Vektorový priestor

Úloha 1.1.11

Určte pravdivostnú hodnotu výrokov v a) a b), prípadne doplňte výrok v c) tak, aby vznikol pravdivý výrok:

Nech $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ sú vektory.

a) Existuje také umiestnenie vektorov $\mathbf{a}, \mathbf{b}$, že vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}, -\mathbf{a}$ sú kolineárne.

b) Neexistuje také umiestnenie vektorov $\mathbf{a}, \mathbf{b}$, že vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}, -\mathbf{a}$ sú kolineárne.

c) Existuje také umiestnenie vektorov $\mathbf{a}, \mathbf{b}$, že vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}, -\mathbf{a}$ sú kolineárne, práve vtedy, keď...

Úloha 1.1.12

Kedy je množina vektorov $\{\mathbf{u}\}$ lineárne závislá?

Úloha 1.1.13

Daná je kocka $ABCDA'B'C'D'$. Sú vektory

a) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD'}, \overrightarrow{B'C'}$,

b) $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{D'B'}$,

c) $\overrightarrow{A'D}, \overrightarrow{AA'}$

lineárne závislé?

Úloha 1.1.14

Dokážte, že z každej množiny vektorov, do ktorej patrí aspoň jeden nenulový vektor, je možné vybrať lineárne nezávislú podmnožinu tak, že každý vektor z pôvodnej množiny vektorov je lineárnou kombináciou vybratých vektorov.

Úloha 1.1.15

Dokážte, že ľubovoľnú neprázdnu podmnožinu bázy vektorového priestoru V^n tvoria lineárne nezávislé vektory.

Úloha 1.1.16

Daný je kosodĺžnik $ABCD$. Označme $\overrightarrow{BC} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{DA} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{AB} = \mathbf{u}$, $\overrightarrow{DC} = \mathbf{v}$, $\overrightarrow{AD} = \mathbf{w}$.

a) Napíšte, či sú vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ lineárne závislé alebo nezávislé a svoje tvrdenie zdôvodnite.

b) Určte koľko vektorov a koľko viazaných vektorov je určených vrcholmi daného kosodĺžnika.

c) Určte $\mathbf{u} + \mathbf{w}$; $\mathbf{u} + \mathbf{a} - \mathbf{v}$; $\mathbf{u} - \mathbf{a}$; $\mathbf{u} - (-\mathbf{u})$.

Úloha 1.1.17

Daný je štvorec $ABCD$. Načrtnite vektory

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$,

b) $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD}$,

c) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$,

d) $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BC}$,

e) $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CA}$.

Úloha 1.1.18

Daný je rovnostranný trojuholník ABC s ťažiskom T. Označme $\overrightarrow{TA} = \mathbf{u}$, $\overrightarrow{TB} = \mathbf{v}$, $\overrightarrow{TC} = \mathbf{w}$. Určte $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}$.

Úlohy

Úloha 1.1.18

Daný je rovnostranný trojuholník ABC s ťažiskom T. Označme $\vec{TA} = \vec{u}$, $\vec{TB} = \vec{v}$, $\vec{TC} = \vec{w}$. Určte $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$.

Úloha 1.1.19

Sčítajte graficky sily $\vec{F_1} = 5\,\mathrm{N}$, $\vec{F_2} = 3\,\mathrm{N}$, ak pôsobia na teleso v tom istom bode a zvierajú uhol o veľkosti:

1. $120°$,
2. $90°$,
3. $30°$.

Úloha 1.1.20

Daný je pravidelný šesťuholník $ABCDEF$ so stredom S.

1. Napíšte vektor $\vec{BF}$ ako lineárnu kombináciu vektorov $\vec{AB}, \vec{BC}$.
2. Napíšte vektor $\vec{FD}$ ako lineárnu kombináciu vektorov $\vec{BC}, \vec{CD}$.
3. Napíšte vektor $\vec{EA}$ ako lineárnu kombináciu vektorov $\vec{SD}, \vec{SC}$.

Úloha 1.1.21

Daný je rovnostranný trojuholník KLM. Označme S_1, S_2, S_3 stredy strán KL, LM, KM v poradí. Uvažujme body K, S_1, L, S_2, S_3.

1. Koľko viazaných a koľko voľných vektorov je týmito bodmi určených?
2. Vyjadrite:
   - vektor $\vec{S_2S_1}$ ako lineárnu kombináciu vektorov $\vec{KL}, \vec{LS_2}$,
   - vektor $\vec{KL}$ ako lineárnu kombináciu vektorov $\vec{S_3S_2}, \vec{S_3L}$,
   - vektor $\vec{S_1L}$ ako lineárnu kombináciu vektorov $\vec{KS_3}, \vec{LS_2}$,
   - vektor $\vec{LK}$ ako lineárnu kombináciu vektorov $\vec{KS_2}, \vec{LS_3}$.

Úloha 1.1.22

Určte všetky hodnoty pre argument $\alpha \in (0; \pi)$, ktoré možno zvoliť, aby vektory $\vec{u} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$, $\vec{v} = (\sin\alpha, \cos\alpha)$ tvorili bázu vektorového priestoru V_2.

Úloha 1.1.23

Určte $x \in \mathbb{R}$, tak aby vektory $\vec{a} = (x, 0, 1)$, $\vec{b} = (0, x, 1)$, $\vec{c} = (0, 1, x)$ tvorili bázu vektorového priestoru V_3.

Úloha 1.1.24

Nájdite $x \in \mathbb{R}$, tak aby vektory $\vec{u} = (1, x, 0, 2)$, $\vec{v} = (1, 0, 2, 2)$, $\vec{w} = (1, 0, 3, x)$ boli:

1. lineárne závislé,
2. lineárne nezávislé.

Afinný priestor

Úloha 1.2.1

Zistite, či usporiadaná trojica (A, V, f) je afinným priestorom. Ak áno, určte aj bázu jeho zamerania a jeho dimenziu:

a) $A = \{[x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1| > |x_2|\}$,
$V = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2 \mid x_1 - 3x_2 = 0\}$,
$f: \quad A \times A \to V$,
$f: \quad f([x_1, x_2], [y_1, y_2]) = (y_1 - x_1, y_2 - x_2)$.

b) $A = \{[x_1, x_2, x_3, x_4] \in \mathbb{R}^4 \mid x_4 = 1\}$,
$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_4 = 0\}$,
$f: \quad A \times A \to V$,
$f: \quad f([x_1, x_2, x_3, 1], [y_1, y_2, y_3, 1]) = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, y_3 - x_3, 0)$.

c) $A = \{[x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 1\}$
$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_4 = 0\}$
$f: \quad A \times A \to V$,
$f\left([x_1, x_2, x_3], [y_1, y_2, y_3]\right) = (x_1 y_1, x_2 y_2, 1, x_3 - y_3)$

Úloha 1.2.2

Zistite, či usporiadaná trojica (A, V, f) je afinným priestorom. Ak áno, určte aj bázu jeho zamerania a jeho dimenziu:
$A = \{[x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 1\}$
$V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 0\}$
$f: \quad A \times A \to V$

a) $f([x_1, x_2, x_3], [y_1, y_2, y_3]) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 - y_3)$.

b) $f([x_1, x_2, x_3], [y_1, y_2, y_3]) = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3 - y_3)$.

Úloha 1.2.3

Nech A_3 je geometrický model afinného priestoru. Určte pravdivostnú hodnotu nasledujúcich dvoch výrokov: Dané sú body A, B, C, D v A_3. Nech $\vec{DA}, \vec{DB}, \vec{DC}$ tvoria bázu jeho zamerania V_3. Označme $\alpha = \triangle ABC$, potom:

a) vektory $\vec{AC}, \vec{BC}$ tvoria bázu vektorového priestoru ${V_2}^{\alpha}$, ktorý je zameraním afinnej roviny α,

b) vektory $\vec{AC}, \vec{BC}$ netvoria bázu vektorového priestoru ${V_2}^{\alpha}$, ktorý je zameraním afinnej roviny α.

Úloha 1.2.4.

Zistite, či $(R^3; R^4; f)$ je afinný priestor, ak

$$f : \left[x_1, x_2, x_3\right], \left[y_1, y_2, y_3\right] \mapsto \left[y_1 - x_1, y_2 - x_2, y_3 - x_3, 0\right]$$

Úloha 1.2.5.

Zistite, či usporiadaná trojica $(A; V; f)$ je afinným priestorom, ak

a) $A = \{[x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1| < 1, |x_2| < 1\}$
$V = \mathbb{R}^2$
$f : A \times A \to V$
$f : [x_1, y_2], [y_1, y_2] \mapsto \left[x_1 - y_1, x_2 - y_2\right]$

b) $A = \{[x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 > 0\}$
$V = \mathbb{R}^2$
$f : A \times A \to V$
$f : [x_1, y_2], [y_1, y_2] \mapsto \log \frac{x_2}{y_2}, x_1 - y_1 - \frac{1}{x_2} + \frac{1}{y_2}$

c) $A = \{[x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2 \frac{x_1}{a^2} - \frac{x_2}{b^2} = 1, x_1 < 0\}$, pre pevne zvolené $a, b \in \mathbb{R}^+$
$f : A \times A \to V$
$V = \mathbb{R}^2$
$f : \big[x_1, x_2\big], \big[y_1, y_2\big] \mapsto x_2 - y_2$

Úloha 1.2.6.

Zistite, či usporiadaná trojica $(R^2; R^2; f)$ je afinným priestorom, ak

$$f : R^2 \times R^2 \to R^2$$

$$f : [[x_1, y_2], [y_1, y_2]] \mapsto (x_1 - y_1, {x_2}^k - {y_2}^k)$$

,
kde k $\in \mathbb{Z}$.

Úloha 1.2.7.

Zistite, či usporiadaná trojica $(R^3; R^4; f)$ je afinným priestorom, ak

$$f : R^3 \times R^3 \to R^4$$

$$f : [\big[x_1, x_2, x_3\big], \big[y_1, y_2, y_3\big]] \mapsto (x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3 - y_3, x_2 - y_2).$$

Úloha 1.2.8.

Zistite, či usporiadaná trojica $(A; V; f)$ je afinným priestorom, ak

a) $A = \{[x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \mid= {x_1}^2\}$
$V = \mathbb{R}$
$f : A \times A \to V$
$f : [\big[x_1, x_2, x_3\big], \big[y_1, y_2, y_3\big]] \mapsto \big[x_2 - y_2\big]$

b) $A = \{[x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = {x_1}^2\}$
$V = \mathbb{R}$
$f : A \times A \to V$
$f : [\big[x_1, x_2, x_3\big], \big[y_1, y_2, y_3\big]] \mapsto \big[x_1 - y_1\big]$

c) $A = \{[x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 > 0\}$
$V = \mathbb{R}^2$
$f : A \times A \to V$
$f : [\big[x_1, x_2, x_3\big], \big[y_1, y_2, y_3\big]] \mapsto \log \frac{x_2}{y_2}, x_1 - y_1 - \frac{1}{x_2} + \frac{1}{y_2}$

Úloha 1.2.9.

Zistite, či usporiadaná trojica $(A; V; -)$ je afinným priestorom, ak áno, určte bázu jeho zamerania a jeho dimenziu.

a) $A = \{[x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1| > |x_2|\}$, $V = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2 \mid x_1 + 3x_2 - 1 = 0\}$

b) $A = \{[x_1, x_2] \in \mathbb{Z}^2 \mid x_1 - x_2 > 0\}$, $V = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2 \mid x_1 = 3x_2\}$

c) $A = \{[x_1, x_2] \in \mathbb{N}^2 \mid x_2 - x_1 > 0\}$, $V = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid x_1 - 5x_2 = 0\}$

Úloha 1.2.10.

Zistite, či usporiadaná trojica $(\mathbb{R}^2; \mathbb{Z}^2; -)$ je afinný priestor.

Úloha 1.2.11.

Zistite, či $(A; V; f)$ je afinný priestor, ak

$$A = \{[z, 1] \mid z \in \mathbb{C}\},$$
$$V = \{[z, 0] \mid z \in \mathbb{C}\},$$

binárna operácia f je odčítanie po zložkách, pričom na prvej zložke aplikujeme odčítanie komplexných čísel.

LINEÁRNA SÚRADNICOVÁ SÚSTAVA

Úloha 1.3.1.

Daný je afinný priestor $(A; V; f)$, kde

$$A = \{[x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = {x_1}^2\}, \quad V = \mathbb{R}$$

a zobrazenie f je definované ako

$$f\left([x_1, x_2], [y_1, y_2]\right) = x_1 - y_1.$$

Zistite, či zobrazenie je lineárna sústava súradníc, ak

a) $L([x_1, x_2]) = 1 + x_1$

b) $L([x_1, x_2]) = \sqrt{x_2}$

c)
$$L : A \to \mathbb{R}, \quad L([x_1, x_2]) := \begin{cases} \frac{x_2}{x_1} & \text{pre } x_1 \geq 0, \\ 0 & \text{pre } x_1 = 0 \end{cases}$$

Úloha 1.3.2.

Daný je afinný priestor $(A; V; f)$, kde

$$A = \{[x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x_1}{a^2} - \frac{x_2}{b^2} = 1, x_1 \geq 0\}, \quad V = \mathbb{R}$$

a zobrazenie f je definované ako

$$f\left([x_1, x_2], [y_1, y_2]\right) = x_2 - y_2.$$

Zistite, či zobrazenie je lineárna sústava súradníc, ak

a) $L([x_1, x_2]) = 5 + 2x_2$

b) $L([x_1, x_2]) = x_1$

c) $L([x_1, x_2]) = \sqrt{\frac{x_1}{a^2} - 1}$

d) $L([x_1, x_2]) = {x_2}^3 a^2 - {x_1}^2 x_2 b^2 - 1$

Úloha 1.3.3.

Daný je afinný priestor $A = (A; V; f)$, kde

$A = \{[x_1, x_2] \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid \dfrac{x_1}{a^2} - \dfrac{x_2}{9} = 1\}$, pričom a je pevne zvolené nenulové reálne číslo,

$V = \mathbb{R}$ a zobrazenie f je definované ako

$$f\left([x_1, x_2], [y_1, y_2]\right) = x_2 - y_2$$

Zistite, či zobrazenie je lineárna sústava súradníc, ak

$$L : A \to \mathbb{R}, \quad L\sqrt{\frac{{x_1}^2}{a^2} - 1}$$

Úloha 1.3.4.

Daný je afinný priestor $(A; V; f)$, kde

$$A = \mathbb{R}^2, \quad V = \mathbb{R}^2$$

a zobrazenie f je definované ako

$$f\left([x_1, x_2], [y_1, y_2]\right) = (x_1 - y_1, {x_2}^k - {y_2}^k),$$

kde k je prirodzené nepárne číslo. Zistite, či zobrazenie je lineárna sústava súradníc, ak

a) $L([x_1, x_2]) = [x_1 + {x_2}^2, x_1 - {x_2}^2]$

b) $L([x_1, x_2]) = [1 + x_1, 1 + x_1 + {x_2}^k]$

c) $L([x_1, x_2]) = [{x_1}^k, x_2]$

Úloha 1.3.5.

Daný je afinný priestor $A_2 = (A; V; f)$, kde

$$A = \{[x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 - 2x_3 = 5\},$$

$V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 - 2x_3 = 0\}$ a zobrazenie f je odčítanie usporiadaných trojíc reálnych čísel po zložkách. Ukážte, že zúženie zobrazenia L na A je lineárnou sústavou súradníc v A_2, ak

$$L : [x_1, x_2, x_3] \to [-x_1 + 2x_2, 2x_1 - 3x_2 - 1]$$

nájdite jej počiatok a súradnicové vektory.

Úloha 1.3.6.

Nech A_2 je geometrický model afinnej roviny (viď poznámku *, str. 10). V A_2 sú dané lineárne nezávislé body A, B, C a body D, E, F tak, že $BD \parallel DC$, $AE \parallel EC$, $AF \parallel EC$, $AF \parallel FB$. Nájdite súradnice bodov A, B, C v LSS určenej repérom $\{F; FE, FD\}$.

Afinné podpriestory

Úloha 1.4.1.

Dokážte, že $A' = \{(0, x, 0, 1) \mid x \in \mathbb{R}\}$ je afinný podpriestor priestoru $A_3 = (A, V, f)$, kde

$$A = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_4 = 1\}$$
$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_4 = 0\}$$

a f je odčítanie po zložkách.

Úloha 1.4.2.

Dokážte, že $A' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 1, 2x - y + 3z = 2\}$ je afinný podpriestor priestoru $A_3 = (\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3, f)$, kde f je odčítanie po zložkách. Určte jeho dimenziu.

Úloha 1.4.3.

Zistite, či $A' = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 = x_3 = 1\}$ je afinný podpriestor priestoru $A_3 = (\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3, f)$, kde f je odčítanie po zložkách. Ak áno, určte bázu jeho zamerania a dimenziu A'.

Úloha 1.4.4.

Daný je afinný priestor $A = (\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3, f)$, kde operácia f je odčítanie po zložkách. Zistite, či A je afinný podpriestor afinného priestoru A. Ak áno, určte bázu jeho zamerania a dimenziu A, kde

$$A = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = -1\}.$$

Úloha 1.4.5.

Zistite, či $A' = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 - x_2 + x_3 = 3\}$ je afinný podpriestor afinného priestoru $A_3 = (\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3, f)$, kde f je operácia odčítania po zložkách. Ak áno, určte bázu jeho zamerania a dimenziu A'.

Úloha 1.4.6.

Napíšte parametrické vyjadrenie roviny π, ktorá obsahuje body $A[1, -1, 2, -4]$, $B[3, 1, 2, 6]$ a vektor $u(-2, -1, 3, 1)$ patrí jej zameraniu V^π.

Úloha 1.4.7.

Zistite, či bod B leží na priamke $p = [A; \vec{u}]$, kde

$$A = [3, 3, -2], \quad B = [2, 1, -1], \quad \vec{u} = (1, 2, 3)$$

Poznámka. V ďalšom budeme často v zápise afinného (pod)priestoru namiesto (A, V, f) používať zápis $(A, V, -)$. V týchto prípadoch bude binárna operácia f definovaná nasledovne:

$$f(X, Y) = Y - X$$

kde $-$ je operácia odčítania po zložkách. Potom označenie $X + \vec{u} = Y$ znamená $\vec{u} = Y - X$.

Úloha 1.4.8.

a) Zapíšte bodovú zložku $\mathcal{A}$ aj zameranie V afinného podpriestoru $(\mathcal{A}, V, -)$ afinného priestoru $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3, -)$, ak

$$\mathcal{A} = \{P + \vec{u} \mid \vec{u} \in V\}, \quad P = [1, 3, 1], \quad V = \{(-2, 1, 0), (3, 1, 1)\}.$$

b) Overte, že $(\mathcal{A}, V, -)$ je afinným podpriestorom afinného priestoru $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3, -)$.

c) Zapíšte parametrické vyjadrenie tohto afinného podpriestoru.

d) Zistite, či body $A[3, 2, 1]$ a $B[-7, 0, 1]$ patria do $\mathcal{A}$.

Úloha 1.4.9.

a) Zistite, či $\mathcal{A} = \{[1 - b - c, a - b, -a - c] \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ je afinným podpriestorom afinného priestoru $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3, -)$.

b) Určte jeho dimenziu.

c) Napíšte jeho parametrické vyjadrenie.

Úloha 1.4.10.

Určte vzájomnú polohu priamok $p = [A; \vec{u}]$ a $q = [B; \vec{v}]$ v afinnom priestore $\mathcal{A}_3$:

a) $A = [1, 2, 3], \vec{u} = (1, -3, 2), B = [0, 5, 1], \vec{v} = (-2, 6, -4)$

b) $A = [1, -3, 4], \vec{u} = (2, 2, -1), B = [3, 0, -1], \vec{v} = (0, 1, 3)$

Riešenie: Pre určenie vzájomnej polohy priamok p a q postupujeme nasledovne:

1. Skontrolujeme lineárnu závislosť smerových vektorov $\vec{u}$ a $\vec{v}$. Ak sú lineárne závislé, priamky sú rovnobežné alebo splývajú. Ak nie sú, pokračujeme ďalej.

2. Skontrolujeme existenciu spoločného bodu, teda riešenie sústavy:

$$\vec{r}_p = \vec{A} + t\vec{u}, \quad \vec{r}_q = \vec{B} + s\vec{v}, \quad \vec{r}_p = \vec{r}_q.$$

Ak riešenie existuje, priamky sa pretínajú. Ak nie, priamky sú mimobežné.

Riešenie pre a)

1. Kontrola lineárnej závislosti $\vec{u}$ a $\vec{v}$: Hľadáme skalár k, pre ktorý platí:

$$\vec{u} = k\vec{v}.$$

Rovnosti jednotlivých súradníc vedú na podmienky:

$$1 = -2k, \quad -3 = 6k, \quad 2 = -4k.$$

Tieto podmienky nie sú splniteľné pre žiadne k, preto $\vec{u}$ a $\vec{v}$ nie sú lineárne závislé.

2. Hľadanie spoločného bodu: Hľadáme t, s, pre ktoré platí:

$$\vec{A} + t\vec{u} = \vec{B} + s\vec{v}.$$

Rozpis sústavy:

$$\begin{aligned} 1 + t \cdot 1 &= 0 + s \cdot (-2), \\ 2 + t \cdot (-3) &= 5 + s \cdot 6, \\ 3 + t \cdot 2 &= 1 + s \cdot (-4). \end{aligned}$$

Po úprave:

$$\begin{aligned} t + 2s &= -1, \\ -3t - 6s &= 3, \\ 2t + 4s &= -2. \end{aligned}$$

Táto sústava nemá riešenie, čo znamená, že priamky nemajú spoločný bod.

Záver pre a): Priamky p a q sú **mimobežné**.

Riešenie pre b) Zadané údaje:

$$A = [1, -3, 4], \quad \vec{u} = (2, 2, -1), \quad B = [3, 0, -1], \quad \vec{v} = (0, 1, 3).$$

1. Kontrola lineárnej závislosti $\vec{u}$ a $\vec{v}$: Hľadáme skalár k, pre ktorý platí:

$$\vec{u} = k\vec{v}.$$

Rovnosti jednotlivých súradníc:

$$2 = 0k, \quad 2 = 1k, \quad -1 = 3k.$$

Tieto podmienky sa navzájom vylučujú, preto $\vec{u}$ a $\vec{v}$ nie sú lineárne závislé.

2. Hľadanie spoločného bodu: Hľadáme t, s, pre ktoré platí:

$$\vec{A} + t\vec{u} = \vec{B} + s\vec{v}.$$

Rozpis sústavy:

$$\begin{aligned} 1 + t \cdot 2 &= 3 + s \cdot 0, \\ -3 + t \cdot 2 &= 0 + s \cdot 1, \\ 4 + t \cdot (-1) &= -1 + s \cdot 3. \end{aligned}$$

Po úprave:

$$\begin{aligned} 2t &= 2, \\ 2t - s &= 3, \\ -t - 3s &= -5. \end{aligned}$$

Riešením je $t = 1, s = -1$, čo znamená, že priamky majú spoločný bod.

Záver pre b): Priamky p a q sa **pretínajú**.

Úloha 1.4.11.

Napíšte parametrické vyjadrenie roviny ρ, ktorá prechádza bodom $A[2, 3, -1]$ a je rovnobežná s priamkami p a q, ktorých parametrické vyjadrenia sú:

$$p : \begin{cases} x_1 = 1 - u \\ x_2 = 2 + 3u \\ x_3 = 5 + 2u \end{cases}$$

$$q : \begin{cases} x_1 = 2 + 4v \\ x_2 = 1 + v \\ x_3 = -3v \end{cases}$$

Riešenie:

1. Nájdenie smerových vektorov priamok p a q: Smerový vektor priamky p je:

$$\vec{v_p} = [-1, 3, 2]$$

Smerový vektor priamky q je:

$$\vec{v_q} = [4, 1, -3]$$

2. Vektorový súčin $\vec{v_p} \times \vec{v_q}$ na získanie normálového vektora roviny: Normálový vektor roviny ρ je kolmý na oba smerové vektory priamok p a q. Vypočítame:

$$\vec{n} = \vec{v_p} \times \vec{v_q} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\vec{n} = \mathbf{i}(3 \cdot (-3) - 2 \cdot 1) - \mathbf{j}((-1) \cdot (-3) - 2 \cdot 4) + \mathbf{k}((-1) \cdot 1 - 3 \cdot 4)$$

$$\vec{n} = \mathbf{i}(-9 - 2) - \mathbf{j}(3 - 8) + \mathbf{k}(-1 - 12)$$

$$\vec{n} = \mathbf{i}(-11) - \mathbf{j}(-5) + \mathbf{k}(-13)$$

$$\vec{n} = [-11, 5, -13]$$

3. Všeobecná rovnica roviny ρ :

$$-11x + 5y - 13z + d = 0,$$

Po dosadení súradníc bodu $A[2, 3, -1]$ dostaneme $d = 3$.

4. Rovnica roviny ρ : Parametrické vyjadrenie roviny ρ je:

$$\mathbf{r}(s, t) = A + s\vec{v_p} + t\vec{v_q},$$

kde $A = [2, 3, -1]$, $\vec{v_p} = [-1, 3, 2]$ a $\vec{v_q} = [4, 1, -3]$. Parametrické vyjadrenie:

$$x_1 = 2 - s + 4t$$

$$x_2 = 3 + 3s + t$$

$$x_3 = -1 + 2s - 3t$$

kde $s, t \in \mathbb{R}$.

Úloha 1.4.12.

Určte k $\mathbb{R}$ tak, aby priamky p, q boli:

a) totožné,

b) rovnobežné rôzne,

c) mimobežné,

d) rôznobežné;

kde

$$p : X = [1; -3; 4] + t(-2; -2; 1), \quad q : X = [-1; -5; 5] + t(-6; k; 3).$$

Úloha 1.4.13.

Určte vzájomnú polohu priamky $a = [A; \vec{u}]$ a roviny $a = [B; \vec{v}, \vec{w}]$ v afinnom priestore A_3:

a) $A = [1; 0; 0], \vec{u} = (5; 7; 7), B = [0; 1; 3], \vec{v} = (1; 3; 1), \vec{w} = (2; 2; 3)$,

b) $A = [1; 2; 1], \vec{u} = (1; 1; 2), B = [2; 1; -2], \vec{v} = (0; 2; -1), \vec{w} = (3; 1; -2)$,

c) $A = [1; 0; 0], \vec{u} = (7; 7; 1), B = [0; 1; 3], \vec{v} = (1; 3; 1), \vec{w} = (2; -1; -1)$,

d) $A = [1; 0; 0], \vec{u} = (5; 7; 7), B = [0; 1; 3], \vec{v} = (1; 3; 1), \vec{w} = (2; -1; -1)$.

Úloha 1.4.14.

Určte vzájomnú polohu rovín $\rho = [A; \vec{t}, \vec{u}]$ a $\sigma = [B; \vec{v}, \vec{w}]$ priestoru A_3:

$A = [3; 2; 2], \vec{t} = (2; 1; 3), \vec{u} = (0; 1; 1), B = [3; 0; 6], \vec{v} = (1; -1; 3), \vec{w} = (2; -1; 4)$.

.

Úloha 1.4.15.

Určte vzájomnú polohu rovín a, β v afinnom priestore A_3:

$$a : X = [0; 2; -1] + t_1(0; 1; 2) + t_2(1; -1; -3),$$

$$B : X = [0; 0; 0] + t_1(1; 1; 0) + t_2(-1; 1; 2).$$

Úloha 1.4.16.

Určte vzájomnú polohu rovín $\vec{a} = [A; \vec{a}, \vec{b}]$ a $\beta = [B; \vec{u}, \vec{v}]$ v afinnom priestore A_4:

$$A = [4; 2; 2; 2], a = (1; 0; 0; -1), b = (1; 0; 3; 2),$$

$$B = [-2; -2; 2; 0], u = (-1; 0; 5; 0), v = (2; 2; 1; 0).$$

“‘

Úloha 1.4.17.

Určte vzájomnú polohu rovín $o = [A; \vec{t}, \vec{u}]$ a $\sigma = [B; \vec{v}, \vec{w}]$ v afinnom priestore A_5:

a) $A = [1, 3, 0, 0, 0], \vec{t} = (1, 0, 0, 0, 0), \vec{u} = (0, 5, 0, 1, 0), B = [0, 0, 3, 0, -1], \vec{v} = (0, 0, 3, 2, 0), \vec{w} = (0, 1, 1, 1, 1)$

b) $A = [0, 0, 0, 0, 0], \vec{t} = (1, 2, 0, -1, 0), \vec{u} = (0, 1, 1, 0, 0), B = [2, 1, 0, 0, 0], \vec{v} = (0, 0, -1, 0, 3), \vec{w} = (2, 3, -2, -2, 3)$

c) $A = [0, 0, 1, 2, -1], \vec{t} = (1, 0, 1, -1, 0), \vec{u} = (1, 1, 1, 0, 1), B = [0, 0, 2, 3, -1], \vec{v} = (0, 1, 1, 0, 2), \vec{w} = (2, 2, 3, -1, 3)$

d) $A = [1, 0, -1, 0, 0], \vec{t} = (1, 3, -1, 0, 1), \vec{u} = (0, 0, 0, 1, 0), B = [2, 0, 3, 2, -1], \vec{v} = (0, 0, 2, 1, 0), \vec{w} = (-1, 0, 0, 0, 1)$

Úloha 1.4.18.

Určte parametrické vyjadrenie priamky p prechádzajúcej bodom P a rovnobežnej s rovinou a. Nájdite aspoň tri rôzne riešenia.

Bod $P = [4; 5; 7]$ a rovina a je daná ako:

$$a : X = [3; -1; 2] + t_1(2; 1; 3) + t_2(-3; 1; 4).$$

Všeobecná rovnica nadroviny. Priečka mimobežiek.

Úloha 1.5.1

Napíšte všeobecnú rovnicu roviny π, ktorá je daná parametricky:

$$\begin{aligned} x &= 1 + 2u - 3v, \\ y &= 1 + 3u - 4v, \\ z &= 3 - u + 2v, \end{aligned}$$

kde $u, v \in \mathbb{R}$.

Úloha 1.5.2

Všeobecnú rovnicu nadroviny štvorrozmerného afinného priestoru prepíšte do parametrického tvaru:

$$2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - 3 = 0.$$

Úloha 1.5.3

Napíšte všeobecnú rovnicu:

a) priamky určenej bodmi $A[1; 2]$, $B[-3; 5]$,

b) roviny určenej bodmi $A[2; 1; -2]$, $B[4; -3; 1]$, $C[-3; 2; 4]$.

Úloha 1.5.4

Napíšte všeobecnú rovnicu roviny určenej bodom $A[3; 1; -2]$ a priamkou p:

$$p : \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Úloha 1.5.5

Napíšte všeobecnú rovnicu roviny π, ktorá obsahuje body $A[1; 0; -1]$, $B[2; 3; 1]$, a vektor $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$ patrí jej smerovému vektoru.

Úloha 1.5.6

Vymyslite zadanie nasledovnej úlohy v trojrozmernom afinnom priestore a potom ju vyriešte.

Úloha 1.5.7

Dané sú body $X[1;1;2]$, $Y[0;1;0]$ a priamka m. Určte všeobecnú rovnicu roviny prechádzajúcej bodmi X, Y a rovnobežnej s priamkou m:

$$m : x = 2 - 3t, \quad y = 1 + t, \quad z = 4 - t.$$

Úloha 1.5.8

V $\mathbb{A}_2$ napíšte všeobecnú rovnicu spojnice priesečníka priamok a, b s bodom $B[1;2]$:

$$a : 2x + y + 1 = 0, \quad b : x - y + 2 = 0.$$

Úloha 1.5.9

Napíšte všeobecnú rovnicu nadroviny α, ak je určená bodom $P[3;-1;3;2]$ a smerovými vektormi:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Úloha 1.5.10

Napíšte všeobecnú rovnicu nadroviny β, ak:

$$x_1 = z_1 - 2u + w, \quad x_2 = 1 + 2u + w, \quad x_3 = u - w, \quad x_4 = -w.$$

Úloha 1.5.11

Napíšte všeobecnú rovnicu nadroviny γ, ak je určená bodmi:

$$A[1;1;1;2], \quad B[0;0;2;0], \quad C[1;1;0;-2], \quad D[0;0;-2;0].$$

Úloha 1.5.12

Napíšte parametrické rovnice nadroviny δ v afinnom priestore $\mathbb{A}_n$:

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 + 1 = 0,$$
$$x_2 = 4.$$

Úloha 1.5.13

Určte $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby σ a τ boli rovnobežné roviny:

$$\sigma : 3x - 4y + 5z - 4 = 0, \quad \tau : x + ay + bz + 1 = 0.$$

Úloha 1.5.14

Určte $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby dimenzia vektorového priestoru $V_\sigma \cap V_\tau$ bola rovná dvom. Určte jeho bázu:

$$\sigma : 3x - 4y + 5z - 4 = 0, \quad \tau : x + ay + bz + 1 = 0.$$

Úloha 1.5.15

Určte $a \in \mathbb{R}$ tak, aby priamka p ležala v rovine ρ:

a) $p : x = 1 + 2t,\ y = 4 + 3t,\ z = 1 + at, \quad \rho : 3x - 4y + 5z - 4 = 0,$

b) $p : x = 1 + 2t,\ y = 1 + 3t,\ z = 1 + at, \quad \rho : x - ay - z = 0.$

Úloha 1.5.16

Daná je priamka $p = \{Q; \vec{a}\}$ a rovina $\sigma = [P; \vec{x}, \vec{y}]$. Zistite, či priamka p leží v rovine σ:

$$Q(5; 2; 1), \quad P(2; 1; 0), \quad \vec{a}(3; 0; 2), \quad \vec{x}(0; -1; 1), \quad \vec{y}(2; 3; 1).$$

Úloha 1.5.17

Priesečnicu rovín α a β určte bodom a vektorom:

$$\alpha : 2x - 3y + z - 2 = 0,$$
$$\beta : x + 2y + z + 5 = 0.$$

Úloha 1.5.18

Napíšte všeobecnú rovnicu roviny σ, ktorá je rovnobežná s priamkami p, q a prechádza bodom A:

$$A(0;0;5), \quad \begin{aligned} p &: 3x - 2y + z = 0, \\ q &: 2x - 5z + 1 = 0. \end{aligned}$$

Úloha 1.5.19

Napíšte všeobecnú rovnicu roviny σ, ktorá prechádza bodom A a je rovnobežná s rovinou ρ:

$$A(1;3;5), \quad \rho : 2x + 2y - 3z + 1 = 0.$$

Úloha 1.5.20

Napíšte všeobecnú rovnicu roviny σ, ktorá prechádza priamkou p a je rovnobežná s priamkou q:

$$\begin{aligned} p &: 2x - y + z - 3 = 0, \\ q &: 3x + 2z - 1 = 0. \end{aligned}$$

Úloha 1.5.21

Určte prienik priamky p a roviny σ, ak:

$$\text{a)} \quad p : \begin{cases} x = -1, \\ y = 0, \\ z = -1 + t, \end{cases} \qquad \sigma : x + 2y - z + 4 = 0,$$

$$\text{b)} \quad p : \begin{cases} x = -2, \\ y = 1, \\ z = -2 + t, \end{cases} \qquad \sigma : 2x + 3y + z - 4 = 0.$$

Úloha 1.5.22

Určte neparametrickú priamku p prechádzajúcu bodom A a rovnobežnú s priamkou q:

$$A(2;3;-1), \quad q: \begin{cases} x = 3, \\ y = y + 1, \\ z = 7. \end{cases}$$

Úloha 1.5.23

Určte priečku p mimobežiek $a = \overrightarrow{AX}$, $b = \overrightarrow{BY}$ rovnobežnú so smerom daným vektorom $\vec{v}$:

$$\begin{aligned} A(0;2;-3), \quad X(-1;1;3), \quad \vec{v}(1;-2;3), \\ B(1;-2;3), \quad Y(3;4;1), \quad \vec{v}(-1;-3;-3). \end{aligned}$$

Úloha 1.5.24

Určte priečku mimobežiek a, b rovnobežnú so smerom daným vektorom $\vec{v}$:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad A(1;3;-1), \quad X(-1;-2;3), \quad \vec{v}(3;3;-3), \\ B(3;1;-5), \quad Y(1;4;1), \quad \vec{v}(-2;-2;3), \\ \text{b)} \quad A(-1;1;-2), \quad X(3;1;2), \quad \vec{v}(1;-2;3), \\ B(-3;2;3), \quad Y(1;2;3), \quad \vec{v}(3;1;4), \\ \text{c)} \quad A(-1;3;5), \quad X(-1;-3;-3), \quad \vec{v}(-1;5;3), \\ B(1;-3;-3), \quad Y(2;-2;3), \quad \vec{v}(2;-2;3). \end{aligned}$$

Úloha 1.5.25

Určte priesečník mimobežiek $a = [A; \vec{u}]$, $b = [B; \vec{v}]$ prechádzajúcich bodom M:

a) $A[3;-1;4]$, $\vec{u} = [-2;-2;2]$, $M[1;3;-2]$, $B[1;-1;2]$, $\vec{v} = [0;1;1]$,

b) $B[0;2;1]$, $\vec{v} = [1;-2;3]$, $A[2;-3;1]$, $\vec{u} = [2;5;2]$.

Úloha 1.5.26

Priamkami p, q je určený zväzok priamok. Napíšte rovnicu priamky m patriacej tomuto zväzku, ktorá je rovnobežná so súradnicovou osou x:

$$p : 2x - y - 5 = 0, \quad q : x + 2y + 4 = 0.$$

Úloha 1.5.27

Priamkami p, q je určený zväzok priamok. Napíšte rovnicu priamky m patriacej tomuto zväzku, ktorá je rovnobežná s priamkou r:

$$r : 4x + 3y + 12 = 0.$$

Úloha 1.5.28

Určte $a \in \mathbb{R}$ tak, aby priamka p patrila zväzku určeného priamkami k, l:

$$k : x + 2y + 3 = 0, \quad l : ax - y = 0.$$

Úloha 1.5.29

Napíšte rovnicu priamky, ktorá prechádza bodom $P[-2; 1]$ a patrí do zväzku o rovnici:

$$\lambda_1(3x - y + 1) + \lambda_2(2x + 3y - 5) = 0.$$

Úloha 1.5.30

Napíšte rovnicu roviny rovnobežnú so súradnicovou osou z a patriacu zväzku o rovnici:

$$\lambda_1(-4x - 2y + 3z - 4) + \lambda_2(2x + 3y - 1) = 0.$$

Úloha 1.5.31

Rovinami α, β je určený zväzok rovín (zdôvodnite prečo). Napíšte rovnicu roviny ρ tohto zväzku, ktorá prechádza bodom $Y[0; 4; 0]$:

$$\alpha : x - y + 2z - 1 = 0, \quad \beta : 3x + y + 4z - 4 = 0.$$

Deliaci pomer

Úloha 1.6.1

V afinnom priestore A_2 sú dané tri lineárne nezávislé body A, B, C. Označme A' stred dvojice bodov B, C, B' stred dvojice bodov A, C a T prienik priamok AA', BB'. Určte deliaci pomer $(AT\lambda A')$ a svoje tvrdenie dokážte. (Zvoľte vhodne lineárnu súradnicovú sústavu v A_2.)

Úloha 1.6.2

Nech X, Y sú rôzne body v afinnom priestore. Označme $X'Y'$ stred dvojice bodov X, Y. Dokážte, že pre ľubovoľné body A, B, C, D, E platí $(X\lambda Y)$. (Zvoľte LSS v A_2.)

Úloha 1.6.3

V A_2 sú dané lineárne nezávislé body A, B, C a body D, E, F, pričom $(ABD) = -1$, $(BCF) = -2$, $(EBC) = 3$. Určte súradnice bodov A, B, C v LSS danej repérom $R = F, \overrightarrow{FE}, \overrightarrow{FD}$

Skalárny súčin vektorov

Úloha 2.1.1

Zistite, či zobrazenie f je skalárnym súčinom vo vektorovom priestore $V = \mathbb{R}^2$, ak

a) $f((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mapsto x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 + 10x_2y_2$,

b) $f((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mapsto 3x_1y_2 - 3x_2y_1 + 10y_1y_2$,

c) $f((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mapsto x_1x_2 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 + 9y_1y_2$.

Úloha 2.1.2

Daný je vektorový priestor $\mathbb{R}^2$ s obvyklými operáciami. Zistite, či usporiadaná dvojica $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ tvorí vektorový priestor so skalárnym súčinom, ak $\vec{x} = (x_1, x_2)$, $\vec{y} = (y_1, y_2)$:

a) $\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1y_1$,

b) $\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1y_1 + x_2y_2$,

c) $\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2$.

Úloha 2.1.3

Skalárny súčin je definovaný ako

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2,$$

$\vec{x} = (x_1, x_2)$, $\vec{y} = (y_1, y_2)$. Určte veľkosť vektora $\vec{u} = (2; 4)$.

Úloha 2.1.4

Vypočítajte skalárny súčin vektorov $\vec{a} = 2\vec{u} + 3\vec{v}$, $\vec{b} = 4\vec{u} - 5\vec{v}$, ak $\vec{u}, \vec{v}$ sú kolmé a jednotkové vektory.

Úloha 2.1.5

Nech pre vektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ platí $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, $\|\vec{a}\| = 3$, $\|\vec{b}\| = 4$, $\|\vec{c}\| = 5$. Vypočítajte súčet $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$.

Úloha 2.1.6

Určte skalárny súčin $\vec{a} \cdot \vec{b}$, ak

a) $\|\vec{a}\| = 5$, $\|\vec{b}\| = 8$, $\langle(\vec{a}, \vec{b})\rangle = \frac{\pi}{3}$,

b) $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| = 3$, $\langle(\vec{a}, \vec{b})\rangle = 135°$,

c) $\|\vec{a}\| = 1$, $\vec{b} = -3\vec{a}$.

Úloha 2.1.7

Nech pre vektory $\vec{a}, \vec{b}$ platí $\|\vec{a}\| = 3$, $\|\vec{b}\| = 1$, $\langle(\vec{a}, \vec{b})\rangle = 30°$. Určte kosínus uhla vektorov

a) $\vec{a} + 2\vec{b}$, $3\vec{a}$,

b) $\vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{a}$.

Úloha 2.1.8

Vypočítajte kosínus uhla vektorov $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$, ak $\|\vec{a}\| = 3$, $\|\vec{b}\| = 2$, $|(\vec{a}, \vec{b})| = \frac{6}{5}$.

Úloha 2.1.9

Zistite, aký uhol zvierajú jednotkové vektory $\vec{a}, \vec{b}$, ak $\vec{x} = \vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{y} = 5\vec{a} - 4\vec{b}$ sú na seba kolmé vektory.

Úloha 2.1.10

Zistite, aký uhol zvierajú vektory $\vec{u}, \vec{v}$, ak $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 4$ a $\vec{a} = \vec{u}+\vec{v}; \vec{b} = 3\vec{u}$ sú na seba kolmé.

Úloha 2.1.11

Určte veľkosť vnútorného uhla pri vrchole A v trojuholníku ABC, ak $A[0; 1]$, $B[\sqrt{3}; 0]$, $C[0; 3]$.

Úloha 2.1.12

Daný je trojuholník ABC. Vypočítajte skalárny súčin $\vec{a} \cdot \vec{b}$, ak

$$\vec{a} = \vec{B} - \vec{A}, \quad \vec{b} = \vec{C} - \vec{B}, \quad |BC| = 5, \quad |AC| = 6, \quad |AB| = 7.$$

Úloha 2.1.13

Vypočítajte veľkosť vektora $c = 3a + 2b$, ak $\|a\| = 3$, $\|b\| = 4$, $\langle(a, b)\rangle = \frac{2\pi}{3}$.

Úloha 2.1.14

Dokážte, že vektory c a $\overline{x}$ sú na seba kolmé, ak

$$\overline{x} = (\vec{b} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{b}.$$

Úloha 2.1.15

Určte veľkosti vnútorných uhlov rovnoramenného trojuholníka, ktorého ťažnice z vrcholov základne sú navzájom kolmé.

Úloha 2.1.16

Vypočítajte veľkosť vektora $3\vec{u} + 2\vec{v}$, ak $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 4$, a $\langle(\vec{u}, \vec{v})\rangle = 30°$.

Úloha 2.1.17

Vypočítajte normu vektora $2\vec{u} + 3\vec{v}$, ak $\|\vec{u}\| = 4$, $\|\vec{v}\| = 3$, a $\langle(\vec{u}, \vec{v})\rangle = \frac{\pi}{3}$.

Úloha 2.1.18

Nech $\vec{a}$ a $\vec{b}$ tvoria ortonormálnu bázu vektorového priestoru $V_2(\mathbb{R})$, nech $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$, $\vec{v} = 4\vec{a} - 5\vec{b}$. Určte:

a) skalárny súčin vektorov $\vec{u}, \vec{v}$;

b) veľkosť vektorov $\vec{u}, \vec{v}$;

c) kosínus uhla vektorov $\vec{u}, \vec{v}$;

d) zvoľte umiestnenie pre vektory $\vec{a}, \vec{b}$, a narysujte situáciu s vektormi $\vec{u}, \vec{v}$.

Úloha 2.1.19

Nech platí $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = \|\vec{w}\| = 1$, $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$. Vypočítajte

$$\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{w} \cdot \vec{u}.$$

Úloha 2.1.20

Body $A[-3; 2]$, $B[2; 4]$ sú susedné vrcholy štvorca. Pomocou skalárneho súčinu určte jeho ďalšie dva vrcholy.

Úloha 2.1.21

Dané sú body $A[2; 1]$, $B[5; 5]$. Určte súradnice bodu C, ak vektor $\vec{C} - \vec{A}$ vznikne otočením vektora $\vec{B} - \vec{A}$ okolo bodu A o uhol veľkosti $\frac{5\pi}{6}$ pri kladnej orientácii.

Úloha 2.1.22

Pomocou skalárneho súčinu určte veľkosť vektora $\vec{a} = \vec{AL}$, kde L je stred strany BC rovnobežníka $ABCD$, ak

$$|AB| = 5, \quad |BC| = 6, \quad \langle(DAB)\rangle = 60^\circ.$$

Úloha 2.1.23

Dané sú vektory $\vec{u} = (1; 0; 1)$, $\vec{v} = (-1; 2; -2)$. Nájdite vektor $\vec{w}$ tvaru $(0; 1; 0) + k\vec{u} + r\vec{v}$, $k, r \in \mathbb{R}$, tak, aby bol ortogonálny ku $\vec{u}$ aj $\vec{v}$.

Schmidtov ortogonalizačný proces

Totálna kolmosť vo V_n. Kolmosť vo V_n

Úloha 2.2.1.

Schmidtovým ortogonalizačným procesom nájdite ortonormálnu bázu vo V_4, ak poznáte jeho bázu $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4\}$, kde $\vec{a}_1(1;1;1;1)$, $\vec{a}_2(1;-1;1;1)$, $\vec{a}_3(2;0;-1;1)$, $\vec{a}_4(-1;1;0;1)$.

Úloha 2.2.2.

Vo vektorovom priestore usporiadaných trojíc reálnych čísel sú dané vektory $\vec{a}_1(1;-1;1)$, $\vec{a}_2(0;1;2)$, $\vec{a}_3(1;1;0)$. Vykonajte Schmidtov ortogonalizačný proces.

Úloha 2.2.3.

Dané sú vektory $\vec{a}_1(1;-2;2;-3)$, $\vec{a}_2(2;-3;2;4)$. Dokážte, že vektory $\vec{a}_1$ a $\vec{a}_2$ sú na seba kolmé a nájdite $\vec{a}_3, \vec{a}_4$ tak, aby $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4\}$ bola ortogonálna báza vo V_4.

Úloha 2.2.4.

Určte bázu vektorového priestoru V^1, ak $V^1 = \langle (1;0;1;2;0), (0;0;1;1;2), (-1;0;0;1;2) \rangle$.

Úloha 2.2.5.

Zistite, či vektorové priestory $V' = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ a $V'' = \langle \vec{c}, \vec{d} \rangle$ sú na seba kolmé, ak $\vec{a}(1;3;-1;5)$, $\vec{b}(1;-5;-3;1)$, $\vec{c}(14;5;3;-1)$, $\vec{d}(14;-3;1;-5)$.

Úloha 2.2.6.

Dané sú vektorové priestory $V' = \langle (1;0;-1;1;0), (0;2;-2;0;0), (0;0;3;-1;0) \rangle$ a $V'' = \langle (1;1;1;0;0), (-1;0;0;1;1), (0;0;0;0;1) \rangle$.

a) Zistite, či vektorové priestory V' a V'' sú na seba kolmé.

b) Určte vo V_5 ortonormálnu bázu $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5\}$ tak, aby $V'' = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle$ a zároveň $V''^{\perp} = \langle \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5 \rangle$.

Úloha 2.2.7.

Určte jednotkový vektor kolmý k nadrovine α:

$$\alpha : \begin{aligned} x_1 &= u + v + w \\ x_2 &= 1 + u - v + w \\ x_3 &= u - v + w \\ x_4 &= 1 + u + v + 3w \end{aligned}$$

Vonkajší súčin vo V_n

Vektorový súčin vo V_n.

Úloha 2.3.1.

Vypočítajte troma spôsobmi obsah trojuholníka ABC, ak

a) $A[2;3]$, $B[1;-1]$, $C[0;1]$.

b) $A[0;3]$, $B[4;1]$,C[2; 5]

.

Úloha 2.3.2

Vypočítajte dvoma spôsobmi obsah trojuholníka ABC, ak
$A[2;1;-3]$, $B[4;1;5]$, $C[0;7;-6]$.

Úloha 2.3.3

Určte vektorový súčin vektorov $\vec{u}(3;\sqrt{3};0)$, $\vec{v}(3;3\sqrt{3};0)$ aspoň troma spôsobmi.

Úloha 2.3.4

Dané sú vektory $\vec{a}(1;-1;2)$, $\vec{b}(3;-1;-3)$. Vypočítajte:

1. $\vec{a}\times\vec{b}$,
2. $((2\vec{a})\times(\vec{a}+3\vec{b}))$,
3. overte pomocou výsledku z časti a), že $|\vec{a}\times\vec{b}| = ||\vec{a}||\cdot||\vec{b}||\cdot\sin\varphi$.

Úloha 2.3.5

Pre kolmé vektory $\vec{a},\vec{b}$ platí $||\vec{a}|| = 2$, $||\vec{b}|| = 3$. Vypočítajte $||((\vec{a}+3\vec{b})\times(2\vec{a}-5\vec{b}))||$.

Úloha 2.3.6

Použitím zmiešaného súčinu určte vzdialenosť bodu $A[2;3;4]$ od roviny e:

$$e : \begin{cases} x_1 = 2 - 3t + 2u, \\ x_2 = 3 + 2t - u, \\ x_3 = 2 + t + 4u. \end{cases}$$

Riešenie: Máme dva smerové vektory roviny e:

$$\mathbf{v}_1 = (-3, 2, 1), \quad \mathbf{v}_2 = (2, -1, 4).$$

Normálový vektor roviny je daný ich vektorovým súčinom:

$$\mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

Rozložme determinant:

$$\mathbf{n} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

Vypočítajme determinanty:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = (2 \cdot 4) - (1 \cdot (-1)) = 8 + 1 = 9,$$

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = (-3 \cdot 4) - (1 \cdot 2) = -12 - 2 = -14,$$

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (-3 \cdot (-1)) - (2 \cdot 2) = 3 - 4 = -1.$$

Dostávame normálový vektor:

$$\mathbf{n} = (9, 14, -1).$$

Teraz upravme vzdialenosť bodu $A(2, 3, 4)$ od roviny:

$$d = \frac{|\overrightarrow{AP} \cdot \mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|}$$

Vektor $\overrightarrow{AP} = (0,0,2)$, súradnice bodu $P[2,3,2]$ získame dosadením $t = u = 0$.

$$\overrightarrow{AP} \cdot \mathbf{n} = 0 \cdot 9 + 0 \cdot 14 + 2 \cdot (-1) = -2.$$

$$\|\mathbf{n}\| = \sqrt{9^2 + 14^2 + (-1)^2} = \sqrt{81 + 196 + 1} = \sqrt{278}.$$

$$d = \frac{|-2|}{\sqrt{278}} = \frac{2}{\sqrt{278}}.$$

Odpoveď je:

$$d = \frac{2}{\sqrt{278}}.$$

Úloha 2.3.7

Napíšte parametrické vyjadrenie priamky p prechádzajúcej bodom D rovnobežne s priesečnicou rovín α, β:

$\alpha : A\vec{B}C, \beta : x + 2y - z = 0, A[1;0;0],\ B[0;-1;0],\ C[1;0;1],\ D[3;0;0]$.
(Riešte aj využitím vektorového súčinu.)

Riešenie:

1. Rovnica roviny: Rovinu β máme explicitne zadanú ako:

$$x + 2y - z = 0.$$

Normálový vektor k tejto rovine je:

$$\mathbf{n}_\beta = (1, 2, -1).$$

2. Rovnica roviny α je určená tromi bodmi $A(1,0,0)$, $B(0,-1,0)$ a $C(1,0,1)$. Najprv vytvoríme dva smerové vektory roviny α:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (0-1, -1-0, 0-0) = (-1,-1,0).$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (1-1, 0-0, 1-0) = (0,0,1).$$

Normálový vektor roviny α je vektorový súčin $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$:

$$\mathbf{n}_\alpha = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Vypočítame determinant:

$$\mathbf{n}_\alpha = \mathbf{i}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$\mathbf{n}_\alpha = \mathbf{i}(-1\cdot 1 - 0\cdot 0) - \mathbf{j}(-1\cdot 1 - 0\cdot 0) + \mathbf{k}(-1\cdot 0 - (-1\cdot 0)).$$

$$\mathbf{n}_\alpha = (-1, 1, 0).$$

3. Smerový vektor priesečnice rovín α a β. získame vektorovým súčinom $\mathbf{n}_\alpha \times \mathbf{n}_\beta$:

$$\mathbf{d} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

Rozložme determinant:

$$\mathbf{d} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$\mathbf{d} = \mathbf{i}(1\cdot(-1) - 0\cdot 2) - \mathbf{j}(-1\cdot(-1) - 0\cdot 1) + \mathbf{k}(-1\cdot 2 - 1\cdot 1).$$

$$\mathbf{d} = (-1, -1, -3).$$

Záver.

Priamka p prechádza bodom $D(3, 0, 0)$ a má smerový vektor $\mathbf{d} = (-1, -1, -3)$, takže jej parametrické vyjadrenie je:

$$\begin{cases} x = 3 - t, \\ y = -t, \\ z = -3t. \end{cases}$$

Metrické vlastnosti euklidovského priestoru

Úloha 2.4.1

Napíšte všeobecnú rovnicu nadroviny v štvorrozmernom afinnom priestore, ktorá na súradnicových osiach vytína rovnako veľké úseky dĺžky 2. Koľko riešení má úloha?

Úloha 2.4.2

Napíšte všeobecnú rovnicu roviny q, ktorá je určená bodmi A, B a na súradnicovej osi z vytína úsek dĺžky 4:

$$A[-1;3;4],\ B[2;-8;-1].$$

Úloha 2.4.3

K priamke idúcej bodmi $E[3;4]$, $F[1;-1]$ veďte priesečníkom priamok p, q:

$$\begin{aligned} p &: 6x-7y+23=0,\\ q &: 2x+y+1=0. \end{aligned}$$

Zapíšte jej všeobecnú rovnicu.

Úloha 2.4.4

Daná je priamka p a bod M. Nájdite na priamke p body, ktorých vzdialenosti od bodu $M=[4,1,3]$ sú 4 jednotky

$$\begin{aligned} p: x &= 1+t,\\ y &= -2+t,\\ z &= 3-2t. \end{aligned}$$

Úloha 2.4.5.

Napíšte všeobecnú rovnicu priamky, na ktorej leží výška v_a trojuholníka $ABC; A[2;5], B[4;2], C[1;-2]$.

Úloha 2.4.6.

V euklidovskom priestore E_3 je daná rovina α a bod M. Napíšte parametrizeké vyjadrenie priamky p prechádzajúcej bodom M a kolmej na α:

$$\alpha : 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 4 = 0, \quad A[3; 8; -4].$$

Úloha 2.4.7.

V euklidovskom priestore E_4 je daný podpriestor α a bod A. Napíšte parametrizeké vyjadrenie priamky p prechádzajúcej bodom A a kolmej na α:

$$\alpha : X = [2; 1; 0; 5] + t_1(2; -4; 6; 1) + t_2(4; 1; -2; -3) + t_3(0; 4; 0; 2), \quad A[1; -4; 3; 1].$$

Úloha 2.4.8.

Určte vrcholy B, D štvorca $ABCD$, ak $A[2; 1], C[4; 5]$.

Úloha 2.4.9.

V E_3 napíšte všeobecnú rovnicu roviny β, ktorá prechádza priamkou p a je kolmá na rovinu α:

$$p : X = [2; 3; 0] + t(1; 0; -1),$$
$$\alpha : x_1 - x_2 + 2x_3 - 4 = 0.$$

Úloha 2.4.10.

Určte veľkosti výšok trojuholníka KLM, ak:

$$KL : x + y - 1 = 0, \quad KM : x - 2y - 5 = 0, \quad LM : 3x + y = 0.$$

Úloha 2.4.11.

Napíšte parametrizeké vyjadrenie priamky, na ktorej leží výška v_v (prechádzajúca vrcholom V) štvorstena $ABCV$ a vypočítajte veľkosť tejto výšky:

(a) $A[-1; 0; 3], B[4; 3; 2], C[2; 1; 1], V[-6; 1; 0]$,

(b) $A[2; 1; 1], B[-1; 0; 3], C[4; 3; 2], V[-6; 1; 0]$,

(c) $A[1; 1; 1], B[2; 1; 1], C[-3; 0; 2], V[3; 1; 5]$.

Úloha 2.4.12.

Určte analytické vyjadrenie priamky prechádzajúcej bodom $L[-4;3]$ a od počiatku súradnicovej sústavy vzdialenej päť jednotiek.

Úloha 2.4.13.

Určte analytické vyjadrenie priamky, na ktorej leží strana trojuholníka prechádzajúca bodom $M[3;4]$, ak ostatné dva strany trojuholníka ležia na súradnicových osiach x, y a obsah trojuholníka $\Delta = 24$.

Úloha 2.4.14.

Dané sú body $S_a[7;8], S_b[-5;-4], S_c[1;-4]$. Určte vrcholy trojuholníka ABC, pre ktorý sú S_a, S_b, S_c v poradí stredy strán BC, AC, AB.

Úloha 2.4.15.

Napíšte všeobecnú rovnicu roviny prechádzajúcu bodom $M[1;2;1]$, ktorá má od bodov $M_1[2;3;2], M_2[4;5;-4]$ rovnakú vzdialenosť.

Úloha 2.4.16.

V E_3 určte dvoma spôsobmi vzdialenosť euklidovských podpriestorov $E' = \{M\}$ a $E'' = \{Q; u\}$:

$$M[5;2;3], \quad Q[1;-3;1], \quad u(1;2;-1).$$

Úloha 2.4.17.

Určte vzdialenosť bodu $B[2;3;4]$ od roviny α:

$$\alpha : 5x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 6 = 0.$$

Úloha 2.4.18.

Určte súradnice bodu A', ktorý je súmerne združený s bodom $A[1;-2;3]$ podľa nadroviny ω:

$$\omega : 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 5 = 0.$$

Úloha 2.4.19.

Určte vzdialenosť bodu $A[1;2;1;-2]$ od priamky m:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 - 3t, \\ x_2 &= 1 + 2t, \\ x_3 &= 2 + 3t, \\ x_4 &= 5 + 4t. \end{aligned}$$

Úloha 2.4.20.

Napíšte rovnicu roviny súmernosti bodov A, B, ak:

(a) $A[2;-2;3], B[3;1;-1]$,

(b) $A[2;-1;-4], B[4;-3;2]$.

Úloha 2.4.21.

V E_5 je daná nadrovina α a bod M. Určte pravouhlý priemet bodu M do nadroviny α:

$$\begin{aligned} &\alpha : x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 - 1 = 0, \\ &M[1;1;1;1;3]. \end{aligned}$$

Úloha 2.4.22.

Vypočítajte súradnice vrcholov kosoštvorca $ABCD$, ktorého jedna strana obsahuje bod M, protiľahlá strana leží na priamke m a uhlopriečka BD leží na priamke p:

$$\begin{aligned} &m : x = 3 + 4t, \\ &y = 6 + t, \\ &p : 9x + 5y - 45 = 0, \\ &M[1;2]. \end{aligned}$$

Úloha 2.4.23.

Bod S je priesečníkom uhlopriečok obdĺžnika, ktorého jedna strana leží na priamke p. Určte všeobecné rovnice priamok, na ktorých ležia zvyšné strany obdĺžnika, ak jedna z nich obsahuje bod M:

$$S[0;3], \quad M[3;4], \quad p: x+y=9.$$

Úloha 2.4.24.

Dvoma spôsobmi vypočítajte vzdialenosť mimobežiek a, b (1. sp. využite priečku mimobežiek kolmú na priamku a aj b, 2. sp. využite úlohu 2.3.6):

(a) $a: x = t, y = 0, z = 0,$

(b) $b: X = [1;1;1] + t(0;-1;-t).$

Úloha 2.4.25.

Určte reálne čísla a, b tak, aby priamka p bola kolmá na rovinu α:

$$\begin{aligned}
&p: x = 1 + 2t,\\
&y = 3 + at,\\
&z = -1 + bt,\\
&\alpha: x + 5y + 3z - 4 = 0.
\end{aligned}$$

Úloha 2.4.26.

Riešte úlohu 2.2.7 čo najjednoduchšie (využitím normálového vektora nadroviny).

Úloha 2.4.27.

Napíšte všeobecnú rovnicu nadroviny, ktorá prechádza bodom M a je kolmá na priamku p:

$$\begin{aligned}
&M[2;-1;1;1],\\
&p: X = [7;1;4;-2] + t(3;2;-2;1).
\end{aligned}$$

Úloha 2.4.28.

Daný je štvorsten $ABCD$. Určte kosínus uhla, ktorý zvierajú roviny ABD a ABC:

$$A[3;-2;0], B[5;6;0], C[-1;2;0], D[2;2;3].$$

Úloha 2.4.29.

Dourčte súradnice bodov C, D v E_3 tak, aby $ABCD$ bol pravidelným štvorstenom a aby z-ová súradnica bodu C aj x-ová súradnica bodu D boli kladné:

$$A[1;0;0], B[4;4;0], C[?;?;?], D[?;?;?].$$

Úloha 2.4.30.

Daná je jednotková kocka $ABCDAB'C'D'$. Vypočítajte vzdialenosť bodu B' od roviny $AC'E$, ak $(DD'E) = -1$.

Úloha 2.4.31.

Určte ortogonálny priemet bodu $A[5;1;2]$ do roviny α:

$$\alpha : x - 2y + z - 4 = 0.$$

Úloha 2.4.32.

Určte ortogonálny priemet priamky p do roviny α:

$$p : X = [3;1;2] + t(4;-3;2),$$
$$\alpha : 2x - y + z - 5 = 0.$$

Úloha 2.4.33.

Napíšte všeobecné rovnice takých dvoch rovín (v E_3), aby obsahovali priamku jednej z nich ako časť druhej bola priamka.

Úloha 2.4.34.

Dané sú roviny α, β. V rovine β je daný bod B_0. Určte v rovine α taký bod B, aby jeho ortogonálnym priemetom bol bod B_0 v rovine β (priamo pod bodom B):

$$\alpha : x + 2y - z + 2 = 0,$$
$$\beta : x + 3y + z - 2 = 0,$$
$$B_0[0; 8; -4].$$

Riešenie Úlohy 2.4.34.

Aby sme našli bod $B[x; y; z]$ v rovine α, ktorého ortogonálny priemet do roviny β je bod $B_0[0; 8; -4]$, postupujeme nasledovne:

1. **Parametrické vyjadrenie priamej:** Bod B musí ležať na priamke prechádzajúcej bodom $B_0[0; 8; -4]$ a smerovanej podľa normálového vektora roviny β:

$$\vec{n}_\beta = (1, 3, 1).$$

Parametrické vyjadrenie priamej je:

$$x = t, \quad y = 8 + 3t, \quad z = -4 + t,$$

kde t je parameter.

2. **Dosadenie do rovnice roviny α:** Bod B musí zároveň ležať v rovine $\alpha : x + 2y - z + 2 = 0$. Dosadíme parametre $x = t, y = 8 + 3t, z = -4 + t$ do rovnice roviny:

$$t + 2(8 + 3t) - (-4 + t) + 2 = 0.$$

3. **Úprava rovnice:**

$$t + 16 + 6t + 4 - t + 2 = 0,$$

$$6t + t - t + 16 + 4 + 2 = 0,$$

$$6t + 22 = 0.$$

4. **Výpočet parametra t:**

$$t = -\frac{22}{6} = -\frac{11}{3}.$$

5. **Súradnice bodu B:** Dosadíme hodnotu $t = -\frac{11}{3}$ do parametrického vyjadrenia:

$$x = t = -\frac{11}{3}, \quad y = 8+3t = 8+3\left(-\frac{11}{3}\right) = 8-11 = -3, \quad z = -4+t = -4-\frac{11}{3} = -\frac{23}{3}.$$

Bod B má súradnice:

$$B\left(-\frac{11}{3}; -3; -\frac{23}{3}\right).$$

Úloha 2.4.35.

Určte vzdialenosť priamok:

$$\begin{aligned} p &= [A; \vec{u}], \quad A[2;1;4], \vec{u}[3;1;1], \\ q &= [B; \vec{v}], \quad B[1;2;0], \vec{v}[0;-2;-4]. \end{aligned}$$

Úloha 2.4.36.

Nech priamky $a : X = A + t\vec{a}$, $b : X = B + r\vec{b}$ sú mimobežky. Uvážte, že ich vzdialenosť je

$$\frac{|(B-A)\cdot(\vec{a}\times\vec{b})|}{||\vec{a}\times\vec{b}||}.$$

Úloha 2.4.37.

Určte vzdialenosť euklidovských podpriestorov E' a E'', ak sú dané parametricky

$$\begin{aligned} E' : x_1 &= r - s, & E'' : x_1 &= k, \\ x_2 &= 1 + r, & x_2 &= l, \\ x_3 &= 2 + r + 2s, & x_3 &= -1, \\ x_4 &= -3s, & x_4 &= -l. \end{aligned}$$

Úloha 2.4.38.

Vypočítajte vzdialenosť euklidovských podpriestorov

(a) $E' = [M; \mathbf{u_1}; \mathbf{u_2}]$ a $E'' = [N; \mathbf{v}]$,
$M[3; 0; 0; 0; 1], \mathbf{u_1}(1; -1; 0; 1; 2), \mathbf{u_2}(0; 0; 1; 0; 0)$;
$N[1; 1; 0; 0; 1], \mathbf{v}(1; 0; 0; 0; 1)$,

(b) $E' = [A; \mathbf{a}; \mathbf{b}]$ a $E'' = [B; \mathbf{c}; \mathbf{d}])$,
$A[1; 1; 0; 0; 1], \mathbf{a}(0; 0; 0; 1; 0), \mathbf{b}(1; 0; 0; 0; 1)$

Afinné zobrazenia

Základné vlastnosti afinných zobrazení

Úloha 3.1.1.

V A_2 je daná LSS a afinné zobrazenie $f : A_2 \to A_2$,

$$A[1;1] \mapsto A'[3;5],$$

$$B[5;2] \mapsto B'[10;10],$$

$$\vec{v}(5;2) \mapsto \vec{v'}(8;7).$$

Určte $f(O)$, $f(\vec{e}_1)$ a $f(\vec{e}_2)$, ak $O[0;0]$, $\vec{e}_1(1;0)$, $\vec{e}_2(0;1)$. Pozrite si applet Tu.

Riešenie:

Afinné zobrazenie $f : A_2 \to A_2$ má tvar

$$f(\vec{x}) = A\vec{x} + \vec{t},$$

kde A je matica lineárneho zobrazenia a $\vec{t}$ je posun (translačný vektor).

Krok 1: Nájdeme A. Zadanie dáva podmienky:

$$f(A) = A'[3;5], \quad f(B) = B'[10;10], \quad f(\vec{v}) = \vec{v'}(8;7).$$

Pre body $A[1;1]$ a $B[5;2]$ platí:

$$f(A) = A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \vec{t} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix},$$

$$f(B) = A\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} + \vec{t} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Odčítame rovnice:

$$A\left(\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

$$A\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\5\end{bmatrix}.$$

Zároveň vieme, že:

$$A\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8\\7\end{bmatrix}.$$

Predstavme si A ako:

$$A=\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}.$$

Potom dostaneme dve sústavy rovníc:

$$\begin{aligned}4a+b&=7,\\4c+d&=5,\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}5a+2b&=8,\\5c+2d&=7.\end{aligned}$$

Krok 2: Riešenie sústavy. Zo sústavy prvej dvojice rovníc vyjadríme b a d:

$$b=7-4a,\quad d=5-4c.$$

Dosadíme do druhej sústavy:

$$\begin{aligned}5a+2(7-4a)&=8,\\5c+2(5-4c)&=7.\end{aligned}$$

Zjednodušíme:

$$\begin{aligned}5a+14-8a&=8,\\5c+10-8c&=7.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-3a=-6&\implies a=2,\\-3c=-3&\implies c=1.\end{aligned}$$

Dosadíme späť:

$$b=7-4(2)=-1,\quad d=5-4(1)=1.$$

Teda matica A je:

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}.$$

Krok 3: Nájdeme $\vec{t}$. Použijeme rovnicu pre bod A:

$$f(A) = A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \vec{t} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \vec{t} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 2-1 \\ 1+1 \end{bmatrix} + \vec{t} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \vec{t} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

$$\vec{t} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Krok 4: Určíme $f(O)$, $f(\vec{e}_1)$ a $f(\vec{e}_2)$.

$$f(O) = \vec{t} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

$$f(\vec{e}_1) = A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$f(\vec{e}_2) = A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Záver:

$$f(O) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad f(\vec{e}_1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad f(\vec{e}_2) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Úloha 3.1.2.

Dané sú body $A, B \in A_2$, označme $T_{A,B,X} = A + \frac{1}{3}(B - A) + \frac{1}{3}(X - A)$. Dokážte, že $f : X \mapsto T_{A,B,X}$ je afinné zobrazenie.

Úloha 3.1.3.

V afinnej rovine A_2 sú dané rôznobežky p, q. Pre ľubovoľný bod $X \in A_2$ označme q_X priamku prechádzajúcu bodom X a rovnobežnú s priamkou q. Dokážte, že $f : A_2 \to A_2$, kde $f(X) = X'$, $X' \in q_X \cap p$, je afinné zobrazenie. Je f surjekcia?

Úloha 3.1.4. V afinnej rovine A_2 sú dané rôznobežky p, q. Pre ľubovoľný bod $X \in A_2$ označme q_X priamku prechádzajúcu bodom X a rovnobežnú s priamkou q. Dokážte, že $f : A_2 \to A_2$, kde $f(X) = X'$, pričom obraz X' leží na priamke q_X a stred úsečky XX' leží na priamke p, je afinné zobrazenie.

Úloha 3.1.5.

Dané sú dve mimobežky $p, q \subset A_3$ a rovina $\alpha \subset A_3$ tak, že p a q sú rovnobežné s α. Pre ľubovoľné $X \in p$ označme α_X rovinu prechádzajúcu bodom X rovnobežne s rovinou α. Dokážte, že $f : p \to q$, $f : X \mapsto \alpha_X \cap q$, je afinné zobrazenie.

Úloha 3.1.6.

Dokážte, že každé posunutie je afinná transformácia.

Úloha 3.1.7.

Dokážte, že každá rovnobežnosť je afinná transformácia.

Úloha 3.1.8.

Nech $f : A_2 \to A_2'$ je afinné zobrazenie. Aké prípady môžu nastať pre f, t. j. čo môže byť obrazom $f(A_2)$?

Asociovaný homomorfizmus afinného zobrazenia

Úloha 3.2.1.

Pre asociovaný homomorfizmus F afinného zobrazenia $f : A_2 \to A_4$ platí, že $f(\vec{u}) = \vec{u}'$, $f(\vec{v}) = \vec{v}'$. Určte obrazy vektorov $\vec{w}$ a $\vec{w} - 2\vec{u}$:

$$\vec{u}(2;1), \quad \vec{v}(0;1), \quad \vec{u}'(1;2;1;1), \quad \vec{v}'(1;1;0;0), \quad \vec{w}(1;1).$$

Úloha 3.2.2.

Afinné zobrazenie $f : A_2 \to A_3$ je dané predpisom

$$X(x,y) \mapsto X'(x+y-3, y-1, x-2y).$$

Učte obraz vektorov $\vec{u}(1;2)$, $-\vec{u}$ a $3\vec{u}$ v asociovanom homomorfizme f.

Úloha 3.2.3

Dané je affiné zobrazenie $f : A_3 \to A_2$ tak, že $f(A) = K$, $f(B) = L$, $f(C) = M$ a $f(D) = N$. Určte obraz vektora $\overrightarrow{v}$ v asociovanom zobrazení $\overrightarrow{f}$.

$$\begin{array}{llll} A[3;1;3], & B[0;0;2], & C[1;0;1], & D[3,1,-3], \\ K[-1;2], & L[1;1], & M[1;2], & N[2;4], \\ \overrightarrow{v}[2;1;-2] & & & \end{array}$$

Úloha 3.2.4

Daný je affinný priestor $A(A;V;-)$, body aj vektory affiného priestoru tvoria polynómy najviac tretieho stupňa nad reálnymi číslami, $-$ je operácia odčítovania dvoch polynómov. Vyjadrite affiné zobrazenie $f : A \to A$, ak viete, že $f(M) = K$, kde $M = x^3 + x^2 + x + 1$, $K = x^2 + 2$, a $\overrightarrow{f}(u) = u'$, kde u' znamená deriváciu polynómu u.

Riešenie. Hľadáme analytické vyjadrenie affiného zobrazenia $f : A \to A$, pričom platí:

$$f(M) = K, \quad \text{kde } M = x^3 + x^2 + x + 1, \quad K = x^2 + 2.$$

Ďalej je dané, že asociované lineárne zobrazenie $\overrightarrow{f}$ je derivácia polynómu:

$$\overrightarrow{f}(u) = u'.$$

Z toho vyplýva, že f má tvar:

$$f(u) = u' + C,$$

kde C je neznámy polynóm, ktorý určíme z podmienky $f(M) = K$:

$$M' + C = K.$$

Derivujeme M:

$$M' = 3x^2 + 2x + 1.$$

Dosadíme do rovnice:

$$3x^2 + 2x + 1 + C = x^2 + 2.$$

Z toho určíme C:

$$C = x^2 + 2 - (3x^2 + 2x + 1) = -2x^2 - 2x + 1.$$

Teda affiné zobrazenie f je:

$$f(ax^3+bx^2+cx+d) = 3ax^2+2bx+c-2x^2-2x+1. = (3a-2)x^2+(2b-2)x+c+1.$$

Analytické vyjadrenie affiného zobrazenia

Úloha 3.3.1

V affinnej rovine A_2 sú dané tri lineárne nezávisĺe body B, C, D a repér $\mathcal{R} = \{B; C - B, D - B\}$ určujúci LSS v A_2. Existuje práve jedno affiné zobrazenie $f : A_2 \to A_3$, také $f(B) = B'$, $f(C) = C'$ a $f(D) = D'$. Určte analytické vyjadrenie zobrazenia f:

$$B'[1; 0; 0], \qquad C'[0; 1; 0], \qquad D'[0; 0; 1]$$

Úloha 3.3.2

Napíšte analytické vyjadrenie affiného zobrazenia $f : A_2 \to A_1$, ak $f(A) = K, f(B) = L, f(C) = M$,

[(a)] A [2;1], B [3;2], C [0;1], K [2], L [0], M [10]

[(b)] A [2;1], B [3;2], C [0;1], K [2], L [0], M [8]

Úloha 3.3.3

Existuje affiné zobrazenie $f : A_2 \to A_1$, pre ktoré platí, že

$$f(A) = A', f(B) = B', f(C) = C'?$$

$$\begin{array}{cccccc} A[2;1], & B[3;2], & C[5;4], & A'[2], & B'[1], & B'[-1] \\ A[2;1], & B[3;2], & C[5;4], & A'[2], & B'[0], & B'[8] \end{array}$$

V prípade že affiné zobrazenie je určené jednoznačne? Zapíšte jeho analytické vyjadrenie.

Úloha 3.3.4

Určte analytické vyjadrenie affiného zobrazenia $f : A_4 \to A_5$, ak

$$f(K) = K', f(L) = L', f(\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{w}', f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}'$$

$$\begin{array}{lllll} K[0;1;2;3], & L[2;1;1;0], & \overrightarrow{u}[1;0;0;1], & \overrightarrow{v}[0;0;1;0], & \overrightarrow{w}[0;0;0;2], \\ K'[-5;2;2;6;7], & L'[-6;3;2;9;5], & \overrightarrow{u}'[2;0;1;0;-1], & \overrightarrow{v}'[-3;0;1;0;5], & \overrightarrow{w}'[2;0;0;0;-2] \end{array}$$

Úloha 3.3.5

V A_2 a v A_3 sú zadané LSS. Zistite, čí existuje affiné zobrazenie f, také že

$$f(K) = K', f(L) = L', f(M) = M'$$

Ako závisí riešenie úlohy od parametra p?

$$\begin{array}{ccc} K[1;0], & L[0;1], & M[2;p], \\ K'[2;1;-1], & L'[3;2;0], & M'[1;0;2] \end{array}$$

Riešenie.

1. Analytické vyjadrenie affiného zobrazenia

Affiné zobrazenie $f : A_2 \to A_3$ má tvar:

$$f(x, y) = M \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + P,$$

kde M je 3×2 matica a P je vektor posunutia.

Ľubovoľné body $P[x, y]$ a $P'[x', y']$ z A_2 vyjadríme ako lineárne kombinácie:

$$P = a \cdot K + b \cdot L + c \cdot M,$$
$$P' = a \cdot K' + b \cdot L' + c \cdot M',$$

kde $a + b + c = 1$.

Zápis v maticovom tvare: V predchádzajúcej kapitole sme ukázali, že:

$$P' = M' \times M^{-1} \times P,$$

kde M je matica vzorov a M' matica obrazov:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & p \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad M' = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Pomocou maticovej kalkulačky určíme inverznú maticu:

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{p-1}{p+1} & \frac{-2}{p+1} & \frac{2}{p+1} \\ \frac{-p}{p+1} & \frac{1}{p+1} & \frac{p}{p+1} \\ \frac{1}{p+1} & \frac{1}{p+1} & \frac{-1}{p+1} \end{bmatrix}.$$

Roznásobením:

$$P' : \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{p-1}{p+1} & \frac{-2}{p+1} & \frac{2}{p+1} \\ \frac{-p}{p+1} & \frac{1}{p+1} & \frac{p}{p+1} \\ \frac{1}{p+1} & \frac{1}{p+1} & \frac{-1}{p+1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Po vynásobení a porovnaní ľavej a pravej strany dostaneme transformačné rovnice:

$$x' = -x + 3,$$
$$y' = -x + 2,$$
$$z' = \frac{-p+3}{p+1}x + \frac{4}{p+1}y + \frac{-4}{p+1}.$$

Zobrazenie bude affinným práve vtedy, ak $p \neq -1$. Súradnice obrazu ľubovoľného bodu $P[x, y]$ určíme dosadením súradníc x, y do transformačných rovníc. Napríklad pre $D[3, 1]$ a $p = 3$ dostaneme $D'[0, -1, 0]$.

Úloha 3.3.6

Nájdite analytické vyjadrenie affiého zobrazenia, ktoré

$$\begin{array}{llll} A[1;2;3], & B[3;2;1], & C[1;-1;1], & D[2;1;0], \\ A'[0;9;-1] & B'[2;11;1], & C'[3;4;-2], & D'[2;7;1] \end{array}$$

Úloha 3.3.7

Nájdite analytické vyjadrenie affiného zobrazenia, ktoré

$$\begin{array}{llll} A[1;2;3], & B[1;1;1], & C[1;0;1], & D[0;1;3], \\ A'[5;4] & B'[2;1], & C'[1;0], & D'[3;2] \end{array}$$

Úloha 3.3.8

Nájdite analytické vyjadrenie affiného zobrazenia f, ktoré

$$\begin{array}{l} P[3;3], \to P'[7;0], \\ Q[2;1], \to Q'[4;1], \\ \overrightarrow{u}[2;1] \to \overrightarrow{u}'[3;1] \end{array}$$

Skladanie affiných zobrazení

Inverzné zobrazenie affiného zobrazenia

Úloha 3.4.1

Dokážte, že f je affiná transformácia A_2 a určte analytické vyjadrenie zobrazení f^{-1} a f^2, ak

$$\begin{aligned} A[0;2] &\to A'[1;4], \\ B[2;2] &\to B'[3;4], \\ C[2;0] &\to C'[3;0] \end{aligned}$$

Úloha 3.4.2

Nájdite analytické vyjadrenie affiného zobrazenia $f \circ g$, ak

(a)

$$\begin{aligned} f : x' &= x + 3, \\ y' &= y - 1, \\ z' &= -2x + y \end{aligned} \qquad \begin{aligned} g : x' &= x - y + z + 1 \\ y' &= x + 2y + 2z \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} f : x' &= -2x, \\ y' &= x + 3, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} g : x' &= x \\ y' &= x - y \end{aligned}$$

Úloha 3.4.3

Dané je affiné zobrazenie $f : A_3 \to A_3$

$$\begin{aligned} f : x' &= x + y - 2z + 1 \\ y' &= x - z \\ z' &= x - y - 1 \end{aligned}$$

Nájdite obraz affiného podpriestoru

(a) $x = 3 + t$, $y = -t$, $z = -1$

(b) $\alpha : x = 1 + u + v,\ y = 2 + v,\ z = 3$

(c) $\gamma : x + y + z + 3 = 0$

(d) $\delta = A_3$

Riešenie

(a) Obraz parametrických rovníc:

$$x' = -(3 + t) + (-t) - 2(1) + 1 = -3 - t - t - 2 + 1 = -4 - 2t,$$
$$y' = (3 + t) - 1 = 2 + t,$$
$$z' = (3 + t) - (-t) - 1 = 3 + t + t - 1 = 2 + 2t.$$

Teda obrazom je parametrická rovina:

$$x' = -4 - 2t,$$
$$y' = 2 + t,$$
$$z' = 2 + 2t.$$

(b) Obraz podpriestoru α:

$x' = (1 + u + v) + (-2 + v) - 2(3) + 1 = 1 + u + v - 2 + v - 6 + 1 = -2 + u + 2v,$
$y' = -2 + u + v,$
$z' = (-2 + u).$

Teda výsledné rovnice sú:

$$x' = -2 + u + 2v,$$
$$y' = -2 + u + v,$$
$$z' = -2 + u.$$

Všeobecný tvar je $x - 2y + z = 0$

(c) Obraz rovnice roviny γ: Vyjadríme $z = -x - y - 3$ a dosadíme:

$$x' = ...,$$
$$y' = ...,$$
$$z' = ...$$

Rovnica obrazu je teda rovná obrazu roviny α:$f(\gamma) = f(\alpha)$.

$$x' - 3y' + z' = 10.$$

(d) Obraz celého priestoru A_3: Keďže affinné zobrazenie je bijektívne, obrazom celého priestoru je celý priestor A_3.

Samodružné prvky afinného zobrazenia

Úloha 3.5.1.

Dané je afinné zobrazenie $f : A_3 \to A_3$

$$f: \quad \begin{aligned} x' &= x - y + z + 1 \\ y' &= -x + y + z + 2 \\ z' &= -x - y + 3z + 3 \end{aligned}$$

Určte samodružné body a samodružné smery afinného zobrazenia f.

Úloha 3.5.2.

Dané je afinné zobrazenie $f : A_2 \to A_2$

$$f: \quad \begin{aligned} x' &= 2x - y + 1 \\ y' &= -x + 2y + 3 \end{aligned}$$

Určte samodružné body a samodružné smery afinného zobrazenia f.

Úloha 3.5.3.

V A_2 sú dané nekolineárne body A, B, C. Nájdite samodružné body a samodružné smery afinného zobrazenia f, ak

1. $f(A) = B, \quad f(B) = A, \quad f(C) = C$;
2. $f(A) = B, \quad f(B) = C, \quad f(C) = A$.

Úloha 3.5.4.

Dané je afinné zobrazenie $f : A_2 \to A_2$

$$f: \quad \begin{aligned} x' &= y \\ y' &= x \end{aligned}$$

Určte samodružné body a samodružné smery a samodružné priamky afinného zobrazenia f.

Úloha 3.5.5.

Určte samodružné body, samodružné smery a samodružné priamky afinného zobrazenia f:

$$f: \quad \begin{aligned} x' &= x + 2y + 3 \\ y' &= 2x - y + 1 \end{aligned}$$

Úloha 3.5.6.

Určte samodružné body, samodružné smery a samodružné priamky afinného zobrazenia f:

$$f: \quad \begin{aligned} x' &= -x + 4y - 2 \\ y' &= 2x - 3y + 2 \end{aligned}$$

Úloha 3.5.7.

Určte samodružné body, samodružné smery a samodružné priamky afinného zobrazenia f:

$$f: \quad \begin{aligned} x' &= 2x - 2 \\ y' &= -6x - y + 14 \\ z' &= 19x + 6y + z - 44 \end{aligned}$$

Úloha 3.5.8.

Napíšte analytické vyjadrenie afinnoho zobrazenia f v affinnom priestore A_3, ak M je samodružný bod af. zobrazenia f a $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sú charakteristické vektory asociovaného homomorfizmu $\tilde{f}$, pričom $\vec{u}$ a $\vec{v}$ príslušných charakteristickému číslu $\lambda_1 = 2$ a vektor $\vec{w}$ prislúchá charakteristickému číslu $\lambda_2 = -1$:

$$M[1;0;0], \quad \vec{u}(1;0;1), \quad \vec{v}(1;0;-1), \quad \vec{w}(0;1;-2)$$

Úloha 3.5.9.

Dokážte, že všetky smery affinnoho priestoru A_n sú samodružné smery každého posunutia v A_n.

Úloha 3.5.10.

Dokážte, že každý smer v A_n je samodružným smerom každej rovnoľahlosti v A_n.

Homotetické transformácie

Úloha 3.6.1.

Rovnoložnosť je daná rovnicami

$$\begin{aligned} x' &= 3x - 4 \\ y' &= 3y + 1 \end{aligned}$$

Nájdite jej stred S a charakteristiku h.

Úloha 3.6.2.

Rovnoľahlosť κ je daná charakteristikou $h = \frac{2}{3}$ a dvojicou odpovedajúcich si bodov $A[3;1]$, $A'[2;4]$. Určte súradnice stredu S rovnoľahlosti κ.

Úloha 3.6.3.

V rovine je daný bod $S(1;-3)$ a priamky p, p':

$$\begin{aligned} p: &\quad 3x + 5y - 15 = 0, \\ p': &\quad ax + 7y - 1 = 0. \end{aligned}$$

Určte hodnotu a, pre ktorú priamky p v rovnoľahlosti so stredom S bola priamka p' a určte jej charakteristiku.

Úloha 3.6.4.

Určte stred a charakteristiku rovnoľahlosti κ a reálne čísla r, s, tak, aby $H[1;?]$ bol jej samodružný bod, bod $M'[3;1]$ bol obrazom bodu $M[2;4]$ a priamka a' obrazom priamky a v rovnoľahlosti κ:

$$\begin{aligned} a: &\qquad y &= 0, \\ a': &\ rx + 4y + s &= 9. \end{aligned}$$

Úloha 3.6.5.

Určte stred rovnoľahlosti κ, ktorej charakteristika $h = 3$, ak viete, že priamka m sa v nej zobrazí do priamky m' a že priesečník priamky m s osou x sa zobrazí do bodu, ktorého y-ová súradnica je rovná $\frac{1}{3}$:

$$\begin{aligned} m: &\quad 2x - 3y + 1 = 0, \\ m': &\quad x + ty + 1 = 0. \end{aligned}$$

Úloha 3.6.6.

Určte p tak, aby existovala rovnoľahlosť so stredom $S[3;2]$, ktorá bod $A[1;4]$ zobrazí do bodu $B[2;p]$. Napíšte rovnice tejto rovnoľahlosti.

Úloha 3.6.7

Napíšte analytické vyjadrenie rovnoľahlosti v A_3, ak charakteristické číslo $\lambda = -2$ a obrazom bodu $B[2;0;-1]$ je bod $C[0;1;3]$. Určte stred tejto rovnoľahlosti.

Úloha 3.6.8

Napíšte analytické vyjadrenie homotetickej transformácie f, pre ktorú $f(K) = K' \wedge f(L) = L'$. Určte samodružné body zobrazenia f.

$$K[3;2],\ L[1;-1],\ K'[2;1],\ L'[0;?]$$

Úloha 3.6.9

Dané je afinne zobrazenie

$$f: \begin{cases} x' = 4x + 3 \\ y' = 4y \\ z' = 4z - 6 \end{cases}$$

Zistite, či je f homotétia. Ak áno, určte presnejšie o akú homotétiu ide.

Úloha 3.6.10

V afinnom priestore A_3 sú dané rovnoľahlosti f so stredom $S[1;-2;3]$ a koeficientom $\lambda = \frac{3}{4}$ a posunutie g, vektorom posunutia je $\vec{u}[0;1;-1]$.

(a) Určte, aká transformácia vznikne zložením $f \circ g$,

(b) Určte, aká transformácia vznikne zložením $g \circ f$,

(c) Overte, že rovnoľahlosť, ktorú ste dostali v (a), má stred $H = S + \frac{1}{1-\lambda}\vec{u}$,

(d) Overte, že rovnoľahlosť, ktorú ste dostali v (b), má stred $U = S + \frac{\lambda}{1-\lambda}\vec{u}$.

Základné afinné zobrazenia

Úloha 3.7.1

Napíšte rovnicu osovej afinity, ktorej osou je súradnicová os x a zobrazuje bod $[0; 1]$ na bod $[3; 5]$.

Úloha 3.7.2

Napíšte rovnicu základnej afinity v priestore A_3, ktorej množinou samodružných bodov je rovina $\rho : x + 2y - z + 1 = 0$ a počiatok LSS P sa zobrazí do bodu $Q[0; 0; 2]$.

Úloha 3.7.3

Napíšte analytické vyjadrenie afinity f, ktorá zobrazuje body $A[1; 2; 3]$, $B[0; 1; 0]$, $C[-1; 0; 1]$ sú samodružné a bod $D[2; 0; 1]$ sa zobrazí do počiatku LSS. Môžeme využívať, že f je základná afinita, Prečo?

Úloha 3.7.4

Napíšte rovnicu osovej afinity, ktorej osou je priamka $x - y + 1 = 0$ a počiatok LSS sa zobrazí na bod $[4; ?]$.

Základné vlastnosti zhodných zobrazení

Úloha 4.1.1

Zistite, či existuje zhodné zobrazenie z $\mathbb{E}_2$ do $\mathbb{E}_3$, pričom $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $A[1;2]$, $B[2;-3]$, $A'[4;1;0]$, $B'[6;5;0]$.

Úloha 4.1.2

a) Určte a, $b \in \mathbb{R}$ tak, aby existovalo zhodné zobrazenie z $\mathbb{E}_2$ do $\mathbb{E}_2$, pri ktorom $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$.
$A[0;0]$, $B[2;1]$, $C[4;a]$, $A'[1;2]$, $B'[3;1]$, $C'[5;b]$.
b) Je zobrazenie f určené a v jedinečnosti? Svoju odpoveď zdôvodnite.

Úloha 4.1.3

Určte a, $b \in \mathbb{R}$ tak, aby existovalo zhodné zobrazenie $f : \mathbb{E}_2 \to \mathbb{E}_2$, pre ktoré $[0;0] \to [1;2]$, $[2;1] \to [3;1]$, $[4;a] \to [6;b]$.
Je takto určené zobrazenie f dané jednoznačne?

Úloha 4.1.4

V zhodnom zobrazení $f : \mathbb{E}_3 \to \mathbb{E}_3$ sú body $K[0;0;0]$, $L[1;1;1]$ samodružné a bod $A[1;-1;0]$ sa zobrazí do roviny $x = 0$. Určte súradnice bodu $f(A)$.

Úloha 4.1.5

V $\mathbb{E}_2$ je daný štvorec $ABCD$. Koľko zhodných zobrazení euklidovskej roviny $\mathbb{E}_2$ do seba reprodukujúcich štvorec $ABCD$ existuje? Vypíšte ich.

Úloha 4.1.6

Koľko zhodných zobrazení f v $\mathbb{E}_3$ existuje, ak
$[1;2;1] \to [1;-2;-1]$, $[0;0;3] \to [0;0;r]$ $r \in R$,
$[0;3;0] \to [0;-3;0]$,$[1;1;s] \to [-1;-1;t]$, $r, s \in R$.?

Úloha 4.1.7

Určte s, $r \in \mathbb{R}$ tak, aby $f : \mathbb{E}_3 \to \mathbb{E}_3$ bolo zhodné zobrazenie, pre ktoré
$\vec{f}(\vec{u}) = -\vec{u}$, $\vec{f}(\vec{v}) = \vec{v}, fA) = P$, $f(P) = A$,
$\vec{u} = (1; -2; 0)$,$\vec{v} = (s; 1; r)$,$A[3; 2; 1]$, P je počiatok KSS.

Úloha 4.1.8

Určte r, p, q, $r \in \mathbb{R}$ tak, aby $f : \mathbb{E}_3 \to \mathbb{E}_3$ bolo zhodné zobrazenie, v ktorom body A, B, C sú samodružné a bod D sa zobrazí do bodu D':
$A[0; 0; 0]$, $B[0; 0; 1]$, $C[1; 1; 1]$, $D[0; 1; 0]$, $D'[r; p; q]$.

Analytické vyjadrenie zhodného zobrazenia

Úloha 4.2.1

Dané je analytické vyjadrenie zobrazenia

$$f : \begin{cases} x' = x + by - 2, \\ y' = \frac{1}{2}y + 1, \\ z' = ax + cy - 3. \end{cases}$$

Doručte $a, b, c \in \mathbb{R}$ tak, aby f bolo zhodné zobrazenie.

Úloha 4.2.2

Dané je zobrazenie

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,$$

kde

$$A[3; 0] \to A'[1; 5; 1], \quad B[0; 3] \to B'[-3; 4; p], \quad C[3; 3] \to C'[-1; 6; 3].$$

a) Určte $p \in \mathbb{R}$ tak, aby f bolo zhodné zobrazenie.

b) Napíšte rovnice zobrazenia f.

c) Určte obraz počiatku $P[0; 0]$ v zobrazení f.

Úloha 4.2.3

Napíšte analytické vyjadrenie všetkých zhodných zobrazeníreprodukujúcich štvorec. Zvoľte vhodne KSS.

Úloha 4.2.4

V zhodnom zobrazeníf sú body $A[0; 0; 0]$, $B[1; 1; 1]$ samodružné a bod $C[1; -1; 0]$ sa zobrazído roviny $\gamma : y+1 = 0$. Určte obraz bodu C. Koľko riešenímá úloha?

Úloha 4.2.5

a) Určte parameter s tak, aby existovala zhodnosť f v $\mathbb{R}^2$ taká, že

$$f(A) = B, \quad f(C) = D, \quad A[0;0],\ B[5;0],\ C[3;4],\ D[9;s].$$

b) Napíšte analytické vyjadrenie zhodnosti f.

c) Určte obraz bodu B v zhodnosti f.

Samodružné prvky zhodného zobrazenia

Úloha 4.3.1

Dané je zobrazenie

$$f : \begin{cases} [3;0] \to [1;4], \\ [1;2] \to [p;2], \\ [-1;-1] \to [2;q]. \end{cases}$$

Určte $p, q \in \mathbb{R}$ tak, aby f bolo zhodné zobrazenie a určte jeho samodružné body a smery.