Riešenie úlohy 2.1.7

Nech pre vektory $\vec{a}, \vec{b}$ platí:

$$\begin{aligned}
\|\vec{a}\| &= 3,\\
\|\vec{b}\| &= 1,\\
\cos\theta &= \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},
\end{aligned}$$

kde θ je uhol medzi vektormi $\vec{a}$ a $\vec{b}$.

Časť a) $\cos\varphi$ pre $\vec{a}+2\vec{b}$ a $3\vec{a}$

Vypočítame skalárny súčin:

$$\begin{aligned}
(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(3\vec{a}) &= 3(\vec{a}\cdot\vec{a}+2\vec{a}\cdot\vec{b})\\
&= 3(\|\vec{a}\|^2+2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\theta)\\
&= 3(9+2(3)(1)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2})\\
&= 3(9+3\sqrt{3})\\
&= 27+9\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

Normy vektorov:

$$\begin{aligned}
\|\vec{a}+2\vec{b}\| &= \sqrt{\|\vec{a}\|^2+4\|\vec{b}\|^2+4\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\theta}\\
&= \sqrt{9+4+4(3)(1)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}\\
&= \sqrt{13+6\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

$$\|3\vec{a}\| = 3\|\vec{a}\| = 9.$$

Nakoniec,

$$\begin{aligned}
\cos\varphi &= \frac{(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(3\vec{a})}{\|\vec{a}+2\vec{b}\|\|3\vec{a}\|}\\
&= \frac{27+9\sqrt{3}}{9\sqrt{13+6\sqrt{3}}}\\
&= \frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{13+6\sqrt{3}}}.
\end{aligned}$$

Časť b) $\cos\psi$ pre $\vec{a}+2\vec{b}$ a $\vec{a}$

Vypočítame skalárny súčin:

$$\begin{aligned}(\vec{a}+2\vec{b})\cdot\vec{a} &= \vec{a}\cdot\vec{a}+2\vec{b}\cdot\vec{a}\\ &= \|\vec{a}\|^2+2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\theta\\ &= 9+6\frac{\sqrt{3}}{2}\\ &= 9+3\sqrt{3}.\end{aligned}$$

Normy vektorov:

$$\|\vec{a}\| = 3.$$

Nakoniec,

$$\begin{aligned}\cos\psi &= \frac{(\vec{a}+2\vec{b})\cdot\vec{a}}{\|\vec{a}+2\vec{b}\|\|\vec{a}\|}\\ &= \frac{9+3\sqrt{3}}{3\sqrt{13+6\sqrt{3}}}\\ &= \frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{13+6\sqrt{3}}}.\end{aligned}$$