

Transformácia kružnice pomocou otočenia

Zadanie

V rovine je otočenie určené stredom $S = [-1, 1]$ a orientovaným uhlom $\alpha = -60^\circ$. Určte transformačné rovnice a obraz kružnice

$$(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 9.$$

Riešenie

1. Parametrické rovnice pôvodnej kružnice

Kružnica má stred $C = (-2, 2)$ a polomer $r = 3$. Parametrické rovnice sú:

$$\begin{aligned}x(t) &= -2 + 3 \cos(t), \\y(t) &= 2 + 3 \sin(t),\end{aligned}$$

kde $t \in [0, 2\pi)$.

2. Matica otočenia

Matica otočenia o uhol $\alpha = -60^\circ$ (v radiánoch $-\pi/3$) je:

$$R = \begin{bmatrix} \cos(-\pi/3) & -\sin(-\pi/3) \\ \sin(-\pi/3) & \cos(-\pi/3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

3. Transformačné rovnice

Otočenie zahŕňa tieto kroky:

1. Posunutie stredu otočenia do počiatku: $(x, y) \rightarrow (x + 1, y - 1)$,
2. Použitie rotačnej matice R ,
3. Vrátenie stredu otočenia na pôvodnú pozíciu: $(x', y') \rightarrow (x' - 1, y' + 1)$.

Nové súradnice (x', y') sú:

$$\begin{aligned}x' &= -1 + \frac{1}{2}(x + 1) + \frac{\sqrt{3}}{2}(y - 1), \\y' &= 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}(x + 1) + \frac{1}{2}(y - 1).\end{aligned}$$

4. Parametrické rovnice obrazu kružnice

Dosadíme pôvodné parametrické rovnice $x(t)$ a $y(t)$ do transformačných rovníc:

$$\begin{aligned}x'(t) &= -1 + \frac{1}{2}((-2 + 3 \cos(t)) + 1) + \frac{\sqrt{3}}{2}((2 + 3 \sin(t)) - 1), \\y'(t) &= 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}((-2 + 3 \cos(t)) + 1) + \frac{1}{2}((2 + 3 \sin(t)) - 1).\end{aligned}$$

Po úprave:

$$\begin{aligned}x'(t) &= -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} \cos(t) + \frac{3\sqrt{3}}{2} \sin(t), \\y'(t) &= \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} \cos(t) + \frac{3}{2} \sin(t).\end{aligned}$$

5. Obraz kružnice v kartézskej rovine

Stred kružnice po transformácii je:

$$C' = \left(-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right),$$

a polomer zostáva $r = 3$.

Výsledná rovnica kružnice v kartézskej rovine je:

$$\left(x + \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \left(y - \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 = 9.$$