OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 0/XXXX (00)

O lineárnych nerovniciach

Jozef Doboš

Abstract [On linear inequalities]: This paper is devoted to checking solutions to linear inequalities.

Key words: checking a solution, linear inequalities

Súhrn: Práca je venovaná skúške správnosti pri riešení lineárnych nerovníc.

Kľúčové slová: skúška správnosti, lineárne nerovnice

MESC: H30, I20.

Úvod

Lineárne nerovnice mávajú spravidla nekonečne veľa riešení. Preto nie je možné urobiť skúšku správnosti dosadením každého z nich, ako sa to robí pri rovniciach. Z tohto dôvodu naše učebnice odporúčajú robiť „overenie správnosti riešenia“ (pozri napr. [8], [12]). V pracovnom zošite pre 9. ročník to autori nazvali „čiastočné overenie správnosti riešenia lineárnej nerovnice“ (pozri [1]). V zahraničných učebniciach sa to niekedy nazýva „informal check“ (pozri napr. [13]). Napriek tomu, v materiáloch uverejnených na internete to ich autori stále nazývajú „skúška správnosti“, ako napr.
`https://www.youtube.com/watch?v=wFMHOreRylY`
`https://prezi.com/p/zag2aif9ugyp/linearne-nerovnice/`
`https://dm-projekt.webnode.sk/matematika-9-rocnik/nerovnice/`

Ukážeme si, že takéto „overenie správnosti riešenia“ môže zlyhať. Naozaj,

$$\begin{aligned} 3x - 8 &< 5 \quad / + 8 \\ 3x &< 12 \quad / : 3 \\ x &< 4 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \text{Overenie: } x &= 3 \\ \text{Ľ} = 3 \cdot 3 - 8 &= 1 \\ \text{P} &= 5 \\ \text{Ľ} &< \text{P} \end{aligned}$$

Nerovnica je vyriešená nesprávne, ale overenie vyšlo. Tak načo je takéto „overenie správnosti riešenia“ dobré? Môžeme ho dokonca nazývať „skúška správnosti“?

V súvislosti s tým vznikajú dve otázky: Či je možné urobiť korektným spôsobom skúšku správnosti, prípadne či sa dá „overenie správnosti riešenia" doplniť na korektnú skúšku správnosti.

Odpoveď na prvú otázku nájdeme v knihe [9]. Potrebujeme k tomu parametrické vyjadrenie riešení lineárnej nerovnice. Ukážeme si to na vyššie uvedenom príklade nerovnice $3x - 8 < 5$, kde sme ukázali (chybne), že jej riešeniami sú práve tie reálne čísla, pre ktoré platí $x < 4$. Grafickým znázornením týchto riešení na číselnej osi je polpriamka, ktorej parametrické vyjadrenie je $x = 4 - p$, kde p je ľubovoľné kladné reálne číslo (parameter). Teraz môžeme pristúpiť ku skúške správnosti:

$$\begin{aligned} 3x - 8 &< 5 \\ 3(4 - p) - 8 &< 5 \\ 12 - 3p - 8 &< 5 \\ 4 - 3p &< 5 \end{aligned} \tag{1}$$

Teda nerovnosť (1) by mala platiť práve vtedy, keď $p > 0$. To však zrejme neplatí, stačí dosadiť do (1) napríklad $p = -\frac{1}{6}$. Skúška správnosti ukázala, že nie každé reálne číslo $x < 4$ je riešením danej nerovnice.

Teraz sa pozrime čo sa stane, keď nerovnicu $3x - 8 < 5$ vyriešime správne:

$$\begin{aligned} 3x - 8 &< 5 \\ 3x &< 13 \\ x &< \frac{13}{3} \end{aligned}$$

Riešeniami nerovnice $3x - 8 < 5$ sú práve tie reálne čísla, pre ktoré platí $x < \frac{13}{3}$. Urobme skúšku správnosti. Grafickým znázornením týchto riešení na číselnej osi je polpriamka, ktorej parametrické vyjadrenie je $x = \frac{13}{3} - p$, kde p je ľubovoľné kladné reálne číslo (parameter). Teraz môžeme pristúpiť ku skúške správnosti:

$$\begin{aligned} 3x - 8 &< 5 \\ 3\left(\frac{13}{3} - p\right) - 8 &< 5 \\ 13 - 3p - 8 &< 5 \\ 5 - 3p &< 5 \end{aligned}$$

pričom použijeme nasledujúcu vlastnosť reálnych čísel:

$$a < b \quad \text{práve vtedy, keď} \quad b - a > 0 \tag{2}$$

aby sme mohli pokračovať v skúške správnosti:

$$\begin{aligned} 5 - (5 - 3p) &> 0 \\ 3p &> 0 \end{aligned} \tag{3}$$

Zrejme nerovnosť (3) je splnená práve vtedy, keď $p > 0$. A presne to sme mali ukázať.

Poznamenajme, že takáto skúška správnosti nie je vôbec jednoduchá a možno aj preto je v súčasnosti takmer zabudnutá.

V zahraničných učebniciach sa používa skúška správnosti založená na metóde testovacích bodov (pozri napr. [2], [3], [7], [10], [11]). Ukážeme si jej použitie na príklade nerovnice $3x - 8 < 5$. Ako sme videli vyššie, jej riešeniami sú práve tie reálne čísla, pre ktoré platí $x < \frac{13}{3}$.

Pritom nerovnosť $x < \frac{13}{3}$ má dve zložky. Prvou je číslo $\frac{13}{3}$, čo je vlastne koreň rovnice $3x - 8 = 5$. Druhou zložkou je znak nerovnosti $<$. Preto táto skúška správnosti má dve časti. V prvej z nich dosadíme číslo $\frac{13}{3}$ do rovnice $3x - 8 = 5$, aby sme zistili, či je jej koreňom. V druhej časti dosadíme jedno konkrétne číslo vyhovujúce nerovnosti $x < \frac{13}{3}$ do nerovnice $3x - 8 < 5$ (presne tak isto, ako v „overení správnosti riešenia“), aby sme zistili, či je jej riešením. V tomto zmysle je táto metóda doplnením „overenia správnosti riešenia“, čím dávame kladnú odpoveď na druhú otázku. Môžeme postupovať podobne ako v učebnici [2]:

Krok 1. Overte hraničný bod.
Dosaďte $\frac{13}{3}$ namiesto x do rovnice $3x - 8 = 5$.
Hraničný bod by mal byť jej koreňom.

$$\begin{array}{r|l} \multicolumn{2}{c}{3x - 8 = 5} \\ \hline 3 \cdot \frac{13}{3} - 8 & 5 \\ 5 & 5 \ \checkmark \end{array}$$

Krok 2. Overte znak nerovnosti.
Dosaďte číslo menšie ako $\frac{13}{3}$ namiesto x do pôvodnej nerovnice. Číslo, ktoré ste vybrali, by malo byť riešením tejto nerovnice.

$$\begin{array}{r|c|l} \multicolumn{3}{c}{3x - 8 < 5} \\ \hline 3 \cdot 3 - 8 & < & 5 \\ 1 & < & 5 \ \checkmark \end{array}$$

Ak je nerovnica vyriešená nesprávne, potom skúška správnosti založená na metóde testovacích bodov zlyhá aspoň v jednom kroku. Napríklad, v ukážke uvedenej na začiatku článku zlyhá v prvom kroku (overte to).

Túto metódu odporúčame používať namiesto „overenia správnosti riešenia“, pretože je jednoduchá, žiakmi zvládnuteľná, pričom je korektná.

Pozrime sa teraz bližšie na metódu testovacích bodov, čo je vlastne metóda riešenia (nielen lineárnych) nerovníc (pozri napr. [4], [6]). Najskôr uvedieme stručný popis tejto metódy:

Lineárnu nerovnicu s jednou neznámou najskôr zmeníme na lineárnu rovnicu (jednoducho zámenou znaku nerovnosti za znak rovnosti), ktorú vyriešime. Koreň tejto lineárnej rovnice nazývame „hraničný bod“. Na číselnej osi znázorňujeme hraničný bod plným krúžkom, ak je riešením danej lineárnej nerovnice, prázdnym krúžkom, ak nie je jej riešením. Hraničný bod rozdeľuje číselnú os na dve oblasti. Jednu z týchto oblastí tvoria všetky reálne čísla menšie ako hraničný bod a druhú tvoria všetky reálne čísla väčšie ako hraničný bod.

Potom vyberieme číslo z jednej z týchto oblastí, ktoré nazývame „testovací bod“, a zisťujeme, či toto číslo je riešením danej lineárnej nerovnice. Ak je jej riešením, potom každé číslo z tejto oblasti je riešením danej lineárnej nerovnice a žiadne číslo z tej druhej oblasti nie je riešením danej lineárnej nerovnice. Ak testovací bod nie je riešením danej lineárnej nerovnice, potom je to naopak: žiadne číslo z tejto oblasti nie je riešením danej lineárnej nerovnice a každé číslo z tej druhej oblasti je riešením danej lineárnej nerovnice.

Teraz sa pozrieme na metódu testovacích bodov podrobnejšie. Nech a, b, c sú reálne čísla, pričom $a \neq 0$. Budeme uvažovať nasledujúce lineárne nerovnice a s nimi súvisiacu lineárnu rovnicu:

$$\begin{array}{ccc} \text{lineárna nerovnica} & \text{lineárna rovnica} & \text{lineárna nerovnica} \\ ax + b < c & ax + b = c & ax + b > c \end{array} \tag{4}$$

Pre každé dve reálne čísla r, s platí práve jeden zo vzťahov

$$r < s, \qquad r = s, \qquad r > s. \tag{trichotómia}$$

Preto každé reálne číslo x je riešením práve jednej z úloh (4).

Nech číslo x_1 je riešením lineárnej nerovnice $ax + b < c$, t. j. $ax_1 + b < c$.

Nech číslo x_2 je riešením lineárnej nerovnice $ax + b > c$, t. j. $ax_2 + b > c$.

Ukážeme, že platí:

$$\text{Koreň lineárnej rovnice } ax + b = c \text{ leží medzi číslami } x_1 \text{ a } x_2. \tag{5}$$

K tomu stačí ukázať, že pre koreň $x = \dfrac{c-b}{a}$ lineárnej rovnice $ax + b = c$ platí

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \quad \text{kde} \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \quad \alpha_1 > 0, \quad \alpha_2 > 0. \tag{6}$$

Naozaj, v prípade $x_1 < x_2$ máme

$$x_1 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_1 < \underbrace{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2}_{=x} < \alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_2 = x_2, \quad \text{čo dáva} \quad x_1 < x < x_2.$$

Podobne, v prípade $x_2 < x_1$ máme

$$x_2 = \alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_2 < \underbrace{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2}_{=x} < \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_1 = x_1, \quad \text{čo dáva} \quad x_2 < x < x_1.$$

Zostáva nám už iba overiť, že pre koreň lineárnej rovnice $ax + b = c$ platí (6).

Čísla α_1, α_2 nájdeme riešením sústavy rovníc:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 &= 1, \\ \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 &= \frac{c-b}{a}, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

kde číslo $x = \dfrac{c-b}{a}$ je koreňom lineárnej rovnice $ax + b = c$. Riešením sústavy (7) dostávame:

$$\alpha_1 = \frac{(ax_2 + b) - c}{a(x_2 - x_1)}, \quad \alpha_2 = \frac{c - (ax_1 + b)}{a(x_2 - x_1)}.$$

Zostáva nám overiť, že platí $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$.

Pretože $ax_1 + b < c < ax_2 + b$, máme

$$a(x_2 - x_1) = (ax_2 + b) - (ax_1 + b) > 0.$$

Tým sme ukázali, že $a(x_2 - x_1) > 0$.

Pretože $ax_1 + b < c$, máme $c - (ax_1 + b) > 0$. Teda

$$\alpha_1 = \frac{c - (ax_1 + b)}{a(x_2 - x_1)} > 0.$$

Pretože $ax_2 + b > c$, máme $(ax_2 + b) - c > 0$. Teda

$$\alpha_2 = \frac{(ax_2 + b) - c}{a(x_2 - x_1)} > 0.$$

Tým je vlastnosť (6) dokázaná.

Pri metóde testovacích bodov sa nestretneme s násobením/delením nerovnice. Nemusíme dávať pozor, či treba znak nerovnosti otočiť alebo nie. Nemusíme robiť žiadne úpravy nerovnice.

Pritom metóda testovacích bodov sa používa aj pri riešení nelineárnych nerovníc (pozri napr. [5]).

Literatúra – References

[1] Bélik, M. a kol.: Hravá matematika. Pracovný zošit pre 9. ročník ZŠ a kvartu GOŠ, TAKTIK, Košice, 2013.
[2] Burger, E. B., et al.: Integrated Math 1, Houghton Mifflin Harcourt Publishing Company, 2013.
[3] Carter, J. A. et all.: Integrated Math 1, McGraw-Hill Companies, Inc., 2012.
[4] Dietiker, L. et all.: Core Connections Algebra Parent Guide with Extra Practice, CPM Educational Program, 2016.
[5] Doboš, J.: Príbeh o skúške správnosti, Obzory matematiky, fyziky a informatiky, 4/2013 (42), 9–14.
[6] Glencoe McGraw-Hill Staff: Impact Mathematics, Algebra and More, Course 3, Glencoe/McGraw-Hill, 2005.
[7] Charles, R. I., et al.: Algebra 1 Common Core, Pearson Education, Inc, 2015.
[8] Kolbaská, V.: Matematika pre 9. ročník základnej školy a 4. ročník gymnázia s osemročným štúdiom, 1. časť, SPN, Bratislava, 2012.
[9] Križalkovič, K., Cuninka, A., Šedivý, O.: Riešené úlohy na nerovnice, Alfa, Bratislava, 1972.
[10] Lial, M. L., Hornsby, J., McGinnis, T.: Algebra for College Students, 9th edition, Pearson Education, Inc., 2020.
[11] McAskill, B., Watt, W., Zarski, Ch., Balzarini, E.: MathLinks 9, McGraw–Hill Ryerson, 2011.
[12] Šedivý, O., Čeretková, S., Malperová, M., Bálint, Ľ.: Matematika pre 8. ročník základných škôl, 2. časť, SPN, Bratislava, 2001.
[13] Tussy, A. S., Gustafson, R. D.: Elementary and Intermediate Algebra, Fifth Edition, Brooks/Cole, Cengage Learning, 2013.

Adresa autora:

Ústav matematiky, Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach, Prírodovedecká fakulta,
Jesenná 5, 040 01 Košice, e-mail: `jozef.dobos@upjs.sk`