

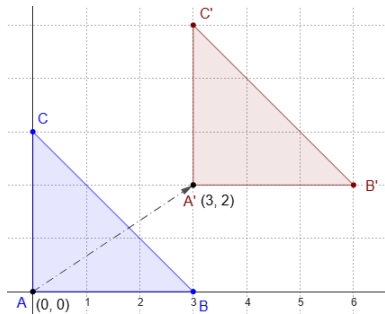
# Zhodné zobrazenia

Od posunutia k otáčaniu

**Pavol Hanzel**

11. februára 2026

Posunutie  $\tau_{\vec{u}}$  o vektor  $\vec{u} = (u_1, u_2)$  zobrazuje bod  $X[x_1, x_2]$  na bod  $X'[x_1 + u_1, x_2 + u_2]$ .



Obr.: Posunutie  $\tau_{\vec{u}}$  o vektor  $\vec{u} = (3, 2)$

Applet si aktivujete na stránke <https://www.geogebra.org/m/qw7bj5x2>.

Vyjadrenie pomocou matíc

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\sigma_y} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

Sčítovanie matíc môžeme nahradit' rozšírenou maticou typu  $3 \times 3$ .

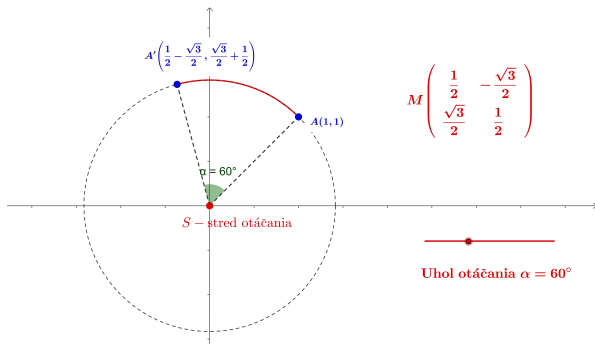
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & u_1 \\ 0 & 1 & u_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + u_1 \\ x_2 + u_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Matica posunutia** má vyjadrenie

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & u_1 \\ 0 & 1 & u_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Otáčanie  $\rho_{(S,\alpha)}$  so stredom  $S [0,0]$  zobrazuje bod  $A [x_1, x_2]$  do

$$A' [(x_1 \cdot \cos \alpha - x_2 \cdot \sin \alpha), (x_1 \cdot \sin \alpha + x_2 \cdot \cos \alpha)]$$



Applet si aktivujete na stránke <https://www.geogebra.org/m/s4ukgu7u>

Využitím súčtových vzorcov pre sin a cos dokážte toto tvrdenie.

## Tvrdenie

Maticový zápis otočenia  $\rho_{([0,0],\alpha)}$  okolo  $S[0,0]$  o uhol  $\alpha$  má tvar

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

## Úloha

Určite súradnice bodu, ktorý vznikne otočením bodu  $[3, 2]$  okolo počiatku s uhlom otáčania  $\alpha = -105^\circ$ . Využite applet z predchádzajúcej snímky.

