Afinný Priestor

Príklady

Pavol Hanzel
Fakulta prírodných vied UMB

Príklad 1: Afinný priestor na rovine

- **Množina bodov** A: množina všetkých bodov v rovine $\mathbb{R}^2$.
- **Vektorový priestor** V: $\mathbb{R}^2$ ako vektorový priestor nad poľom $\mathbb{R}$.
- **Zobrazenie** f:

$$f((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1).$$

Zdôvodnenie: Príklad 1

- $f(X,Y)+f(Y,Z)=f(X,Z)$: Platí, pretože operácie s vektormi $f(X,Y)$ sú v $\mathbb{R}^2$ komutatívne aj asociatívne.

$$\begin{aligned} f(X,Y)+f(Y,Z) &= (x_2-x_1, y_2-y_1)+(x_3-x_2, y_3-y_2) \\ &= (x_3-x_1, y_3-y_1) = f(X,Z) \end{aligned}$$

Zdôvodnenie: Príklad 1

- $f(X,Y)+f(Y,Z)=f(X,Z)$: Platí, pretože operácie s vektormi $f(X,Y)$ sú v $\mathbb{R}^2$ komutatívne aj asociatívne.

$$\begin{aligned} f(X,Y)+f(Y,Z) &= (x_2-x_1, y_2-y_1)+(x_3-x_2, y_3-y_2) \\ &= (x_3-x_1, y_3-y_1) = f(X,Z) \end{aligned}$$

- Nech $P[x_p, y_p], X[x_1, y_1] \in \mathbb{R}^2$. Dokážeme, že $f_P(X)=f(P,X)$ je bijektívne zobrazenie.

Zdôvodnenie: Príklad 1

- $f(X,Y)+f(Y,Z)=f(X,Z)$: Platí, pretože operácie s vektormi $f(X,Y)$ sú v $\mathbb{R}^2$ komutatívne aj asociatívne.

$$\begin{aligned} f(X,Y)+f(Y,Z) &= (x_2-x_1, y_2-y_1)+(x_3-x_2, y_3-y_2) \\ &= (x_3-x_1, y_3-y_1) = f(X,Z) \end{aligned}$$

- Nech $P[x_p, y_p], X[x_1, y_1] \in \mathbb{R}^2$. Dokážeme, že $f_P(X) = f(P,X)$ je bijektívne zobrazenie.

  Pre ľubovoľné bod $X \in \mathbb{R}^2$ existuje jediný vektor $v \in \mathbb{R}^2$, pre ktorý $X - P = \vec{v}$. Zrejme

$$\vec{v} = (x_p - x_1, y_p - y_1)$$

Zdôvodnenie: Príklad 1

- $f(X,Y) + f(Y,Z) = f(X,Z)$: Platí, pretože operácie s vektormi $f(X,Y)$ sú v $\mathbb{R}^2$ komutatívne aj asociatívne.

$$\begin{aligned} f(X,Y) + f(Y,Z) &= (x_2 - x_1, y_2 - y_1) + (x_3 - x_2, y_3 - y_2) \\ &= (x_3 - x_1, y_3 - y_1) = f(X,Z) \end{aligned}$$

- Nech $P[x_p, y_p], X[x_1, y_1] \in \mathbb{R}^2$. Dokážeme, že $f_P(X) = f(P,X)$ je bijektívne zobrazenie.

  Pre ľubovoľné bod $X \in \mathbb{R}^2$ existuje jediný vektor $v \in \mathbb{R}^2$, pre ktorý $X - P = \vec{v}$. Zrejme
  $$\vec{v} = (x_p - x_1, y_p - y_1)$$

  Naopak, pre každý $v \in \mathbb{R}^2$ existuje presne jeden bod X, taký že $f(P,X) = v$. Pre súradnice bodu X platí: $X = P + \vec{v}$.

Príklad 2: Afinný priestor v trojrozmernom priestore

- **Množina bodov** A: množina všetkých bodov v trojrozmernom priestore $\mathbb{R}^3$.
- **Vektorový priestor** V: $\mathbb{R}^3$ ako vektorový priestor nad poľom $\mathbb{R}$.
- **Zobrazenie** f:

$$f((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

Zdôvodnenie: Príklad 2

- $f(X,Y)+f(Y,Z)=f(X,Z)$: Platí, pretože operácie s vektormi $f(X,Y)$ sú v $\mathbb{R}^2$ komutatívne aj asociatívne.

  Dokážeme podobne ako v predchádzajúcom príklade.

Zdôvodnenie: Príklad 2

- $f(X,Y)+f(Y,Z)=f(X,Z)$: Platí, pretože operácie s vektormi $f(X,Y)$ sú v $\mathbb{R}^2$ komutatívne aj asociatívne.

  Dokážeme podobne ako v predchádzajúcom príklade.

- Nech $P[x_p,y_p,z_p], X[x_1,y_1,z_1] \in \mathbb{R}^3$. Dokážeme, že $f_P(X)=f(P,X)$ je bijektívne zobrazenie.

Zdôvodnenie: Príklad 2

- $f(X,Y)+f(Y,Z)=f(X,Z)$: Platí, pretože operácie s vektormi $f(X,Y)$ sú v $\mathbb{R}^2$ komutatívne aj asociatívne.

  Dokážeme podobne ako v predchádzajúcom príklade.

- Nech $P[x_p,y_p,z_p], X[x_1,y_1,z_1] \in \mathbb{R}^3$. Dokážeme, že $f_P(X)=f(P,X)$ je bijektívne zobrazenie.

  Pre každý bod $X[x_1,y_1,z_1] \in \mathbb{R}^3$ môžeme jednoznačne nájsť vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, pre ktorý $X-P=\vec{v}$.

Zdôvodnenie: Príklad 2

- $f(X,Y)+f(Y,Z)=f(X,Z)$: Platí, pretože operácie s vektormi $f(X,Y)$ sú v $\mathbb{R}^2$ komutatívne aj asociatívne.

  Dokážeme podobne ako v predchádzajúcom príklade.

- Nech $P[x_p, y_p, z_p], X[x_1, y_1, z_1] \in \mathbb{R}^3$. Dokážeme, že $f_P(X) = f(P,X)$ je bijektívne zobrazenie.

  Pre každý bod $X[x_1, y_1, z_1] \in \mathbb{R}^3$ môžeme jednoznačne nájsť vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, pre ktorý $X - P = \vec{v}$.

  Zároveň, každý vektor $v \in \mathbb{R}^3$ určuje jediný bod X, pre ktorý $f(P,X) = \vec{v}$ resp. $X = P + \vec{v}$

Príklad 3: Afinný priestor v komplexnej rovine

- **Množina bodov** A: množina všetkých bodov v komplexnej rovine $\mathbb{C}$.
- **Vektorový priestor** V: $\mathbb{C}$ ako vektorový priestor nad poľom $\mathbb{R}$.
- **Zobrazenie** f:

$$f(z_1, z_2) = z_2 - z_1.$$

Zdôvodnenie: Príklad 3

- Vychádza z vlastností Gausovej roviny komplexných čísel.

Zdôvodnenie: Príklad 3

- Vychádza z vlastností Gausovej roviny komplexných čísel.
- Každé komplexné číslo $z \in \mathbb{C}$ môže byť reprezentované ako $z - z_0$, pričom z_0 je pevne zvolený bod, napr. $z_0[0, 0]$.

Zdôvodnenie: Príklad 3

- Vychádza z vlastností Gausovej roviny komplexných čísel.
- Každé komplexné číslo $z \in \mathbb{C}$ môže byť reprezentované ako $z - z_0$, pričom z_0 je pevne zvolený bod, napr. $z_0[0, 0]$.
- Naopak, každý rozdiel $v \in \mathbb{C}$ určuje jediný bod z, pre ktorý $f(z_0, z) = v$.

Bijektívnosť vyplýva zo štruktúry komplexných čísel.

Príklad 4: Afinný priestor na množine polynómov

- **Množina bodov** A: množina všetkých polynómov stupňa najviac n nad poľom $\mathbb{R}$.
- **Vektorový priestor** V: vektorový priestor všetkých polynómov stupňa najviac n, tiež P_n, nad poľom $\mathbb{R}$.
- **Zobrazenie** f:

$$f(P, Q) = Q - P.$$

Zdôvodnenie: Príklad 4

- $f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R)$.

Zdôvodnenie: Príklad 4

- $f(P,Q) + f(Q,R) = f(P,R)$.

  Platí, pretože množina polynómov spolu s operáciou sčítania je Abelova grupa.

Zdôvodnenie: Príklad 4

- $f(P,Q) + f(Q,R) = f(P,R)$.

  Platí, pretože množina polynómov spolu s operáciou sčítania je Abelova grupa.

- $f_{P_0}(P) = f(P_0, P)$ je bijektívne.

Zdôvodnenie: Príklad 4

- $f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R)$.

  Platí, pretože množina polynómov spolu s operáciou sčítania je Abelova grupa.

- $f_{P_0}(P) = f(P_0, P)$ je bijektívne.

  Každý polynóm $P \in P_n$ môže byť reprezentovaný ako $P - P_0$, kde P_0 je pevne zvolený polynóm.

Zdôvodnenie: Príklad 4

- $f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R)$.

  Platí, pretože množina polynómov spolu s operáciou sčítania je Abelova grupa.

- $f_{P_0}(P) = f(P_0, P)$ je bijektívne.

  Každý polynóm $P \in P_n$ môže byť reprezentovaný ako $P - P_0$, kde P_0 je pevne zvolený polynóm.

  Naopak, každý rozdiel $R \in P_n$ určuje jedinečný polynóm P, pre ktorý $f(P_0, P) = R$. Táto vlastnosť zaručuje bijektívnosť.

Príklad 5: Afinný priestor na časovej osi

- **Množina bodov** A: množina všetkých časových okamihov $\mathbb{R}$.
- **Vektorový priestor** V: $\mathbb{R}$ ako vektorový priestor nad poľom $\mathbb{R}$.
- **Zobrazenie** f:

$$f(t_1, t_2) = t_2 - t_1.$$

Zdôvodnenie: Príklad 5

- $f(t_1, t_2) + f(t_2, t_3) = f(t_1, t_3)$: Platí, pretože rozdiel časových okamihov je asociatívny.

Zdôvodnenie: Príklad 5

- $f(t_1, t_2) + f(t_2, t_3) = f(t_1, t_3)$: Platí, pretože rozdiel časových okamihov je asociatívny.
- $f_{t_0}(t) = f(t_0, t)$ je bijektívne: Každý časový okamih $t \in \mathbb{R}$ môže byť reprezentovaný jediným rozdielom $t - t_0$ vzhľadom na pevne zvolený bod t_0.

Zdôvodnenie: Príklad 5

- $f(t_1, t_2) + f(t_2, t_3) = f(t_1, t_3)$: Platí, pretože rozdiel časových okamihov je asociatívny.
- $f_{t_0}(t) = f(t_0, t)$ je bijektívne: Každý časový okamih $t \in \mathbb{R}$ môže byť reprezentovaný jediným rozdielom $t - t_0$ vzhľadom na pevne zvolený bod t_0.

  Naopak, každý rozdiel $d \in \mathbb{R}$ určuje jedinečný časový okamih t, pre ktorý $f(t_0, t) = d$. To garantuje bijektívnosť.