
AFINNÉ TRANSFORMÁCIE

Východiskové pojmy

Author

Who?

Where?

When?

Obsah

1	Pripomenutie pojmov	3
1.1	Grupa	3
1.2	Teleso	3
1.3	Vektorový priestor	4
1.4	Afinný bodový priestor	5
1.5	Afinné súradnice bodov	9
1.6	Euklidovský bodový priestor	11
1.7	Geometrické zobrazenia	12
2.1	Citation	13

1 Pripomenutie pojmov

1.1 Grupa

Definícia 1.1. Grupou $(M, *)$ rozumieme množinu M spolu s operáciou $*$ na M , ktorá má tieto vlastnosti:

- i) $\forall x, y \in M; x * y \in M$,
Operácia $*$ je neomezene definovaná na M . (Množina M je uzavretá vzhľadom k operácii $*$.)
- ii) $\forall x, y, z \in M; x * (y * z) = (x * y) * z \in M$
Operácia $*$ je asociatívna.
- iii) $\exists e \in M, \forall x \in M; e * x = x * e = x$,
Existuje neutrálny prvok
- iv) $\forall x \in M, \exists y \in M; x * y = y * x = e$. Ku každému prvku existuje prvok inverzný vzhľadom k operácii $*$.

Ak operácia $+$ je navyše komutatívna, grupa nazýva sa komutatívna grupa alebo Abelova grupa.

Príklady grúp

1. Číselné obory spolu s operáciou sčítania: $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$,
2. Číselné obory spolu s operáciou násobenia: $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$.
3. Uvažujme rovnostranný trojuholník ABC v rovine ρ . Grupou je potom množina všetkých transformácií roviny, v ktorých sa trojuholník zobrazí sám do seba spolu s operáciou skladania transformácií (grupa symetrií).

Úloha 1.

Popíšte grupu symetrií, ktorá reprodukuje štvorec v rovine \mathbb{E}^2 . Vytvorte vhodný applet v GeoGebre. Pozrite si ukážku Tu

1.2 Teleso

Definícia 1.2. Štruktúra $(T, +, \cdot)$ sa nazýva **teleso**, práve vtedy, keď operácie $(+, \cdot)$ - sú distribuívne.

Ak $(T, +)$ je komutatívna grupa a keď $(T \setminus \{0\}, \cdot)$ je tiež komutatívna grupa hovoríme o komutatívnom telese.

Úloha 2.

Uveďte aspoň tri príklady telies.

1.3 Vektorový priestor

Definícia 1.3. Nech T je komutatívne teleso. Množinu V nazveme **vektorový priestor nad telesom T** práve vtedy, keď sú na V definované dve operácie:

1. Sčítanie vektorov:
ľubohľej dvojici vektorov $\vec{u}, \vec{v} \in V$ je jednoznačne priradený súčet (vektor) $\vec{u} + \vec{v} \in V$.
2. Násobenie skalárom:
pre ľubohľý vektor $\vec{u} \in V$ a skalár $a \in T$ je jednoznačne priradený súčin $a\vec{u} \in V$.

Pritom sú splnené nasledujúce vlastnosti:

- štruktúra $(V, +)$ je komutatívna grupa,
- platí distributívnosť: $(a + b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$, $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$,
- pre jednotkový prvok skalárneho násobenia $1 \in T$ platí: $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$.

Príklady vektorových priestorov

1. Množina \mathbb{R}^2 všetkých usporiadaných dvojíc reálnych čísel s operáciami
 - sčítania usporiadaných dvojíc: $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$,
 - násobenia: $k \cdot (a_1, a_2) = (ka_1, ka_2)$.(tzv. aritmetický vektorový priestor \mathbb{R}^2 nad telesom reálnych čísel)
2. Množina orientovaných úsečiek (vektorov) spolu s operáciou sčítania vektorov a násobenia reálnym číslom.

Úloha 3.

Dokážte, že uvedené štruktúry spĺňajú všetky podmienky vektorového priestoru.

Úloha 4.

Na množine \mathbb{V} usporiadaných trojíc

$$\mathbb{V} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 + x_2 - 2x_3 = 0\}$$

sú dané: obvyklá operácia sčítania trojíc a násobenie trojíc skalárom.

- Dokážte, že $(\mathbb{V}, +, \cdot)$ je dvojrozmerný vektorový priestor nad poľom \mathbb{R} .
- Určte jeho bázu. (Dva lineárne nezávislé vektory.)
- Vytvorte applet v 3D Geogebre. Pozri obr. 1.

1.4 Afinný bodový priestor

Definícia 1.4. Pod afinným priestorom rozumieme usporiadanú trojicu $\mathbb{A} = (\mathcal{A}; \mathbb{V}; f)$, pričom množina \mathbb{A} je neprázdna (jej prvky sú body), \mathbb{V} je vektorový priestor a f je zobrazenie

$$f : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{V}; (X, Y) \mapsto \overrightarrow{XY}$$

spĺňajúce podmienky

$$(A1) \quad \forall X, Y, Z \in \mathcal{A} \text{ platí } \overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ} = \overrightarrow{XZ}$$

$$(A2) \quad \forall X \in \mathcal{A}, \vec{u} \in \mathbb{V} \text{ existuje práve jeden bod } Y \in \mathcal{A}, \text{ pre ktorý } f(X, Y) = \vec{u}$$

Poznámky

1. Podmienka (A2) oovorí, že zobrazenie f je bijekcia.
2. Množinu \mathcal{A} nazývame afinný priestor, vektorový priestor \mathbb{V} nazývame **zameranie** afinného priestoru \mathbb{A} .
3. Dimenzia (alebo rozmer) afinného priestoru je číslo, ktoré je dimenziou jeho zamerania.
4. Afinný priestor dimenzie 0, 1, 2 budeme v poradí nazývať **bod, priamka, rovina**.
5. Nech $\mathbb{A} = (\mathcal{A}; \mathbb{V}; f)$ je afinný priestor, potom v \mathbb{A} môžeme definovať zobrazenie $g : \mathcal{A} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathcal{A}$ nasledovne

$$g(X, \vec{u}) = Y \Leftrightarrow f(X, Y) = \vec{u}. \quad (1)$$

6. $(n - 1)$ -rozmerný podpriestor n -rozmerného afinného priestoru \mathcal{A} nazývame **nadrovina**.
7. Afinný priestor, ktorého zameraním je vektorový priestor nad pol'om reálnych čísel nazývame **reálny afinný priestor**. Symbolicky $\mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n; f)$
8. Zobrazenie f v reálnom afinnom priestore je definované ako odčítanie po zložkách:

$$f(X, Y) = Y - X = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, \dots, y_n - x_n) \quad (2)$$

a zrejme potom

$$g(X, \vec{u}) = X + \vec{u} = [x_1 + u_1, x_2 + u_2, \dots, x_n + u_n], \quad (3)$$

kde $X[x_1, x_2, \dots, x_n], Y[y_1, y_2, \dots, y_n], \vec{u}(u_1, u_2, \dots, u_n)$.

Veta 1.1. Nech X, Y, A, B, C, D sú body afinného priestoru \mathcal{A} ; potom

$$\overrightarrow{XX} = \vec{0} \quad (4)$$

$$\overrightarrow{XY} = -\overrightarrow{YX} \quad (5)$$

$$\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{XY} \Rightarrow X = Y \quad (6)$$

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} \quad (7)$$

Dokážte tieto tvrdenia.

K tvrdeniu (7) navrhnete vhodný applet v GeoGebre. Využite vlastnosť, že $(\mathbb{V}, +)$ je grupa, v ktorej platí: $AB - CD = (AC + CB) - (CB + BD)$.

Príklad 1. Nech

$$\mathcal{A} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 + x_2 - 2x_3 = 5$$

$$\mathbb{V} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$$

Dokážte, že trojica $(\mathcal{A}, \mathbb{V}, f)$, kde $f([X, Y]) = Y - X$ je obvyklá operácia odčítania trojíc, je dvojrozmerný afinný priestor nad poľom reálnych čísel.

Riešenie.

Musíme overiť platnosť podmienok (A1) a (A2).

$$(A1) \quad \forall X, Y, Z \in \mathcal{A} \text{ platí } \overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ} = \overrightarrow{XZ}$$

$$(A2) \quad \forall X \in \mathcal{A}, \vec{u} \in \mathbb{V} \text{ existuje práve jeden bod } Y \in \mathcal{A}, \text{ pre ktorý } f(X, Y) = \vec{u}.$$

1 Nech

$$X = \left[x_1, x_2, \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - 5) \right], Y = \left[y_1, y_2, \frac{1}{2}(y_1 + y_2 - 5) \right], Z = \left[z_1, z_2, \frac{1}{2}(z_1 + z_2 - 5) \right],$$

potom

$$\overrightarrow{XY} = \left(y_1 - x_1, y_2 - x_2, \frac{y_1 + y_2 - 5}{2} - \frac{x_1 + x_2 - 5}{2} \right) = \left(y_1 - x_1, y_2 - x_2, \frac{(y_1 - x_1) + (y_2 - x_2)}{2} \right)$$

$$\overrightarrow{YZ} = \left(z_1 - y_1, z_2 - y_2, \frac{z_1 + z_2 - 5}{2} - \frac{y_1 + y_2 - 5}{2} \right) = \left(z_1 - y_1, z_2 - y_2, \frac{(z_1 - y_1) + (z_2 - y_2)}{2} \right)$$

po sčítaní dostaneme požadovaný výsledok - **podmienka (A1) je splnená.**

2 Nech je daný bod $X = [x_1, x_2, \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - 5)]$ a vektor $\vec{u} = (u_1, u_2, \frac{1}{2}(u_1 + u_2))$. Potom zrejme existuje bod

$$Y = \left[x_1 + u_1, x_2 + u_2, \frac{1}{2}((x_1 + u_1) + (x_2 + u_2) - 5) \right],$$

pre ktorý platí $f(X, Y) = Y - X = \overrightarrow{XY} = \vec{u}$. Teda zobrazenie $f_P = f(P, X)$ je zobrazené **surjektívne** - "na".

Ukážeme, že zobrazenie f je **prosté** zobrazenie (injektívne). Nech $X, Y \in \mathcal{A}$ sú ľubovoľné dva rôzne body a nech $\vec{u} = (u_1, u_2, \frac{1}{2}(u_1 + u_2))$ je pevne zvolený vektor množiny \mathcal{V} . Potom je $(x_1 \neq y_1) \vee (x_2 \neq y_2)$ a zrejme aj obrazy

$$f(P, X) = \left(p_1 - x_1, p_2 - x_2, \frac{1}{2}((p_1 - x_1) - (p_2 - x_2)) \right)$$

$$f(P, Y) = \left(p_1 - y_1, p_2 - y_2, \frac{1}{2}((p_1 - y_1) - (p_2 - y_2)) \right)$$

sú dva rôzne body. Teda zobrazenie $f_P = f(P, X)$ je **prosté**.

Odtiaľ dostávame, že **podmienka (A2) je splnená**.

Príklad 2. Daná je množina usporiadaných dvojíc

$$\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, x < -|a|\}$$

pre pevne zvolené $a, b \in \mathbb{R}$ a zobrazenie

$$f : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{V}; f([x_1, y_1], [x_2, y_2]) = y_1 - y_2$$

Dokážte, že trojica $(\mathcal{A}, \mathbb{R}, f)$ je jednorozmerný afinný priestor nad poľom reálnych čísel.

Riešenie.

Ukážeme platnosť podmienky (A1) a dôkaz platnosti podmienky (A2) prenechávame čitateľovi.

(A1) Pre ľubovoľne zvolené tri body $A[x_a, y_a], B[x_b, y_b], C[x_c, y_c]$ z definície zobrazenia f platí: (Otvore si applet k obrázku 1.4)

$$f(A, B) = f([x_a, y_a], [x_b, y_b]) = y_a - y_b$$

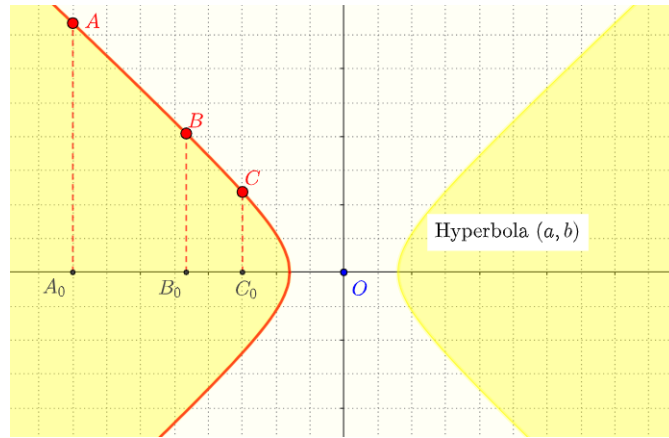
$$f(B, C) = f([x_b, y_b], [x_c, y_c]) = y_b - y_c$$

po dosadení dostaneme

$$f(A, C) = f([x_a, y_a], [x_c, y_c]) = y_a - y_c = f(A, B) + f(B, C). \quad \square$$

(A1) Preskúmame ako vyzerajú vektory priestoru \mathbb{V} . Podľa definície zobrazenia f , každé reálne číslo reprezentuje vektor vo vektorovom priestore afinného priestoru \mathcal{A} a naopak. Podmienke

$$\forall A[x_a, y_a] \in \mathcal{A}, \vec{u} \in \mathbb{R} \text{ existuje práve jeden bod } B \in \mathcal{A}, \text{ pre ktorý } f(X, Y) = \overrightarrow{AB},$$



Obr. 1: Afinný priestor - hyperbola Applet otvoríte Tu

zrejme vyhovuje bod $B[x_b, y_a + u]$. Prvú súradnicu x_b určíme z podmienky, že bod B je bodom hyperboly v II. alebo v III. kvadrante. Napríklad pre bod $A[-6, 4.53]$ a vektor $\vec{u} = 2.49$ je to zrejme bod $B[-9, 7.02 = 4.53 + 2.49]$.

Riešte úlohy

Zistite, či usporiadaná trojica $(\mathcal{A}, \mathbb{V}, f)$ je afinným priestorom, ak áno určite aj bázu jeho zamerania.

1. Dané sú $\mathcal{A} = \{[x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2; x_2 = 1\}$, $\mathbb{V} = \{[x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2; x_2 = 0\}$
a zobrazenie

$$f : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{V}; ([x_1, x_2], [y_1, y_2]) \rightarrow (x_1 - y_1, x_2 - y_2)$$

pričom môžete predpokladať, že \mathbb{V} s operáciou sčítania po zložkách je vektorový priestor nad telesom \mathbb{R} .

2. Dané sú $\mathcal{A} = [x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{R}^3; x_3 = 1$, $\mathbb{V} = [x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{R}^3; x_3 = 0$
a zobrazenie

$$f : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{V}; ([x_1, x_2, x_3], [y_1, y_2, y_3]) \rightarrow (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 - y_3)$$

pričom môžete predpokladať, že \mathbb{V} s operáciou sčítania po zložkách je vektorový priestor nad telesom \mathbb{R} .

3. Symbol P_4 označuje množinu všetkých polynómov s reálnymi koeficientmi, ktorých stupeň nie je vyšší ako štyri. Operácia $+$ je vhodné zúženie obvyklej operácie sčítania polynómov.
Dané sú $\mathcal{A} = \{P(x) \in P_4; P(0) = 1\}$ a $\mathbb{V} = \{P(x) \in P_4; P(0) = 0\}$.

4. Možno vektorový priestor nad \mathbb{R} považovať za afinný priestor nad \mathbb{R} ?
Výsledok: Áno. Prvkami bodovej aj vektorovej zložky budú vektory, operácia $+$ bude definovaná na množine vektorov.

1.5 Afinné súradnice bodov

Definícia 1.5.

- (a) Usporiadanú $n+1$ -tícu $[O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n]$ zloženú z bodu $O \in \mathcal{A}^n$ a bázy $[\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n]$ vektorového priestoru $\mathbb{V}^n(\mathcal{A}^n)$ nazývame **afinným súradnicovým repérom** v \mathbb{A}^n .
- (b) **Lineárna sústava súradníc (LSS)** $\langle O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n \rangle$ v afinnom priestore \mathbb{A}^n prislúchajúca k repéru $[O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n]$ je **bijektívne zobrazenie** z množiny \mathcal{A}^n do \mathbb{R}^n , ktoré každému bodu $X \in \mathcal{A}^n$ priradí usporiadanú n -tícu $[x_1, x_2, \dots, x_n]$ takú, že

$$X = O + x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n.$$

- (c) Bod O nazývame **začiatok sústavy súradníc** a vektory $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ nazývame **súradnicovými vektormi**. Vzhľadom na to, že pre začiatok O afinnej súradnicovej sústavy
- (d) Vektor $X - O$ nazývame **polohový vektor** bodu X vzhľadom na danú sústavu súradníc $[O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n]$, presnejšie vzhľadom na začiatok sústavy súradníc O .
- (e) Súradnice bodu X afinného priestoru \mathbb{A}^n vzhľadom na danú afinnú sústavu súradníc sú súradnice $[x_1, x_2, \dots, x_n]$ jeho polohového vektora vzhľadom na bázu súradnicových vektorov.

Poznámka 1. Z lineárnej algebry je známe, že ku každému vektoru existuje jediná usporiadaná n -tíca $[\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n]$ taká, že

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n.$$

Odtiaľ dostávame, že existuje jediná n -tíca pre polohový vektor \overrightarrow{OX}

$$\overrightarrow{OX} = X - O = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n \text{ resp. } X = O + x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n$$

Príklad 3. Daný je afinný priestor $(\mathcal{A}, \mathbb{R}, f)$, kde

$$\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, x < -|a|\}$$

$$f : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{V}; f([x_1, y_1], [x_2, y_2]) = y_1 - y_2.$$

Zistite, či zobrazenie

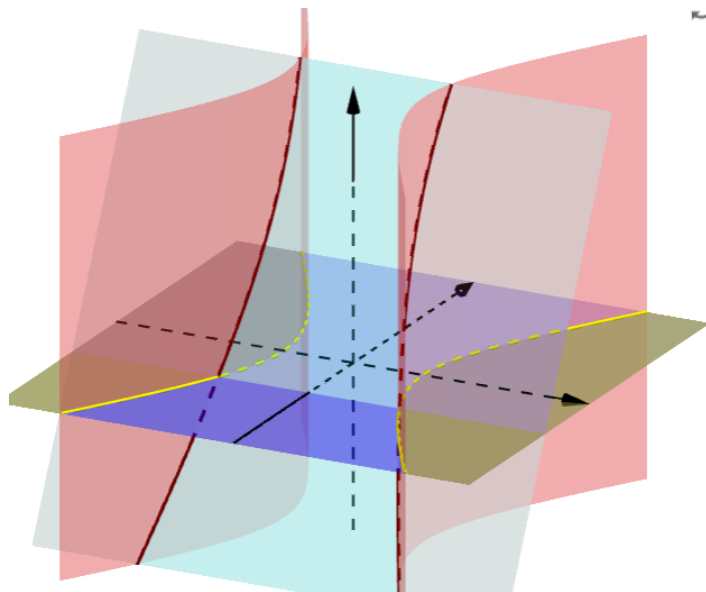
$$\mathcal{L} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}; \mathcal{L}([x, y]) = 5 + 2y$$

je lineárnaa sústava súradníc.

Riešenie.

Pokúsme sa charakterizovať zobrazenie \mathcal{L} v priestore \mathcal{R}^3 .

V príklade 2 sme ukázali, že ľubovoľný bod $A[x_a, y_a] \in \mathcal{A}$ je bodom hyperboly v II. alebo v III. kvadrante. V obrázku 1.5 je to časť žltej hyperboly. Nech $A[x_a, y_a], B[x_b, y_b]$ sú dva



Obr. 2: Afinný priestor - hyperbola [Applet otvoríte Tu](#)

rôzne body hyperboly

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, x < -|a|,$$

potom musí byť $y_a \neq y_b$. Z definície zobrazenia \mathcal{L} sú týmto bodom priradené dve rôzne reálne čísla

$$\mathcal{L}([x_a, y_a]) = 5 + 2y_a, \quad \mathcal{L}([x_b, y_b]) = 5 + 2y_b.$$

Odtiaľ dostávame, že **zobrazenie** $\mathcal{L} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}; \mathcal{L}([x, y]) = 5 + 2y$ **je prosté**.

Tiež platí, že pre ľubovoľné reálne číslo $r \in \mathbb{R}$ existuje jediné reálne číslo $y = \frac{r-5}{2} \in \mathbb{R}$. Zároveň existuje práve jedno reálne číslo x také, že bod $X[x, y]$ je bodom hyperboly v II. alebo v III. kvadrante. $\mathcal{L} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}; \mathcal{L}([x, y]) = 5 + 2y$ **je zobrazenie na** množinu $r \in \mathbb{R}$. Teda \mathcal{L} je bijekcia. Tým sme dokázali, že $\mathcal{L} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ je lineárna sústava súradníc.

Uvažujme množinu bodov so súradnicami $\alpha = \{X[x, y, 5 + 2y]; x, y \in (\mathbb{R})\}$, Množina α je 2-parametrický útvar v priestore, ktorý predstavuje rovinu (v obrázku je to bledomodrá rovina). Ak chceme nájsť množinu

$$H = \{A[x_a, y_a, 5 + 2y_a]; y_a = b^2 \sqrt{\frac{x_a^2 - a^2}{a^2}}\}$$

\mathcal{L} obrazov len bodov hyperboly, tak táto množina je prienikom roviny α a Hyperbolic Cylinder

$$HC = \{[x, y, z]; \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 0 \cdot z^2 = 1\}.$$

Teda $H = \alpha \cap HC$ a to je hyperbola (v obrázku 1.5 je to krivka hnedej farby). Keďže hyperbola je jednoparametrický útvar, tak dimenzia \mathcal{A} je rovná jednej. Zobrazenie \mathcal{L} je zrejme bijektívne a z toho plynie záver:

Zobrazenie \mathcal{L} je lineárna sústava súradníc. Bodu $A[x_a, y_a] \in \mathcal{A}$ je priradená súradnica

$$\mathcal{L} \left(\left[x_a, b^2 \sqrt{\frac{x_a^2 - a^2}{a^2}} \right] \right) = 5 + 2b^2 \sqrt{\frac{x_a^2 - a^2}{a^2}}.$$

Riešte úlohy

Daný je afinný priestor $(\mathcal{A}, \mathbb{V}, f)$. Zistite, či zobrazenie $\mathcal{L} := \dots$ je lineárna sústava súradníc, ak áno určite jej počiatok a súradnicové vektory.

1. Dané sú $\mathcal{A} := \dots$, $\mathbb{V} := \dots$ a $f := \dots$
2. Dané sú
3. Dané sú
4. Dané sú

1.6 Euklidovský bodový priestor

Definícia 1.6. Euklidovským bodovým priestorom \mathbb{E}^n rozumieme afinný bodový priestor, ak na jeho zameraní je definovaný skalárny súčin.

Definícia 1.7. Skalárnym súčinom rozumieme operáciu, ktorá každej dvojici vektorov $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}$ priraduje reálne číslo (skalár) $\vec{u} \cdot \vec{v} \in \mathbb{R}$ tak, že platí:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

$$(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$$

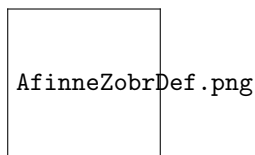
$$\vec{u} \cdot \vec{v} \geq 0 \wedge [\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}]$$

1.7 Geometrické zobrazenia

Definícia 1.8. Geometrickým zobrazením f rozumieme predpis, ktorým je ľubovoľnému bodu $X \in \mathbb{E}^2$ (resp. priestoru \mathbb{E}^3) je jednoznačne priradený bod $X' = f(X) \in \mathbb{E}^2$ (resp. priestoru \mathbb{E}^3).

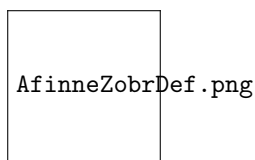
Príklady vektorových priestorov

1. Osová súmernosť je bijektívne geometrické zobrazenie.



Obr. 3: Zobrazenie

2. Rovnobežné premietanie priestoru \mathbb{E}^3 do roviny \mathbb{E}^2 nie je prosté.



Obr. 4: Zobrazenie

Poznámka 2. *This is a remark.* {} []

Príklad 4. **This is a example.**

Applet otvoríte Tu

Axióma 2. This is a axiom.

Dôsledok 2.1. This is a Dôsledok.

2.1 Citation

This is a citation[?].

Literatúra