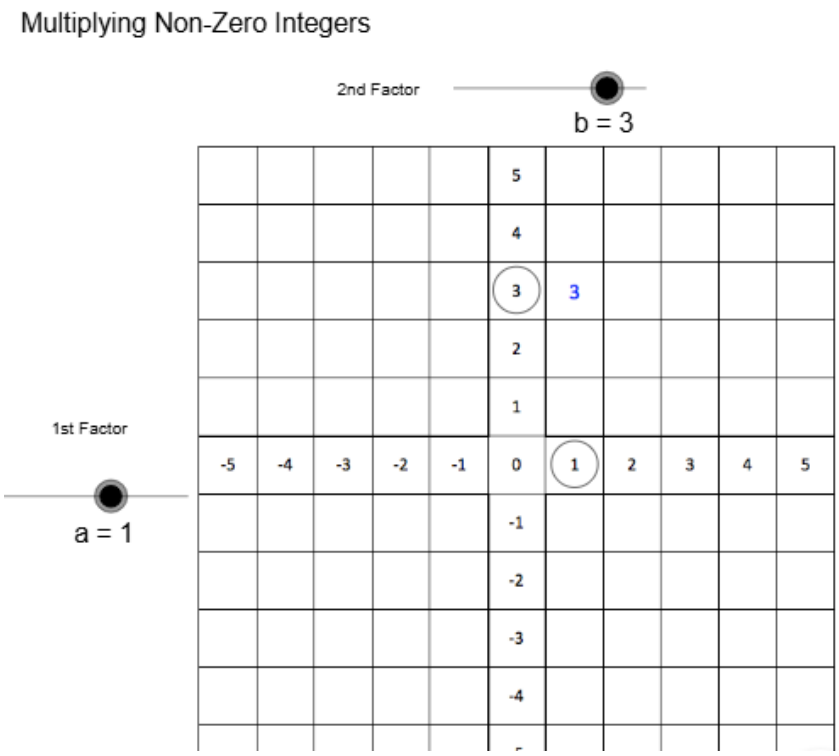
   Tento prípad veľmi jasne vizuálne zahŕňa aj násobenie typu **celé číslo záporné** × **celé číslo záporné**. Tento spoj násobenia sa považuje za najkomplikovanejší z pohľadu učiteľovho výkladu.

Interaktívna učebnica

V učebnici matematiky pre 8. ročník od autorov Bero a Berová sú interaktívne testové otázky o násobení a delení celých čísel:

- Otázky typu „Viacnásobné odpovede“ pre obohatenie „Násobte. Deľte “.
- Otázky typu „Numerická odpoveď“ pre obohatenie „Dlh rastie. Dlh klesá“.

Využite obohatenia zo strany 16.



Obr. 6.29: Multiplying Non-Zero Integers

Metodické poznámky pre vyučujúceho

1. Neposkytovať pravidlo skôr, než má žiak skúsenosť.
2. **Využívanie AI na analýzu chýb**. Napr. požiadame AI o analýzu konkrétneho alebo typického žiackeho riešenia. Necháme AI pomenovať chybnú predstavu, nie len konštatovať chybu.
3. **GeoGebra a AI sú tu prostriedky na experimentovanie**, nie na nahradenie myslenia. Experiment by mal zahŕňať návrh zadania → realizácia v GeoGebre → didaktická reflexia.

6.4 Racionálne čísla

V tejto kapitole sa zameriame na zlomok ako základný nosič pojmu racionálneho čísla a na didaktické úskalia, ktoré s jeho zavádzaním súvisia.

Didaktické ciele
Po absolvovaní kapitoly študent učiteľstva matematiky

1. rozumie trom významom zlomku: mnohosť – operátor – adresa,
2. pozná kritické miesta vo vyučovaní zlomkov,
3. vie analyzovať žiacke riešenie (Pozrite si ukážku "Cilkin príklad").

Príklad 1: Nákup

Mamka išla nakúpiť zeleninu. Kúpila 6 balení zemiakov a 3kg uhoriek. Spolu tak mala v taške 6kg zeleniny. Na hodine matematiky mali žiaci 8. triedy vypočítať koľko kg váži 1 balenie zemiakov.

Riešenie.

1. Žiaci pri riešení dospeli k algebrickej rovnici ci $6x + 3 = 6$, ktorej koeficienty y $1, 3, 6$ sú celé čísla. Takúto rovnicu však **nedokážu vyriešiť** v obore celých čísel. **Prečo**?
2. Ľahko sa presvedčíme, že rovnica $6x + 3 = 6$ nemá v obore celých čísel riešenie.
3. Stačí pripočítať k obidvom stranám rovnice číslo o -3 a dostaneme rovnicu $6x = 3$, ktorej riešením nemôže byť celé číslo.
4. Na ľavej strane rovnice $6x = 3$ máme párne číslo $2(3x) = 2k$, ale na pravej strane nepárne číslo $3 = 2.1 + 1$. **To nie je možné!**

□

Východisko

Východisko pri zavádzaní racionálnych čísel v školskej matematike **je pojem zlomku**.

Poznámka: K riešeniu príkladu "Nákup"

1. Na chvíľu predpokladajme, že existuje celé číslo, ktoré je riešením danej rovnice $6x = 3$.
2. Vo všeobecnosti pri riešení lineárnej rovnice a vlastností operácie násobenia vieme, že riešením je číslo o x rovné podielu $3 : 6$. Teda muselo by platiť:$x = \frac{3}{6}$.
3. Zároveň zo základnej školy vieme, že rovnicu u $6x + 3 = 6$ môžeme upraviť na tvar $2x + 1 = 2$.
4. Riešením tejto rovnice je aj číslo o $x = \frac{1}{2}$, ktoré tiež nie je celé.
5. Zistili sme, že **rovnica** $6x + 3 = 6$ **má dve riešenia**. Sú to „podiely“ $(3 : 6), (1 : 2)$ resp. zlomky y $x = \frac{3}{6}, x = \frac{1}{2}$.

Záver. Keďže lineárna rovnica má najviac jedno riešenie, musí platiť rovnosť $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Základná a stredná škola.

Uvedieme definíciu pojmu racionálneho čísla, ktorá je vhodná pre 2. stupeň ZŠ ale aj pre SŠ.

Definícia 1

Racionálne čísla sú čísla, ktoré možno vyjadriť v tvare zlomku. Symbolicky to zapíšeme ako množinu

$$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q};\ p \in Z, q \in N\}.$$

Ak čísla p, q sú nesúdeliteľné (ich spoločný deliteľ je rovný 1), tak zlomok je v základnom tvare.

Racionálne čísla umožňujú vyjadriť aj časti celku.

Vysoká škola - teoretická aritmetika

Jednou z možností ako zaviesť obor racionálnych čísel je využitie vhodnej relácie ekvivalencie na karteziánskom súčine $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$. Vedeckým prístupom na vysokej škole sa zaoberá Teoretická aritmetika. V kurze Vybrané kapitoly z aritmetiky nájdete podrobnejšiu charakteristiku vlastností číselných systémov a ich aplikácií. Ako príklad uvádzame dve základné definície pre obor racionálnych čísel. Reláciu ekvivalencie, ktorá generuje číselný obor racionálnych čísel a definíciu sčítania dvoch racionálnych čísel.

Definícia 2

1. Nech $\mathbb{Z}$ je množina všetkých celých čísel. Definujme binárnu reláciu R je na množine $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^+$ takto:

$$(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow a \cdot d = c \cdot b$$

2. Sčítanie racionálnych čísel

$$T_{(a,b)} \oplus T_{(c,d)} = T_{(a \cdot d + c \cdot b, b \cdot d)},$$

kde $T_{(a,b)}, T_{(c,d)}$ sú sú dve racionálne čísla (dve triedy rozkladu.

Tvrdenie

Binárna relácia R na množine $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^+$ definovaná vzťahom

$$(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow a \cdot d = c \cdot b$$

je reláciou ekvivalencie.

V práci [HEJ, 1989] je uvedené dôležitá funkčná charakteristika racionálneho čísla. Profesor Hejný uvádza:

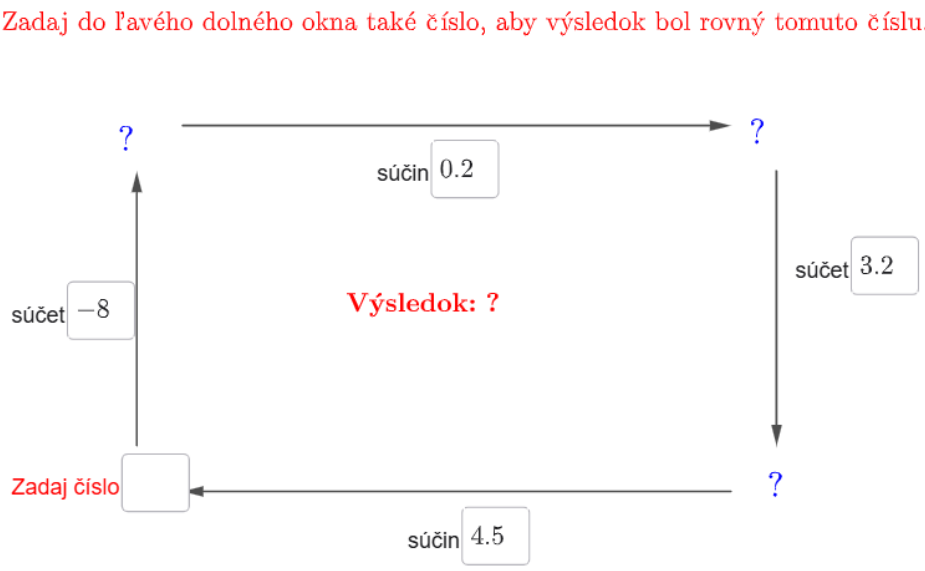
Číslo môže vystupovať ako: **mnohosť**, **operátor**, **adresa**.

Tieto funkcie racionálneho čísla rozoberieme trochu podrobnejšie. Pomôžu nám pri chápaní pojmu zlomok.

1. Prirodzené číslo ako **mnohosť** reprezentujeme v školskej matematike počet prvkov konečnej množiny. V teoretickej aritmetike hovoríme o kardinálnom čísle konečnej množiny.

2. Celé číslo ako **adresa** vyjadruje usporiadanie a poradie. Umožňuje presne určiť miesto prvku v nejakej štruktúre. V bežnom živote sa s tým stretávame často – pri číslach domov, poschodí (môžu byť aj záporné), dní v mesiaci, sedadlách v kine či linkách v cestovných poriadkoch. V matematike tento význam najvýraznejšie predstavuje číselná os. V teoretickej aritmetike hovoríme o ordinálnom čísle konečnej množiny.

3. Číslo ako **operátor** chápeme ako pokyn na zmenu: „pridaj 3“, „uber 5“, „zdvojnásob“, „vezmi polovicu“ a pod. Názorne sa tento význam prejavuje na šípkovom diagrame 6.30, kde každá šípka predstavuje príkaz zmeny. Applet diagramu je dostupný Tu.



Obr. 6.30: Obor racionálnych čísel - doplňovačka

6.4.1 Zlomky

Obsahové a výkonové štandardy pre tematický okruh **Zlomky na ZŠ** zahŕňajú:

1. Zavedenie pojmu zlomok ako časť celku. Žiaci sa majú naučiť chápať, prečítať, zapísať a znázorniť diagramom zlomok ako číselnú hodnotu.

2. Vedieť umiestniť zlomok prostredníctvom čísla na číselnej osi.

3. Nulový a jednotkový, pravý a nepravý zlomok. Prevod na zmiešané číslo. Vyjadrenie desatinným číslom.

4. Porovnávanie a usporiadanie. Rovnaké zlomky v inom tvare. Základný tvar. Rozširovanie a krátenie.

5. Sčítanie a odčítanie zlomkov s rovnakým a rôznym menovateľom.

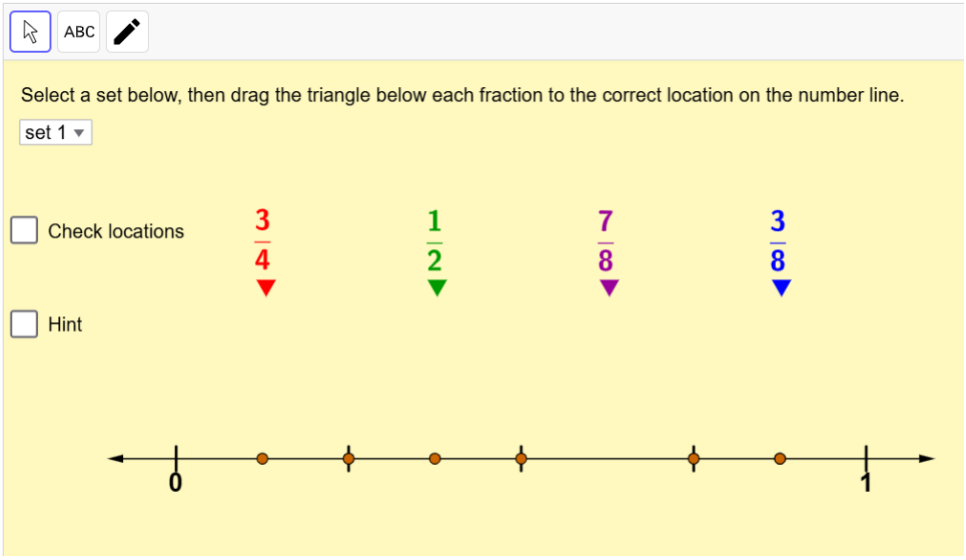
6. Násobenie a delenie zlomkov prirodzeným číslom a zlomkom. Krátenie do kríža. Úprava výsledku na základný tvar, resp. zmiešané číslo.

Moderné informačné technológie (AI, GeoGebra, ...) poskytujú rôzne prostredia, ktoré umožňujú vytvoriť dynamický a zároveň interaktívny matematický model pre prácu so zlomkami. Jednoduchšie modely si môže pripraviť učiteľ matematiky aj sám v on-line softvéroch. Existuje však aj množstvo zaujímavých (multimediálnych) produktov vhodných na zaradenie do vyučovania matematiky. Ako príklad uvádzame applet „ Porovnávanie zlomkov“, ktorý je vhodný na porovnávanie zlomkov pomocou číselnej osi.

Na stránke Fraction Book nájdete desiatky appletov ku zlomkom. Na zaradenie do matematického vzdelávania na ZŠ je nutné ich anglickú verziu preložiť do slovenského jazyka.

Inšpiráciou pre učiteľov môže byť aj záverečná práca [Podmanický, 2020] s názvom „Zlomky a GeoGebra“, prípadne študentská prezentácia „Hejný, M. a kol.: 25 kapitol/Zlomky“ ktorá je dostupná Tu.

Na obrázku 6.31 je ukážka appletu, ktorý umožňuje žiakom porovnávať zlomky vo funkcii operátora. Žiak má za úlohu pomocou myši správne umiestniť zlomok na číselnú os. Applet generuje celý rad nových zadaní a zároveň vyhodnocuje žiakove umiestnenia zlomkov. Takéto applety majú vysokú pridanú hodnotu z hľadiska didaktického alo i vzdelávacieho.



Obr. 6.31: Locating Fractions on a Number Line

Applet z obrázka 6.31 je dostupný Tu.

Vo všeobecnosti existuje v dnešnej dobe už dostatočné množstvo funkčných a odborne aj didakticky vhodných na vyučovanie matematiky. Problémom pre mnohých žiakov ZŠ je skutočnosť, že pokyny na prácu s týmito appletmi nie sú v slovenskom jazyku. Preto by didaktická príprava budúcich učiteľov matematiky mala zahŕňať aj jazykovú úpravu takýchto appletov do slovenčiny.

K tomu sú **nutné dve základné zručnosti** budúceho učiteľa matematiky:

1. Ovládať program GeoGebra na vyššej úrovni. To znamená vedieť využívať okrem konštrukčných príkazov aj príkazy algebraické resp. iné.

2. Nutné sú schopnosti programovať aj v GeoGebraScript alebo aspoň ovládať jazyk Phyton.

Jazyková úprava appletu.

Stiahnite si applet *Locating Fractions on a Number Lin* Tu a preložte do slovenčiny!

V predchádzajúcej časti sme uviedli, že na zlomok sa môžeme pozerať z hľadiska mnohosti, operátora ale aj adresy. Pripomeňme si:

Rôzne významy čísla

1. **Mnohosť** odpovedá na otázku „Koľko?“
2. **Adresa** hovorí o usporiadaní, o zaradení do štruktúry, v matematike ide často o umiestnenie na číselnú os.
3. **Operátor** sa chápe ako príkaz zmeny, napr. odober z celku 3/4.

Profesor Hejný identifikuje **kritické miesta vo vyučovaní zlomkov**.

1. Prvá predstava zlomku, s ktorou sa žiaci stretávajú už na ZŠ je vo forme operátora. Zlomok 3/4 nechápu ako kardinálne číslo (mnohosť), ale ako operátora typu „vziať 3/4 z niečoho“. Napríklad ako časť koláča, ktorú si odkrojím.
2. **Pochopiť zlomok ako mnohosť vyžaduje abstrakciu**. Pomôžeme si číselnou osou. Zlomok 3/4 predstavuje primárne adresu na číselnej osi. Avšak reprezentuje aj mnohosť : dĺžku úsečky (to je kardinálne číslo) od začiatku osi v čísle 0 po číslo 3/4. Tiež reprezentuje operátor: vyčlenenie troch štvrtín z úsečky s krajnými bodmi 0, 1.
3. **Pred zavedením súčtu a súčinu zlomkov je potrebné** postupne viesť žiaka od predstavy zlomku ako operátora ku zlomku ako mnohosti.

V školskej praxi sa zlomky často zavádzajú najskôr ako **operátory**, teda ako pokyny na zmenu nejakej hodnoty.

Chápanie zlomku ako operátora.

Výraz **1/2 z 12** znamená príkaz: „Rozdeľ 12 na 2 rovnaké časti a vezmi jednu.“
alebo
3/4 koláča znamená: Rozdeľ koláč na 4 rovnaké časti a vezmi 3 z nich.

Takéto chápanie je žiakom blízke, pretože vychádza z konkrétnych situácií – delenie pizze, časti triedy, časť dĺžky a podobne. Zlomok tu **niečo robí s celkom**. Postupne si však začíname všímať, že výsledky týchto operácií majú vlastný význam:

- polovica z 12 je 6
- polovica z 8 je 4
- polovica z 1 metra je 0,5 m

Chápanie zlomku ako množstva (veľkosti).

V tomto momente sa objaví dôležitá myšlienka: **polovica už nie je len pokyn, ale aj konkrétna veľkosť – číslo.** Zlomok tak prestáva byť iba činnosťou a stáva sa **číslom**, ktoré má svoje miesto na číselnej osi. Zlomok už nevyjadruje, čo máme urobiť, ale **koľko niečoho je**:

- 3/4 hodiny = 45 minút
- 1/2 metra = 50 cm
- 2/3 litra = konkrétne množstvo tekutiny

Zlomok môže označovať aj **množstvo, veľkosť alebo hodnotu**. **Prechod** od operátora k množstvu **je náročný.**

Žiak je dlho zvyknutý, že zlomok je „sloveso“ – teda akcia: „vezmi polovicu“, „zober tretinu“. Neskôr však má pochopiť, že zlomok je aj „podstatné meno“ – samostatné číslo: „ polovica (tretina) je číslo medzi 0 a 1“.

Prechode od operátora k množstvu

Problém teda spočíva v prechode od predstavy **„urob časť z niečoho“** k predstave **„táto časť je sama o sebe číslo“**.

Z pohľadu vyššej matematiky (Teoretická aritmetika) zlomky predstavujú racionálne čísla, pričom dva zlomky y $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ budú predstavovať to isté racionálne číslo, ak bude platiť rovnosť

$$ad = cb.$$

Je zrejmé, že množina racionálnych čísel obsahuje všetky pravé zlomky, ktorých čitateľ je celé číslo a menovateľ je kladné prirodzené číslo.

Tento fakt využijeme v školskej matematike, keď sa zameriavame na prácu so zlomkami $\frac{a}{b}$ a s desatinnými číslami. Desatinné čísla prezentujeme ako výsledok delenia čitateľa menovateľom m ($a : b, b \neq 0$). Názov racionálne číslo používame len zriedkavo. Pri zavádzaní operácií sčítania a násobenia racionálnych čísel v školskej matematike sa opierame o sčítanie a násobenie zlomkov. Pre ľubovoľné dva zlomky $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ definujeme:

$$stanie: \ \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd}$$

$$nsobenie: \ \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Je dôležité pripomenúť žiakom pravidlo: Pred vykonávaním každej operácie so zlomkami ich najprv upravíme na základný tvar a po výpočte tiež výsledný zlomok vykrátime na základný tvar.

Metodické poznámky pre vyučujúceho

1. Príbeh je didaktický nástroj, nie ilustrácia.
2. Učiteľ sa musí naučiť: rozpoznať polopravdu a nepodporiť ju autoritou.
3. Učiteľ by mal využívať rôzne príbehy k tematickému celku zlomky (čas, dĺžka, financie).

Reflexné otázky pre študentov

1. Kedy je algebraický postup nebezpečný?
2. Ako oddeliť správny výsledok od správneho porozumenia? Pozrite si podkapitolu „Výsledok - porozumenie“
3. Posúďte Cilkino uvažovanie pri riešení úlohy 6.4.1.

Ukážka (ne)správneho porozumenia chápania funkcie zlomku.

Ukážka z práce Hejný, M. a kol., 25 kapitol z didaktiky matematiky , [HEJ, 2004].

Poznamenajme, že žiaci v 6. ročníku ešte nepreberali formálne vzťahy pre operácie so zlomkami typu:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd}.$$

Formálne vzorce pre operácie so zlomkami by mali byť zavedené až po tom, čo žiak rozumie, aký význam má výsledok v danom kontexte.

Cilka chodí do **6. triedy** a doteraz mala samé jednotky. V druhom polroku došlo k zmene učiteľa matematiky, ktorý ku koncu prvej hodiny dal náročnú úlohu.

Úloha pre Cilku

Koľko šestín je nutné pridať k dvom tretinám, aby sme dostali štyri štvrtiny?

Riešenie. [Cilkino riešenie]

Cilka chcela od pána učiteľa vysvetliť návod na riešenie takýchto úloh. Keď sa dozvedela, že návod neexistuje, zneistela. Za pomoci pána učiteľa a množstva obrázkov, ktoré jej pán učiteľ ponúkol, Cilka nedokázala určiť správny výsledok.
Nevzdávala sa. Nakoniec však zažiarila a zvolala:

„Už to viem! Je to na odčítanie zlomkov.“

Akože 4/4 mínus 2/3. To som vyrátala a dostala som 4/12. Ale to (zvýši hlas) treba ešte vykrátiť dvomi, aby sme mali šestiny. To sú dve šestiny. Takže sú to dva. Je to tak?

Záver - zhodnotenie učiteľa.
„Radosť Cilky a moja bezmocnosť spôsobili, že som túto **polopravdu** zbabelo odsúhlasil a vzdal som sa ďalšieho vysvetľovania.“

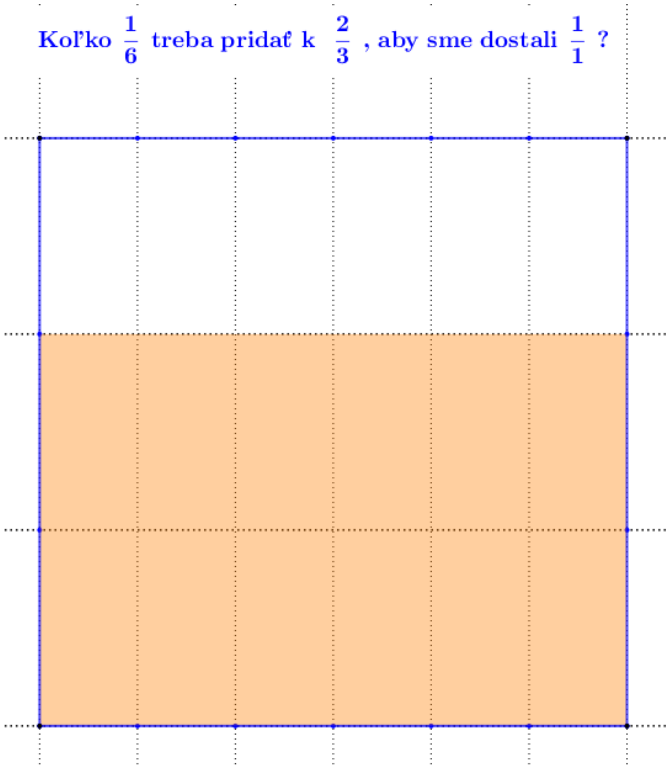
□

Poznámky.

1. Podľa prof. Hejného: “ „Zrejme pre Cilku zlomok nie je objekt, ale len dvojica čísel oddelená vodorovnou čiarou.“ Súhlasíte s týmto názorom?

2. V čom je výnimočný Cilkin algebraický postup?

3. Pokúste sa vytvoriť vhodný separovaný model, ktorý by pomohol Cilke vyriešiť túto úlohu a argumentačne zdôvodniť riešenie. Náš návrh modelu/appletu z obrázka 6.32 si môžete stiahnuť Tu.



Obr. 6.32: Cilkino riešenie. Model na doplňovanie zlomku.

4. Analyzujte situáciu keby sme pozmenili úlohu takto: Koľko tretín je nutné pridať k dvom pätinám, aby sme dostali štyri štvrtiny?

5. Ktorú z metód v takto pozmenen„ “ej úlohe je výhodnejšie aplikovať - Cilkinu, či (nezverejnenú) metódu „nového učiteľa?"

6. Nájdite univerzálny (generický) model na interpretáciu úloh typu: Koľko o $\frac{1}{p}$ treba pridať k $\frac{1}{q}$, aby sme dostali i $\frac{m}{m}$?

6.4.2 Výsledok - porozumenie

1. **Základná téza:**
   Správny výsledok ešte neznamená správne porozumenie. Pri zlomkoch môže žiak získať správne číslo aj z nesprávnych dôvodov. Nie je to „vina“ žiaka, ale didaktické riziko, za ktoré zodpovedá učiteľ.

2. **Prečo sú zlomky na to „nebezpečné“:**
   Zlomky majú viacero významov (mnohosť – operátor – adresa). Problém nastáva, keď úloha vyžaduje jeden význam, ale žiak použije iný a náhodou dostane správny výsledok.

   - **Operátor:** „vezmi 3/4 z niečoho“
   - **Mnohosť (veľkosť):** „3/4 je číslo medzi 0 a 1“
   - **Adresa:** „bod 3/4 na číselnej osi“

3. **Kľúčový rozdiel:**

   - **Správny výsledok** = číselná zhoda s očakávaným riešením (dá sa rýchlo overiť skúškou).
   - **Správne porozumenie** = zhoda medzi významom pojmu a spôsobom riešenia (odhalí sa v novom alebo pozmenenom kontexte).

   Porozumenie sa netestuje jedným príkladom.

4. **Cilkin príklad – prečo môže byť výsledok správny, ale porozumenie nie:**

   Úloha: „Koľko šestín je nutné pridať k dvom tretinám, aby sme dostali štyri štvrtiny?“

   Cilka urobí: 4/4- 2/3 = 4/12 = 2/6.

   - **Prečo je výsledok „správny“:** číselne sedí a dá sa overiť spätným dosadením.
   - **Prečo porozumenie nemusí byť správne:** žiak môže manipulovať so symbolmi (ako s „dvoma číslami oddelenými čiarou“) bez porozumenia, čo znamená odčítanie a čo predstavuje výsledok v danom kontexte.

5. **Jedno-vetové vysvetlenie pre študentov:**
   Žiak môže mať pravdu v čísle, ale mýliť sa v pojme.
   (Alebo: Výsledok patrí matematike, porozumenie patrí žiakovi.)

6. **Praktický didaktický test porozumenia (diagnostika):**
   Ak žiak rozumie, zvládne aj malú zmenu úlohy. Ak nerozumie, správny výsledok sa mu „rozpadne“.

   - **Pôvodná úloha:** Koľko šestín treba pridať k 2/3, aby sme dostali 4/4?

- **Pozmenená úloha:** Koľko tretín treba pridať k 2/5, aby sme dostali 4/4?

Pri zmene kontextu sa ukáže, či ide o porozumenie, alebo o mechanický postup.

7. **Ako má učiteľ reagovať (čo učiť budúcich učiteľov):**

   - **Čo nerobiť:** nehodnotiť iba výsledok, nepovedať „je to správne, poďme ďalej“.
   - **Čo robiť:** pýtať sa na význam a mentálny model žiaka, napr.:
     „Čo si vlastne odčítal?“
     „Čo znamená 4/4 v tejto úlohe?“
     „Kde by si to ukázal na číselnej osi?“

   Učiteľ nehľadá len chybu vo výpočte, ale zisťuje, ako žiak chápe pojem zlomku.

8. **Vhodná didaktická formulácia:**
   Správne porozumenie sa prejaví schopnosťou riešiť úlohu aj po zmene kontextu, nie len dosiahnutím správneho číselného výsledku.

9. **Hodnotenie Cilkinho riešenia?**
   Ako by ste hodnotili Cilkino riešenie keby bola žiačkou 8. ročníka ZŠ?

Dôležité

Oddelenie správneho výsledku od správneho porozumenia znamená skúmať, či žiak pracuje s pojmom zlomku ako s matematickým objektom, alebo len manipuluje so symbolickým zápisom.

6.5 Reálne čísla

Didaktické ciele kapitoly

Po absolvovaní kapitoly ba mal študent učiteľstva matematiky:

1. rozumieť archimedovskej[a] vlastnosti množiny reálnych čísel a jej významu v školskej matematike,
2. chápať reálne číslo ako reprezentanta v geometrickom modeli, bod na číselnej osi,
3. rozlišovať presnú a aproximovanú hodnotu,
4. vedieť vysvetliť, prečo sa iracionalita na ZŠ dokazuje len výnimočne.

[a] Usporiadaná množina $\mathbb{R}$ je *archimedovská*, ak $\forall x, y \in \mathbb{R}, 0 < x < y, \exists n \in \mathbb{N} : x(n-1) \leq y < xn$.

Metodické poznámky pre vyučujúceho

Artificial Intelligence (AI) môže významne pomáhať pri:

1. vizualizácii operácií s reálnymi číslami v separovaných modeloch,
2. vytváraní aproximácií reálnych čísel a ich porovnávaní,
3. generovaní diskusných otázok a tvorbe pracovných listov, prípadne testov.

Definícia 1

Reálne čísla sú čísla racionálne a čísla iracionálne. Iracionálne čísla sú čísla, ktoré sa nedajú vyjadriť v tvare zlomku ku $\frac{p}{q}$.

Termín reálne číslo zaviedol René Descartes (1637) ako spoločný názov pre racionálne a iracionálne čísla.

- Viac ako dve tisíc rokov boli známe typy iracionálnych čísel ako odmocniny niektorých prirodzených čísel $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$ ....
- Euler (1737) dokázal, že číslo e (základ prirodzeného logaritmu) je iracionálne a Lambert ((1768) dokázal, že ***Ludolfovo číslo*** π iracionálne.
- Charles Hermit (1873) dokázal transcendentnosť čísla e .
- Ferdinand von Lindemann (1882) ukázal, že číslo π je transcendentné - nie je riešením algebraickej rovnice s celočíselnými koeficientami

Ak chceme na strednej škole rozvíjať abstraktné predstavy žiakov o reálnych číslach, je nevyhnutné systematicky podporovať ich prácu s modelmi reálnych čísel a vytvárať priestor na hlbšie porozumenie tejto problematiky. Takáto práca však kladie zvýšené nároky na čas, organizáciu vyučovania aj na didaktickú pripravenosť učiteľa.

V školskej praxi preto často zostávame pri základných, prevažne intuitívnych predstavách o reálnych číslach, ktoré postačujú na riešenie bežných úloh, no len zriedka vedú k hlbšiemu pochopeniu štruktúry tohto číselného oboru.

Zároveň však nemožno prehliadnuť, že časť žiakov – najmä tých, ktorí majú k matematike prirodzený vzťah – prejavuje záujem o hlbšie a presnejšie uchopenie pojmu reálneho čísla. Úlohou učiteľa je byť na takýto záujem pripravený, vedieť ho usmerniť a primerane rozvíjať, a to aj nad rámec minimálnych požiadaviek učiva.

Modely reálnych čísel

S dvoma modelmi sa stretne už žiak základnej školy. Sú to:

1. **Aritmetický** model - **množina** všetkých čísel.

2. **Geometrický** model - **priamka** (číselná os).

Hoci ide o dve rôzne množiny, ich vzájomný izomorfizmus dovoľuje stotožniť ich prvky a nerozlišovať medzi číslom x a bodom X so súradnicou x. Z geometrického modelu získa žiak veľmi názorne poznatok o štyroch dôležitých vlastnostiach množiny $\mathbb{R}$. Uvedieme geometrickú interpretáciu týchto 4 vlastností, ktoré vyzerajú prijateľne a zrozumiteľnejšie pre žiakov stredných škúl. Najskôr základná vlastnosť:

Vzťah medzi aritmetickým a geometrickým modelom

Každému reálnemu číslu odpovedá práve jeden bod na číselnej osi.

Teraz 4 dôležité vlastnosti množiny $\mathbb{R}$:

1. Ak sú X, Y dva rôzne body na číselnej osi o, tak pre súradnice týchto bodov nastáva práve jeden z prípadov: $x < y, x > y$ (bod X leží vľavo od Y, Y leží vľavo od X) [usporiadaná množina].

2. Medzi každými dvoma rôznymi bodmi existuje bod [hustá množina].

3. Ak bod B leží vnútri úsečky AX a ak na polpriamke $\overrightarrow{AX}$ zostrojíme postupnosť bodov $B_1 = B, B_2, B_3, \ldots$ tak, že postupne nanášame úsečku AB (t. j. $|AB_i| = i\,|AB|$) , tak po istom počte krokov prekročíme bod X (budeme mimo úsečky AB [Archimedova axióma].

4. Na priamke osi o nie sú diery [spojitá množina].

Interpretácia

V školskej matematike má archimedovská vlastnosť predovšetkým interpretačný význam – pomáha pochopiť, že reálne čísla nemajú „nekonečne malé“ ani „nekonečne veľké“ medzery.

Vzťah medzi aritmetickým a geometrickým modelom reálnych čísel je možné efektívne podporiť využitím dynamických modelov v prostredí GeoGebra. Tieto modely umožňujú žiakom experimentovať s číselnou osou, sledovať **aproximáciu iracionálnych čísel** a názorne pochopiť vlastnosti množiny $\mathbb{R}$, ako sú hustota či archimedovská vlastnosť. Ich význam spočíva najmä v tom, že sprístupňujú abstraktné pojmy bez potreby formálnych dôkazov.

Aproximácia

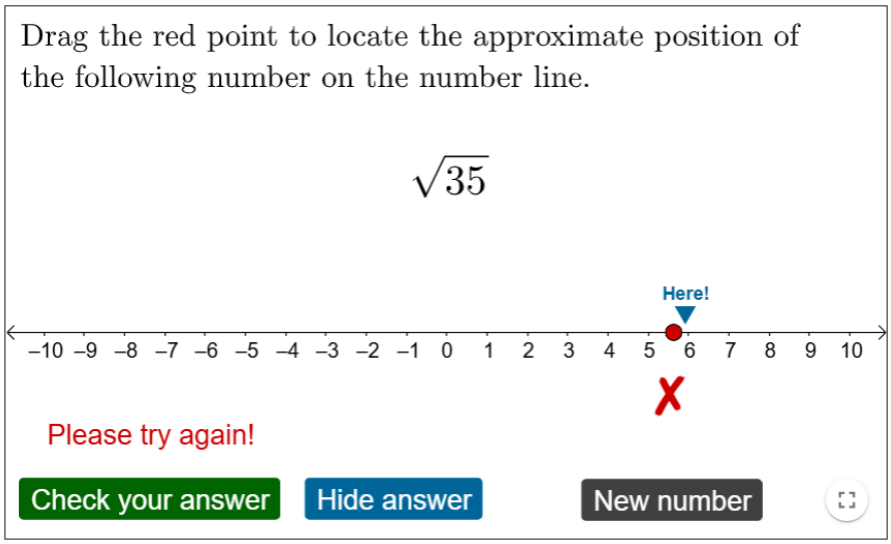
Práca s aproximáciami pripravuje žiakov na neskoršie chápanie limitných procesov bez potreby ich formálneho zavedenia.

Uvedieme dve ukážky takýchto modelov, ktoré sme prevzali z GeoGebra servera. Popisy v týchto appletoch sme zámerne ponechali v angličtine. Keďže jedným z praktických cvičení z didaktiky matematiky je preklad popisov, z originálnych appletov vytvorených v prostredí GeoGebra, do slovenčiny.

1. Real Numbers on the Number Line

   Na obrázku 6.33 je zobrazená pozícia reálneho čísla $\sqrt{35}$ pomocou interaktívneho appletu. Applet umožňuje náhodne vygenerovať reálneho číslo na číselnej osi. Žiak navrhne približnú polohu tohto reálneho čísla na číselnej osi, ktorej správnosť si môže overiť pomocou tlačidla *Check your ansver*.

   Applet si môžete aktivovať Tu.

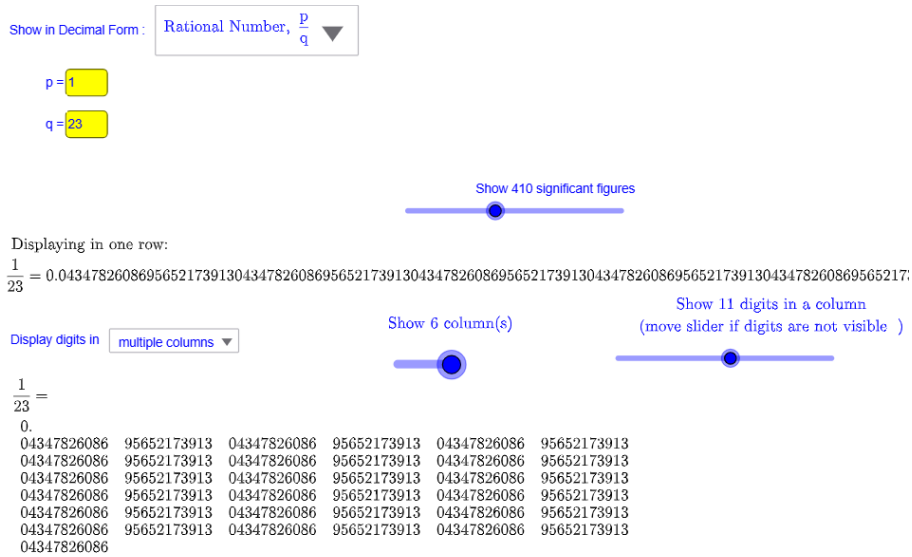


Obr. 6.33: Pozícia reálneho čísla na číselnej osi

2. Rational and Irrational Numbers in Decimal Form

   Na obrázku 6.33 je zobrazený zápis reálneho čísla $\frac{1}{23}$ pomocou interaktívneho appletu. Applet umožňuje vypísať desatinný rozvoj reálneho číslo podľa vopred nastavených kritérií (výber možnosti - racionálne/iracionálne číslo, počet desatinných miest, formu zápisu v stĺpcoch). Žiak po zadaní čísla uvidí rozvoj reálneho čísla. Zároveň môže zistiť (ne)periodickosť zadaného čísla.

   Applet si môžete aktivovať Tu.



Obr. 6.34: Desatinný rozvoj reálneho čísla

Z pohľadu školskej matematiky je dôležité, aby žiaci chápali vzájomný vzťah medzi reálnym číslom a jeho geometrickou interpretáciou. Ide o východisko k analytickej geometrii priestoru $\mathbb{E}_1$. Číselná os je kľúčovým spojovacím prvkom aritmetiky a geometrie.

Rozširovanie oboru celých čísel je rozdelené na dve etapy.

1. Zavádzanie racionálnych čísel v školskej matematike. Táto etapa je zahrnutá do tematických celkov, ktoré sa vzťahujú na prácu so zlomkami a s riešením lineárnych rovníc na ZŠ.

2. Zavádzanie iracionálnych čísel je zaradené do matematického učiva hlavne na stredných školách. Určovanie hodnôt iracionálnych čísel na ZŠ je obmedzené. Pri výpočtoch sa využívajú kalkulačky, prípadne iné prostriedky AI.

   A. Iracionálne čísla úzko súvisia s aplikovaním Pytagorovej vety. Napríklad pri výpočte veľkosti uhlopriečky štvorca sa pracuje s algebraickými iracionálnymi číslami typu $\sqrt{2}$.

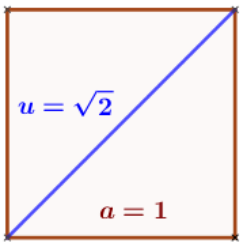
   B. Pri určovaní obvodu a obsahu kruhu sa žiaci už aj na ZŠ stretávajú s transcendentným iracionálnym číslom - Ludolfovo číslo lo π.

   C. Na strednej škole pribudne pojem čísla e ako základ prirodzeného logaritmu.

6.5.1 Odmocnina z dvoch

Veta 1

Matematik Pytagorovej školy Hippasus (5. stor. pred n. l.) ukázal, že uhlopriečka štvorca s jednotkovou stranou nemôže byť vyjadrená racionálnym číslom.



Obr. 6.35: Veľkosť uhlopriečky štvorca je iracionálne číslo

Hippasus[1] ešte pre dokázaním Pytagorovej vety pravdepodobne dospel k záveru, že $u^2 = 1^2 + 1^2$. Dnes vieme, že to predstavuje kvadratickú rovnicu s celočíselnými koeficientmi $u^2 = 2$, ktorej koreňom je odmocnina z 2.

S využitím vlastností deliteľnosti ukážeme, že táto rovnica **nemá** v obore racionálnych čísel $\mathbb{Q}$ riešenie.

Dôkaz. **Dokážeme to nepriamo.** (Dôkaz je určený pre študentov SŠ.)
Nech existuje racionálne číslo lo $r \in Q$, ktoré je riešením rovnice $x^2 = 2$. Potom zrejme $r = \frac{p}{q}$, pričom celé čísla p, q sú nesúdeliteľné. Najväčší spoločný deliteľ čísel p, q je rovný číslu jedna.

Po dosadení do rovnice $x^2 = 2$ a po ekvivalentných úpravách dostaneme rovnosť $p^2 = 2.q^2$. Na pravej strane rovnosti je určite číslo párne. Z vlastností deliteľnosti celých čísel vyplýva, že číslo 2 delí číslo na pravej strane rovnosti a zároveň musí deliť aj číslo na ľavej strane rovnosti. Využijeme skutočnosť, že druhá mocnina párneho čísla je opäť párne číslo a druhá mocnina nepárneho čísla je nepárne číslo. Teda číslo p^2 je párne, preto musí byť aj číslo p párne. (Dokážte to). To znamená, že je v tvare $p = 2k$. Po dosadení do rovnosti $p^2 = 2.q^2$ dostávame $(2k)^2 = 2.q^2 \Leftrightarrow 2k^2 = q^2$.
Analogickou úvahou zistíme, že číslo q je párne. Keďže aj číslo p je párne, tak najväčší spoločný deliteľ čísel p, q je väčší alebo rovný číslu 2.
To je spor s našim predpokladom, že riešením je racionálne číslo slo $r = \frac{p}{q}$, kde p, q sú nesúdeliteľné celé čísla. Pozrite si zápis dôkazu v GeoGebre Tu. □

Na ZŠ sa dôkaz iracionality$\sqrt{2}$ nevyžaduje – jeho cieľom je rozvoj logického myslenia, nie procedurálna zručnosť.

---

[1]Podľa povesti bol Hippasus zvrhnutý z lode do mora a utopený, aby objav iracionality zostal utajený.

Návrh zadaní pre prácu na seminároch z didaktiky matematiky.

1. V GeoGebre vytvorte applet pre model "Teplomer". Postup konštrukcie si otvorte Tu.

2. Vytvorte aspoň jednu prezentáciu s niektorou s tém:

3. Nech a, b, kde a, b, c sú prirodzené čísla. Potom existujú také celé čísla s, t, že $sa + tb =$ nsd(a, b). Použite matematickú indukciu a Euklidov algoritmus. Larson, 3.1.2.

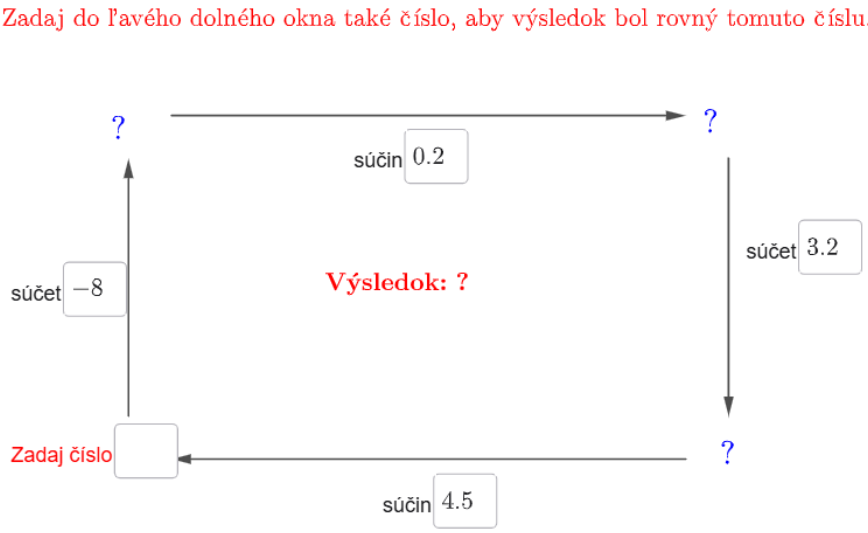
4. Rovnica $ax + by = c$, kde a, b, c sú celé čísla, má celočíselné riešenie práve vtedy, keď $d =$ nsd(a, b) delí c. Ak navyše (x_0, y_0) je nejaké celočíselné riešenie, tak pre každé celé číslo k aj čísla $x' = \frac{x_0 - bk}{d}$, $y' = \frac{y_0 - ak}{d}$ sú riešením a všetky celočíselné riešenia majú tento tvar. Larson, 3.1.4.

5. Navrhnite postup ako nabrať jeden liter vody ak máme k dispozícii len 9 a 16 litrovú nádobu.

6. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n je zlomok $\frac{21n+4}{14n+3}$ v základnom tvare. Larson, 3.1.5.

7. Dokážte, že pre každé dve za sebou idúce Fibonacciho čísla $F_n, F_{n+1}, n > 2$ sú navzájom nesúdeliteľné v základnom tvare. Larson, 3.1.10.

8. Nájdite také číslo (zadajte ho do ľavého dolného okna), aby výsledok bol rovný danému číslu. **Úlohu riešte aj algebraicky pomocou rovníc**.



Obr. 6.36: Doplňovačka, applet je dostupný Tu.

7 Analytická geometria v rovine a v priestore

Úvod

Analytická geometria patrí k oblastiam matematiky, v ktorých sa prirodzene stretávajú dva spôsoby matematického myslenia. Geometrický objekt môžeme pozorovať, konštruovať a skúmať jeho vlastnosti, ale zároveň ho môžeme opísať pomocou čísel, súradníc, rovníc a algebraických operácií.

Bod sa tak môže stať usporiadanou dvojicou alebo trojicou čísel, vektor môžeme vyjadriť jeho súradnicami a geometrické vzťahy možno skúmať prostredníctvom algebraických podmienok. Analytická geometria preto predstavuje prirodzené prepojenie medzi geometriou a algebrou.

Toto prepojenie je veľkou prednosťou analytickej metódy, no z didaktického hľadiska prináša aj určité riziko. Žiak môže zvládnuť výpočtový postup bez toho, aby rozumel jeho geometrickému významu. Môže napríklad správne vypočítať súradnice vektora, skalárny súčin alebo rovnicu priamky, ale nemusí rozumieť tomu, čo vypočítané hodnoty geometricky vyjadrujú.

Pre vyučovanie analytickej geometrie je preto dôležité vedome prepájať

$$\boxed{\text{geometrickú predstavu}} \longleftrightarrow \boxed{\text{algebraický zápis}} \longleftrightarrow \boxed{\text{vizualizáciu}}.$$

Dynamické geometrické prostredie GeoGebra pridáva k týmto reprezentáciám ďalšiu možnosť. Umožňuje meniť polohu bodov a vektorov a súčasne sledovať, ako sa menia ich súradnice, algebraické vzťahy a geometrické vlastnosti. Dynamický obrázok preto nemusí slúžiť iba ako ilustrácia už známeho tvrdenia. Môže sa stať prostredím na experimentovanie, formulovanie hypotéz a ich následné matematické zdôvodnenie.

Poznámka

Významnou didaktickou výhodou prostredia GeoGebra je pri analytickej geometrii súčasné prepojenie **algebraického okna** a **nákresne**. Ten istý matematický objekt je tak reprezentovaný dvoma spôsobmi: geometricky v nákresni a algebraicky pomocou súradníc, rovníc alebo iných symbolických zápisov.
Pri dynamickej zmene objektu sa obe reprezentácie menia súčasne. Študent tak môže bezprostredne sledovať, ako sa geometrická zmena prejaví v algebraickom zápise a naopak. Toto prepojenie podporuje prechod medzi geometrickým a algebraickým spôsobom uvažovania, ktorý je pre porozumenie analytickej geometrie podstatný.

Nové možnosti prinášajú aj nástroje umelej inteligencie. AI môže vysvetľovať pojmy, vytvárať úlohy a testové otázky, navrhovať postupy riešenia alebo reagovať na chybu žiaka. Samotná dostupnosť týchto možností však ešte nezaručuje lepšie porozumenie matematiky.

Dôležitou otázkou preto nebude iba

Čo dokáže nástroj umelej inteligencie vyriešiť?

ale najmä

Ako s ním pracovať tak, aby podporoval matematické myslenie žiaka?

V tejto kapitole budeme preto jednotlivé témy skúmať z viacerých navzájom prepojených pohľadov:

matematický pojem $\longleftrightarrow$ geometrická predstava $\longleftrightarrow$ algebraický zápis $\longleftrightarrow$ dynamický model.

Na vhodných miestach do tohto procesu zapojíme aj nástroje umelej inteligencie. Nebudeme ich využívať iba na získanie hotovej odpovede, ale najmä na kladenie otázok, formulovanie a overovanie hypotéz, porovnávanie riešení, tvorbu úloh a prácu s chybou.

GeoGebra a AI ako rozdielne didaktické nástroje

GeoGebra a nástroje umelej inteligencie majú rozdielne, ale navzájom sa dopĺňajúce postavenie.
GeoGebra umožňuje predovšetkým **dynamicky skúmať matematický objekt a jeho reprezentácie**. Žiak môže objekt meniť, pozorovať jeho správanie a hľadať vlastnosti, ktoré sa pri manipulácii zachovávajú.
AI naopak umožňuje viesť o matematickom objekte **dialóg**. Môže klásť otázky, reagovať na žiakove odpovede, ponúknuť iný spôsob vysvetlenia alebo pomôcť analyzovať chybný postup.
Ani jeden z týchto nástrojov však nenahrádza potrebu **matematického zdôvodnenia**.

Didaktické ciele kapitoly

Po absolvovaní kapitoly by mal študent učiteľstva matematiky:

1. rozlišovať medzi **geometrickou a algebraickou reprezentáciou** základných objektov analytickej geometrie a vedieť medzi nimi prechádzať,
2. využívať dynamickú geometriu na skúmanie vlastností vektorov, priamok, rovín a ďalších geometrických objektov,
3. rozlišovať medzi **experimentálnym pozorovaním** a **matematickým zdôvodnením**,
4. využívať nástroje AI pri formulovaní otázok, vysvetľovaní pojmov, tvorbe úloh a analýze riešení,
5. kriticky posudzovať matematickú a didaktickú kvalitu odpovedí a testových úloh vytvorených pomocou AI,
6. využívať **prácu s chybou** ako prirodzenú súčasť procesu matematického poznávania,
7. navrhovať aktivity, v ktorých sa vhodne prepája matematický obsah, GeoGebra a nástroje umelej inteligencie.

7.1 Historický vývoj analytickej geometrie

Analytická geometria vznikala postupným prepájaním geometrického a algebraického spôsobu uvažovania. Jej korene možno hľadať už v antickej geometrii. Euklides vo svojich *Základoch* budoval geometriu synteticky, bez použitia súradníc a algebraických rovníc. Geometrické objekty a vzťahy medzi nimi skúmal pomocou konštrukcií, axióm a deduktívnych dôkazov.

Významný zlom nastal v 17. storočí v prácach francúzskych matematikov Reného Descarta (1596–1650) a Pierra de Fermata (1601–1665). Ich myšlienky umožnili opisovať geometrické objekty pomocou algebraických vzťahov. Geometrický problém tak bolo možné previesť na algebraický problém a jeho riešenie následne opäť geometricky interpretovať.

Descartes vo svojom diele *La Géométrie* z roku 1637 systematicky využíval algebraické metódy pri riešení geometrických problémov. Spojenie geometrie a algebry vytvorilo základ toho, čo dnes označujeme ako analytickú alebo kartézsku geometriu.

Geometria a algebra

Zavedenie súradníc umožnilo reprezentovať geometrické objekty číslami a rovnicami. Bod možno opísať jeho súradnicami, priamku rovnicou a geometrické vzťahy medzi objektmi algebraickými podmienkami.
Vznikol tak prechod, ktorý je charakteristický pre analytickú geometriu aj dnes:

$$\boxed{\text{geometrický objekt}} \longleftrightarrow \boxed{\text{algebraická reprezentácia}}.$$

Ďalší významný krok prinieslo 19. storočie. Pri skúmaní geometrických a fyzikálnych problémov sa postupne formoval pojem vektora. Dôležité miesto v tomto vývoji patrí Hermannovi Grassmannovi (1809–1877). Vo svojom diele *Die lineale Ausdehnungslehre* z roku 1844 rozvíjal myšlienky, ktoré dnes spájame so sčítaním vektorov, násobením vektora skalárom, lineárnou závislosťou a vektorovým priestorom.

Grassmannov prístup znamenal dôležitý posun. Vektor už nemusel byť chápaný iba ako konkrétny geometrický objekt viazaný na určitú polohu. Postupne sa stával samostatným matematickým objektom, s ktorým možno vykonávať algebraické operácie.

S vývojom pojmu vektora je spojený aj írsky matematik a fyzik William Rowan Hamilton (1805–1865). Termín *vektor* pochádza z latinského slova *vector* – nositeľ. Hamilton ho používal v súvislosti so svojou teóriou kvaterniónov. Koncom 19. storočia sa potom vektorový počet postupne ustálil do podoby blízkej jeho dnešnému používaniu.

Od geometrickej predstavy k algebraickému objektu

Historický vývoj analytickej geometrie ukazuje postupný prechod od geometrických objektov a konštrukcií k ich algebraickým reprezentáciám. Podobný prechod možno sledovať aj pri pojme vektora.
Pri jeho zavádzaní preto nemusíme začínať súradnicami. Môžeme vychádzať z geometrickej predstavy orientovanej úsečky, skúmať jej vlastnosti a až následne prejsť k súradnicovému vyjadreniu vektora.
Práve tento postup využijeme v nasledujúcej časti.

Viac z histórie afinnej (analytickej) geometrie nájdete v práci [HAN, VOS, 2025].

7.2 Vektory – od geometrickej predstavy k algebraickému zápisu

Vektor patrí medzi základné pojmy analytickej geometrie. Žiak sa s ním zvyčajne prvýkrát stretáva prostredníctvom geometrickej predstavy orientovanej úsečky. Takáto predstava je názorná, pretože umožňuje uvažovať o smere, orientácii a veľkosti.

Pri ďalšom štúdiu sa však pojem vektora postupne mení. Z geometrického objektu sa stáva algebraický objekt, s ktorým vykonávame operácie a ktorý môžeme reprezentovať pomocou jeho súradníc.

Z didaktického hľadiska je preto dôležité, aby prechod od geometrickej predstavy k algebraickému zápisu neprebehol iba formálne.

7.2.1 Geometrický vektor

Orientovaná úsečka je úsečka, ktorej krajné body majú určené poradie. Ak sú jej krajnými bodmi A a B, zapisujeme ju symbolom

$$\overrightarrow{AB},$$

pričom bod A nazývame začiatočným bodom a bod B koncovým bodom.

Rôzne orientované úsečky môžu mať rovnakú dĺžku, smer a orientáciu.

Úloha: Dve orientované úsečky

V rovine zostrojte dve rôzne orientované úsečky, ktoré majú rovnakú dĺžku, smer a orientáciu.

Porovnajte obe orientované úsečky a odpovedzte na otázky:

1. V čom sa obe orientované úsečky líšia?
2. Ktoré ich vlastnosti zostávajú rovnaké?
3. Môžeme jednu z orientovaných úsečiek premiestniť na miesto druhej bez zmeny jej dĺžky, smeru a orientácie?
4. Ako by ste vlastnými slovami charakterizovali vzťah medzi týmito orientovanými úsečkami?

Definícia 1: Geometrický vektor

Geometrický vektor môžeme chápať ako množinu všetkých navzájom zhodných a súhlasne orientovaných úsečiek. Konkrétna orientovaná úsečka

$$\overrightarrow{AB}$$

je jedným z možných **umiestnení** tohto vektora.

Takto chápaný vektor nie je viazaný na konkrétne miesto v rovine alebo v priestore. Preto hovoríme aj o **voľnom vektore**.

Ak

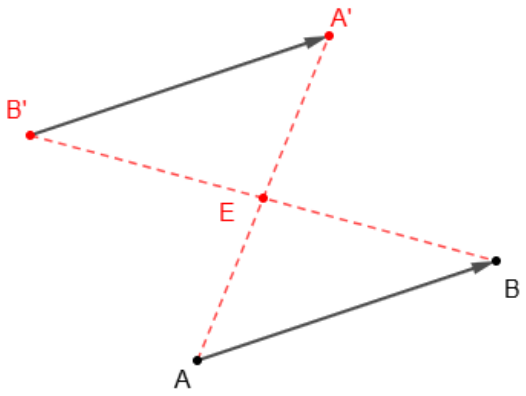
$$\vec{u} = \overrightarrow{AB},$$

môžeme ten istý vektor umiestniť do ľubovoľného bodu C. Jeho koncový bod D je potom určený tak, aby orientované úsečky

$$\overrightarrow{AB} \quad \text{a} \quad \overrightarrow{CD}$$

mali rovnaký smer, orientáciu a veľkosť. Orientované úsečky, ktoré majú rovnakú dĺžku, smer a orientáciu, nazývame **ekvivalentnými orientovanými úsečkami**. Predstavujú rôzne umiestnenia toho istého vektora.

Túto predstavu môžete preskúmať v dynamickom GeoGebra applete z obrázku 7.1.



Obr. 7.1: Ekvivalentne orientované úsečky
GeoGebra applet

Didaktický problém
Žiak si môže pojem vektora stotožniť s konkrétnou šípkou nakreslenou v zošite alebo na obrazovke. Potom môže dve rôzne umiestnenia toho istého vektora považovať za dva rôzne vektory.

Po zavedení pojmu vektora je preto vhodné pracovať s viacerými jeho umiestneniami a viesť žiaka k otázke:

Čo sa pri zmene umiestnenia vektora mení a čo zostáva zachované?

Odpoveď na túto otázku môže žiak hľadať experimentovaním v dynamickom prostredí GeoGebra. Uvádzame jednu z možností takéhoto experimentu.

7.2.2 Experiment v prostredí GeoGebra

Ten istý vektor na rôznych miestach

Vstup do experimentu: V prostredí GeoGebra vytvorte body A, B a C. Vytvorte vektor

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB},$$

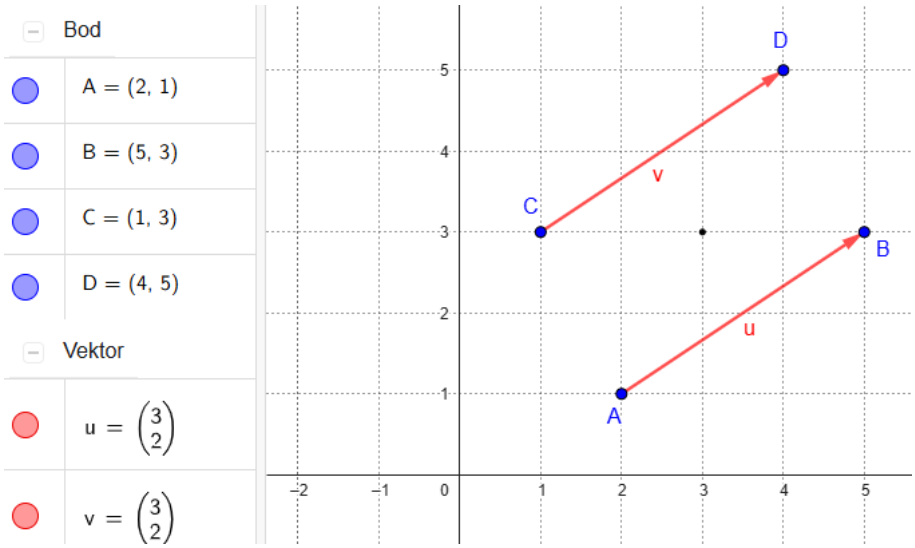
určený bodmi A a B. Potom narysujte **nové umiestnenie vektora** $\vec{u}$ so začiatočným bodom C. Pomôcť vám môže obrázok 7.2.

Experiment:

Pohybujte postupne bodmi A, B a C a sledujte geometrickú zmenu v nákresní GeoGebry a zároveň aj údaje v algebraickom okne GeoGebry. Pokúste sa odpovedať na otázky:

1. Čo sa zmení, ak pohybujeme iba bodom C?
2. Čo sa pri tomto pohybe nemení?
3. Ktoré údaje v algebraickom okne vyjadrujú vlastnosti vektora a ktoré jeho konkrétne umiestnenie?
4. Predstavujú pôvodné a nové umiestnenie dva rôzne vektory, alebo ten istý vektor? Svoje tvrdenie porovnajte s údajmi v algebraickom okne.
5. Ako by ste na základe experimentu vysvetlili rozdiel medzi **vektorom** a jeho **umiestnením** žiakovi strednej školy?

Experiment by nemal slúžiť iba na potvrdenie definície. Jeho cieľom je vytvoriť situáciu, v ktorej môže žiak najskôr pozorovať jav a až potom ho matematicky pomenovať. Proces, ktorý prebieha počas experimentovania, možno schematicky vyjadriť:



Obr. 7.2: Umiestnenie vektora
Aktivujte si dynamický model https://www.geogebra.org/m/yrrm2vvc

manipulácia $\longrightarrow$ pozorovanie $\longrightarrow$ hypotéza $\longrightarrow$ matematické pomenovanie.

7.2.3 Od geometrického vektora k súradniciam

Zavedením súradnicovej sústavy získava vektor ďalšiu reprezentáciu. Geometrickú predstavu orientovanej úsečky tak môžeme doplniť o algebraický zápis pomocou súradníc.

Nech sú v rovine dané body

$$A = [a_1, a_2], \qquad B = [b_1, b_2].$$

Potom vektor

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$$

má súradnice

$$\vec{u} = (b_1 - a_1,\ b_2 - a_2).$$

V priestore pre body

$$A = [a_1, a_2, a_3], \qquad B = [b_1, b_2, b_3]$$

dostávame

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1,\ b_2 - a_2,\ b_3 - a_3).$$

Ten istý matematický objekt teda môžeme reprezentovať dvoma spôsobmi:

$$\boxed{\text{orientovaná úsečka}} \longleftrightarrow \boxed{\text{usporiadaná dvojica alebo trojica čísel}}.$$

Práve schopnosť prechádzať medzi týmito dvoma reprezentáciami je jednou zo základných kompetencií pri štúdiu analytickej geometrie. Na prepojenie geometrickej predstavy vektora s jeho súradnicovým vyjadrením možno po realizovaní experimentu zaradiť nasledujúce dve úlohy.

Úloha: Vektor a jeho nové umiestnenie

Nech

$$A = [1, 2], \qquad B = [4, 4].$$

Potom

$$\overrightarrow{AB} = (4 - 1,\ 4 - 2) = (3, 2).$$

Ak vektor $(3, 2)$ umiestnime do bodu

$$C = [-2, 1],$$

jeho koncový bod D má súradnice

$$D = [1, 3].$$

Orientované úsečky $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{CD}$ predstavujú dve rôzne umiestnenia toho istého vektora.

Výsledok porovnajte s dynamickým modelom z experimentu 7.2.2. Zmeňte polohu bodov A a B a pri niekoľkých polohách vypočítajte súradnice vektora $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

Úloha: Určite súradnice koncového bodu

Nech je daný vektor

$$\vec{u} = (u_1, u_2)$$

a jeho nové umiestnenie má začiatočný bod

$$C = [c_1, c_2].$$

Vyjadrite súradnice koncového bodu D.

Pomoc. Na overenie správnosti výsledku využite dynamický model z obrázka 7.2.

Pri analytickom zápise je vhodné dôsledne rozlišovať medzi **bodom** a **vektorom**. Bod $A = [a_1, a_2]$ (**hranaté** zátvorky) označuje polohu v súradnicovej sústave, zatiaľ čo vektor $\vec{u} = (u_1, u_2)$ (**obyčajné** zátvorky) vyjadruje smer a veľkosť. Formálne používame podobný zápis pomocou dvojice čísel, ale geometrický význam oboch objektov je rozdielny.

7.2.4 Prvá aktivita s nástrojom umelej inteligencie

Nástroj umelej inteligencie môžeme pri zavádzaní pojmu vektora použiť rôznymi spôsobmi. Najjednoduchším spôsobom by bolo položiť otázku

„Čo je vektor?“

Takýto prompt však pravdepodobne povedie k hotovej definícii a žiak nebude nútený o pojme premýšľať.

Vhodnejšie je vytvoriť situáciu, v ktorej AI neprezradí odpoveď, ale pomáha žiakovi formulovať ju samostatne.

Prompt pre AI

Som študent gymnázia. V GeoGebre som vytvoril dve rôzne orientované úsečky, ktoré majú rovnakú dĺžku, smer a orientáciu. Myslím si, že predstavujú ten istý vektor.
Nepovedz mi hneď, či mám pravdu. Polož mi postupne otázky, pomocou ktorých si svoje tvrdenie overím.

Takto formulovaný prompt mení úlohu AI. Namiesto zdroja hotovej odpovede sa môže stať nástrojom, ktorý vedie žiaka prostredníctvom otázok.

Úloha pre študenta učiteľstva matematiky
Vyskúšajte uvedený prompt vo vybranom nástroji umelej inteligencie a posúďte jeho odpoveď.
Zamerajte sa najmä na tieto otázky:

1. Vedú otázky AI žiaka k samostatnému vytvoreniu pojmu?
2. Neobsahuje niektorá otázka už nepriamo hotovú odpoveď?
3. V akom poradí AI otázky kladie?
4. Ktorú otázku by ste ako učiteľ ponechali?
5. Ktorú otázku by ste zmenili alebo odstránili?
6. Navrhnite vlastnú otázku, ktorú by ste žiakovi položili namiesto AI.

Dve úrovne tej istej aktivity
Gymnazista rieši predovšetkým **matematický problém**: snaží sa porozumieť pojmu vektora.
Budúci alebo praktizujúci učiteľ rieši zároveň druhý problém: **posudzuje didaktickú kvalitu otázok**, ktoré majú žiaka k porozumeniu pojmu priviesť.
Tá istá aktivita tak môže mať odlišnú hĺbku podľa toho, komu je určená.

7.2.5 Ako ďalej?

Geometrická predstava vektora a jeho súradnicové vyjadrenie vytvárajú východisko pre ďalšie otázky. Ak máme dva vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$, môžeme ich sčítať alebo násobiť reálnym číslom. Prirodzene potom vzniká otázka, aké vektory dokážeme vytvoriť pomocou výrazov tvaru

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Táto otázka nás privedie k pojmom

lineárna kombinácia a **lineárna závislosť vektorov**.

Aj pri týchto pojmoch budeme postupovať od geometrického experimentu k algebraickému vyjadreniu a následne k matematickému zdôvodneniu.

Smerovanie kapitoly

V ďalších častiach kapitoly nebudeme analytickú geometriu budovať ako súbor vzorcov a výpočtových postupov. Na vybraných témach budeme sledovať, ako možno prepájať geometrickú predstavu, experimentovanie, algebraický zápis a matematické zdôvodnenie. Dynamické modely v GeoGebre pritom využijeme na skúmanie geometrických objektov a nástroje umelej inteligencie na dialóg, formulovanie hypotéz, prácu s chybou a didaktickú reflexiu.

Pozornosť sústredíme najmä na tieto tematické okruhy:

1. **Vektory a ich lineárne kombinácie**

   Od geometrickej predstavy vektora prejdeme k jeho súradnicovému vyjadreniu, operáciám s vektormi, lineárnym kombináciám a lineárnej závislosti.

2. **Priamka v rovine**

   Rôzne reprezentácie priamky využijeme na skúmanie vzťahu medzi jej geometrickými vlastnosťami, smerovým a normálovým vektorom a algebraickými rovnicami.

3. **Vzájomná poloha priamok**

   Geometrické pozorovanie a dynamický experiment prepojíme s algebraickými podmienkami rovnobežnosti, kolmosti a existencie priesečníka.

4. **Rovina a priamka v priestore**

   Pomocou trojrozmerných dynamických modelov budeme skúmať, ako možno priestorové geometrické vzťahy vyjadriť pomocou vektorov a rovníc.

5. **Metrické úlohy analytickej geometrie**

   Skalárny súčin, uhol a vzdialenosť budeme interpretovať geometricky a ich algebraické vyjadrenia využijeme pri riešení vybraných úloh.

Pri jednotlivých témach nebudeme nástroje umelej inteligencie využívať rovnakým spôsobom. Raz môže AI vystupovať ako sprievodca, ktorý kladie otázky, inokedy ako partner pri formulovaní hypotézy, nástroj na analýzu chybného riešenia alebo ako tvorca riešenia, ktorého matematickú a didaktickú kvalitu budeme kriticky posudzovať.

Spoločnú líniu kapitoly môžeme schematicky vyjadriť:

$$\boxed{\text{geometrická predstava}} \longrightarrow \boxed{\text{skúmanie}} \longrightarrow \boxed{\text{algebraická reprezentácia}} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \boxed{\text{zdôvodnenie}} \longrightarrow \boxed{\text{didaktická reflexia}}.$$

7.3 Vektory a ich lineárne kombinácie

V predchádzajúcej časti sme vektor skúmali ako geometrický objekt a následne sme prešli k jeho súradnicovému vyjadreniu. Teraz sa zameriame na to, aké nové vektory môžeme vytvárať z už daných vektorov.

Prirodzeným východiskom sú dve základné operácie: násobenie vektora reálnym číslom a sčítanie vektorov. Aj tentoraz nezačneme hotovými algebraickými pravidlami, ale geometrickou predstavou a konštrukciou.

7.3.1 Násobok vektora

Nech je daný nenulový vektor $\vec{u}$ a reálne číslo α. Chceme geometricky zostrojiť vektor

$$\alpha\vec{u}.$$

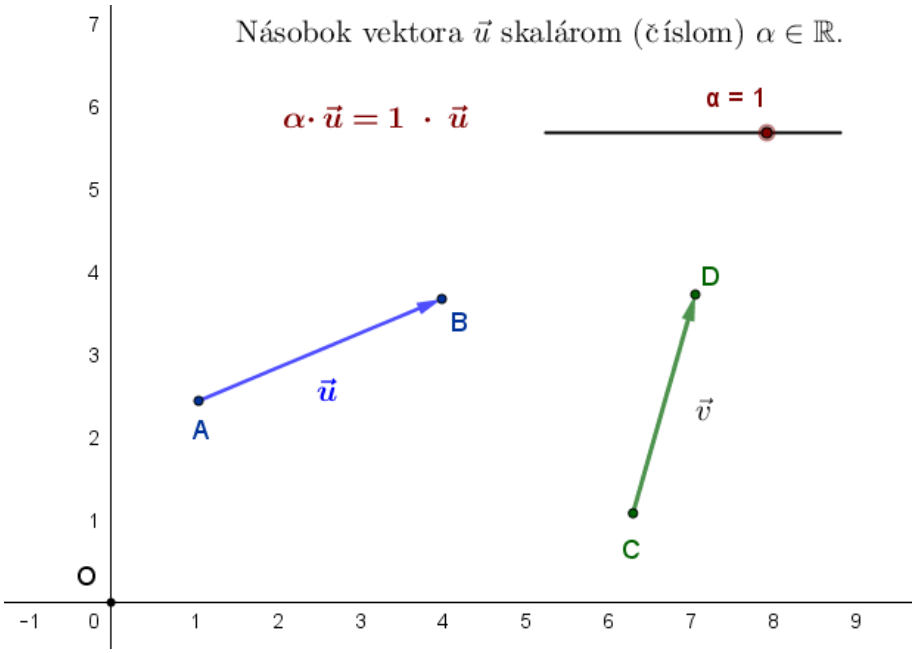
Skôr ako uvedieme jeho algebraické vyjadrenie, pokúsme sa zistiť, čo má takýto vektor geometricky predstavovať.

Úloha: Ako zostrojiť násobok vektora?

Zvoľte nenulový vektor $\vec{u}$ a reálne číslo α.
Pokúste sa zostrojiť vektor $\alpha\vec{u}$.

Pri konštrukcii uvažujte najmä o otázkach:

1. Ktoré vlastnosti pôvodného vektora $\vec{u}$ by sa mali pri násobení reálnym číslom zachovať?
2. Čo by sa malo meniť pri zmene hodnoty čísla α?
3. Aký geometrický význam môže mať znamienko čísla α?
4. Čo by mal predstavovať vektor $0\vec{u}$?



Obr. 7.3: Násobok vektora
Interaktívnu GeoGebra konštrukciu si aktivujete Tu.

Experiment

V interaktívnom modeli 7.3 postupne meňte hodnotu čísla α a sledujte, ako sa mení vektor $\alpha\vec{u}$. Navigačný panel nastavte až na krok 4.

Vyskúšajte napríklad hodnoty

$$\alpha = 2, \qquad \alpha = \frac{1}{2}, \qquad \alpha = -1, \qquad \alpha = -2, \qquad \alpha = 0.$$

Potom meňte aj polohu a veľkosť vektora $\vec{u}$ a skúmajte, ktoré vlastnosti pozorovanej situácie zostávajú zachované.

Pokúste sa na základe experimentu odpovedať na otázky:

1. Ako súvisí smer vektorov $\vec{u}$ a $\alpha\vec{u}$?

2. Ako závisí ich orientácia od znamienka čísla α?

3. Ako súvisí veľkosť vektora $\alpha\vec{u}$ s veľkosťou vektora $\vec{u}$?

4. Čo nastane pre $\alpha = 0$?

5. Sformulujte vlastnými slovami, čo geometricky znamená násobenie vektora reálnym číslom.

Definícia 1: Násobok vektora reálnym číslom

Nech je daný vektor $\vec{u}$ a reálne číslo α. Vektor $\alpha\vec{u}$ má pre $\alpha \neq 0$ rovnaký smer ako vektor $\vec{u}$, pričom jeho veľkosť je

$$|\alpha\vec{u}| = |\alpha|\,|\vec{u}|.$$

Ak $\alpha > 0$, vektory $\vec{u}$ a $\alpha\vec{u}$ majú rovnakú orientáciu. Ak $\alpha < 0$, majú opačnú orientáciu. Pre $\alpha = 0$ dostávame nulový vektor

$$0\vec{u} = \vec{0}.$$

Ak má vektor v rovine súradnice

$$\vec{u} = (u_1, u_2),$$

potom

$$\alpha\vec{u} = (\alpha u_1, \alpha u_2).$$

V priestore analogicky pre

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$$

platí

$$\alpha\vec{u} = (\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3).$$

7.3.2 Súčet vektorov

Násobením vektora reálnym číslom sme z jedného vektora vytvárali ďalšie vektory, ktoré s ním mali spoločný smer. Ak máme dva vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$, môžeme položiť ďalšiu prirodzenú otázku:

Ako možno geometricky zostrojiť vektor $\vec{u} + \vec{v}$*?*

Aj tentoraz budeme najskôr skúmať geometrickú situáciu a až následne ju vyjadríme algebraicky.

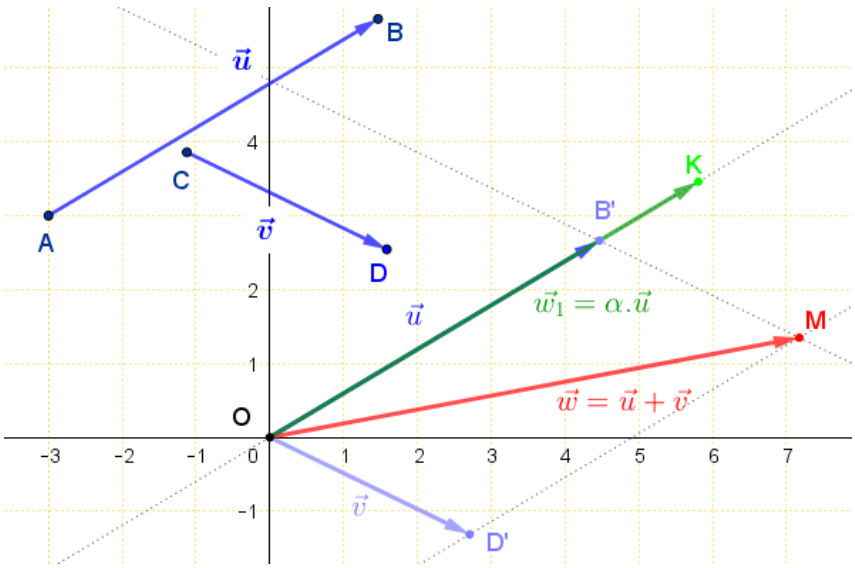
Úloha: Ako zostrojiť súčet dvoch vektorov?

Zvoľte dva vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$.
Pokúste sa geometricky zostrojiť vektor, ktorý by mohol predstavovať ich súčet

$$\vec{u} + \vec{v}.$$

Pri konštrukcii uvažujte najmä o otázkach:

1. Závisí výsledný vektor od konkrétneho umiestnenia vektorov $\vec{u}$ a $\vec{v}$?
2. Ako možno využiť možnosť premiestniť vektor bez zmeny jeho smeru, orientácie a veľkosti?
3. Kde by mohol byť začiatočný a koncový bod výsledného vektora?
4. Ako by ste overili, že vaša konštrukcia predstavuje súčet daných vektorov?



Obr. 7.4: Súčet vektorov
Dynamický GeoGebra applet si aktivujete Tu.

Experiment

V dynamickom modeli pohybujte bodmi A, B, C a D a sledujte, ako sa menia vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ a výsledný vektor $\vec{w}$.

Pokúste sa odpovedať na otázky:

1. Ktoré orientované úsečky v konštrukcii predstavujú vektor $\vec{u}$ a ktoré vektor $\vec{v}$?
2. Prečo môžeme vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ premiestniť do spoločného začiatočného bodu O?
3. Akú úlohu majú v konštrukcii pomocné rovnobežky?
4. Nájdite v obrázku dva geometrické spôsoby, pomocou ktorých možno určiť vektor

$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}.$$

5. Pohybujte vektormi $\vec{u}$ a $\vec{v}$. Zostávajú oba spôsoby konštrukcie súčtu zachované?
6. Sformulujte vlastnými slovami geometrické pravidlo pre sčítanie dvoch vektorov.

Geometrické pravidlá pre sčítanie vektorov

Experiment ukazuje dva prirodzené spôsoby geometrickej konštrukcie súčtu vektorov.

Trojuholníkové pravidlo. Vektor $\vec{v}$ umiestnime tak, aby jeho začiatočný bod bol v koncovom bode vektora $\vec{u}$. Súčet

$$\vec{u} + \vec{v}$$

je potom vektor, ktorého začiatočný bod je začiatočným bodom vektora $\vec{u}$ a koncový bod je koncovým bodom takto umiestneného vektora $\vec{v}$.

Rovnobežníkové pravidlo. Vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ umiestnime do spoločného začiatočného bodu. Doplníme ich na rovnobežník. Jeho uhlopriečka vychádzajúca zo spoločného začiatočného bodu predstavuje vektor

$$\vec{u} + \vec{v},$$

ktorý je súčtom vektorov $\vec{u}$ a $\vec{v}$.

Oba spôsoby konštrukcie vedú k tomu istému výslednému vektoru. Pri pohybe pôvodných vektorov v dynamickom modeli sa geometrická konštrukcia mení, ale uvedené pravidlá zostávajú zachované.

Záleží výsledok sčítania na poradí vektorov?

Od geometrickej konštrukcie k súradniciam

Geometrické pravidlá nám umožňujú súčet dvoch vektorov zostrojiť. Ak vektory vyjadríme pomocou súradníc, môžeme sa pýtať, ako sa geometrická konštrukcia prejaví v algebraickom zápise.

Úloha: Súčet vektorov v súradniciach

Nech sú dané vektory

$$\vec{u} = (2, 1), \qquad \vec{v} = (1, 3).$$

Umiestnite oba vektory do spoločného začiatočného bodu $O = [0, 0]$ a pomocou rovnobežníkového pravidla zostrojte vektor $\vec{u} + \vec{v}$. Pri riešení tejto úlohy odporúčame využiť GeoGebru.

1. Určte súradnice koncového bodu výsledného vektora.
2. Porovnajte jeho súradnice so súradnicami vektorov $\vec{u}$ a $\vec{v}$.
3. Zmeňte súradnice oboch vektorov a svoje pozorovanie overte na ďalších príkladoch.
4. Pokúste sa sformulovať všeobecné pravidlo pre súradnice súčtu dvoch vektorov.

Ak

$$\vec{u} = (u_1, u_2), \qquad \vec{v} = (v_1, v_2),$$

potom geometrická konštrukcia súčtu vedie k súradnicovému vyjadreniu

$$\boxed{\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1,\ u_2 + v_2)}.$$

V priestore analogicky pre

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3), \qquad \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

dostávame

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1,\ u_2 + v_2,\ u_3 + v_3).$$

Máme teda k dispozícii dve základné operácie s vektormi: násobenie vektora reálnym číslom a sčítanie vektorov. Ich spojením môžeme vytvárať vektory tvaru

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}.$$

Otázkou zostáva, aké vektory možno týmto spôsobom z daných vektorov $\vec{u}$ a $\vec{v}$ vytvoriť.

7.3.3 Od operácií s vektormi k lineárnej kombinácii

Nech sú dané dva nenulové vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$. Pomocou násobenia reálnym číslom a sčítania môžeme vytvárať vektory tvaru

$$\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

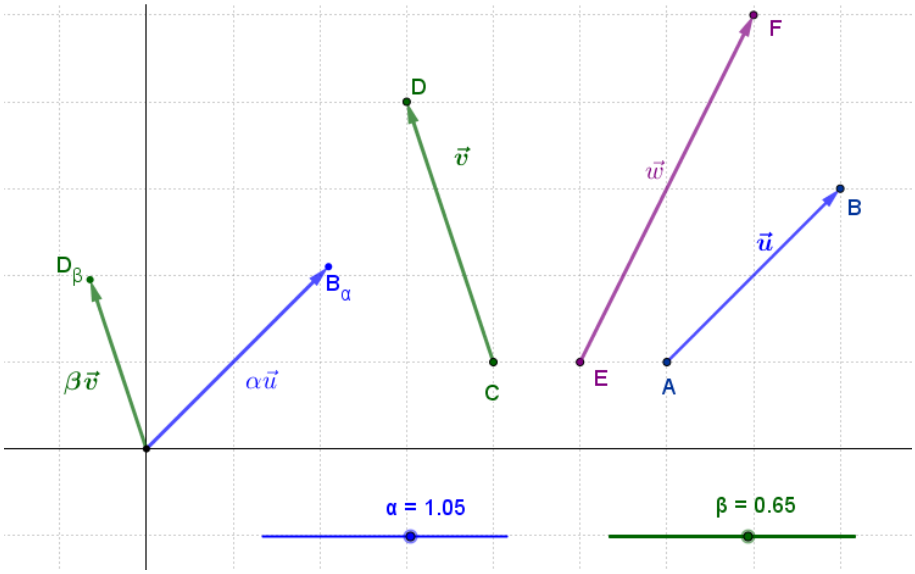
Namiesto okamžitého pomenovania takýchto vektorov najskôr preskúmame ich geometrický význam.

Položme si otázku:

Kde sa môže nachádzať koncový bod vektora $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$, ak meníme hodnoty α a β?

Od objavovania k matematickému pojmu
Učiteľ matematiky by mal viesť žiakov k tomu, aby nové matematické pojmy a vzťahy nevnímali iba ako hotové definície a pravidlá. Vhodne zvolená problémová situácia môže vytvoriť priestor na experimentovanie, pozorovanie a formulovanie vlastných hypotéz. Dynamické geometrické prostredie umožňuje takúto situáciu meniť a skúmať rôzne prípady. Úlohou učiteľa pritom nie je prezradiť výsledok experimentu, ale vhodnými otázkami usmerňovať pozornosť žiakov k vlastnostiam, ktoré sú pre vznik nového pojmu podstatné.

Nasledujúci experiment je príkladom takéhoto postupu. Žiak najskôr skúma, aké vektory možno vytvárať z dvoch daných vektorov, a až na základe svojich pozorovaní smeruje k ich matematickému pomenovaniu. Pri experimentovaní využije dynamický applet z obr. 7.5



Obr. 7.5: Kombinácia vektorov
Dynamický GeoGebra applet si aktivujete **Tu**.

Úloha/experiment: Aké vektory môžeme vytvoriť?

V GeoGebre zvoľte dva nenulové vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$. Pomocou posuvníkov pre reálne čísla α a β vytvárajte vektor

$$\vec{\Sigma} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}.$$

Skúmajte, aké vektory $\vec{\Sigma}$ možno týmto spôsobom vytvoriť.

Otázky na usmernenie experimentu

V applete prejdite na 6. krok navigačného panela. Meňte hodnoty α a β a sledujte vektor

$$\vec{\Sigma} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}.$$

Meňte tiež polohu a smer vektorov $\vec{u}$ a $\vec{v}$.

1. Ako zmena hodnoty α ovplyvňuje vektor $\vec{\Sigma}$? Ako ho ovplyvňuje zmena hodnoty β?
2. Aké vektory $\vec{\Sigma}$ možno týmto spôsobom vytvoriť?
3. Zmeňte vzájomnú polohu vektorov $\vec{u}$ a $\vec{v}$. Nájdite takú polohu, pri ktorej sa možnosti vytvárania vektora $\vec{\Sigma}$ výrazne zmenia.

Teraz skúmajte opačnú úlohu. Zvoľte ľubovoľný vektor $\vec{w}$ a pokúste sa ho vytvoriť pomocou vektorov $\vec{u}$ a $\vec{v}$.

4. Dokážete nájsť také hodnoty α a β, aby platilo

$$\vec{w} = \vec{\Sigma} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}?$$

5. Zmeňte polohu a smer vektora $\vec{w}$ a úlohu zopakujte. Darí sa vám vždy nájsť vhodné hodnoty α a β?
6. Zmeňte vzájomnú polohu vektorov $\vec{u}$ a $\vec{v}$. Nájdite takú polohu, pri ktorej už nie je možné ľubovoľne zvolený vektor $\vec{w}$ vyjadriť v tvare

$$\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}.$$

7. Čím sa táto poloha vektorov $\vec{u}$ a $\vec{v}$ odlišuje od predchádzajúcej?
8. Sformulujte hypotézu: za akej podmienky možno ľubovoľný vektor $\vec{w}$ v rovine vyjadriť v tvare

$$\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}?$$

Čo sme experimentom zistili?

Experiment ukazuje, že rozhodujúca je vzájomná poloha vektorov $\vec{u}$ a $\vec{v}$.

Ak vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ nie sú kolineárne, potom možno vhodnou voľbou reálnych čísel α a β vyjadriť ľubovoľný vektor $\vec{w}$ v rovine v tvare

$$\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}.$$

Ak sú však vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ kolineárne, všetky vektory tvaru

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$$

zostávajú kolineárne s nimi. Ľubovoľný vektor roviny preto týmto spôsobom vytvoriť nemožno.

Vektory vytvorené uvedeným spôsobom budeme teraz matematicky pomenúvať a preskúmame, čo odlišuje uvedené dve situácie.

Definícia 2: Lineárna kombinácia vektorov

Nech sú dané vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$. Každý vektor tvaru

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

nazývame **lineárnou kombináciou** vektorov $\vec{u}$ a $\vec{v}$.

Experiment ukázal, že pri dvojici kolineárnych vektorov jeden vektor neprináša nový smer. Túto geometrickú vlastnosť možno vyjadriť aj algebraicky.

Definícia 3: Lineárna závislosť a nezávislosť vektorov

Vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ nazývame **lineárne závislé**, ak existujú reálne čísla α a β, z ktorých aspoň jedno je nenulové, také, že

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}.$$

Ak táto rovnosť platí iba pre

$$\alpha = \beta = 0,$$

vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ nazývame **lineárne nezávislé**.

Pre dva nenulové vektory v rovine teda platí:

$$\boxed{\vec{u}, \vec{v} \text{ sú lineárne nezávislé} \iff \vec{u}, \vec{v} \text{ nie sú kolineárne.}}$$

Dva lineárne nezávislé vektory umožňujú vyjadriť každý vektor roviny ako ich lineárnu kombináciu.

Báza a súradnice vektora

Dva lineárne nezávislé vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ tvoria **bázu roviny**. Každý vektor $\vec{w}$ v rovine možno potom jednoznačne vyjadriť v tvare

$$\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}.$$

Čísla α a β sú súradnicami vektora $\vec{w}$ vzhľadom na bázu $(\vec{u}, \vec{v})$.

Podrobnejšie zavedenie pojmu bázy a jeho vlastností patrí do lineárnej algebry. Na tomto mieste sa sústredíme predovšetkým na geometrický význam súradníc vektora vzhľadom na zvolenú bázu.

Krátky riešený príklad: Súradnice vektora vzhľadom na bázu

Uvažujte bázu roviny

$$\vec{u} = (1, 0), \qquad \vec{v} = (0, 1).$$

Zvoľte napríklad vektor

$$\vec{w} = (0, 3).$$

Určte čísla α a β tak, aby platilo

$$\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}.$$

V tomto prípade dostávame

$$\vec{w} = 0\vec{u} + 3\vec{v},$$

teda súradnice vektora $\vec{w}$ vzhľadom na bázu $(\vec{u}, \vec{v})$ sú

$$(0, 3).$$

Ak sú dané dva lineárne nezávislé vektory

$$\vec{u} = (u_1, u_2), \qquad \vec{v} = (v_1, v_2),$$

a ľubovoľný vektor

$$\vec{w} = (w_1, w_2),$$

hľadanie jeho súradníc vzhľadom na bázu $(\vec{u}, \vec{v})$ vedie k sústave

$$\begin{cases} \alpha u_1 + \beta v_1 = w_1, \\ \alpha u_2 + \beta v_2 = w_2. \end{cases}$$

Keďže vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ sú lineárne nezávislé, má táto sústava práve jedno riešenie. Podrobnejšie zdôvodnenie tejto skutočnosti patrí do lineárnej algebry.

Rovnaká myšlienka sa prirodzene prenáša aj do vyšších dimenzií; v tejto kapitole však zostaneme pri rovine.

7.4 Od vektorov k podpriestorom

V predchádzajúcej časti sme videli, že dva lineárne nezávislé vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ umožňujú vyjadriť ľubovoľný vektor roviny v tvare

$$\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Položme si teraz jednoduchšiu otázku:

Akú množinu vektorov dostaneme, ak máme k dispozícii iba jeden nenulový vektor $\vec{u}$ a všetky jeho násobky $t\vec{u}$, kde $t \in \mathbb{R}$?

Pre konkrétny vektor, napríklad

$$\vec{u} = (2, 1),$$

dostávame vektory

$$\ldots, -2\vec{u}, -\vec{u}, \vec{0}, \vec{u}, 2\vec{u}, \ldots$$

a pri všetkých reálnych hodnotách parametra t množinu

$$U = \{\, t\vec{u};\ t \in \mathbb{R} \,\}.$$

Všetky tieto vektory sú kolineárne s vektorom $\vec{u}$. Ich koncové body pri spoločnom umiestnení do počiatku preto vytvárajú priamku prechádzajúcu počiatkom súradnicovej sústavy.

Jednorozmerný lineárny podpriestor

Množina všetkých násobkov nenulového vektora $\vec{u}$,

$$U = \{\, t\vec{u};\ t \in \mathbb{R} \,\},$$

je jednorozmerný lineárny podpriestor vektorového priestoru $\mathbb{R}^2$.

Geometricky tento podpriestor predstavuje priamku prechádzajúcu počiatkom súradnicovej sústavy.

Ako však opíšeme priamku, ktorá počiatkom neprechádza? Na zodpovedanie tejto otázky potrebujeme najskôr pripomenúť, ako pomocou súradníc opisujeme polohu bodu v rovine.

7.4.1 Súradnice bodu

Základným nástrojom analytickej geometrie je súradnicová sústava, ktorá umožňuje geometrickým objektom priradiť číselné údaje a geometrické vzťahy vyjadrovať algebraicky.

V rovine zvolíme bod O, ktorý nazývame **počiatkom súradnicovej sústavy**, a bázu tvorenú dvoma lineárne nezávislými vektormi $\vec{e}_1, \vec{e}_2$. Každému bodu A roviny potom prislúcha polohový vektor

$$\overrightarrow{OA} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2.$$

Čísla a_1, a_2 nazývame **súradnicami bodu** A vzhľadom na zvolenú súradnicovú sústavu a zapisujeme

$$A = [a_1, a_2].$$

Ak je báza $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ ortonormálna, dostávame **karteziánsku súradnicovú sústavu**. Priamky prechádzajúce bodom O v smeroch vektorov $\vec{e}_1$ a $\vec{e}_2$ tvoria súradnicové osi. S touto súradnicovou sústavou budeme v ďalšom texte prevažne pracovať.

Poznámka: Poznámka

Pojem súradnicovej sústavy možno zaviesť všeobecnejšie v afinnom priestore. V ďalšom texte budeme využívať predovšetkým jeho geometrický význam v rovine a v priestore. Podrobnejší výklad afinných priestorov a súradnicových sústav možno nájsť napr. v [HAN, VOS, 2025].

Ak

$$A = [a_1, a_2], \qquad B = [b_1, b_2],$$

potom súradnice vektora $\overrightarrow{AB}$ získame ako rozdiel súradníc jeho koncového a začiatočného bodu:

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1,\ b_2 - a_2).$$

Môžeme sa teraz vrátiť k otázke, ako opísať priamku, ktorá neprechádza počiatkom súradnicovej sústavy.

Zvoľme v rovine bod A a nenulový vektor $\vec{u}$. Bod A určuje polohu priamky a vektor $\vec{u}$ jej smer.

Úloha/experiment: Ktoré body patria na priamku?

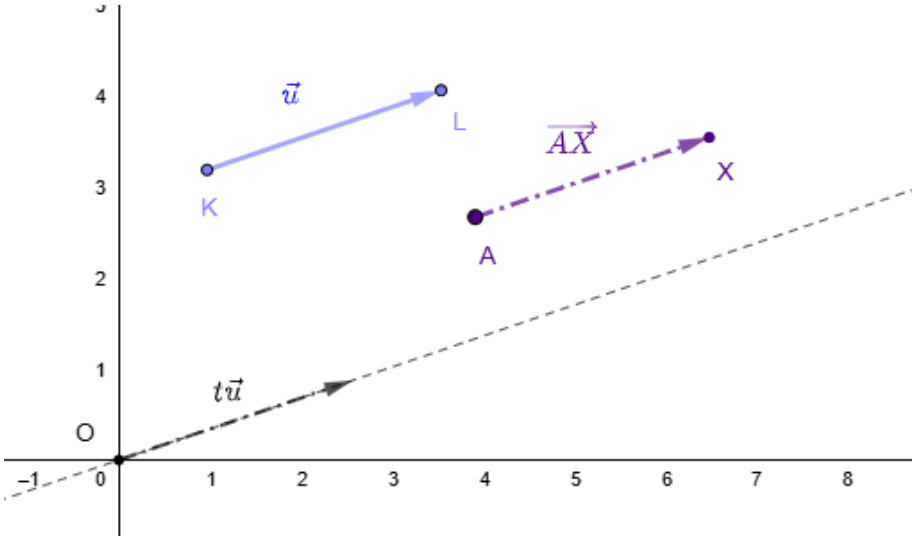
V applete z obrázka 7.6 je daný bod A, nenulový vektor $\vec{u}$ a bod X, ktorého poloha sa mení pomocou parametra t.

1. Meňte hodnotu parametra t a sledujte pohyb a stopu bodu X. Akú množinu bodov stopa naznačuje?
2. Preskúmajte polohu bodu X pre niekoľko vybraných hodnôt parametra, napríklad

$$t = 0, \qquad t = 1, \qquad t = -1, \qquad t = 2.$$

   Aký význam majú tieto hodnoty vzhľadom na bod A a vektor $\vec{u}$?
3. Ako možno vektor $\overrightarrow{AX}$ vyjadriť pomocou vektora $\vec{u}$ a parametra t?
4. V algebraickom okne aktivujte geometrické miesto bodu (GMB). Porovnajte ho so stopou, ktorú vytvoril bod X.
5. Sformulujte hypotézu: akú množinu bodov opisuje bod X, ak parameter t nadobúda všetky reálne hodnoty?

Tlačidlom *Reset* môžete priebežne vymazať stopu bodu X a experiment zopakovať.



Obr. 7.6: Koncové body vektora AX
Dynamický GeoGebra applet si aktivujete Tu.

7.4.2 Analytické vyjadrenie priamky

Experiment *Ktoré body patria na priamku*? naznačuje, že pri zmene parametra t sa bod X pohybuje po priamke prechádzajúcej bodom A v smere vektora $\vec{u}$.

Rozhodujúci je pritom vzťah medzi vektormi $\overrightarrow{AX}$ a $\vec{u}$. Pre každý bod X tejto priamky existuje reálne číslo t také, že

$$\boxed{\overrightarrow{AX} = t\vec{u}.}$$

Naopak, každá hodnota $t \in \mathbb{R}$ určuje týmto vzťahom jeden bod X na tejto priamke.

Vzťah

$$\overrightarrow{AX} = t\vec{u} \tag{7.1}$$

znamená, že bod X získame z bodu A posunutím o vektor $t\vec{u}$. Môžeme ho preto zapísať v tvare

$$\boxed{X = A + t\vec{u}, \qquad t \in \mathbb{R}.} \tag{7.2}$$

Zápis (7.2) nazývame **vektorovým parametrickým vyjadrením priamky**. Bod A je bodom priamky, nenulový vektor $\vec{u}$ je jej smerovým vektorom a reálne číslo t je parameter.

Ak

$$A = [a_1, a_2], \qquad \vec{u} = (u_1, u_2), \qquad X = [x, y],$$

potom z vektorového parametrického vyjadrenia

$$X = A + t\vec{u}$$

dostávame

$$\boxed{\begin{aligned} x &= a_1 + tu_1, \\ y &= a_2 + tu_2, \end{aligned} \qquad t \in \mathbb{R}.} \tag{7.3}$$

Rovnice (7.3) nazývame **parametrickými rovnicami priamky v rovine**.

Rovina v priestore

Ak by sme experiment realizovali v trojrozmernom euklidovskom priestore E_3 a bod $A = [a_1, a_2, a_3] \in E_3$ by sme posúvali v dvoch smeroch o nezávislé vektory $r\vec{u}$, $s\vec{v}$, tak vznikne rovina v priestore.

Nech $X = [x, y, z]$ je ľubovoľný bod z priestoru E_3 a nech sú dané vektory $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Potom rovnosť

$$\boxed{X = A + r\vec{u} + s\vec{v}, \qquad r, s \in \mathbb{R}.} \tag{7.4}$$

je vektorovým parametrickým vyjarením roviny v priestore. **Parametrické rovnice roviny v priestore** E_3 sú

$$\boxed{\begin{aligned} x &= a_1 + ru_1 + sv_1, \\ y &= a_2 + ru_2 + sv_2, \qquad r, s \in \mathbb{R}. \\ z &= a_3 + ru_3 + sv_3, \end{aligned}} \tag{7.5}$$

Pre väčšie dimenzie odporúčame prácu [HAN, VOS, 2025].

Úloha: Priamky určené stranami trojuholníka

V karteziánskej súradnicovej sústave sú dané vrcholy trojuholníka

$$A = [1, 1], \qquad B = [5, 2], \qquad C = [2, 4].$$

1. Určte súradnice smerových vektorov $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ a $\overrightarrow{CA}$.
2. Napíšte vektorové parametrické vyjadrenia priamok, na ktorých ležia strany AB, BC a CA.
3. Zapíšte parametrické rovnice týchto priamok v súradnicovom tvare.
4. Overte pomocou parametrických rovníc, že jednotlivé vrcholy trojuholníka patria príslušným priamkam.

[**Riešenie – GeoGebra**]

Od vektorového zápisu k parametrickým rovniciam

Vektorové parametrické vyjadrenie priamky

$$X = A + t\vec{u}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

nie je iba skráteným zápisom parametrických rovníc. Prirodzene vychádza z geometrickej vlastnosti priamky: ak bod X leží na priamke prechádzajúcej bodom A so smerovým vektorom $\vec{u}$, potom vektory $\overrightarrow{AX}$ a $\vec{u}$ sú kolineárne. Preto existuje reálne číslo t také, že

$$\overrightarrow{AX} = t\vec{u}.$$

Práve tu sa ukazuje význam predchádzajúcej práce s vektormi. Geometrický vzťah medzi bodmi priamky možno najskôr jednoducho vyjadriť pomocou vektorov a až potom ho previesť do súradnicového tvaru.

Nech

$$A = [a_1, a_2], \qquad X = [x, y], \qquad \vec{u} = (u_1, u_2).$$

Zo vzťahu

$$\overrightarrow{AX} = t\vec{u}$$

dostávame

$$(x - a_1,\ y - a_2) = (tu_1,\ tu_2).$$

Dva vektory sú si rovné práve vtedy, keď sa rovnajú ich zodpovedajúce súradnice. Preto

$$x - a_1 = tu_1, \qquad y - a_2 = tu_2,$$

a po úprave dostávame

$$\boxed{\begin{aligned} x &= a_1 + tu_1, \\ y &= a_2 + tu_2, \end{aligned} \qquad t \in \mathbb{R}.}$$

Parametrické rovnice priamky sú teda súradnicovým vyjadrením toho istého geometrického vzťahu, ktorý sme zapísali pomocou vektorov.

Od parametrických rovníc k všeobecnej rovnici priamky

Parametrické rovnice

$$x = a_1 + tu_1, \qquad y = a_2 + tu_2, \qquad t \in \mathbb{R},$$

opisujú body priamky pomocou parametra t. Ten však môžeme z rovníc odstrániť a vzťah medzi súradnicami x a y vyjadriť bez parametra.

Z rovníc

$$x - a_1 = tu_1, \qquad y - a_2 = tu_2$$

dostávame po vylúčení parametra t

$$u_2(x - a_1) - u_1(y - a_2) = 0.$$

Po roznásobení a usporiadaní členov má táto rovnica tvar

$$\boxed{ax + by + c = 0,}$$

kde $a, b, c \in \mathbb{R}$ a aspoň jedno z čísel a, b je nenulové. Tento zápis nazývame **všeobecnou rovnicou priamky v rovine**.

Všeobecná rovnica priamky ukazuje ešte jednu dôležitú súvislosť. Bod v rovine opisujeme dvoma súradnicami x a y, pričom v parametrických rovniciach (7.3) je jeho poloha na priamke určená jediným parametrom t. Medzi súradnicami x a y preto existuje jedna nezávislá lineárna podmienka

$$ax + by + c = 0.$$

Jednu zo súradníc teda už nemôžeme voliť ľubovoľne. Zostáva jeden stupeň voľnosti, a preto množinu riešení tvorí jednorozmerný útvar – priamka.

Podobne bod v priestore opisujeme troma súradnicami. Jedna nezávislá lineárna rovnica medzi nimi ponecháva dva stupne voľnosti, a preto v priestore opisuje rovinu. Všeobecne jedna netriviálna lineárna rovnica v E_n opisuje útvar dimenzie $n-1$, ktorý nazývame **afinnou nadrovinou**.

Poznámka: Pohľad z lineárnej algebry

Predchádzajúcu úvahu o stupňoch voľnosti možno presnejšie vyjadriť pomocou pojmov lineárnej algebry.

Z lineárnej algebry pripomeňme, že ak konzistentná sústava lineárnych rovníc v n neznámych má hodnosť r, potom množina jej riešení má $n-r$ voľných parametrov. Jej dimenzia je teda

$$\boxed{\dim = n - r.}$$

Pre situácie, s ktorými budeme ďalej pracovať, dostávame

priestor	n	r	dim
E_2	2	1	1 (priamka)
E_3	3	1	2 (rovina)
E_3	3	2	1 (priamka)

Jedna netriviálna lineárna rovnica

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + b = 0$$

má hodnosť 1, a preto jej množina riešení má dimenziu $n-1$. Geometricky teda opisuje afinnú nadrovinu v E_n.

V E_2 je takouto nadrovinou priamka, zatiaľ čo v E_3 je ňou rovina. Priamka v E_3 má dimenziu 1, preto ju možno opísať napríklad konzistentnou sústavou dvoch nezávislých lineárnych rovníc, teda ako prienik dvoch rovín.

Podrobnejšie zdôvodnenie týchto skutočností patrí do lineárnej algebry.

7.4.3 Polohové vlastnosti

Doteraz sme sa zaoberali tým, ako možno priamku opísať pomocou vektorov, parametrických rovníc alebo všeobecnej rovnice. Analytické vyjadrenie však umožňuje skúmať aj vzájomnú polohu geometrických útvarov.

Začnime dvoma priamkami v rovine. Z geometrického hľadiska je prirodzené položiť si otázku:

Ako možno z rovníc dvoch priamok rozhodnúť, či majú spoločný bod?

Nech sú priamky p a q dané všeobecnými rovnicami

$$p: \quad a_1x + b_1y + c_1 = 0,$$

$$q: \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

Ak bod $X = [x, y]$ leží na oboch priamkach, jeho súradnice musia súčasne spĺňať obe rovnice. Hľadanie spoločných bodov priamok p a q sa tak mení na riešenie sústavy

$$\boxed{\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 &= 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 &= 0. \end{aligned}}$$

Geometrická otázka o vzájomnej polohe dvoch priamok sa teda preložila do algebraickej otázky o riešiteľnosti sústavy lineárnych rovníc.

Čo môže počet riešení tejto sústavy vypovedať o vzájomnej polohe priamok p a q?

Odpoveď závisí od počtu riešení sústavy. Každé jej riešenie $[x, y]$ predstavuje bod, ktorý leží súčasne na oboch priamkach. Preto môžu nastať tri prípady:

$$\begin{aligned} \text{jedno riešenie} &\iff \text{jeden spoločný bod}, \\ \text{žiadne riešenie} &\iff \text{žiadny spoločný bod}, \\ \text{nekonečne veľa riešení} &\iff \text{všetky body priamok sú spoločné}. \end{aligned}$$

Geometricky teda dostávame tri možné vzájomné polohy dvoch priamok v rovine:

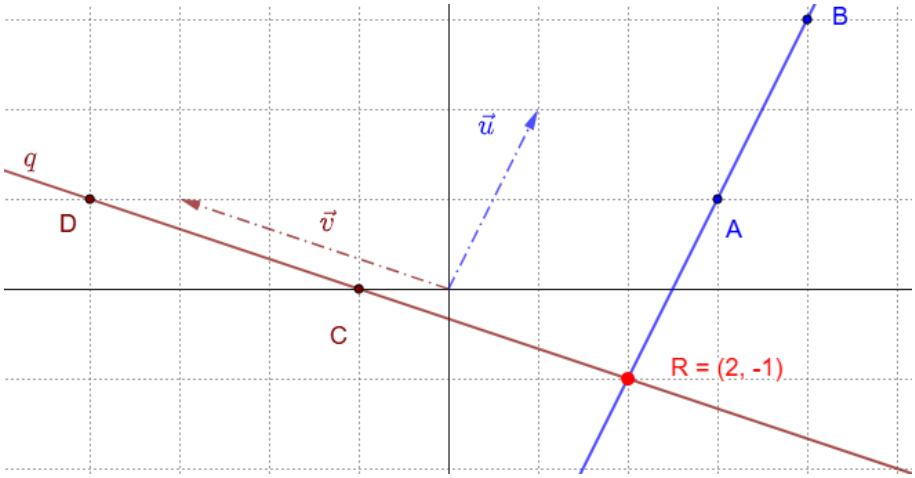
$$\boxed{\begin{aligned} \text{jedno riešenie} &\iff p \text{ a } q \text{ sa pretínajú}, \\ \text{žiadne riešenie} &\iff p \text{ a } q \text{ sú rovnobežné}, \\ \text{nekonečne veľa riešení} &\iff p = q. \end{aligned}}$$

Vzájomná poloha priamok sa tak dá skúmať nielen geometricky, ale aj analyticky: geometrický problém sme previedli na otázku o počte riešení sústavy lineárnych rovníc.

Experiment: Vzájomná poloha dvoch priamok

V GeoGebra applete sú zobrazené dve priamky a ich analytické vyjadrenia. Pohybujte bodmi alebo priamkami a sledujte, ako sa mení ich vzájomná poloha.

1. Nastavte priamky tak, aby mali práve jeden spoločný bod. Určte jeho súradnice a overte, či spĺňajú rovnice oboch priamok. Čo z toho vyplýva pre riešenie príslušnej sústavy rovníc?
2. Pokúste sa zmeniť polohu priamok tak, aby spoločný bod neexistoval. Čo sa v tomto prípade stane so sústavou ich rovníc?
3. Nájdite polohu, pri ktorej obe priamky splývajú. Koľko spoločných bodov majú teraz? Čo to znamená pre počet riešení príslušnej sústavy rovníc?
4. Sformulujte všeobecný záver o súvislosti medzi počtom spoločných bodov dvoch priamok a počtom riešení sústavy ich rovníc.



Obr. 7.7: Vzájomná poloha priamok
Interaktívny GeoGebra applet si aktivujete Tu.

Polohové vlastnosti v priestore

Rovnaký princíp možno použiť aj pri skúmaní vzájomnej polohy geometrických útvarov v priestore E_3. Aj tu môžeme vychádzať z geometrickej predstavy a následne ju vyjadriť algebraicky pomocou rovníc príslušných útvarov.

Spoločné body dvoch útvarov musia spĺňať rovnice oboch útvarov. Otázka o ich vzájomnej polohe sa preto opäť mení na otázku o riešiteľnosti príslušnej sústavy rovníc. Geometrický význam jej riešení však závisí od toho, aké útvary skúmame.

Základné možnosti vzájomnej polohy priamok a rovín v E_2 a E_3 možno zhrnúť v nasledujúcej tabuľke:

útvary	možné vzájomné polohy
dve priamky v E_2	rôznobežné, rovnobežné, totožné
dve priamky v E_3	rôznobežné, rovnobežné, mimobežné, totožné
priamka a rovina v E_3	pretínajú sa v bode, sú rovnobežné, priamka leží v rovine
dve roviny v E_3	pretínajú sa v priamke, sú rovnobežné, totožné

Pri analytickom riešení teda nestačí iba vypočítať riešenie sústavy. Dôležité je interpretovať množinu jej riešení geometricky – ako bod, priamku, celý útvar alebo prázdnu množinu.

7.4.4 Metrické úlohy analytickej geometrie

V predchádzajúcej časti sme skúmali najmä vzájomnú polohu geometrických útvarov. Rozhodovali sme napríklad, či sa priamky pretínajú, sú rovnobežné alebo totožné. Takéto vlastnosti nezávisia od merania vzdialeností ani uhlov.

Metrické úlohy prinášajú ďalší typ otázok. Pýtame sa napríklad, aká je vzdialenosť dvoch bodov, aký uhol zvierajú dva smery alebo či sú dva geometrické útvary na seba kolmé.

Skalárny súčin, uhol a vzdialenosť budeme interpretovať geometricky a ich algebraické vyjadrenia využijeme pri riešení vybraných úloh.

Skalárny súčin a uhol vektorov

Doteraz sme pomocou vektorov opisovali najmä smer a polohu geometrických útvarov. V metrických úlohách však potrebujeme porovnávať aj smery dvoch vektorov. Prirodzene vzniká otázka:

Ako možno zo súradníc dvoch vektorov určiť uhol, ktorý tieto vektory zvierajú?

Odpoveď poskytuje skalárny súčin, ktorý vytvára spojenie medzi algebraickým vyjadrením vektorov a ich metrickými vlastnosťami.

Nech $\vec{u}$ a $\vec{v}$ sú dva nenulové vektory a nech $\varphi \in \langle 0, \pi \rangle$ je uhol, ktorý zvierajú. Ich **skalárny súčin** definujeme vzťahom

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}| \cos \varphi.}$$

Ak pracujeme v ortonormálnej báze a

$$\vec{u} = (u_1, u_2), \qquad \vec{v} = (v_1, v_2),$$

potom možno skalárny súčin vypočítať priamo zo súradníc:

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2.}$$

Práve ortonormalita zvolenej bázy spôsobuje, že súradnicové vyjadrenie skalárneho súčinu má tento jednoduchý tvar.

Poznámka: Všeobecnejší pohľad na skalárny súčin

Skalárny súčin možno zaviesť aj všeobecnejšie, bez väzby na konkrétnu ortonormálnu bázu. Je to zobrazenie, ktoré každým dvom vektorom $\vec{u}, \vec{v}$ priraďuje reálne číslo $\vec{u} \cdot \vec{v}$ a spĺňa nasledujúce vlastnosti:

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= \vec{v} \cdot \vec{u}, \\ (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} &= \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}, \\ (r\vec{u}) \cdot \vec{v} &= r(\vec{u} \cdot \vec{v}), \\ \vec{u} \cdot \vec{u} &> 0 \qquad \text{pre každý } \vec{u} \neq \vec{0}. \end{aligned}$$

Prvé tri vlastnosti vyjadrujú, že skalárny súčin je symetrická bilineárna forma, posledná vlastnosť vyjadruje jej pozitívnu definitnosť.
V ortonormálnej báze nadobúda jeho súradnicové vyjadrenie jednoduchý tvar

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n.$$

V inej báze môže mať súradnicové vyjadrenie všeobecnejší tvar.

Vonkajší a vektorový súčin

Skalárny súčin nie je jedinou operáciou, pomocou ktorej možno z vektorov získavať geometrické informácie. Ďalšou možnosťou je **vonkajší súčin**, ktorý zapisujeme

$$\vec{u} \wedge \vec{v}.$$

Jeho geometrický význam súvisí s orientovaným obsahom rovnobežníka určeného vektormi $\vec{u}$ a $\vec{v}$. Vonkajší súčin možno zaviesť vo vektorových priestoroch ľubovoľnej dimenzie; jeho výsledkom však vo všeobecnosti nie je vektor pôvodného priestoru.

V trojrozmernom euklidovskom priestore E_3 možno s vonkajším súčinom úzko prepojiť **vektorový súčin**. Pre vektory $\vec{u}, \vec{v}$ je vektor

$$\vec{u} \times \vec{v}$$

kolmý na oba vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ a jeho veľkosť je

$$\boxed{|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}|\,|\vec{v}| \sin \varphi,}$$

kde φ je uhol vektorov $\vec{u}$ a $\vec{v}$.
Veľkosť vektorového súčinu teda vyjadruje obsah rovnobežníka určeného týmito vektormi.

Jeho orientácia je určená orientáciou priestoru.

Dĺžka vektora a vzdialenosť bodov

Jednou zo základných metrických vlastností euklidovského priestoru je vzdialenosť dvoch bodov. Ak sú v rovine dané body

$$A = [a_1, a_2], \qquad B = [b_1, b_2],$$

potom vektor

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$$

opisuje nielen smer od bodu A k bodu B, ale jeho dĺžka zodpovedá vzdialenosti týchto bodov.

Z Pytagorovej vety dostávame

$$\boxed{d(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}.}$$

Tento vzťah zároveň umožňuje zaviesť **dĺžku vektora**. Ak

$$\vec{u} = (u_1, u_2),$$

potom

$$\boxed{|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}.}$$

Preto platí

$$d(A, B) = |\overrightarrow{AB}|.$$

V trojrozmernom priestore sa tento vzťah prirodzene rozšíri. Pre vektor

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$$

platí

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2},$$

a pre body $A = [a_1, a_2, a_3]$ a $B = [b_1, b_2, b_3]$ teda

$$d(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}.$$

V ortonormálnej báze možno dĺžku vektora vyjadriť aj pomocou skalárneho súčinu:

$$\boxed{|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}.}$$

Vráťme sa teraz k trojuholníku s vrcholmi

$$A = [1, 1], \qquad B = [5, 2], \qquad C = [2, 4],$$

s ktorým sme pracovali pri analytickom vyjadrení priamok. Po zavedení základných metrických pojmov a nástrojov – vzdialenosti bodov, skalárneho a vektorového súčinu – môžeme naše skúmanie tohto trojuholníka rozšíriť o ďalšie otázky.

1. Určte dĺžky jeho strán.
2. Určte veľkosť uhla pri vrchole A.
3. Nájdite rovnicu priamky, na ktorej leží výška z vrcholu C.
4. Určte obsah trojuholníka.

Pri riešení jednotlivých úloh zdôvodnite, ktoré vlastnosti vektorov a ktoré vektorové operácie ste použili.

Na záver tejto sekcie uvedieme problémovú úlohu, pri ktorej je vhodné spojiť matematické uvažovanie s dynamickým experimentovaním v GeoGebre a s využitím AI ako partnera pri hľadaní riešenia.

Úloha: Priamka a obsah trojuholníka

Určte analytické vyjadrenie priamky, na ktorej leží jedna strana trojuholníka a ktorá prechádza bodom

$$M = [3, 4],$$

ak ďalšie dve strany ležia na súradnicových osiach x, y a obsah trojuholníka je

$$S_\Delta = 25.$$

Pri riešení využite dynamický GeoGebra applet 7.8. Pohybujte vrcholmi trojuholníka ležiacimi na súradnicových osiach a sledujte, ako sa mení jeho obsah a poloha priamky prechádzajúcej týmito vrcholmi.

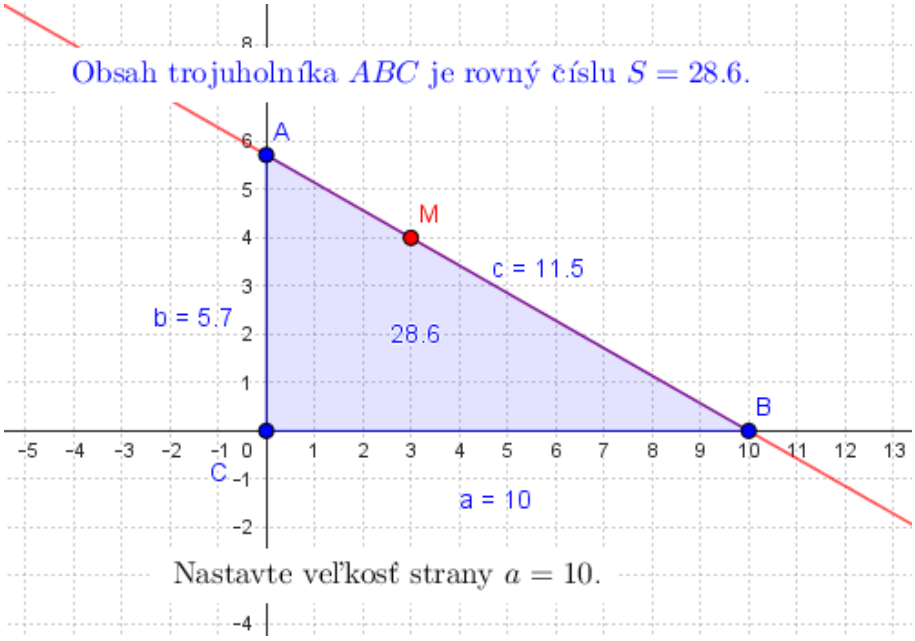
Skúmajte najmä tieto otázky:

1. Nájdite experimentovaním polohy vrcholov, pri ktorých má trojuholník obsah 25 a jeho tretia strana prechádza bodom $M = [3, 4]$. Existuje iba jedna taká poloha?
2. Označte súradnice vrcholov ležiacich na súradnicových osiach vhodnými premennými. Aký vzťah medzi nimi vyplýva z podmienky, že obsah trojuholníka je 25?

3. Ako možno algebraicky vyjadriť podmienku, že priamka určená týmito vrcholmi prechádza bodom $M = [3, 4]$?

4. Pokúste sa obe podmienky spojiť tak, aby ste získali rovnicu iba pre jednu neznámu súradnicu vrcholu.

5. Porovnajte riešenia získanej rovnice s polohami, ktoré ste objavili experimentovaním v GeoGebre. Čo z nich vyplýva pre počet hľadaných priamok?



Obr. 7.8: Trojuholník - pevný bod na strane
Applet si aktivujete na https://www.geogebra.org/m/dxgkurvk

Spolupráca s AI. Namiesto požiadavky na priame vyriešenie úlohy môžete AI využiť ako partnera pri hľadaní riešenia. Dialóg môžete začať napríklad nasledujúcim promptom:

> V GeoGebra applete skúmam trojuholník, ktorého dve strany ležia na súradnicových osiach, tretia strana prechádza bodom $M = [3, 4]$ a obsah trojuholníka je 25.
>
> Neuvádzaj mi hotové riešenie. Pomôž mi postupne previesť moje geometrické pozorovania na algebraický model. Klaď mi vždy iba jednu otázku a po každej otázke počkaj na moju odpoveď. Veď ma k tomu, aby som dokázal zostaviť rovnicu pre jednu zo súradníc pohyblivého vrcholu trojuholníka.
>
> Ak urobím chybu, neprezraď mi hneď správny postup ani výsledok, ale polož mi otázku, ktorá mi pomôže chybu odhaliť. Na záver odo mňa žiadaj, aby som získané riešenie porovnal s tým, čo som pozoroval v GeoGebre, a matematicky ho zdôvodnil.

V ďalšom priebehu dialógu môžete svoje odpovede a otázky postupne spresňovať a porovnávať návrhy AI s tým, čo pozorujete v GeoGebra applete. AI pritom neslúži ako zdroj hotového riešenia, ale ako partner pri formulovaní hypotéz, kontrole argumentov a hľadaní ďalšieho kroku. Výsledné analytické vyjadrenie priamky napokon zdôvodnite matematicky.

8 Záver

text

Použité zdroje

[BAL, 2005] Ball, D. L., Hill, H. C, & Bass, H. (2005, Fall). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? American Educator, 29, 14 – 22.

Dostupné online: https://deepblue.lib.umich.edu/bitstream/handle/2027.42/65072/Ball_F05.pdf?sequence=4&isAllowed=y.

Upravená SK verzia https://lms.umb.sk/pluginfile.php/159047/mod_book/chapter/2771/Ball_a_kol___Vediet__matematiku_pre_vyu%C4%8Dovanie.pdf.

[BEC, 2005] Bečvár, J.: Matematika ve starém Egyptě, str 55-56.

Dostupné online: https://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/401853/DejinyMat_23-2003-1_6.pdf

[BEC, 2003] Bečvár J., Bečvářová M., Vymazalová H.(ed.): Matematika ve starověku Egypt a Mezopotámie. Prometheus, Praha 2003, s. 69. Dostupné Tu.

[BLU, 1991] Blum, W., Niss, M. Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects – State, trends and issues in mathematics instruction. *Educ Stud Math* 22, 37–68 (1991).

[ERN, 1978] Erndnijev, P. M.:Prepodavanije matematiky v škole. Moskva, Prosvedčenije 1978

[HAN, VOS, 2025] Hanzel, P., Voštinár, P. Afinná geometria v analytickom a didaktickom kontexte - Zobrazenia, vizualizácie, aplikácie. Belianum UMB, Banská Bystrica, 2025. ISBN 978-80-557-2250-4. DOI https://doi.org/10.24040/2025.9788055722504

Dostupné online: https://lms.umb.sk/pluginfile.php/471189/mod_resource/content/1/Afinn%C3%A9%20zobrazenia%20interakt%C3%ADvne%20_%20VirtualUMB.pdf

[HEJ, 1989] Hejný, M. a kol.: *Teória vyučovania matematiky 2*. Bratislava: SPN, 1989.

Dostupné online: https://lms.umb.sk/pluginfile.php/159047/mod_book/chapter/2771/Hejny-Teoria-vyucovania-matematiky-2.pdftu.

[HEJ, 2004] Hejný, M. a kol.: *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*. Praha, 2004. ISBN 80-7290-189-3.

Dostupné online: http://mdisk.pedf.cuni.cz/SUMA/MaterialyKeStazeni/PublikaceKnihy/25KapitolZDM.pdftu.

[HEJ, 1995] Hejný, M. (1995). Mozgováňi se slovními úlohami. *Pedagogika*, XLV, 386–399.

[HEJ, 2003] Hejný, M. (2003). Anatómiá slovnej úlohy o veku. *Disputationes scientificae Universitatis Catholicae in Ružomberok*, 3(3), 21–32.

[HOF, 2019] Hofmanová, A. (2019). *Matematika – slovné úlohy a všetko ostatné*. Vydavateľstvo Hofmanová.

[HOL, 2019] Holmes, W., Bialik, M., & Fadel, C. (2019). *Artificial Intelligence in Education*. Boston: Center for Curriculum Redesign.

Dostupné online: https://www.scribd.com/document/657468538/Holmes-et-al-2023-Artificial-intelligence-in-education

[KOB, 2014] Kobza, V. (2014). Modelové riešenie problémovej úlohy.

[KOM, 1948] Komenský, J. A.: *Veľká didaktika*. Brno: Komenium, 1948. Dostupné online: https://monoskop.org/images/3/3e/Komensky_Jan_Amos_Didaktika_velka_3_vydani_1948.pdftu.

[JOY, 1994] Joyce, D. E.: *Euclid's Elements*. Clark University, 1994.
Dostupné online: http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html.

[KUR, 2016] Kuřina, F.: Matematika jako pedagogický problém. Gaudeamus. Univerzita Hradec Králové 2016.

[LAR, 1983] Larson, L. C.: *Problem-Solving Through Problems*. Springer-Verlag, New York, 1983. ISBN 978-0387961712.
Dostupné online:
https://math.la.asu.edu/~ifulman/spring13/mat194/problem-solving.pdf.

[LUC, 2016] Luckin, R. et al. (2016). *Intelligence Unleashed: An argument for AI in Education*. Pearson. Dostupné online: https://www.pearson.com/content/dam/one-dot-com/one-dot-com/global/Files/about-pearson/innovation/open-ideas/Intelligence-Unleashed-Publication.pdf

[POL, 2010] Pavlovičová, G., Švecová, V., Záhorská, J. (2010). *Metódy riešenia matematických úloh pre štúdium učiteľstva pre primárne vzdelávanie*. Nitra: UKF.

[POL, 1945] Pólya, G.: *How to Solve It.* Princeton University Press, Princeton, 1945.

[POD, 2020] Podmanický, M.: Zlomky a GeoGebra, Práca DPŠ, FPV UMB 2020.

Dostupné online: https://lms.umb.sk/pluginfile.php/159047/mod_book/chapter/5698/Podmanicky_Zlomky_ZaverPracaDPS.docxTu.

[REN, 2013] Rendl, M., Vondrová, N. a kol.: Kritická místa atematiky na základní škole očima učitelu. UK Praha 2013.

[SCH, 1985] Schoenfeld, A. H.: *Mathematical Problem Solving.* Academic Press, Orlando, 1985. ISBN 978-0126288704.

[SED, 1989] Šedivý, O. (1989). *Didaktika matematiky.* Bratislava: SPN.

[SED, 2013] Šedivý, O. a kol. (2013). *Vybrané kapitoly z didaktiky matematiky.* FPV UKF Nitra.

[SER, 1907] Servít, F.: *Eukleidovy Základy (Elementa).* Jednota českých matematiků, Praha, 1907.
Dostupné online: https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~halas/Eukleides.pdf.

[STU, 1877] F. J. Studnička, *Algebra pro vyšší třídy středních škol.* Praha: Jednota českých matematiků, 1877.

Dostupné online: Česká digitální matematická knihovna (DML-CZ).

[TRK, 2007] Trkovská, D. *Erlangenský program.* In: BEČVÁŘOVÁ, Martina; BEČVÁŘ, Jindřich (eds.). *Matematika v proměnách věků. V.* Praha: Matfyzpress, 2007, s. 66–82. ISBN 978-80-7378-017-3. Dostupné na: http://dml.cz/dmlcz/400887.

[UCE, 2000] [UCE, 2000] Učebnice matematiky