

PLANIMETRIEA

Roman HAŠEK

19. května 2020

Obsah

1	Připomenutí vybraných pojmů	4
1.1	Grupa	4
1.2	Těleso	5
1.3	Vektorový prostor	5
1.4	Afinní bodový prostor	6
1.5	Afinní souřadnice bodů	7
1.6	Eukleidovský bodový prostor	8
2	Geometrická zobrazení	9
3	Afinní zobrazení	15
3.1	Dělicí poměr	15
3.2	Afinní zobrazení	17
4	Afinní transformace roviny (Afnita)	18
4.1	Analytické vyjádření afinity v rovině	18
4.2	Souvislost mezi skládáním afinních zobrazení a násobením matic	21
5	Shodná zobrazení v rovině	23
5.1	Rovnice shodnosti v rovině	25
5.2	Samodružné body a samodružné směry shodností v rovině	34
5.3	Lineární zobrazení asociované s afinním zobrazením (asociovaný homomorfismus)	36
5.4	Výpočet samodružných bodů a směrů shodnosti v rovině	38
5.5	Symetrie	46
5.6	Osová souměrnost	48
5.7	Cvičení: Osová souměrnost	53
5.8	Středová souměrnost	57
5.8.1	Skládání zobrazení	61
5.8.2	Středová souměrnost jako složené zobrazení	61
5.9	Cvičení: Středová souměrnost	63
5.10	Otočení	64
5.10.1	Otočení jako složené zobrazení	69
5.11	Cvičení: Otočení	72
5.12	Posunutí (Translace)	73
5.12.1	Posunutí jako složené zobrazení	76

5.13	Cvičení: Posunutí	78
5.14	Posunutá souměrnost (Posunuté zrcadlení)	79
5.14.1	Posunutá souměrnost jako složené zobrazení	81
5.15	Cvičení: Posunutá souměrnost	83
5.16	Identita	84
6	Skládání shodností v rovině	86
6.1	Shodnosti přímé a nepřímé vs. skládání zobrazení	88
6.2	Grupa shodností v rovině	89
6.3	Souvislost mezi skládáním afinních zobrazení a násobením matic	90
7	Klasifikace shodností roviny	92
7.1	Tři osově souměrnosti stačí	96
8	Podobná zobrazení	99
8.1	Věty o podobnosti trojúhelníků	106
9	Stejnolehlost	108
9.1	Analytické vyjádření stejnohlosti	112
9.2	Skládání stejnohlostí	113
9.3	Stejnolehlost kružnic	115
9.4	Mongeova věta	121
9.5	Kružnice devíti bodů	122
9.6	Eulerova přímka	123
9.7	Podobnosti eukleidovské roviny	125
9.8	Cvičení: Stejnolehlost. Podobnost.	127
10	Mocnost bodu ke kružnici	129
10.1	Chordála a potenční střed	133
10.2	Cvičení: Mocnost bodu ke kružnici	136
11	Osová afinita	137
11.1	Základní afinity	137
11.2	Osová afinita v rovině	137
11.3	Cvičení – Osová afinita	140
12	Analytické vyjádření afinního zobrazení v rovině	141

1 Připomenutí vybraných pojmů

1.1 Grupa

Definice 1 ((Komutativní) grupa). *Grupou $(M, *)$ rozumíme množinu M spolu s operací $*$ na M , která má tyto vlastnosti:*

i) $\forall x, y \in M; x * y \in M$,
Operace $$ je neomezeně definovaná na M .
(Množina M je uzavřená vzhledem k operaci $*$.)*

ii) $\forall x, y, z \in M; x * (y * z) = (x * y) * z$,
Operace (struktura) je asociativní.

iii) $\exists e \in M, \forall x \in M; x * e = e * x = x$,
Existuje neutrální prvek vzhledem k $$.
(Jedná se o strukturu s neutrálním prvkem.)*

iv) $\forall x \in M, \exists y \in M; x * y = y * x = e$.
Ke každému prvku existuje prvek inverzní vzhledem k $$.
(Jedná se o strukturu s inverzními prvky.)*

*Je-li struktura $(M, *)$ navíc komutativní, nazývá se komutativní grupa nebo též Abelova grupa.*

Příklady grup

- $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{C}, +)$,
- $(\mathbb{Q} - \{0\}, \cdot), (\mathbb{R} - \{0\}, \cdot), (\mathbb{C} - \{0\}, \cdot)$,
- Množina povelů {stt, vlevo vbok, vpravo vbok, elem vzad} spolu s operací skládání.

o	pozor	vlevo v bok	vpravo v bok	čelem vzad
pozor	pozor	vlevo v bok	vpravo v bok	čelem vzad
vlevo v bok	vlevo v bok	čelem vzad	pozor	vpravo v bok
vpravo v bok	vpravo v bok	pozor	čelem vzad	vlevo v bok
čelem vzad	čelem vzad	vpravo v bok	vlevo v bok	pozor

- Uvažujme rovnostranný trojúhelník ABC v rovině ρ . Grupou je potom množina všech transformací roviny, v nichž se trojúhelník zobrazí sám na sebe, spolu s operací skládání transformací (hovoříme o tzv. dihedrální grupě, viz též grupy symetrií).

1.2 Těleso

Tělesem jako algebraickou strukturou rozumíme strukturu jejíž vlastnosti jsou zobrazením vlastností množiny reálných čísel spolu s operacemi sčítání a násobení, tj. struktury $(R, +, \cdot)$.

Definice 2. *Struktura $(T, +, \cdot)$ se nazývá těleso, právě když je $(+, \cdot)$ -distributivní, když struktura $(T, +)$ je komutativní grupa (tzv. aditivní grupa tělesa) a když struktura $(T - \{0\}, \cdot)$, kde 0 je nulový prvek grupy $(T, +)$, je grupa (tzv. multiplikativní grupa tělesa T). Je-li navíc grupa $(T - \{0\}, \cdot)$ komutativní, nazývá se T komutativní těleso.*

Příklady těles

1. $(Q, +, \cdot)$,
2. $(R, +, \cdot)$,
3. $(C, +, \cdot)$.

1.3 Vektorový prostor

Definice 3 (Vektorový prostor). *Nechť T je komutativní těleso. Množinu V nazveme vektorovým prostorem nad tělesem T , právě když jsou na V definovány dvě operace: (i) sčítání: libovolné dvojici $\vec{u} \in V$, $\vec{v} \in V$ je jednoznačně přiřazen prvek $\vec{u} + \vec{v} \in V$, (ii) násobení prvkem z tělesa T (skalárem): výsledkem násobení vektoru $\vec{u} \in V$ skalárem $a \in T$ je vektor $a\vec{u} \in V$, které splňují následující vlastnosti:*

- a) *Struktura $(V, +)$ je komutativní grupa.*
- b) *Distributivnost: $(a + b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$, $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$.*
- c) *Existence jednotkového prvku skalárního násobení: $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$.*

Příklady vektorových prostorů

1. Množina R^2 všech uspořádaných dvojic reálných čísel s operacemi sčítání uspořádaných dvojic a násobení reálným číslem definovanými následujícím způsobem: $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$, $k \cdot (a_1, a_2) = (ka_1, ka_2)$ (jedná se o tzv. **aritmetický vektorový prostor** R^2 nad tělesem reálných čísel).
2. Množina geometrických vektorů v rovině (orientovaných úseček) spolu s operací skládání vektorů a násobení vektoru reálným číslem, jak jsou známy ze školské matematiky.

1.4 Afinní bodový prostor

Definice 4 (Afinní bodový prostor). Neprázdnou množinu A_n (její prvky jsou tzv. body) nazveme *afinním*¹ bodovým prostorem dimenze n , jestliže je dán vektorový prostor V_n dimenze n a zobrazení

$$g : A_n \times A_n \rightarrow V_n$$

těchto vlastností: 1. Pro každý bod $A \in A_n$ a pro každý vektor $\vec{x} \in V_n$ existuje jediný bod $B \in A_n$ tak, že

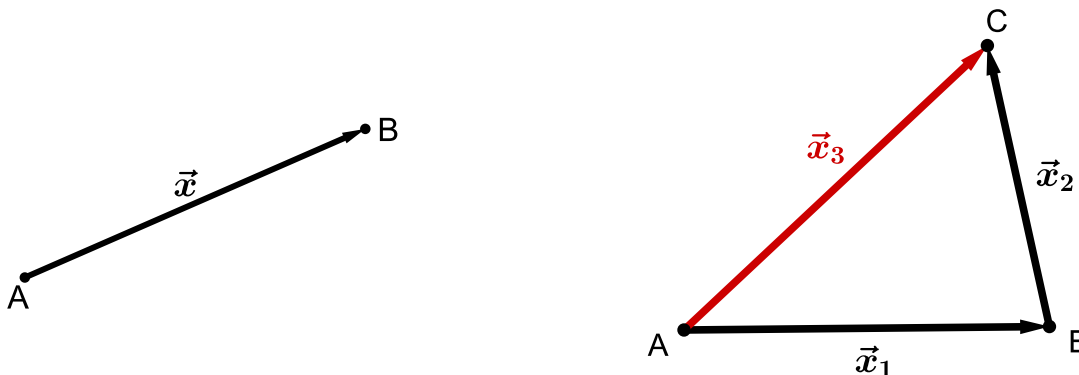
$$g(A, B) = \vec{x} \quad \text{t.j.} \quad B = A + \vec{x}.$$

2. Pro každé tři body $A, B, C \in A_n$ platí, že

$$g(A, C) = g(A, B) + g(B, C).$$

(Jedná se o tzv. Chaslesův vztah. Jeho platnost požadujeme v každém afinním bodovém prostoru².)

Vektorový prostor V_n nazýváme *vektorovým zaměřením* afinního prostoru A_n .



Příklady afinního bodového prostoru

1. Jednoprvková množina se zaměřením $V_0 = \{\vec{0}\}$ je afinní bodový prostor dimenze 0.
2. Eukleidovský bodový prostor E_n , jehož formy pro $n \leq 3$ nazýváme dle dimenze bod (značíme E_0), přímka (značíme E_1), rovina (E_2) a trojrozměrný prostor (E_3).
3. Samotný vektorový prostor V_n splňuje definici afinního bodového prostoru². Platí

$$g(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{v} - \vec{u}.$$

¹Affinis znamená latinsky *příbuzný*. Poprvé tento pojem použil Leonhard Euler (1707-1783) pro označení vztahu vzoru a obrazu v zobrazení, které zachovává dělicí poměr. Takovým zobrazením se začalo říkat *afinní zobrazení*. *Afinní geometrií* rozumíme geometrii bez vzdáleností a odchylek.

²Další vlastnosti operací *odčítání bodů* a *sčítání bodu a vektoru* jsou uvedeny v [1] PECH, P. (2004) *Analytická geometrie lineárních útvarů*, České Budějovice, Jihočeská univerzita v Č. B., dostupné na adrese <http://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/knihy/Analyticka.pdf>, str. 15.

²Naopak to samozřejmě neplatí, nelze říci, že afinní bodový prostor je zároveň vektorovým prostorem.

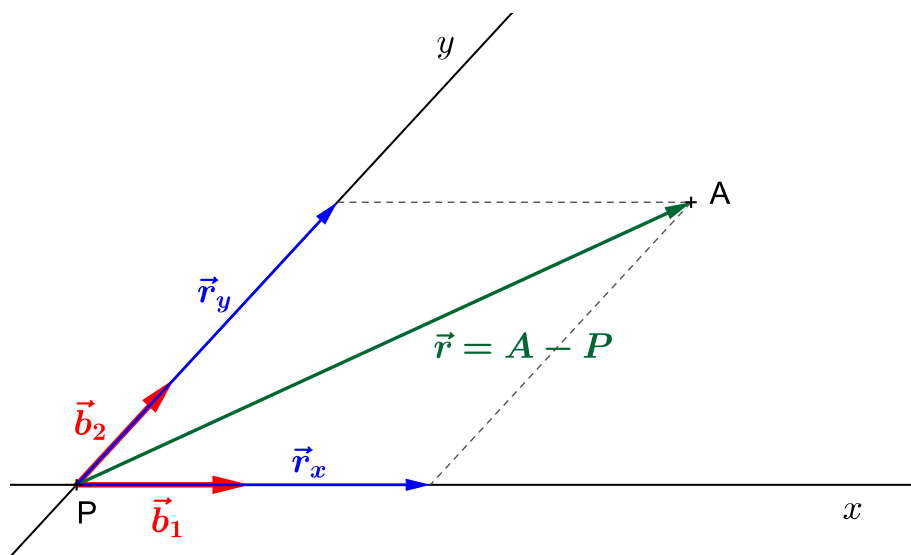
1.5 Afinity souřadnice bodů

Definice 5 (Afinní soustava souřadnic - repér). *Nechť P je libovolný bod z afinního prostoru A_n , $n > 0$. Nechť $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ je báze vektorového zaměření V_n prostoru A_n . Potom uspořádanou $(n + 1)$ -tici*

$$\varphi = (P, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$$

nazýváme afinní soustavou souřadnic φ (též repérem φ) v prostoru A_n .

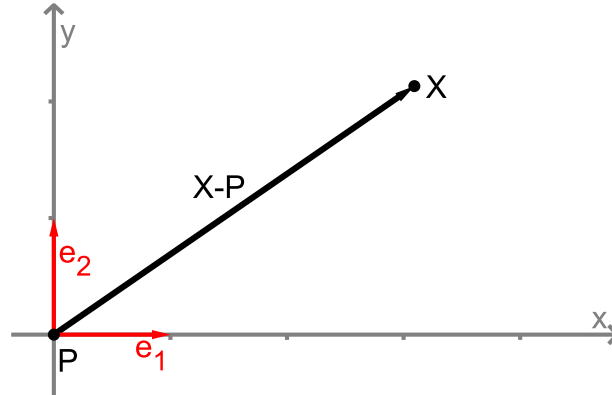
Souřadnicemi bodu $X \in A_n$ v soustavě souřadnic φ budeme rozumět souřadnice vektoru $X - P$ v bázi $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$.



Obrázek 1: Afinní soustava souřadnic v rovině

Jak je naznačeno na Obr. 1, dosud zavedené pojmy nám dovolují přiřadit souřadnice bodu prostřednictvím jeho průvodiče. Konkrétně se jedná o bod A s průvodičem \vec{r} . Můžeme psát $\vec{r} = \vec{r}_x + \vec{r}_y$. Jistě existují taková čísla $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, pro která $\vec{r}_x = a_1 \cdot \vec{b}_1$ a $\vec{r}_y = a_2 \cdot \vec{b}_2$. Potom platí $\vec{r} = \vec{r}_x + \vec{r}_y = a_1 \cdot \vec{b}_1 + a_2 \cdot \vec{b}_2$. Vektor \vec{r} má tak vzhledem k dané bázi $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ souřadnice a_1, a_2 . Bod $A = P + \vec{r}$ je potom při pevně daném bodě P a bázi $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$, tj. při daném repéru $\{P, \vec{b}_1, \vec{b}_2\}$, rovněž jednoznačně určen dvojicí čísel a_1, a_2 . Říkáme, že bod P má vzhledem k danému repéru souřadnice $[a_1, a_2]$, píšeme $P[a_1, a_2]$.

Definice 6 (Kartézská soustava souřadnic). *Kartézskou soustavou souřadnic rozumíme afinní soustavu souřadnic $(P; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$, kde $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ je ortonormální báze.*



Obrázek 2: Kartézská soustava souřadnic v rovině

1.6 Eukleidovský bodový prostor

Definice 7 (Eukleidovský bodový prostor). *Eukleidovským bodovým prostorem E_n rozumíme afinní bodový prostor, na jehož zaměření je definován **skalární součin**.*

Definice 8 (Skalární součin). *Skalárním součinem rozumíme operaci, která každé dvojici vektorů $\vec{u}, \vec{v} \in V$ přiřazuje reálné číslo (skalár) $\vec{u} \cdot \vec{v} \in R$ tak, že platí:*

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$, (SYMETRIE)
2. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$, (BILINEARITA, vlastnosti 2 a 3)
3. $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$,
4. $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0 \wedge [\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{o}]$. (POZITIVITA)

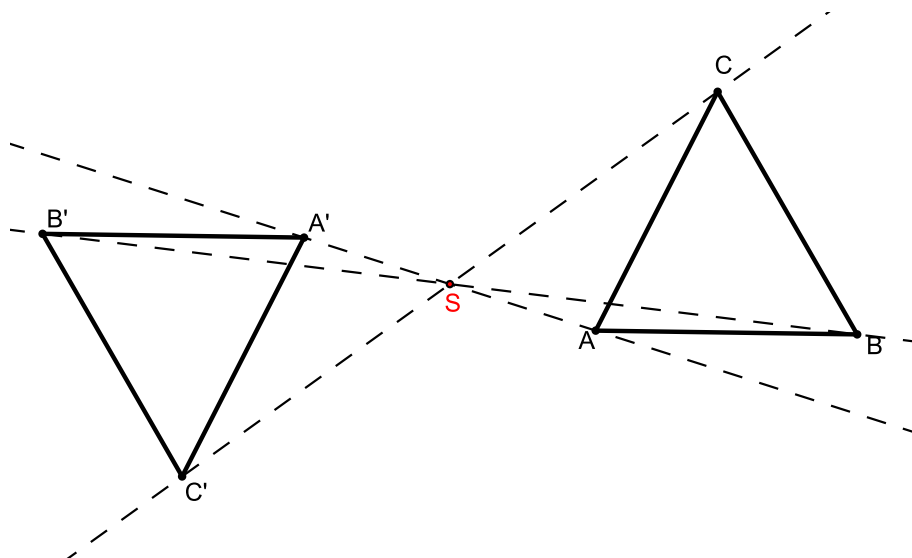
2 Geometrická zobrazení

Definice 9 (Geometrické zobrazení). *Zobrazením (geometrickým zobrazením) rozumíme předpis, kterým je libovolnému bodu X (který je prvkem dané množiny, např. roviny) jako jeho obraz jednoznačně přiřazen bod $X' = f(X)$.*

Definice 10 (Vzájemně jednoznačné zobrazení). *Vzájemně jednoznačným zobrazením rozumíme zobrazení, které je prosté a zároveň je zobrazením na množinu (tj. že dvěma různými body (vzorů) jsou přiřazeny dva různé obrazy a zároveň platí, že každý bod množiny, do níž zobrazujeme, je obrazem nějakého bodu z množiny vzorů).*

Příklady geometrických zobrazení

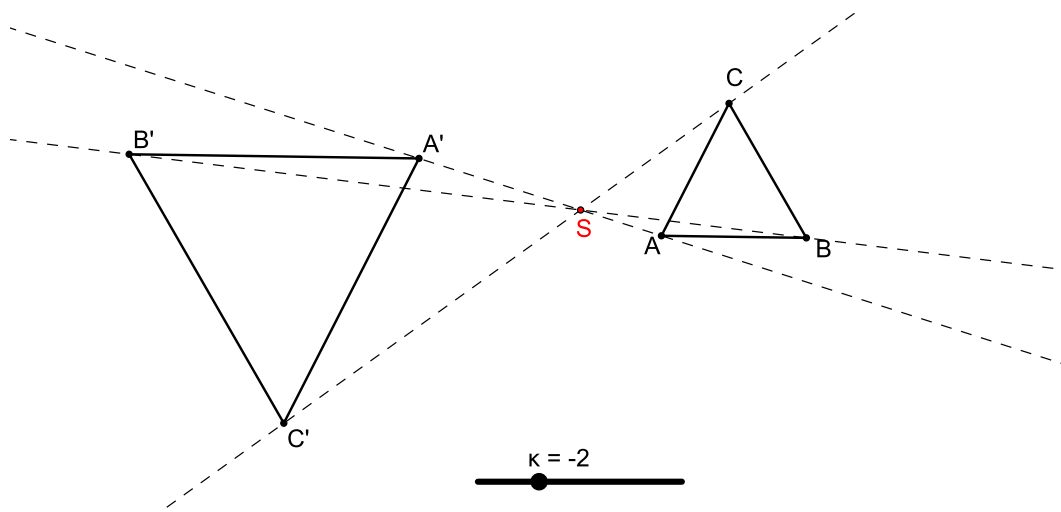
Středová souměrnost, viz Obr. 3¹



Obrázek 3: Středová souměrnost se středem S

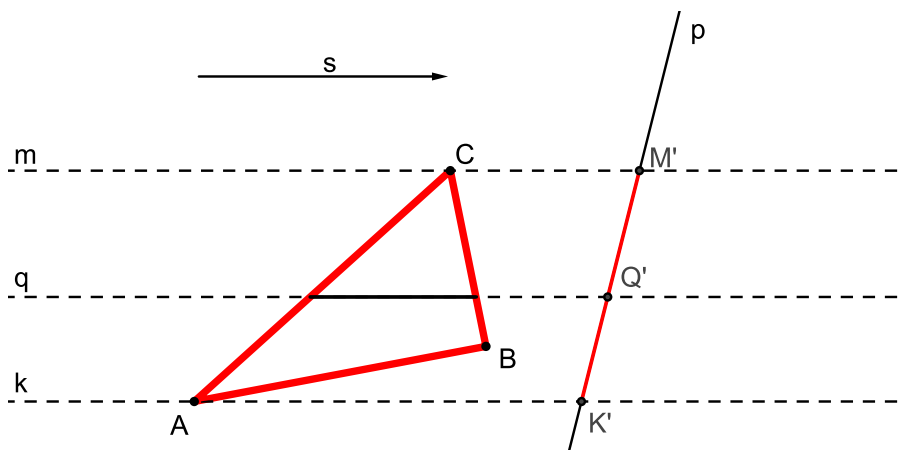
¹Středová souměrnost je příkladem *vzájemně jednoznačného geometrického zobrazení* (stejně jako všechna ostatní shodná zobrazení i stejnoolehlost).

Stejnolehlost (daná středem S a koeficientem κ), viz Obr. 4



Obrázek 4: Stejnolehlost se středem S a s koeficientem $\kappa = -2$

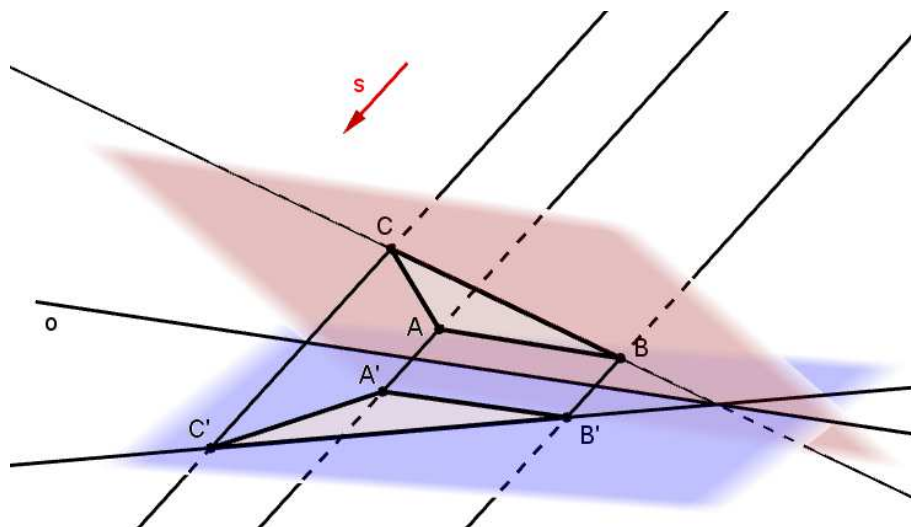
Rovnoběžné promítání do přímky (dané směrem \vec{s} a přímkou p), viz Obr. 5²



Obrázek 5: Rovnoběžné promítání ve směru \vec{s} z roviny do přímky p

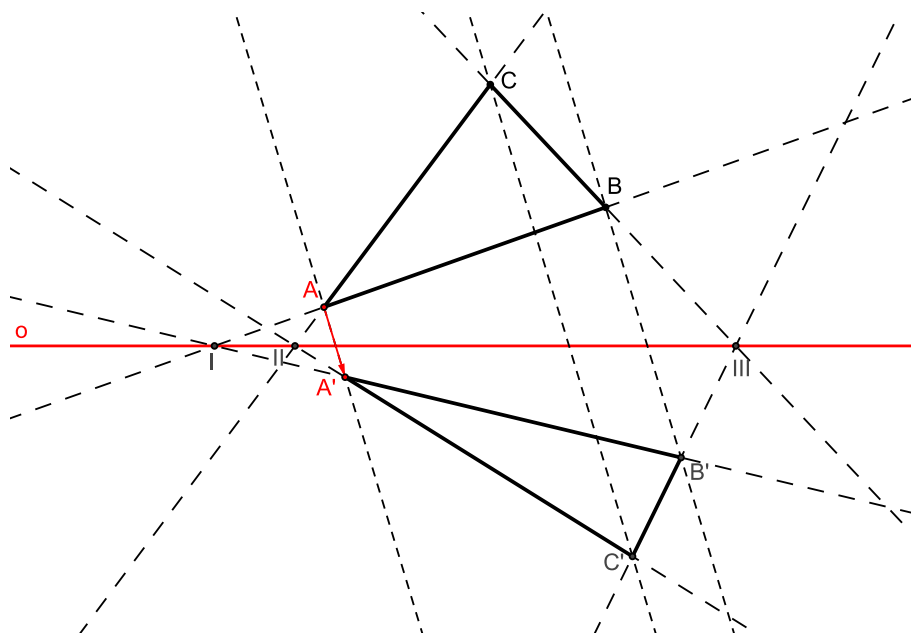
²Rovnoběžné promítání do přímky není prosté. Z obrázku je patrné, že všechny body přímky rovnoběžné se směrem \vec{s} se zobrazují do jednoho bodu. Například body přímek k, m, q se v uvedeném pořadí zobrazují do bodů K', M', Q' .

Rovnoběžné promítání se směrem \vec{s} mezi dvěma různoběžnými rovinami v prostoru E_3 , viz Obr. 6.



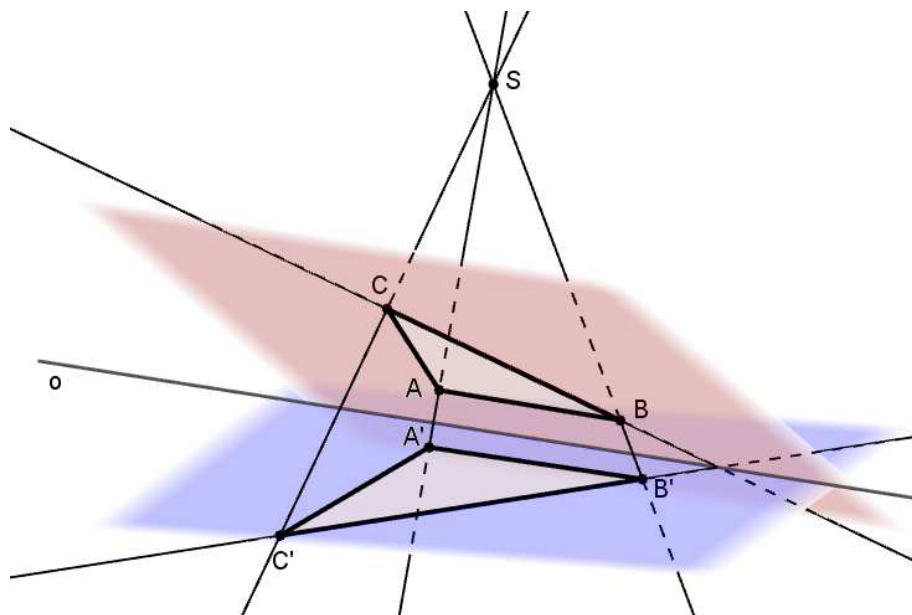
Obrázek 6: Rovnoběžné promítání mezi dvěma různoběžnými rovinami (dalo vznik *osové afinitě*)

Osová afinita (daná osou o a dvojicí bodů A, A' ve vztahu vzor a obraz), viz Obr. 7



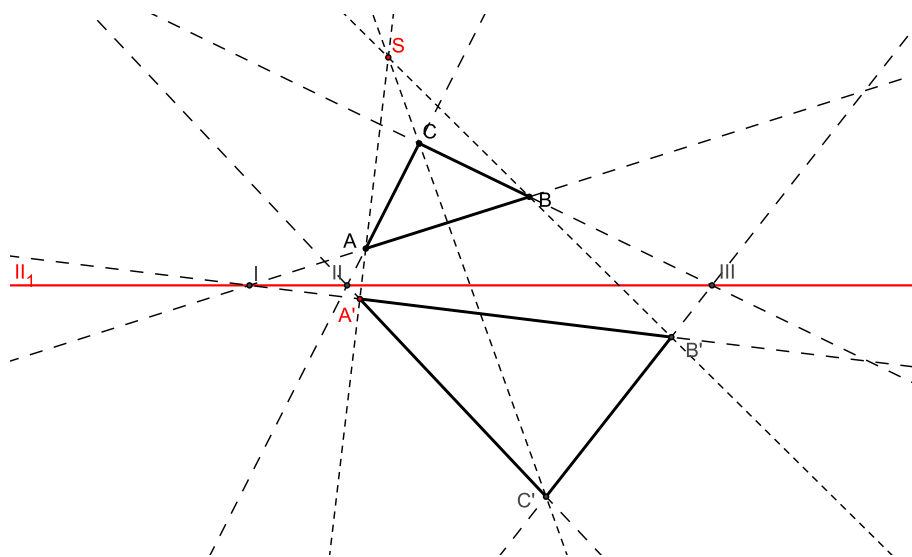
Obrázek 7: Osová afinita daná osou o a dvojicí bodů A, A'

Středové promítání se středem S mezi dvěma různoběžnými rovinami v prostoru E_3 , viz Obr. 8.



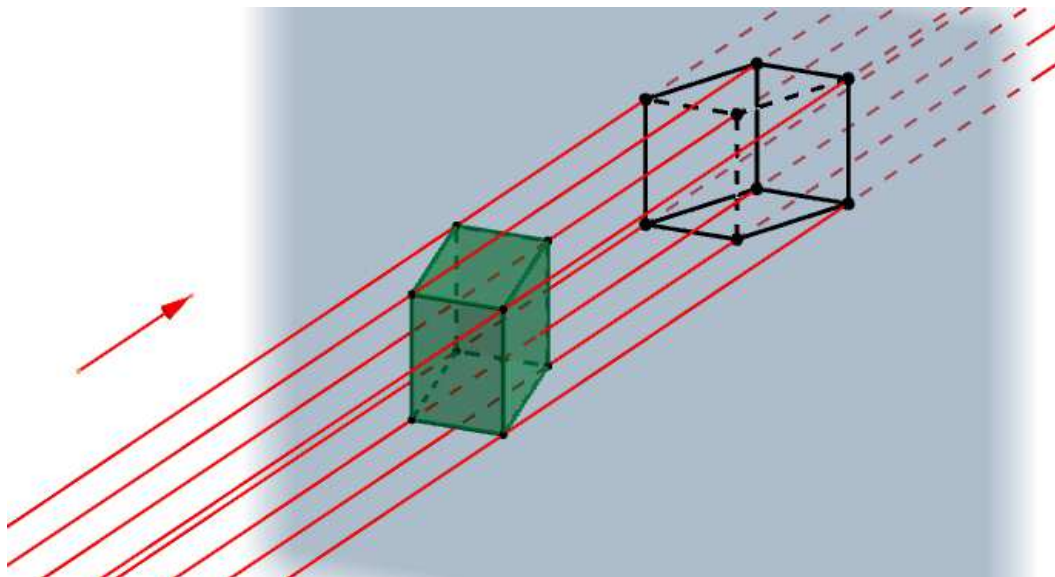
Obrázek 8: Středové promítání mezi dvěma různoběžnými rovinami (dalo vznik *středové kolineaci*)

Středová kolineace (daná osou o , středem S a dvojicí bodů A, A' ve vztahu vzor a obraz), viz Obr. 9



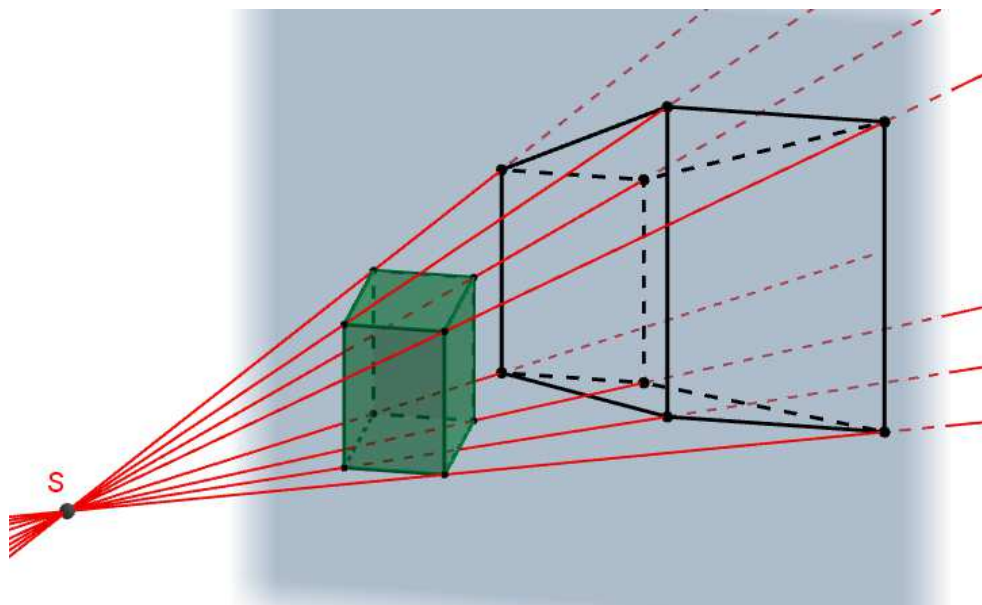
Obrázek 9: Středová kolineace daná středem S , osou o a dvojicí bodů A, A'

Rovnoběžné promítání (z trojrozměrného prostoru do roviny; dané směrem \vec{s}), viz Obr. 10.



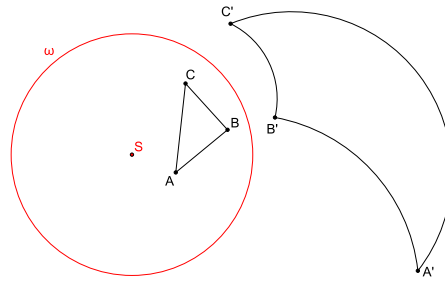
Obrázek 10: Rovnoběžné promítání trojrozměrného útvaru do roviny

Středové promítání (z trojrozměrného prostoru do roviny; dané středem S), viz Obr. 11



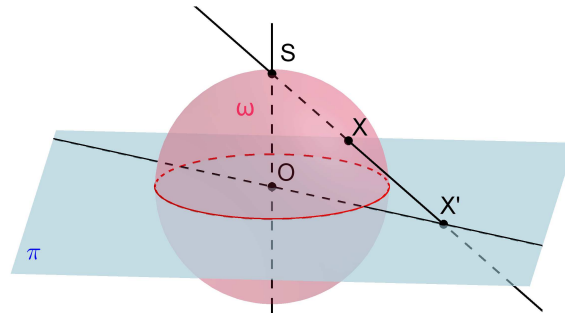
Obrázek 11: Středové promítání trojrozměrného útvaru do roviny

Kruhová inverze (daná určující kružnicí $\omega = (S, r)$ a vztahem $|SX| \cdot |SX'| = r^2$ mezi vzorem X a obrazem X'), viz Obr. 12

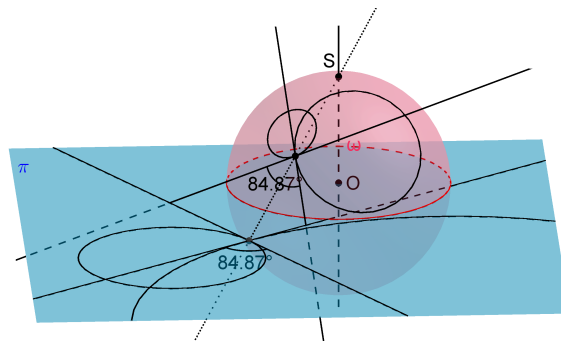


Obrázek 12: Kruhová inverze daná kružnicí ω

Stereografická projekce³, viz Obr. 13



Obrázek 13: Stereografická projekce



Obrázek 14: Stereografická projekce: obrazem kružnice je kružnice, velikost úhlu se zachovává (tzv. *konformní* zobrazení).

PŘÍKLAD 2.1. Pomocí programu GeoGebra vyzkoumejte, zda se v následujících zobrazeních zobrazí střed úsečky zase na střed úsečky: stejnolehlost, osová afinita, středová kolineace, kruhová inverze.

³Stereografický průmět kulové plochy je středovým průmětem kulové plochy pro střed promítání S ležící na kulové ploše ω a pro průmětnu π rovnoběžnou s tečnou rovinou kulové plochy ve středu promítání S

3 Afinní zobrazení

Afinní zobrazení v rovině je příkladem transformace roviny na sebe. Každému bodu X roviny E_2 přiřadí bod $X' = f(X)$ téže roviny při zachování určitých vlastností. Důležitým pojmem při zavedení afinního zobrazení je dělicí poměr. Jedná se o tzv. *invariant* afinního zobrazení.

3.1 Dělicí poměr

Dělicím poměrem zde rozumíme číslo, které jednoznačně udává polohu bodu na přímce vzhledem ke dvěma pevně daným bodům této přímky.



Obrázek 15: Tři kolineární body

Definice 11 (Dělicí poměr I). *Nechť A, B, C ; $A \neq B$, $C \neq B$, jsou tři body ležící na přímce (tj. tři kolineární body). Dělicím poměrem bodu C vzhledem k bodům A, B rozumíme reálné číslo λ , které zapisujeme (ABC) , a pro jehož absolutní hodnotu platí*

$$|(ABC)| = \frac{|AC|}{|BC|}, \quad (1)$$

přitom pro bod C ležící vně úsečky AB je $(ABC) > 0$ a pro bod C ležící uvnitř AB je $(ABC) < 0$. Pro $C = A$ je zřejmě $(ABC) = 0$.

Poznámka. Uvedená definice zavádí dělicí poměr pomocí podílu vzdáleností bodu C od daných bodů A, B . Protože vzdálenosti jsou kladné, nepřináší jejich podíl žádnou informaci o znaménku dělicího poměru, kterému pak musí být věnována zvláštní část definice. Tomu se vyhneme, pokud použijeme k zavedení pojmu dělicí poměr odpovídající vektory definované příslušnou trojicí bodů, viz Obr.16.



Obrázek 16: Dělicí poměr bodu C vzhledem k bodům A, B

Definice 12 (Dělicí poměr II). *Nechť A, B, C ; $A \neq B$, $C \neq B$, jsou tři body ležící na přímce (tj. tři kolineární body). Potom číslo λ definované rovnicí*

$$C - A = \lambda(C - B) \quad (2)$$

značíme (ABC) a nazýváme dělicím poměrem bodu C vzhledem k bodům A, B .

Poznámka. Ve vztahu (2) je obsažena kompletní informace o čísle λ , tj. o jeho absolutní hodnotě i o znaménku. Pro snazší zapamatování si můžeme (2) přepsat do tvaru

$$\lambda = \frac{C - A}{C - B},$$

který sice není formálně správně, ale jasně koresponduje se vztahem (1). Smysl získá až dosazením souřadnic bodů $A = [a_1; a_2]$, $B = [b_1; b_2]$, $C = [c_1; c_2]$:

$$\lambda = \frac{c_1 - a_1}{c_1 - b_1} = \frac{c_2 - a_2}{c_2 - b_2}.$$

PŘÍKLAD 3.1. Určete dělicí poměr (ABS) středu S úsečky AB vzhledem k jejím krajním bodům A, B .

PŘÍKLAD 3.2. Pro body A, B, C platí $(ABC) = \lambda$. Zapište pomocí λ dělicí poměry (BAC) , (CBA) , (ACB) , (CAB) a (BCA) .

Řešení: Vztah (2) pro $(ABC) = \lambda$ přepíšeme do tvaru $A = \lambda B + (1 - \lambda)C$. Odtud po vydělení λ dostaneme $B = \frac{1}{\lambda}A + (1 - \frac{1}{\lambda})C$. Odtud je zřejmé, že $(BAC) = \frac{1}{\lambda}$. Poznamenejme ještě, že ke stejnému výsledku vede také toto odvození: $(BAC) = \frac{C - B}{C - A} = \frac{1}{\frac{C - A}{C - B}} = \frac{1}{\lambda}$.

Analogicky odvodíme vyjádření dalších dělicích poměrů v rámci dané trojice bodů: $(CBA) = \frac{\lambda}{\lambda - 1}$, $(ACB) = 1 - \lambda$, $(CAB) = \frac{1}{1 - \lambda}$ a $(BCA) = 1 - \frac{1}{\lambda}$.

PŘÍKLAD 3.3. V rovině jsou dány dva pevné body A, B . Určete množinu všech bodů X této roviny, pro které platí

$$\frac{|AX|}{|BX|} = k,$$

kde k je reálná konstanta.

Řešení: Hledanou množinou je kružnice, které je známá jako „Apolloniova kružnice“, viz Obr. 17. Nalezení její rovnice si usnadníme vhodným umístěním bodů A, B vzhledem k souřadnicovým osám. Konkrétně je umístíme na osu x tak, že $A = [-a, 0]$ a $B = [a, 0]$, kde $a \in \mathbb{R}$. Vztah $\frac{|AX|}{|BX|} = k$ přepíšeme do tvaru

$$|AX| = k|BX|$$

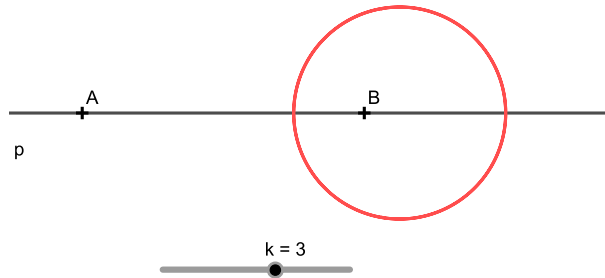
a dosadíme uvedené souřadnice bodů A, B, X . Dostaneme

$$\sqrt{(x + a)^2 + y^2} = k\sqrt{(x - a)^2 + y^2}.$$

Po umocnění obou stran rovnosti na druhou a po několika úpravách, mimo jiné také použijeme doplnění na čtverec, dostáváme rovnici vyšetřované množiny bodů $X = [x, y]$ ve tvaru

$$\left(x - \frac{a(k^2 + 1)}{k^2 - 1}\right)^2 + y^2 = \frac{4a^2k^2}{(k^2 - 1)^2},$$

který odpovídá rovnici $(x - s_1)^2 + (y - s_2)^2 = r^2$ kružnice se středem $S = [s_1, s_2]$ a poloměrem r .



Obrázek 17: Apolloniova kružnice jako množina bodů X , pro které platí $\frac{|AX|}{|BX|} = 3$

3.2 Afinity zobrazení

Definice 13 (Afinity zobrazení). Zobrazení f afinního prostoru A do afinního prostoru A' se nazývá afinní, jestliže má tuto vlastnost: Leží-li navzájem různé body B, C, D z prostoru A na přímce, pak jejich obrazy $f(B), f(C), f(D)$ buď splývají, nebo jsou navzájem různé, leží na jedné přímce a jejich dělicí poměr se rovná dělicímu poměru jejich vzorů, tj.:

$$(f(B), f(C); f(D)) = (B, C; D).$$

PŘÍKLAD 3.4. Pomocí konkrétního příkladu afinního zobrazení (např. rovnoběžného promítání krychle do roviny) ilustrujte obě situace týkající se obrazů $f(B), f(C), f(D)$, které definice zmiňuje.

4 Afinní transformace roviny (Afinita)

Budeme uvažovat speciální případ afinního zobrazení, kdy prostory A a A' splynou. Půjde nám tak o vzájemně jednoznačné zobrazení prostoru A (v našem případě E_2) na sebe.

Definice 14 (Afinita). *Vzájemně jednoznačné afinní zobrazení afinního prostoru E_2 na sebe nazýváme **afinitou** prostoru E_2 nebo **afinní transformací** prostoru E_2 .*

Poznámka. *Vzájemně jednoznačným zobrazením rozumíme zobrazení, které je zároveň prosté a na množinu.*

Věta 1. *Všechny afinity prostoru E_2 tvoří při obvyklém skládání grupu, tzv. **afinní grupu** prostoru E_2 .*

Důkaz. Složením dvou afinit prostoru E_2 vznikne opět afinita prostoru E_2 . K afinitě f existuje inverzní afinita f^{-1} (afinita je vzájemně jednoznačné zobrazení). Neutrálním prvkem je zřejmě identita. \square

4.1 Analytické vyjádření afinity v rovině

Každé afinní zobrazení f v rovině E_2 , které bodu $X = [x, y]$ přiřazuje obraz $X' = [x', y']$, je možné zapsat rovnicemi

$$\begin{aligned} f : x' &= a_{11}x + a_{12}y + b_1 \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + b_2 \end{aligned} \quad (3)$$

a naopak, každé zobrazení v rovině, které je dáno soustavou rovnic (3), je afinitou v rovině. Soustavu (3) můžeme zapsat také pomocí matic

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Potom řekneme, že afinitou je každé zobrazení, které lze zapsat maticovou rovnicí

$$\mathbf{X}' = A \cdot \mathbf{X} + B,$$

kde $X' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ a $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$.

PŘÍKLAD 4.1. Maticovou rovnicí ve tvaru (4) zapište tyto afinity: (i) osová souměrnost podle osy y , (ii) středová souměrnost podle počátku, (iii) Středová souměrnost se středem v bodě $[0, 5]$. Využijte: tube.geogebra.org/student/mUcqV9uT

Věta 2 (O určenosti afinity v rovině). Necht K, L, M a K', L', M' jsou dvě skupiny nekolineárních bodů v rovině. Pak existuje jediná afinita f této roviny, která body K, L, M zobrazuje v daném pořadí na body K', L', M' .

Důkaz. Využijeme (3). Afinita f musí být dána takovýmito rovnicemi. Ukážeme, že za podmínek uvedených ve větě je tato afinita určena jednoznačně, tj. existuje jediná šestice $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$, která tuto afinitu specifikuje.

Pro jednotlivé dvojice bodů „vzor \rightarrow obraz“ dostaneme následující rovnice:

$$K[k_1, k_2] \rightarrow K'[k'_1, k'_2]:$$

$$a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + b_1 = k'_1, \quad (5)$$

$$a_{21}k_1 + a_{22}k_2 + b_2 = k'_2. \quad (6)$$

$$L[l_1, l_2] \rightarrow L'[l'_1, l'_2]:$$

$$a_{11}l_1 + a_{12}l_2 + b_1 = l'_1, \quad (7)$$

$$a_{21}l_1 + a_{22}l_2 + b_2 = l'_2. \quad (8)$$

$$M[m_1, m_2] \rightarrow M'[m'_1, m'_2]:$$

$$a_{11}m_1 + a_{12}m_2 + b_1 = m'_1, \quad (9)$$

$$a_{21}m_1 + a_{22}m_2 + b_2 = m'_2. \quad (10)$$

Pro známé souřadnice bodů K, L, M, K', L', M' tak máme soustavu 6 rovnic o 6 neznámých $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$. Zajímá nás, za jakých podmínek má jediné řešení. Tyto podmínky by se měly shodovat s obsahem věty 2. Po detailním prozkoumání rovnic (5)–(10) je patrné, že jejich soustava se dá rozdělit na dvě vzájemně nezávislé soustavy 3 rovnic o 3 neznámých: soustavu rovnic (5), (7) a (9) o neznámých a_{11}, a_{12}, b_1 a soustavu rovnic (6), (8) a (10) o neznámých a_{21}, a_{22}, b_2 . Přitom první z těchto soustav má rozšířenou matici

$$\left[\begin{array}{ccc|c} k_1 & k_2 & 1 & k'_1 \\ l_1 & l_2 & 1 & l'_1 \\ m_1 & m_2 & 1 & m'_1 \end{array} \right], \quad (11)$$

druhá má potom rozšířenou matici

$$\left[\begin{array}{ccc|c} k_1 & k_2 & 1 & k'_2 \\ l_1 & l_2 & 1 & l'_2 \\ m_1 & m_2 & 1 & m'_2 \end{array} \right]. \quad (12)$$

Soustavy se tedy shodují v matici soustavy (liší se pouze vektory pravých stran). Aby měly obě soustavy jediné řešení, musí být determinant této matice různý od nuly, tj.

$$\begin{vmatrix} k_1 & k_2 & 1 \\ l_1 & l_2 & 1 \\ m_1 & m_2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0. \quad (13)$$

Determinant v (13) snadno spočítáme eliminací jedniček na pozicích (2, 3) a (3, 3) postupným odečtením prvního řádku od druhého a třetího řádku a následným rozvojem takto upraveného determinantu podle třetího sloupce. Dostaneme tak podmínku

$$\begin{vmatrix} l_1 - k_1 & l_2 - k_2 \\ m_1 - k_1 & m_2 - k_2 \end{vmatrix} \neq 0, \quad (14)$$

která je splněna právě tehdy, když jsou vektory $L - K$ a $M - K$ nezávislé, tj. body K, L, M neleží v přímce.

Teď zbývá dokázat, že když body K, L, M neleží v přímce, ani body K', L', M' nemohou ležet v přímce. Tentokrát využijeme maticovou rovnici afinity $X' = A \cdot X + B$. Pro uvedené dvojice bodů platí:

$$K' = A \cdot K + B, \quad (15)$$

$$L' = A \cdot L + B, \quad (16)$$

$$M' = A \cdot M + B. \quad (17)$$

Důkaz provedeme sporem. Předpokládáme, že K, L, M neleží v přímce a zároveň body K', L', M' leží v přímce. Potom existuje $j \in R$ takové, že $L' - K' = j(M' - K')$. Po dosazení z (15)–(17) a vynásobení obou stran rovnice zleva maticí inverzní k A dostaneme $L - K = j(M - K)$, což je spor s předpokladem nekolineárnosti bodů K, L, M . Body K', L', M' tedy také nemohou ležet v přímce.

□

4.2 Souvislost mezi skládáním afinních zobrazení a násobením matic

Pro zjednodušení budme uvažovat pouze *lineární zobrazení*. To jsou afinní transformace s nulovým vektorem posunutí, tj. v rovnicích (4) mají $b_1 = b_2 = 0$.

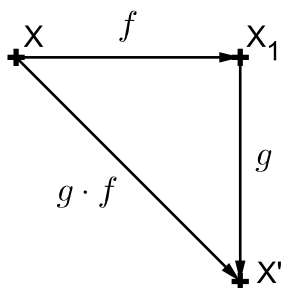
PŘÍKLAD 4.2. Jsou dána lineární zobrazení f, g :

$$f : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad g : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Určete matici M složeného zobrazení

$$g \cdot f : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = M \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Řešení: Uvažujme situaci znázorněnou na Obr. 77. Bod $X[x, y]$ je afinitou f zobrazen



Obrázek 18: Skládání afinit f a g v rovině

na bod $X_1[x_1, y_1]$, ten je pak afinitou g zobrazen na bod $X'[x', y']$. Tuto skutečnost můžeme zapsat rovnicemi

$$X \xrightarrow{f} X_1 : \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}; \quad X_1 \xrightarrow{g} X' : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix},$$

odkud po dosazení za $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ z první rovnice do druhé dostáváme

$$X \xrightarrow{g \cdot f} X' : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Skládání afinit znázorněné Obr. 77 ale můžeme zapsat i pomocí rovnic. Platí

$$X \xrightarrow{f} X_1 : \begin{cases} x_1 = ax + by \\ y_1 = cx + dy \end{cases}; \quad X_1 \xrightarrow{g} X' : \begin{cases} x' = Ax_1 + By_1 \\ y' = Cx_1 + Dy_1 \end{cases}.$$

Potom po dosazení za x_1 a y_1 z první soustavy rovnic do druhé dostaneme

$$X \xrightarrow{g \cdot f} X' : \begin{cases} x' = A(ax + by) + B(cx + dy) = (Aa + Bc)x + (Ab + Bd)y \\ y' = C(ax + by) + D(cx + dy) = (Ca + Dc)x + (Cb + Dd)y \end{cases},$$

po přepsání do maticového tvaru

$$X \xrightarrow{g \cdot f} X' : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Aa + Bc & Ab + Bd \\ Ca + Dc & Cb + Dd \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad (19)$$

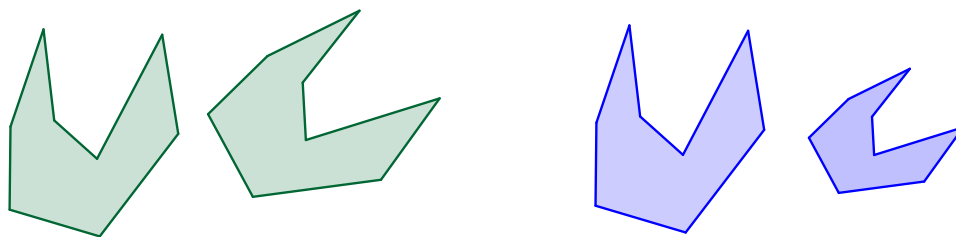
Z porovnání (63) a (64) je zřejmé, že pro matici M složené afinity $g \cdot f$ platí:

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Aa + Bc & Ab + Bd \\ Ca + Dc & Cb + Dd \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Rovnost (65) tak přináší známý algoritmus pro násobení dvou matic.

5 Shodná zobrazení v rovině

Nejběžnějšími zástupci afinních zobrazení ve školní matematice jsou shodná a podobná zobrazení. Těmi se teď budeme podrobně zabývat. Nejprve shodnými zobrazeními, potom podobnými. Již víme, že pokud se omezujeme na zobrazení v rámci jednoho prostoru, konkrétně pak roviny, můžeme hovořit zkráceně o *shodnostech* a *podobnostech* v rovině. Na Obr. 19 vidíme rozdíl mezi shodností a podobností. Zatímco shodnost zachovává rozměry i tvar útvaru, podobnost (přesněji *vlastní podobnost*, viz dále) zachovává jenom tvar.



Obrázek 19: Dvojice shodných (vlevo) a podobných (vpravo) útvarů

Zjednodušeně můžeme shodnosti charakterizovat jako transformace (zobrazení), která zachovávají vzdálenosti bodů (tj. vzdálenost obrazů je stejná jako vzdálenost vzorů). Říkáme, že vzdálenost je invariantem shodného zobrazení (které proto nazýváme také *izometrické zobrazení*). Shodné zobrazení tak můžeme definovat následujícím způsobem.

Definice 15 (Shodné zobrazení). Zobrazení v rovině, které každým dvěma bodům X, Y přiřazuje body X', Y' tak, že

$$|X'Y'| = |XY|$$

se nazývá **shodné zobrazení v rovině** (též *izometrické zobrazení*), viz Obr. 20.



Obrázek 20: Vzdálenost se zachovává

PŘÍKLAD 5.1. *S použitím definice 15 dokažte následující vlastnosti shodného zobrazení:*

1. *Každé shodné zobrazení je prosté a afinní.*
2. *Úsečka se zobrazí na úsečku.*
3. *Polopřímka se zobrazí na polopřímku.*
4. *Přímka se zobrazí na přímku.*
5. *Rovnoběžky se zobrazí na rovnoběžky.*
6. *Úhel se zobrazí na úhel s ním shodný.*
7. *Polorovina se zobrazí na polorovinu.*

PŘÍKLAD 5.2. *Určete množinu možných poloh obrazu X' bodu $X[4, 1]$ ve shodnosti f , pokud o tomto zobrazení máte následující informace:*

- a) *Bod $A[1, 3]$ a jeho obraz $A'[-2, 1]$.*
- b) *Body $A[1, 3]$, $B[3, 0]$ a jejich obrazy $A'[-2, 1]$, $B'[-5, 3]$.*
- c) *Body $A[1, 3]$, $B[3, 0]$, $C[2, -1]$ a jejich obrazy $A'[-2, 1]$, $B'[-5, 3]$, $C'[-6, 2]$.*

Řešení zobrazte v programu GeoGebra, umístěte na svůj profil na [geogebra.org](https://www.geogebra.org) a sdílejte ve skupině PLA 2020.

Z řešení příkladu 5.2 vyplývá, že shodnost v rovině je jednoznačně určena trojicí nekolineárních bodů a jejich obrazy. To je obsahem následující věty.

Věta 3 (O určenosti shodného zobrazení v rovině). *Shodné zobrazení v rovině je jednoznačně určeno libovolnými třemi nekolineárními body A, B, C a třemi nekolineárními body A', B', C' , které jsou po řadě jejich obrazy.*

Důkaz: Naznačte pomocí obrázku.

(Inspirujte se při tom apletem <https://www.geogebra.org/m/RYaKE4Jw>). Detailnější rozbor důkazu této věty je proveden na str. 96.

Poznámka. Již víme, že analogická věta platí pro všechna afinní zobrazení v rovině (viz věta 2 o určenosti afinního zobrazení v rovině).

5.1 Rovnice shodnosti v rovině

V kapitole 4.1 jsme si uváděli, že každou afinitu f v rovině můžeme zapsat soustavou rovnic

$$\begin{aligned} f : x' &= a_{11}x + a_{12}y + b_1 \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + b_2, \end{aligned} \quad (21)$$

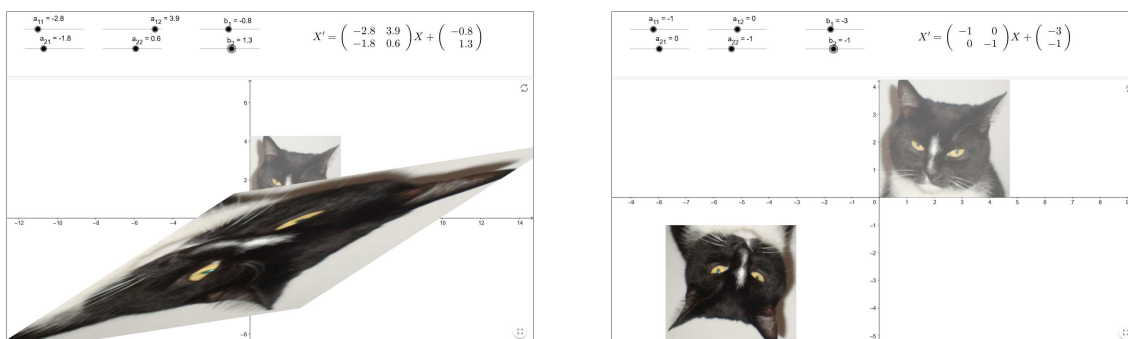
kterou lze přepsat užitím matic do tvaru

$$f : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (22)$$

a stručně vyjádřit maticovou rovnicí

$$f : X' = A \cdot X + B. \quad (23)$$

Mezi všemi možnými afinitami se nacházejí i shodnosti, viz Obr.21, kde vlevo je „nějaká“ afinita, zatímco vpravo je afinita, která je shodností. Ukazuje se, že vůbec není těžké zjistit, zda afinita daná některým z výše uvedených zápisů je shodností. Jak je detailně vysvětleno dále, stačí jednoduché posouzení matice A .



Obrázek 21: <https://www.geogebra.org/m/UcqV9uT>

Jak poznáme, že afinita daná rovnicemi (21) je shodností?

Je-li tato afinita shodností, platí pro všechny dvojice bodů $X[x_1, x_2], Y[y_1, y_2]$ a jejich obrazy $X'[x'_1, x'_2], Y'[y'_1, y'_2]$ vztah $|X'Y'| = |XY|$, z něhož po dosazení souřadnic uvedených bodů dostaneme

$$\sqrt{(y'_1 - x'_1)^2 + (y'_2 - x'_2)^2} = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}, \quad (24)$$

po umocnění obou stran na druhou

$$(y'_1 - x'_1)^2 + (y'_2 - x'_2)^2 = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2. \quad (25)$$

Nyní do levé strany (25) dosadíme z (21) (protože se body $X[x_1, x_2], Y[y_1, y_2]$ zobrazují v daném pořadí na body $X'[x'_1, x'_2], Y'[y'_1, y'_2]$, dosazujeme takto: $x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1$, $x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2$; $y'_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + b_1$, $y'_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + b_2$). Dostaneme rovnost

$$(a_{11}y_1 + a_{12}y_2 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2)^2 + (a_{21}y_1 + a_{22}y_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2)^2 = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2, \quad (26)$$

kterou postupně upravíme na tvar obsahující výrazy $(y_1 - x_1)$ a $(y_2 - x_2)$. Nejprve vytkneme společné koeficienty

$$[a_{11}(y_1 - x_1) + a_{12}(y_2 - x_2)]^2 + [a_{21}(y_1 - x_1) + a_{22}(y_2 - x_2)]^2 = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2, \quad (27)$$

potom umocníme závorky na levé straně a zjednodušíme ji na tvar polynomu s proměnnými $(y_1 - x_1)$ a $(y_2 - x_2)$

$$(a_{11}^2 + a_{21}^2)(y_1 - x_1)^2 + 2(a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22})(y_1 - x_1)(y_2 - x_2) + (a_{12}^2 + a_{22}^2)(y_2 - x_2)^2 = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2. \quad (28)$$

Nyní diskutujeme, za jakých podmínek je v (28) splněna rovnost levé strany s pravou stranou (využijeme toho, že dva polynomy jsou si rovny pro všechny hodnoty z příslušného oboru právě tehdy, když se rovnají koeficienty u sobě odpovídajících členů). Zjistíme tak, že rovnost $|X'Y'| = |XY|$ nastává právě tehdy, když jsou pro prvky matice A (tj. koeficienty soustavy (21)) splněny vztahy

$$\begin{aligned} a_{11}^2 + a_{21}^2 &= 1, \\ a_{12}^2 + a_{22}^2 &= 1, \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} &= 0, \end{aligned} \quad (29)$$

které lze stručně vyjádřit rovností

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (30)$$

Odpověď na výše uvedenou otázku je tedy taková, že **rovnice (21) je rovnicí shodnosti, právě když platí**

$$A^T \cdot A = E, \quad (31)$$

kde E je jednotková matice. Matici A , která splňuje vztah (31), nazýváme *ortonormální* maticí. Stručně proto můžeme konstatovat, že afinita daná rovnicí (21) je shodností právě tehdy, když je matice A *ortonormální*.

Poznámky.

1. Platí $A^T \cdot A = E$. Potom je ale $A^T = A^{-1}$ a platí tedy i rovnost $A \cdot A^T = E$.
2. Zobrazení, pro která platí $|\det A| = 1$ nazýváme ekviafinní zobrazení, stručně **ekviafinita**. Je zřejmé, že každá shodnost je ekviafinita. Platí toto tvrzení i obráceně? Můžeme říci, že každá ekviafinita je shodností?
3. Je třeba si uvědomit, že při shodném zobrazení mezi euklidovskými prostory různých dimenzí není matice A čtvercová. Potom výše uvedené úvahy o inverzní matici nemají smysl a v platnosti zůstává pouze původní podmínka $A^T \cdot A = E$.

PŘÍKLAD 5.3. Zapsáním formou rovnic ve tvaru (21) uveďte alespoň tři příklady ekviafinity, která není shodností.

PŘÍKLAD 5.4. Rozhodněte, zda je afinita daná rovnicemi $x' = -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + 8$, $y' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 6$ shodností.

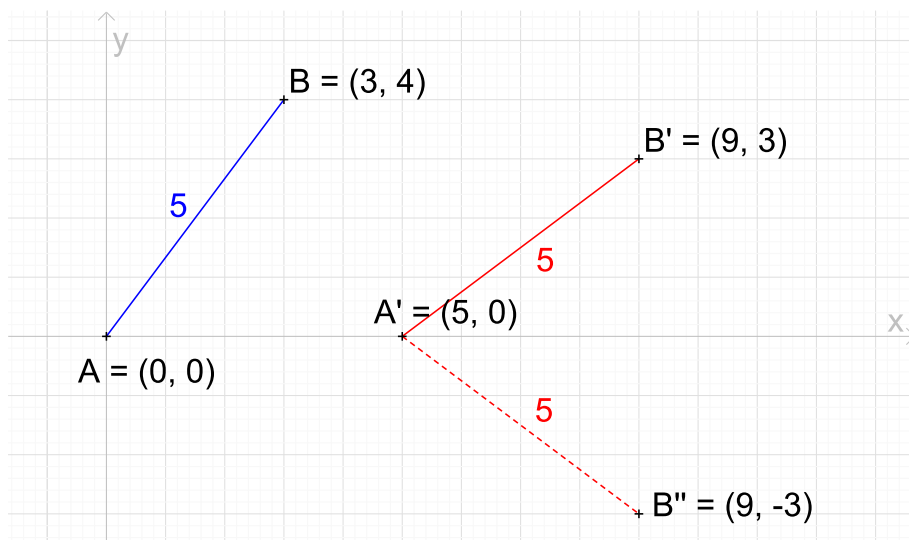
Řešení: Viz (31) na str. 26. Matice uvedené transformace je $A = \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$. Vytvořte A^T a dle (31) rozhodněte.

PŘÍKLAD 5.5. Určete parametr s tak, aby existovala shodnost roviny zobrazující body $[0, 0]$, $[3, 4]$ po řadě na body $[5, 0]$, $[9, s]$. Napište rovnice tohoto zobrazení a určete souřadnice obrazu bodu $[5, 0]$.

Řešení: Vyjdeme z definice 15 shodného zobrazení, viz str. 23. Označme si dané body $A = [0, 0]$, $B = [3, 4]$ a jejich obrazy $A' = [5, 0]$, $B' = [9, s]$. Potom platí $|A'B'| = |AB|$, tj. $(9-5)^2 + (s-0)^2 = (3-0)^2 + (4-0)^2$ (ty nuly se tam samozřejmě psát nemusí, dělám to pro větší názornost)⁴, po úpravě $16 + s^2 = 25$, tj. $|s| = 3$. Úloha má proto dvě řešení, jedno pro $s = 3$, druhé pro $s = -3$, viz Obr. 22.

Nyní určíme rovnice tohoto zobrazení. Jak už víme, shodnost patří mezi afinity. Hledáme proto rovnice ve tvaru soustavy (21). Postupně do této soustavy dosadíme hodnoty známých bodů a jejich obrazů, pro každé ze dvou řešení zvlášť, a hledáme hodnoty koeficientů a_{ij} a b_i .

⁴Pro vzdálenost $|AB|$ bodů $A[a_1, a_2]$, $B[b_1, b_2]$ platí $|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$.



Obrázek 22: Zadání příkladu 5.5 vyhovují dvě hodnoty parametru s , 3 a -3

Nejprve řešíme pro $s = 3$. Dostaneme

$$\begin{aligned}
 5 &= a_{11}0 + a_{12}0 + b_1, \\
 0 &= a_{21}0 + a_{22}0 + b_2, \\
 9 &= a_{11}3 + a_{12}4 + b_1 \\
 3 &= a_{21}3 + a_{22}4 + b_2,
 \end{aligned} \tag{32}$$

což jsou jenom čtyři rovnice pro šest neznámých $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$. Přidáme-li ale ještě podmínky (29), které musí tyto koeficienty splňovat u shodného zobrazení, dostaneme soustavu sedmi rovnic. Pokud se nám nechce soustavu řešit ručně, můžeme tuto práci přenechat počítači. Níže uvádím kód řešení v programu wxMaxima, volně stažitelném na stránce [wxmaxima-developers.github.io](https://github.com/wxmaxima-developers/wxmaxima). Úvod do práce s tímto programem najdete např. zde: *Program wxMaxima ve výuce matematiky*.

```
(% i14) r1:5=a11*0+a12*0+b1;
r2:0=a21*0+a22*0+b2;
r3:9=a11*3+a12*4+b1;
r4:3=a21*3+a22*4+b2;
r5:a11^2+a21^2=1;
r6:a12^2+a22^2=1;
r7:a11*a12+a21*a22=0;
```

$$5 = b_1 \tag{r1}$$

$$0 = b_2 \tag{r2}$$

$$9 = b_1 + 4a_{12} + 3a_{11} \tag{r3}$$

$$3 = b_2 + 4a_{22} + 3a_{21} \tag{r4}$$

$$a_{21}^2 + a_{11}^2 = 1 \quad (\text{r5})$$

$$a_{22}^2 + a_{12}^2 = 1 \quad (\text{r6})$$

$$a_{21} a_{22} + a_{11} a_{12} = 0 \quad (\text{r7})$$

(% i15) solve([r1,r2,r3,r4,r5,r6,r7],[a11,a12,a21,a22,b1,b2]);

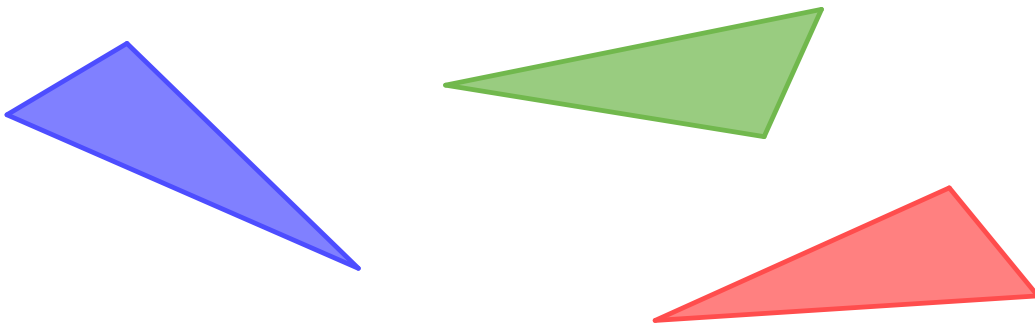
$$[[a_{11} = \frac{24}{25}, a_{12} = \frac{7}{25}, a_{21} = -\frac{7}{25}, a_{22} = \frac{24}{25}, b_1 = 5, b_2 = 0], \quad (\% \text{ o15})$$

$$[a_{11} = 0, a_{12} = 1, a_{21} = 1, a_{22} = 0, b_1 = 5, b_2 = 0]]$$

Pro $s = 3$ tedy existují dvě shodná zobrazení, označme je f_1 a f_2 , která zobrazují body $A[0, 0], B[3, 4]$ na body $A'[5, 0], B'[9, 3]$;

$$f_1 : \begin{cases} x' = \frac{24}{25}x + \frac{7}{25}y + 5, \\ y' = -\frac{7}{25}x + \frac{24}{25}y, \end{cases} \quad f_2 : \begin{cases} x' = y + 5, \\ y' = x. \end{cases}$$

Tento výsledek je v souladu s větou 3 o určenosti shodného zobrazení v rovině, viz str. 24. Dva body a jejich obrazy neurčí shodnost v rovině jednoznačně. Proto nám vyšla dvě zobrazení. Jaký je mezi nimi rozdíl můžete zjistit pomocí následujícího appletu: <https://www.geogebra.org/m/ctubxkrv>. Zobrazení f_1 je *přímou shodností*, zatímco zobrazení f_2 je *nepřímou shodností*. Pojmy *přímá* a *nepřímá* shodnost jsou ilustrovány Obr. 23. Přímou shodnou útvarů lze manipulací v rovině ztotožnit (dostat



Obrázek 23: Shodné trojúhelníky, přímo i nepřímou

do zákrytu), to je případ modrého a zeleného trojúhelníku. Nepřímou shodnou útvarů

nelze ztotožnit manipulací v rovině, vždy budou zrcadlově převrácené, to je případ modrého a červeného trojúhelníku, také ale toho zeleného s červeným⁵.

Nyní hledáme shodnost pro $s = -3$, takovou, která zobrazí body $A[0, 0], B[3, 4]$ postupně v daném pořadí na body $A'[5, 0]$ a $B''[9, -3]$, viz Obr. 22. Opět dosadíme do soustavy (21). Tentokrát dostaneme rovnice

$$\begin{aligned} 5 &= a_{11}0 + a_{12}0 + b_1, \\ 0 &= a_{21}0 + a_{22}0 + b_2, \\ 9 &= a_{11}3 + a_{12}4 + b_1 \\ -3 &= a_{21}3 + a_{22}4 + b_2, \end{aligned} \tag{33}$$

které opět doplníme podmínkami shodnosti (29), abychom dostali sedm rovnic pro neznámé $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$. Tuto soustavu zase řešíme v programu wxMaxima:

```
(% i14) r1:5=a11*0+a12*0+b1;
r2:0=a21*0+a22*0+b2;
r3:9=a11*3+a12*4+b1;
r4:-3=a21*3+a22*4+b2;
r5:a11^2+a21^2=1;
r6:a12^2+a22^2=1;
r7:a11*a12+a21*a22=0;
```

$$5 = b_1 \tag{r1}$$

$$0 = b_2 \tag{r2}$$

$$9 = b_1 + 4a_{12} + 3a_{11} \tag{r3}$$

$$-3 = b_2 + 4a_{22} + 3a_{21} \tag{r4}$$

$$a_{21}^2 + a_{11}^2 = 1 \tag{r5}$$

$$a_{22}^2 + a_{12}^2 = 1 \tag{r6}$$

$$a_{21} a_{22} + a_{11} a_{12} = 0 \tag{r7}$$

```
(% i15) solve([r1,r2,r3,r4,r5,r6,r7],[a11,a12,a21,a22,b1,b2]);
```

$$\left[\left[a_{11} = \frac{24}{25}, a_{12} = \frac{7}{25}, a_{21} = \frac{7}{25}, a_{22} = -\frac{24}{25}, b_1 = 5, b_2 = 0 \right], \tag{(% o15)}$$

$$\left[a_{11} = 0, a_{12} = 1, a_{21} = -1, a_{22} = 0, b_1 = 5, b_2 = 0 \right]$$

⁵Přímými shodnostmi jsou *posunutí, otočení, středová souměrnost* a *identita*, nepřímými shodnostmi jsou potom *osová souměrnost* a *posunutá zrcadlení*

Pro $s = -3$ tak dostáváme také dvě shodnosti, g_1 a g_2 , které zobrazují body $A[0, 0], B[3, 4]$ na body $A'[5, 0], B''[9, -3]$;

$$g_1 : \begin{cases} x' = \frac{24}{25}x + \frac{7}{25}y + 5, \\ y' = \frac{7}{25}x - \frac{24}{25}y, \end{cases} \quad g_2 : \begin{cases} x' = y + 5, \\ y' = -x. \end{cases}$$

Opět použijeme applet <https://www.geogebra.org/m/ctubxkrv> k prozkoumání povahy výsledných zobrazení. Zjistíme, že g_1 je nepřímou shodností a g_2 přímou shodností.

Při hlubším studiu afinit bychom odhalili jednoznačnou korespondenci mezi znaménkem determinantu matice A konkrétní afinity a tím, zda se jedná o přímé nebo nepřímé zobrazení⁶. *Vypočítejte determinant matice A každého ze zobrazení f_1, f_2, g_1, g_2 a vyslovte hypotézu o souvislosti znaménka determinantu s tím, zda je zobrazení přímou nebo nepřímou shodností.*

Ještě zbývá poslední úkol z příkladu 5.5, určit souřadnice obrazu bodu $[5, 0]$. Samozřejmě ve všech čtyřech zobrazeních f_1, f_2, g_1, g_2 . Najděte tyto obrazy!

PŘÍKLAD 5.6. *Určete a, b, c tak, aby rovnice $x' = \frac{3}{4}x + by + 1, y' = ax + cy - 1$ vyjadřovaly shodnost.*

Řešení: Na str. 26 je uvedeno, že matice A shodnosti je *ortonormální*. Když se podíváte na dosud uvedené matice shodností, určitě si všimnete, že se v nich, až na znaménko, vyskytují jako prvky jenom dvě hodnoty. Které mají navíc poměrně úzký vztah. Využijte toho!

PŘÍKLAD 5.7. *Určete koeficienty a, b, c tak, aby bylo uvedenými rovnicemi dáno shodné zobrazení:*

a) $x' = ax + by + 1, y' = cx + \frac{1}{2}y - 1.$

b) $x' = x + by - 2, y' = ax + cy + 1.$

Řešení: Stejně jako předchozí příklad 5.6.

⁶Determinant matice A afinity nazýváme *modul afinity* δ . Zatímco jeho znaménko koresponduje s tím, zda se jedná o přímou ($\delta > 0$) nebo nepřímou ($\delta < 0$) afinitu, jeho absolutní hodnota udává poměr mezi obsahem (objemem) výsledného útvaru a jeho vzoru, viz např. <http://home.pf.jcu.cz/~hasek/GEO2/AfinitaModul.pdf>.

PŘÍKLAD 5.8. Určete p , q tak, aby existovala shodnost zobrazující body $[3, 0]$, $[1, 2]$, $[-1, -1]$ po řadě na body $[1, 4]$, $[p, 2]$, $[2, q]$. Najděte samodružné body a směry tohoto zobrazení.

Řešení: Vyjdeme z definice 15 shodného zobrazení, viz str. 23. Označme dané body $A[3, 0]$, $B[1, 2]$, $C[-1, -1]$. Potom jejich obrazy jsou dle zadání postupně body $A'[1, 4]$, $B'[p, 2]$ a $C'[2, q]$. Musí tedy platit $|AB| = |A'B'|$, $|BC| = |B'C'|$ a $|CA| = |C'A'|$. Příslušné rovnice, jejichž tvar vychází ze vztahu pro výpočet vzdálenosti dvou bodů, řešíme opět v programu wxMaxima:

```
(% i6) r1:(p-1)^2+4=8;
      r2:(p-2)^2+(2-q)^2=13;
      r3:1+(q-4)^2=17;
```

$$(p - 1)^2 + 4 = 8 \quad (\text{r1})$$

$$(2 - q)^2 + (p - 2)^2 = 13 \quad (\text{r2})$$

$$(q - 4)^2 + 1 = 17 \quad (\text{r3})$$

```
(% i7) solve([r1,r2,r3],[p,q]);
```

$$[[p = -1, q = 0]] \quad (\% \text{ o7})$$

Hledaná shodnost existuje pro hodnoty parametrů $p = -1$ a $q = 0$. Dle věty 3 o určenosti shodného zobrazení v rovině, uvedené na str. 24, je trojicí nekolineárních bodů a jejich obrazů shodnost určena jednoznačně. Pojdme tedy najít její rovnice. Do obecného vyjádření afinity v rovině (21), viz str. 25, dosadíme postupně souřadnice dvojic bodů ve vztahu vzor a obraz, tj. $A[3, 0] \rightarrow A'[1, 4]$, $B[1, 2] \rightarrow B'[-1, 2]$ a $C[-1, -1] \rightarrow C'[2, 0]$. Dostaneme soustavu šesti rovnic o šesti neznámých a_{11} , a_{12} , a_{21} , a_{22} , b_1 , b_2 . V následujícím kódu řešení ve wxMaximě jsou označeny $r1, r2, \dots, r6$.

```
(% i12) r1:1=a11*3+a12*0+b1;
      r2:4=a21*3+a22*0+b2;
      r3:-1=a11+a12*2+b1;
      r4:2=a21+a22*2+b2;
      r5:2=-a11-a12+b1;
      r6:0=-a21-a22+b2;
```

$$1 = b1 + 3a11 \quad (\text{r1})$$

$$4 = b2 + 3a21 \quad (\text{r2})$$

$$-1 = b1 + 2a12 + a11 \quad (\text{r3})$$

$$2 = b2 + 2a22 + a21 \quad (\text{r4})$$

$$2 = b1 - a12 - a11 \quad (\text{r5})$$

$$0 = b2 - a22 - a21 \quad (\text{r6})$$

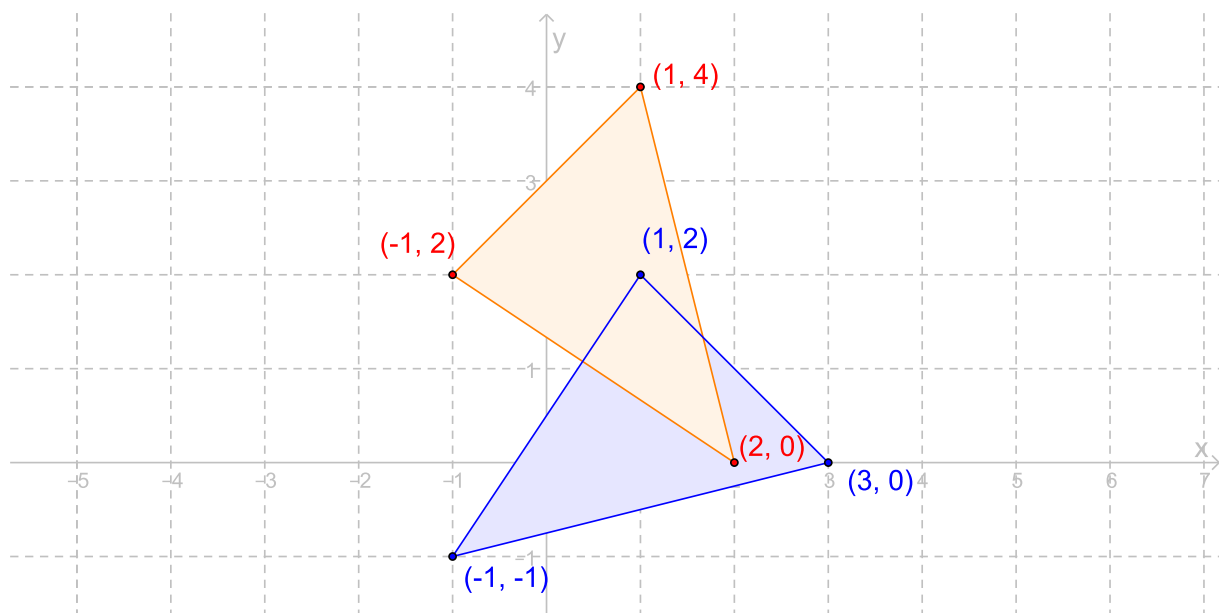
(% i13) solve([r1,r2,r3,r4,r5,r6],[a11,a12,a21,a22,b1,b2]);

[[a11 = 0, a12 = -1, a21 = 1, a22 = 0, b1 = 1, b2 = 1]] (% o13)

Příslušná shodnost má tedy rovnice

$$\begin{aligned} f : x' &= -y + 1, \\ y' &= x + 1. \end{aligned}$$

O tom, že funguje tak, jak požaduje zadání, se můžeme přesvědčit opět pomocí interaktivního appletu <https://www.geogebra.org/m/kwc6rrsw>, jak známe z předchozích příkladů. Zobrazení příslušných tří bodů je zachyceno také na Obr. 24. Při



Obrázek 24: O jakou ze shodností se jedná?

pohledu na něj se nabízí otázka, o jakou shodnost se jedná (posunutí ani identita to určitě nebude, na středovou souměrnost to také nevypadá, že by tedy otočení?). Otázkou, jak určit, o jakou konkrétní shodnost se jedná, známe-li rovnice zobrazení, se budeme zabývat v dalších kapitolách 5.2 a 5.3. Potřebujeme k tomu umět určit z rovnic afinního zobrazení jeho *samodružné body* a *samodružné směry*.

5.2 Samodružné body a samodružné směry shodností v rovině

Ze základní a střední školy si určitě pamatujete většinu ze shodností v rovině. Jsou to *identita*, *osová souměrnost*, *středová souměrnost*, *otočení*, *posunutí* a *posunutě zrcadlení*. Víte, že střed středové souměrnosti, případně střed otočení, se zobrazí sám na sebe. Také bezesporu víte, že ve středové souměrnosti, případně v posunutí, se přímka zobrazí na přímku s ní rovnoběžnou. Jedná se o vlastnosti, které se popisují pomocí pojmů *samodružný bod* a *samodružný směr*.

Samodružným bodem (afinního) zobrazení rozumíme bod, který se zobrazí sám na sebe, tj. pro jeho souřadnice $X[x, y]$ a souřadnice jeho obrazu $X'[x', y']$ platí $x' = x$, $y' = y$.

Pokud do rovnic (21) dosadíme $x' = x$ a $y' = y$, je zřejmé, že souřadnice samodružných bodů daného zobrazení jsou řešením soustavy rovnic

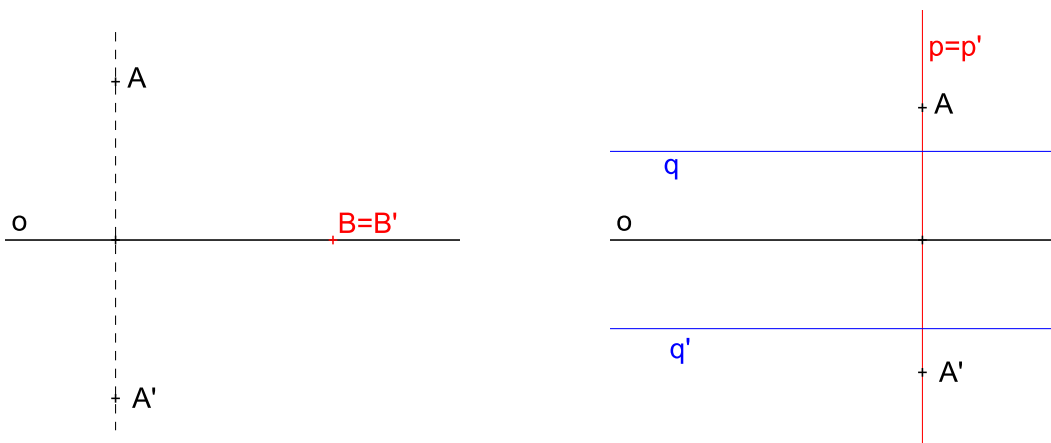
$$\begin{aligned}(1 - a_{11})x - a_{12}y &= b_1 \\ -a_{21}x + (1 - a_{22})y &= b_2.\end{aligned}\tag{34}$$

Samodružným směrem rozumíme směr, který se v (afinním) zobrazení zobrazí sám na sebe.

Pro vyjádření směru používáme vektor, např. \vec{u} . Příslušný „směr“ potom může reprezentovat každý jeho násobek $\lambda\vec{u}$, kde $\lambda \in \mathbb{R}$. Má-li tedy být směr reprezentovaný vektorem \vec{u} samodružný, musí pro vektor \vec{u}' , který je obrazem vektoru \vec{u} , platit, že reprezentuje stejný směr, tj. $\vec{u}' = \lambda\vec{u}$, kde $\lambda \in \mathbb{R}$. Jak je uvedeno výše, samodružné body vypočítáme řešením soustavy 34. Abychom dokázali vypočítat i samodružné směry, musíme si nejprve zavést pojem *asociovaný homomorfismus*, viz str. 36. Tomu se budeme věnovat až v další kapitole, kde se na detailní výpočet samodružných bodů a směrů zaměříme.

Pro každou shodnost v rovině je typická kombinace samodružných bodů a směrů. Je to jakýsi její unikátní identifikátor. Jako příklad si uveďme osovou souměrnost $\mathcal{O}(o)$, viz Obr. 25. Ta má nekonečně mnoho samodružných bodů, které tvoří osu o souměrnosti, viz např. bod B na Obr. 25, vlevo. Samodružné směry má potom dva, kolmý na osu osové souměrnosti a rovnoběžný s osou osové souměrnosti, viz přímky p , q a jejich obrazy.

Na Obr. 25 také můžeme pozorovat rozdíl mezi pojmy *přímka samodružných bodů* a *samodružná přímka*. Přímku samodružných bodů je osa o osové souměrnosti, každý její bod je totiž samodružný. Samodružnou přímku je potom přímka p , která se zobrazuje sama na sebe, kromě průsečíku s osou o ale nemá žádný další samodružný



Obrázek 25: Samodružným bodem je každý bod osy osové souměrnosti (osa souměrnosti je tzv. přímkou samodružných bodů). Samodružné směry osové souměrnosti jsou dva, kolmý na osu souměrnosti a rovnoběžný s osou souměrnosti.

bod. Všechny její ostatní body se zobrazují jako bod A , do jiného bodu, ale opět ležícího na přímce p , viz obraz A' .

PŘÍKLAD 5.9. *Vyplňte následující tabulku samodružných bodů a směrů pro všechny shodnosti v rovině. U každého zobrazení uvádějte počty samodružných bodů a směrů (je-li směrů více, tak jejich vzájemné odchylky).*

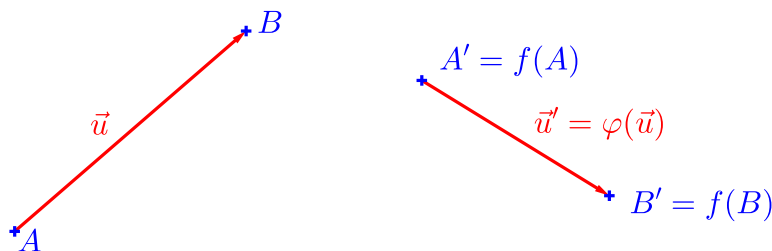
<i>shodnost</i>	<i>samodružné body</i>	<i>samodružné směry</i>
<i>identita</i>		
<i>osová souměrnost</i>		
<i>středová souměrnost</i>		
<i>otočení</i>		
<i>posunutí</i>		
<i>posunutě zrcadlení</i>		

Řešení: Níže uvádím tabulku vyplněnou. Prosím, abyste s ní pracovali ku prospěchu svého poznání. Použijte ji pro kontrolu svého řešení, nebo jako zdroj pro další studium, přemýšlení a dotazování.

shodnost	samodružné body	samodružné směry
identita	každý bod roviny	každý směr
osová souměrnost	každý bod osy o	dva, vzájemně kolmé (kolmý na o a rovnoběžný s o)
středová souměrnost	jeden (střed souměrnosti)	každý směr
otočení	jeden (střed otočení)	žádný
posunutí	žádný	každý
posunutě zrcadlení	žádný	dva, vzájemně kolmé (kolmý na o a rovnoběžný s o)

5.3 Lineární zobrazení asociované s afinním zobrazením (asociovaný homomorfismus)

Na str. 34 je uvedeno, že *samodružným směrem rozumíme směr, který se v (afinním) zobrazení zobrazí sám na sebe*. Protože směr je v geometrii reprezentován vektorem (jakýmkoliv vektorem daného „směru“), jedná se vlastně o zobrazení vektoru. Jak se ale zobrazují vektory? Dosud jsme se přece zabývali jenom zobrazením bodů! Afinní zobrazení v rovině (afinita) přiřazuje bodu X roviny jako jeho obraz X' zase bod této roviny. Ukážeme si, že odpověď je jednoduchá. Existence zobrazení, které přiřazuje vektoru jako jeho obraz zase vektor, je přímým důsledkem existence afinního zobrazení. Uvažujme afinitu f , která dvojici bodů A, B přiřadí v daném pořadí jejich obrazy A', B' , viz Obr. 26. Uspořádanou dvojici bodů A, B ale můžeme ztotožnit



Obrázek 26: Ke každému afinnímu zobrazení f je přidruženo (asociováno) lineární zobrazení φ

s orientovanou úsečkou \overrightarrow{AB} , která je umístěním vektoru $\vec{u} = B - A$. Dvojicí bodů A, B je tak určen vektor. Stejný přístup uplatníme k jejich obrazům A', B' . Opět je ztotožníme s orientovanou úsečkou $\overrightarrow{A'B'}$, která je tentokrát umístěním vektoru $\vec{u}' = B' - A'$. Je pak celkem nasnadě uvažovat vektor \vec{u}' jako obraz vektoru \vec{u} v zobrazení, jehož mechanismus byl právě teď popsán a názorně je zobrazen na Obr. 26. Toto zobrazení značíme φ , tj. $\vec{u}' = \varphi(\vec{u})$, a nazýváme ho *lineární zobrazení asociované s afinním zobrazením (asociovaný homomorfismus)*. Pojmem *lineární zobrazení* (cizím slovem *homomorfismus*) je vyjádřena skutečnost, že předmětné zobrazení má vlastnosti popsané definicí 16.

Definice 16 (Homomorfismus). *Zobrazení φ vektorového prostoru V do vektorového prostoru V' se nazývá homomorfismus (lineární zobrazení), jestliže pro všechna $\vec{u}, \vec{v} \in V, k \in \mathbb{T}$ (místo obecného tělesa \mathbb{T} můžeme uvažovat \mathbb{R}) platí:*

- (1) $\varphi(\vec{u} + \vec{v}) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v})$,
- (2) $\varphi(k\vec{u}) = k\varphi(\vec{u})$.

Definice 17 (Asociovaný homomorfismus afinity f v rovině). *Uvažujme afinní transformaci f prostoru E_2 . Potom **asociovaným** (tj. jednoznačně přiřazeným) **homomorfismem** afinity f rozumíme lineární zobrazení φ , které zobrazuje zaměření⁷ V_2 prostoru E_2 do sebe takto:*

$$\vec{u} = Y - X \longrightarrow \varphi(\vec{u}) = f(Y) - f(X), \quad (35)$$

kde X, Y a $f(X), f(Y)$ jsou body z E_2 , $\vec{u}, \varphi(\vec{u}) \in V_2$.

Zajímají nás rovnice zobrazení φ . Získáme je dosazením z (23) do (35) (akorát místo $f(X), f(Y)$ budeme pro zjednodušení pracovat s X', Y'), konkrétně

$$\varphi(\vec{u}) = Y' - X' = AY + B - AX - B = A(Y - X) = A \cdot \vec{u}. \quad (36)$$

Analogicky s rovnicí (23) můžeme psát

$$\varphi : \vec{u}' = A \cdot \vec{u}, \quad (37)$$

maticově pak ve tvaru

$$\varphi : \begin{bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.$$

Asociovaný homomorfismus φ afinity f můžeme zadat také soustavou

$$\begin{aligned} \varphi : u'_1 &= a_{11}u_1 + a_{12}u_2, \\ u'_2 &= a_{21}u_1 + a_{22}u_2. \end{aligned} \quad (38)$$

Vraťme se nyní k dříve nastolené otázce výpočtu **samodružných směrů** afinity (zaměřujeme se konkrétně na shodnosti) v rovině. Použijeme k tomu soustavu (38). Jak je uvedeno již na straně 34, je-li směr reprezentovaný vektorem \vec{u} samodružný, zobrazí se \vec{u} homomorfismem φ na vektor $\lambda\vec{u}$, kde $\lambda \in R$ (Za promyšlení stojí, jakých hodnot může v případě shodnosti λ vlastně nabývat!). Dosadíme-li proto do (38) za u'_1 a u'_2 v uvedeném pořadí souřadnice λu_1 a λu_2 , dostaneme, po drobných úpravách, homogenní soustavu

$$\begin{aligned} (\lambda - a_{11})u_1 - a_{12}u_2 &= 0, \\ -a_{21}u_1 + (\lambda - a_{22})u_2 &= 0. \end{aligned} \quad (39)$$

Samodružné směry shodnosti, tj. vektory těchto směrů, pro které platí $\vec{u}' = \lambda\vec{u}$, jsou potom **netriviálním** řešením této soustavy rovnic. Proč netriviálním? Protože

⁷Zaměřením rozumíme vektorový prostor (tj. množinu vektorů splňující definici 3, uvedenou na str. 5), který je tvořen vektory určenými dvojicemi bodů způsobem, který znázorňuje Obr. 26. Zjednodušeně můžeme zaměření bodového prostoru popsat jako *množinu všech směrů*, které lze v daném bodovém prostoru určit dvojicemi bodů.

triviálním řešením je nulový vektor $\vec{0}$ a ten nikam neukazuje! Nereprezentuje žádný směr. Zajímá nás tedy, za jakých podmínek má soustava (39) netriviální řešení, jinak řečeno, kdy má **nekonečně mnoho řešení**. Uplatníme při tom své poznatky z lineární algebry.

Homogenní soustava n lineárních rovnic o n neznámých má netriviální řešení právě tehdy, když je determinant matice soustavy roven nule. Soustava (39) má tedy nekonečně mnoho řešení, jestliže platí rovnost

$$\begin{vmatrix} (\lambda - a_{11}) & -a_{12} \\ -a_{21} & (\lambda - a_{22}) \end{vmatrix} = 0. \quad (40)$$

Rovnici (40) říkáme **charakteristická rovnice** příslušného zobrazení, v tomto případě shodnosti v rovině. Každý vektor \vec{u} , pro který platí $\vec{u}' = \varphi(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$, nazýváme **vlastním vektorem** homomorfismu φ , číslo λ , které je řešením charakteristické rovnice, pak nazýváme **vlastní číslo** homomorfismu φ , odpovídající vektoru \vec{u} . Místo vlastní vektor a vlastní číslo se také používají termíny **charakteristický vektor** a **charakteristické číslo**.

5.4 Výpočet samodružných bodů a směrů shodnosti v rovině

Postupy určení samodružných bodů a směrů shodného zobrazení si budeme ilustrovat na konkrétních shodnostech, na středové a osově souměrnosti.

Středová souměrnost se středem v bodě $S = [2, -3]$ je dána rovnicemi (viz str. 58)

$$\begin{aligned} x' &= -x + 4, \\ y' &= -y - 6. \end{aligned}$$

Představme si, že nevíme, o jaké afinní zobrazení se jedná a teprve to chceme zjistit.

Matice tohoto zobrazení je $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, součin $A^T \cdot A$ je roven $A^T \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, jedná se tedy o shodnost.

Nyní určíme samodružné body daného zobrazení řešením soustavy (34)

$$\begin{aligned} 2x &= 4, \\ 2y &= -6. \end{aligned}$$

Ta má jediné řešení $[x, y] = [2, -3]$. Jedná se tedy o shodné zobrazení s jediným samodružným bodem $S = [2, -3]$. V úvahu tak připadá otočení nebo středová souměrnost, viz tabulka na str. 35.

K rozhodnutí, která z těchto dvou možností je správná, nám pomůže určení samodružných směrů daného zobrazení. Řešíme proto homogenní soustavu (39)

$$(\lambda + 1)u_1 = 0,$$

$$(\lambda + 1)u_2 = 0,$$

které přísluší charakteristická rovnice

$$\begin{vmatrix} (\lambda + 1) & 0 \\ 0 & (\lambda + 1) \end{vmatrix} = 0,$$

po úpravě $(\lambda + 1)^2 = 0$. Jejím jediným řešením je vlastní číslo $\lambda = -1$, které dosadíme do příslušné homogenní soustavy, abychom dostali soustavu rovnic

$$0u_1 = 0,$$

$$0u_2 = 0,$$

jejímž řešením je každý vektor $\vec{v} = (u_1, u_2) \in R \times R$. Vyšetřovaná shodnost má tedy všechny směry samodružné. Jedná se proto o středovou souměrnost se středem $S = [2, -3]$.

Osová souměrnost s osou v souřadnicové ose x je dána rovnicemi

$$x' = x,$$

$$y' = -y.$$

Opět předstíráme, že nevíme, o jaké afinní zobrazení se jedná a teprve to chceme zjistit.

Matice tohoto zobrazení je $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, součin $A^T \cdot A$ je roven $A^T \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, jedná se tedy o shodnost.

Nyní určíme samodružné body daného zobrazení řešením soustavy

$$0x = 0,$$

$$2y = 0.$$

Ta má nekonečně mnoho řešení. Jsou jimi všechny uspořádané dvojice ve tvaru $[x, 0]$; $x \in R$. Jedná se tedy o shodné zobrazení, jehož všechny samodružné body leží v přímce o rovnici $y = 0$. V úvahu tak připadá jediná možnost, osová souměrnost s osou v souřadnicové ose x , viz tabulka na str. 35.

Přestože jsme dané zobrazení již identifikovali, dokončíme analýzu jeho vlastností určením samodružných směrů. Řešíme proto homogenní soustavu

$$(\lambda - 1)u_1 = 0, \tag{41}$$

$$(\lambda + 1)u_2 = 0, \tag{42}$$

které přísluší charakteristická rovnice

$$\begin{vmatrix} (\lambda - 1) & 0 \\ 0 & (\lambda + 1) \end{vmatrix} = 0,$$

po úpravě $(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$. Charakteristická rovnice má dva kořeny (vlastní čísla) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$, které postupně dosadíme do příslušné homogenní soustavy (42) a vypočítáme souřadnice odpovídajících vlastních vektorů daného zobrazení.

Pro $\lambda_1 = 1$ dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} 0u_1 &= 0, \\ 2u_2 &= 0, \end{aligned}$$

jejímž řešením je každý vektor $\vec{v}_1 = (u_1, 0) \in R^2$. Samodružný směr určený těmito vektory je rovnoběžný s osou x (tj. s osou souměrnosti).

Pro $\lambda_2 = -1$ dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} -2u_1 &= 0, \\ 0u_2 &= 0, \end{aligned}$$

jejímž řešením je každý vektor $\vec{v}_2 = (0, u_2) \in R^2$. Samodružný směr určený těmito vektory je kolmý k ose x (tj. k ose souměrnosti). Určení dvou na sebe kolmých samodružných směrů je v souladu se skutečností, že uvažované shodné zobrazení je osová souměrnost.

PŘÍKLAD 5.10. *Rozhodněte, zda je afinita daná rovnicemi $x' = -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + 8, y' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 6$ shodností. Pokud ano, určete její samodružné body a směry a uveďte, o jakou shodnost se jedná.*

Řešení: Řešte sami. Pokud nevíte jak, pomůže Vám jednak pozorné prostudování dosavadního textu kapitoly 5, jednak prostudování řešení následujícího příkladu 5.11.

Následující příklad je určen k dobrovolnému studiu. Je kompletně vyřešen. K zápisu řešení je použit kód řešení v programu wxMaxima, doplněný zevrubnými komentáři jednotlivých kroků. V řešení příkladu jsou názorně použity všechny postupy, které jsou popisovány v kapitole 5. *Shodná zobrazení v rovině.*

PŘÍKLAD 5.11. Zjistěte, zda existuje shodnost E_2 , při které se bod $K = [10; 0]$ zobrazí na počátek $K' = [0; 0]$ a bod $L = [25; 20]$ na bod $L' = [0; 25]$. V kladném případě napište rovnice tohoto zobrazení a najděte jeho samodružné body a směry.

Řešení: Začneme tím, že si ověříme, zda zadané body splňují definici shodného zobrazení, tj. zda $|K'L'| = |KL|$. V případě této úlohy zvládneme ověření provést z paměti. Výsledkem je, že zadání vyhovuje definici shodnosti.

Další postup řešení úlohy si ilustrujeme pomocí zápisu v programu wxMaxima (viz <https://wxmaxima-developers.github.io/wxmaxima/>)

```
(%i1) A:matrix([a11,a12],[a21,a22]); B:matrix([b1],[b2]);
```

```
(%o1) (a11 a12)
      (a21 a22)
```

```
(%o2) (b1)
      (b2)
```

Rovnici $X' = A \cdot X + B$ vyjádříme ve tvaru $A \cdot X + B - X' = O$ a dosadíme souřadnice daných dvojic bodů K, K' a L, L' . Potom zapíšeme podmínku (31) pro to, aby bylo afinní zobrazení shodností ve tvaru $A^T \cdot A - E = O$. (V programu wxMaxima zapíšeme jenom levé strany uvedených rovnic.)

```
(%i3) s1:A.[10,0]+B-[0,0]; s2:A.[25,20]+B-[0,25];
      s3:transpose(A).A-ident(2);
```

```
(%o3) (b1 + 10 a11)
      (b2 + 10 a21)
```

```
(%o4) ( b1 + 20 a12 + 25 a11 )
      (b2 + 20 a22 + 25 a21 - 25)
```

```
(%o5) ( a21^2 + a11^2 - 1  a21 a22 + a11 a12 )
      (a21 a22 + a11 a12  a22^2 + a12^2 - 1 )
```

Všechny prvky výše uvedených matic musí být rovny nule (Proč?). Dostaneme tak soustavu sedmi rovnic pro šest neznámých $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$.

```
(%i6) rov:[s1[1,1],s1[2,1],s2[1,1],s2[2,1],s3[1,1],s3[1,2],s3[2,2]];
```

```
(%o6) [b1 + 10 a11, b2 + 10 a21, b1 + 20 a12 + 25 a11, b2 + 20 a22 + 25 a21 - 25, a21^2 +
a11^2 - 1, a21 a22 + a11 a12, a22^2 + a12^2 - 1]
```

Tato soustava má následující dvě řešení (nejedná se o soustavu lineárních rovnic, proto může mít dvě řešení):

```
(%i7) res:solve(rov, [a11,a12,a21,a22,b1,b2]);
```

```
(%o7) [[a11 =  $\frac{4}{5}$ , a12 =  $-\frac{3}{5}$ , a21 =  $\frac{3}{5}$ , a22 =  $\frac{4}{5}$ , b1 = -8, b2 = -6],  
[a11 =  $-\frac{4}{5}$ , a12 =  $\frac{3}{5}$ , a21 =  $\frac{3}{5}$ , a22 =  $\frac{4}{5}$ , b1 = 8, b2 = -6]]
```

Dvěma řešením odpovídají dvě různé shodnosti. Zjistili jsme tedy, že existují dvě shodnosti, které převádějí body K, L na body K', L' (Což se, vzhledem ke *větě o určenosti shodného (afinního) zobrazení* dalo čekat. Proč?). Pokračujeme v řešení úlohy pro každou z těchto shodností zvlášť. Pro zápis rovnic uvažovaných shodností si nejprve připravíme matici RovTr, jejímiž řádky jsou rovnice afinity v obecném tvaru (tato matice není nutnou součástí postupu řešení, jedná se jenom o usnadnění vizuální prezentace rovnic v programu).

```
(%i8) RovTr:matrix([x1=a11*x+a12*y+b1], [y1=a21*x+a22*y+b2]);
```

```
(%o8) 
$$\begin{pmatrix} x1 = a12y + a11x + b1 \\ y1 = a22y + a21x + b2 \end{pmatrix}$$

```

Řešení č. 1:

```
(%i9) A1:ev(A, res[1]); B1:ev(B, res[1]);
```

```
(%o9) 
$$\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

```

```
(%o10) 
$$\begin{pmatrix} -8 \\ -6 \end{pmatrix}$$

```

Príslušná shodnost má rovnice

```
(%i11) R1:ev(RovTr, res[1]);
```

```
(%o11) 
$$\begin{pmatrix} x1 = -\frac{3y}{5} + \frac{4x}{5} - 8 \\ y1 = \frac{4y}{5} + \frac{3x}{5} - 6 \end{pmatrix}$$

```

Samodružný bod je bod, pro který platí $X' = X$. Pro výpočet souřadnic samodružných bodů daného zobrazení tak do rovnice $X' = A \cdot X + B$ (pro snazší zpracování programem přepsané do tvaru $A \cdot X + B - X = 0$) za X' dosadíme X a řešíme odpovídající soustavu dvou rovnic s neznámými x, y .

```
(%i12) RovSB1:A1.[x,y]+B1-[x,y]; solve([RovSB1[1,1],RovSB1[2,1]],[x,y]);
```

$$(\%o12) \begin{pmatrix} -\frac{3y}{5} - \frac{x}{5} - 8 \\ -\frac{y}{5} + \frac{3x}{5} - 6 \end{pmatrix}$$

$$(\%o13) [[x = 5, y = -15]]$$

Protože tato soustava má jediné řešení, má daná shodnost jediný samodružný bod $S = [5, -15]$.

Pro vyšetření samodružných směrů daného zobrazení řešíme charakteristickou rovnicí (40)

```
(%i14) CharM1:A1-%lambda*ident(2);  
CharR1:expand(determinant(CharM1))=0;  
solve(CharR1,%lambda);
```

$$(\%o14) \begin{pmatrix} \frac{4}{5} - \lambda & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} - \lambda \end{pmatrix}$$

$$(\%o15) \lambda^2 - \frac{8\lambda}{5} + 1 = 0$$

$$(\%o16) [\lambda = -\frac{3i-4}{5}, \lambda = \frac{3i+4}{5}]$$

Charakteristická rovnice nemá řešení v oboru reálných čísel. Daná shodnost tak nemá žádný samodružný směr.

Protože uvažované zobrazení má právě jeden samodružný bod a nemá žádný samodružný směr, jedná se o **otočení** se středem $S = [5, -15]$.

Poznámka. K úplné identifikaci daného zobrazení nám zbývá určit úhel otočení α . Jak to uděláme? K vyřešení této otázky se vrátíme v kapitole 5.10 věnované otočení.

Řešení č. 2:

Postupujeme analogicky s řešením č. 1.

```
(%i17) A2:ev(A,res[2]); B2:ev(B,res[2]);
```

$$(\%o17) \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

$$(\%o18) \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Rovnice zobrazení

```
(%i19) R2:ev(RovTr,res[2]);
```

$$(\%o19) \begin{pmatrix} x1 = \frac{3y}{5} - \frac{4x}{5} + 8 \\ y1 = \frac{4y}{5} + \frac{3x}{5} - 6 \end{pmatrix}$$

Samodružné body:

```
(%i20) RovSB2:A2.[x,y]+B2-[x,y]; solve([RovSB2[1,1],RovSB2[2,1]],[x,y]);
```

$$(\%o20) \begin{pmatrix} \frac{3y}{5} - \frac{9x}{5} + 8 \\ -\frac{y}{5} + \frac{3x}{5} - 6 \end{pmatrix}$$

```
(%o21) []
```

Toto zobrazení tedy nemá žádný samodružný bod.

Samodružné směry:

```
(%i22) CharM2:A2-%lambda*ident(2);  
CharR2:expand(determinant(CharM2))=0;  
solve(CharR2,%lambda);
```

$$(\%o22) \begin{pmatrix} -\lambda - \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} - \lambda \end{pmatrix}$$

$$(\%o23) \lambda^2 - 1 = 0$$

$$(\%o24) [\lambda = -1, \lambda = 1]$$

```
(%i25) RovSS2:A2.[u,v]-[%lambda*u,%lambda*v];
```

$$(\%o25) \begin{pmatrix} \frac{3v}{5} - \lambda u - \frac{4u}{5} \\ -\lambda v + \frac{4v}{5} + \frac{3u}{5} \end{pmatrix}$$

```
(%i26) RovSS21:ev(RovSS2,%lambda=-1);  
solve([RovSS21[1,1],RovSS21[2,1]],[u,v]);
```

$$(\%o26) \begin{pmatrix} \frac{3v}{5} + \frac{u}{5} \\ \frac{9v}{5} + \frac{3u}{5} \end{pmatrix} \text{ solve : dependent equations eliminated : (2)}$$

$$(\%o27) [[u = -3 \%r1, v = \%r1]]$$

```
(%i28) RovSS22:ev(RovSS2,%lambda=1);  
solve([RovSS22[1,1],RovSS22[2,1]],[u,v]);
```

$$(\%o28) \begin{pmatrix} \frac{3v}{5} - \frac{9u}{5} \\ \frac{3u}{5} - \frac{v}{5} \end{pmatrix} \text{ solve : dependent equations eliminated : (2)}$$

$$(\%o29) [[u = \frac{\%r2}{3}, v = \%r2]]$$

Zobrazení má dva na sebe kolmé samodružné směry $\vec{u} = (-3, 1)$, $\vec{v} = (1, 3)$. Jedná se proto o **posunuté zrcadlení**.

Poznámka. K úplné identifikaci výsledného zobrazení nám zbývá určit osu o a vektor posunutí \vec{t} . Jak to uděláme? Máme k tomu všechny potřebné informace? K vyřešení těchto otázek se vrátíme v kapitole 5.14 věnované posunutému zrcadlení.

5.5 Symetrie

V následujících pasážích se budeme detailně věnovat jednotlivým shodnostem v rovině; *osové souměrnosti*, *otočení*, *středové souměrnosti*, *posunutí*, *posunutému zrcadlení* a *identitě*⁸. Za zamyšlení stojí otázka, jak se tato zobrazení zrodila. Téměř s jistotou se dá říci, že k tomu významně přispěly *symetrie*, které člověk ve svém okolí rozeznával, případně i vytvářel, viz Obr. 27. V souvislosti se shodnostmi v ro-



Obrázek 27: Symetrie kolem nás (zdroj: archiv autora)

vině se konkrétně zaměříme na *symetrie roviny*⁹, tj. takové transformace roviny, při nichž buď zůstává zachován nějaký rovinný obrazec, nebo zůstává zachována nějaká jeho vlastnost (např. tvar u stejnolehlosti). Ve svém okolí můžeme vyzorovat následující symetrie:

- zrcadlení (osová symetrie),
- otočení (rotační symetrie),
- posunutí (translační symetrie),
- stejnolehlost (podobnost).

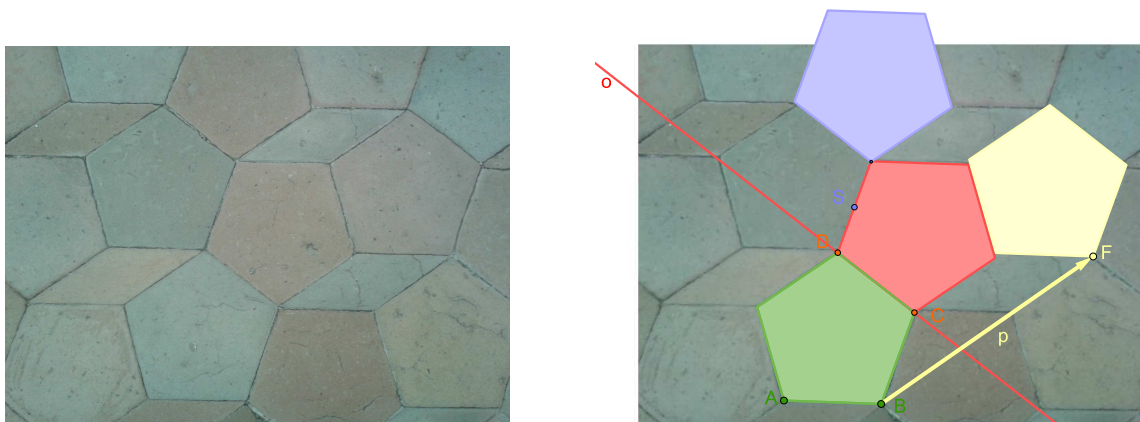
PŘÍKLAD 5.12. *Pozorně si prohlédněte všechny fotografie na Obr. 27. U každé z nich popište alespoň jednu symetrii, kterou na ní pozorujete (v případě kytek, které jsou reálně trojrozměrné se soustřeďte na tvar jejich zachycení do roviny fotografie).*

⁸Pro detailní přehled shodností v rovině viz např. *Wikipedia: Euclidean plane isometry*

⁹Pro podrobné pojednání o symetrii v geometrii viz např. *Wikipedia: Symmetry (geometry)*

PŘÍKLAD 5.13. *Nechte se inspirovat Obr. 27 a pořídte sami fotografii nějakého reálného objektu, který vykazuje vlastnost symetrie. Tuto symetrii, nebo symetrie, je-li jich více, popište a náležitě prezentujte zpracováním fotografie v GeoGebře, tak, jak je provedeno v řešení následujícího příkladu 5.14, viz Obr. 28 vpravo.*

Pro znázornění symetrií nebo shodností zachycených na obrázku můžeme dobře použít program GeoGebra. Na Obr. 28 je zobrazena dlažba z kostela sv. Jana Nepo-



Obrázek 28: Kostel sv. Jana Nepomuckého, Zelená hora u Žďáru nad Sázavou

muckého na Zelené hoře u Žďáru nad Sázavou, vlevo na prosté fotografii, vpravo pak na této fotografii doplněné obrázkem sestavenými v GeoGebře, jejichž uvedením jsou naznačeny vybrané shodnosti, které můžeme v motivu dlažby mezi určitými dlaždicemi vyzorovat (konkrétně se jedná o *osovou souměrnost*, *posunutí* a *středovou souměrnost*, určitě ale odhalíte i další). Obrázek umístíme na pozadí „Nákresny“ GeoGebry pomocí nástroje *Obrázek* (Image).

PŘÍKLAD 5.14. *Na fotografii, viz Obr. 28, vlevo, je zachycena část dlažby položené na podlaze kostela Sv. Jana Nepomuckého na Zelené hoře u Žďáru nad Sázavou. Najděte a znázorněte konkrétní shodnosti, v nichž se vybraná dlaždice zobrazuje na jiné.*

Řešení: Řešení je uvedeno v online materiálu na adrese <https://www.geogebra.org/m/NatBC> a zachyceno na Obr. 28, vpravo. Z materiálu si můžete stáhnout zdrojový soubor k tomuto zobrazení symetrií do fotografie. Je v něm také naznačen postup vložení obrázku na pozadí *Nákresny* GeoGebry. Pro podrobnější návod jak vkládat obrázek na pozadí *Nákresny* lze potom doporučit video *YouTube: Importing an Image in GeoGebra*.

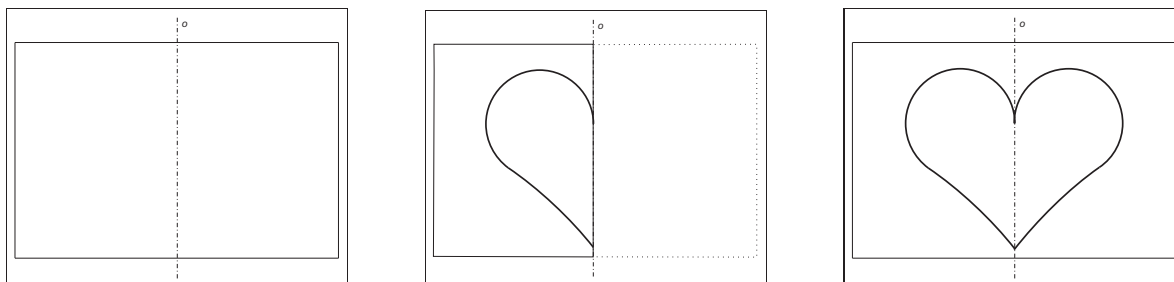
5.6 Osová souměrnost

Osová souměrnost je určena přímkou, které říkáme *osa souměrnosti*. Osovou souměrnost s osou o značíme $\mathcal{S}(o)$. Jedná se o nepřímou shodnost.



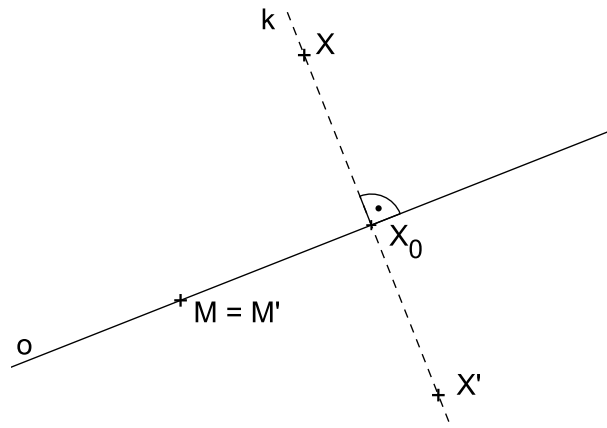
Obrázek 29: Osová souměrnost (zrcadlení)

Jak už bylo řečeno v kapitole 5.5, geometrické zobrazení *osová souměrnost* souvisí s *osovou symetrií*. V případě osové symetrie konkrétního obrazce hovoříme též o *osově souměrném* obrazci, viz například fotografie na Obr. 29 (v případě vlastních trojrozměrných objektů, na fotografiích zachycených, bychom hovořili spíše o *zrcadlení* nebo o *rovinové symetrii (souměrnosti)*). Osově souměrný je potom takový útvar, který se v osové souměrnosti dle určité osy zobrazí (viz Def. 18) sám na sebe. Příkladem takového obrazce je *srdce*. Praktickým uplatněním osové souměrnosti, se kterým se většina z nás setkala, je postup při „výrobě“ takového srdce z papíru, aby mělo co nejdokonalejší tvar (viz Obr. 30). Z papíru přeloženého napůl vystříháme polovinu srdce, která se po rozevření papíru „zobrazí“ v osové souměrnosti kolem osy přeložení. Takto získané srdce je příkladem *osově souměrného útvaru*, tj. útvaru, který se v osové souměrnosti s osou jdoucí přehybem zobrazí sám na sebe.



Obrázek 30: Osová souměrnost v praxi

Definice 18 (Osová souměrnost). Osová souměrnost je určena přímkou, označme ji o , kterou nazýváme osa souměrnosti, viz Obr. 31. Obrazem libovolného bodu M této přímky o je bod M sám, tj. pro obraz M' bodu $M \in o$ platí $M' \equiv M$ (říkáme, že každý bod osy souměrnosti je samodružný). Ke každému bodu X , který neleží na ose o , sestrojíme obraz X' takto: Bodem X vedeme kolmici k na přímku o a její patu označíme X_0 . Na polopřímce opačné k polopřímce $\overrightarrow{X_0X}$ sestrojíme bod X' tak, že $|X'X_0| = |XX_0|$. Osovou souměrnost s osou o značíme $\mathcal{O}(o)$.



Obrázek 31: Definice osové souměrnosti

Poznámka. O bodech X, X' říkáme, že je to dvojice bodů *souměrně sdružených* podle osy o .

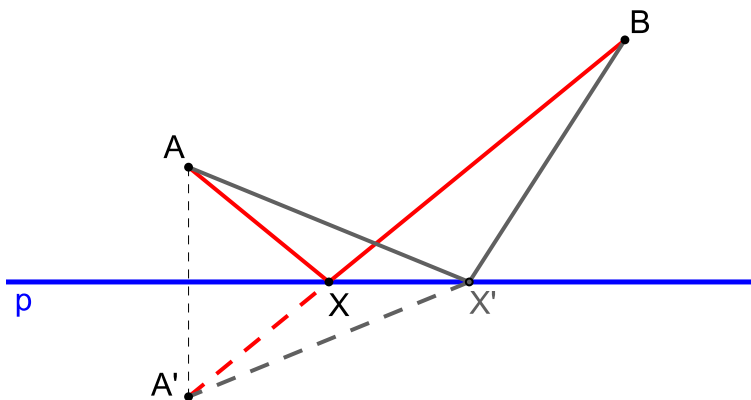
Involutorní zobrazení (involuce). Osová souměrnost je prvním příkladem tzv. *involutorního zobrazení*, též nazývaného *involuce*, se kterým se setkáváme. Involutorními zobrazeními jsou taková zobrazení, u kterých lze zaměnit role vzoru a obrazu. To znamená, že je-li bod L obrazem bodu K , je bod K zároveň obrazem bodu L .

Involutorní zobrazení můžeme také poznat podle toho, že složíme-li ho samo se sebou, dostaneme *identitu*. Asi nikoho nepřekvapí, že když obraz X' bodu X v osové souměrnosti $\mathcal{O}(o)$ zobrazíme opět v této souměrnosti, dostaneme se zpět do bodu X , viz Obr. 31.

PŘÍKLAD 5.15. *Jaké další shodnosti v rovině jsou involutorními zobrazeními? Pokuste se je vyjmenovat a svou volbu zdůvodněte.*

PŘÍKLAD 5.16. *Je dána přímka p a body A, B v téže polorovině s hraniční přímkou p . Najděte všechny body $X \in p$ takové, že součet vzdáleností $|AX| + |BX|$ je minimální.*

*Řešení*¹⁰: Užitím osové souměrnosti převedeme řešení tohoto příkladu na jednoduchou úlohu najít nejkratší spojnici dvou bodů v rovině. Vtip je v tom, že pro obraz A' bodu A v $\mathcal{O}(p)$ platí $|A'Y| = |AY|$ (kde Y je libovolný bod, pro který $Y \in p$). Můžeme tedy místo s A pracovat s A' . Pak je jasné, že úsečka $A'B$ je kratší než lomená čára $A'YB$. Protože samozřejmě také $|A'X| = |AX|$, je hledaným bodem X , průsečík přímky $A'B$ s přímkou p .



Obrázek 32: Využití osové souměrnosti ke geometrickému řešení příkladu 32

Samodružné body a směry osové souměrnosti, samodružné přímky

Jak víme, každá shodnost je unikátní svou kombinací samodružných bodů a směrů, viz tabulka 5.2 na str. 35. Proto si tuto určující vlastnost u každé shodnosti ještě připomeneme.

Osová souměrnost má přímku samodružných bodů, osu, a dva na sebe kolmé samodružné směry, jeden rovnoběžný se směrem osy, druhý na něj kolmý. Samodružné přímky osové souměrnosti jsou potom přímky kolmé na její osu.

Nabízí se otázka, kolik samodružných bodů a jak rozložených potřebujeme identifikovat, abychom určili osu osové souměrnosti. Víme, že přímka je určena dvěma body. Stačí tedy k určení osy najít dva samodružné body? A co kdybychom našli tři, které neleží v přímce, o jaké zobrazení by se potom jednalo?

PŘÍKLAD 5.17. *Dokažte následující dvě tvrzení: „Jestliže existují na přímce dva různé samodružné body shodnosti, pak každý bod této přímky je samodružný.“ „Má-li shodnost aspoň tři nekolineární samodružné body, je to identita.“*

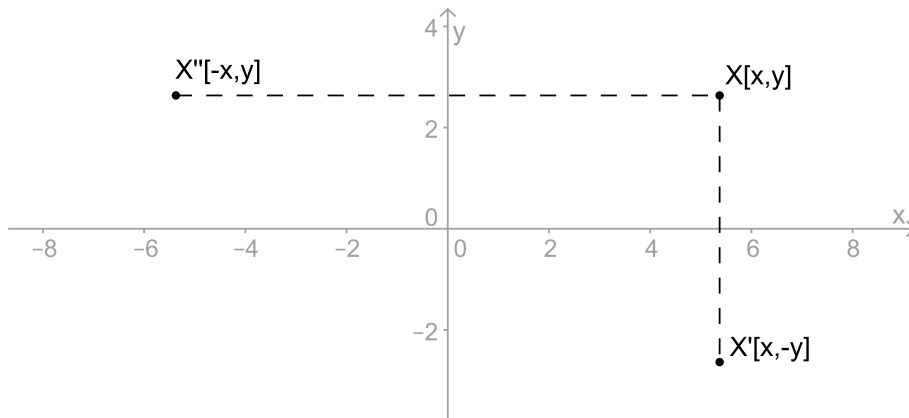
Z pravdivosti tvrzení uvedených v příkladu 5.17 vyplývá, že *má-li shodnost dva různé samodružné body a není identitou, pak je osovou souměrností.*

¹⁰Tato úloha je známa také jako *Heronův problém* (Hérón Alexandrijský, přibl. 10-70 n.l.).

Analytické vyjádření osové souměrnosti $\mathcal{O}(o)$ v rovině

PŘÍKLAD 5.18. *Napište analytické vyjádření osové souměrnosti $\mathcal{O}(x)$ s osou v souřadnicové ose x a osové souměrnosti $\mathcal{O}(y)$ s osou v souřadnicové ose y .*

Řešení: Dle Obr. 33 je ihned zřejmé, že zadané osové souměrnosti mají níže uvedená analytická vyjádření.



Obrázek 33: Odvození rovnic osové souměrnosti s osou v souřadnicové ose x (y)

Osová souměrnost s osou x :

$$\begin{aligned}x' &= x \\y' &= -y\end{aligned}$$

Osová souměrnost s osou y :

$$\begin{aligned}x' &= -x \\y' &= y\end{aligned}$$

Ne vždy je ale možné osu souměrnosti takto výhodně umístit do souřadnicové osy. Proto si odvodíme rovnice osové souměrnosti s obecně umístěnou osou.

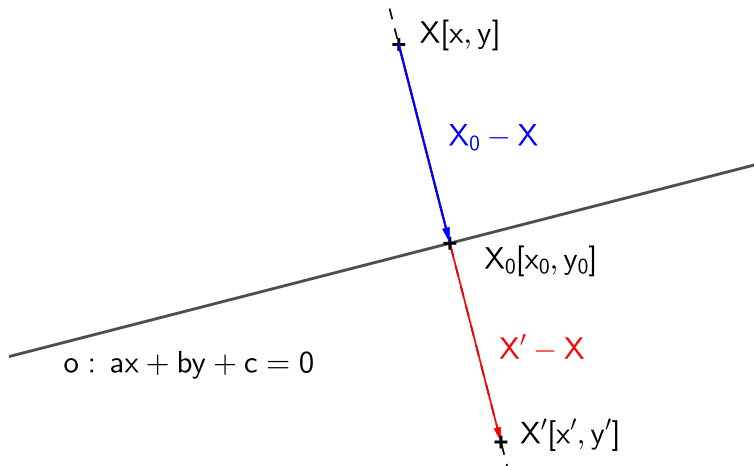
Osová souměrnost podle osy o dané rovnicí $o : ax + by + c = 0$

Dle Obr. 34 je zřejmé, že vektor $X' - X$ je dvojnásobkem vektoru $X_0 - X$ a vektor $X_0 - X$ je (stejně jako $X' - X$) kolmý k ose o , tj. je k -násobkem ($k \in \mathbb{R}$) jejího normálového vektoru $\vec{n} = (a, b)$. Tyto skutečnosti zapíšeme rovnostmi

$$X' - X = 2(X_0 - X), \quad (43)$$

$$X_0 - X = k(a, b), \quad (44)$$

kde pro souřadnice uvedených bodů platí $X[x, y]$, $X'[x', y']$ a $X_0[x_0, y_0]$. Protože $X_0 \in o$, musí jeho souřadnice x_0, y_0 splňovat obecnou rovnici osy $o : ax + by + c = 0$. Souřadnice bodu X_0 proto z (44) vyjádříme jako $x_0 = x + ka$, $y_0 = y + kb$ a dosadíme



Obrázek 34: Odvození rovnic osové souměrnosti $O(o)$

do obecné rovnice osy o : $a(x + ka) + b(y + kb) + c = 0$. Odtud potom vyjádříme parametr $k = -\frac{ax + by + c}{a^2 + b^2}$, který dosadíme do rovnice

$$X' - X = 2k(a, b).$$

Po úpravě a rozepsání po složkách dostáváme rovnice osové souměrnosti $O(o)$:

$$\begin{aligned} x' &= x - \frac{2a}{a^2 + b^2} (ax + by + c), \\ y' &= y - \frac{2b}{a^2 + b^2} (ax + by + c). \end{aligned} \quad (45)$$

PŘÍKLAD 5.19. V eukleidovské rovině je dána souměrnost podle přímky $p : 3x - 4y + 1 = 0$. Napište rovnice této souměrnosti.

Řešení: Z obecné rovnice osy $3x - 4y + 1 = 0$ si vyjádříme $a = 3$, $b = -4$ a $c = 1$.

Potom výrazy $\frac{2a}{a^2 + b^2}$, $\frac{2b}{a^2 + b^2}$ figurující v rovnicích osové souměrnosti mají hodnoty $\frac{2a}{a^2 + b^2} = \frac{6}{25}$ a $\frac{2b}{a^2 + b^2} = \frac{-8}{25}$. Hledané rovnice potom vypadají takto

$$\begin{aligned} x' &= x - \frac{6}{25} (3x - 4y + 1), \\ y' &= y + \frac{8}{25} (3x - 4y + 1). \end{aligned}$$

Po úpravě dostáváme konečnou podobu rovnic

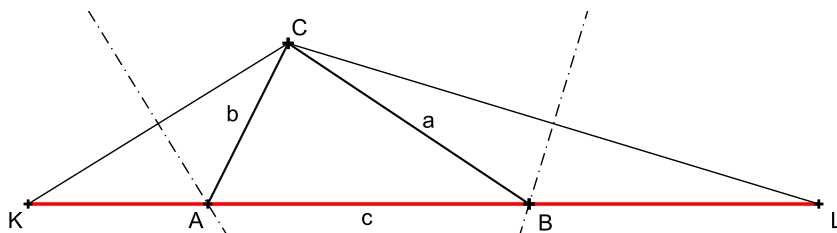
$$\begin{aligned} x' &= \frac{7}{25}x + \frac{24}{25}y - \frac{6}{25}, \\ y' &= \frac{24}{25}x - \frac{7}{25}y + \frac{8}{25}. \end{aligned}$$

5.7 Cvičení: Osová souměrnost

1. Napište rovnice souměrnosti podle přímky $o : 2x - 3y + 1 = 0$.

2. Sestrojte trojúhelník ABC , je-li dán obvod $o = 12\text{ cm}$ a úhly $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 45^\circ$.

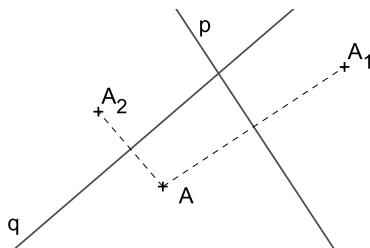
Nápověda: Viz Obr. 35.



Obrázek 35: Sestrojte trojúhelník, znáte-li jeho obvod a vnitřní úhly

3. Jsou dány dvě různoběžky p , q a bod A mimo ně. Najděte body $B \in p$, $C \in q$ tak, aby obvod trojúhelníku ABC byl minimální.

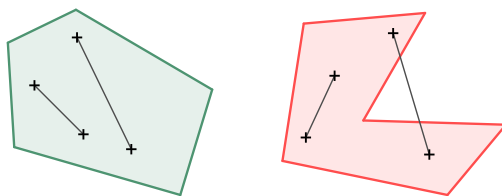
Nápověda: Viz Obr. 36.



Obrázek 36: Sestrojte trojúhelník δABC ; $B \in p$, $C \in q$, minimálního obvodu

4. Sestrojte konvexní čtyřúhelník $ABCD$ se stranami dané velikosti, je-li polopřímka $\mapsto AC$ osou vnitřního úhlu při vrcholu A .

Poznámka (*Konvexní* a *nekonvexní* (*konkávní*) útvar¹¹). Útvar (množina bodů) je



Obrázek 37: Konvexní útvar (vlevo) a nekonvexní, též konkávní, útvar (vpravo)

¹¹Pro konvexní mnohoúhelníky viz též *Wikipedia: Convex polygon*

konvexní, jestliže pro každé dva jeho body je úsečka, která je spojuje, jeho podmnožinou, viz Obr. 37, vlevo. *Nekonvexní*, též *konkávní*, je potom útvar, v němž se nacházejí takové body, že jejich spojnice není jeho podmnožinou, tj. nenáleží mu celá, viz Obr. 37, vpravo.

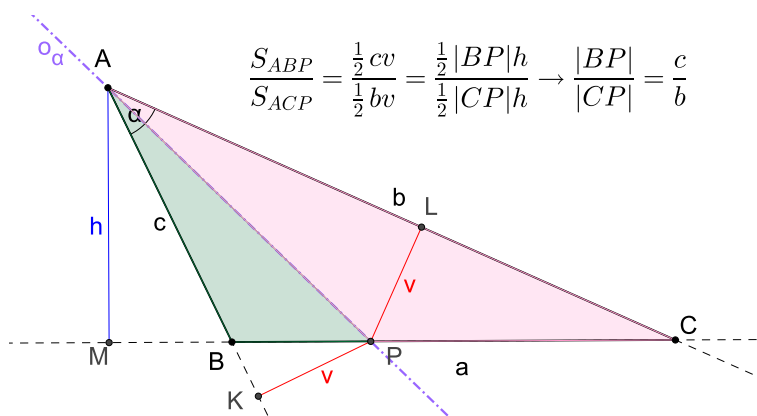
5. Sestrojte čtverec $ABCD$, je-li dáno $a + e = 10 \text{ cm}$.

6. Sestrojte obdélník $ABCD$, je-li dáno $e = 7 \text{ cm}$, $a - b = 1 \text{ cm}$.

7. Sestrojte lichoběžník $ABCD$ ($AB \parallel CD$), je-li dáno $b = 3 \text{ cm}$, $c = 2.5 \text{ cm}$, $d = 2.6 \text{ cm}$, $\alpha - \beta = 20^\circ$.

8. Dokažte větu: „V každém trojúhelníku dělí osa libovolného vnitřního úhlu protější stranu v poměru stran přilehlých.“

Nápověda: Viz Obr. 38.



Obrázek 38: Osa úhlu α rozděljuje stranu BC průsečíkem P na dvě části s poměrem délek $\frac{BP}{CP} = \frac{c}{b}$

9. Dokažte Vivianiho větu.

Věta 4 (Vivianiho věta). *V rovnostranném trojúhelníku je hodnota součtu vzdáleností libovolného bodu od stran trojúhelníku konstantní, nezávislá na poloze bodu.*

Nápověda: Řešili jsme na semináři.

Další zdroje viz např. <https://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/Viviani.shtml> nebo <https://mathworld.wolfram.com/VivianisTheorem.html>. Dynamické důkazy Vivianiho věty najdete v GeoGebra knize *Dynamické důkazy*. Některý z nich můžete vzít jako základ svého řešení, pokud ho náležitě zobrazíte, klidně i „staticky“, a okomentujete.

Osová souměrnost – Příklady pro dobrovolné řešení

10. Řešte Fagnanův problém:

„Danému ostroúhlému trojúhelníku vepište trojúhelník o nejmenším obvodu.“

Nápověda: Viz např. <https://www.cut-the-knot.org/triangle/Fagnano.shtml> nebo <https://mathworld.wolfram.com/FagnanosProblem.html>.

11. Proveďte následující tzv. Mascheroniovu konstrukci¹:

„Je dána kružnice $k(S; r)$; dále je dána dvěma body A, B (body neleží na kružnici) její sečna p , která neprochází středem S . Sestrojte průsečíky přímky p s kružnicí k , aniž přitom použijete pravítka.“

12. Dokažte následující vlastnost průsečíku výšek (ortocentra) trojúhelníku:

„Body souměrně sdružené s průsečíkem výšek podle stran trojúhelníka, leží na kružnici trojúhelníku opsané.“

Nápověda: Řešili jsme v semináři, další informace viz např.

<https://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/AltitudeAndCircumcircle.shtml>

13. Napište rovnice osové souměrnosti, zobrazující počátek na bod $[1, 5]$.

14. Je dána přímka p a dvě kružnice k_1, k_2 oddělené přímkou p . Sestrojte rovnostranný trojúhelník tak, aby na každé z kružnic k_1, k_2 byl jeden vrchol a jedna z výšek ležela na přímce p .

15. Jsou dány tři různé přímky p_1, p_2, p_3 , procházející bodem S ; na přímce p_1 je dán bod $A \neq S$. Sestrojte trojúhelník ABC , jehož osy vnitřních úhlů leží v přímkách p_1, p_2, p_3 .

16. Jsou dány tři přímky o_1, o_2, o_3 procházející bodem O . Na o_1 dán bod A_1 . Sestrojte $\triangle ABC$ tak, aby o_1, o_2, o_3 byly osami jeho stran a bod A_1 středem strany BC .

17. Jsou dány body X, Y a přímka p , která je odděluje. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC , jehož hlavním vrcholem je bod C , osou souměrnosti přímka p a jehož ramena mají danou velikost a . Přímka AC nechť prochází bodem X a přímka BC bodem Y .

18. Je dána přímka p a body A, B ležící ve stejné polorovině s hraniční přímkou p . Sestrojte bod $X \in p$ tak, aby $|\angle AXp| = 2|\angle BXp|$.

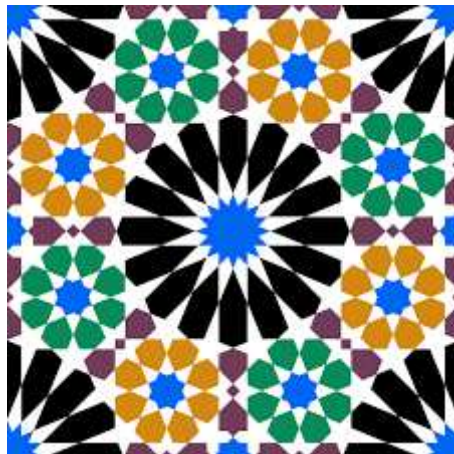
¹Lorenzo Mascheroni (italský matematik, 1750–1800) dokázal ve své knize *Geometria del Compasso* (1797), že každá konstrukce realizovatelná užitím kružítko a pravítka bez měřítka se dá provést pouze pomocí kružítko. Proto se takovým konstrukcím říká Mascheroniovu konstrukce. Nutno však uvést, že důkaz téhož tvrzení publikoval více než sto let před Mascheronim dánský matematik *Georg Mohr*.

19. Jsou dány body A, B, C a přímka p kolmá k přímce AB tak, že prochází bodem C a body A, B leží v téže polorovině určené přímkou p . Sestrojte na přímce p takový bod X , aby z něho byla vidět úsečka AB pod stejným úhlem jako úsečka BC .

20. Obrazy středu S kružnice opsané trojúhelníku ABC v osových souměrnostech podle přímk BC, AC, AB jsou vrcholy trojúhelníku $A_1B_1C_1$. Dokažte, že je tento trojúhelník shodný s trojúhelníkem ABC .

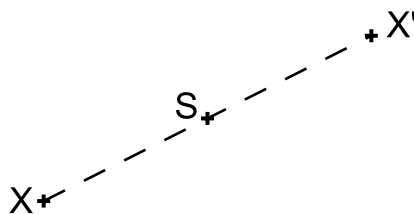
5.8 Středová souměrnost

Středová souměrnost je určena bodem, kterému říkáme *střed souměrnosti*. Středovou souměrnost se středem S značíme $\mathcal{S}(S)$. Jedná se o *přímou shodnost*. Střed S je jejím jediným *samodružným bodem*. Středová souměrnost je *involutorním zobrazením* (*involucí*), viz str. 49.



Obrázek 39: Středová symetrie; Alhambra, kachel (<https://openclipart.org/detail/224123/alhambra-tile>)

Definice 19. Středová souměrnost se středem S je shodné zobrazení, které bodu S přiřazuje týž bod S (jedná se o samodružný bod) a libovolnému bodu $X \neq S$ přiřazuje bod X' tak, že bod S je středem úsečky XX' . Zobrazení značíme $\mathcal{S}(S)$.

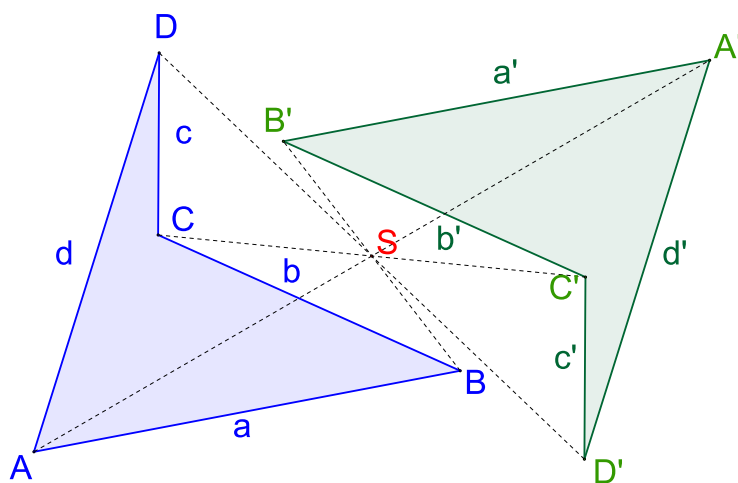


Obrázek 40: Středová souměrnost $\mathcal{S}(S)$

Poznámka. Středová souměrnost je jednoznačně určena svým středem. Můžeme ji chápat též jako speciální případ otočení (rotace) $\mathcal{R}(S, \alpha)$ pro $\alpha = 180^\circ$, tj. $\mathcal{S}(S) = \mathcal{R}(S, 180^\circ)$. Otočení je věnována kapitola 5.10, viz str. 64.

Samodružné body, přímky a směry středové souměrnosti

Středová souměrnost má *jediný samodružný bod*, střed S . Samodružné jsou v ní *všechny směry*, tj. obrazem každé přímky je přímka s ní rovnoběžná, viz Obr. 41. *Samodružnou přímkou* středové souměrnosti, tj. přímkou, která se zobrazuje sama na sebe, je každá přímka, která prochází středem S .



Obrázek 41: Čtyřúhelník $ABCD$ a jeho obraz $A'B'C'D'$ ve středové souměrnosti $\mathcal{S}(S)$

Analytické vyjádření středové souměrnosti $\mathcal{S}(S)$ v rovině

Hledáme rovnice, které popisují vztah souřadnic obrazu $X'[x', y']$ k souřadnicím vzoru $X[x, y]$ ve středové souměrnosti se středem $S[s_1, s_2]$. K rychlému nalezení těchto rovnic postačí zvolit správný úhel pohledu. Příslušnou konfiguraci těchto bodů, viz např. Obr. 40, totiž můžeme chápat tak, že S je středem úsečky XX' . Potom ale $S = \frac{X + X'}{2}$ ¹², po úpravě a po dosazení souřadnic dostáváme postupně

$$X' = -X + 2S, \quad (46)$$

$$[x', y'] = -[x, y] + 2[s_1, s_2]. \quad (47)$$

Po rozepsání po složkách tak získáme požadované rovnice analytického vyjádření středové souměrnosti $\mathcal{S}(S)$ se středem $S[s_1, s_2]$:

$$\begin{aligned} x' &= -x + 2s_1, \\ y' &= -y + 2s_2. \end{aligned} \quad (48)$$

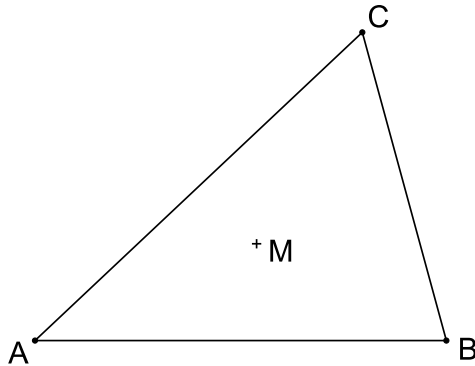
¹²Ke stejnému výsledku se dostaneme použitím vektorů, bez znalosti vztahu pro výpočet souřadnic středu úsečky (vlastně si ho pomocí vektorů odvodíme). Vyjdeme z Obr. 40. Uvažujme vektory $\vec{u} = X' - X$ a $\vec{v} = S - X$. Potom je zřejmé, že $\vec{u} = 2\vec{v}$, tj. $X' - X = 2(S - X)$, po úpravě $X' - X = 2S - 2X$ a nakonec $X' + X = 2S$. Z posledního vztahu již jasně plyne, že $S = \frac{X + X'}{2}$.

PŘÍKLAD 5.20. Určete rovnice středové souměrnosti $\mathcal{S}(R)$ pro $R \left[-2, \frac{3}{4} \right]$.

Řešení: Do rovnic (48) dosadíme za s_1, s_2 v daném pořadí souřadnice $-2, \frac{3}{4}$ bodu R :

$$\begin{aligned}x' &= -x - 4, \\y' &= -y + \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

PŘÍKLAD 5.21. Je dán trojúhelník ABC a jeho vnitřní bod M , viz Obr. 42. Sestrojte všechny úsečky XY se středem M a s krajními body X, Y na hranici trojúhelníku.

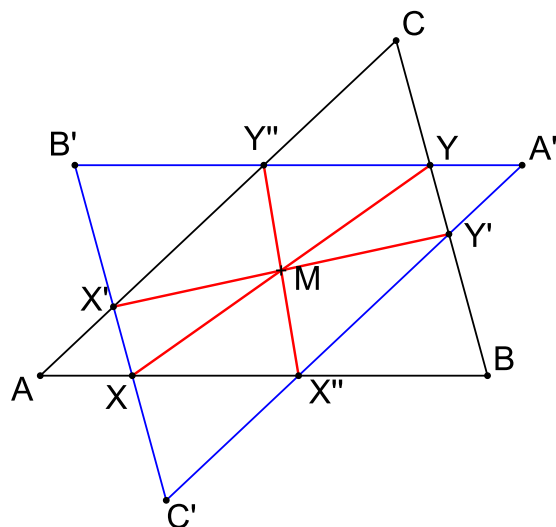


Obrázek 42: Zadání příkladu 5.21

Řešení: Viz Obr. 43. Úsečku, jejíž krajní body leží na hranici trojúhelníku, nazýváme *příčkou trojúhelníku*¹³. Má-li být bod M středem hledané příčky XY , jsou body X a Y ve vztahu vzor–obraz středové souměrnosti $\mathcal{S}(M)$. Jednou z vlastností afinních zobrazení je *zachování incidence*¹⁴. Pokud bod X , jako jeden z krajních bodů hledané příčky, náleží hranici trojúhelníku ΔABC , potom bod Y , jako druhý krajní bod té příčky a zároveň obraz bodu X ve středové souměrnosti $\mathcal{S}(M)$, náleží hranici trojúhelníku $\Delta A'B'C'$, který je obrazem ΔABC . Zároveň však bod Y jako druhý krajní bod hledané příčky náleží i hranici ΔABC . Patří tedy průniku hranic trojúhelníků ΔABC a $\Delta A'B'C'$. Postup řešení je tak zřejmý z Obr. 43. Trojúhelník ΔABC zobrazíme v $\mathcal{S}(M)$ na trojúhelník $\Delta A'B'C'$. Krajní body hledaných příček pak náleží průniku hranic těchto dvou trojúhelníků. Vidíme, že pro danou polohu bodu M má úloha tři řešení. Může mít pro jiné polohy M jiné počty řešení?

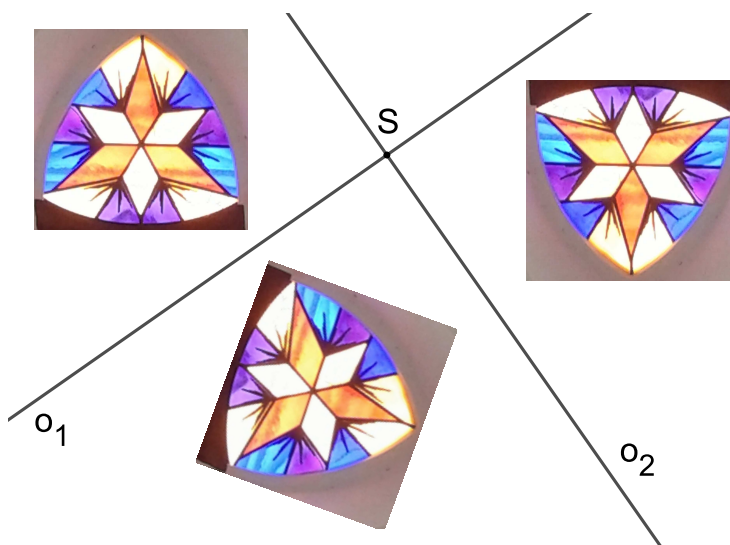
¹³Známe např. *střední příčky* trojúhelníku, které spojují středy jeho stran.

¹⁴Pojem *incidence* můžeme přeložit jako *náležení*. Potom zachování incidence v nějakém zobrazení znamená, že



Obrázek 43: Řešení příkladu 5.21

Nyní se budeme věnovat souvislosti středové souměrnosti s osovou souměrností. Podívejme se na Obr. 44. Vidíme na něm obrázek vitrážového okna¹⁵ ve třech polohách



Obrázek 44: Složení dvou osových souměrností s kolnými osami

vůči dvěma na sebe kolným osám o_1 a o_2 . Dvě dvojice oken jsou postupně ve vztahu vzor a obraz v osových souměrnostech podle os o_1 a o_2 (jdeme-li v kladném smyslu, tj. proti směru pohybu hodinových ručiček, můžeme říci, že první okno se zobrazí na druhé v $\mathcal{O}(o_1)$ a druhé okno na třetí v $\mathcal{O}(o_2)$), jedna dvojice je pak ve vztahu vzor a obraz ve středové souměrnosti podle středu S , průsečíku uvedených os (jedná se o první a třetí okno, tj. první okno se zobrazí v $\mathcal{S}(S)$ na třetí okno). Jedná se

pokud nějaký bod náleží určitému útvaru, např. bod X náleží úsečce AB , potom obraz tohoto bodu náleží obrazu toho obrazce, obojí v tom předmětném zobrazení, tj. v našem příkladě bod X' jako obraz bodu X náleží úsečce $A'B'$, která je obrazem úsečky AB .

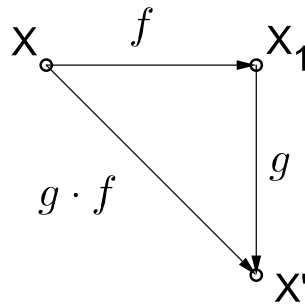
¹⁵Kostel sv. Jana Nepomuckého, Zelená hora u Žďáru nad Sázavou

o ilustraci toho, že středová souměrnost se dá „vytvořit“ složením dvou osových souměrností se vzájemně kolmými osami.

5.8.1 Skládání zobrazení

Abychom završili své zkoumání věnované skládání osových souměrností v souladu s metodou budování matematické teorie, musíme si řádně definovat operaci *skládání zobrazení*. Zde se zabýváme konkrétně skládáním *geometrických zobrazení*, z matematické analýzy ale známe i skládání funkcí.

Definice 20 (Skládání zobrazení). *Nechť f, g jsou dvě zobrazení, viz Obr. 45. Jestliže bod X_1 je obrazem bodu X v zobrazení f (tj. $X_1 = f(X)$) a bod X' je obrazem bodu X_1 v zobrazení g (tj. $X' = g(X_1)$), potom je každému bodu X přiřazen bod $X' = g(f(X))$. Tím je definováno zobrazení h přiřazující bodu X bod $X' = g(f(X))$ o kterém říkáme, že vzniklo složením zobrazení f a g . Zapisujeme $h = g \cdot f$, $h = gf$, $h = g \circ f$ nebo $h = g(f(X))$.*

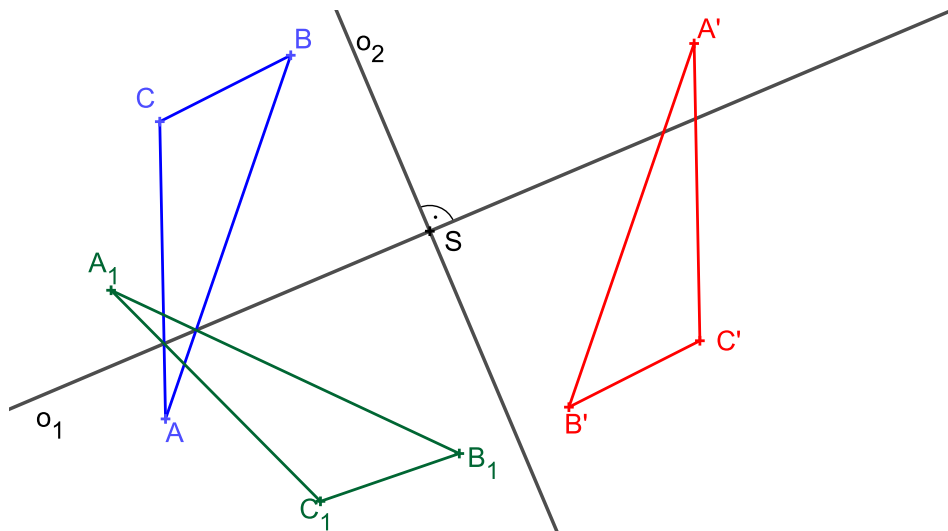


Obrázek 45: Skládání zobrazení f a g

5.8.2 Středová souměrnost jako složené zobrazení

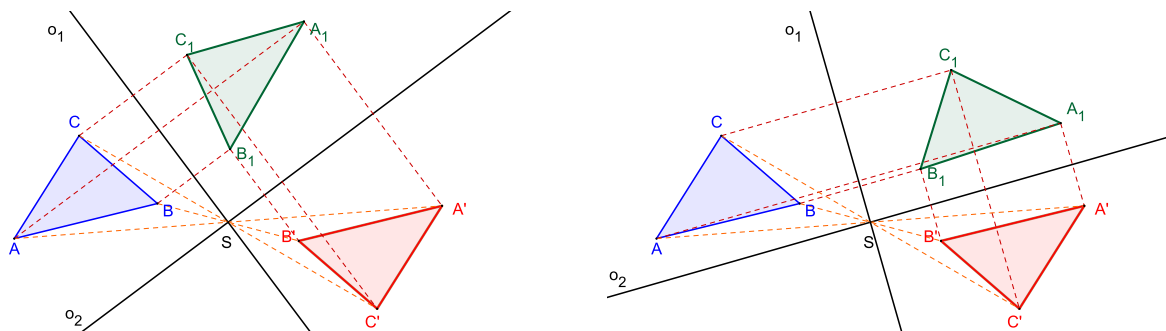
To, co můžeme pozorovat na konkrétních příkladech, viz Obr.45 a 46, nyní zformulujeme jako obecnou vlastnost středové souměrnosti.

Obsah definice 20 je ilustrován Obr. 46, analogií obrázku s okny, která jsou tentokrát nahrazena trojúhelníky. Opět se tedy jedná o skládání dvou osových souměrností se vzájemně kolmými osami. Zobrazení f je reprezentováno osovou souměrností $\mathcal{O}(o_1)$, zobrazení g je reprezentováno osovou souměrností $\mathcal{O}(o_2)$ a jejich složením $g \circ f$ je potom středová souměrnost $\mathcal{S}(S)$.



Obrázek 46: $f : \Delta ABC \rightarrow \Delta A_1B_1C_1$, $g : \Delta A_1B_1C_1 \rightarrow \Delta A'B'C'$, $g \circ f : \Delta ABC \rightarrow \Delta A'B'C'$

Můžeme říci, že každá *středová souměrnost* vznikne *složením* libovolných dvou osových souměrností, jejichž osy jsou k sobě kolmé. Střed souměrnosti S odpovídá průsečíku těchto os. A naopak, středovou souměrnost lze *rozložit* na dvě osové souměrnosti, jejichž osy jsou navzájem kolmé a procházejí středem souměrnosti S . Přitom jedna z os (první, kterou budeme rýsovat) je volitelná, druhá je potom na ní kolmá v bodě, který je středem dané středové souměrnosti. Na Obr. 47 (interaktivní varianta je dostupná na adrese <https://www.geogebra.org/m/hekv2tye>) vidíme jednu středovou souměrnost $\mathcal{S}(S)$, ve které se ΔABC zobrazuje na $\Delta A'B'C'$, rozloženou na dvě osové souměrnosti dvěma různými způsoby. Jediné, co je třeba při takovém rozkladu dodržet je to, aby osy procházely středem S a byly na sebe kolmé.



Obrázek 47: Rozklad středové souměrnosti $\mathcal{S}(S)$ je dán pouze polohou S a kolmostí os

Jak se budeme seznamovat s dalšími shodnostmi v rovině, ukážeme si, že každá z nich se dá složit z osových souměrností. O tom, kolik jich k tomu nejvýše potřebujeme, hovoří následující věta 5. K jejímu důkazu se vrátíme později.

Věta 5. *Každá shodnost v rovině se dá složit z nejvýše tří osových souměrností.*

5.9 Cvičení: Středová souměrnost

1. Napište rovnice středové souměrnosti v rovině se středem $S[-3, 4]$.
2. Je dána kružnice $k(S, r)$. Bodem P , který leží vně kružnice k , vedte přímku p , která protíná kružnici v bodech A, B tak, že A je středem úsečky BP .
3. Je dán úhel AVB a bod S jeho vnitřku. Sestrojte na rameni VA bod X a na rameni VB bod Y tak, aby bod S byl středem úsečky XY .
4. Je dána úsečka AA_1 ($|AA_1| = 5\text{cm}$). Sestrojte všechny trojúhelníky ABC , pro které je AA_1 těžnicí t_a a pro které platí: $c = 4\text{cm}, b = 7\text{cm}$.
5. Je dána úsečka AA_1 ($|AA_1| = 5\text{cm}$). Sestrojte všechny trojúhelníky ABC , pro které je AA_1 těžnicí t_a a pro které platí: $\gamma = 45^\circ, \beta = 60^\circ$.
6. Jsou dány dvě kružnice k_1, k_2 , které se protínají ve dvou bodech Q a R . Bodem Q vedte přímku, která vytíná na obou kružnicích tětivy stejné délky.

Středová souměrnost – Příklady pro dobrovolné řešení

7. Napište rovnice shodnosti roviny E_2 , která vznikne složením tří osových souměrností s osami o rovnicích: $x = 0, y = 0, x - 2y = 0$.
8. Je dána kružnice $k(O; r)$ a přímka p , která má od středu O vzdálenost $v > 0$; dále je dán bod S , který leží uvnitř poloroviny pO . Sestrojte úsečku se středem S , která má krajní body K, P po řadě na kružnici k a na přímce p .
9. Je dán trojúhelník ABC a jeho vnitřní bod M . Sestrojte všechny úsečky XY se středem M a s krajními body X, Y na hranici trojúhelníku.
10. Vepište danému rovnoběžníku $ABCD$ čtverec $XYUV$ tak, aby na každé straně rovnoběžníku ležel jeden vrchol čtverce.
11. Je dán úhel AVB a bod S jeho vnitřku. Sestrojte na rameni VA bod X a na rameni VB bod Y tak, aby $XY S$ byl rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník s přeponou XY .
12. Je dána úsečka AA_1 ; $|AA_1| = 4.5\text{cm}$. Sestrojte všechny pravoúhlé trojúhelníky ABC s pravým úhlem při vrcholu C , v nichž AA_1 je těžnicí t_a a $t_b = 6\text{cm}$.

5.10 Otočení

Otočení (též *rotace*) je určeno bodem, *středem otočení*, a orientovaným úhlem, *úhlem otočení*. Otočení se středem S a úhlem α značíme $\mathcal{R}(S, \alpha)$. Jedná se o *přímou shodnost*. Střed S je jejím jediným *samodružným bodem*. *Samodružné směry* nemá. Středová souměrnost není *involutorním zobrazením*, viz str. 49.



Obrázek 48: Rotační symetrie

Orientovaný úhel

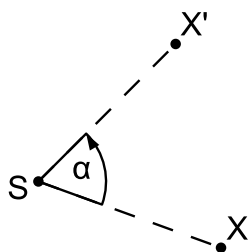
V definici otočení pracujeme s pojmem *orientovaný úhel*. Jedná se o úhel, který není dán jenom svou velikostí, ale také smyslem nanášení, zda *proti* nebo *ve směru pohybu hodinových ručiček*. Z praxe, konkrétně právě ve spojení s otáčením, víme, že tato informace je důležitá, že záleží, v jakém smyslu otáčíme žárovkou, vrutem, dveřmi apod. Orientaci úhlu rozlišujeme znaménkem, otáčení proti směru *pohybu hodinových ručiček* přisuzujeme *kladné znaménko* (+), otáčení ve směru *pohybu hodinových ručiček* přisuzujeme *záporné znaménko* (-). U orientovaného úhlu rozlišujeme mezi *prvním* a *druhým* ramenem. Úhel nanášíme od prvního ramene ve směru daném orientací. Na Obr. 49 vlevo je kladný úhel $\alpha = 65^\circ$, s prvním ramenem \overrightarrow{VA} , vpravo potom záporný úhel $\alpha = -65^\circ$, s prvním ramenem \overrightarrow{VB} .



Obrázek 49: Orientovaný úhel α

Definice 21. *Otočení neboli rotace je zobrazení určené středem S a orientovaným úhlem velikosti α , které bodu S přiřazuje též bod S a libovolnému bodu $X \neq S$ přiřazuje bod X' tak, že $|X'S| = |XS|$ a orientovaný úhel $\angle X'SX'$ má velikost α , viz*

Obr. 50. Zobrazení značíme $\mathcal{R}(S, \alpha)$, bod S se nazývá střed otočení a orientovaný úhel velikosti α je úhel otočení.



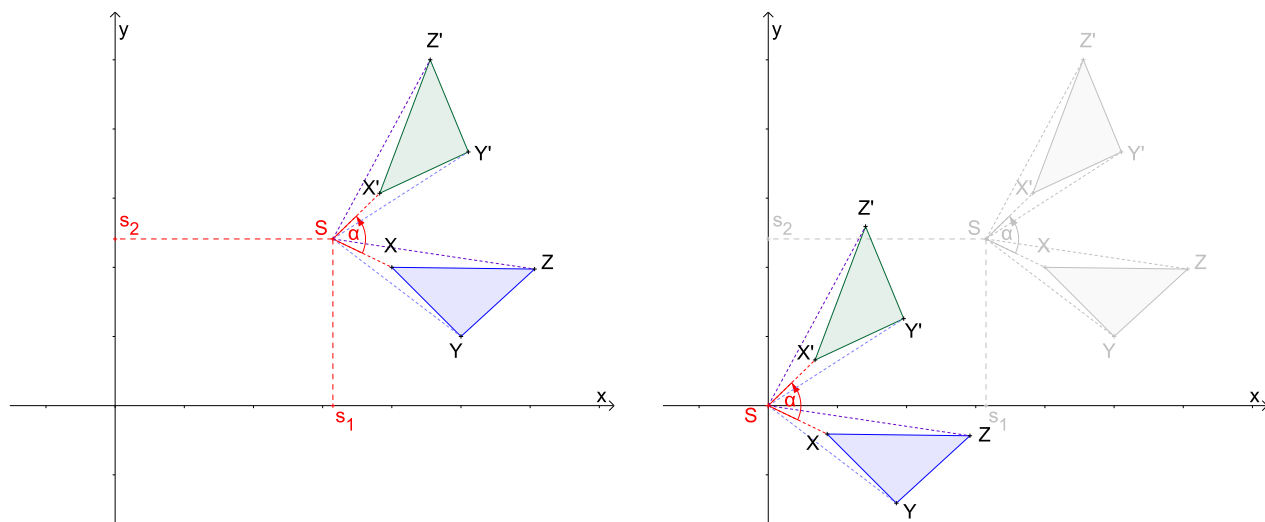
Obrázek 50: Otočení $\mathcal{R}(S, \alpha)$

Samodružné body, přímky a směry otočení

Otočení má *jediný samodružný bod*, střed S . *Samodružné směry* ani *samodružné přímky* nemá.

Analytické vyjádření otočení $\mathcal{R}(S, \alpha)$ v rovině

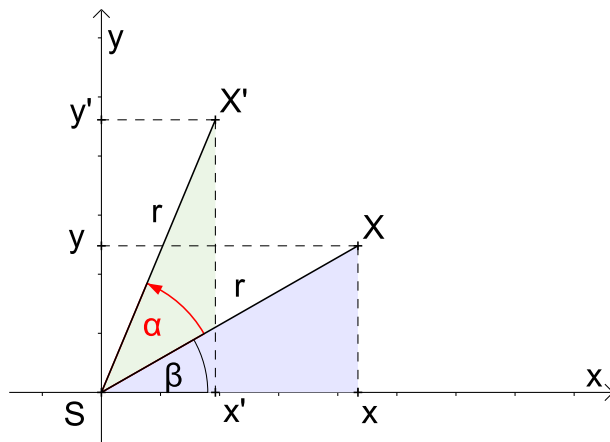
Hledáme vztah mezi souřadnicemi bodu $X[x, y]$ a jeho obrazu $X'[x', y']$ v otočení daném středem $S[s_1, s_2]$ a orientovaným úhlem α , viz Obr. 51. Nejprve se budeme zabývat speciálním případem, kdy je střed otáčení S totožný s počátkem soustavy souřadnice, tj. $S[0, 0]$, který vidíme na Obr. 51 vpravo, potom teprve, s využitím výsledků tohoto jednoduššího případu, odvodíme rovnice otáčení se středem S v obecné poloze, které vidíme na stejném obrázku vlevo.



Obrázek 51: Otočení $\mathcal{R}(S, \alpha)$, vlevo pro $S[s_1, s_2]$, vpravo pro $S[0, 0]$

Rovnice otočení se středem v počátku

Postupujeme podle obrázku 52 (Jak to tak bývá, záměrně volíme pro odvození rovnic ideální konfiguraci bodů v prvním kvadrantu. Nijak tím však nedochází k újmě na obecnosti vztahů, které získáme.). Bod $X[x, y]$ je zobrazen do bodu $X'[x', y']$ v otočení $\mathcal{R}(S[0, 0], \alpha)$. Naším cílem je vyjádřit souřadnice obrazu x', y' pomocí souřadnic vzoru x, y . Využijeme k tomu pravoúhlý trojúhelník $\Delta Sx'X'$, na obrázku



Obrázek 52: Otočení $\mathcal{R}([0, 0], \alpha) : X \rightarrow X'$

zvýrazněný zelenou barvou. Tento trojúhelník má přeponu SX' , jejíž délku označíme r , a odvěsny velikostí x' a y' , vnitřní úhel při vrcholu S má velikost $\alpha + \beta$. Platí

$$\begin{aligned}x' &= r \cos(\alpha + \beta), \\y' &= r \sin(\alpha + \beta).\end{aligned}\tag{49}$$

K úpravě pravých stran rovnic (49) použijeme známé součtové vzorce $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ a $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$. Dostaneme

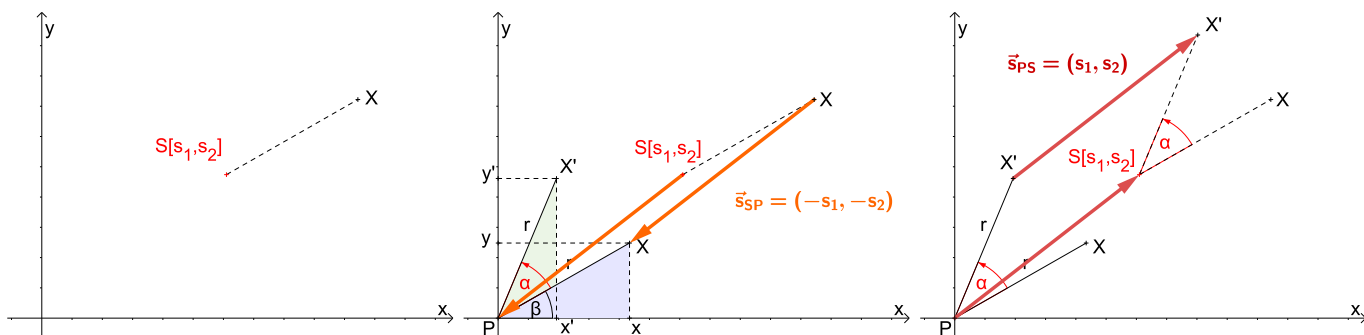
$$\begin{aligned}x' &= r \cos \alpha \cos \beta - r \sin \alpha \sin \beta, \\y' &= r \sin \alpha \cos \beta + r \cos \alpha \sin \beta.\end{aligned}\tag{50}$$

Nyní si všimneme druhého pravoúhlého trojúhelníku ΔSxX na Obr. 52, vybarveného modře. Jeho přepona SX má rovněž délku r (víme, že $|SX'| = |SX|$), odvěsny mají délky x a y a vnitřní úhel při vrcholu S má velikost β (tento úhel je čistě pomocný, jak uvidíme za chvíli, splní svou roli a zmizí). Pro tento trojúhelník platí $x = r \cos \beta$, $y = r \sin \beta$. Při pozorném prozkoumání rovnic (50) si všimneme, že součiny $r \cos \beta$ a $r \sin \beta$ se vyskytují na jejich pravých stranách. Uplatníme proto získané rovnosti a nahradíme tyto součiny odpovídajícími proměnnými x, y , v uvedeném pořadí. Výsledkem je konečná podoba rovnic otočení o úhel α kolem počátku:

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \alpha - y \sin \alpha, \\y' &= x \sin \alpha + y \cos \alpha.\end{aligned}\tag{51}$$

Rovnice otočení se středem mimo počátek

Klíčovým úkonem odvození rovnic otočení se středem mimo počátek je převedení tohoto problému na již vyřešený jednodušší problém odvození rovnic otočení se středem v počátku. Postup je naznačen na Obr. 53. Nejprve celou rovinu posuneme



Obrázek 53: Otočení $\mathcal{R}([s_1, s_2], \alpha) : X \rightarrow X'$

o vektor $\vec{s}_{SP} = (-s_1, -s_2)$, aby se střed otočení dostal do počátku (viz prostřední obrázek). Nově souřadnice středu S jsou proto $[0, 0]$ a nové souřadnice bodu X jsou $[x - s_1, y - s_2]$. Tím jsme úlohu převedli na případ otočení se středem v počátku. Můžeme tak provést otočení bodu X v nové poloze kolem počátku a užitím (51) vyjádřit souřadnice jeho obrazu

$$\begin{aligned} x' &= (x - s_1) \cos \alpha - (y - s_2) \sin \alpha, \\ y' &= (x - s_1) \sin \alpha + (y - s_2) \cos \alpha. \end{aligned} \quad (52)$$

Potom ale musíme rovinu posunout o vektor $\vec{s}_{PS} = (s_1, s_2)$ zpět, aby se střed otáčení dostal do původní polohy (viz pravý krajní obrázek). Souřadnice obrazu se tak zvětší o souřadnice tohoto vektoru. Tím získáváme rovnice *otočení o úhel α se středem $S = [s_1, s_2]$*

$$\begin{aligned} x' &= (x - s_1) \cos \alpha - (y - s_2) \sin \alpha + s_1, \\ y' &= (x - s_1) \sin \alpha + (y - s_2) \cos \alpha + s_2, \end{aligned} \quad (53)$$

po úpravě pak ve tvaru

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \alpha - y \sin \alpha + s_1 - s_1 \cos \alpha + s_2 \sin \alpha, \\ y' &= x \sin \alpha + y \cos \alpha + s_2 - s_1 \sin \alpha - s_2 \cos \alpha. \end{aligned} \quad (54)$$

PŘÍKLAD 5.22. *Napište rovnice otočení*

a) $\mathcal{R}([0, 0], \frac{\pi}{6})$,

b) $\mathcal{R}([2, -3], \frac{\pi}{6})$.

Řešení:

Ad a) Jedná se o otočení kolem počátku, proto dosadíme do (51).

$$\begin{aligned}x' &= \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \\y' &= \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y.\end{aligned}$$

Ad b) Úhel otočení zůstává stejný, ale střed je tentokrát mimo počátek. Dosadíme do (53)

$$\begin{aligned}x' &= (x - 2)\frac{\sqrt{3}}{2} - (y + 3)\frac{1}{2} + 2, \\y' &= (x - 2)\frac{1}{2} + (y + 3)\frac{\sqrt{3}}{2} - 3.\end{aligned}$$

Po úpravě dostáváme výsledné rovnice

$$\begin{aligned}x' &= \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} - \sqrt{3}, \\y' &= \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y - 4 + \frac{3\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

Pojďme si řešení obou úloh vyjádřit maticově:

$$\mathcal{R}([0, 0], \frac{\pi}{6}) : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad (55)$$

$$\mathcal{R}([2, -3], \frac{\pi}{6}) : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \sqrt{3} \\ -4 + \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}. \quad (56)$$

Vidíme, že rovnice (55) a (56) se liší pouze přítomností matice (sloupcového vektoru) posunutí u druhé z nich. Obecně můžeme otočení $\mathcal{R}([s_1, s_2], \alpha)$ zapsat maticově takto

$$\mathcal{R}([s_1, s_2], \alpha) : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_1 - s_1 \cos \alpha + s_2 \sin \alpha \\ s_2 - s_1 \sin \alpha - s_2 \cos \alpha \end{bmatrix}. \quad (57)$$

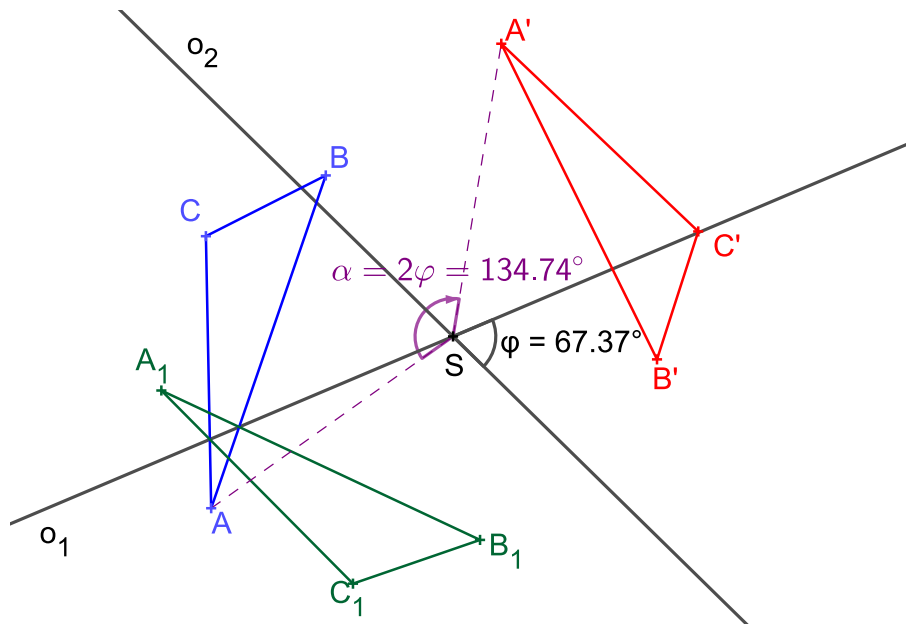
PŘÍKLAD 5.23. Napište rovnice otočení

a) $\mathcal{R}([0, 0], 60^\circ)$,

b) $\mathcal{R}([3, -\frac{1}{2}], 60^\circ)$.

5.10.1 Otočení jako složené zobrazení

V kapitole 5.8.2 na str. 61 jsme se zabývali složením středové souměrnosti ze dvou osových souměrností s osami vzájemně kolmými. Protože středovou souměrnost můžeme interpretovat také jako otočení kolem středu souměrnosti o 180° , nabízí se otázka, zda i otočení o jiný úhel lze získat složením dvou osových souměrností. Ano, lze. Na Obr. 54 je naznačeno, jak lze složením dvou osových souměrností se společným bodem os S a úhlem mezi nimi φ získat rotaci $\mathcal{R}(S, \alpha = 2\varphi)$.

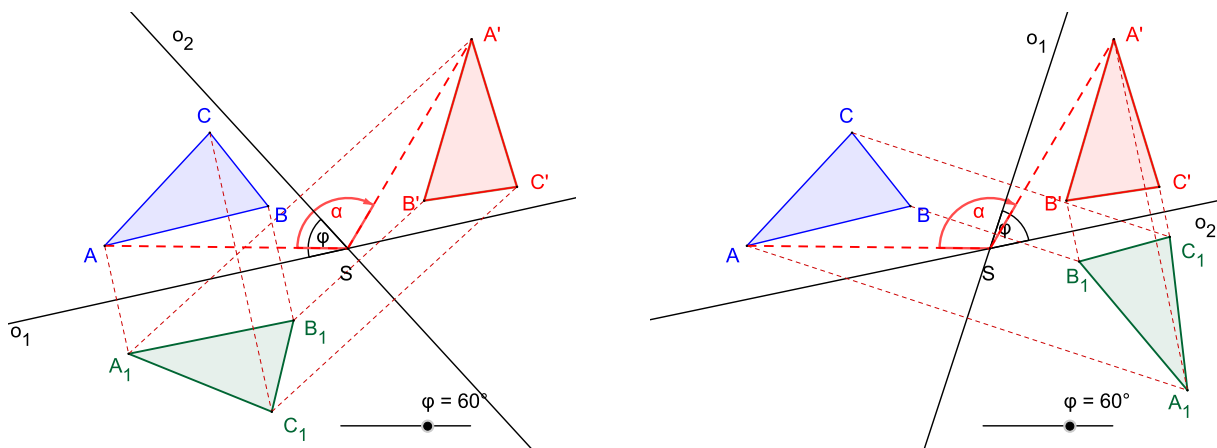


Obrázek 54: $\mathcal{O}(o_1) : \Delta ABC \rightarrow \Delta A_1B_1C_1$, $\mathcal{O}(o_2) : \Delta A_1B_1C_1 \rightarrow \Delta A'B'C'$, $\mathcal{R}(S, \alpha) : \Delta ABC \rightarrow \Delta A'B'C'$

Složením dvou osových souměrností s různoběžnými osami vznikne otočení, jehož středem je průsečík těchto os a úhlem je dvojnásobek úhlu, který svírají.

A naopak, každé otočení lze složit ze dvou osových souměrností, jejichž osy jsou různoběžky procházející středem otočení. Jednu z těchto os lze volit libovolně tak, že prochází středem otočení. Druhá je touto volbou určena jednoznačně. Na Obr. 55 (interaktivní varianta je dostupná na adrese <https://www.geogebra.org/m/sgwnuvjg>) vidíme otočení $\mathcal{R}(S, \alpha)$, ve kterém se ΔABC zobrazuje na $\Delta A'B'C'$, rozložené na dvě osové souměrnosti $\mathcal{O}(o_1)$, $\mathcal{O}(o_2)$ dvěma různými způsoby. Jediné, co je třeba při

takovém rozkladu dodržet je to, aby osy procházely středem S a úhel φ mezi nimi byl roven $\frac{1}{2}\alpha$.

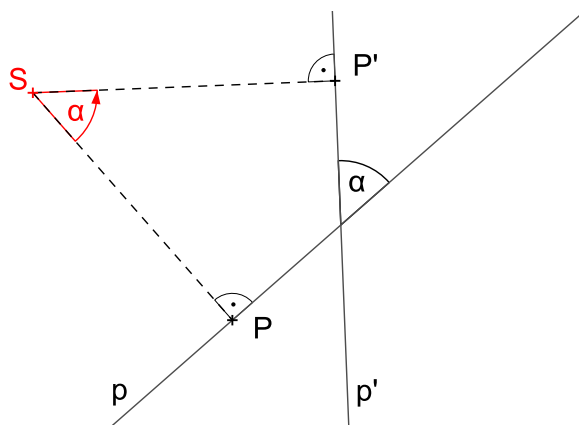


Obrázek 55: Rozklad otočení $\mathcal{R}(S, \alpha)$ je dán pouze polohou S a úhlem os $\varphi = \frac{1}{2}\alpha$

PŘÍKLAD 5.24. *Dokažte následující větu:*

Věta 6. *Otočení se středem S a úhlem velikosti α převádí přímku p v přímku p' různoběžnou s p ; přitom dva vrcholové úhly, které p a p' tvoří, mají velikost α .*

Řešení: Vlastnost popisovaná větou 6 je zachycena na Obr. 56. Při řešení úkolu vyjděte z tohoto obrázku.

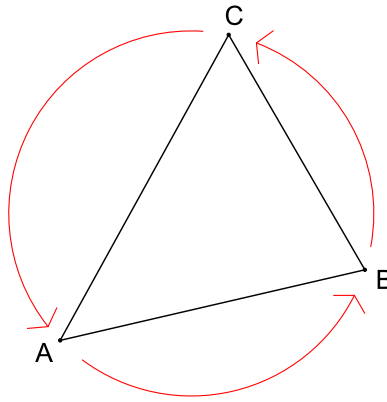


Obrázek 56: Rozklad otočení $\mathcal{R}(S, \alpha)$ je dán pouze polohou S a úhlem os $\varphi = \frac{1}{2}\alpha$

Poznámka. Na Obr. 56 vidíme možný postup při zobrazení přímky p v otočení $\mathcal{R}(S, \alpha)$. Ze středu otočení S spustíme na přímku p kolmici s patou P , tuto patu zobrazíme v daném otočení a jejím obrazem P' vedeme kolmici na úsečku SP' . Tato kolmice p' je obrazem přímky p v daném otočení. Další možný způsob zobrazení přímky je založen na zobrazení jejích dvou libovolných bodů, řekněme A a B . Přímka určená jejich obrazy A' , B' je potom obrazem dané přímky.

PŘÍKLAD 5.25. *Afinní zobrazení eukleidovské roviny na sebe zobrazuje vrchol A trojúhelníku ABC na bod B , bod B na bod C a bod C na bod A . Může to být zobrazení shodné? Jestliže ano, napište jeho rovnice vzhledem k vhodně zvolené kartézské soustavě souřadnic.*

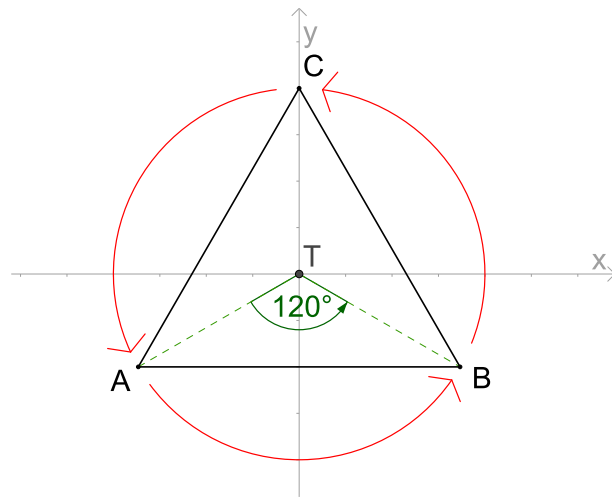
Řešení: Viz Obr. 57. Trojúhelník $\triangle ABC$ se zobrazuje sám na sebe, vrchol a strana



Obrázek 57: Existuje takové f , že $f : A \rightarrow B, B \rightarrow C, C \rightarrow A$?

vždy na vrchol a stranu následující. Nemůže se proto měnit jeho tvar. Navíc, aby se mohly sousední strany s různými poměry délek na sebe zobrazovat, zřejmě platí $|AB| = |BC|, |BC| = |CA|, |CA| = |AB|$.

Trojúhelník $\triangle ABC$ je proto rovnostranný a hledaným zobrazením je otočení kolem jeho těžiště o úhel 120° , viz Obr. 58 (Jak víme, jedná se o projev rotační symetrie rovnostranného trojúhelníku). Napište rovnice této shodnosti!



Obrázek 58: Rovnostranný trojúhelník se v otočení $\mathcal{R}(T, 120^\circ)$ zobrazí sám na sebe.

5.11 Cvičení: Otočení

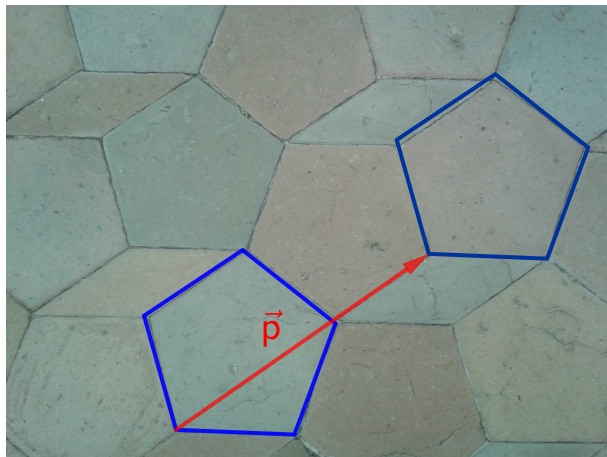
1. Najděte souřadnice obrazu bodu $B = [1, 2]$ v otočení v E_2 kolem středu $S = [3, -4]$ o úhel $\alpha = 420^\circ$. Napište rovnice této shodnosti.
2. Rotace kolem bodu $S = [2; 1]$ v E_2 zobrazuje bod $A = [1; 1]$ na bod A' . Najděte souřadnice bodu A' , jestliže pro úhel rotace α platí $\alpha = \frac{2}{3}\pi$.
3. Najděte souřadnice středu a úhel rotace, která je dána rovnicemi: $x' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 1$, $y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 2$.
4. Jsou dány dvě shodné úsečky AB, CD . Určete otočení, které zobrazí A na C a B na D .
5. Je dána kružnice $k(S; r)$ a bod $P \neq S$. Bodem P veďte přímku, na které kružnice vytíná úsečku dané velikosti d .
6. Jsou dány různé rovnoběžné přímky a, b, c a bod A , který leží na přímce a . Sestrojte všechny rovnostranné trojúhelníky ABC , jejichž vrcholy B, C leží po řadě na přímkách b, c .

Otočení - Příklady pro dobrovolné řešení

7. Najděte rovnice obrazu přímky p v rotaci v E_2 kolem středu $S = [-2; 1]$ o úhel $\alpha = \frac{\pi}{6}$, jestliže $p : x - y + 1 = 0$.
8. Je dána kružnice $k(S; r)$, bod B a úsečka délky d ($d < 2r$). Sestrojte tětivu XY kružnice k délky d tak, aby byla vidět z bodu B pod úhlem 60° .
9. Jsou dány dvě rovnoběžné přímky a, b a mimo ně bod C . Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC tak, aby jeho vrcholy A, B ležely po řadě na přímkách a, b .
10. Jsou dány kružnice k , přímka p a bod A ležící vně k . Sestrojte rovnostranný trojúhelník s vrcholem v bodě A tak, aby zbývající vrcholy ležely na k a na p .
11. Je dána kružnice $k(S; 3\text{cm})$ a bod A ($|SA| = 1.5\text{cm}$). Sestrojte všechny tětivy XY kružnice k o délce 5.5cm , které procházejí bodem A .
12. Při odvalování kružnice po přímce se body soustavy spojené s kružnicí pohybují po trajektoriích, kterým se říká **cykloidy**. Rozlišujeme tři typy cykloid, v závislosti na tom, zda bod leží vně, na nebo uvnitř kružnice. Zobraďte tyto křivky pomocí programu GeoGebra.

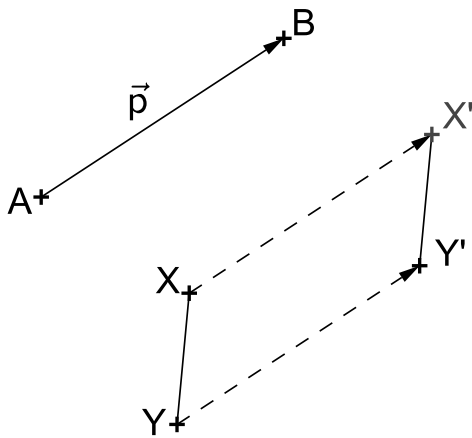
5.12 Posunutí (Translace)

Posunutí (též *translace*) je určeno směrem a velikostí (tj. kam a jak daleko rovinu posuneme). Oba tyto údaje se dají vyjádřit jedním vektorem, *vektorem posunutí*. Posunutí s vektorem posunutí \vec{p} značíme $\mathcal{T}(\vec{p})$. Pokud je posunutí dáno orientovanou úsečkou \overrightarrow{AB} , s počátečním bodem A a koncovým bodem B , značíme ho $\mathcal{T}(\overrightarrow{AB})$. Posunutí je *přímou shodností*. Nemá žádný samodružný bod (všechny body se posunou), ale má *samodružné všechny směry* (přímka se posunutím zobrazí na přímku s ní rovnoběžnou). Posunutí není *involutorním zobrazením*, viz str. 49.



Obrázek 59: Posunutí $\mathcal{T}(\vec{p})$

Definice 22 (Posunutí). *Posunutí (též translace) je zobrazení, které každému bodu X roviny přiřazuje bod X' tak, že platí $\overrightarrow{XX'} = \vec{p}$, tj. $X' = X + \vec{p}$, kde \vec{p} , vektor posunutí, je vektor vyjadřující směr a velikost posunutí, který je určen orientovanou úsečkou \overrightarrow{AB} , tj. platí $\vec{p} = B - A$, viz Obr. 60. Zobrazení značíme $\mathcal{T}(\vec{p})$.*



Obrázek 60: Posunutí $\mathcal{T}(\vec{p})$

Samodružné body, směry a přímky posunutí

Posunutí (translace) nemá žádný samodružný bod a zobrazuje přímku do přímky s ní rovnoběžné, tj. má všechny směry samodružné. Samodružnými přímkami, tj. přímkami, které se posunutím zobrazí samy na sebe, jsou přímky rovnoběžné se směrem posunutí.

Analytické vyjádření posunutí $\mathcal{T}(\vec{p})$ v rovině

Pro $\mathcal{T} : X \rightarrow X'$, kde $\vec{p} = (p_1, p_2)$ je nalezení rovnic, které popisují vztah mezi souřadnicemi vzoru $X[x, y]$ a jeho obrazu $X'[x', y']$ velmi jednoduché. Jak je uvedeno v definici 22 a jak je vidět z Obr. 61, pro vzor X a jeho obraz X' platí

$$X' = X + \vec{p}. \quad (58)$$

Po dosazení souřadnic bodů X , X' a vektoru \vec{p} dostaneme rovnost

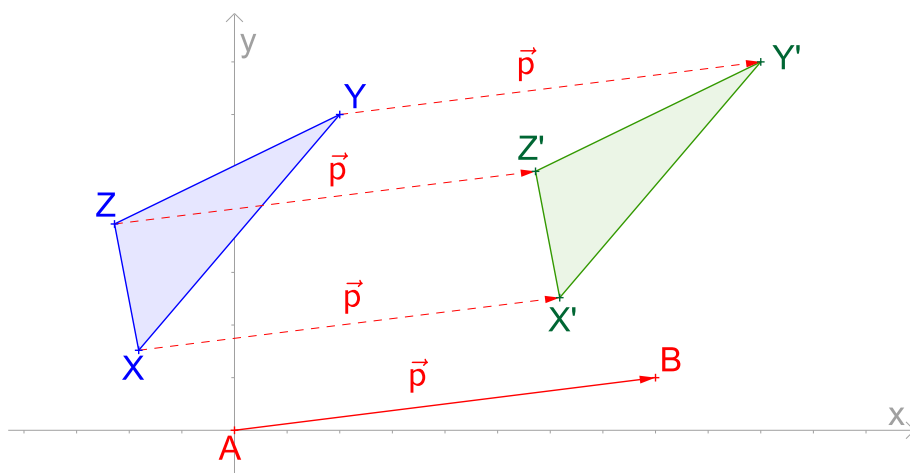
$$[x', y'] = [x, y] + (p_1, p_2), \quad (59)$$

kterou když upravíme

$$[x', y'] = [x + p_1, y + p_2]$$

a rozepíšeme po složkách, dostaneme analytické vyjádření posunutí $\mathcal{T}(\vec{p})$ daného vektorem $\vec{p} = (p_1, p_2)$

$$\begin{aligned} x' &= x + p_1, \\ y' &= y + p_2. \end{aligned} \quad (60)$$



Obrázek 61: Posunutí $\mathcal{T}(\vec{p}) : X' = X + \vec{p}, Y' = Y + \vec{p}, Z' = Z + \vec{p}$

PŘÍKLAD 5.26. Napište rovnice posunutí $\mathcal{T}(\vec{u})$, je-li $\vec{u} = (-3, 7)$.

Řešení: Jednoduše dosadíme do rovnic (60):

$$\begin{aligned}x' &= x - 3, \\y' &= y + 7.\end{aligned}$$

PŘÍKLAD 5.27. V posunutí \mathcal{T} je obrazem bodu $K[2, -4]$ bod $K'[-9, 3]$. Napište rovnice posunutí \mathcal{T} .

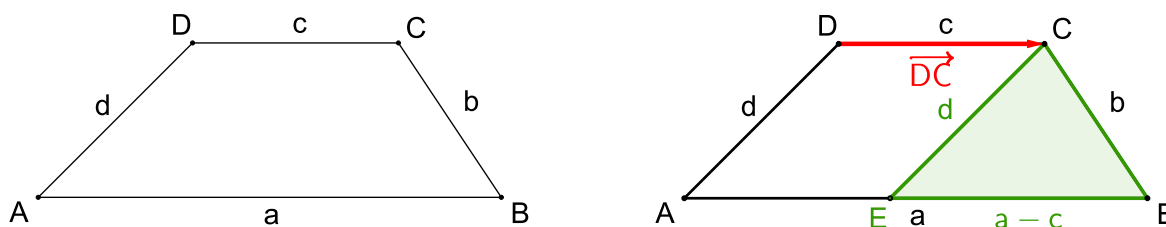
PŘÍKLAD 5.28. Sestrojte lichoběžník, jsou-li dány velikosti jeho stran a, b, c, d .

Řešení: Obecný čtyřúhelník není dán svými stranami jednoznačně, viz Obr. 62. V případě lichoběžníku, do jehož zadání automaticky patří požadavek na rovno-



Obrázek 62: Čtyřúhelník není dán délkami svých stran jednoznačně

běžnost protilehlých *základů* (zbývající dvě strany nazýváme *ramena*), je tomu ale jinak. Lichoběžník je svými stranami určen jednoznačně, viz Obr. 63, vlevo. Tato informace sama o sobě nás ale k řešení nedovede. Máme-li tři délky, trojúhelník z nich sestojíme snadno, pokud splňují trojúhelníkovou nerovnost¹⁶. V případě čtyř délek člověk nemusí hned vědět, jak začít. Ukážeme si proto, že k danému cíli nás dovede úvaha založená na posunutí, kterou můžeme uplatnit právě díky rovnoběž-



Obrázek 63: Sestrojte lichoběžník $ABCD$, jsou-li dány jeho strany a, b, c, d

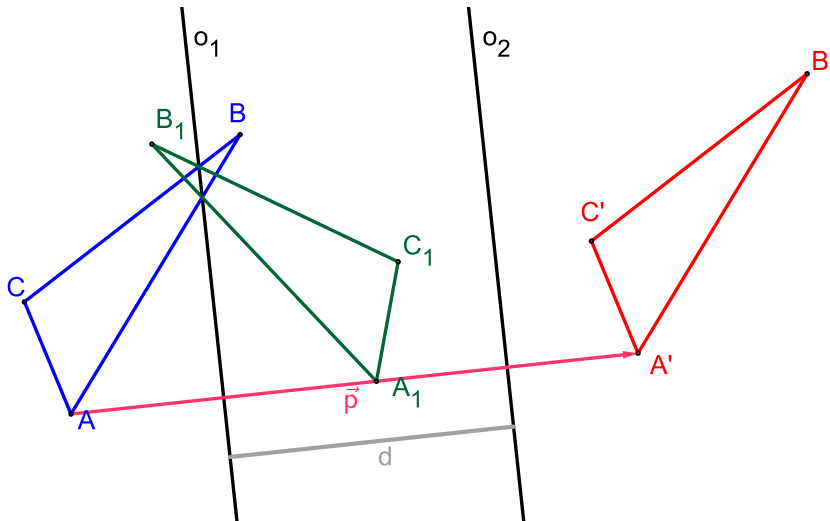
nosti základů lichoběžníku. Viz Obr. 63, vpravo. Posuneme-li stranu AD délky d

¹⁶Součet dvou stran libovolného trojúhelníku je větší než strana zbývající.

v posunutí daném vektorem \overrightarrow{DC} , zobrazí se vrchol D do vrcholu C a vrchol A do bodu E . Vznikne tak trojúhelník $\triangle EBC$, jehož všechny strany známe a umíme ho proto sestavit. Platí totiž, že $|EB| = a - c$, $|BC| = b$ a $|CE| = d$. Postup konstrukce lichoběžníku $ABCD$ je proto zřejmý. Nejprve sestojíme AB , potom trojúhelník $\triangle EBC$, jeho vrcholem C vedeme rovnoběžku s AB a nanese na ní délku c . Tím dostaneme poslední vrchol lichoběžníku D , který tak dokončíme spojením D a A a náležitým zvýrazněním jeho stran. Poznamenejme ještě, že stejného výsledku bychom samozřejmě dosáhli i posunutím strany BC ve směru vektoru \overrightarrow{CD} a následným uplatněním postupu analogického tomu, který je výše popsán.

5.12.1 Posunutí jako složené zobrazení

Připomeňme si větu 5 na str. 62, která říká, že *každá shodnost v rovině se dá složit z nejvýše tří osových souměrností*. Dosud jsme se zabývali tím, jak lze z osových souměrností složit středovou souměrnost a otočení. V obou případech jsme vystačili se dvěma osovými souměrnostmi, v případě středové souměrnosti byly jejich osy kolmé, v případě otočení se pak jednalo o osy různoběžné, svírající úhel poloviční proti úhlu otočení. Nyní si ukážeme, že se dvěma osovými souměrnostmi vystačíme i v případě *posunutí*. Tentokrát však budou jejich osy *rovnoběžné*. Na Obr. 64 je



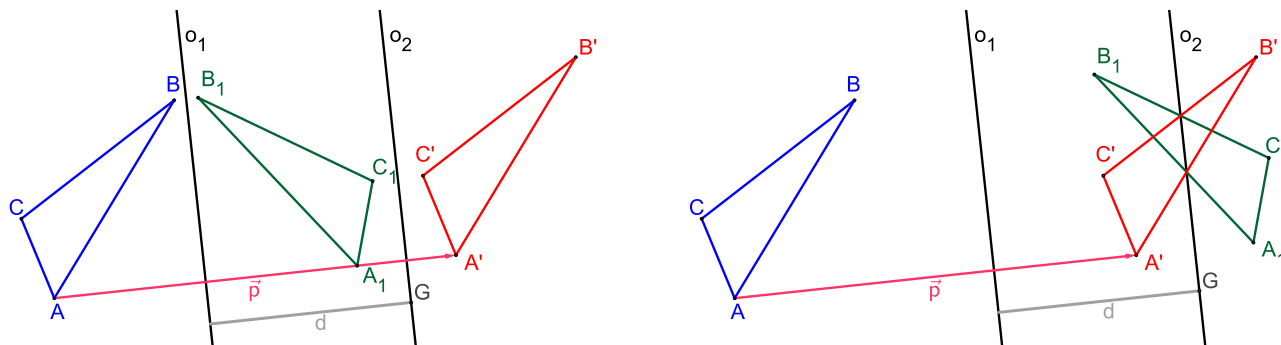
Obrázek 64: $\mathcal{O}(o_1) : \triangle ABC \rightarrow \triangle A_1B_1C_1$, $\mathcal{O}(o_2) : \triangle A_1B_1C_1 \rightarrow \triangle A'B'C'$, $\mathcal{T}(\vec{p}) : \triangle ABC \rightarrow \triangle A'B'C'$

naznačeno, jak lze posunutí $\mathcal{T}(\vec{p})$, kde $\vec{p} = \overrightarrow{AA'}$, získat postupným uplatnění dvou osových souměrností $\mathcal{O}(o_1)$, $\mathcal{O}(o_2)$, jejichž osy jsou rovnoběžné, kolmé na směr posunutí a jejichž vzdálenost je poloviční proti velikosti posunutí.

Posunutí (translaci) můžeme definovat též jako shodnost, která vznikne složením dvou osových souměrností s rovnoběžnými a různými osami. Směr posunutí je přitom

kolmý na směr těchto os a jeho velikost je rovna dvojnásobku jejich vzdálenosti.

A naopak, každou translaci lze rozložit na dvě osové souměrnosti s rovnoběžnými osami, z nichž jednu lze volit libovolně, kolmo na směr translace a druhá je touto volbou určena jednoznačně. Na Obr. 65 (interaktivní varianta je dostupná na adrese <https://www.geogebra.org/m/taa48mfx>) vidíme posunutí $\mathcal{T}(\vec{p})$, ve kterém se

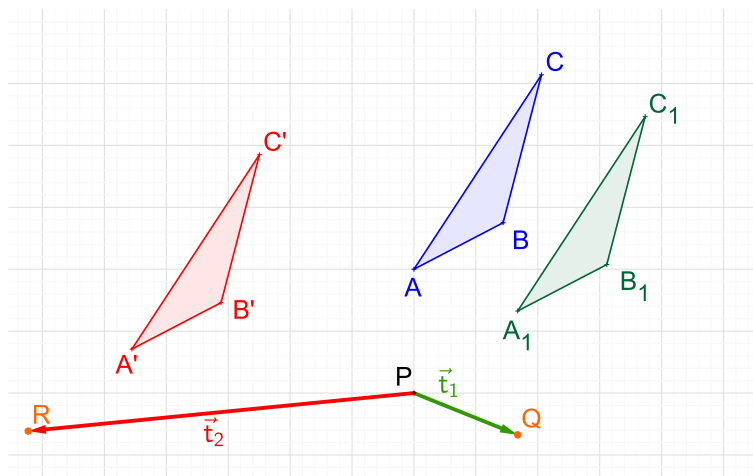


Obrázek 65: Rozklad posunutí $\mathcal{T}(\vec{p})$ je dán pouze polohou směrem a velikostí posunutí

ΔABC zobrazuje na $\Delta A'B'C'$, rozložené na dvě osové souměrnosti $\mathcal{O}(o_1)$, $\mathcal{O}(o_2)$ dvěma různými způsoby. Jediné, co je třeba při takovém rozkladu dodržet je to, aby osy byly rovnoběžné a kolmé na směr posunutí a jejich vzdálenost byla rovna polovině velikosti vektoru posunutí \vec{p} .

PŘÍKLAD 5.29. Uvažujte dvě různá posunutí \mathcal{T}_1 a \mathcal{T}_2 . Jaká všechna zobrazení \mathcal{Z} mohou vzniknout jejich složením?

Řešení: K vyšetřování skládání dvou různých posunutí můžete využít následující applet: <https://www.geogebra.org/m/ajffjgam>



Obrázek 66: $\mathcal{T}_1(\vec{t}_1) : \Delta ABC \rightarrow \Delta A_1B_1C_1$, $\mathcal{T}_2(\vec{t}_2) : \Delta A_1B_1C_1 \rightarrow \Delta A'B'C'$, $\mathcal{Z} : \Delta ABC \rightarrow \Delta A'B'C'$

5.13 Cvičení: Posunutí

Instrukce: Cvičení č. 1 řešte pro Vámi zvolené hodnoty. U zbývajících cvičení potom vždy proveďte rozbor příslušné úlohy, popište její konstrukci a nakonec úlohu vyřešte pro Vámi zvolené konkrétní zadání.

1. Sestrojte lichoběžník, jsou-li dány velikosti jeho stran a, b, c, d .
2. Jsou dány přímka p a dvě nesoustředné kružnice $k_1(S_1, r_1), k_2(S_2, r_2)$. Vedte přímku rovnoběžnou s přímkou p tak, aby na ní kružnice k_1, k_2 vytínaly shodné tětivy.
3. Sestrojte lichoběžník $ABCD$, jsou-li dány délky obou jeho základů a, c a obou jeho úhlopříček e, f .
4. Jsou dány dvě různoběžky a, b a úsečka délky r . Sestrojte všechny kružnice k se středem na přímce a , poloměrem r , které na přímce b vytínají tětivu délky r .

Posunutí - Příklady pro dobrovolné řešení

5. Sestrojte rovnoběžník, jsou-li dány délky jeho stran a velikost úhlu jeho úhlopříček.
6. Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, jehož úhlopříčky svírají pravý úhel, jsou-li dány velikosti úhlopříček $|AC| = e, |BD| = f$ a velikosti úhlů $|\angle ABC| = 90^\circ, |\angle ADC| = \delta$.
7. Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, jsou-li dány velikosti jeho stran $|AB| = a, |BC| = b, |CD| = c, |DA| = d$ a odchylka ω přímek AD, BC .

5.14 Posunutá souměrnost (Posunuté zrcadlení)

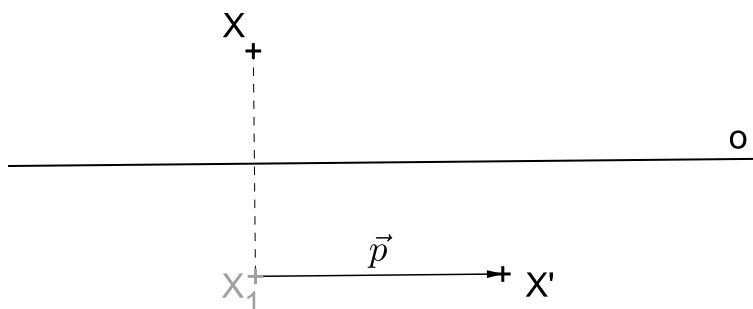
Posunutá souměrnost (též *posunuté zrcadlení*) je shodné zobrazení, které vznikne složením osově souměrnosti a posunutí (přitom nezávisí na jejich pořadí). Jeho věrnou analogií z reálného světa je vztah mezi otisky nohou při chůzi po přímce, viz Obr. 67. Levá stopa se nejprve zobrazí v osově souměrnosti podle osy o (na obrázku



Obrázek 67: Posunuté zrcadlení

viz $X \rightarrow X_1$), potom se její obraz posune ve směru této osy v posunutí popsáném vektorem \vec{p} ; $\vec{p} \parallel o$ (na obrázku viz $X_1 \rightarrow X'$). Nejedná se tak o žádné „umělé“ zobrazení, ale naopak, o geometrický jev, se kterým se setkáváme doslova na každém kroku. Posunutá souměrnost je určena osou souměrnosti a vektorem posunutí s ní rovnoběžným. Posunutá souměrnost je nepřímou shodností, nemá žádné samodružné body a má dva samodružné směry, jeden rovnoběžný s osou souměrnosti (tj. směrem posunutí), druhý na něj kolmý. Pro označení posunuté souměrnosti není jeden zajištěný symbol, v různých publikacích¹⁷ se setkáme s označením Ps , \mathcal{Z} nebo s . V tomto textu použijeme pro posunutou souměrnost označení Ps .

Definice 23 (Posunutá souměrnost). Zobrazení složené z posunutí ve směru dané přímky o a osově souměrnosti podle osy o se nazývá posunutá souměrnost (též posunuté zrcadlení), viz Obr. 68.



Obrázek 68: Posunuté zrcadlení $Ps : X \rightarrow X'$

¹⁷V daném pořadí se jedná o tyto publikace:

POLÁK, Josef. Přehled středoškolské matematiky. 10. vydání. Praha: Prometheus, 2015.

POMYKALOVÁ, Eva. Matematika pro gymnázia: planimetrie. 4., upr. vyd. Praha: Prometheus, 2000.

KUŘINA, František. Deset geometrických transformací. Praha: Prometheus, 2002.

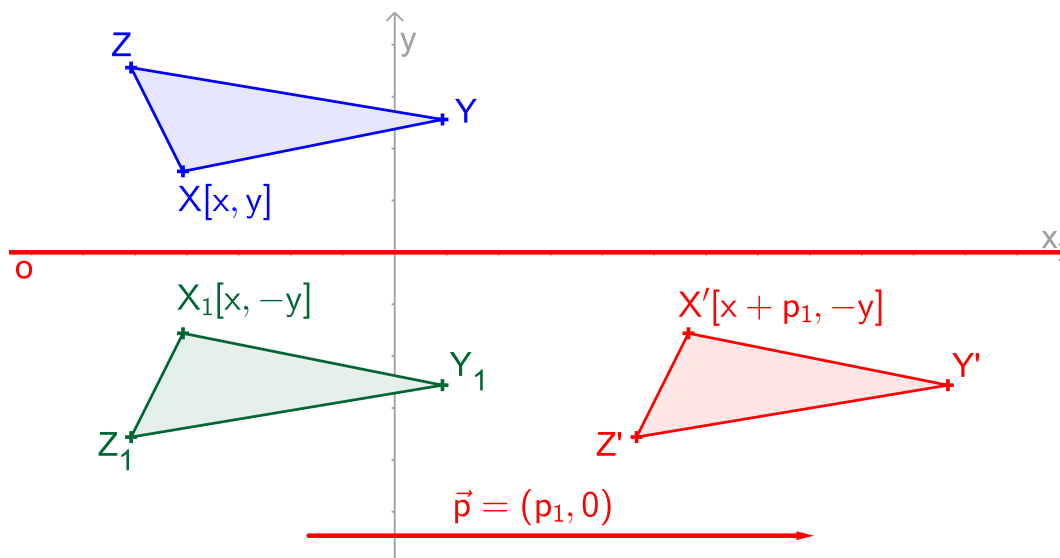
Samodružné body, směry a přímky posunuté souměrnosti

Posunutá souměrnost nemá samodružné body. Samodružnou přímkou tohoto zobrazení je osa o . Samodružné směry má dva, na sebe kolmé, směr kolmý na osu a směr rovnoběžný s osou.

Analytické vyjádření posunuté souměrnosti P_s

Posunutou souměrností se nebudeme zabývat nijak detailně, proto nám stačí, když si zde odvodíme její analytické vyjádření jenom pro speciální případ, kdy je osa souměrnosti o totožná se souřadnicovou osou x , a odvození rovnic pro obecnou polohu osy přenecháme čtenáři.

Vše potřebné je znázorněno na Obr. 69, kde je zachyceno zobrazení trojúhelníku $\triangle ABC$ v posunuté souměrnosti P_s definované osou o ; $o \equiv x$, a vektorem $\vec{p} = (p_1, 0)$. Pro odvození rovnic popisujících vztah mezi souřadnicemi vzoru $X[x, y]$ a obrazu $X'[x', y']$ v P_s se zaměříme speciálně na vrchol X trojúhelníku a jeho zobrazení v $\mathcal{O}(o)$ na X_1 a následné zobrazení X_1 na X' , obraz bodu X v P_s . Postupným uplat-



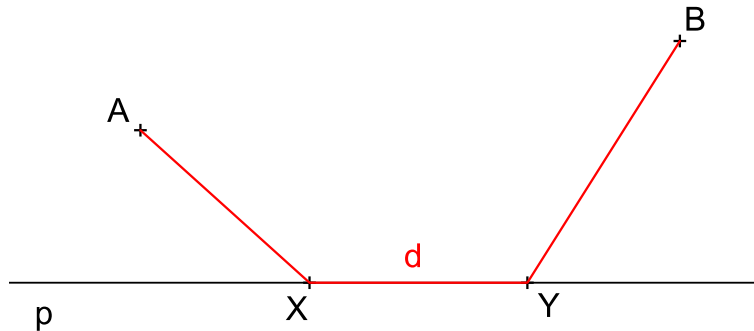
Obrázek 69: Posunuté zrcadlení $P_s : X \rightarrow X'$

něním vztahů pro zobrazení v osové souměrnosti a v posunutí dostaneme *analytické vyjádření posunuté souměrnosti (posunutého zrcadlení) dané osou souměrnosti o v ose x a vektorem posunutí $\vec{p} = (p_1, 0)$* , viz Obr. 69.

$$P_s : \begin{aligned} x' &= x + p_1, \\ y' &= -y. \end{aligned}$$

PŘÍKLAD 5.30. Je dána přímka p a dva body A, B v téže polorovině s hraniční přímkou p . Na přímce p sestrojte úsečku XY délky d tak, aby součet $|AX| + |XY| + |YB|$ byl co nejmenší, viz Obr. 70.

Řešení: Úloha velmi připomíná *Heronův problém*, který byl námětem příkladu 5.16 na str. 49. Jediný rozdíl je v tom, že „kovboj se chce s koněm ještě projít podél řeky“, budeme-li se držet oblíbené interpretace tohoto problému pomocí příběhu kovboje a koně, kteří se vracejí do stáje.



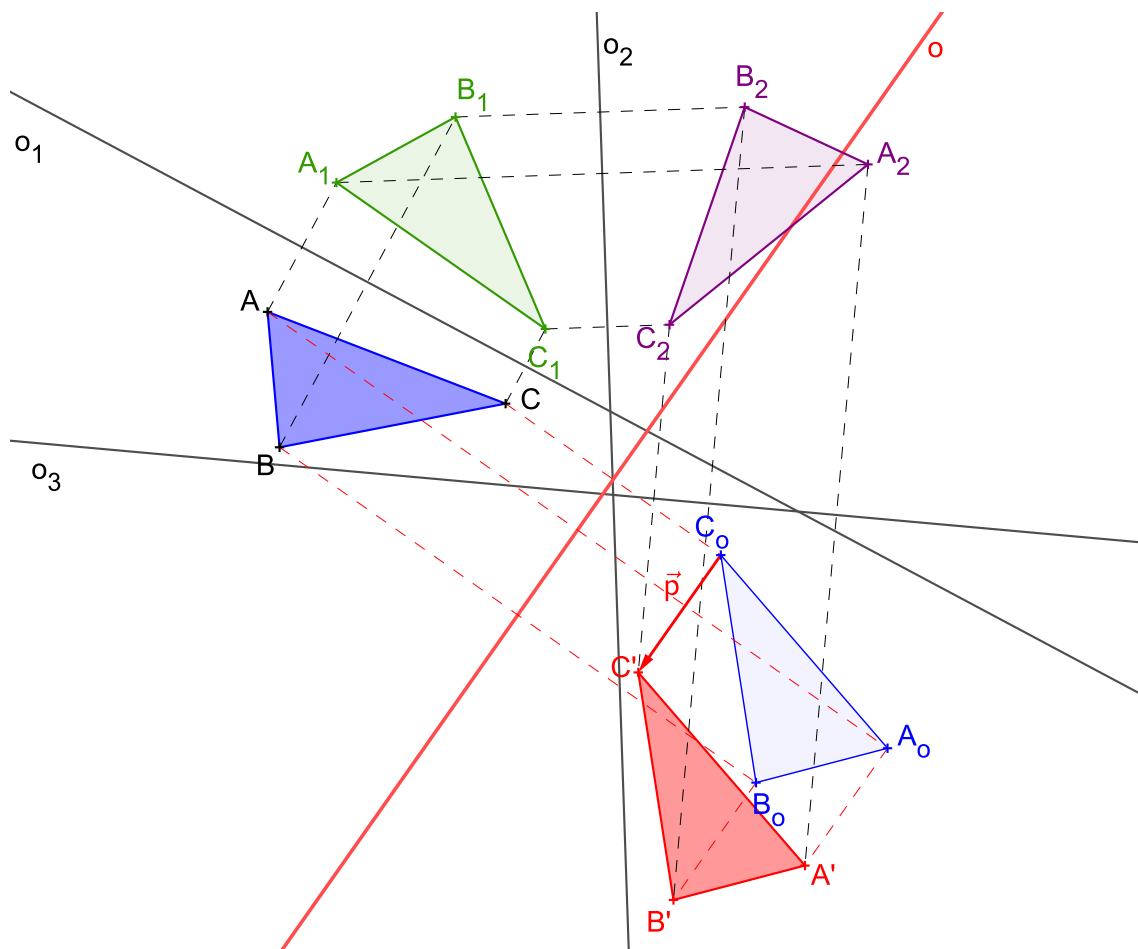
Obrázek 70: $|AX| + |XY| + |YB| = \min$

Navrhněte kompletní postup řešení této úlohy!

5.14.1 Posunutá souměrnost jako složené zobrazení

Věta 5 na str. 62 říká, že každá shodnost v rovině se dá složit z nejvýše tří osových souměrností. Zatím jsme použili jednu, na samotnou osovou souměrnost, nebo dvě, na vytvoření středové souměrnosti (dvě kolmé osy), otočení (dvě různoběžné osy) a posunutí (dvě rovnoběžné osy). Nyní, v souvislosti s posunutou souměrností, konečně přichází chvíle pro tři osy.

Posunutou souměrnost lze složit ze tří osových souměrností s různoběžnými osami, které všechny tři nemají společný bod. Tuto skutečnost ilustruje Obr. 71 (Interaktivní obrázek viz <https://www.geogebra.org/m/avrrbx2j>). Jsou zde zobrazeny tři (černé) různoběžné osy o_1, o_2, o_3 , které přísluší osovým souměrnostem $\mathcal{O}_1(o_1)$, $\mathcal{O}_2(o_2)$ a $\mathcal{O}_3(o_3)$, a jedna (červená) osa o , která přísluší posunuté souměrnosti P_s vytvořené složením $\mathcal{O}_3 \circ \mathcal{O}_2 \circ \mathcal{O}_1$ (skládání zobrazení viz definice 20 na str. 61). Trojúhelník ΔABC se zobrazí v $\mathcal{O}_1(o_1)$ na trojúhelník $\Delta A_1B_1C_1$, ten potom v $\mathcal{O}_2(o_2)$ na $\Delta A_2B_2C_2$ a ten nakonec v $\mathcal{O}_3(o_3)$ na výsledný trojúhelník $\Delta A'B'C'$. Stejný trojúhelník $\Delta A'B'C'$ je pak také výsledkem zobrazení ΔABC v posunuté souměrnosti P_s s osou o a vektorem posunutí \vec{p} . Jako mezikrok tohoto zobrazení je znázorněn $\Delta A_oB_oC_o$, obraz ΔABC v $\mathcal{O}(o)$.



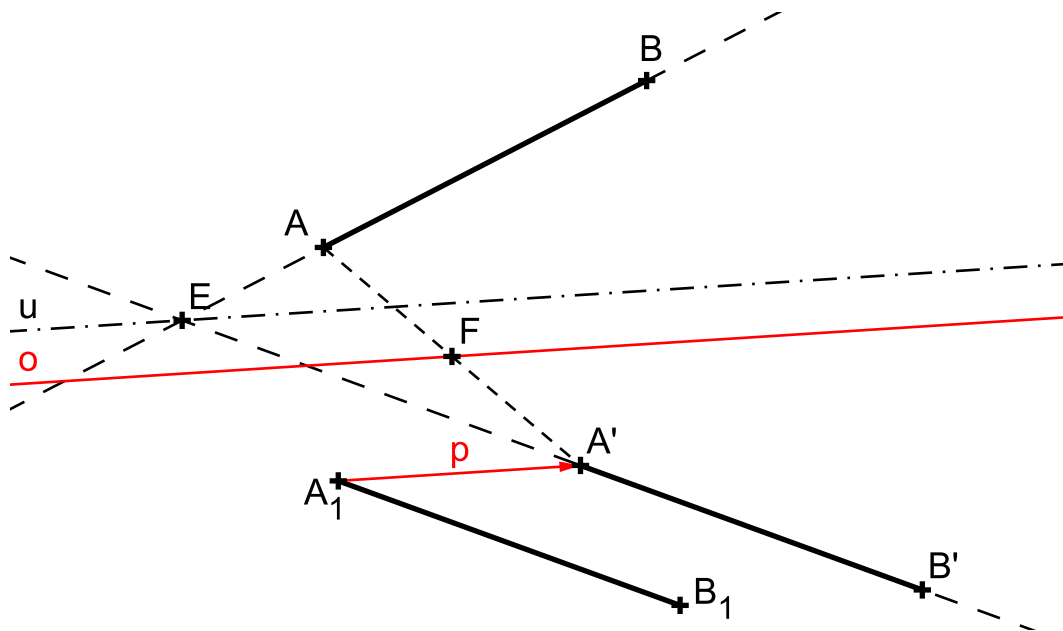
Obrázek 71: Posunutá souměrnost vznikne složením tří osových souměrností s různoběžnými osami, které nemají společný bod

Speciálním případem popsaného složení posunuté souměrnosti ze tří různoběžných os je situace, kdy úhel α mezi osami o_1 a o_2 je 90° a jejich složením tak vznikne středová souměrnost. Tomu je věnována následující věta

Věta 7. *Posunutě zrcadlení se dá složit z osové a středové souměrnosti, přičemž střed středové souměrnosti neleží na ose osové souměrnosti.*

PŘÍKLAD 5.31. *Nechť AB , $A'B'$ jsou různoběžné a shodné úsečky. Dokažte, že existuje posunutě zrcadlení nebo osová souměrnost, které převádějí body A , B po řadě v body A' , B' .*

Řešení: To, že pro dvě stejně dlouhé různoběžné úsečky je vždy možné najít posunutou souměrnost, která jednu úsečku zobrazuje na druhou, je zřejmé z Obr. 72. Osa o prochází středem F úsečky spojující A a A' rovnoběžně s osou u úhlu přímek AB a $A'B'$. Velikost posunutí je rovna vzdálenosti bodů A_1 a A' , kde A_1 je obrazem A v $\mathcal{O}(o)$.



Obrázek 72: Posunuté zrcadlení $Ps : AB \rightarrow A'B'$

5.15 Cvičení: Posunutá souměrnost

1. Jsou dány dvě různoběžky a, b a na nich dva body $A \neq B$ (A na a , B na b). Určete bod X na a a bod Y na b tak, aby platilo $|AX| = |BY|$ a dále aby:

- $XY \parallel p$, kde p je daná přímka;
- $XY = d$, kde d je předem daná úsečka;
- střed úsečky XY ležel na dané přímce q .

2. Napište rovnice shodnosti roviny E_2 , která vznikne složením tří osových souměrností s osami o_1, o_2, o_3 postupně o rovnicích: $x = 0, y = 0, x - 2y = 0$.

5.16 Identita

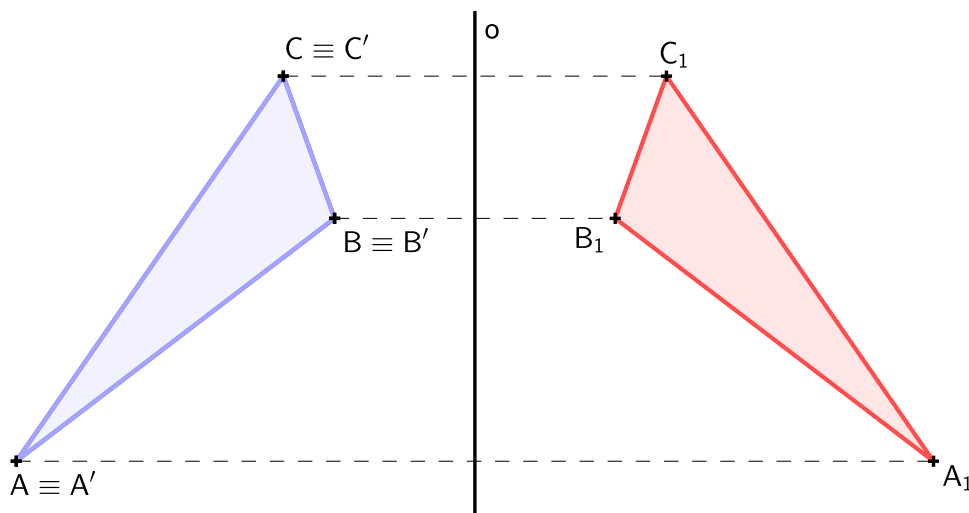
Identita je shodností, v níž se každý bod roviny zobrazí sám na sebe. Identitu značíme \mathcal{I} a pro všechny body X roviny platí $\mathcal{I} : X \rightarrow X$. V identitě jsou tedy *všechny body i směry samodružné*.



Obrázek 73: Identita; všechny body roviny jsou samodružné

Identita je *neutrálním prvkem* grupy shodností v rovině, viz str. 4 a 89. Je výsledkem složení libovolné shodnosti se zobrazením k ní inverzním.

Inverzní zobrazení k zobrazení \mathcal{Z} značíme \mathcal{Z}^{-1} . Přitom inverzním zobrazením k osově souměrnosti $\mathcal{O}(o)$ je sama tato souměrnost, tj. $\mathcal{O}(o) \circ \mathcal{O}(o) = \mathcal{I}$, inverzním zobrazením ke středové souměrnosti $\mathcal{S}(S)$ je opět sama tato souměrnost, tj. $\mathcal{S}(S) \circ \mathcal{S}(S) = \mathcal{I}$. V případě otočení $\mathcal{R}(S, \alpha)$ je inverzním zobrazením otočení se stejným středem, ale opačným úhlem $\mathcal{R}^{-1}(S, \alpha) = \mathcal{R}(S, -\alpha)$, tj. $\mathcal{R}(S, -\alpha) \circ \mathcal{R}(S, \alpha) = \mathcal{I}$ a pro posunutí $\mathcal{T}(\vec{p})$ je inverzním zobrazením posunutí s opačným vektorem $\mathcal{T}^{-1}(\vec{p}) = \mathcal{T}(-\vec{p})$, tj. $\mathcal{T}(-\vec{p}) \circ \mathcal{T}(\vec{p}) = \mathcal{I}$. Konečně pro posunutou souměrnost $Ps(o, \vec{p})$ je inverzním zobrazením posunutá souměrnost $Ps^{-1}(o, \vec{p}) = Ps(o, -\vec{p})$, tj. $Ps(o, -\vec{p}) \circ Ps(o, \vec{p}) = \mathcal{I}$.



Obrázek 74: Identita \mathcal{I} jako výsledek $\mathcal{O}(o) \circ \mathcal{O}(o)$

Z výše uvedených vztahů pro vznik identity složením shodnosti s k ní inverzním zobrazením vyplývá, že identita může sehrát významnou roli také při identifikaci *involutorního zobrazení (involuce)*, viz str. 49. Můžeme říci, že *shodnost v rovině je involucí právě tehdy, když výsledkem jejího složení sama se sebou je identita*, jinak řečeno, *když je shodnost sama sobě inverzním zobrazením*. Viz Obr. 74. Trojúhelník ΔABC se nejprve v $\mathcal{O}(o)$ zobrazí na $\Delta A_1B_1C_1$, který se následně opět v $\mathcal{O}(o)$ zobrazí zpět na ΔABC . Platí tedy, že $\mathcal{O}(o) \circ \mathcal{O}(o) = \mathcal{I}$

PŘÍKLAD 5.32. *Pro zbývající involuce z množiny shodností v rovině sestrojte v GeoGebře obrázky ilustrující jejich složení sama se sebou analogický Obr. 74. (Uložte na svůj profil a pošlete odkaz)*

6 Skládání shodností v rovině

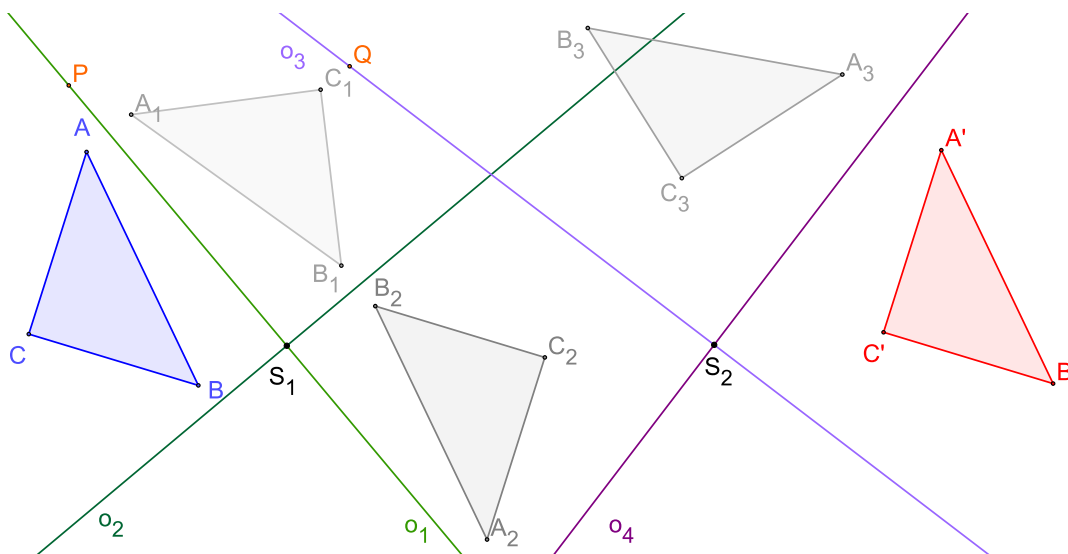
Skládáním zobrazení jsme se začali zabývat v souvislosti se shodnostmi v rovině, konkrétně vlastností, která říká, že *každou shodnost v rovině lze složit z nejvýše tří osových souměrností* (viz věta 5 na str. 62).

Skládání zobrazení jsme proto definovali již v kapitole 5.8.1 (definice 20). V kapitolách po ní následujících jsme pak zkoumali situace, ve kterých složením osových souměrností získáme konkrétní shodnosti.

Zde své seznamování se skládáním shodností završíme tím, že na operaci skládání a na množinu shodností budeme nahlížet jako na algebraickou strukturu. Prostřednictvím řešení několika příkladů budeme zkoumat vlastnosti vybraných podmnožin množiny shodností v rovině. Uvedeme si též dlouho slibovanou souvislost skládání zobrazení s násobením matic.

PŘÍKLAD 6.1. V Eukleidovském prostoru E_2 jsou dány dvě středové souměrnosti \mathcal{S}_1 a \mathcal{S}_2 . Určete zobrazení $Z_1 = \mathcal{S}_2 \cdot \mathcal{S}_1$ a $Z_2 = \mathcal{S}_1 \cdot \mathcal{S}_2$.

Řešení: Pro detailní průzkum výsledků skládání dvou středových souměrností použijte applet <https://www.geogebra.org/m/kenjwuy>. Složením středové souměrnosti \mathcal{S}_1 se středem S_1 a středové souměrnosti \mathcal{S}_2 se středem $S_2 \neq S_1$ vznikne posunutí \mathcal{T} , viz Obr. 75. Je-li $S_1 \equiv S_2$ je $\mathcal{S}_2\mathcal{S}_1$ identita.



Obrázek 75: Skládání dvou středových souměrností $\mathcal{S}_2(S_2) \circ \mathcal{S}_1(S_1)$

PŘÍKLAD 6.2. Řešením předcházejícího příkladu 6.1 jsme došli k poznatku, že složením dvou středových souměrností s různými středy souměrnosti S_1 a S_2 , $S_2 \neq S_1$, vznikne posunutí \mathcal{T} . Určete velikost a směr tohoto posunutí! Můžete využít applet <https://www.geogebra.org/m/kenjwuy>.

PŘÍKLAD 6.3. *Může v rovině existovat útvar, který má dva středy souměrnosti?*

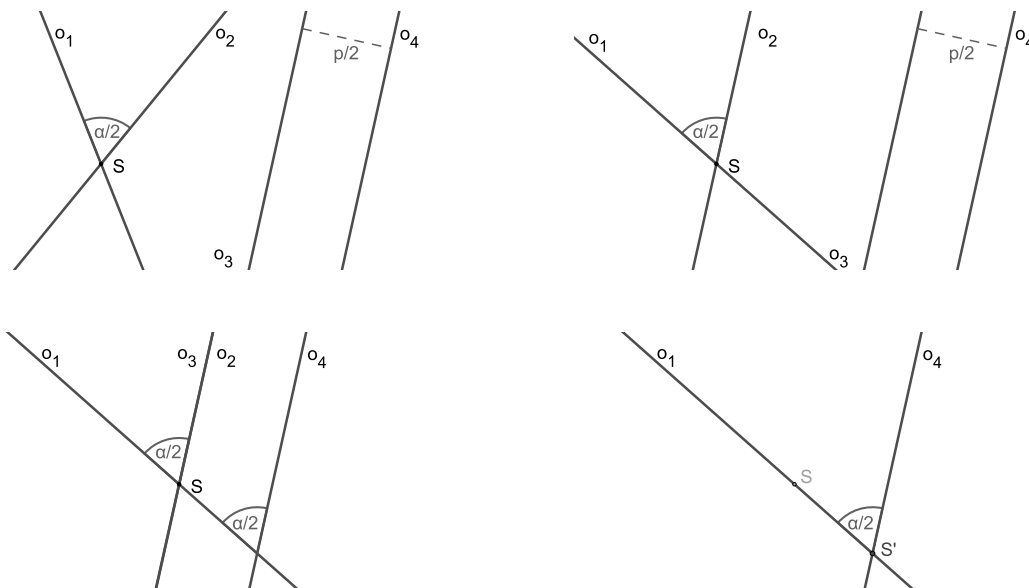
PŘÍKLAD 6.4. *V prostoru E_n je dáno posunutí \mathcal{T} a středová souměrnost \mathcal{S} . Určete zobrazení $\mathcal{Z}_1 = \mathcal{T} \circ \mathcal{S}$ a $\mathcal{Z}_2 = \mathcal{S}\mathcal{T}$.*

Řešení: Využijte applet <https://www.geogebra.org/m/qjhsdabm>. Jeho náhled použijte pro ilustraci svého tvrzení (případně si vytvořte vlastní).

PŘÍKLAD 6.5. *Rozhodněte, jaké zobrazení vznikne složením translace \mathcal{T} a rotace \mathcal{R} , která není středovou souměrností. Uvažujte obě pořadí skládání těchto zobrazení.*

Řešení: Složením (v libovolném pořadí) translace \mathcal{T} a rotace \mathcal{R} , která není středovou souměrností, vznikne rotace téhož smyslu i úhlu jako \mathcal{R} (ovšem ne se stejným středem). Tuto skutečnost si dokážeme opět s využitím toho, že dané shodnosti můžeme rozložit na osové souměrnosti. Využijeme při tom možnost svobodné volby první osy, samozřejmě při zachování určujících charakteristik příslušného zobrazení. V případě otočení můžeme volit první osu libovolného směru, ovšem tak, aby vždy procházela středem otočení S , druhá osa je pak dána jednoznačně, prochází S a s první osou svírá úhel $\alpha/2$, kde α je úhel otočení, více viz kapitola 5.10.1. V případě posunutí zase můžeme volit první osu libovolně, ovšem tak, aby byla kolmá na směr posunutí, druhá osa je s ní potom rovnoběžná ve vzdálenosti $p/2$, kde p je velikost posunutí, více viz kapitola 5.12.1.

Postupujeme dle Obr. 76. Otočení $\mathcal{R}(S, \alpha)$ je dáno dvěma různoběžnými osami o_1 ,



Obrázek 76: $\mathcal{T}(\vec{p}) \circ \mathcal{R}(S, \alpha)$

o_2 , procházejícími bodem S a svírajícími úhel $\alpha/2$. Posunutí $\mathcal{T}(\vec{p})$ je potom dáno

dvěma rovnoběžnými osami o_3 a o_4 , kolmými na směr \vec{p} a vzdálenými od sebe $p/2$, viz Obr. 76, vlevo nahoře. S cílem získat zobrazení, které vznikne složením těchto dvou (víme, že může být tvořeno maximálně třemi osami), budeme nyní tato zobrazení rozkládat na osové souměrnosti s jinak, pro nás vhodněji, orientovanými osami.

Začneme tím, že otočení $\mathcal{R}(S, \alpha)$ rozložíme na osové souměrnosti s osami o_1, o_2 (asi bych měl pro tyto osy používat jiná označení, když se jedná o nové přímky, ale čtenář mi jistě promine toto zjednodušení) tak, aby $o_2 \parallel o_3$, viz Obr. 76, vpravo nahoře.

Nyní navážeme změnou reprezentace posunutí $\mathcal{T}(\vec{p})$. Osu o_3 volíme tak, aby byla totožná s o_2 , tj. $o_3 \equiv o_2$. Nová osa o_4 je s ní pochopitelně rovnoběžná ve vzdálenosti $p/2$, viz Obr. 76, vlevo dole. Zdůrazněme, že v důsledku rovnoběžnosti s o_3 svírá i osa o_4 s o_1 úhel $\alpha/2$.

Jak víme z kapitoly 5.16, složením dvou osových souměrností s totožnými osami (tj. složením osové souměrnosti sama se sebou) vznikne identita \mathcal{I} . Protože *identita je neutrálním prvkem vzhledem k operaci skládání zobrazení* (stejně jako 0 vzhledem k sčítání, nebo 1 vzhledem k násobení), můžeme při skládání její přítomnost potlačit (stejně jako $a+0 = a$ nebo $1 \cdot a = a$). Totožné osy o_2, o_3 proto z obrázku „odstraníme“. Zůstanou tam jenom osy o_1 a o_4 svírající úhel $\alpha/2$ ve stejném smyslu jako tomu bylo u o_1 a o_2 , ale, pozor, procházející jiným společným bodem S' , viz Obr. 76, vpravo dole. Složením osových souměrností s těmito osami tak vznikne rotace $\mathcal{R}(S', \alpha)$. Tím jsme potvrdili správnost tvrzení uvedeného na začátku tohoto řešení.

6.1 Shodnosti přímé a nepřímé vs. skládání zobrazení

Shodnosti rozdělujeme na přímé a nepřímé, viz str. 29. *Přímými shodnostmi jsou identita, středová souměrnost, otočení a posunutí. Nepřímými shodnostmi jsou osová souměrnost a posunutá souměrnost.*

Zajímá nás, jak se vlastnost *přímá/nepřímá shodnost* reprodukuje skládáním zobrazení.

Opět využijeme skutečnost, že shodnosti v rovině lze skládat z osových souměrností. Porovnáme-li výše uvedený přehled přímých a nepřímých shodností s tím, co víme o každé z nich z hlediska jejího skládání z osových souměrností, můžeme říci, že *přímou shodnost lze rozložit na sudý počet osových souměrností, zatímco nepřímou shodnost lze rozložit na lichý počet osových souměrností.*

Z řešení příkladu 6.5 vyplývá, že při skládání většího počtu osových souměrností dokážeme některé z nich vzájemně „anihilovat“, vždy se však musí jednat o dvojici sousedních os, viz osud os o_2 a o_3 v řešení příkladu. Počet skládaných osových

souměrností jsme tedy schopni snižovat výhradně po dvou! Odtud plyne tento závěr: *Složíme-li dvě shodnosti přímé nebo dvě shodnosti nepřímé, dostaneme shodnost přímou; složíme-li shodnost přímou a nepřímou, vznikne shodnost nepřímá.*

PŘÍKLAD 6.6. *Zdůvodněte výše uvedené tvrzení: „Složíme-li dvě shodnosti přímé nebo dvě shodnosti nepřímé, dostaneme shodnost přímou; složíme-li shodnost přímou a nepřímou, vznikne shodnost nepřímá.“*

6.2 Grupa shodností v rovině

Naše dosavadní poznatky získané řešením příkladů věnovaných skládání shodností v rovině nasvědčují tomu, že množina shodností v rovině spolu s operací skládání zobrazení tvoří grupu¹. Některé podmnožiny množiny shodností navíc tvoří spolu s operací skládání zobrazení podgrupy, tj. podmnožiny množiny shodností v rovině, které samy splňují definici grupy.

PŘÍKLAD 6.7. *Vyslovte argumenty potvrzující pravdivost alespoň dvou z následujících čtyř tvrzení:*

- (a) *Všechny shodnosti v rovině tvoří grupu G_S .*
- (b) *Všechny přímé shodnosti tvoří podgrupu G'_S grupy G_S .*
- (c) *Množina všech translací doplněná identitou, tvoří grupu, která je podgrupou grupy přímých shodností.*
- (d) *Množina všech translací a středových souměrností, doplněná identitou, tvoří podgrupu grupy G'_S .*

PŘÍKLAD 6.8. *Je dán rovnostranný trojúhelník ABC . Najděte všechny shodnosti, které převádějí tento trojúhelník do něho samého. Zkoumejte vlastnosti množiny těchto shodností spolu s operací skládání shodností.*

¹Množinu G , v níž je definována operace \circ nazýváme grupou vzhledem k operaci \circ (značíme (G, \circ)), právě když:
a) Výsledek operace \circ je pro každou dvojici prvků G opět prvkem G (říkáme, že operace \circ je na G neomezeně definovaná, nebo, že množina G je uzavřená vzhledem k operaci \circ).
b) Operace \circ je asociativní v množině G .
c) Operace \circ má neutrální prvek $n \in G$.
d) Ke každému prvku $k \in G$ existuje inverzní prvek $k^{-1} \in G$ vzhledem k operaci \circ .
Je-li navíc operace \circ komutativní v množině G , nazýváme algebraickou strukturu (G, \circ) komutativní grupou.
(viz též definice 1 na str. 4)

6.3 Souvislost mezi skládáním afinních zobrazení a násobením matic

V lineární algebře jsme se naučili algoritmus násobení matic, uživatelským způsobem, bez zdůvodnění, proč se tato operace provádí zrovna daným způsobem. Nyní si ukážeme, že postup násobení dvou matic je přirozeným důsledkem skládání afinních zobrazení

$$f : X' = AX + B. \quad (61)$$

Pro zjednodušení budeme uvažovat pouze *lineární zobrazení*, tj. afinní transformace s nulovým vektorem posunutí, v jejichž rovnicích (61) je $B = 0$ (nulová matice)

$$f : X' = AX. \quad (62)$$

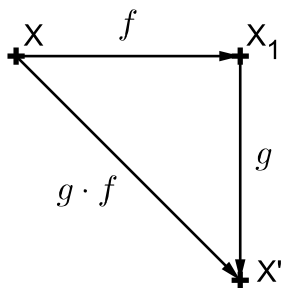
PŘÍKLAD 6.9. Jsou dána lineární zobrazení f, g :

$$f : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad g : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Určete matici M složeného zobrazení

$$g \cdot f : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = M \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Řešení: Uvažujme situaci znázorněnou na Obr. 77. Bod $X[x, y]$ je afinitou f zobrazen



Obrázek 77: Skládání afinit f a g v rovině

na bod $X_1[x_1, y_1]$, ten je pak afinitou g zobrazen na bod $X'[x', y']$. Tuto skutečnost můžeme zapsat rovnicemi

$$X \xrightarrow{f} X_1 : \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}; \quad X_1 \xrightarrow{g} X' : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix},$$

odkud po dosazení za $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ z první rovnice do druhé dostáváme

$$X \xrightarrow{g \cdot f} X' : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad (63)$$

Skládání afinit znázorněné Obr. 77 ale můžeme zapsat i pomocí rovnic. Platí

$$X \xrightarrow{f} X_1 : \begin{array}{l} x_1 = ax + by \\ y_1 = cx + dy \end{array}; \quad X_1 \xrightarrow{g} X' : \begin{array}{l} x' = Ax_1 + By_1 \\ y' = Cx_1 + Dy_1 \end{array}.$$

Potom po dosazení za x_1 a y_1 z první soustavy rovnic do druhé dostaneme

$$X \xrightarrow{g \circ f} X' : \begin{array}{l} x' = A(ax + by) + B(cx + dy) = (Aa + Bc)x + (Ab + Bd)y \\ y' = C(ax + by) + D(cx + dy) = (Ca + Dc)x + (Cb + Dd)y \end{array},$$

po přepsání do maticového tvaru

$$X \xrightarrow{g \circ f} X' : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Aa + Bc & Ab + Bd \\ Ca + Dc & Cb + Dd \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad (64)$$

Z porovnání (63) a (64) je zřejmé, že pro matici M složené afinity $g \circ f$ platí:

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Aa + Bc & Ab + Bd \\ Ca + Dc & Cb + Dd \end{bmatrix}. \quad (65)$$

Rovnost (65) tak přináší známý algoritmus pro násobení dvou matic.

PŘÍKLAD 6.10. Řešení příkladu 6.9 využijte ke zdůvodnění skutečnosti, že skládání afinit v rovině není komutativní. Zobecněte na E_n .

7 Klasifikace shodností roviny

V kapitolách 5.1–5.4 jsme se zevrubně zabývali algebraickou reprezentací afinít v rovině a podmínkami, kdy se jedná o shodnosti. Věnovali jsme se výpočtům samodružných bodů a směrů shodností a zmínili jsme jejich důležitost pro identifikaci konkrétní shodnosti z jejích rovnic. Zde na toto snažení navážeme, abychom si ukázali překvapivě jednoduchý obecný zápis shodností v rovině, a abychom si následně ukázali, jak lze z rovnic afinity, použitím nástrojů lineární algebry a uplatněním znalostí o samodružných bodech a směrech, získat kompletní přehled shodností v rovině, o kterém hovoříme jako o *úplné klasifikaci shodností v rovině*.

Myšlenka úplné klasifikace shodností

Klasifikace shodností roviny je založena na výpočtu samodružných bodů a směrů zobrazení, které je dáno rovnicí

$$f : X' = A \cdot X + B. \quad (66)$$

Viz též (21) a (22) na straně 25. Postup tohoto výpočtu a způsob identifikace příslušného zobrazení pomocí jeho samodružných bodů a směrů je ilustrován podrobným řešením příkladu 5.11 na stranách 41–45.

Důležitým poselstvím této kapitoly je představení jednoduchého zápisu shodností v rovině ve formě soustavy rovnic, ve kterém jsou již zohledněny podmínky (29) (viz str. 26) za kterých jsou rovnice afinity (3) (viz str. 18) rovnicemi shodností. Toto zjednodušení dostaneme uplatněním známé goniometrické identity $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. Každá přímá shodnost je dána rovnicemi ve tvaru

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 \cos \alpha - x_2 \sin \alpha + b_1, \\ x'_2 &= x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha + b_2, \end{aligned} \quad (67)$$

zatímco každá nepřímá shodnost je dána rovnicemi

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 \cos \alpha + x_2 \sin \alpha + b_1 \\ x'_2 &= x_1 \sin \alpha - x_2 \cos \alpha + b_2. \end{aligned} \quad (68)$$

PŘÍKLAD 7.1. *Vypočítejte determinanty matic transformací daných soustavami (67) a (68). Dejte do souvislosti znaménko tohoto determinantu a otázku, zda se jedná o přímou nebo nepřímou shodnost.*

Klasifikace shodností roviny

Z podmínky $A^T \cdot A = E$ plyne, že afinní zobrazení určené rovnicemi

$$\begin{aligned}x' &= a_{11}x + a_{12}y + b_1 \\y' &= a_{21}x + a_{22}y + b_2,\end{aligned}$$

je shodností právě tehdy, když platí rovnosti

$$\begin{aligned}a_{11}^2 + a_{21}^2 &= a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1 \\a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} &= a_{12}a_{11} + a_{22}a_{21} = 0\end{aligned}$$

Vzhledem k platnosti vztahu $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ je zřejmé, že existuje úhel $\alpha \in \langle 0^\circ; 360^\circ \rangle$ takový, že lze napsat

$$\begin{aligned}a_{11} &= \cos \alpha, \\a_{21} &= \sin \alpha, \\a_{12} \cos \alpha + a_{22} \sin \alpha &= 0, \\a_{22} &= \varepsilon \cos \alpha, \\a_{12} &= -\varepsilon \sin \alpha, \text{ kde } \varepsilon = \pm 1.\end{aligned}$$

Hodnota ε určuje, zda se jedná o shodnost přímkou ($\varepsilon = 1$) nebo nepřímou ($\varepsilon = -1$).

I. Přímé shodnosti

Každou přímou shodnost v rovině můžeme vyjádřit rovnicemi ve tvaru

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_1 \cos \alpha - x_2 \sin \alpha + b_1, \\x'_2 &= x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha + b_2.\end{aligned}$$

Samodružné body

Samodružné body přímé shodnosti jsou řešením soustavy rovnic

$$\begin{aligned}x_1(1 - \cos \alpha) + x_2 \sin \alpha &= b_1, \\-x_1 \sin \alpha + x_2(1 - \cos \alpha) &= b_2.\end{aligned} \tag{69}$$

Nejprve nás bude zajímat přímá shodnost v rovině, která má právě jeden samodružný bod. Soustava (69) má právě jedno řešení, pokud je regulární, tj. pokud pro její determinant platí

$$\begin{vmatrix} (1 - \cos \alpha), & \sin \alpha \\ -\sin \alpha, & (1 - \cos \alpha) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Po úpravě dostaneme

$$2(1 - \cos \alpha) \neq 0,$$

což vede k podmínce

$$\cos \alpha \neq 1.$$

Tak dostáváme

1) OTOČENÍ (ROTACI).

Stačí volit počátek soustavy souřadné v onom jediném samodružném bodě a dostaneme známé vyjádření otočení kolem počátku o úhel α :

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_1 \cos \alpha - x_2 \sin \alpha, \\x'_2 &= x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha.\end{aligned}$$

Samodružné směry

Samodružné směry (tj. vektory těchto směrů) přímé shodnosti jsou **netriviálním** řešením soustavy homogenních rovnic

$$\begin{aligned}u_1(\lambda - \cos \alpha) + u_2 \sin \alpha &= 0, \\-u_1 \sin \alpha + u_2(\lambda - \cos \alpha) &= 0.\end{aligned}\tag{70}$$

Ta má netriviální (tj. nekonečně mnoho) řešení právě tehdy, když je splněna charakteristická rovnice přímé shodnosti v rovině

$$\begin{vmatrix}(\lambda - \cos \alpha), & \sin \alpha \\ -\sin \alpha, & (\lambda - \cos \alpha)\end{vmatrix} = 0.\tag{71}$$

Úpravou (71) dostaneme rovnici

$$(\lambda - \cos \alpha)^2 + \sin^2 \alpha = 0,$$

která je splněna za předpokladu, že $\sin \alpha = 0$ a zároveň $\cos \alpha = \lambda$, kde $\lambda = \pm 1$ ¹.

Pro $\cos \alpha = -1$ dostáváme

2) STŘEDOVOU SOUMĚRNOST

s analytickým vyjádřením

$$\begin{aligned}x'_1 &= -x_1 + b_1, \\x'_2 &= -x_2 + b_2.\end{aligned}$$

¹Pro shodná zobrazení je $|\lambda| = 1$. Jinak by vektor \vec{u} samodružného směru v zobrazení $\varphi(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$ nezachoval svou velikost.

Je-li $\cos \alpha = 1$, dostaneme pro $b_1 = b_2 = 0$,

3) IDENTITU

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_1 \\x'_2 &= x_2\end{aligned}$$

a pro $b_1 \neq 0 \vee b_2 \neq 0$

4) POSUNUTÍ

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_1 + b_1 \\x'_2 &= x_2 + b_2.\end{aligned}$$

II. Nepřímé shodnosti

Každou nepřímou shodnost v rovině můžeme vyjádřit rovnicemi ve tvaru

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_1 \cos \alpha + x_2 \sin \alpha + b_1 \\x'_2 &= x_1 \sin \alpha - x_2 \cos \alpha + b_2.\end{aligned}$$

Samodružné směry

K vyšetření nepřímých shodností použijeme samodružné směry. Řešením charakteristické rovnice

$$\begin{vmatrix}(\lambda - \cos \alpha), & -\sin \alpha \\-\sin \alpha, & (\lambda + \cos \alpha)\end{vmatrix} = 0, \quad (72)$$

dostaneme podmínku

$$\lambda = \pm 1,$$

kteřá odpovídá tomu, že uvažované zobrazení má dva navzájem kolmé samodružné směry. Jeden, pro $\lambda = 1$, se zachovává, druhý, pro $\lambda = -1$, se mění v opačný. Volme soustavu souřadnou tak, aby osa x měla směr odpovídající $\lambda = 1$. Směr osy y pak zřejmě odpovídá $\lambda = -1$. Potom je nepřímá shodnost popsána rovnicemi

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_1 + b_1 \\x'_2 &= -x_2 + b_2.\end{aligned}$$

Pokud je $b_1 = 0$, má uvažované zobrazení **přímku samodružných bodů** a jedná se tedy o

5) OSOVOU SOUMĚRNOST

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_1 \\x'_2 &= -x_2 + b_2.\end{aligned}$$

Pokud je ale $b_1 \neq 0$, má pouze **samodružnou přímku** a jedná se o

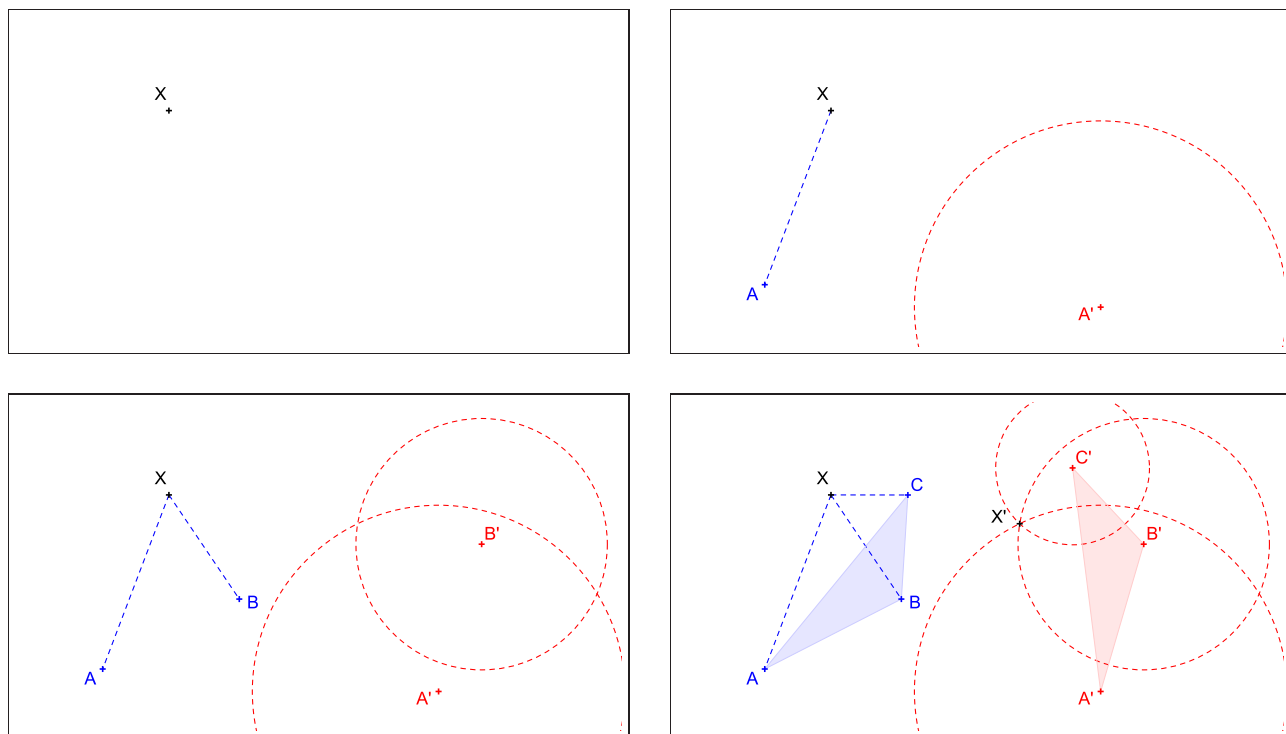
6) POSUNUTÉ ZRCADLENÍ.

7.1 Tři osové souměrnosti stačí

Než opustíme téma shodností v rovině, naznačíme si zde důkazy dvou „ikonických“ vět o shodnostech v rovině. Konkrétně se jedná o větu 3 (*O určenosti shodného zobrazení v rovině*) na str. 24, která ve stručnosti říká, že k zavedení shodnosti v rovině (shodné transformace roviny na sebe) nám stačí umístit do ní odpovídajícím způsobem dvojici shodných trojúhelníků, které jsou ve vztahu *vzor a obraz* v této shodnosti, a o větu 5, viz str. 62, ke které jsme se v minulých partiích hojně obraceli, a která říká, že každou shodnost v rovině lze složit z nejvýše tří osových souměrností.

Věta. *Shodné zobrazení v rovině je jednoznačně určeno libovolnými třemi nekolineárními body A, B, C a třemi nekolineárními body A', B', C' , které jsou po řadě jejich obrazy.*

Důkaz. Myšlenka důkazu je zachycena v appletu <https://www.geogebra.org/m/RYaKE4Jw>. Děj, který je obsažen v tomto dynamickém obrázku si nyní rozdělíme do jednotlivých fází, viz Obr. 78. Máme na mysli nějakou shodnost v rovině a chceme najít



Obrázek 78: K zavedení shodnosti v rovině potřebujeme tři nekolineární body A, B, C a jejich obrazy A', B', C' v této shodnosti.

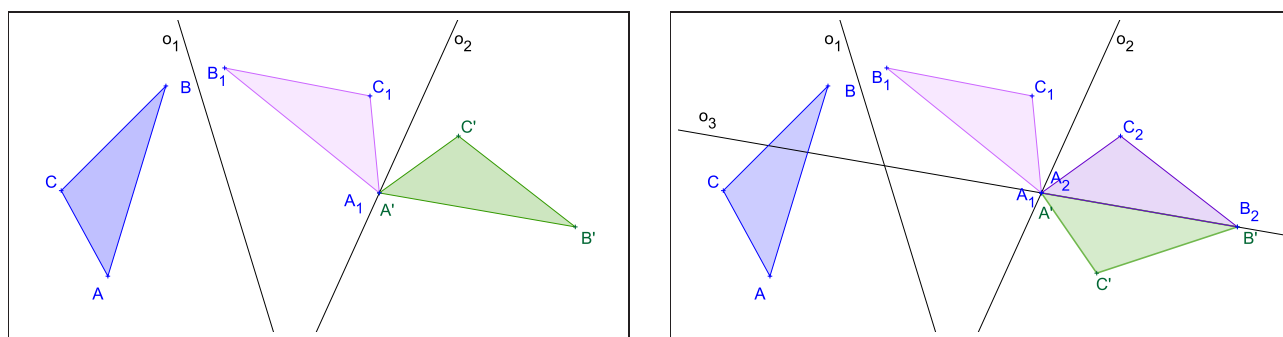
obraz bodu X v této shodnosti, viz Obr. 78, vlevo nahoře. Ptáme se, kolik dvojic bodů ve vztahu vzor–obraz v uvažovaném zobrazení musíme znát, abychom mohli libovolný bod X bezpečně zobrazit. Uvažujeme-li jednu dvojici, A a A' , je to málo. Aby byla splněna definice shodnosti, musí platit $|A'X'| = |AX|$. Takových bodů je

ale nekonečně mnoho, vyplňují celou kružnici se středem A' a poloměrem $|AX|$, viz Obr. 78, vpravo nahoře. Přidáme tedy další dvojici B, B' . Potom musí platit nejenom $|A'X'| = |AX|$, ale také $|B'X'| = |BX|$ a samozřejmě rovněž $|A'B'| = |AB|$. Počet možností pro umístění X' se tím podstatně snížil, už jsou jenom dvě, viz Obr. 78, vlevo dole, pořád to ale není jednoznačné určení obrazu X' , které požadujeme. To nastane až přidáním třetí dvojice C, C' , tak aby ani A, B, C , ani A', B', C' neleželi v jedné přímce, viz Obr. 78, vpravo dole. Shodné zobrazení v rovině je tedy jednoznačně určeno dvojicí shodných trojúhelníků $\triangle ABC$ a $\triangle A'B'C'$. Co by nastalo, kdyby body A, B, C , resp. A', B', C' byly kolineární snadno zjistíte pomocí výše uvedeného appletu. \square

Právě dokázanou větu o určenosti shodného zobrazení v rovině (jinak se jedná o větu 3 ze str. 24) nyní použijeme při důkazu věty následující (uvedena jako věta 5 na str. 62).

Věta. Každá shodnost v rovině se dá složit z nejvýše tří osových souměrností.

Důkaz. Z věty o určenosti shodného zobrazení v rovině víme, že shodnost v rovině je jednoznačně určena dvojicí shodných trojúhelníků ve vztahu vzor a obraz v této shodnosti. Stačí tedy dokázat, že pro zobrazení trojúhelníku, řekněme $\triangle ABC$, na jakýkoliv jiný s ním shodný trojúhelník potřebujeme nejvýše tři osové souměrnosti. Jak vidíme na Obr. 79, kde je postup tohoto důkazu znázorněn pro přímo i nepřímé shodné trojúhelníky $\triangle ABC$ a $\triangle A'B'C'$, nejedná se o nic složitějšího. Stačí postupovat



Obrázek 79: K „přechodu“ mezi dvěma trojúhelníky $\triangle ABC$ a $\triangle A'B'C'$ použijeme v případě přímé shodnosti dvě osové souměrnosti (vlevo), v případě nepřímé shodnosti tři osové souměrnosti (vpravo).

systematicky. Cílem je, skládat osové souměrnosti dokud se konečný obraz $\triangle ABC$ nebude krýt s $\triangle A'B'C'$. Začneme sestrojením osy o_1 úsečky AA' , potom v osové souměrnosti $\mathcal{O}(o_1)$ zobrazíme $\triangle ABC$ na $\triangle A_1B_1C_1$. Tím jsme bod A již „dovezli“ do cíle, protože $A_1 \equiv A'$. Pokračujeme sestrojením osy o_2 úsečky B_1B' (v případě přímé shodnosti je zároveň osou C_1C'). Potom zobrazíme $\triangle A_1B_1C_1$ v $\mathcal{O}(o_2)$. V případě přímé shodnosti jsme již dosáhli cíle, výsledný trojúhelník se kryje (je totožný)

s $\Delta A'B'C'$, viz Obr. 79, vlevo. V případě nepřímé shodnosti musíme ještě sestrojít osu o_3 , aby se v $\mathcal{O}(o_3)$ trojúhelník $\Delta A_2B_2C_2$ zobrazil na $\Delta A'B'C'$, viz Obr. 79, vpravo. Uvedený postup konstrukce os a zobrazování trojúhelníků si prakticky vyzkoušejte pomocí appletu <https://www.geogebra.org/m/erviiUBL>.

□

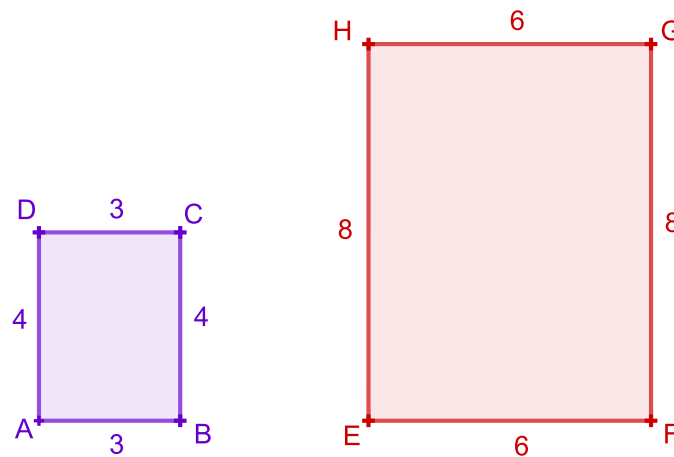
8 Podobná zobrazení

V úvodu kapitoly 5 na str. 23 je řečeno, že zatímco shodnost zachovává rozměry i tvar útvaru, podobnost, přesněji *vlastní podobnost*, jak si za chvíli upřesníme, zachovává jenom tvar, rozměry se mění. Jak ale matematicky postihnout „zachování tvaru“? Místo zachování tvaru můžeme hovořit také o zachování proporcí, tj. poměrů



Obrázek 80: Podobné útvary

rozměrů útvaru. Například oba obdélníky $ABCD$ a $EFGH$ na Obr. 81 mají shodný



Obrázek 81: U podobných útvarů se shodují poměry sobě odpovídajících rozměrů

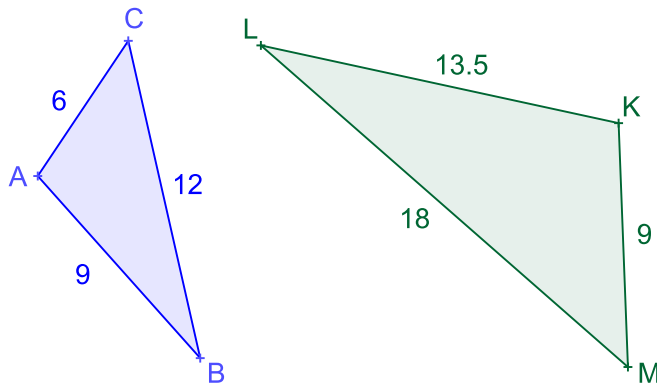
poměr výšky a šířky,

$$\frac{b}{a} = \frac{4}{3}, \quad \frac{f}{e} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}.$$

Jsou tedy podobné. Řekli bychom, že „vypadají stejně“, akorát jsou „různě velké“, $EFGH$ je větší než $ABCD$. Tento jejich vzájemný vztah vyjádříme *koeficientem (poměrem) podobnosti*, číslem, které udává, kolikrát jsou změněny rozměry jednoho z nich vůči odpovídajícím rozměrům toho druhého. Poměr podobnosti obdélníku $EFGH$ vzhledem k $ABCD$ je roven

$$\frac{e}{a} = \frac{f}{b} = 2,$$

každý jeho rozměr je tedy dvakrát větší než odpovídající rozměr $ABCD$. Trojúhelní-



Obrázek 82: U podobných útvarů se shodují poměry sobě odpovídajících rozměrů

níky $\triangle ABC$ a $\triangle KLM$ na Obr. 82 jsou také podobné. Snadno ověříme, že poměry odpovídajících si dvojic stran (stranám a, b, c odpovídají v daném pořadí strany k, l, m) jsou i v jejich případě shodné

$$\frac{a}{b} = \frac{k}{l} = 2, \quad \frac{a}{c} = \frac{k}{m} = \frac{4}{3}, \quad \frac{b}{c} = \frac{l}{m} = \frac{2}{3}.$$

Poměr jejich podobnosti, pokud uvažujeme, že $\triangle KLM$ „vznikl“ z $\triangle ABC$, je

$$\frac{k}{a} = \frac{l}{b} = \frac{m}{c} = \frac{3}{2}.$$

Na str. 23 jsme v souvislosti se shodností uvedli, že invariantem shodného zobrazení je vzdálenost, zde tedy můžeme prohlásit, že *invariantem podobného zobrazení je poměr vzdáleností*.

PŘÍKLAD 8.1. *Určete poměry obsahů dvojic podobných útvarů na Obr. 81 a 82.*

Koeficient podobnosti je klíčovým pojmem následující definice podobného zobrazení. Pozorný čtenář si jistě všimne, že je to také jediný pojem, kterým se tato definice odlišuje od definice shodného zobrazení 15 na str. 23.

Definice 24 (Podobné zobrazení). *Geometrické zobrazení f se nazývá „podobné zobrazení“, jestliže existuje kladné reálné číslo k tak, že pro každé dva body X, Y uvažovaného prostoru (v našem případě se bude jednat převážně o rovinu) a jejich obrazy X', Y' platí:*

$$|X'Y'| = k|XY|. \quad (73)$$

Číslo k se nazývá koeficient podobného zobrazení f .

Poznámka. Podobná zobrazení, u nichž vzory i obrazy patří do téhož prostoru, např. roviny, nazýváme *podobné transformace roviny* zkráceně *podobnosti*. Potom hovoříme např. o *podobnostech v rovině*¹⁸ nebo o *podobnostech v trojrozměrném prostoru*.

Vlastní podobnosti

Jak už bylo řečeno, definice podobného zobrazení 24 se od definice shodného zobrazení 15 liší pouze přítomností *koeficientu podobnosti* k . Protože hodnota $k = 1$ není definicí 24 vyloučena, je zřejmé, že pro toto k se podobnost stává shodností. Proto podobnosti s koeficientem $k \neq 1$ nazýváme *vlastní podobnosti*.

Samodružné body vlastní podobnosti Přestože pojem *vlastní podobnost* představuje poměrně obecné vymezení zobrazení v rovině, můžeme již na této úrovni odhalit zajímavou skutečnost o samodružných bodech. Platí totiž následující věta.

Věta 8. *Každá vlastní podobnost má právě jeden samodružný bod.*

Důkaz. Důkaz této věty se provádí ve dvou krocích. Nejprve dokážeme, že vlastní podobnost (tj. podobnost s koeficientem $k \in R^+ - \{1\}$) nemůže mít více než jeden samodružný bod, potom dokážeme, že musí mít aspoň jeden. Dohromady nám tedy vyjde, že vlastní podobnost musí mít právě jeden samodružný bod. Myšlenka důkazu prvního dílčího tvrzení je naznačena v komentáři řešení následujícího příkladu 8.2. Důkazem druhého tvrzení se zde zabývat nebudeme (To však neznamená, že se o to čtenář nemůže pokusit sám). \square

PŘÍKLAD 8.2. *Pokuste se najít argumenty pro výše uvedené tvrzení, že vlastní podobnost nemůže mít více než jeden samodružný bod*

Řešení: Pravdivost tvrzení snadno dokážeme sporem. Předpokládejme, že platí negace tohoto tvrzení, tj. *vlastní podobnost má více než jeden samodružný bod*. Uvažujme dva takovéto body, X a Y . Každý z nich se zobrazuje sám na sebe, tj. $X' \equiv X$, $Y' \equiv Y$. Potom ale musí platit $|X'Y'| = |XY|$, což je ve sporu s definicí 24, ze které vyplývá, že pro vlastní podobnost platí $|X'Y'| = k|XY|$, kde $k \neq 1$, tj. $|X'Y'| \neq |XY|$. Negace dokazovaného tvrzení, která je takto ve sporu s definicí, nemůže platit. Platí tedy ono tvrzení. Tím je důkaz proveden.

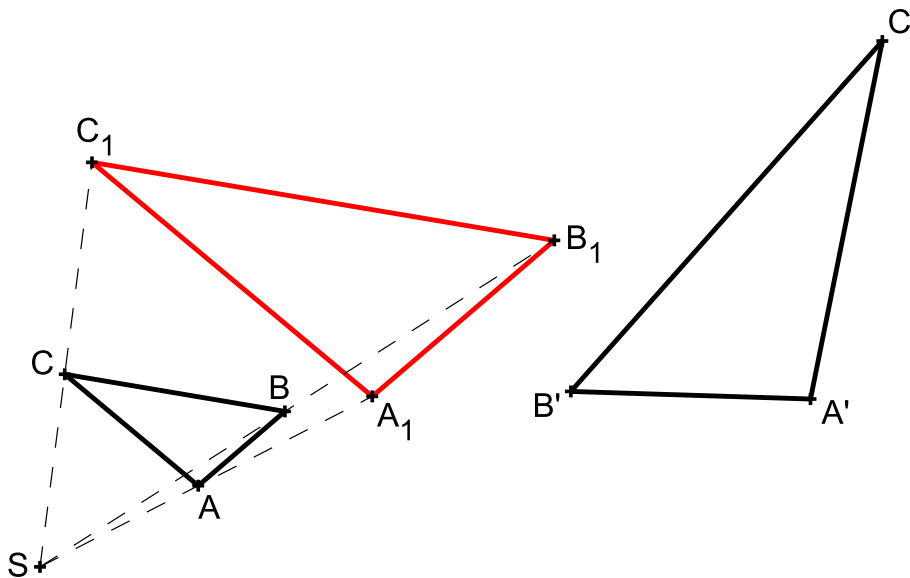
¹⁸Můžeme také rovnou definovat tyto *podobné transformace roviny*, tj. *podobnosti v rovině*, takto:

Definice (Podobnost) Zobrazení f roviny (eukleidovského prostoru E_2) na sebe se nazývá „podobnou transformací roviny“ (též „podobností v rovině“), jestliže existuje kladné reálné číslo k tak, že pro každé dva body X, Y roviny a jejich obrazy X', Y' platí $|X'Y'| = k|XY|$. Číslo k se nazývá koeficient podobnosti f .

Podobnosti v rovině jako složená zobrazení

Na Obr. 83 vidíme dva podobné trojúhelníky $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. Představme si, že chceme, geometrickými prostředky, z $\triangle ABC$ „vytvořit“ (tj. zobrazit „na“) $\triangle A'B'C'$. Možný postup je naznačen na Obr. 83. Nejprve zvětšíme $\triangle ABC$ na velikost $\triangle A'B'C'$. K tomu použijeme stejnoolehlost¹⁹ s libovolně zvoleným středem S a koeficientem κ , jehož absolutní hodnota je rovna koeficientu podobnosti k předmětných trojúhelníků, tj. např. $k = \frac{|A'B'|}{|AB|}$. Výsledkem zobrazení $\triangle ABC$ v této stejnoolehlosti je červený trojúhelník $\triangle A_1B_1C_1$, shodný s $\triangle A'B'C'$, tj. $\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle A'B'C'$. Z věty 3 o určenosti shodného zobrazení v rovině, viz str. 24, víme, že dvojicí shodných trojúhelníků je shodnost určena jednoznačně. Existuje tedy jediná shodnost, v níž se $\triangle A_1B_1C_1$ zobrazuje na $\triangle A'B'C'$. Můžeme proto vyslovit následující větu.

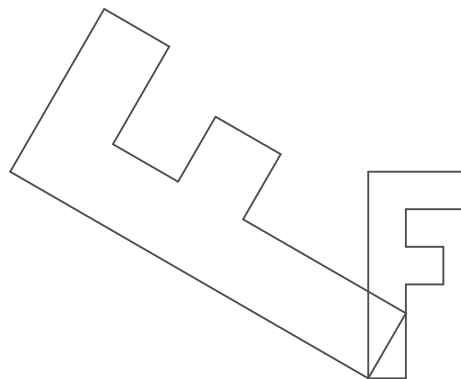
Věta 9. *Každou podobnost v rovině s poměrem podobnosti k lze rozložit na stejnoolehlost $H(S, k)$ a shodnost Z . Přitom střed stejnoolehlosti můžeme volit libovolně a shodnost Z je tím určena jednoznačně.*



Obrázek 83: Každou podobnost lze rozložit na stejnoolehlost a shodnost

PŘÍKLAD 8.3. *Pokuste se popsat stejnoolehlost a shodnost, jejichž složením vznikne podobnost zachycená na Obr. 84.*

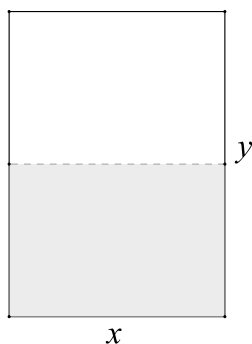
¹⁹O stejnoolehlosti pojednává kapitola 9 začínající na str. 108, kde je uvedena též její definice 26



Obrázek 84: Podobné útvary v rovině

PŘÍKLAD 8.4. Víte v jakém vztahu jsou papíry různých velikostí formátu A ? Jsou vzájemně podobné?

Řešení: Pro archy formátu A je typickou vlastností to, že každý z nich je polovinou toho většího. Přehneme-li například papír formátu $A3$ na polovinu podél osy rovnoběžné s kratší stranou, dostaneme formát $A4$, viz Obr. 85, přeložíme-li $A4$, dostaneme $A5$ atd. Všechny archy formátů A jsou tedy podobné. Označíme-li x, y

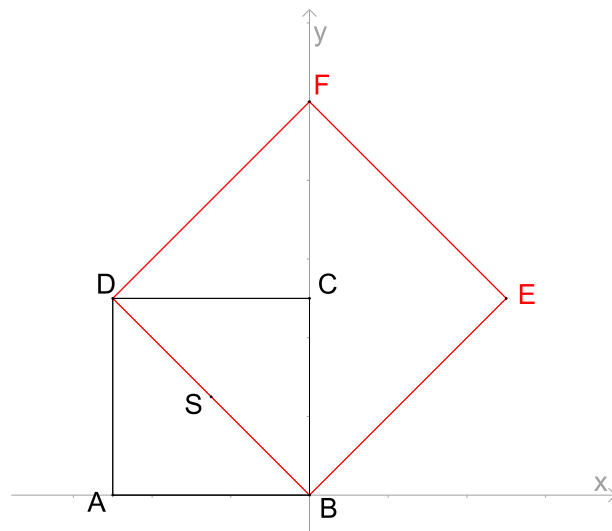


Obrázek 85: Papír formátu „A“

strany obdélníku formátu A , viz Obr. 85, musí dle výše uvedeného platit $\frac{y}{x} = \frac{x}{\frac{y}{2}}$, odkud po jednoduché úpravě dostáváme $y^2 = 2x^2$, tj. $y = \sqrt{2}x$. Poměr délky delší strany ku délce kratší strany archu A je $\sqrt{2} : 1$.

PŘÍKLAD 8.5. V eukleidovské rovině je dán čtverec $ABCD$ se středem S . Existuje právě jedno podobné zobrazení roviny čtverce do sebe, při kterém se body A, B, S zobrazí po řadě na body D, B, C . Rozložte toto podobné zobrazení na stejnoolehlost a shodné zobrazení.

Řešení: Řešení si usnadníme vhodným umístěním daného čtverce do kartézské soustavy souřadnic Oxy , vrcholem B do počátku, vrcholem A na zápornou poloosu x ,

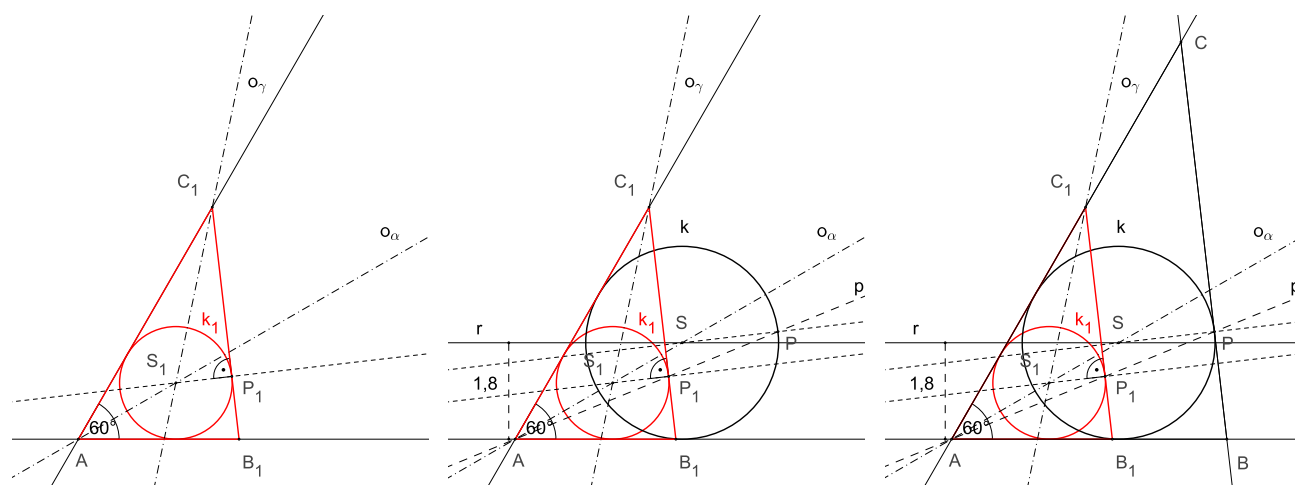


Obrázek 86: Zobrazte $ABCD$ na $DEFG$

viz Obr. 86. Potom je evidentní, že příslušné podobné zobrazení můžeme rozložit na stejnoolehlost $\mathcal{H}(B, \kappa = \sqrt{2})$ (nejprve čtverec $ABCD$ zvětšíme $\sqrt{2}$ -krát) a otočení $\mathcal{R}(B, -45^\circ)$ (zvětšený čtverec otočíme kolem B o 45° po směru pohybu hodinových ručiček).

PŘÍKLAD 8.6. Sestrojte alespoň jeden trojúhelník ABC , pro který platí $|AB| : |AC| = 3 : 5$, $\alpha = 60^\circ$, $\rho = 1,8 \text{ cm}$ (poloměr kružnice vepsané).

Řešení: Konstrukce krok za krokem je online zde <https://www.geogebra.org/m/p43wpaflh>. Na Obr. 87 jsou vybrány její tři klíčové kroky. Nejprve sestrojíme pomocný trojúhelník



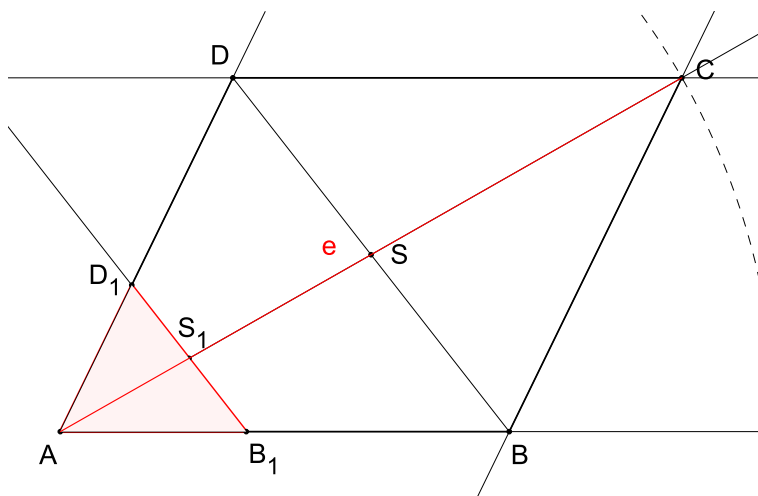
Obrázek 87: Konstrukce ΔABC

ník ΔAB_1C_1 , jehož rozměry jsou $|AB_1| = 3 \text{ cm}$, $|AC_1| = 5 \text{ cm}$, $\alpha = 60^\circ$ (víme tedy, že je podobný s hledaným trojúhelníkem, tj. má stejný tvar, ale jinou velikost), a vepíšeme mu kružnici k_1 , jejímž bodem dotyku se stranou B_1C_1 je P_1 , viz první obrázek zleva. Nyní sestrojíme kružnici k , která bude vepsána hledanému trojúhelníku.

Protože se kružnice k musí dotýkat přímkou AB_1 , AC_1 , je zřejmé, že je stejnohleďlá s k_1 ve stejnohleďlosti se středem v A . Střed S kružnice k , který je obrazem S_1 v této stejnohleďlosti, potom najdeme jako průsečík přímky AS_1 (tj. přímky procházející středem stejnohleďlosti A a vzorem S_1) s přímkou r rovnoběžnou s AB_1 a vzdálenou od ní $\rho = 1,8$ cm. Analogicky najdeme bod P . Jako průsečík uvedené rovnoběžky r s přímkou AP_1 . Máme-li střed S kružnice vepsané a jeden její bod P (který je bodem jejího dotyku se stranou BC hledaného trojúhelníku), máme tím kružnici k jednoznačně určenou, viz prostřední obrázek. Nyní zbývá doplnit stranu BC trojúhelníku $\triangle ABC$, což je snadné, protože víme, že P je jejím bodem dotyku s k a že bude rovnoběžná s B_1C_1 , viz obrázek vpravo.

PŘÍKLAD 8.7. *Sestrojte kosodélník $ABCD$, je-li dáno $|\angle DAB| = \alpha$, $|\angle ABD| = \varepsilon$, $|AC| = e$.*

Řešení: Opět použijeme pomocný útvar, který umíme sestavit a je podobný hledanému útvaru nebo jeho části. Konkrétně se jedná o trojúhelník $\triangle AB_1D_1$, viz Obr. 88, který je stejnohleďlý s trojúhelníkem $\triangle ABD$ ve stejnohleďlosti se středem A . Řešení krok za krokem je uvedeno v online appletu <https://www.geogebra.org/m/g74dbhwp>. Klíčovou roli pro vyřešení úlohy hraje skutečnost, která souvisí s tím, že podobná



Obrázek 88: Sestrojte kosodélník $ABCD$

zobrazení patří mezi *afinní zobrazení*, viz definice 13 na str. 17. Konkrétně se jedná o to, že střed S_1 úsečky B_1D_1 se zobrazí na střed S úsečky BD .

V planimetrii se věnujeme geometrii v rovině, v eukleidovském prostoru dimenze 2, to ale neznamená, že shodná nebo podobná zobrazení a jejich definice, které jsme si uvedli, jsou omezena jenom na tento prostor. Jak ukazuje následující příklad, je zcela přirozené, zabývat se podobností i v prostoru dimenze 3.

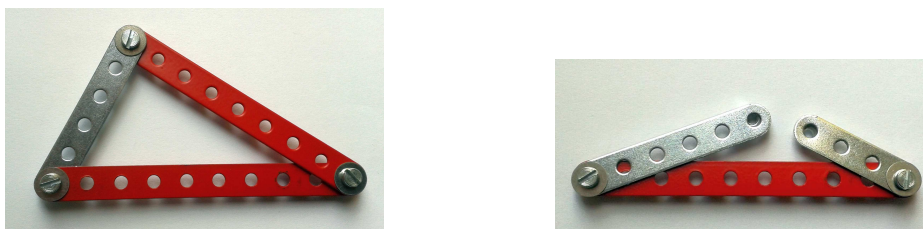
PŘÍKLAD 8.8. Jsou krabice na Obr. 89 geometricky podobné?



Obrázek 89: Jsou z pohledu geometrie vzájemně podobné tyto krabice mléka?

8.1 Věty o podobnosti trojúhelníků

Trojúhelník je jednoznačně určen délkami svých stran. Pokud tři úsečky splňují trojúhelníkovou nerovnost, viz Obr. 90, též str. 75, existuje jediný trojúhelník, který je má jako strany. Délkami stran je tak jednoznačně dán tvar trojúhelníku, tj. i veli-

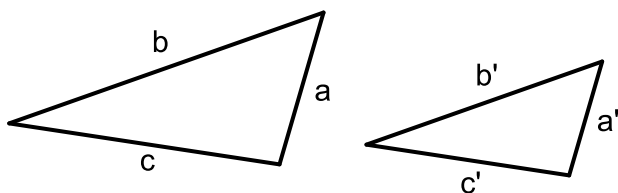


Obrázek 90: Součet dvou stran trojúhelníku musí být větší než strana třetí (vlevo), pokud tomu tak není, nelze trojúhelník sestrojít (vpravo).

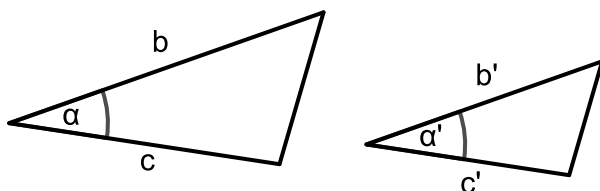
kosti jeho vnitřních úhlů. Trojúhelník jemu podobný má stejný tvar, tj. i velikosti vnitřních úhlů, liší se svou velikostí. Každá jeho strana je k -násobkem (k je koeficient podobnosti) velikosti odpovídající strany původního trojúhelníku.

Dva trojúhelníky jsou podobné, jestliže se shodují poměry délek dvojic jejich odpovídajících si stran. Zároveň se shodují velikosti jejich vnitřních úhlů.

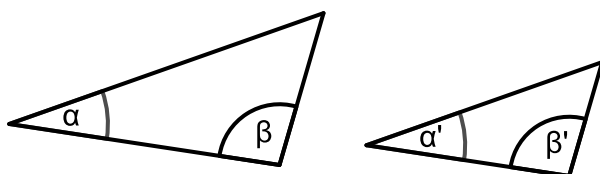
Pro usnadnění identifikace dvojice podobných trojúhelníků byla vytvořena dílčí kritéria, ekvivalentní s výše uvedeným tvrzením, která jsou známa jako *věty o podobnosti trojúhelníků*: sss , sus , uu , Ssu , viz Obr. 91–94



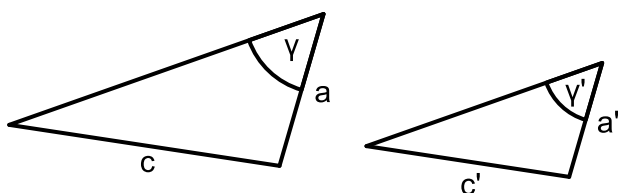
Obrázek 91: *sss*: $a'/a = b'/b = c'/c$



Obrázek 92: *sus*: $b'/b = c'/c$, $\alpha = \alpha'$



Obrázek 93: *uu*: $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$



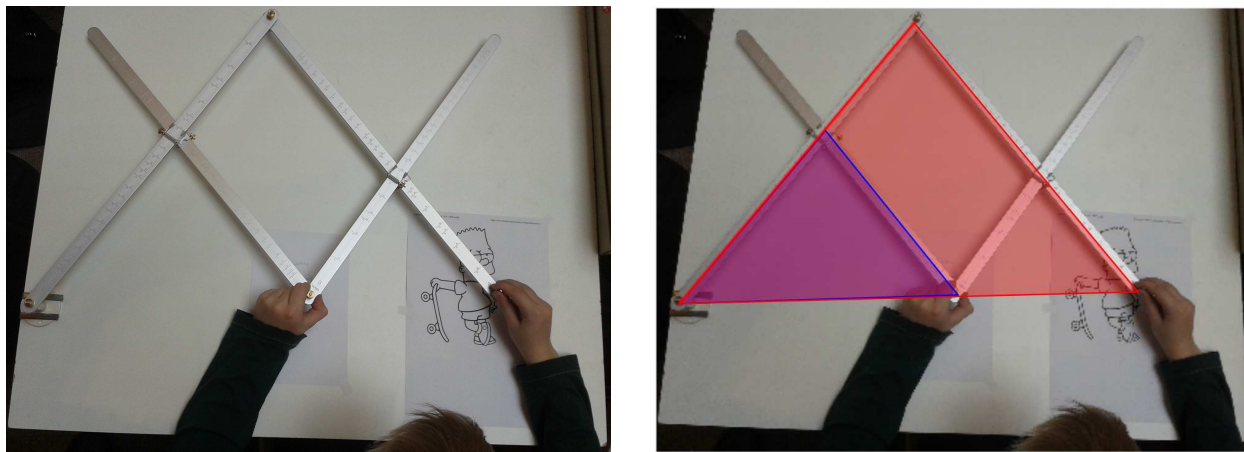
Obrázek 94: *Ssu*: $c > a$, $a'/a = c'/c$, $\gamma = \gamma'$

Analogicky s větou 3 o *určenosti shodného zobrazení v rovině*, viz str. 24, můžeme vyslovit následující větu o *určenosti podobného zobrazení v rovině*, kterou můžeme ve stručnosti interpretovat tak, že podobnost v rovině je jednoznačně dána (ustavena) dvojicí podobných trojúhelníků.

Věta 10 (O určenosti podobnosti v rovině). *Každá podobnost v rovině je jednoznačně určena trojúhelníkem ABC a jeho obrazem $A'B'C'$ takovým, že $|A'B'| = k|AB|$, $|B'C'| = k|BC|$, $|A'C'| = k|AC|$, kde k , $k > 0$, je koeficient této podobnosti.*

9 Stejnolehlost

Stejnolehlost je podobné zobrazení, které je určeno svým *jediným samodružným bodem*, kterému říkáme *střed stejnohlosti*, a reálným číslem různým od 0 a 1, kterému říkáme *koeficient stejnohlosti*. Protože jsou ve stejnohlosti *všechny směry samodružné*, řadí se mezi tzv. *homotetie*²⁰, jak se zobrazení s touto vlastností nazývají (dalšími homotetiemi jsou identita, posunutí a středová souměrnost). Stejnolehlost



Obrázek 95: Pantograf – mechanická realizace stejnohlosti

se středem S a koeficientem κ (malé řecké písmeno *kappa*, tradiční symbol pro koeficient stejnohlosti, samozřejmě lze ale použít i jiná písmena) zapisujeme $\mathcal{H}(S, \kappa)$. Konkrétní vztah mezi vzorem a obrazem v tomto zobrazení je popsán jeho definicí.

Uvedeme si dvě definice stejnohlosti. První z nich, definice 25, popisuje krok za krokem postup zobrazení bodu roviny v dané stejnohlosti. Je to ta definice, která se většinou uvádí ve středoškolských učebnicích. Její výhodou je, že poskytuje jasný algoritmus nalezení obrazu pro libovolný bod roviny. Druhá z definic, definice 26, je podstatně stručnější, maximálně těží z vlastností geometrických vektorů. Jejím přínosem je stručné vyjádření podstaty vztahu mezi obrazem a vzorem ve stejnohlosti, které oceníme třeba při hledání jeho analytického vyjádření.

Zobrazení úsečky XY ve dvou stejnohlostech lišících se znaménkem koeficientu vidíme na Obr. 96.

Definice 25 (Stejnohlost I). *Budiž dán bod S a reálné číslo κ (různé od 0 a 1). Stejnolehlost $\mathcal{H}(S; \kappa)$ se středem S a koeficientem κ je zobrazení, které každému bodu X roviny přiřadí bod X' tímto způsobem:*

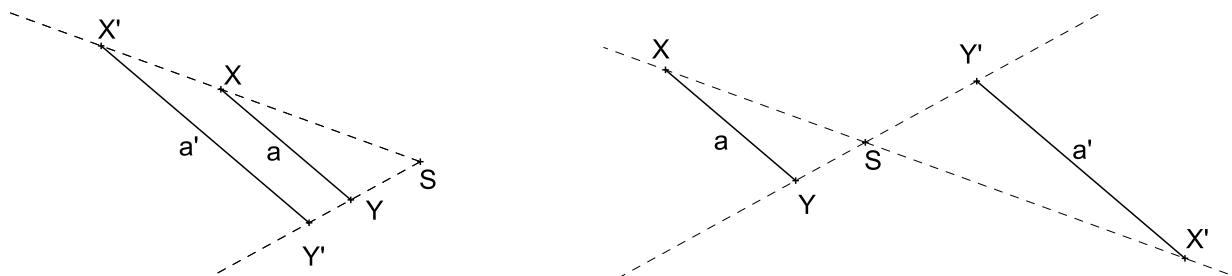
1. Pro $X \equiv S$ je $X' \equiv X$,

²⁰Anglicky je stejnohlost *homothety*, též *dilation*, viz https://en.wikipedia.org/wiki/Homothetic_transformation

2. Pro $X \neq S$ je $|X'S| = |\kappa| \cdot |XS|$,

pro $\kappa > 0$ leží X' leží na polopřímce \overrightarrow{SX} a

pro $\kappa < 0$ leží X' leží na polopřímce opačné k \overrightarrow{SX} .



Obrázek 96: Stejnolehlost $H(S, \kappa = 1.6)$ (vlevo) a $H(S, \kappa = -1.6)$ (vpravo)

Definice 26 (Stejnolehlost II). Budiž dán bod S a reálné číslo κ (různé od 0 a 1). Stejnolehlost $\mathcal{H}(S; \kappa)$ se středem S a koeficientem κ je zobrazení, které každému bodu X roviny přiřadí bod X' tak, že

$$\overrightarrow{SX'} = \kappa \overrightarrow{SX}. \quad (74)$$

PŘÍKLAD 9.1. Sestrojte obraz trojúhelníku $\triangle ABC$ ve stejnoolehlosti $\mathcal{H}(S, \kappa)$.

Řešení: Zobrazení trojúhelníku $\triangle ABC$ ve stejnoolehlostech \mathcal{H} s různými koeficienty κ si vyzkoušejte v online appletu <https://www.geogebra.org/m/arUb8mt6>.

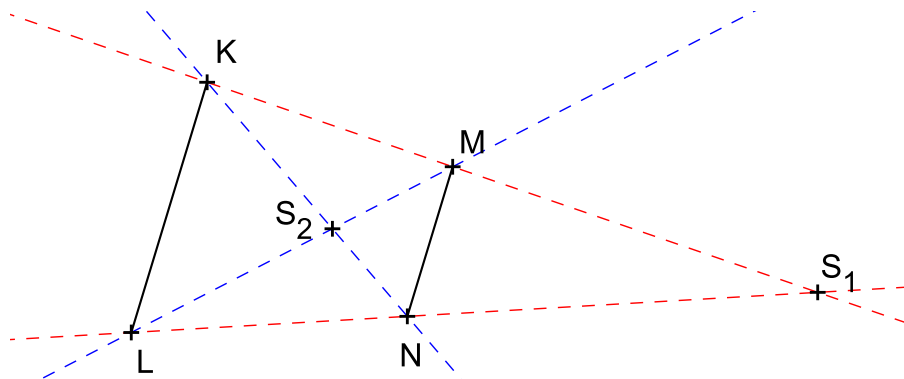
Vlastnosti stejnoolehlosti $H(S, \kappa)$

1. Vzor, jeho obraz a střed stejnoolehlosti leží v jedné přímce.
2. Obrazem přímky je přímka s ní rovnoběžná.
3. Obrazem úsečky AB je úsečka $A'B'$ s ní rovnoběžná; $A'B' \parallel AB \wedge |A'B'| = |\kappa| \cdot |AB|$.
4. Obrazem polopřímky je polopřímka s ní souhlasně ($\kappa > 0$) nebo nesouhlasně ($\kappa < 0$) rovnoběžná.
5. Obrazem úhlu $\angle AVB$ je úhel $\angle A'V'B'$; $|\angle A'V'B'| = |\angle AVB|$.

6. Zobrazení inverzní k stejnolehlosti $\mathcal{H}(S; \kappa)$ je stejnolehlost se stejným středem S , ale s převráceným koeficientem $\frac{1}{\kappa}$, tj. $\mathcal{H}^{-1}\left(S; \frac{1}{\kappa}\right)$.
7. Stejnolehlost s koeficientem $\kappa = -1$ je středovou souměrností, $\mathcal{H}(S, \kappa = -1) \equiv \mathcal{S}(S)$.

PŘÍKLAD 9.2. Jsou dány dvě vzájemně rovnoběžné úsečky různých délek. Určete středy stejnolehlostí, v nichž se jedna z nich zobrazuje na druhou.

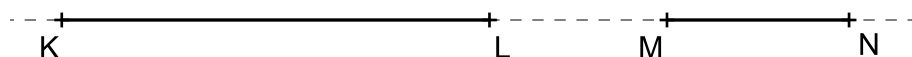
Řešení: Viz Obr. 97. Využijeme výše uvedenou vlastnost č. 1: *Vzor, jeho obraz a střed stejnolehlosti leží v jedné přímce.* Protože je stejnolehlost afinním zobrazením, zobrazí se úsečka zase na úsečku, konkrétně krajní body zase na krajní body a vnitřní body zase na vnitřní body. Zaměříme se na krajní body úseček. Buď se body K, L zobrazí po řadě na M, N , nebo na N, M . Spojíme-li dvojice bodů *vzor-obraz*, např. $K \rightarrow M, L \rightarrow N$, přímkami, jejich průsečíkem je střed příslušné stejnolehlosti (protože musí ležet na každé z těchto přímek), v daném případě S_1 . Pro dvojice $K \rightarrow N, L \rightarrow M$ dostáváme střed S_2 . Koeficienty příslušných stejnolehlostí se liší pouze znaménkem, jejich absolutní hodnota je rovna poměru délek úseček, pro případ zobrazení úsečky KL na MN , resp. NM je $|\kappa| = \frac{|KL|}{|MN|}$, v opačném případě je $|\kappa| = \frac{|MN|}{|KL|}$.



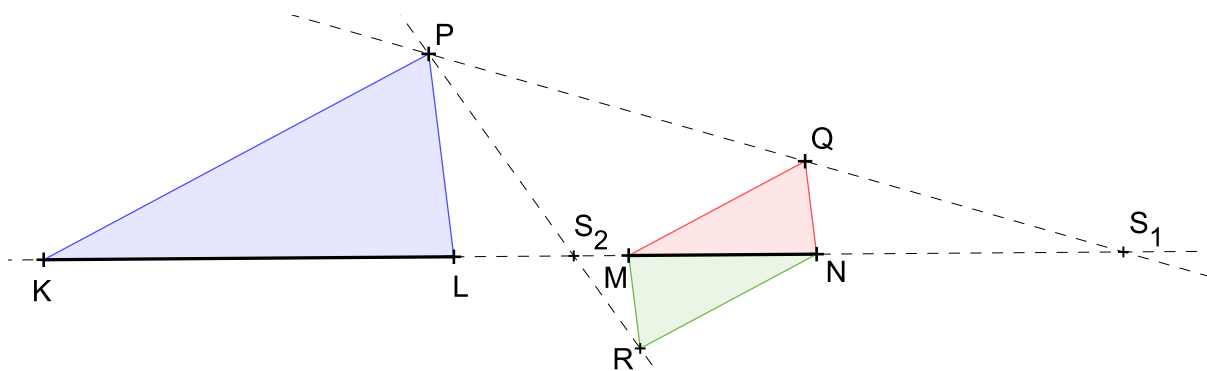
Obrázek 97: Středy stejnolehlostí dvou rovnoběžných úseček

PŘÍKLAD 9.3. Uvažujte variantu předchozího příkladu 9.2, v níž jsou dané úsečky v jedné přímce, viz Obr. 98

Řešení: Tentokrát nám postup použitý pro řešení příkladu 9.2, kde byly úsečky v obecné poloze, nepomůže. Přímký spojující koncové body úseček spolu splývají.



Obrázek 98: Jak určit středy stejnohlostí dvou kolineárních úseček?



Obrázek 99: Dané úsečky jako základny stejnohlostých trojúhelníků

Pomůžeme si tím, že si dané úsečky představíme jako součásti nějakých rovinných vzájemně stejnohlostých útvarů, například trojúhelníků, jak vidíme na Obr. 99. Mohou to být ale libovolné vzájemně stejnohlosté útvary, tj. útvary, které jsou podobné a jejichž sobě odpovídající úsečky (například strany n -úhelníku) jsou rovnoběžné. Omezíme-li se na trojúhelníky, z Obr. 99 vidíme, že existují dvě dvojice, které splňují daná kritéria. Je to v souladu s tím, že očekáváme existenci dvou stejnohlostí, v nichž se jedna úsečka zobrazí na druhou, stejně jako tomu bylo v případě příkladu 9.2. Online verze Obr. 99 je zde <https://www.geogebra.org/m/qSQGSZeP>.

Koeficient stejnohlosti vs. dělicí poměr

Vraťme se ještě k definici 12 stejnohlosti. Vektorovou rovnost (74), která je v ní uvedena, můžeme přepsat do tvaru

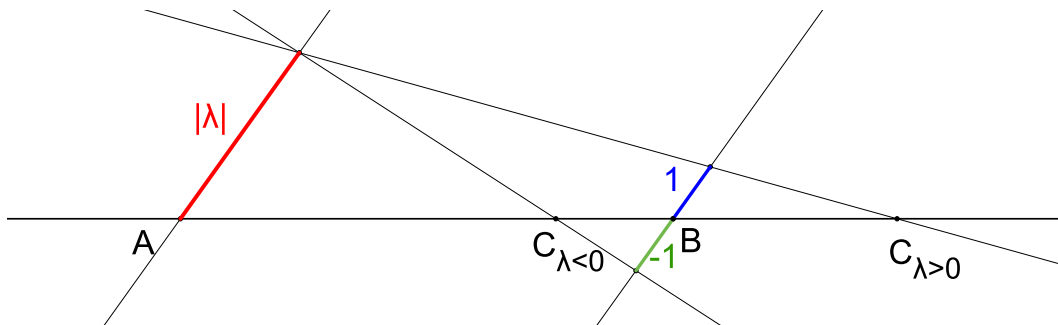
$$X' - S = \kappa(X - S). \quad (75)$$

Porovnáme-li nyní (75) s rovností (2) uvedenou v definici 26 dělicího poměru, viz str. 15, zjistíme, že vztah mezi vzorem X , obrazem X' a středem S ve stejnohlosti $\mathcal{H}(S, \kappa)$ se dá jednoduše zapsat pomocí dělicího poměru, platí

$$(X'XS) = \kappa. \quad (76)$$

I takto tedy můžeme definovat stejnohlost.

PŘÍKLAD 9.4. Jsou dány dva různé body A, B a reálné číslo $\lambda \neq 0, 1$. Najděte na přímce AB bod C tak, aby platilo $(ABC) = \lambda$.



Obrázek 100: $(ABC) = \lambda$

Řešení: Viz Obr. 100. Využijeme souvislost mezi dělicím poměrem a koeficientem stejnolehlosti. Online verze je na adrese <https://www.geogebra.org/m/fj34fcqh>.

9.1 Analytické vyjádření stejnolehlosti

Usilujeme o nalezení rovnice, která by vyjadřovala vztah mezi souřadnicemi vzoru $X[x, y]$ a obrazu $X'[x', y']$ ve stejnolehlosti \mathcal{H} dané středem $S[s_1, s_2]$ a koeficientem $\kappa \neq 0, 1$. Využijeme k tomu vektorovou rovnost $X' - S = \kappa(X - S)$ uvedenou na str. 111 v souvislosti s dělicím poměrem. Z ní úpravami postupně dostaneme nejprve

$$X' = S + \kappa X - \kappa S,$$

potom hledanou rovnici stejnolehlosti $\mathcal{H}(S, \kappa)$:

$$X' = \kappa X + (1 - \kappa)S. \quad (77)$$

Po dosazení souřadnic bodů můžeme (77) psát ve tvaru jedné rovnice

$$[x', y'] = \kappa[x, y] + (1 - \kappa)[s_1, s_2] \quad (78)$$

nebo jako soustavu dvou rovnic

$$\begin{aligned} x' &= \kappa x + (1 - \kappa)s_1, \\ y' &= \kappa y + (1 - \kappa)s_2. \end{aligned} \quad (79)$$

PŘÍKLAD 9.5. *Napište rovnice stejnolehlosti Eukleidovské roviny E_2 , která zobrazuje bod $B = [2, 0]$ na bod $C = [0, 1]$ a má koeficient $\kappa = -2$. Najděte souřadnice jejího středu.*

Řešení: Souřadnice bodů B, C jako vzoru a obrazu, spolu s $\kappa = -2$, dosadíme do (79) a řešíme jako rovnice s neznámými s_1 a s_2 . Dostaneme řešení $s_1 = \frac{4}{3}, s_2 = \frac{1}{3}$.

Opět dosadíme do (79), tentokrát však za s_1 , s_2 a κ , abychom dostali hledané rovnice příslušné stejnolehlosti

$$\begin{aligned}x' &= -2x + 4, \\y' &= -2y + 1.\end{aligned}$$

I když je úloha snadno řešitelná ručně, pro zajímavost si uvedme kód jejího řešení v programu wxMaxima:

(% i3) B:[2,0]\$ C:[0,1]\$ S:[s1,s2]\$

(% i4) H:C-S=-2*(B-S);

$$[-s1, 1 - s2] = [-2(2 - s1), 2s2] \quad (\text{H})$$

(% i5) res:solve(lhs(H)-rhs(H),[s1,s2])[1];

$$[s1 = \frac{4}{3}, s2 = \frac{1}{3}] \quad (\text{res})$$

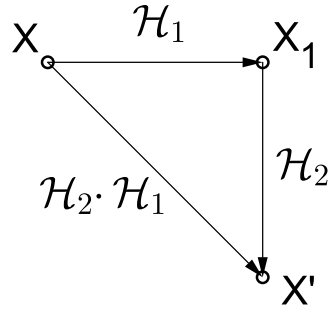
(% i6) S:ev(S,res);

$$\left[\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right] \quad (\text{S})$$

9.2 Skládání stejnolehlostí

Zajímá nás, jaká zobrazení mohou vzniknout složením dvou stejnolehlostí. Označíme-li je \mathcal{H}_1 a \mathcal{H}_2 , hledáme výsledek jejich složení $\mathcal{H}_2 \circ \mathcal{H}_1$ (a v obráceném pořadí $\mathcal{H}_1 \circ \mathcal{H}_2$), viz Obr. 101. V úvodu této kapitoly o stejnolehlosti jsme na str. 108 zmiňovali skutečnost, že stejnolehlost spolu s identitou, posunutím a středovou souměrností (což je ale vlastně stejnolehlost s koeficientem $\kappa = -1$) tvoří množinu tzv. *homotetií*, zobrazení, v nichž jsou všechny směry samodružné. Množina homotetií, spolu s operací skládání zobrazení, tvoří grupu (viz např. zmínka o *group of dilations or homothety-translations* v článku Wikipedia: Homothetic transformation). Výsledky našeho následujícího zkoumání budou této skutečnosti odpovídat (důkaz zde provádět nebudeme).

Uvažujme dvě stejnolehlosti $\mathcal{H}_1(S_1, \kappa_1)$, $\mathcal{H}_2(S_2, \kappa_2)$ s rovnicemi $\mathcal{H}_1 : X' = \kappa_1 X + (1 - \kappa_1)S_1$, $\mathcal{H}_2 : X' = \kappa_2 X + (1 - \kappa_2)S_2$. Jestliže, v duchu Obr. 101, stejnolehlost \mathcal{H}_1



Obrázek 101: Skládání zobrazení \mathcal{H}_1 a \mathcal{H}_2

zobrazuje bod X na X_1 a stejnoolehlost \mathcal{H}_2 zobrazuje bod X_1 na bod X' , můžeme tato zobrazení popsat rovnicemi

$$\mathcal{H}_1(X \longrightarrow X_1) : X_1 = \kappa_1 X + (1 - \kappa_1)S_1, \quad (80)$$

$$\mathcal{H}_2(X_1 \longrightarrow X') : X' = \kappa_2 X_1 + (1 - \kappa_2)S_2. \quad (81)$$

Potom pro složené zobrazení $\mathcal{H}_2 \circ \mathcal{H}_1$ platí následující rovnice, která vznikne příslušným složením (80) a (81),

$$\mathcal{H}_2 \circ \mathcal{H}_1(X \longrightarrow X') : X' = \kappa_2(\kappa_1 X + (1 - \kappa_1)S_1) + (1 - \kappa_2)S_2. \quad (82)$$

Po její úpravě dostáváme konečný tvar rovnice složeného zobrazení $\mathcal{H}_2 \circ \mathcal{H}_1$

$$X' = \kappa_1 \kappa_2 X + (1 - \kappa_1 \kappa_2)S_1 + (1 - \kappa_2)(S_2 - S_1), \quad (83)$$

ve kterém lze za uvedených podmínek identifikovat rovnice konkrétních zobrazení:

1. $\kappa_1 \kappa_2 = 1 \wedge S_1 \equiv S_2$ $\mathcal{H}_2 \circ \mathcal{H}_1 : X' = X.$ (84)

Jedná se o *identitu*.

2. $\kappa_1 \kappa_2 = 1 \wedge S_1 \neq S_2$ $\mathcal{H}_2 \circ \mathcal{H}_1 : X' = X + (1 - \kappa_2)(S_2 - S_1).$ (85)

Výsledným zobrazením je v tomto případě *posunutí* s vektorem $\vec{p} = (1 - \kappa_2)(S_2 - S_1)$.

3. $\kappa_1 \kappa_2 \neq 1 \wedge S_1 \equiv S_2$ $\mathcal{H}_2 \circ \mathcal{H}_1 : X' = \kappa_1 \kappa_2 X + (1 - \kappa_1 \kappa_2)S_1.$ (86)

Tentokrát je výsledným zobrazením *stejnoolehlost* se středem $S \equiv S_1 \equiv S_2$ a koeficientem $\kappa = \kappa_1 \kappa_2$.

4. $\kappa_1\kappa_2 \neq 1 \wedge S_1 \neq S_2$

$$\mathcal{H}_2 \circ \mathcal{H}_1 : X' = \kappa_1\kappa_2 X + (1 - \kappa_1\kappa_2) \left(S_1 + \frac{1 - \kappa_2}{1 - \kappa_1\kappa_2} (S_2 - S_1) \right). \quad (87)$$

I v tomto nejobecnějším případě je výsledným zobrazením *stejnolehlost*, tentokrát se středem $S = S_1 + \frac{1 - \kappa_2}{1 - \kappa_1\kappa_2} (S_2 - S_1)$ a koeficientem $\kappa = \kappa_1\kappa_2$. Z poněkud složitého výrazu pro střed S výsledné stejnoolehlosti lze vyčíst, že vznikne posunutím bodu S_1 ve směru vektoru $S_2 - S_1$. Střed nové stejnoolehlosti tedy leží na přímce spojující středy stejnoolehlostí, ze kterých vznikla.

Získané poznatky shrneme do následující věty, výše provedenou analýzou skládání dvou stejnoolehlostí již dokázanou.

Věta 11 (O skládání stejnoolehlostí). *Složením dvou stejnoolehlostí $\mathcal{H}_1(S_1, \kappa_1)$, $\mathcal{H}_2(S_2, \kappa_2)$ vznikne*

1. *IDENTITA*, jestliže $\kappa_1\kappa_2 = 1$ a $S_1 = S_2$,
2. *POSUNUTÍ*, jestliže $\kappa_1\kappa_2 = 1$ a $S_1 \neq S_2$,
3. *STEJNOLEHLOST* $\mathcal{H}(S, \kappa)$ s koeficientem $\kappa = \kappa_1\kappa_2$, jestliže $\kappa_1\kappa_2 \neq 1$. Přitom, pro $S_1 = S_2$ je také $S = S_1 = S_2$, pro $S_1 \neq S_2$ leží bod S na přímce S_1S_2 .

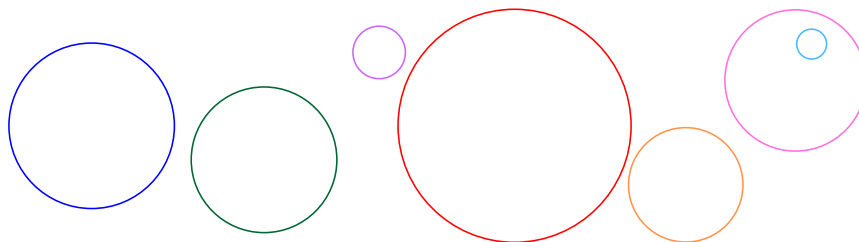
Zcela analogicky, tentokrát zkoumáním rovnice zobrazení složeného ze stejnoolehlosti a posunutí, bychom dospěli k potvrzení správnosti tvrzení níže uvedené věty. Tuto činnost již přenecháme laskavému čtenáři jako čistě dobrovolnou.

Věta 12 (O skládání stejnoolehlosti a translace). *Zobrazení složené ze stejnoolehlosti $\mathcal{H}(S; \kappa)$ a translace $X' = X + \vec{t}$ je stejnoolehlost $\mathcal{H}'(Q; \kappa)$, kde $Q = S + \frac{1}{1 - \kappa} \vec{t}$.*

9.3 Stejnolehlost kružnic

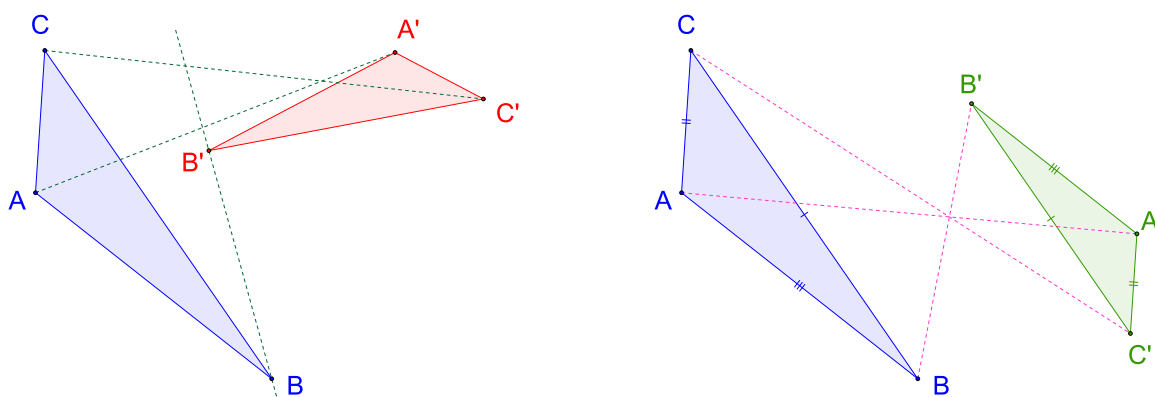
Že mají všechny kružnice stejný tvar, a mohou se lišit jenom svou velikostí, viz Obr. 102, tedy, že všechny kružnice jsou podobné, není nic překvapivého. Jednak je to zřejmé od pohledu, jednak víme, že pro každou kružnici, bez ohledu na její velikost, je poměr obvodu a průměru roven π .

Stejně přirozenou, ale možná méně zřejmou, je skutečnost, že *každé dvě kružnice jsou stejnoolehlelé*. U ostatních tvarů nelze předpokládat, že podobnost s sebou automaticky přináší i stejnoolehlost. Viz například trojúhelníky na Obr. 103. Obě zobrazené



Obrázek 102: Kružnice jsou podobné

dvojice trojúhelníků $\triangle ABC$ a $\triangle A'B'C'$ představují dvojice podobných trojúhelníků (konkrétně s koeficientem $k = 0,7$), přitom jenom dvojice vpravo je zároveň i dvojicí stejnohlých trojúhelníků (sobě odpovídající úsečky jsou rovnoběžné).

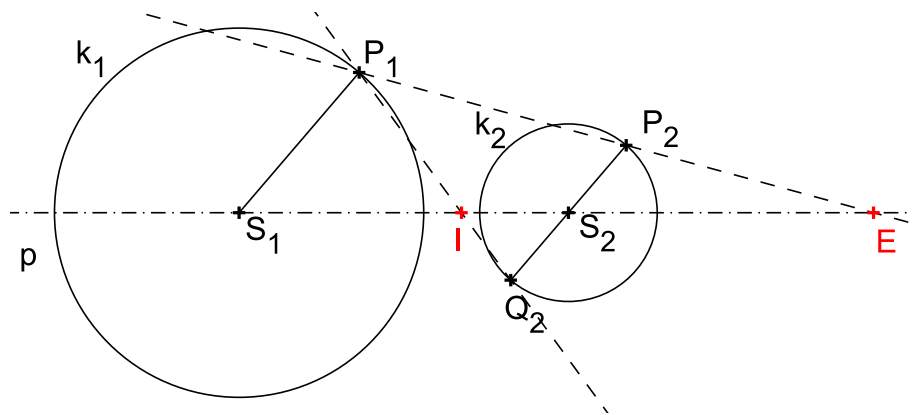


Obrázek 103: Ne každá dvojice podobných trojúhelníků je stejnohlá

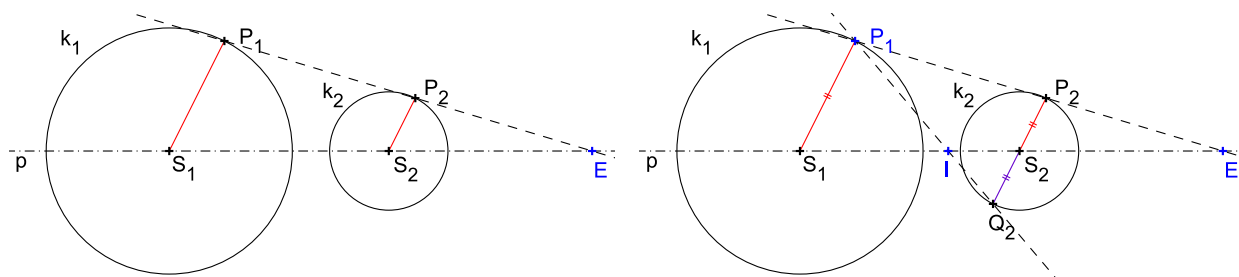
Pro dvě kružnice $k_1(S_1; r_1)$ a $k_2(S_2; r_2)$ s různými poloměry, viz Obr. 104, existují právě dvě stejnohlosti, které převádějí kružnici k_1 do kružnice k_2 : $\mathcal{H}_1(E, r_2/r_1)$ a $\mathcal{H}_2(I, -r_2/r_1)$. Přitom E se nazývá *vnější (externí) střed stejnohlosti* a I se nazývá *vnitřní (interní) střed stejnohlosti*. Jestliže se kružnice dotýkají v bodě T , potom v případě jejich vnějšího dotyku je $T = I$ a v případě jejich vnitřního dotyku je $T = E$.

PŘÍKLAD 9.6. Jsou dány dvě kružnice $k_1(S_1, r_1)$, $k_2(S_2, r_2)$, které mají různé poloměry, nejsou soustředné (tj. $r_1 \neq r_2$, $S_1 \neq S_2$) a nemají žádný společný bod. Najděte středy a koeficienty stejnohlostí, v nichž se jedna z nich, řekněme k_1 , zobrazuje na druhou, k_2 .

Řešení: Využijeme postup, který jsme uplatnili při řešení příkladu 9.2. Hledání středů stejnohlostí dvou kružnic převedeme na hledání středů stejnohlostí dvou úseček. Samozřejmě se musí jednat o úsečky, mezi kterými je vztah stejnohlosti ustaven stejným zobrazením, jako u kružnic. Použijeme vzájemně rovnoběžné poloměry daných kružnic, viz Obr. 105. Nejprve dvojici ležící v souhlasné polorovině



Obrázek 104: Stejnolehlost kružnic

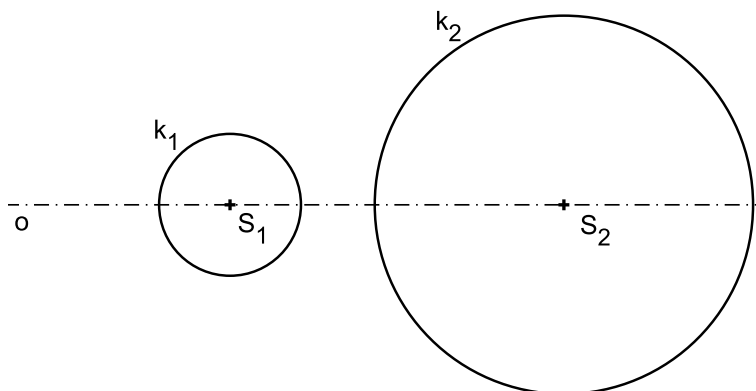


Obrázek 105: Určete středy stejnoolehlostí daných kružnic

vzhledem k S_1S_2 , viz Obr. 105, vlevo, potom u jedné z kružnic přidáme poloměr ležící v opačné polorovině, viz Obr. 105, vpravo. Přímkou P_1P_2 a P_1Q_2 spojující jejich krajní body náležející kružnicím svými průsečíky s přímkou S_1S_2 určují hledané středy stejnoolehlostí E a I . Mohli bychom pracovat i s rovnoběžnými průměry, ale protože víme, že hledané středy stejnoolehlostí těchto kružnic musí, s ohledem na symetrii, ležet na spojnici středů, poloměry stačí (můžeme ale argumentovat i tím, že střed každé z kružnic je jedním z krajních bodů jejího poloměru uvažovaného jako úsečka). Středy uvažovaných stejnoolehlostí jsme našli, zbývá tedy určit ještě koeficienty těchto stejnoolehlostí. Uvažujeme-li, že k_1 se zobrazí na k_2 , poměr jejich podobnosti je $k = \frac{r_2}{r_1}$. Stejnolehlost \mathcal{H}_1 se středem E bude mít koeficient stejný, tj. $\kappa_1 = \frac{r_2}{r_1}$, stejnolehlost \mathcal{H}_2 se středem I bude mít ale koeficient opačný, tj. $\kappa_2 = -\frac{r_2}{r_1}$.

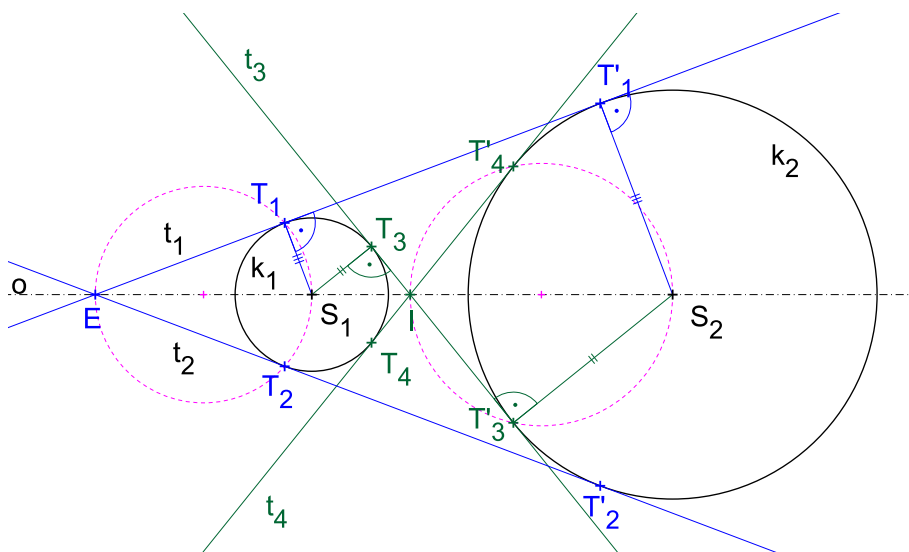
PŘÍKLAD 9.7. Jsou dány dvě nesoustředné kružnice $k_1(S_1, r_1)$, $k_2(S_2, r_2)$ o různých poloměrech r_1, r_2 , viz Obr. 106. Sestrojte jejich společné tečny!

Řešení: Klíčem k řešení této úlohy je poznatek, že společné tečny dvou kružnic procházejí středy jejich stejnoolehlostí. Dvě nesoustředné kružnice v poloze naznačené Obr. 106 mají čtyři společné tečny, dvě vnější, jejichž společným bodem je vnější střed stejnoolehlosti kružnic E , a dvě vnitřní, se společným bodem ve vnitřním středu



Obrázek 106: Sestrojte společné tečny daných kružnic

stejnolehlosti I . Že společné tečny kružnic musejí procházet středy jejich stejnolehlostí, lze vysvětlit uplatněním postupu řešení příkladu 9.6. Z Obr. 107 je patrné, že společné tečny dvojice kružnic jsou vlastně přímky spojující koncové body dvojic rovnoběžných poloměrů těchto kružnic, analogicky s řešením příkladu 9.6, akorát výjimečných tím, že jsou na tyto přímky kolmé.



Obrázek 107: Společné tečny daných kružnic procházejí středy I, E jejich stejnolehlostí

Společné tečny dvojice kružnic tedy sestojíme tak, že nejprve najdeme středy E, I stejnolehlostí, v nichž se jedna z kružnic zobrazuje na druhou. To provedeme postupem představeným v řešení příkladu 9.6. Potom z těchto bodů sestojíme tečny ke kružnicím. *Sestrojení tečny z bodu ke kružnici* je klasická úloha využívající Thaletovu větu, která se vyskytuje v učivu matematiky pro základní i střední školu. Thaletovy kružnice jsou v Obr. 107 naznačeny růžovými přerušovanými čarami.

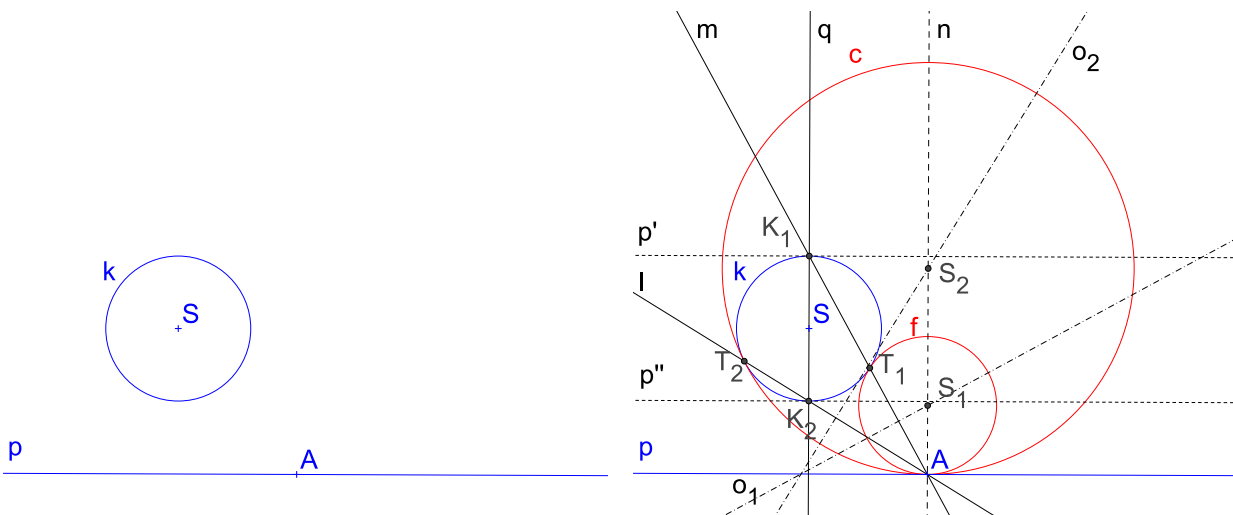
Následující příklady patří do kategorie tzv. Apolloniových²¹ úloh. Původním *Apolló-*

²¹Apollónios z Pergy, 3.–2. stol. př. n. l., řecký geometr a astronom

niovým problémem²² je úkol sestrojít všechny kružnice, které se dotýkají tří daných kružnic. Postupem času se v zadání jako kružnice začaly uznávat i body a přímky, protože bod můžeme chápat jako kružnici s nulovým poloměrem a přímku naopak jako kružnice s nekonečně velkým poloměrem. V současnosti se Apolloniiovou úlohou rozumí úkol sestrojít kružnici, která se dotýká tří objektů, které mohou být vybrány z množiny tří typů objektů {kružnice, bod, přímka}. Existuje tak celkem deset²³ typů Apolloniovy úlohy, tři z nich si nyní představíme.

PŘÍKLAD 9.8. Je dána kružnice k , přímka p , která je vnější přímkou kružnice k , a bod $A \in p$. Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají přímky p v bodě A a kružnice k .

Řešení: Zadání a řešení viz Obr. 108. Je zřejmé, že body dotyku hledaných kružnic a dané kružnice k jsou středy jejich stejnoolehlostí. Díky tomu je najdeme. Víme, že musí ležet na k a zároveň, dle vlastnosti stejnoolehlosti č. 1 (viz str. 109), jimi musí procházet přímky spojující vzory a obrazy v příslušných stejnoolehlostech. Teď už stačí jenom si uvědomit, že bodu A odpovídají v daných stejnoolehlostech postupně body K_1 a K_2 , které umíme sestrojít. Pak už je postup jasný. Konstrukce krok za krokem viz <https://www.geogebra.org/m/d9KBGDAj>. Úloha má dvě řešení, jednu kružnici s vnějším dotykem s k , druhou s vnitřním dotykem s k .



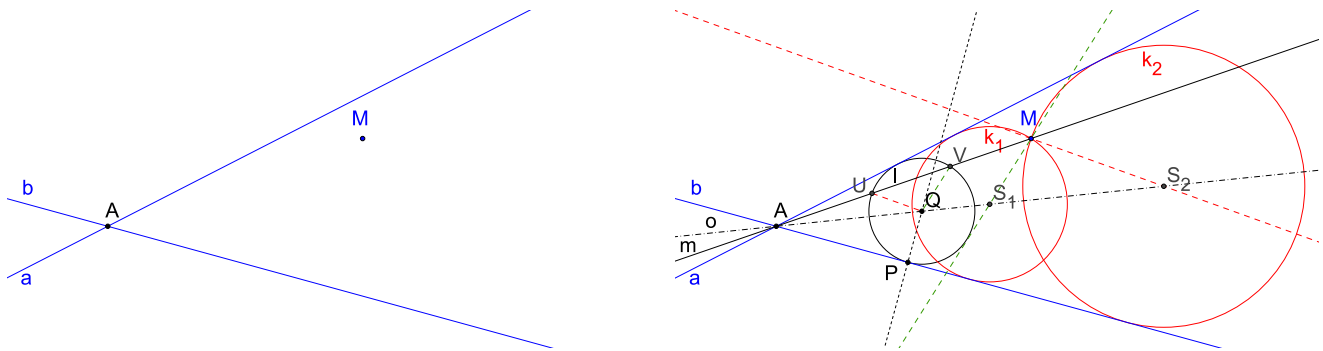
Obrázek 108: Apollóniova úloha bod-přímka-kružnice, vlevo zadání, vpravo řešení

PŘÍKLAD 9.9. Jsou dány dvě různoběžky a, b a bod M , který leží uvnitř jednoho jejich úhlu. Sestrojte všechny kružnice, které procházejí bodem M a dotýkají se přímkami a, b .

²²Viz Wikipedia: Problem of Apollonius

²³Odpověď na otázku „Proč 10?“ přenechávám laskavému čtenáři jako zajímavou kombinatorickou úlohu.

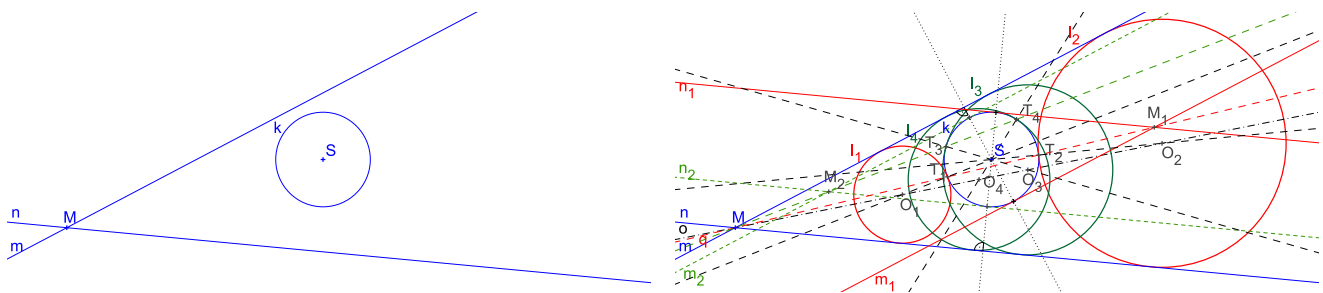
Řešení: Viz Obr. 110. Víme, že společné tečny dvojice kružnic procházejí středy jejich stejnolehlostí. Všechny kružnice, které se dotýkají dvou různoběžek jsou stejnohlé ve stejnolehlostech, jejichž středem je průsečík různoběžek, v našem případě bod A . Tuto znalost středu stejnolehlosti náležitě využijeme. Sestrojíme si libovolnou „pomocnou“ kružnici, která se bude také dotýkat daných různoběžek, viz kružnice l . Na ní musí ležet obraz (nebo vzor, záleží, v jakém směru zobrazení uvažujeme) bodu M ve stejnolehlosti se středem A . Stačí sestrojit přímkou $m \Leftrightarrow AM$ a najít její průsečíky s l , body U, V . Ty spojíme se středem Q pomocné kružnice. Obrazy (vzory) těchto poloměrů s nimi musí být rovnoběžné (viz vlastnost stejnolehlosti č. 3 na str. 109) a musí mít jako jeden krajní bod bod M a jako druhý krajní bod středn hledané kružnice S_1 , resp. S_2 . Sestrojíme proto rovnoběžky s úsečkami QU a QV jdoucí bodem M . Jejich průsečíky S_1, S_2 s osou různoběžek o jsou potom středy hledaných kružnic. Konstrukce krok za krokem viz <https://www.geogebra.org/m/CSW7xumC>. Úloha má dvě řešení.



Obrázek 109: Apollóniova úloha bod-přímka-kružnice, vlevo zadání, vpravo řešení

PŘÍKLAD 9.10. Jsou dány dvě různoběžky m, n a kružnice k ležící uvnitř jednoho jejich úhlu. Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají přímek m, n i kružnice k .

Řešení: Viz Obr. 110. Protože hledáme kružnice, které se dotýkají dané kružnice k ,



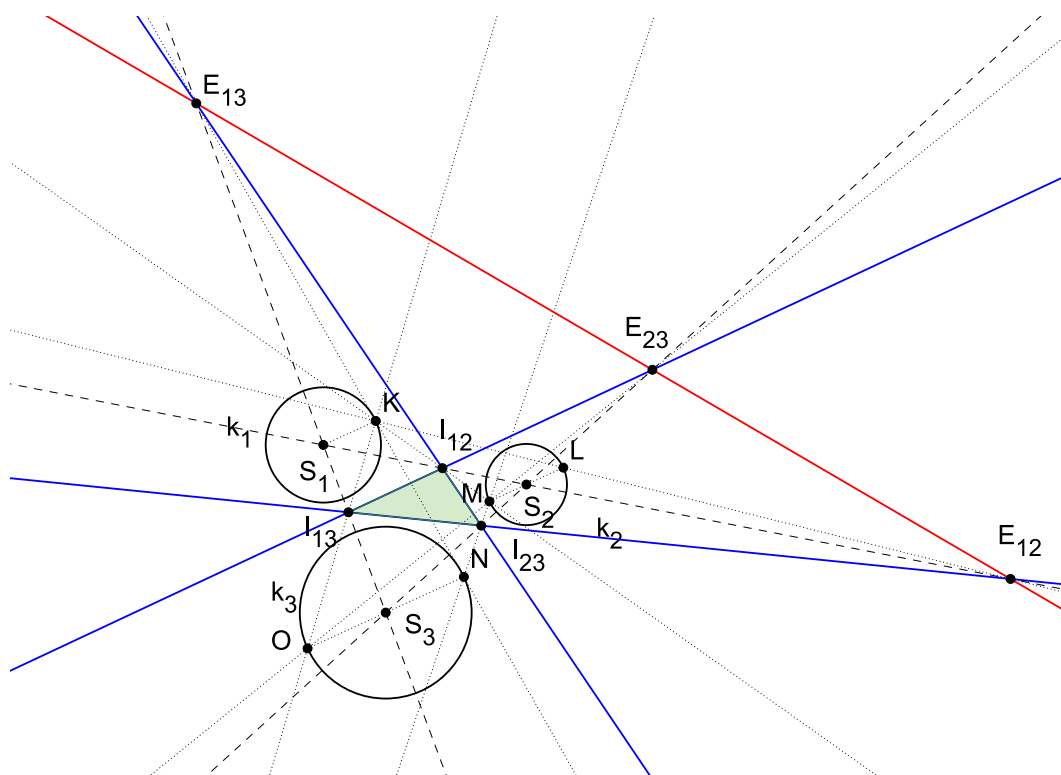
Obrázek 110: Apollóniova úloha bod-přímka-kružnice, vlevo zadání, vpravo řešení

budeme stejně jako při řešení příkladu 9.8 pracovat se stejnolehlostmi, jejichž středy jsou (nám dosud neznámé) body dotyku. Nalezení těchto bodů je klíčem k řešení

úlohy. Opět využijeme vlastnost stejnolehlosti č. 1 (viz str. 109), která říká, že vzor, obraz a střed leží v jedné přímce. Stačí uvědomit si, že hledané kružnice mají jako tečny dané přímky m, n . Jejich obrazy v uvažovaných stejnolehlostech musí být zase tečny dané přímky m, n . Jejich obrazy v uvažovaných stejnolehlostech musí být zase tečny dané přímky m, n , a musí být rovnoběžné s m nebo n . Přitom průsečík tečen m, n , bod M , se zobrazí na průsečík obrazů těchto tečen, bod M_1 , resp. M_2 . Postup nalezení bodů dotyku hledaných kružnic s k je tedy na světě. Sestrojíme tečny k rovnoběžné s m, n a průsečíky jejich dvojic, body M_1, M_2 spojíme přímkami s M . Průsečíky těchto přímek s k budou hledané body dotyku T_1, T_2, T_3, T_4 . Další postup je zřejmý. Konstrukce krok za krokem viz <https://www.geogebra.org/m/tccEujny>. Úloha má čtyři řešení, dvě kružnice s vnějším dotykem s k (na Obr. 110 jsou to červené kružnice), dvě s vnitřním dotykem s k (na Obr. 110 jsou to zelené kružnice).

9.4 Mongeova věta

Jsou-li dány tři různé kružnice v rovině, vnitřní a vnější střeďy příslušející každým dvěma z nich jsou dohromady spjaty zajímavými geometrickými vztahy, viz Obr. 111. Ty jsou předmětem *Mongeovy věty*. Věta je připisována francouzskému matematikovi *Gaspardu Mongeovi*, který položil základy deskriptivní geometrie.



Obrázek 111: Mongeova věta o třech kružnicích v rovině

Věta 13 (Mongeova věta). *Jsou-li k_1, k_2, k_3 tři kružnice, které mají různé poloměry a jejichž střeďy neleží v přímce, platí pro vnější a vnitřní střeďy stejnolehlostí každých*

dvou z nich následující vztahy:

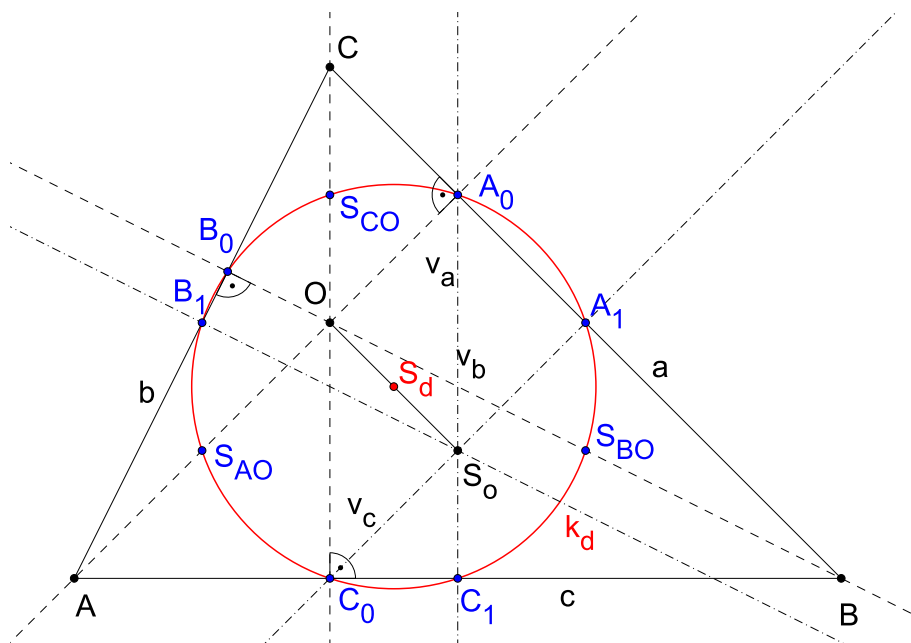
- i) Všechny tři vnější středy stejnolehlosti E_{12}, E_{13}, E_{23} leží v přímce.
- ii) Každé dva vnitřní středy stejnolehlosti a jeden vnější leží v přímce.
- iii) Tři vnitřní středy stejnolehlosti I_{12}, I_{13}, I_{23} neleží v přímce.

Důkaz. V důkazu využijeme tvrzení věty 11, že složením stejnolehlostí s různými středy vznikne pro $\kappa_1\kappa_2 \neq 1$ stejnolehlost, jejíž střed leží na přímce určené středy těchto stejnolehlostí. Pak už stačí mezi danými třemi kružnicemi najít tři stejnolehlosti takové, že jedna z nich je složením zbývajících dvou. Dynamický GeoGebra aplet k důkazu je na adrese <https://www.geogebra.org/m/osR9mHs8>. \square

9.5 Kružnice devíti bodů

V této a v následující kapitole si představíme dvě spolu související věty týkající se zajímavých vlastností trojúhelníku. Kromě zjevné souvislosti jejich obsahů mají společné i to, že k důkazu každé z nich lze efektivně využít stejnolehlost.

Věta 14 (Kružnice devíti bodů). V trojúhelníku ABC označme O průsečík výšek, S_o střed kružnice opsané, C_1, A_1, B_1 středy stran AB, BC a CA . Jestliže k_d je kružnice procházející body A_1, B_1 a C_1 , potom na ni leží také paty A_0, B_0, C_0 výšek v_a, v_b, v_c a středy úseček AO, BO, CO . Střed kružnice k_d je středem úsečky S_oO , její poloměr je roven polovině poloměru kružnice trojúhelníku ABC opsané.



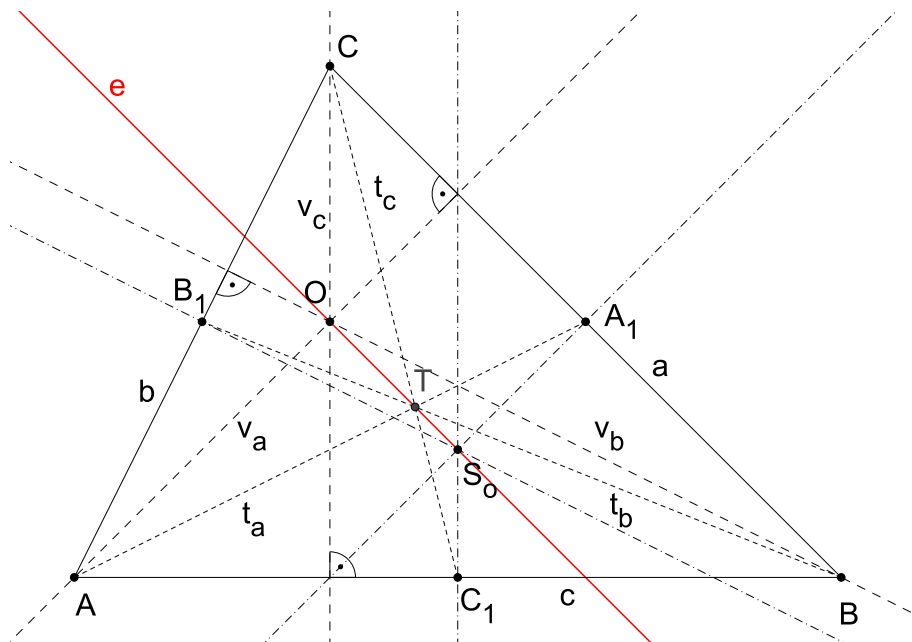
Obrázek 112: Kružnice devíti bodů

Ve větě uvedená kružnice se nazývá *kružnice devíti bodů* (též *Feuerbachova*²⁴ či *Eulerova*²⁵ *kružnice*), viz Obr. 112.

Konstrukce kružnice devíti bodů a její souvislost s Eulerovou přímkou (viz str. 123) je znázorněna v apletu „*Eulerova přímka. Kružnice devíti bodů.*“

9.6 Eulerova přímka

Věta 15 (Eulerova přímka). *V trojúhelníku ABC označme T těžiště, O průsečík výšek a S_o střed kružnice trojúhelníku opsané. Potom buď všechny tyto tři body splývají v jediný, nebo jsou navzájem různé a leží na společné přímce tak, že platí $(S_oOT) = -\frac{1}{2}$. Tuto přímku nazýváme Eulerova přímka, viz Obr. 113.*

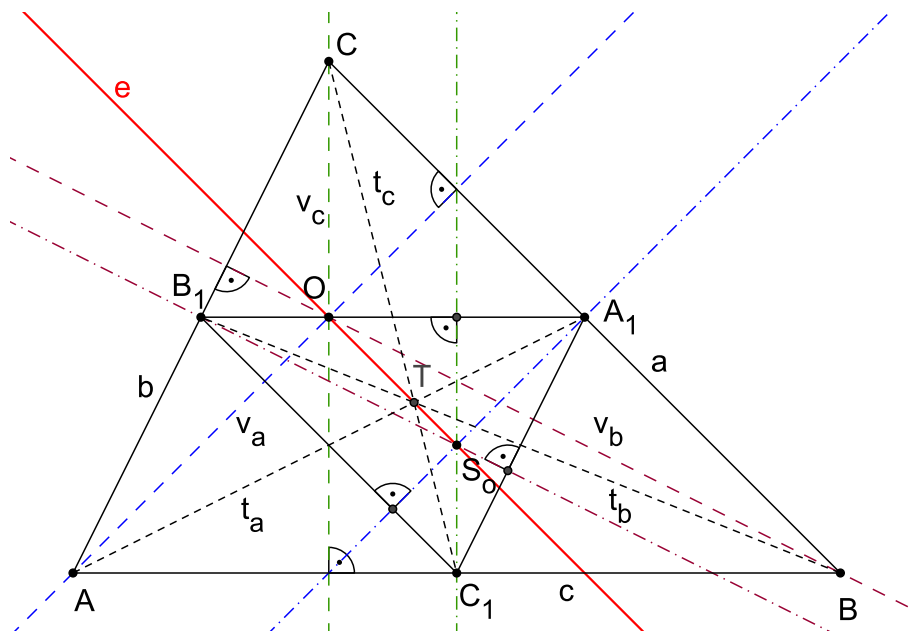


Obrázek 113: Eulerova přímka

Důkaz. K důkazu výše uvedeného tvrzení využijeme stejnolehlost $\mathcal{H}\left(T, -\frac{1}{2}\right)$. Z Obr. 114 je patrné, že v této stejnolehlosti se $\triangle ABC$ zobrazí na $\triangle A_1B_1C_1$. Protože výškami (výšky teď chápeme jako přímky) $\triangle A_1B_1C_1$ jsou osy stran původního $\triangle ABC$, můžeme říci, že výšky trojúhelníku ABC se ve stejnolehlosti $\mathcal{H}\left(T, -\frac{1}{2}\right)$ zobrazí na osy jeho stran. Potom se ale průsečík výšek O zobrazí na průsečík os stran

²⁴Karl Wilhelm Feuerbach, 1800–1834, německý matematik, bratr filozofa Ludwiga Feuerbacha.

²⁵Leonhard Euler, 1707–1783, švýcarský matematik s přesahy do dalších disciplín, považovaný za jednoho z největších a nejvšestrannějších matematiků historie této vědy.



Obrázek 114: $\mathcal{H}\left(T, -\frac{1}{2}\right) : \triangle ABC \rightarrow \triangle A_1B_1C_1$

(tj. střed kružnice opsané $\triangle ABC$) S_o . Z vlastností stejnoolehlosti plyne, že příslušné tři body O, S_o, T leží v přímce a platí pro ně $(S_oOT) = -\frac{1}{2}$. \square

Konstrukce Eulerovy přímky a její souvislost s kružnicí devíti bodů (viz str. 122) je znázorněna v apletu „Eulerova přímka. Kružnice devíti bodů.“

9.7 Podobnosti eukleidovské roviny

Zde zakončíme svou exkurzi do světa podobností v rovině. Uvedeme si, že spolu s operací skládání geometrických zobrazení tvoří grupu a naznačíme si klasifikaci podobností roviny v duchu klasifikace shodností roviny na str. 92, s využitím rovnic (67), (68) pro přímou a nepřímou shodnost, které jsou tam uvedeny.

Grupa podobností roviny

Množina všech podobností eukleidovského prostoru E_2 spolu s operací skládání tvoří grupu - tzv. *grupu podobností prostoru E_2* (též *grupu podobností roviny*).

Důkazem uvedeného tvrzení se zabývat nebudeme. Je však zřejmé, že plyne z toho, co následuje.

Na str. 102 je uvedena věta 9, která říká, že každé podobné zobrazení eukleidovské roviny do sebe lze složit ze *stejnolehlosti* a *shodnosti*. Tuto skutečnost nyní, spolu s analytickým vyjádřením přímé a nepřímé shodnosti, viz str. 92, a analytickým vyjádřením stejnohlosti, viz str. 112, využijeme k tomu, abychom popsali rovnicemi i podobnost v rovině.

Ze skutečnosti, že *každou podobnost v rovině lze složit ze stejnohlosti a shodnosti*, získáme rovnice podobnosti následujícím způsobem.

1. Stejnolehlost \mathcal{H} volíme pro jednoduchost se středem v počátku soustavy souřadnic a s koeficientem $\kappa > 0$ (připomeňme si, že střed stejnohlosti můžeme při rozkladu podobnosti volit libovolně):

$$\mathcal{H} : X \mapsto \bar{X}; \quad \bar{x} = \kappa x \\ \bar{y} = \kappa y.$$

2. Shodnost \mathcal{Z} (která je výše zmíněnou volbou stejnohlosti určena jednoznačně) je buď přímá nebo nepřímá, platí tedy jedna ze sad rovnic (67), (68):

$$\mathcal{Z} : \bar{X} \mapsto X'; \quad x' = \bar{x} \cos \alpha \mp \bar{y} \sin \alpha + p \\ y' = \bar{x} \sin \alpha \pm \bar{y} \cos \alpha + q.$$

Výsledkem složení $\mathcal{Z} \circ \mathcal{H}$ je potom *přímá* nebo *nepřímá podobnost*. Rovnice pro oba případy jsou přehledně uvedeny v následující tabulce. Kromě tvarů s goniometrickými funkcemi sinus a kosinus jsou použity i tvary s parametry a, b na místech koeficientů.

Přímá podobnost	Nepřímá podobnost
$\begin{aligned}x' &= kx \cos \alpha - ky \sin \alpha + p \\y' &= kx \sin \alpha + ky \cos \alpha + q.\end{aligned}$	$\begin{aligned}x' &= kx \cos \alpha + ky \sin \alpha + p \\y' &= kx \sin \alpha - ky \cos \alpha + q.\end{aligned}$
$\begin{aligned}x' &= ax - by + p \\y' &= bx + ay + q.\end{aligned}$	$\begin{aligned}x' &= ax + by + p \\y' &= bx - ay + q.\end{aligned}$

Na str. 26 jsme si uvedli kritérium (31) pro rozhodnutí, zda je daná afinita shodností. Pro matici A soustavy rovnic příslušné afinity musí platit $A^T \cdot A = E$. Zajímá nás, zda se podobným způsobem dá identifikovat také podobnost. Jak poznáme, že afinita daná rovnicí $X' = A \cdot X + B$ je podobností? Vzhledem k evidentní souvislosti mezi podobností a shodností v rovině, která je naznačena výše uvedenými rovnicem, je zřejmé, že aby uvažovaná afinita byla podobností, musí platit

$$A^T \cdot A = \begin{bmatrix} k^2 & 0 \\ 0 & k^2 \end{bmatrix} = k^2 \cdot E, \quad (88)$$

kde $|k|$ je koeficientem této podobnosti.

Vztah mezi podobnostmi a shodnostmi, dosud vyjádřený složením stejnohlosti a shodnosti, se dá popsat ještě detailněji, konkretizací shodností, které připadají v úvahu. O tom hovoří následující věta, kterou zde uvádíme bez důkazu.

Věta 16. *Každá vlastní podobnost eukleidovské roviny je buď stejnohlost, nebo stejnohlost složená s otočením kolem středu stejnohlosti, nebo stejnohlost složená s osovou souměrností, jejíž osa prochází středem stejnohlosti.*

9.8 Cvičení: Stejnolehlost. Podobnost.

1. Do půlkruhu s průměrem AB vepište čtverec $KLMN$ tak, aby strana KL ležela na úsečce AB a další dva vrcholy M, N na dané půlkružnici.
2. Je dána přímka p , kružnice k a bod A . Sestrojte všechny úsečky XY tak, aby platilo: $X \in p, Y \in k, A \in XY, |AY| = 3|AX|$.
3. Jsou dány dvě různoběžky a, b a kružnice k tak, že a je sečnou a b je vnější přímkou kružnice k . Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají přímek a, b i kružnice k .
4. Sestrojte trojúhelník ABC , je-li dáno:
 - a) $v_a = 5\text{cm}, a : b : c = 2 : 3 : 4$,
 - b) α, β, v_c ,
 - c) α, β, t_c ,
 - d) $a : b = 3 : 5, \gamma = 60^\circ, t_c = 6\text{cm}$.
5. Určete p tak, aby existovala stejnolehlost se středem $[3, 2]$, zobrazující bod $[1, 4]$ na bod $[2, p]$. Napište rovnice této stejnolehlosti.
6. Je dána kružnice k a bod M uvnitř této kružnice. Sestrojte všechny tětivy kružnice, které jsou bodem M rozděleny na části v poměru $2 : 3$.
7. Narýsujte libovolný trojúhelník ABC . Uvnitř strany AC sestrojte bod X a uvnitř strany BC bod Y tak, aby platilo $|AX| = |XY|$ a $XY \parallel AB$.
8. Najděte všechny podobnosti euklidovské roviny, při kterých se bod $[1, 0]$ zobrazí na bod $[4, -2]$ a bod $[2, 3]$ na bod $[2, -8]$.
9. Najděte podobnost euklidovské roviny, při které se zobrazí počátek na bod $[0, 2]$, bod $[1, 1]$ na počátek a bod $[2, 0]$ na bod $[2, p]$. Určete p a najděte samodružné body a směry nalezené podobnosti.
10. Najděte rovnice podobnosti, při které je počátek samodružný a obrazem bodu $[5, -3]$ je bod $[1, 1]$.
11. Určete všechny podobnosti, pro které jsou bod $[1, 1]$ a směr vektoru $(1, 1)$ samodružné.
12. Napište rovnice všech podobností zobrazujících body $[1, 2]$ a $[0, 1]$ po řadě na body $[3, -1], [4, 2]$. Rozložte je na stejnolehlost a shodnost.

13. V rovině je dán čtverec $ABCD$ se středem S . Určete obraz bodu C v podobnosti, která zobrazuje body A, B, S po řadě na body B, D, C . Určete samodružný bod této podobnosti.

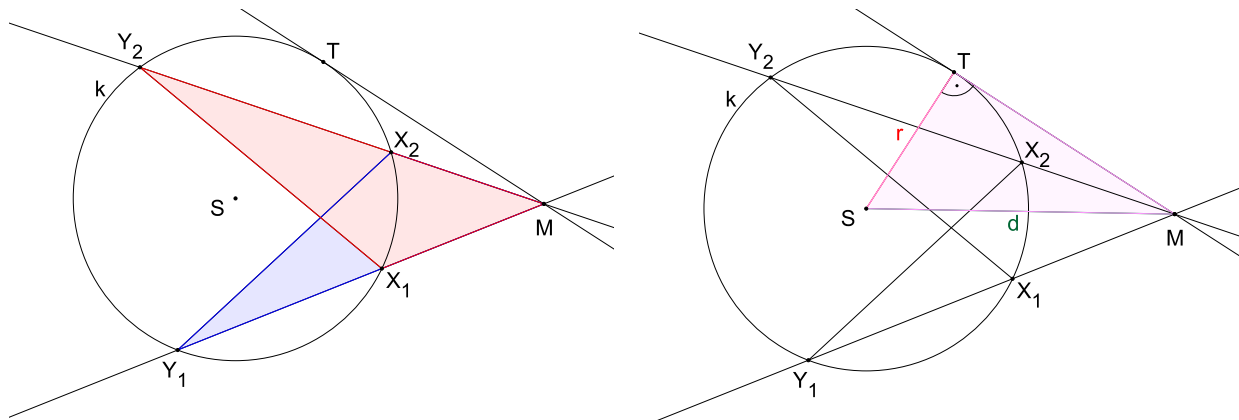
14. Je dána kružnice k a bod A , který je bodem vnější oblasti kružnice k . Sestrojte všechny sečny kružnice k , které procházejí bodem A a pro jejichž průsečíky X, Y s kružnicí platí $|AX| = 2|AY|$.

15. Je dána kružnice $k(S; 4\text{cm})$, její tečna t a bod $M \in k$ tak, že $|Mt| = 2\text{cm}$. Sestrojte úsečku XY procházející bodem M tak, aby $X \in k, Y \in t$ a $|MX| : |MY| = 3 : 2$.

16. Jsou dány dvě různoběžky a, b a kružnice k tak, že $P \in a \cap b$ je bodem vnitřní oblasti kružnice k . Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají přímk a, b i kružnice k .

10 Mocnost bodu ke kružnici

Mocnost bodu ke kružnici je reálné číslo, označme ho m , které je dáno polohou bodu vzhledem k příslušné kružnici; pro body vně kružnice je kladné, pro body uvnitř záporné a pro body na kružnici je rovno nule. Toto číslo je zajímavé a užitečné i tím, že jeho hodnota souvisí se vzdálenostmi předmětného bodu od průsečíků libovolné sečny z něj vedené s příslušnou kružnicí. Souvislosti, které přináší mocnost do vztahů kružnic a bodů, se využívají při řešení rozličných geometrických problémů.



Obrázek 115: $|MX_1| \cdot |MY_1| = |MX_2| \cdot |MY_2| = |MT|^2 = |m|$, $m = d^2 - r^2$

Nyní si odvodíme hodnotu tohoto čísla a ukážeme si všechny jeho geometrické souvislosti. Uvažujme kružnici $k(S; r)$ a bod M , viz Obr. 115. Nejprve se zaměříme na dvě libovolné sečny vedené z bodu M ke kružnici k , které mají s k po řadě dvojici průsečíků X_1, Y_1 a X_2, Y_2 , viz Obr. 115, vlevo. Snadno zjistíme, že trojúhelníky $\triangle MY_1X_2$ a $\triangle MY_2X_1$ jsou dle věty *uu* podobné²⁶, $\triangle MY_1X_2 \sim \triangle MY_2X_1$. Potom ale platí

$$\frac{|MY_1|}{|MY_2|} = \frac{|MX_2|}{|MX_1|}, \quad (89)$$

po úpravě

$$|MX_1| \cdot |MY_1| = |MX_2| \cdot |MY_2|. \quad (90)$$

Součiny na obou stranách rovnice jsou stejné. Protože jsme příslušné dvě tětivy volili náhodně, můžeme tento poznatek zobecnit. Hodnota součinu $|MX| \cdot |MY|$, kde X, Y jsou průsečíky tětivy z bodu M ke kružnici k , je pro daný bod M a danou kružnici k konstantní,

$$|MX| \cdot |MY| = \text{konst.} \quad (91)$$

²⁶Vnitřní úhel při vrcholu M je trojúhelníkům společný, vnitřní úhly $\angle X_1Y_2M$, $\angle MY_1X_2$ jsou shodné, protože se jedná o obvodové úhly příslušející stejnému oblouku X_1X_2

Pokud toto platí pro libovolnou tětivu, musí to platit i pro takovou, jejíž průsečíky s kružnicí k jsou od sebe velmi blízko, nekonečně blízko. Tj. platí to i pro tečnu, kterou můžeme chápat jako tětivu, jejíž body X, Y splynuly v jeden bod T ,

$$|MX| \cdot |MY| = |MT|^2 = \text{konst.} \quad (92)$$

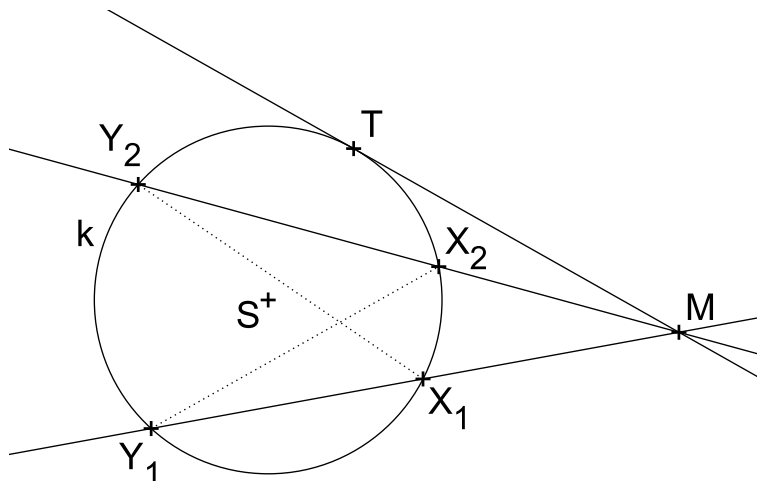
Z Obr. 115, vpravo, je patrné, že $\triangle SMT$ je pravoúhlý trojúhelník, v němž platí $|SM|^2 = |MT|^2 + |ST|^2$. Přitom $|ST| = r$. Pokud navíc vzdálenost $|MS|$ označíme d , můžeme psát

$$|MX| \cdot |MY| = |MT|^2 = d^2 - r^2. \quad (93)$$

Tímto, nutno říci, že místy povrchním, rozbořem situace jsme odkryli základní vztahy pro mocnost bodu M vzhledem ke kružnici k . Nyní se budeme věnovat jejich bližší specifikaci.

Definice 27 (Mocnost bodu ke kružnici). *Mocností bodu M ke kružnici $k(S; r)$ rozumíme reálné číslo m , pro které platí:*

- (1) $|MX| \cdot |MY| = |m|$, kde X, Y jsou průsečíky kružnice k s její libovolnou sečnou procházející bodem M .
- (2) Je-li M vnějším bodem kružnice k , je $m > 0$.
- (3) Je-li M vnitřním bodem kružnice k , je $m < 0$.
- (4) Je-li $M \in k$, je $m = 0$.



Obrázek 116: Mocnost bodu M ke kružnici k

Věta 17. Je dána kružnice $k(S; r)$ a bod M , který na ní neleží. Potom pro libovolné dvě sečny kružnice k , které procházejí bodem M , jejichž průsečíky s kružnicí k označíme X_1, Y_1 a X_2, Y_2 , platí

$$|MX_1| \cdot |MY_1| = |MX_2| \cdot |MY_2|.$$

Důkaz. Viz odvození vztahu (90) na str. 129. □

Věta 18. Nechť je dána kružnice $k(S; r)$ a bod M . Potom pro mocnost m bodu M ke kružnici k platí

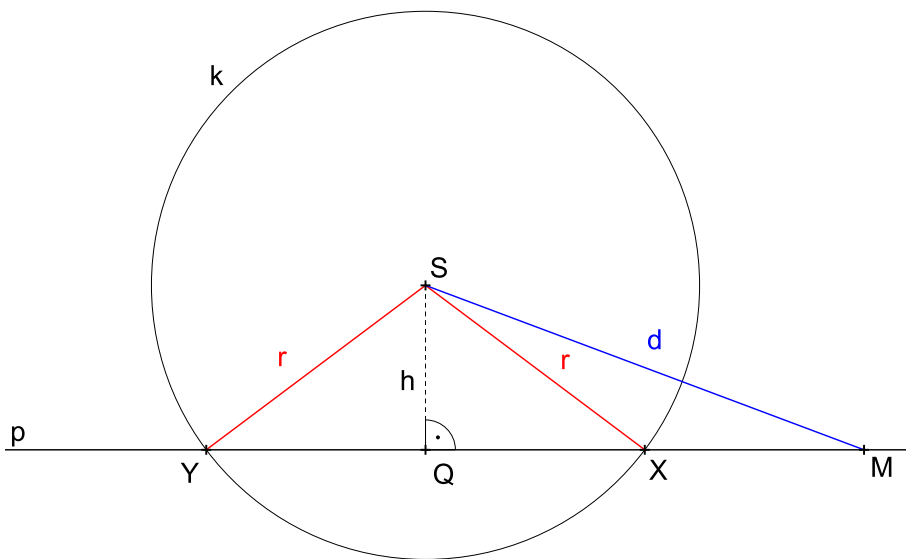
$$m = d^2 - r^2,$$

kde $d = |MS|$ je vzdálenost bodu M od středu kružnice k .

Důkaz. Větu dokážeme zvlášť pro případ, kdy je bod M vně k a zvlášť pro případ, kdy je M uvnitř k .

I. Bod M leží vně k : Viz Obr. 117. Platí $|MX| \cdot |MY| = (|MQ| - |QX|) \cdot (|MQ| + |QY|)$. Protože $|QY| = |QX|$ (Q je středem tětiny XY), můžeme při postupném uplatnění vztahu pro rozdíl čtverců a Pythagorovy věty psát

$$\begin{aligned} |MX| \cdot |MY| &= (|MQ| - |QX|) \cdot (|MQ| + |QX|) \\ &= |MQ|^2 - |QX|^2 = d^2 - h^2 - r^2 + h^2 = d^2 - r^2. \end{aligned} \tag{94}$$

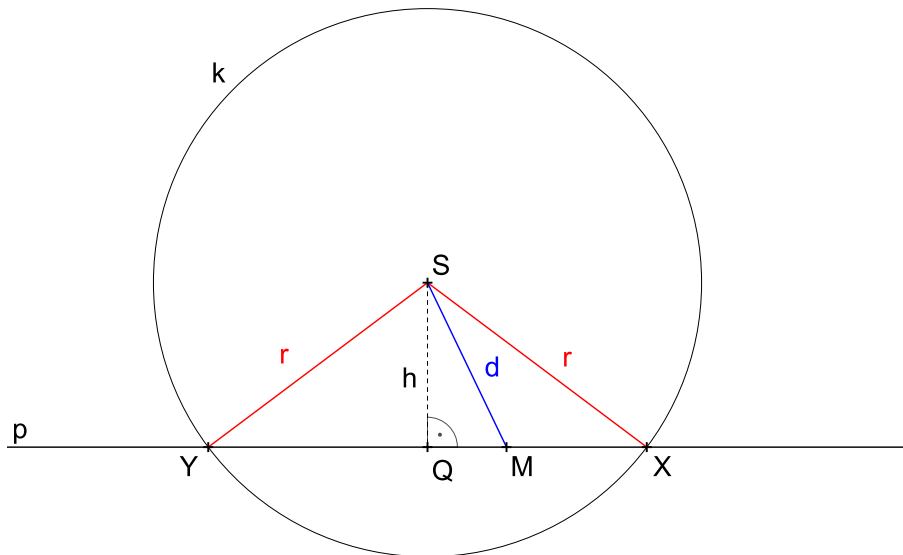


Obrázek 117: $|MX| \cdot |MY| = d^2 - r^2$

II. Bod M leží uvnitř k : Viz Obr. 118. Platí $|MX| \cdot |MY| = (|QX| - |QM|) \cdot (|QY| + |QM|)$. Protože $|QY| = |QX|$ (Q je středem tětiny XY), můžeme při postupném

uplatnění vztahu pro rozdíl čtverců a Pythagorovy věty psát

$$\begin{aligned} |MX| \cdot |MY| &= (|QX| - |QM|) \cdot (|QX| + |QM|) \\ &= |QX|^2 - |QM|^2 = r^2 - h^2 - d^2 + h^2 = r^2 - d^2. \end{aligned} \quad (95)$$



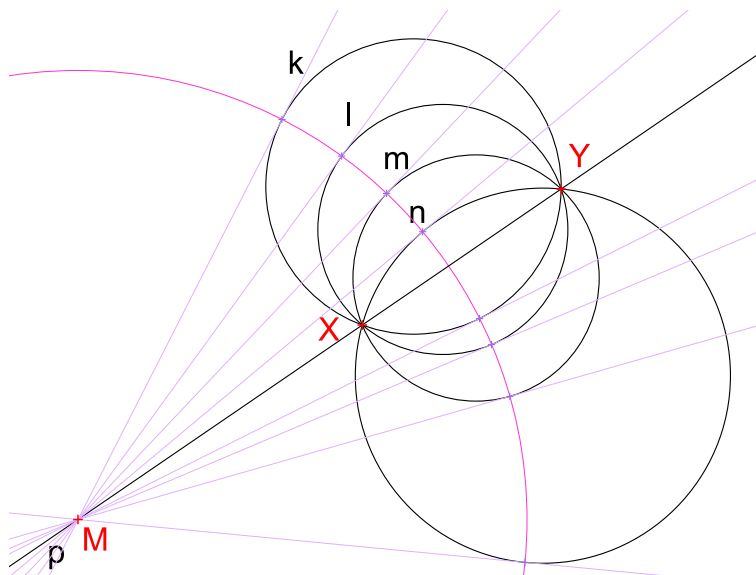
Obrázek 118: $|MX| \cdot |MY| = r^2 - d^2$

Dáme-li vztahy (94) a (95) dohromady, můžeme učinit následující závěr. Pro bod M vně kružnice k je $m = d^2 - r^2 > 0$, pro bod M uvnitř k je $m = d^2 - r^2 < 0$ a nakonec, pro bod M ležící na kružnici k je $m = d^2 - r^2 = 0$. Vždy je přitom $|m| = |MX| \cdot |MY|$. Tím je věta dokázána. \square

Věta 19. *Nechť M je vnější bod kružnice $k(S; r)$, m jeho mocnost ke kružnici k . Jestliže T je dotykový bod tečny vedené z bodu M ke kružnici k , tak platí $|MT|^2 = m$.*

Důkaz. Viz odvození vztahu (93) na str. 130. \square

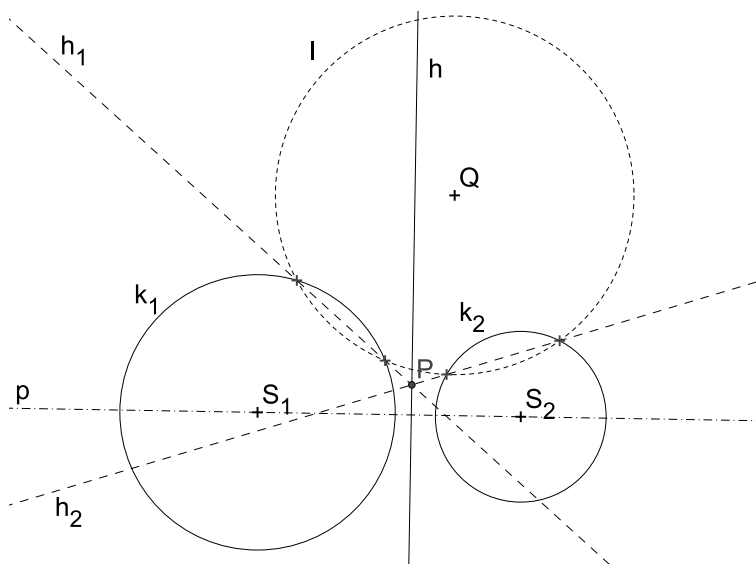
Souvislost hodnoty mocnosti bodu M ke kružnici s jeho vzdálenostmi od průsečíků X, Y jím vedené přímkou s kružnicí, vyjádřená vztahem (91), znamená, že daný bod M má stejnou mocnost ke všem kružnicím, které body X, Y procházejí, bez ohledu na jejich poloměry. Na Obr. 119 vidíme čtyři takové kružnice, k, l, m a n . Máme-li na mysli všechny kružnice procházející body X, Y , hovoříme o svazku kružnic. Na Obr. 119 jsou zobrazeny i tečny z M ke všem kružnicím k, l, m, n . Důsledkem vztahu (93) je to, že body dotyku všech těchto tečen jsou od M stejně daleko, leží tedy na kružnici se středem M .



Obrázek 119: Bod M má stejnou mocnost ke všem kružnicím s tětivou XY

10.1 Chordála a potenční střed

Je zřejmé, že když posuneme bod M podél přímky $p \equiv \leftrightarrow XY$, viz Obr. 119, hodnota jeho mocnosti vzhledem ke kružnicím k, l, m, n (a všem ostatním z téhož svazku) se změní, opět ale bude ke všem stejná. Přímka p je tedy množinou bodů, které mají ke kružnicím k, l, m, n stejnou mocnost. Přímku s touto vlastností vzhledem ke dvěma kružnicím nazýváme *chordála*.



Obrázek 120: Chordála h kružnic k_1, k_2 , potenční bod P kružnic k_1, k_2, l

Věta 20 (Chordála dvojice kružnic). *Nechť jsou $k_1(S_1; r_1), k_2(S_2; r_2)$ dvě nesoustředné kružnice. Množina bodů X , které mají k oběma kružnicím stejnou mocnost,*

je přímka $h \perp S_1S_2$. Jestliže kružnice k_1, k_2 mají společný bod M , potom přímka h prochází tímto bodem.

Poznámka. Přímka h , která je množinou bodů X , majících stejnou mocnost k nesoustředným kružnicím k_1, k_2 se nazývá **chordála** (též potenční přímka) kružnic k_1, k_2 .

Poznámka. Bod, který má ke třem vzájemně různým kružnicím stejnou mocnost se nazývá **potenční bod** (též potenční střed).

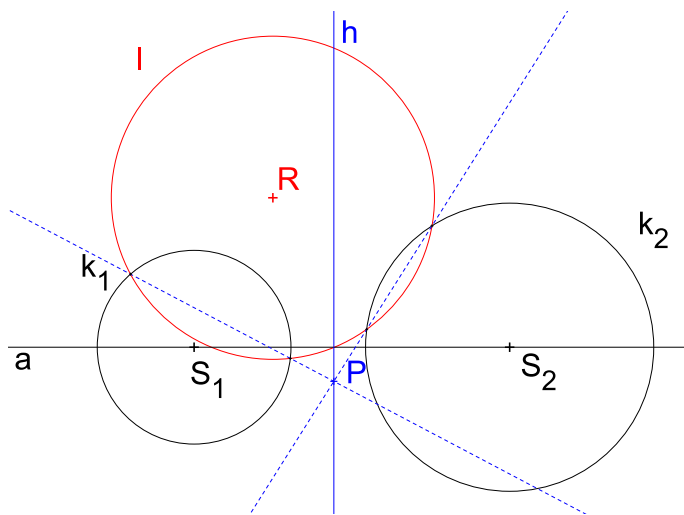
Analytické vyjádření chordály

Chordálu kružnic $k_1(S_1[m_1, n_1], r_1)$, $k_2(S_2[m_2, n_2], r_2)$ s rovnicemi $k_1 : (x - m_1)^2 + (y - n_1)^2 = r_1^2$ a $k_2 : (x - m_2)^2 + (y - n_2)^2 = r_2^2$ můžeme analyticky vyjádřit rovnicí:

$$(x - m_1)^2 + (y - n_1)^2 - r_1^2 = (x - m_2)^2 + (y - n_2)^2 - r_2^2 \quad (96)$$

PŘÍKLAD 10.1. Sestrojte chordálu dvou nesoustředných kružnic k_1, k_2 , které nemají společný bod.

Řešení: Pokud mají kružnice dva společné body, již víme, že chordála prochází těmito body. Pokud mají společný jenom jeden bod, ve kterém se dotýkají, chordála



Obrázek 121: Chordála h kružnic k_1, k_2

prochází tímto bodem, kolmo na přímku spojující středy kružnic. V případě, že kružnice nemají žádný společný bod, pomůžeme si tím, že úlohu převedeme na případ dvou společných bodů. Pro tento účel použijeme pomocnou kružnici l , která má s každou z daných kružnic dva průsečíky, viz Obr. 121. Snadno pak sestrojíme

10.2 Cvičení: Mocnost bodu ke kružnici

1. Je dán úhel $\angle AVB$ a uvnitř něho bod M . Sestrojte kružnici, která prochází bodem M a dotýká se přímek AV, BV .
2. Obdélník má velikosti stran a, b . Máme sestrojit
 - a) libovolný obdélník stejného obsahu,
 - b) obdélník stejného obsahu, jehož jedna strana má danou velikost c .
3. Jsou dány dvě nesoustředné kružnice k_1, k_2 a přímka p . Na této přímce určete bod P tak, aby tečny z něho vedené ke kružnicím k_1, k_2 měly stejnou délku.
4. Sestrojte kružnici, která se dotýká dané kružnice $k(S; r)$ a prochází dvěma různými body A, B , které leží vně dané kružnice k .
5. Je dán lichoběžník $ABCD$ se základnami AB, CD , $|AB| > |CD|$. Uvnitř úsečky AD sestrojte bod P a uvnitř úsečky BC bod Q tak, aby platilo zároveň $PQ \parallel AB$ a $PC \parallel AQ$.
6. Sestrojte lichoběžník $ABCD$, jsou-li dány délky jeho ramen $|BC| = 4.5\text{cm}$, $|DA| = 3\text{cm}$ a velikost 75° úhlu, který svírají přímky BC a AD , platí-li navíc $|AB||CD| = |AC|^2$.

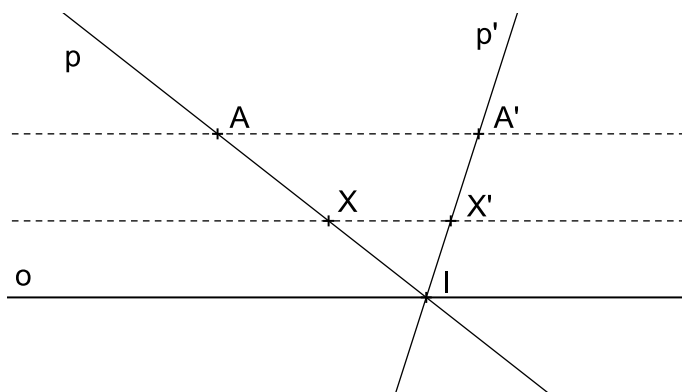
11 Osová afinita

Určení osové afinity. Charakteristika a rovnice osové afinity. Elace. Základní afinity. Involuce.

11.1 Základní afinity

„Základními afinitami“ nazýváme afinity, jejichž všechny samodružné body tvoří nadrovinu prostoru A_n . Příklady základních afinit jsou „osová afinita v A_2 “, „osová souměrnost v E_2 “ nebo „rovinová souměrnost v E_3 “.

Základní afinita taková, že přímka spojující vzor a obraz je rovnoběžná s nadrovinou samodružných bodů, se nazývá „elace“.



Obrázek 123: Osová afinita v rovině, jejíž směr je rovnoběžný s její osou, jako příklad elace

11.2 Osová afinita v rovině

Osová afinita je určena osou o , směrem s a charakteristikou κ . Směr a charakteristika jsou většinou zadány dvojicí sobě odpovídajících bodů A, A' .

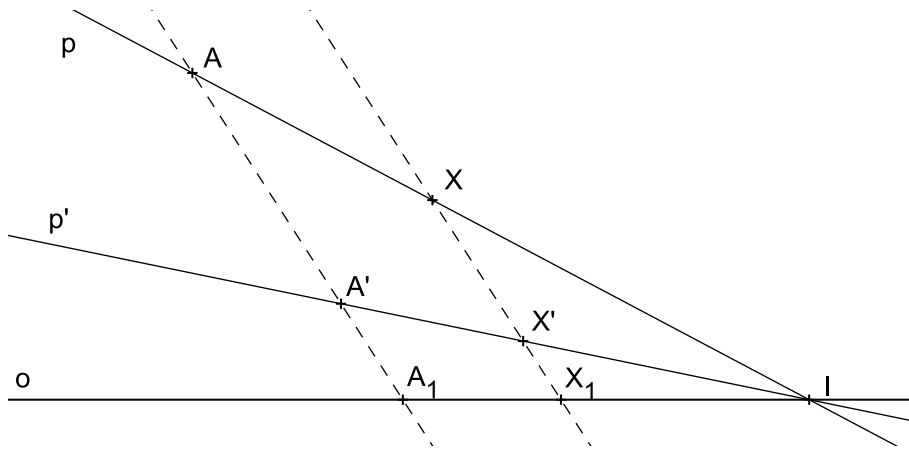
PŘÍKLAD 11.1. V osově afinitě určené osou o a dvojicí sobě odpovídajících bodů A, A' zobrazte bod X a přímku p .

Řešení: Viz Obr. 124. Při určení obrazu bodu a přímky využijeme

Vlastnosti osové afinity

- (1) Přímka spojující sobě odpovídající body je rovnoběžná se směrem afinity.
- (2) Sobě odpovídající přímky se protínají na ose afinity.

- (3) Incidence se zachovává.
- (4) Osa afinity a přímky rovnoběžné se směrem afinity jsou samodružnými přímkami.



Obrázek 124: Osová afinita v rovině, řešení příkladu 11.1

Postupujeme tak, že sestrojíme přímku $p = \overleftrightarrow{AX}$ a určíme její průsečík I s osou afinity o . Z vlastnosti (2) vyplývá, že přímka p' , která je obrazem přímky p , také prochází bodem I . Z vlastnosti (3) pak plyne, že p' prochází rovněž bodem A' . Sestrojíme tedy přímku $p' = \overleftrightarrow{A'I}$. Obraz bodu X , bod X' , pak určíme podle vlastnosti (1) jako průsečík p' s přímkou jdoucí bodem X rovnoběžně s $\overleftrightarrow{AA'}$.

Charakteristika osové afinity

Charakteristikou osové afinity κ rozumíme dělicí poměr

$$(A'AA_1) = \kappa,$$

kde body A, A' jsou ve vztahu „vzor a obraz“ a bod A_1 je průsečík přímky AA' s osou afinity o , viz Obr. 124. Charakteristika osové afinity je rovna jejímu modulu, proto se κ nazývá také modul osové afinity.

Poznámka. „Osová souměrnost v rovině“ je zvláštním případem osové afinity, jejíž směr \vec{s} je kolmý na osu o ($\vec{s} \perp o$) a jejíž charakteristika κ je rovna -1 ($\kappa = -1$).

PŘÍKLAD 11.2. Je dána přímka o , trojúhelník ABC a dvojice bodů X, X' . Sestrojte obraz trojúhelníka ABC v osové afinitě s osou o , v níž je obrazem bodu X bod X' .

Věta 21. *Rovnoběžné přímky $a\parallel b$ se v osové afinitě zobrazí opět na rovnoběžné přímky $a'\parallel b'$.*

Důkaz. Důkaz provedeme sporem. Předpokládáme, že obrazy rovnoběžných přímek jsou různoběžky. Dostaneme se do sporu s definicí charakteristiky afinity. \square

Věta 22. *Dělicí poměr se v osové afinitě zachovává, tj. $(ABC) = (A'B'C')$.*

Důsledky věty 22:

- 1) Střed úsečky se zobrazí zase na střed úsečky.
- 2) Zachovává se uspořádání bodů na přímce.

PŘÍKLAD 11.3. *Je dána přímka o a trojúhelník ABC . Sestrojte obraz $A'B'C'$ trojúhelníka ABC v takové osové afinitě s osou o , aby byl trojúhelník $A'B'C'$ rovnostranný.*

(Postup konstrukce viz <http://tube.geogebra.org/student/mni2IYH1c>)

Věta 23. *Nechť P je obsah trojúhelníka ABC a P' obsah jeho obrazu $A'B'C'$ v osové afinitě s charakteristikou κ . Potom $P' = |\kappa| \cdot P$.*

Z výše uvedených vět 21, 22, 23 plyne, že osová afinita má následující invarianty.

Invarianty osové afinity

- (1) Rovnoběžnost přímek.
- (2) Dělicí poměr.
- (3) Poměr obsahu obrazců.

Charakteristika základní afinity

Charakteristiku přiřazujeme každé základní afinitě, která není elací. Platí

$$\kappa = (X'X X_1),$$

kde X_1 je průsečík $\overleftrightarrow{XX'}$ s nadrovinou samodružných bodů uvažované základní afinity.

Základní afinita jako involuce

„Involutorní zobrazení“, též „involuce“, je každé zobrazení afinního bodového prostoru na sebe, které není identitou, ale složeno samo se sebou je identitě rovno.

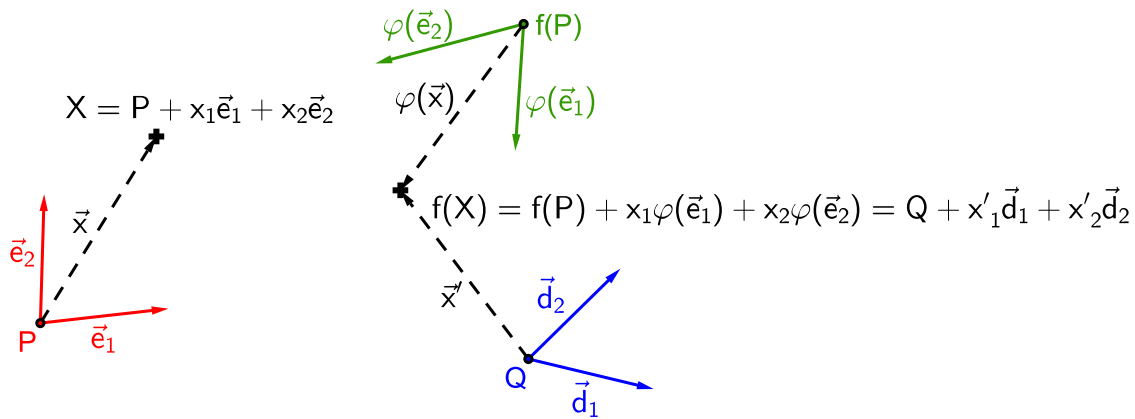
Základní afinita je involucí tehdy, když není elací a její charakteristika je rovna -1 .

11.3 Cvičení – Osová afinita

1. Pomocí výsledku Příkladu 11.3 dokažte tvrzení: *Težnice trojúhelníka se protínají v jednom bodě, který je dělí v poměru 1 : 2.*
2. Dokažte Větu 23.

12 Analytické vyjádření afinního zobrazení v rovině

Odvodíme si analytické vyjádření afinního zobrazení f roviny na sebe (zkráceně „afinity“ v rovině). Základní myšlenka tohoto odvození je ilustrována Obr. 125. V rovině A_2 máme dvě afinní soustavy souřadnic (repéry), „soustavu vzorů“ $\alpha = \{P; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ (je určena počátkem P a bází $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ vektorového zaměření prostoru A_2) a „soustavu obrazů“ $\omega = \{Q; \vec{d}_1, \vec{d}_2\}$ (určena počátkem Q a bází $\{\vec{d}_1, \vec{d}_2\}$ vektorového zaměření prostoru A_2). Přitom repér $\{P; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ se působením uvažované afinity f zobrazí na repér $\{f(P); \varphi(\vec{e}_1), \varphi(\vec{e}_2)\}$, kde φ homomorfismus (lineární zobrazení) asociovaný k f . Obrazem bodu $X = [x_1, x_2]$ je bod $f(X) = X' = [x'_1, x'_2]$. Vztah mezi souřadnicemi $f(X)$ a X najdeme tak, že bod $f(X)$ vyjádříme vzhledem k oběma repérům $\{Q; \vec{d}_1, \vec{d}_2\}$ a $\{f(P); \varphi(\vec{e}_1), \varphi(\vec{e}_2)\}$ (viz Obr. 125) a tato vyjádření porovnáme.



Obrázek 125: Zobrazení bodu X v afinitě f v rovině

Nechť f je afinní zobrazení prostoru A_2 na sebe a φ je homomorfismus asociovaný k f . Potom obrazy $\varphi(\vec{e}_1), \varphi(\vec{e}_2)$ vektorů báze $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ můžeme vyjádřit rovnicemi

$$\varphi(\vec{e}_1) = a_{11}\vec{d}_1 + a_{21}\vec{d}_2, \quad (97)$$

$$\varphi(\vec{e}_2) = a_{12}\vec{d}_1 + a_{22}\vec{d}_2, \quad (98)$$

kde koeficienty a_{ij} jsou souřadnice vektorů $\varphi(\vec{e}_1), \varphi(\vec{e}_2)$ vzhledem k bázi $\{\vec{d}_1, \vec{d}_2\}$ a pro obraz $f(P)$ počátku P repéru α můžeme psát

$$f(P) = Q + b_1\vec{d}_1 + b_2\vec{d}_2, \quad (99)$$

kde $[b_1, b_2]$ jsou jeho souřadnice vzhledem k repéru ω .

Nyní určíme vztah mezi souřadnicemi libovolného bodu $X \in A_2$ a jeho obrazu $X' = f(X) \in A_2$. Nejprve každý z těchto bodů zapíšeme v příslušném repéru, bod

X v repéru α , bod $f(X)$ pak v repéru ω ,

$$X = P + x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2, \quad (100)$$

$$f(X) = Q + x'_1\vec{d}_1 + x'_2\vec{d}_2. \quad (101)$$

Potom, s využitím vlastností zobrazení f a φ , zapíšeme obraz bodu X ve tvaru

$$f(X) = f(P + x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2) = f(P) + \varphi(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2) = f(P) + x_1\varphi(\vec{e}_1) + x_2\varphi(\vec{e}_2).$$

Po dosazení z (97), (98) a (99) dostáváme

$$f(X) = Q + b_1\vec{d}_1 + b_2\vec{d}_2 + x_1(a_{11}\vec{d}_1 + a_{21}\vec{d}_2) + x_2(a_{12}\vec{d}_1 + a_{22}\vec{d}_2).$$

Po úpravě a porovnání koeficientů při \vec{d}_i s vyjádřením (101) dostáváme hledané rovnice afinity f v rovině

$$\begin{aligned} f : x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1, \\ x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2. \end{aligned} \quad (102)$$

Nyní ještě určíme rovnice asociovaného zobrazení φ . Nechť vektor $\vec{u} \in V_2$ se zobrazí do vektoru $\varphi(\vec{u}) \in V_2$. Pro souřadnice vzoru \vec{u} a obrazu $\varphi(\vec{u})$ platí

$$\vec{u} = u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2, \quad (103)$$

$$\varphi(\vec{u}) = u'_1\vec{d}_1 + u'_2\vec{d}_2. \quad (104)$$

Na (103) aplikujeme zobrazení φ a upravíme dle (97) a (98). Dostaneme

$$\varphi(\vec{u}) = u_1\varphi(\vec{e}_1) + u_2\varphi(\vec{e}_2) = u_1(a_{11}\vec{d}_1 + a_{21}\vec{d}_2) + u_2(a_{12}\vec{d}_1 + a_{22}\vec{d}_2).$$

Po úpravě a srovnání s (104) dostaneme hledané rovnice asociovaného zobrazení φ :

$$\begin{aligned} \varphi : u'_1 &= a_{11}u_1 + a_{12}u_2, \\ u'_2 &= a_{21}u_1 + a_{22}u_2. \end{aligned} \quad (105)$$

Soustavu rovnic afinity v rovině (102) můžeme zapsat také pomocí matic, takto

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

stručněji pak ve tvaru

$$\mathbf{X}' = A \cdot \mathbf{X} + B.$$