

Nové perspektívy teórie vyučovania matematiky

Prednáška

2024

Pavol Hanzel

Obsah

1	Vyššie sekundárne vzdelávanie	3
2	Goniometrické funkcie	4
2.1	Jednotková kružnica	7
2.2	Funkcie sínus a kosínus	8
3	Kvadratické rovnice	12
3.1	Metóda rozkladu - faktorizácia	16
3.1.1	Riešenie kvadratickej rovnice s koeficientom $a \neq 1$ metódou „Loh“.	17
3.2	Metóda dopĺňania do štvorca	18
3.3	Kvadratický vzorec	20
3.4	Využitie DGS pri kvadratických rovniciach	20

1 Vyššie sekundárne vzdelávanie

Podľa Štátneho vzdelávacieho programu (ŠVP) učebný predmet matematika na stredných školách je zameraný na rozvoj matematickej kompetencie tak, ako ju formuloval Európsky parlament: „Matematická kompetencia je schopnosť rozvíjať a používať matematické myslenie na riešenie rôznych problémov v každodenných situáciách. Vychádzajúc z dobrých numerických znalostí sa dôraz kladie na postup a aktivitu, ako aj na vedomosti. Matematická kompetencia zahŕňa na rôznych stupňoch schopnosť a ochotu používať matematické modely myslenia (logické a priestorové myslenie) a prezentácie (vzorce, modely, diagramy, grafy, tabuľky).“ Vzdelávací obsah predmetu je rozdelený na päť tematických okruhov:

1. Čísla, premenná a počtové výkony s číslami
2. Vzťahy, funkcie, tabuľky, diagramy
3. Geometria a meranie
4. Kombinatorika, pravdepodobnosť, štatistika
5. Logika, dôvodenie, dôkazy.

Vo vyučovaní matematiky sa na vyššom sekundárnom stupni vzdelávania kladie dôraz na rozvíjanie logického a kritického myslenia žiakov. Učiteľ by mal viesť žiakov cestou objavovania ku schopnosti argumentovať. Dôležitou súčasťou vyučovania je aj **využívanie moderných didaktických technológií**. Použitie komplexných vzdelávacích systémov a vhodného softvéru by malo uľahčiť niektoré namáhavé výpočty alebo postupy a umožniť tak sústredenie sa na podstatu riešeného problému.

Kompetencie učiteľov matematiky na strednej škole pri využívaní IKT sú značne rozšírené oproti kompetenciám učiteľov na základnej škole. Na tomto stupni vzdelávania učiteľ by mal byť schopný vytvoriť si vlastný komplexný elektronický študijný materiál. Tu však narážame na generačný problém. Učitelia, ktorí ukončili študijný program učiteľstva v minulom miléniu, nemajú odborné vedomosti z tejto oblasti. Na získanie nových vedomostí v oblasti aplikovania IKT sú viac-menej odkázaní len na samo-štúdium. Napriek tejto nepriaznivej situácii, musíme sa snažiť o čo najširšiu implementáciu nových technológií do matematického vzdelávania na stredných školách.

V ďalšej časti tejto kapitoly prezentujeme dva komplexné študijné materiály vytvorené v LMS Moodle s integrovanými GeoGebra appletmi. Najskôr sa pokúsime v stručnosti charakterizovať „komplexný elektronický študijný materiál.“ V práci (Fančovičová a kol. 2014) sa uvádza:

„Elektronické vzdelávacie materiály majú svoje špecifické požiadavky na vlastnú tvorbu. Od bežných učebných textov sa v mnohom líšia. Predovšetkým bohatším členením textu, štruktúrou kapitol, problémovými otázkami, ponukou úloh či testov, pričom sú však menej rozsiahle.“

Naše skúsenosti pri tvorbe komplexného elektronického študijného materiálu nás viedli k poznaniu, že takýto študijný materiál by mohol mať nasledovnú štruktúru:

1. Stručný úvod a informovanie o ciele.
2. Upútanie pozornosti a motivácia využívajúca aj historické pozadie.
3. Poskytnutie obsahu
 - zavedenie nových matematických pojmov,
 - popísanie vlastností (tvrdení) s dostatočnou argumentáciou (dôkazmi)
 - interpretácia na vhodných príkladoch
4. Úlohy na precvičovanie a domáce zadanie vhodné na upevňovanie nových pojmov a tvrdení.

Takto zostavený študijný materiál musí obsahovať dynamické a podľa možností aj interaktívne applety v rôznych špecifických formátoch. Pre účely komplexného elektronického študijného materiálu nie sú vhodné Power-Pointové prezentácie alebo rozsiahlejšie (viac stranové) PDF materiály. V práci (Fančovičová a kol. 2014) sa konštatuje „*Power-Pointová prezentácia vytvorená pre prezenčnú formu vzdelávania - nie je vhodný materiál pre elektronické vzdelávanie pretože neobsahuje žiadne príklady a vysvetlenia, ktoré by nahradili poznámky a príklady prednášajúceho v tradičnom vyučovaní. Podobne poskytnutie 20 stranového dokumentu nie je vhodným materiálom pre elektronické vzdelávanie, pretože rolovanie textu nie je najvhodnejším riešením z hľadiska komfortu študujúceho.*“

Vyššie uvedené požiadavky kladené na komplexný elektronický študijný materiál budeme interpretovať na materiáloch, ktoré boli vytvorené v rámci tvorivých dielní z Didaktiky matematiky v 1. ročníku magisterského štúdia na našej katedre. Budú to:

1. Goniometrické funkcie
2. Rezy na hranatých telesách .

Pri tvorbe elektronického študijného materiálu musíme si uvedomiť, že „preklopenie“ učebných textov využívaných pri bežnom vyučovaní (papierové učebnice a učebné texty, zbierky úloh, pracovné zošity a pod.) nie je vôbec postačujúce. Od učiteľa na strednej škole očakávame, že už **v súčasnosti dokáže vytvoriť** kvalitný elektronický študijný materiál v ucelenej podobe. Dnes stredoškolský učiteľ má k dispozícii vhodné materiálne podmienky, ktoré mu umožnia naplnenie tohto cieľa.

2 Goniometrické funkcie

Goniometrické funkcie v matematike¹ sú základom goniometrie. Obvykle sa definujú ako pomer dvoch strán pravouhlého trojuholníka alebo dĺžky určitých častí úsečiek v jednotkovej kružnici. My sa zameriame na definovanie pomocou jednotkovej kružnice, ktoré sa preferuje na strednej škole. Študijný materiál sme vytvorili v prostredí LMS Moodle s aplikovaním GeoGebra appletov.

Vo všeobecnosti sa dlhodobo ukazuje, že „Trigonometria“ ako jeden z dôležitých aplikačných predmetov matematiky robí študentom (a to nielen na stredných školách) pri učení zásadné ťažkosti. (Adamek at al.2005). Preto je dôležité hľadať nové a účinnejšie vyučovacie prostriedky a metódy, aby sme tento stav zlepšili. Počítače spolu so softvérovým vybavením sú silným a nápomocným nástrojom pri vyučovaní a učení matematiky, najmä pri porozumení matematickým pojmom, ako to poznamenali mnohí autori (Hohenwarter at al. 2007). Úroveň vzdelávacích softvérových aplikácií umožňuje učiteľom ale i žiakom používať ich na počítači bez toho, aby pokročili v znalostiach o počítačoch a programovaní. (Antohe, 2009). Goniometrické funkcie sú tematickým celkom, kde využívanie moderných DGS sa ukazuje ako veľmi efektívne.

V práci (Zengin at al. 2012) bola skúmaná efektívnosť vyučovacej metódy podporovaná počítačovou výučbou, pri ktorej sa využíval softvér GeoGebra. Dnes sa často hovorí o využívaní interaktívnych metód vo vyučovaní matematiky. Zengin tvrdí, že prvým krokom je nutnosť vymeniť klasickú tabuľu a kriedu dynamickým obrazom matematických javov, integrovaných v dynamickom softvéri ako GeoGebra.

V posledných rokoch sa uskutočnilo množstvo štúdií zameraných na výučbu goniometrických funkcií. Závety týchto štúdií sa zhodujú v tom, že

¹Pozri https://sk.wikipedia.org/wiki/Goniometrická_funkcia

- Študenti, ktorí dostali „štandardnú výučbu“ bez využívania IKT, dosahovali slabšie výsledky, a že nemajú trvalú znalosť o trigonometrických funkciách.
- Študenti, ktorí dostali experimentálne inštrukcie, preukázali v testoch silné pochopenie goniometrických funkcií. Väčšina z týchto študentov dokázala využiť svoje znalosti o goniometrických funkciách. Nemali problém odvodiť a zdôvodniť ich vlastnosti.

Tieto zistenia sa potvrdili aj nám, pri využívaní elektronického materiálu **Goniometrické funkcie**. Na schéme 1 je návrh štruktúry tohto študijného materiálu Goniometrické funkcie, ktorý je možné použiť na expozičných vyučovacích hodinách pri skúmaní vlastností goniometrických funkcií na gymnáziách. Materiál je vytvorený na serveri *Virtuálna Univerzita Mateja Bela* v časti *Fakulta prírodných vied (Faculty of Natural Sciences), Katedra matematiky* v kurze *Didaktika matematiky*, ktorý je voľne dostupný na adrese [Tu](#).

Obsah
Historické poznámky
Pravouhlý trojuholník
Definície funkcií
Úlohy
Jednotková kružnica
Zobrazenie - vlastnosti
Úlohy
Definície pomocou kružnice
Vlastnosti sínus/kosínus
Posunutie grafu
Vzorce - súčtové
Cvičenie

Obr. 1: Goniometrické funkcie - obsah

V historických poznámkach tohto študijného materiálu sme použili aj motivačný applet s názvom „Ptolemaios - definícia funkcie sínus“. V applete pomocou posuvníka pre uhol ϕ a navigačného panela môže učiteľ priblížiť žiakom základné Hipokratovo východisko, že *dĺžka tetivy v danom kruhu je funkcia veľkosti stredového uhla*. Applet je funkčný buď priamo na stránke *Historické poznámky* alebo je možné pracovať s ním samostatne na serveri GeoGebra [Tu](#). Časť stránky venovaná histórii je znázornená na obrázku 2.

Po úvodných a historických poznámkach pristupujeme k poskytnutiu obsahu, kde je nutné zaviesť východiskové pojmy a vzťahy medzi nimi. V našej lekcii o goniometrických funkciách je východiskový pojem pravouhlý trojuholník a dve ľahko dokázateľné tvrdenia 2.1, 2.2.

Tvrdenie 2.1 *V pravouhlom trojuholníku $\triangle ABC$ s uhlami $\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle ABC$, $\gamma = 90^\circ$ uhly α, β sú ostré.*

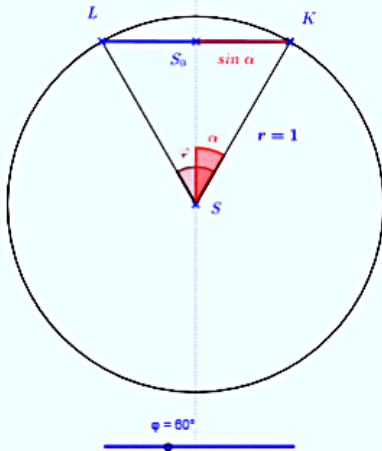
Tvrdenie 2.2 *Ľubovoľné dva pravouhlé trojuholníky $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ s daným ostrým uhlom $\alpha = \angle BAC = \angle B'A'C'$ sú navzájom podobné.*

Pri dôkazoch týchto tvrdení učiteľ môže použiť dynamický applet², v ktorom je možné meniť polohu vrcholov trojuholníka s pevne daným ostrým uhlom $\alpha = \angle BAC$. Pri zmene polôh

²Pozri stránku *Goniometrické funkcie - úvod* [Tu](#).

- Názov goniometria pochádza z gréčtiny: gónia - uhol, roh a metron - merať) - oblasť matematiky, ktorá sa zaoberá goniometrickými funkciami.
- Pojem goniometrické funkcie pochádza tiež z gréčtiny, kde "συναρτήσεις μέτρησης γωνιών (čítaj synartíseis métrisis gonión) znamená "funkcie
- Astronóm Hipparchos (pochádzal z Nikaie v Bitýnii, obdobie asi 190 – 120 pred n. l.) a Klaudios Ptolemaios (asi 85 – 165 n. l.)

Ptolemaios:
Dĺžka tetivy je funkcia stredového uhla.



Ptolemaios

$$tet = 2r \cdot \sin \frac{\varphi}{2} = 1$$

Tetiva ($tet = KL$) je funkciou stredového uhla

Nastav uhol φ , pohybu bodom K .

$$\sin \alpha = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

3 / 3
2

Obr. 2: Goniometrické funkcie - história

bodov A, C sa nezmenia predpoklady daných tvrdení. Zároveň žiaci pozorujú, že sa nemenia veľkosti uhlov trojuholníkov $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$. Takto organizovaný vyučovací proces vytvára v triede bádateľskú atmosféru. Žiaci zrejme v krátkom čase budú vedieť zdôvodniť resp. dokázať tvrdenia 2.1 a 2.2 pomocou podobnosti daných trojuholníkov. Zo vzťahu

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \quad (1)$$

žiaci sami ľahko odvodí vzťah

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}, \quad (2)$$

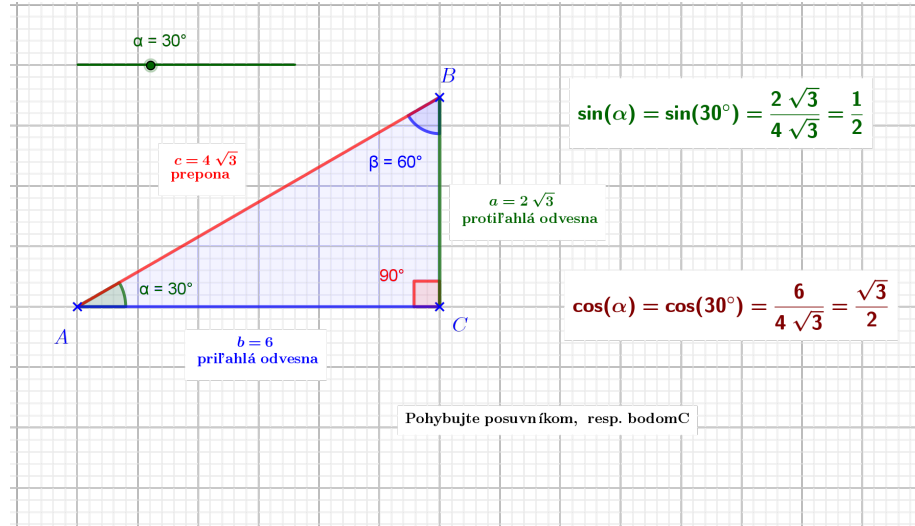
kde a, b, a', b' sú veľkosti strán daných trojuholníkov.

Učiteľ pomocou jednoduchých doplňujúcich otázok vedie žiakov k záveru, že posledný vzťah 2 je vlastne tvrdením 2.3.

Tvrdenie 2.3 Pre ľubovoľný pravouhlý trojuholník $\triangle ABC$ s daným ostrým uhlom α je pomer odvesien konštantný.

Poznámka 2.1 Komentár a argumentáciu, ktorú sme použili v predchádzajúcich dvoch odsekoch možno zhrnúť v elektronickom študijnom materiáli do jedného už spomínaného appletu Goniometrické funkcie - úvod.

Na základe tvrdenia 2.3 môžeme zaviesť definície funkcií sínus a kosínus ako funkcie uhla ostreho uhla v kontexte pravouhlého trojuholníka.



Obr. 3: Sínus a kosínus v pravouhlom trojuholníku, applet je dostupný [Tu](#).

Definícia 2.1 Daný je pravouhlý trojuholník $\triangle ABC$ s odvesnami a, b , preponou c a uhlom $\angle BAC = \alpha$.

- Sínus ostrého uhla α v trojuholníku $\triangle ABC$ je pomer dĺžky protiľahlej odvesny ostrého uhla k dĺžke prepony

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c}$$

- Kosínus ostrého uhla α v trojuholníku $\triangle ABC$ je pomer dĺžky priľahlej odvesny ostrého uhla k dĺžke prepony

$$\cos(\alpha) = \frac{b}{c}$$

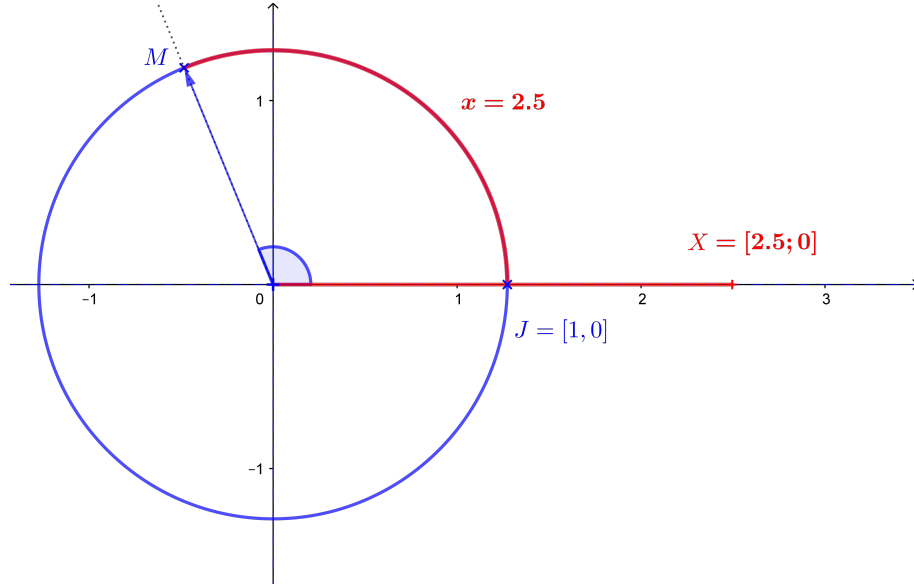
Pozri obrázok 3. Po aktivovaní appletu môže učiteľ meniť veľkosť uhla α a ukázať ako sa menia hodnoty funkcií sínus a kosínus pre ostrý uhol. Pri dynamickej zmene hodnôt $\alpha = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ pomocou posuvníka, dokáže program GeoGebra vypisovať aj iracionálne hodnoty funkcií v zaužívanom matematickom móde. Pri tvorbe appletu by túto skutočnosť mal mať učiteľ na zreteli. Takýmto spôsobom bude u žiakov upevňovať základné vlastnosti goniometrických funkcií.

2.1 Jednotková kružnica

Po týchto motivačných vstupoch učiteľ už môže pristúpiť k jadrú preberaného tematického okruhu, k zavedeniu definícií sínus a kosínus. Najskôr ich definuje ako pomer veľkostí strán v pravouhlom trojuholníku a následne svoj výklad zameria na definovanie periodických funkcií pomocou jednotkovej funkcie.

V úvode tejto kapitoly sme uviedli, že elektronický študijný materiál bude efektívny, ak bude textovo „úsporný“. Takýto úsporný text musí byť doplnený verbálnym učiteľovým výkladom, ktorý zahŕňa dynamiku a interaktivitu separovaných modelov. Po zavedení pojmu *Jednotková kružnica* a charakterizovaní vlastností jednotkovej kružnice v odpovedajúcich kapitolách³ môžeme uviesť základnú definíciu potrebnú pre definovanie periodických funkcií sínus a kosínus.

³Pozrite si kapitoly: Jednotková kružnica, Zobrazenie - vlastnosti [Tu](#).



Obr. 4: Zobrazenie množiny reálnych čísel na kružnicu, applet je dostupný [Tu](#).

Definícia 2.2 *Jednotková kružnica* Kružnica so stredom v počiatku súradnicovej sústavy, ktorá má polomer $r = 1$ sa nazýva jednotková kružnica.

Pre naše úvahy bude dôležitý jej priesečník $J=[1,0]$ s kladnou polosou x . Odpovedajúci applet k tejto definícii je znázornený na obrázku 4.

Definícia 2.3 *Definujeme zobrazenie, ktoré každému reálnemu číslu x priradí na jednotkovej kružnici práve jeden bod M takto:*

1. Reálnemu číslu 0 priradíme bod $J[1;0]$
2. Ak $x > 0$, tak číslu x priradíme taký bod M jednotkovej kružnice, že dĺžka oblúka JM v kladnom zmysle (proti smeru hodinových ručičiek) je rovná číslu x .
3. Ak $x < 0$, tak číslu x priradíme taký bod M jednotkovej kružnice, že dĺžka oblúka JM v zápornom zmysle je rovná číslu x .

Definíciu 2.3 podrobne interpretujeme pomocou appletu 4. Snažíme sa žiakov viesť k tomu, aby sami prišli k záveru uvedeného ako tvrdenie 2.4.

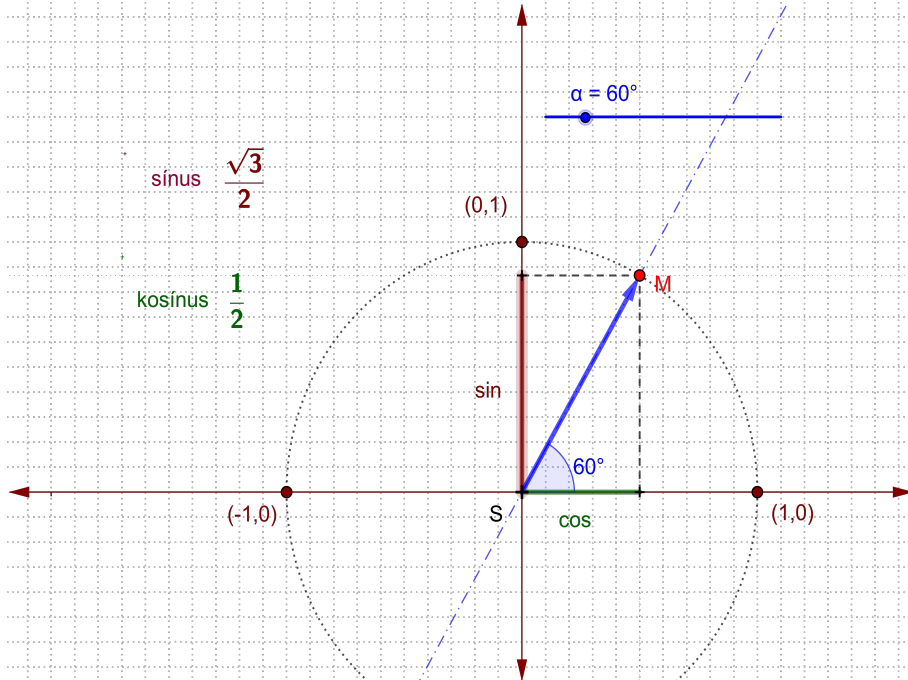
Tvrdenie 2.4 *Zobrazenie množiny reálnych čísel na jednotkovú kružnicu popísané v definícii 2.3 je surjektívne ale nie je injektívne.*

Tvrdenie 2.4 nám umožní korektne definovať zobrazenie, ktoré každému reálnemu číslu x priradí bod $M = [M_x; M_y]$ jednotkovej kružnice. Teda goniometrické funkcie môžeme/vieme definovať pre ľubovoľne veľký uhol pomocou jednotkovej kružnice.

2.2 Funkcie sínus a kosínus

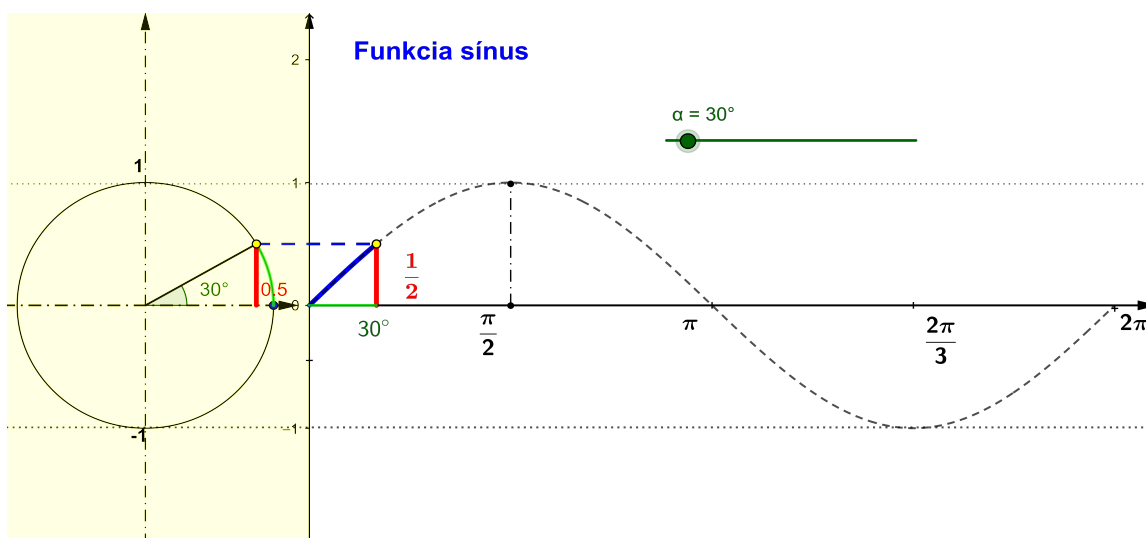
Definícia 2.4 *Nech α je ľubovoľné reálne číslo a nech $k = (S, r = 1)$ je jednotková kružnica. Potom*

$$\sin(x) = M_y, \cos(x) = M_x \quad (3)$$



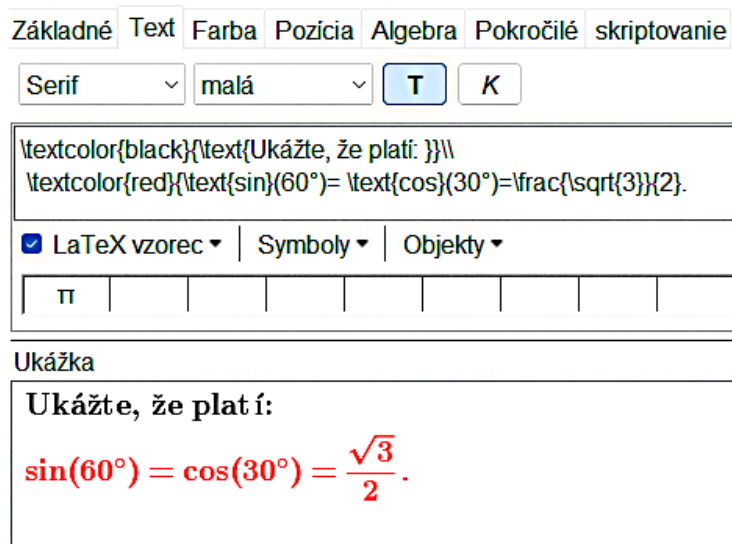
Obr. 5: Definícia funkcií pomocou jednotkovej kružnice

V skúmanom študijnom materiáli *Goniometrické funkcie* sme mali na zreteli aj zámer - minimalizovať textovú časť. V kapitole/stránke *Definície pomocou kružnice* sme uviedli minimum textu ale zaradili sme až dva applety. Takýmto spôsobom sme vytvorili značný priestor pre učiteľov výklad a na demonštráciu interaktívnych appletov. Použité applety sú znázornené na obrázkoch 5 a 6 a sú dostupné na stránkach [Def18](#) a [Def19](#).



Obr. 6: Grafy funkcií pomocou jednotkovej kružnice

Ako sme už uviedli študijný materiál by mal obsahovať aj úlohy na precvičovanie. Pred zadaním úloh na samostatné riešenie žiakmi je vhodné, aby učiteľ riešil nejaké typické vzorové úlohy. Aj pri tejto aktivite učiteľ a vidíme priestor pre dynamickú interpretáciu. Priblížime metódu, ktorá sa javí ako univerzálna pri riešení algebraických úloh, a ktorú sme použili pri riešení úloh v tomto študijnom materiáli. Je to **metóda Step by Step**, ktorá sa veľmi jednoducho aplikuje v programe GeoGebra pomocou bodov lomu a navigačného panela.



Obr. 7: Formátovanie textu v GeoGebre

Vytvorenie appletu doplneného matematickým textom si vyžaduje okrem dobrej znalosti a skúsenosti s programom GeoGebra aj to, že užívateľ (v našom prípade - učiteľ na strednej škole) musí poznať základy písania matematického textu v $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ -ovskom prostredí. Používanie $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ symbolov v programe GeoGebra je možné pomocou prednastavených nástrojov $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ vzorec a Symboly. Použitie týchto nástrojov je pomerne jednoduché a nevyžaduje si hlbšie znalosti. Pozrite si obrázok 7. Po zvládnutí jednoduchých $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ zápisov, môže tvorca elektronického študijného materiálu vytvárať stránky metódou *Step by Step*. Napríklad v nami vytvorenom materiáli Goniometrické funkcie máme vloženú kapitolu, v ktorej prezentujeme riešenie úlohy 2.1.

Úloha 2.1 *Využitím rovnostranného trojuholníka vypočítajte $\sin(30^\circ)$, $\cos(30^\circ)$, $\tan(30^\circ)$.*

Možnosti učiteľa pri prezentovaní riešenia tejto úlohy sú možné v dvoch rovinách. Klasická rovina je založená na používaní historicky osvedčených prostriedkov „kriedy a tabule“. Treba konštatovať, že tento spôsob považujeme za vhodný a typický pre strednú školu. Má však jednu nevýhodu, že pri písaní na tabuľu učiteľ má obmedzené možnosti sledovať žiakov v triede pri ich činnosti. Táto nevýhoda sa dá eliminovať používaním interaktívnych appletov, ktoré uplatňujú metódu *Step by Step*.

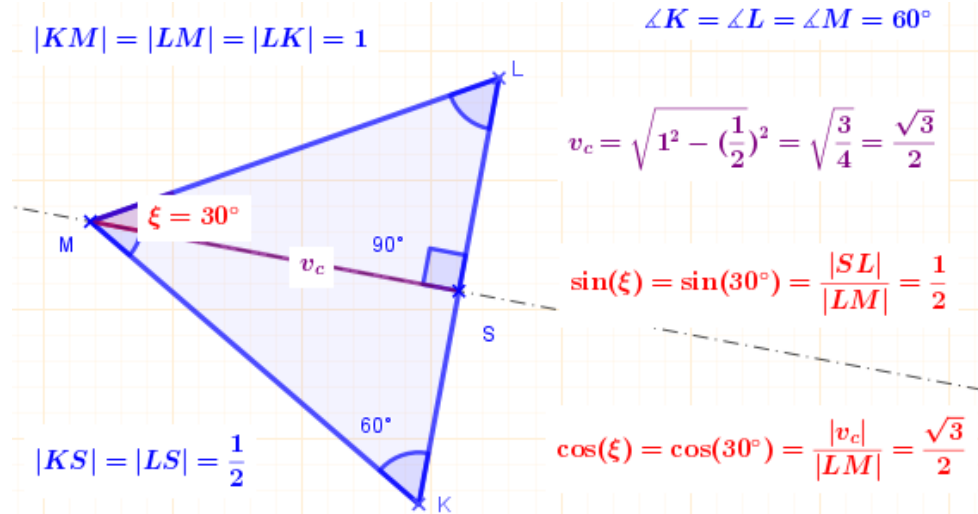
Na obrázku 8 je zobrazené riešenie úlohy 4.1. pomocou appletu „Calculation of sin and cos“, ktorý je zahrnutý do študijného materiálu a je tiež voľne dostupný na serveri GeoGebra⁴. Učiteľ pomocou navigačného panela prezentuje metódou *Step by Step* čiastkové kroky pri riešení tejto úlohy. Postupne na interaktívnu tabuľu zobrazuje vopred pripravené $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ ovské texty a zároveň pridáva vlastný komentár, ktorým približuje špecifiká konkrétneho kroku riešenia danej úlohy.

Všimnime si, že zapísať napríklad text 4

$$v_c = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (4)$$

na tabuľu by bolo časovo náročné. Ak učiteľ použije interaktívny applet spojený s krokováním, tak ušetrí čas. Toto je moment, kedy učiteľ získa časový priestor pre komunikáciu s triedou.

⁴Na stránke <https://www.geogebra.org/m/bgwpjcb>



Obr. 8: Metóda Step by Step v GeoGebre.

V závere tejto sekcie popíšeme zmeny na grafe goniometrickej funkcie $y = a \cdot \sin(bx + c)$ v závislosti na zmenách parametrov a, b, c . Použijeme dynamický model, ktorý voľne dostupný na stránke [Function Sine/Cosine](#).

Zmenou veľkosti uhla α pomocou posuvníka „Nastavte veľkosť uhla“ môžeme pozorovať ako sa menia hodnoty funkcie sínus na jednotkovej kružnici. Zároveň po ich prenesení z jednotkovej kružnice do pravouhlej súradnicovej sústavy môžeme pozorovať aj dynamický bod Q na grafe funkcie sínus. Po de-aktivovaní zaškrtávacieho políčka „Funkcia sínus“ sa applet transformuje na funkciu kosínus. Pri cieľovom používaní tohto appletu učiteľ prezentuje základné vlastnosti goniometrických funkcií

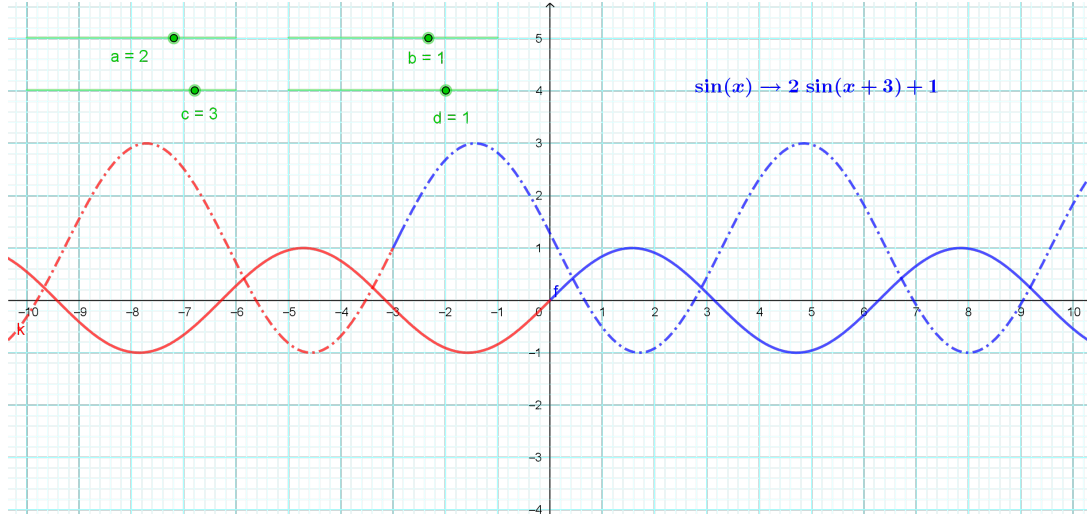
- Definičný obor: $D_f = \mathbb{R}$; Obor hodnôt: $H_f = \langle -1; 1 \rangle$; Nepárnosť $\sin(-x) = -\sin x$; Ohraničenosť a pod.
- Prostosť: Funkcia f nie je prostá, čiže nie je ani rýdzo monotónna. Z toho vyplýva, že k nej neexistuje inverzná funkcia.

Z dynamiky a interaktivity appletu môže učiteľ poukázať na dôležitú vlastnosť, že reálnym číslam v tvare $x = x_0 + 2k\pi$, kde k je celé číslo a x_0 je pevne zvolené reálne číslo, vždy je priradený ten istý bod na jednotkovej kružnici. To znamená, že hodnoty funkcie sínus sa budú pravidelne opakovať. Takýmto spôsobom priblíži vlastnosť, že funkcia sínus je periodická a jej najmenšia perióda je dĺžka jednotkovej kružnice, t.j. 2π .

Funkčné hodnoty zloženej funkcií $y = a \cdot \sin(bx + c)$ zrejme sú závislé od koeficientov a, b, c . Vytvorenie dobrej predstavy ako sa mení graf zloženej funkcie je vhodné prezentovať napríklad dynamickým modelom znázorneným na obrázku 9. Teraz môžeme zaviesť pojmy

Definícia 2.5 *Frekvencia funkcie sínus je číslo (b), ktorým je vynásobené premenná x vo funkcii $y = a \cdot \sin(bx + c)$.*

Napríklad funkcia $y = \sin(2x + 1)$ má dvojnásobnú frekvenciu ako $y = \sin(x + 1)$. V grafe funkcie sa to prejaví tak, že funkcia $y = \sin(2x + 1)$ má polovičnú periódu. Prezentovaný model umožní učiteľovi demonštrovať aj posun grafu goniometrickej funkcie sínus v smere osí súradnicovej sústavy.



Obr. 9: Zložená funkcia sínus $y = a.\sin(bx + c)$

3 Kvadratické rovnice

Kvadratické rovnice sú jednou zo základných tém stredoškolského učiva. Vo všeobecnosti tematický celok „Kvadratické rovnice“ sa považuje pre žiakov stredných škôl procedurálne a koncepcne za pomerne náročný. Viaceré štúdie naznačujú, že „veľ“ a študentov čelí problémom pri učení sa kvadratických rovníc a ich výkon je hlavne slabý“ (Harripersaud, 2021). Konceptuálny význam kvadratických rovníc sa vo vyučovaní vo všeobecnosti ignoruje. Študenti zvyčajne inklinujú dodržiavať naspamäť naučené procedurálne pravidlá bez toho, aby premýšľali o ich význame pri riešení kvadratickej rovnice.

Nedávno sa uskutočnila analýza (Didi, s Kabar, M. G., 2023)⁵ výskumov zameraných na preskúmanie efektivity procesu matematického vzdelávania v tematickom celku kvadratické rovnice. Analyzované boli štúdie realizované v období rokov 2000 až 2021. Spoločným menovateľom týchto štúdií boli zistenia, že študenti stredných škôl vo viacerých vyspelých krajinách robia približne rovnaké chyby. Najčastejšie sú to nasledujúce tri kategórie.

- Chyba vo výpočtoch, numerické resp. algebraické chyby.
- Problémy správne porozumieť zadaniu (hlavne pri slovných úlohách).
- Slabé algebraické zručnosti pri faktorizácii (rozklade na súčin lineárnych dvojčlenov).

Na riešenie kvadratických rovníc sa používajú rôzne metódy, ako je faktorizácia, dopĺňanie do štvorca, kvadratický vzorec ako aj grafické riešenie. Zdá sa, že kvadratický vzorec má výhodu oproti iným metódam, pretože má univerzálny charakter. Na druhej strane, každá metóda má svoje výhody le i nevýhody. Tradičné vyučovanie kvadratických rovníc

$$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0, b, c \in \mathbb{R} \quad (5)$$

na slovenských gymnáziách zvyčajne sa zameriava na rozklad kvadratického trojčlena na súčin lineárnych dvojčlenov

$$ax^2 + bx + c \rightarrow a(x + x_0)(x + x_1)$$

a na používanie kvadratického vzorca

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (6)$$

⁵Štúdia je dostupná [Tu](#).

Naši učители majú tendenciu prehnane zdôrazňovať používanie štandardného kvadratického vzorca 14. Menej ponúkajú metódy založené na efektívnych algoritmoch a na využívaní digitálnych technológií. Učitelia by si mali uvedomiť, že riešenie kvadratických rovníc nie je založené len na zaužívaných postupoch. Mali by vo väčšej miere zaradiť do vyučovania aj alternatívne metódy a alternatívne spôsoby výučby. Výskum (Tendere and Mutambara, 2020) ukázal, že je „vhodné začleniť aj historický aspekt riešenia kvadratickej rovnice, manipulatívne alebo technologické nástroje“, ktoré poskytujú študentom alternatívne perspektívy a pomáhajú im učiť sa zmysluplne a koncepčne.

Z didaktického ale aj z psychologického hľadiska je už dlhodobo preukázané, že vyučovanie sa stáva atraktívnejším pre študentov pri používaní historických prístupov. V súčasnosti, vzhľadom na rozsiahlu a dostupnú databázu historických faktov a artefaktov, učiteľ nemá problém siahnúť po kvalitných historických materiáloch. V nami vytvorenej Moodle knihe „Kvadratické funkcie a rovnice na SŠ“⁶ sme zvolili historický zaujímavú hlinenú tabuľku „Tablet YBC 4663 (Mezopotámia asi 1800 pred Kristom)“.



Obr. 10: Matematický tablet YBC 4663 vykopaný v Uncertain.

Na tomto tablete je už takmer pred štyrmi tisíc rokmi riešená úloha 3.1.

Úloha 3.1 Súčet dĺžky a šírky obdĺžnika je $6\frac{1}{2}$ a plocha obdĺžnika je $7\frac{1}{2}$. Máme nájsť dĺžku a šírku obdĺžnika.

Učiteľ pri interpretácii pôvodného riešenia naznačuje resp. vysvetľuje žiakom, že pisár v Mezopotámii vychádzal zo vzťahov znázornených na obrázku 11. Zdôrazňuje, že veľa podobných problémov je vyriešených na viacerých tabletoch a rovnakým spôsobom, môžeme sa domnievať, že v Mezopotámii vedeli riešiť kvadratické rovnice typu

$$ax^2 + c = bx, \quad (7)$$

⁶Dostupné na stránke <https://lms.umb.sk/mod/book/view.php?id=242204> Tu

kde $a = 1, b, c$ sú kladné (reálne) čísla. Matematický dôkaz, že navrhnutý algoritmus môžeme použiť pre výpočet koreňov akejkoľvek kvadratickej rovnice typu $x^2 + c = bx$, zrejme v Mezopotámii nepoznali. Až Al-Chvárizmi podal geometrický dôkaz. Nasledujúca časť interpretuje tento dôkaz a je prevzatá z práce (Katz 2009. str. 23).

Pôvodné riešenie úlohy 3.1

Pisár podrobne popisuje kroky, ktorými prechádza.

1. Najprv zníži $6\frac{1}{2}$ na polovicu, aby získal $3\frac{1}{4}$.
2. Potom odmocní $3\frac{1}{4}$ a dostane $10\frac{9}{16}$.
3. Od tejto (plochy) odpočítava danú plochu $7\frac{1}{2}$, čo dáva $3\frac{1}{16}$.
4. Odmocnina tohto čísla sa extrahuje $1\frac{3}{4}$.

Nakoniec pisár poznamená, že dĺžka je $3\frac{1}{4} + 1\frac{3}{4} = 5$, zatiaľ čo šírka je $3\frac{1}{4} - \frac{3}{4} = \frac{11}{2}$.

Pri ukážke pôvodného riešenia tejto úlohy je vhodné, takmer žiadúce, aby žiaci mali predstavu ako spomínaný tablet z Mezopotámie vyzeral. A práve tu nastáva moment, keď dnešná technika a internetové zdroje umožňujú prezrieť si dokonalú (vo veľmi vysokom rozlíšení) fotografickú reprezentáciu tabletu. Na obrázku 10 je tablet, ktorý zobrazuje „Matematický tablet vykopaný v Uncertain, uložený v Yale Babylonian Collection, New Haven, Connecticut, USA“ a je voľne dostupný na ⁷.

Z pôvodného riešenia úlohy 3.1 a ani z ďalších doteraz známych vykopávok nevieme usúdiť, či v Mezopotámii poznali aj dôkaz správnosti používaného algoritmu pri riešení kvadratických úloh. Až Al-Chvárizmi podal geometrický dôkaz, že použitý postup/algoritmus pri riešení rovnice 7, vedie k jej správne vyriešeniu. Je dobré pripomenúť, že Al-Chvárizmiho dôkaz vychádza z Euklidesových Základov a tie boli publikované približne už pred tisíc rokmi. Nasledujúca časť približuje tento dôkaz a vychádza z práce (Katz 2009. str. 23).

Al-Chvárizmi pri riešení rovnice (piateho⁸) typu $x^2 + c = bx$ použil veľmi účinnú "substitúciu". Korene rovnice označil ako p, q a zároveň použil "substitúcie" $p + q = b$, $p \cdot q = c$. Tieto rovnosti sú ekvivalentné rovnostiam

$$\frac{b}{2} = p - \frac{p-q}{2} = q + \frac{p-q}{2}$$

O ich platnosti sa ľahko presvedčí aj stredoškolač, ak má vedomosti o sčítovaní zlomkov. Z obrázku 11 vidieť, že $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ predstavuje obsah štvorca so stranou $\frac{b}{2}$. Obsah tohto „veľkého“ štvorca (štvorec má zrejme stranu rovnú $\frac{p+q}{2}$) je väčší ako pôvodný obdĺžnik s plochou $c = p \cdot q$ práve o obsah „malého“ štvorca so stranou $\frac{p-q}{2}$.

Po zavedení takéhoto označenia dostaneme

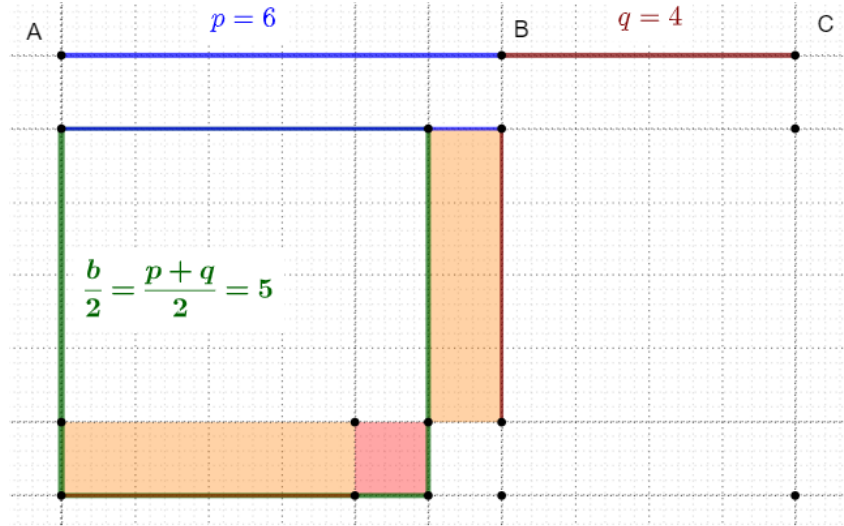
$$\left(\frac{p+q}{2}\right)^2 = p \cdot q + \left(\frac{p-q}{2}\right)^2.$$

Obrázok 11 ukazuje, že ak sa pridá strana tohto „malého“ štvorca, konkrétne

$$\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c} \text{ (zrejme } = \frac{p-q}{2}\text{)}$$

⁷Dostupné na stránke <https://cdli.mpiwg-berlin.mpg.de/artifacts/254984> Tu

⁸Abu Abdallah Muhammad ibn Musa al-Chwarizmi al-Madžusi: Al-kitáb al-muchtasar fí hisáb al-džabr wa-l-muqábala.



Obr. 11: Geometrický dôkaz od Al-Chvárizmi, applet aktivujte [Tu](#).

do $\frac{b}{2}$, tak dostaneme dĺžku p . Ak ju odpočítame od $\frac{b}{2}$, dostaneme šírku q . Algoritmus je teda vyjadrený vo forme

$$p = \frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}; \quad q = \frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c} \quad (8)$$

Možno sa zdá, že takto prevedený grafický dôkaz je dosť náročný. Avšak jeho použitie pri riešení úloh nie je komplikované. Napríklad vyriešiť kvadratickú rovnicu

$$x^2 + 21 = 10x$$

reálne znamená najskôr určiť hodnoty $\frac{b}{2} = \frac{10}{2} = 5$ a $\sqrt{(5^2 - 21)} = 2$ a potom spočítať korene

$$x_1 = 5 + 2 = 7; \quad x_2 = 5 - 2 = 3.$$

Uvedený Al-Chvarizmiho dôkaz je založený síce na algebraickej substitúcii, ale bez geometrickej interpretácie je ťažko pochopiteľný. Ak použijeme dynamický applet, tak interpretácia tejto historickej úlohy sa stane prijateľnou a zároveň motivujúcou aj pre stredoškolača.

Po historických poznámkach učiteľ matematiky na vyššom sekundárnom vzdelávaní pristupuje k výkladu a popisu metód používaných pri riešení kvadratických rovníc. V súčasnosti ide o metódy, ktoré sú vhodné pre školskú matematiku. Medzi také metódy zaradujeme:

1. rozklad kvadratického trojčlena na súčin lineárnych dvojčlenov;
2. dopĺňanie do úplného štvorca;
3. použitie kvadratického vzorca;
4. grafické riešenie pomocou DGS.

Všetky štyri metódy by mali byť predmetom matematického vzdelávania minimálne na gymnáziách. Naše skúsenosti ukazujú, že vyučovacie hodiny venované tematickému celku *Kvadratické rovnice*, by mali začínať metódou rozkladu. Táto metóda je vlastne zopakovaním úprav algebraických výrazov z prvého gymnaziálneho ročníka. Nasledovať by mala metóda dopĺňanie do úplného štvorca a až potom použitie kvadratického vzorca. Grafické riešenie je moderná metóda, ktorú v súčasnosti uprednostňujeme. Používame ju v symbióze kvadratickej funkcie a rovnice.

Z matematického hľadiska nie je významný rozdiel medzi prvou a druhou metódou. V oboch prípadoch je algebraický postup približne rovnaký. Rozklad kvadratického trojčlena (často v literatúre označované faktorizácia) sa opiera o

Z pohľadu úspešnosti riešenia kvadratických rovníc nie je dôležité, ktorú metódu si žiaci zvolia pri ich riešení. Učiteľ by ich mal usmerňovať v duchu „používajte akúkoľvek metódu, ktorú uprednostňujete“. Neskôr keď získajú viac praxe, sami uvidia, kedy a ktorá metóda je najviac užitočná a zároveň výhodná.

3.1 Metóda rozkladu - faktorizácia

Teraz z didaktického aspektu podrobnejšie rozoberieme metódu používanú v školskej matematike, ktorá je založená na rozklade kvadratického trojčlena na súčin dvoch lineárnych dvojčlenov.

Základná myšlienka tejto metódy spočíva v tom, že **ak dokážeme** nájsť rozklad v tvare

$$x^2 + Bx + C = (x - u)(x - v). \quad (9)$$

Potom kvadratický trojčlen (ľavá strana rovnosti 9) nadobudne nulovú hodnotu pre x práve vtedy, ak súčin na pravej strane je rovný nule. To nastane presne vtedy, keď je aspoň jeden z faktorov sa bude rovnať nule resp. keď $x = u$ alebo $x = v$. Z toho vyplýva, že vyriešiť kvadratickú rovnicu 5 znamená nájsť dve čísla u, v s vlastnosťami

$$u + v = -B; \quad uv = C. \quad (10)$$

Toto je štandardná metóda rozkladu (faktorizácie), ktorá sa pripisuje francúzskemu matematikovi François Viète (Viète 1579).

Nájsť čísla u, v vyhovujúce 10 nebýva vždy pre stredoškolača jednoduché. Väčšinou ide o metódu „pokus-omyl“, ktorá samozrejme nemá algoritmickejší charakter. Neskôr, keď si žiaci osvoja metódu dopĺňania do štvorca, tak rozklad na súčin lineárnych dvojčlenov sa rieši pomocou dopĺňania do štvorca.

Nedávno sme objavili prácu (Po-Shen Loh, 2019), ktorá popisuje nové, zjednodušené riešenie kvadratických rovníc. Práca je dostupná [Tu](#). Po-Shen Loh v práci o svojej metóde (ďalej len „Loh“ tvrdí, že nie novým objavom. Píše:

„Jednotlivé kroky tejto metódy samostatne objavili starovekí matematici.“

Zároveň poukazuje aj na zabudnutú prácu (Savage, 1989), ktorá bola publikovaná pred 20 rokmi v *The Mathematics Teacher*. Savage v nej navrhol podobnú koherentnú metódu riešenia kvadratických rovníc ale jeho prístup nie je technicky správny.

Základná myšlienka Loh metódy spočíva v tom, že budeme hľadať čísla u, v vyhovujúce vzťahu 9 v špeciálnom tvare.

$$u = -\frac{B}{2} + z, \quad v = -\frac{B}{2} - z \quad (11)$$

kde z je nejaká konštanta.

Zrejme platí, že súčet dvoch čísel je rovný $-B$ práve vtedy, keď ich priemer je $-\frac{B}{2}$, a tak stačí nájsť dve čísla v tvare $-\frac{B}{2} \pm z$, ktorých súčin je C . Teda namiesto hľadania dvoch neznámych čísel budeme hľadať len jedno číslo z .⁹

⁹Táto substitúcia použitá na riešenie úlohy *nájsť dve čísla vzhľadom na ich súčet a súčin*, bola známa už Babylončanom (Katz, 2009). Objavila sa aj v prvej knihe Diophantus: *Arithmetica* (asi 250).

Súčin $(-\frac{B}{2} + z)(-\frac{B}{2} - z)$ zrejme zodpovedá rozdielu štvorcov. Keďže sa má rovnať C , tak bude platiť

$$\left(-\frac{B}{2}\right)^2 - z^2 = C,$$

alebo ekvivalentne, práve vtedy, keď z splní rovnosť

$$z^2 = \frac{B^2}{4} - C.$$

Keďže odmocnina vždy existuje (v prípade potreby sa rozšíri na komplexné čísla), tak hľadané u a v existujú v tvare $-\frac{B}{2} \pm z$, čo môžeme zapísať v tvare

$$-\frac{B}{2} \pm \sqrt{\frac{B^2}{4} - C} \quad (12)$$

sú všetky korene pôvodnej kvadratickej.

Úloha 3.2 Riešte rovnicu

$$x^2 + 2x + 4 = 0.$$

Riešenie. Potrebujeme nájsť dve čísla so súčtom -2 a súčinom 4 . Použijeme metódu Loh. Ak dve čísla majú súčet -2 , tak zrejme majú priemer -1 . Hľadáme také číslo z , aby dve čísla v tvare $-1 \pm z$ mali súčin rovný 4 (ich priemer je automaticky -1). Táto podmienka je ekvivalentná s týmito ekvivalentnými rovnicami:

$$\begin{aligned} 1 - z^2 &= 4 \\ z^2 &= -3. \end{aligned}$$

Nájsť riešenie poslednej rovnice je jednoduché. V obore komplexných čísel riešením sú komplexne združené čísla $z = \pm i\sqrt{3}$.

Záver: Riešením pôvodnej kvadratickej rovnice sú komplexné čísla $-1 \pm i\sqrt{3}$.

Iracionálne ani komplexné čísla nepredstavujú prekážku pre túto metódu.

3.1.1 Riešenie kvadratickej rovnice s koeficientom $a \neq 1$ metódou „Loh“.

Nech je daná rovnica $ax^2 + bx + c = 0$, kde a je nenulové číslo rôzne od jednej. Upravme túto kvadratickú rovnicu na ekvivalentný tvar:

$$x^2 + \left(\frac{b}{a}\right)x + \left(\frac{c}{a}\right) = 0.$$

Položme $\frac{b}{a}$ a $\frac{c}{a}$ za B a C vo vzťahu (12). Potom pre korene upravenej ekvivalentnej rovnice dostaneme:

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

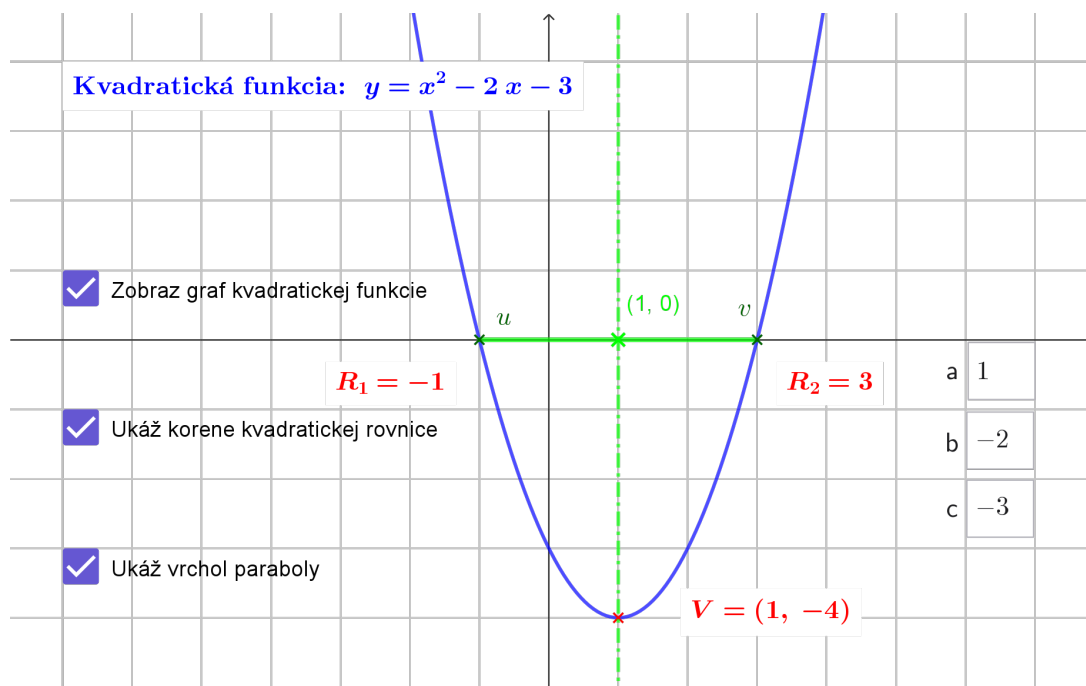
□

Všimnite si, že s týmto prístupom je vytvorený efektívny a zrozumiteľný a ľahko zapamätateľný algoritmus. Namáhavá výpočtová časť sa vyžaduje iba v prípade, že ide o klasický kvadratický vzorec. Vo svetle efektívnosti algoritmu, je však otázne, či má zmysel memorovanie kvadratického vzorca bez pochopenia.

Poznámka 3.1 Je dôležité, aby učiteľ pri odvodzovaní klasického kvadratického vzorca pomocou metódy „Loh“ vysvetlil žiakom prečo sme zvolili práve aritmetický priemer $-\frac{B}{2}$ vo vzťahoch 11.

Zdôvodnenie takejto voľby môže učiteľ urobiť napríklad pomocou vlastností vrcholu paraboly, ktorá odpovedá grafu funkcie $y = x^2 + Bx + C$. Zrejme platí

- Prvá súradnica vrcholu paraboly má hodnotu $-\frac{B}{2}$, čo by si žiaci mali pamätať už z prebratého tematického celku *Funkcie*. Zároveň učiteľ by si mal uvedomiť aj súvislosť s vyššou matematikou (Ball, 2008). Hodnota derivácie funkcie v tomto bode je nulová, a preto tu nadobúda extrém.
- Graf paraboly, ktorý reprezentuje kvadratickú funkciu $y = x^2 + Bx + C$ musí byť osovým súmerný podľa priamky $x = -\frac{B}{2}$. Po aktivácii appetu z obrázka 12 môžeme pozorovať, že aj priesečníky (korene) u, v musia byť symetricky umiestnené voči bodu $[-\frac{B}{2}, 0]$.



Obr. 12: Kvadratická rovnica - vzťahy medzi koreňmi, applet aktivujete [Tu](#).

3.2 Metóda dopĺňania do štvorca

Táto metóda má viacero výhod a tiež uplatnení.

1. Doplnenie do štvorca je veľmi výhodné, ak chceme previesť štandardný/všeobecný tvar na vrcholový tvar.
2. Geometrický pohľad na túto metódu: Poskytuje vizuálne pochopenie paraboly a jej vrcholu.
3. Je užitočná na odvodenie kvadratického vzorca.

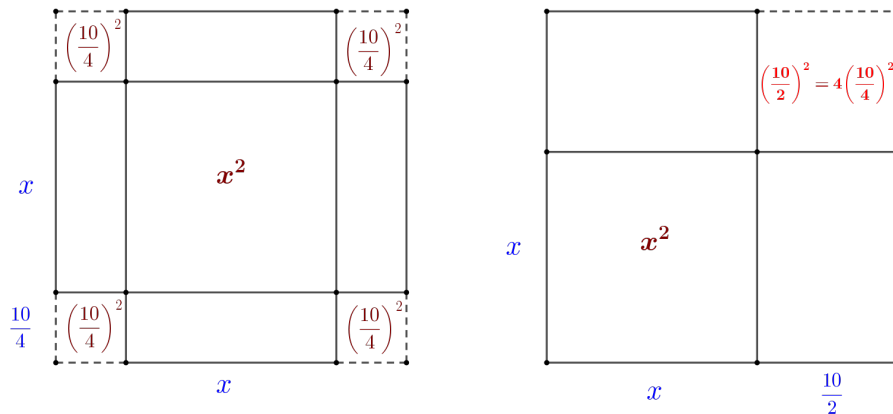
Pri metóde dopĺňania do úplného štvorca odporúčame z didaktického hľadiska začínať rovnicou s kvadratickým koeficientom $a = 1$, teda s rovnicou

$$x^2 + bx + c = 0. \quad (13)$$

Dokonca odporúčame začať s konkrétnou rovnicou $x^2 + 10x = 39$, ktorej riešenie je možné graficky pekne interpretovať. Táto rovnica predstavuje (moderné symbolické) zadanie Al-Chvarizmiho úlohy „CHU2“, ktorá sa stala súčasťou snád' všetkých učebníc algebry až do novoveku. Uvádzame jej pôvodné znenie a tiež pôvodné riešenie.

Úloha 3.3 Štvorec a desať jeho koreňov je rovných tridsiatim deviatim dirhemom.

Pôvodné riešenie. Pre „štvorec a desať koreňov rovných tridsiatim deviatim“ Al-Chvarizmi uvádza dva rôzne spôsoby riešenia založené na obrázkoch, ktoré znázornené na obrázku 13.



Obr. 13: Rovnica Al-Chvarizmi $x^2 + 10x = 39$.

Prvý spôsob. Najprv sa pozrite na schému vľavo na obrázku 13. Daný je štvorec (vnútorný štvorec), ktorého strana je neznáme číslo x . Zrejme jeho obsah je rovný číslu x^2 . Na každej strane tohto štvorca vytvorte obdĺžnik, ktorého druhá strana má dĺžku $\frac{10}{4}$. Obsah takto vytvorených obdĺžnikov je rovný číslu $4(x \cdot \frac{10}{4}) = 10x$. Dostaneme schému pozostávajúcu z vnútorného štvorca spolu so svojimi štyrmi krídlami, ktorá má obsah $x^2 + 10x$, čo je podľa zadania úlohy práve 39. Potom Al-Chvárizmi navrhuje riešiteľovi rovnice $x^2 + 10x = 39$

„**Doplňte**“ obrázok pridaním štyroch prerušovaných štvorcov v rohoch.

Zrejme ak má vzniknúť nový štvorec, tak musíme pridať štyri štvorce v rohoch schémy so stranou $\frac{10}{4}$. Štyri pridané štvorce majú spolu obsah rovný číslu $4 \cdot \frac{100}{16} = \frac{100}{4} = 25$. Novovzniknutý štvorec má teda obsah rovný číslu $39 + 25 = 64$ a samozrejme jeho strana má dĺžku 8.

Al-Chvárizmiho pokyn:

Ak chcete nájsť veľkosť strany vnútorného štvorca, tak odpočítajte $2 \cdot \frac{10}{4} = 5$ od 8, čo je rovné číslu 3. Našli ste koreň $x = 3$ rovnice $x^2 + 10x = 39$.

Dnes už vieme, že existuje aj druhý koreň tejto rovnice $x_2 = -13$. K tomuto zápornému koreňu sa indo-arabskí matematici dopracujú pri riešení kvadratických rovníc piateho typu 7. Vyžili pritom rozklad na súčin dvoch dvojčlenov.

Druhý spôsob. Teraz sa sa pozrite na schému vpravo¹⁰. Ľavý dolný štvorec má stranu, ktorej veľkosť je neznáme x . Na dvoch susedných stranách z nej vytvorte obdĺžnik, ktorého druhá strana je rovná $\frac{10}{2}$.

Al-Chvarizmi:

„**Doplňte**“ obrázok pridaním štvorca 5×5 vpravo hore a zvyšok je jednoduchý.

Fráza „**Doplnenie do štvorca**“ pravdepodobne pochádza z týchto schém.

¹⁰V pôvodnej Al-Chvarizmiho schéme vonkajší rozmer nie je zhodný so schémou vľavo. Pravdepodobne Al-Chvarizmi chcel takto poukázať na platnosť riešenia rovníc vo všeobecnom tvare $x^2 + B = C$.

3.3 Kvadratický vzorec

Použitie kvadratického vzorca je spoľahlivý spôsob, ako vyriešiť akúkoľvek kvadratickú rovnicu. Za mnohých okolností to však môže byť viac práce ako ostatných. Kvadratický vzorec je odvodený zo štandardného tvaru kvadratickej rovnice 5.

Tvrdenie 3.1 *Riešenie (korene) kvadratickej rovnice $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ sú buď*

1. *dve rôzne reálne čísla, ak diskriminant D je kladný,*
2. *jedno reálne číslo, ak diskriminant D je rovný nule,*
3. *dve komplexne združené čísla, ak diskriminant D je záporný,*

kde diskriminant D je určený vzťahom $D = b^2 - 4ac$. Reálne korene môžeme určiť pomocou vzťahu

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (14)$$

Dôkaz. Pri dokazovaní tohto tvrdenia sa v školskej matematike využíva metóda rozkladu kvadratického trojčlena $ax^2 + bx + c$ na "súčin dvoch lineárnych dvojčlenov". \square

Riešenie kvadratickej rovnice pomocou vzorca 14 má univerzálnu použiteľnosť. Podľa Hejného teórie môžeme povedať, že je to univerzálny generický model. Funguje pre akúkoľvek kvadratickú rovnicu, vrátane tých, ktoré sa nedajú ľahko rozložiť na súčin dvojčlenov. Jeho striktné používanie pri osvojovaní tematického celku *Kvadratické rovnice* však zastiera koncepcnú štruktúru riešenia kvadratických rovníc. Veľkú výhodu má jeho použitie v iných tematických celkoch, ak pri riešení nejakého problému sa ako čiastková úloha objaví kvadratická rovnica.

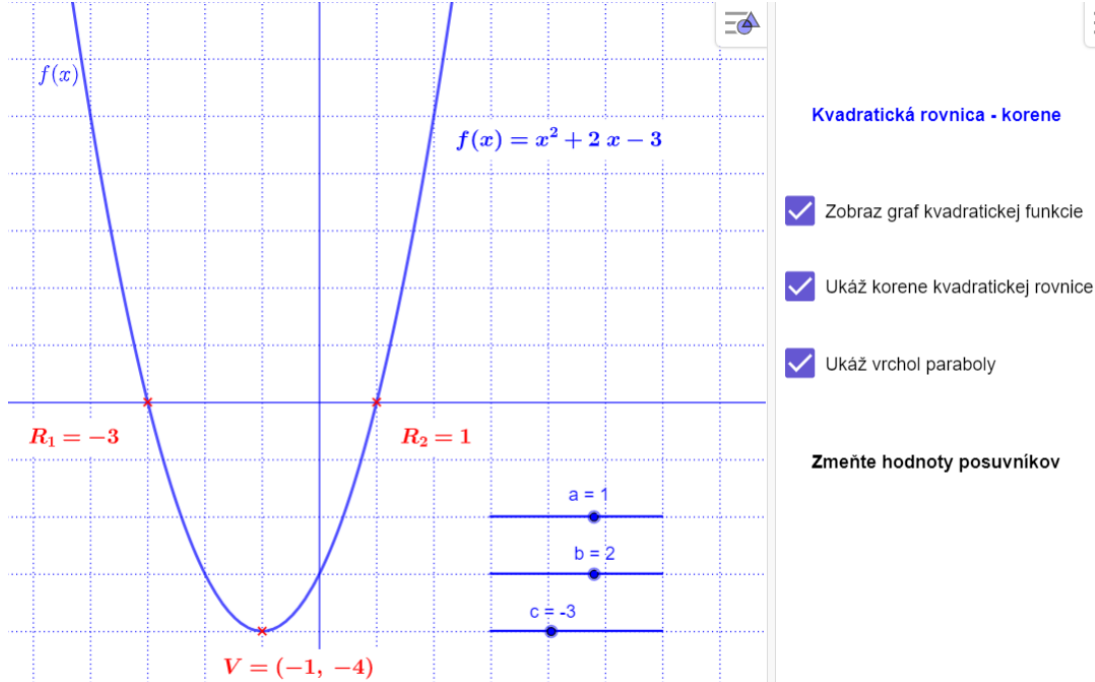
Na druhej strane metóda „doplňenie do štvorca“ ponúka geometrický pohľad, keď žiaci bezprostredne vidia súvislosť s grafom kvadratickej funkcie. Dopĺňanie je však pomerne náročné, ak koeficienty a, b, c „nie sú pekné“. Napríklad ak majú charakter zlomkov. V takýchto prípadoch žiaci majú problémy pri numerických výpočtoch, čím sa u nich prehlbuje odpor voči matematike ako takej.

Každá metóda má svoje silné ale aj slabé stránky. Výber metódy často závisí od konkrétnej kvadratickej rovnice a kontextu, v ktorom ju riešime. Toto učiteľ musí mať na zreteli. Musí koncepčne využívať výber metódy, pričom riešenia dopĺňať dynamickými a zároveň interaktívnymi appletmi. Na obrázku 14 je nami navrhnutý applet so širším uplatnením. Takýto applet by si mal učiteľ pôsobiaci na gymnáziu vedieť vytvoriť sám.

3.4 Využitie DGS pri kvadratických rovniciach

V applete znázorneného na obrázku 14 sa zobrazuje graf kvadratickej funkcie, jej vrchol a nulové body (korene odpovedajúcej kvadratickej rovnice). V applete je možné pomocou posuvníkov meniť koeficienty kvadratickej rovnice resp. funkcie. Pomocou zaškrtačiek (ne)zobrazovať korene kvadratickej rovnice, vrchol a graf kvadratickej funkcie. Veľmi podobnú štruktúru má aj applet znázornený na obrázku 12: Hlavný rozdiel je v zadávaní hodnôt pre koeficienty a, b, c . Prvý používa posuvníky a druhý textové polia. Dokonca je možné obidva spôsoby zadávania koeficientov integrovať do jedného bloku.

Vytvorenie takýchto a podobných appletov si vyžaduje mierne pokročilú znalosť softvéru GeoGebre. V súčasnosti absolventi učiteľského štúdia matematiky (určite aspoň na našej fakulte) takéto zručnosti majú. Učitelia stredných škôl, ktorí neprešli takýmto vzdelávaním, si



Obr. 14: Kvadratická funkcia a korene odpovedajúcej rovnice, applet aktivujete [Tu](#).

zručnosti s programom musia zdokonaľiť v rámci rôznych postgraduálnych kurzov. V tejto sekcii poukážeme ešte na jednu zaujímavú aplikáciu GeoGebry pri téme kvadratické rovnice. V procese matematického vzdelávania je úplne prirodzené ale aj nevyhnutné, aby po zavedení matematického pojmu a po popísaní jeho vlastností, prišla etapa precvičovania. V tejto etape musí najskôr učiteľ vyriešiť dostatočné množstvo vzorových úloh (riešených príkladov) a následne žiaci precvičujú prebraté algoritmy a metódy na neriešených úlohách. Mnohí učitelia túto etapu považujú za stereotypnú a ako hlavnú metódu používajú *tabuľu a kriedu*. Pri takomto spôsobe vedenia vyučovacej hodiny mnohokrát dochádza ku kolíziám. Napríklad pri tabuli žiak urobí chybu a učiteľ to postrehne oneskorene. Podobných situácií by sme mohli vylicitovať pomerne veľa.

Položme si otázku. Môžu nové technológie pomáhať učiteľovi aj takýchto situáciách? Odpovedáme. Áno. Jednu z možností sme už popísali v predchádzajúcich kapitolách. Tá v tom, že učiteľ si vopred pripraví kvázi prezentáciu formou Step by Step. Na obrázku 15 je applet z práce „Nerovnosti a nerovnice“ našej študentky Ľubice Kupcovej. Prácu vypracovala ako seminárnu prácu¹¹ v rámci Didaktiky matematiky. Prezentovaný applet je z časti „Riešené úlohy, Kvadratické nerovnice“.

Tu treba popísať Ľubkin applet
pridať ... applet 16 matica-zbierka ... možnosť vrátiť predchádzajúce zadanie

¹¹Práca je voľne dostupná na adrese <https://lms.umb.sk/mod/book/view.php?id=182763&chapterid=5916>

$$\sqrt{x^2 - 6} \leq x - 1 \quad /(\cdot)^2$$

$$\text{Podmienka : } x^2 - 6 \geq 0 \quad /+6$$

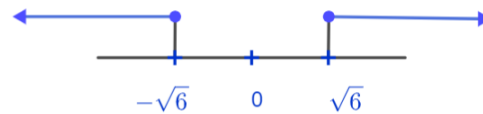
$$x^2 - 6 \leq (x - 1)^2$$

$$x^2 \geq 6 \quad /\sqrt{}$$

$$x^2 - 6 \leq x^2 - 2x + 1 \quad /-x^2 + 2x - 1$$

$$|x| \geq \sqrt{6}$$

$$2x - 7 \leq 0 \quad /+7$$



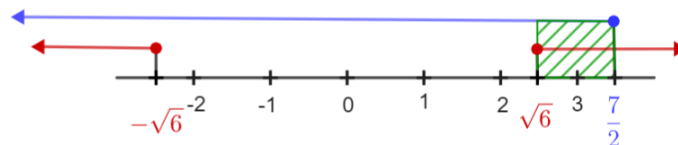
$$2x \leq 7 \quad /\cdot \frac{1}{2}$$

$$x \leq \frac{7}{2}$$

$$K = (-\infty; -\sqrt{6}] \cup [\sqrt{6}; \infty)$$

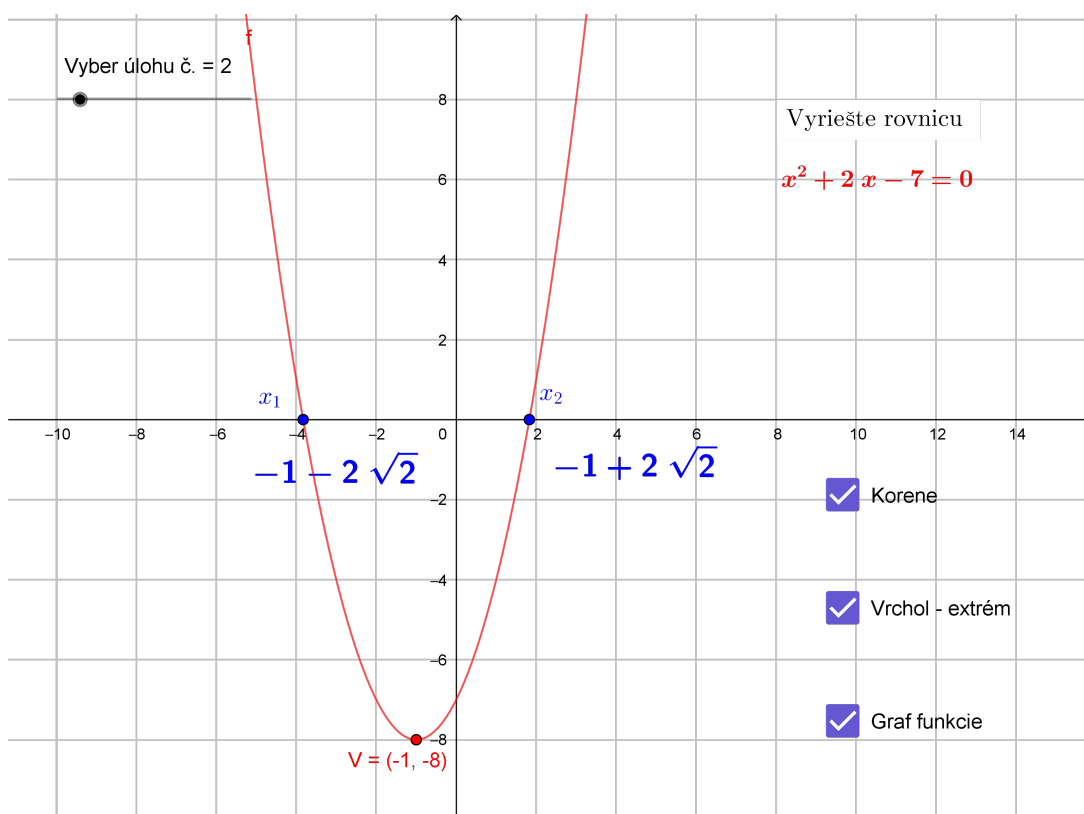


$$K = (-\infty; \frac{7}{2}]$$



$$K = \left[\sqrt{6}; \frac{7}{2} \right]$$

Obr. 15: Riešený príklad - kvadratická nerovnica, applet si aktivujete [Tu](#).



Obr. 16: Zbierka riešených príkladov - kvadratické rovnice. Dostupné [Tu](#).