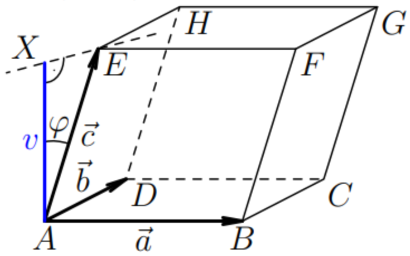
Výpočet objemu rovnobežnostena

(SŠ): Objem 4-bokého rovnobežnostena sa rovná: obsah podstavy krát výška na túto podstavu.

$$V = S_{ABCD} \cdot \|\vec{v}\| \tag{1}$$



Obr. 1: Repér $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$

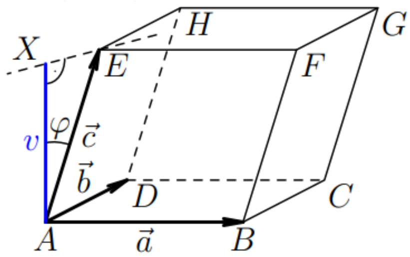
Na obrázku 1 je rovnobežnosten $ABCDEFGH$ a vektory bázy 3-rozmerného vektorového priestoru $V_3(\mathbb{R})$. Nech $\vec{v}$ je výška na dolnú podstavu $ABCD$, ktorá je predstavuje vzdialenosť medzi podstavami. Ak označíme symbolom X priesečník roviny $EFGH$ s priamkou $A + t\vec{v}$, tak zrejme trojuholník AEX je pravouhlý.

Podstavou p rovnobežnostena je rovnobežník $ABCD$, jeho obsah vieme vypočítať pomocou vektorového súčinu $(\vec{b} \times \vec{c})$. Nech vektor $\vec{a} = \overrightarrow{B - A}$ a vektor $\vec{b} = \overrightarrow{D - A}$. Potom obsah podstavy $p = ABCD$ vypočítame ako veľkosť vektorového súčinu $\vec{a} \times \vec{b}$.

$$S_p = \|\vec{a} \times \vec{b}\|. \tag{2}$$

Teraz preskúmame výšku $\vec{v} = \overrightarrow{X - A}$.

V trojuholníku AEX označme uhol pri vrchole A ako φ.



Ak použijeme goniometrickú funkciu kosínus pre pravouhlý trojuholník AEX, tak v prípade $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ dostaneme:

$$\|\vec{v}\| = |AE| \cdot \cos\varphi \tag{3}$$

Vo všeobecnosti veľkosť vektora $\vec{c} = \overrightarrow{E - A}$ bázy je zrejme taká istá ako veľkosť úsečky AE, preto môžeme písať:

$$\|\vec{v}\| = \|\vec{c}\| \cdot |\cos\varphi| \tag{4}$$

Ak vo vzorci (1) nahradíme obsah podstavy S_p veľkosťou vektorového súčinu vektorov $\vec{a}$ a $\vec{b}$ (vzťah (2)) a výšku nahradíme naším predchádzajúcim vyjadrením, tak dostaneme:

$$V = \|\vec{a} \times \vec{b}\| \cdot \|\vec{c}\| \cdot |\cos\varphi| \tag{5}$$

Na výsledný vzorec sa pozrieme očami vektorovej algebry. Máme tam súčin veľkostí dvoch vektorov a to vektora $\vec{a} \times \vec{b}$ a vektora $\vec{c}$, vynásobený kosínusom uhla φ. Zároveň pre absolútnu hodnotu skalárneho súčinu platí:

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| |\cos\varphi|, \tag{6}$$

kde $\vec{u} = \vec{a} \times \vec{b}$ a $\vec{v} = \vec{c}$. Porovnaním vzťahov (5) a (6) dostaneme pre objem rovnobežnostena

$$V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|. \tag{7}$$

Tento súčin vektorov sa nazýva **zmiešaný súčin vektorov $\vec{a}$, $\vec{b}$ a $\vec{c}$** (v tomto poradí).