AFINNÉ TRANSFORMÁCIE

Východiskové pojmy

Author
Who?
Where?
When?

Obsah

1 Pripomenutie pojmov

1.1 Grupa

Definícia 1.1. Grupou $(M, *)$ rozumieme množinu M spolu s operaciou $*$ na M, ktorá má tieto vlastnosti:

i) $\forall x, y \in M; x * y \in M$,
Operácia $*$ je neomezene definovaná na M. (Množina M je uzavretá vzhľadom k operacii $*$.)

ii) $\forall x, y, z \in M; x * (y * z) = (x * y) * z \in M$
Operácia $*$ je asociatívna.

iii) $\exists e \in M, \forall x \in M; e * x = x * e = x$,
Existuje neutrálny prvok

iv) $\forall x \in M, \exists y \in M; x * y = y * x = e$. Ku každému prvku existuje prvok inverzný vzhľadom k operácii $*$.

Ak operácia $+$ je naviac komutativna, grupa nazýva sa komutatívna grupa alebo Abelova grupa.

Príklady grúp

1. Číselné obory spolu s operáciou sčítania: $(Z, +), (Q, +), (\mathcal{R}, +)$,
2. Číselné obory spolu s operáciou násobenia: $(\mathcal{Q} \setminus \{0\}, \cdot), (\mathcal{R} \setminus \{0\}, \cdot), (\mathcal{C} \setminus \{0\}, \cdot)$.
3. Uvažujme rovnostranný trojuholník ABC v rovine ρ. Grupou je potom množina všetkých transformácií roviny, v ktorých sa trojuholník zobrazí sám do seba spolu s operaciou skladania transformacií (grupa symetrií).

Úloha 1.
Popíšte grupu symetrií, ktorá repredukuje štvorec v rovine $\mathbb{E}^2$. Vytvorte vhodný applet v GeoGebre. Pozrite si ukážku Tu

1.2 Teleso

Definícia 1.2. Štruktúra $(T, +, \cdot)$ se nazýva **teleso** , práve vtedy, keď operácie $(+, \cdot)$ - sú distribuívne.

Ak $(T, +)$ je komutatívna grupa a keď $(T \setminus \{0\}, \cdot)$ je tiež komutatívna grupa hovoríme o komutativnom telese.

Úloha 2.
Uveďte aspoň tri príklady telies.

1.3 Vektorový priestor

Definícia 1.3. Nech T je komutatívne teleso. Množinu $\boldsymbol{V}$ nazveme **vektorový priestor nad telesom T** práve vtedy, keď sú na V definované dve operácie:

1. Sčítanie vektorov:
   ľubovoľnej dvojici vektorov $\vec{u}, \vec{v} \in V$ je jednoznačne priradený súčet (vektor) $\vec{u} + \vec{v} \in V$.
2. Násobenie skalárom:
   pre ľubovoľný vektor $\vec{u} \in V$ a skalár $a \in T$ je jednoznačne priradený súčin $a\vec{u} \in V$.

Pritom sú splnené nasledujúce vlastnosti:

- štruktúra $(V, +)$ je komutativna grupa,
- platí distributívnosť: $(a+b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u},\ a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$,
- pre jednotkový prvok skalárneho násobenia $1 \in T$ platí: $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$.

Príklady vektorových priestorov

1. Množina $\mathbb{R}^2$ všetkých usporiadaných dvojíc reálnych čísel s operáciami
   - sčítania usporiadaných dvojic: $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$,
   - násobenia: $k \cdot (a_1, a_2) = (ka_1, ka_2)$.

   (tzv. aritmetický vektorový priestor $\mathbb{R}^2$ nad telesom reálnych čísel)
2. Množina orientovaných úsečiek (vektorov) spolu s operáciou sčítania vektorov a násobenia reálnym číslom.

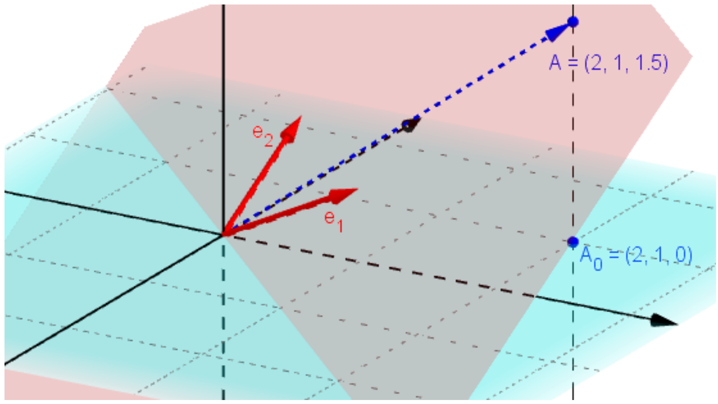
Úloha 3.
Dokážte, že uvedené štruktúry spĺňajú všetky podmienky vektorového priestoru.

Úloha 4.
Na množine $\mathbb{V}$ usporiadaných trojíc

$$\mathbb{V} = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 + x_2 - 2x_3 = 0\right\}$$

sú dané: obvyklá operácia sčítania trojíc a násobenie trojíc skalárom.

- Dokážte, že $(\mathbb{V}, +.\cdot)$je dvojrozmerný vektorový priestor nad poľom $\mathbb{R}$.
- Určte jeho bázu. (Dva lineárne nezávislé vektory.)
- Vytvorte applet v 3D Geogebre. Pozri obr. 1.



Obr. 1: Vektorový priestor Applet otvoríte Tu

1.4 Afinný bodový priestor

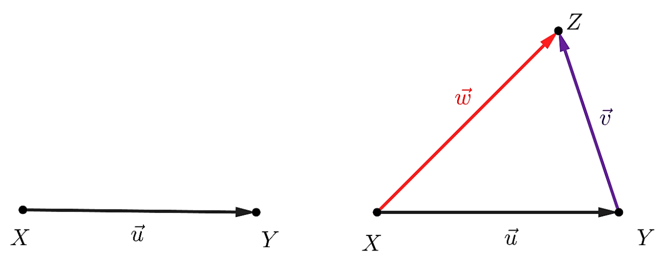
Definícia 1.4. Pod afinným priestorom rozumieme usporiadanú trojicu $\mathbb{A} = (\mathcal{A}; \mathbb{V}; f)$, pričom množina $\mathbb{A}$ je neprázdna (jej prvky sú body), $\mathbb{V}$ je vektorový priestor a f je zobrazenie

$$f : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{V}; \quad (X, Y) \mapsto \overrightarrow{XY}$$

spĺňajúce podmienky

(A1) $\forall X, Y, Z \in \mathcal{A}$ platí $\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ} = \overrightarrow{XZ}$

(A2) $\forall X \in \mathcal{A}, \vec{u} \in \mathbb{V}$ existuje práve jeden bod $Y \in \mathcal{A}$, pre ktorý $f(X, Y) = \overrightarrow{XY}$



Obr. 2: Podmienky A2, A1

Poznámky

1. Podmienka (A2) ovorí, že zobrazenie f je bilekcia.
2. Množinu $\mathcal{A}$ nazývame afinný priestor, vektorový priestor $\mathbb{V}$ nazývame **zameranie** afinného priestoru $\mathbb{A}$.
3. Dimenzia (alebo rozmer) afinného priestoru je číslo, ktoré je dimenziou jeho zamerania.

4. Afinný priestor dimenzie 0, 1, 2 budeme v poradí nazývať **bod, priamka, rovina**.

5. Nech $\mathbb{A} = (\mathcal{A}; \mathbb{V}; f)$ je afinný priestor, potom v $\mathbb{A}$ môžeme definovať zobrazenie $g : \mathcal{A} \times \mathbb{V} \to \mathcal{A}$ nasledovne

$$g(X, \vec{u}) = Y \Leftrightarrow f(X, Y) = \vec{u}. \tag{1}$$

6. $(n-1)$-rozmerný podpriestor $n-$rozmerného afinného priestoru $\mathcal{A}$ nazývame **nadrovina**.

7. Afinný priestor, ktorého zameraním je vektorový priestor nad pol'om reálnych čísel nazývame **reálny afinný priestor**. Symbolicky $\mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n; f)$

8. Zobrazenie f v reálnom afinnom priestore je definované ako odčítanie po zložkách:

$$f(X, Y) = Y - X = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, ..., y_n - x_n) \tag{2}$$

a zrejme potom

$$g(X, \vec{u}) = X + \vec{u} = [x_1 + u_1, x_2 + u_2, ..., x_n + u_n], \tag{3}$$

kde $X[x_1, x_2, ..., x_n], Y[y_1, y_2, ..., y_n], \vec{u}(u_1, u_2, ..., u_n)$.

Veta 1.1. Nech X, Y, A, B, C, D sú body afinného priestoru $\mathcal{A}$; potom

$$\overrightarrow{XX} = \vec{0} \tag{4}$$

$$\overrightarrow{XY} = -\overrightarrow{YX} \tag{5}$$

$$\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{XY} \Rightarrow X = Y \tag{6}$$

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} \tag{7}$$

Dokážte tieto tvrdenia.
K tvrdeniu (7) navrhnite vhodný applet v GeoGebre. Využite vlastnosť, že $(\mathbb{V}, +)$ je grupa, v ktorej platí: $AB - CD = (AC + CB) - (CB + BD)$.

Príklad 1. Nech

$$\mathcal{A} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 + x_2 - 2x_3 = 5$$

$$\mathbb{V} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$$

Dokážte, že trojica $(\mathcal{A}, \mathbb{V}, f)$, kde $f([X, Y]) = Y - X$ je obvyklá operácia odčítania trojíc, je dvojrozmerný afinný priestor nad poľom reálnych čísel.

Riešenie.
Musíme overiť platnosť podmienok (A1) a (A2).

(A1) $\forall X, Y, Z \in \mathcal{A}$ platí $\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ} = \overrightarrow{XZ}$

(A2) $\forall X \in \mathcal{A}, \vec{u} \in \mathbb{V}$ existuje práve jeden bod $Y \in \mathcal{A}$, pre ktorý $f(X,Y) = \overrightarrow{XY} = \vec{u}$.

1 Nech

$$X = \left[x_1, x_2, \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - 5)\right], Y = \left[y_1, y_2, \frac{1}{2}(y_1 + y_2 - 5)\right], Z = \left[z_1, z_2, \frac{1}{2}(z_1 + z_2 - 5)\right],$$

potom

$$\overrightarrow{XY} = \left(y_1 - x_1, y_2 - x_2, \frac{y_1 + y_2 - 5}{2} - \frac{x_1 + x_2 - 5}{2}\right) = \left(y_1 - x_1, y_2 - x_2, \frac{(y_1 - x_1) + (y_2 - x_2)}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{YZ} = \left(z_1 - y_1, z_2 - y_2, \frac{z_1 + z_2 - 5}{2} - \frac{y_1 + y_2 - 5}{2}\right) = \left(z_1 - y_1, z_2 - y_2, \frac{(z_1 - y_1) + (z_2 - y_2}{2}\right)$$

po sčítaní dostaneme požadovaný výsledok - **podmienka (A1) je splnená**.

2 Nech je daný bod $X = [x_1, x_2, \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - 5)]$ a vektor $\vec{u} = (u_1, u_2, \frac{1}{2}(u_1 + u_2))$. Potom zrejme existuje bod

$$Y = \left[x_1 + u_1, x_2 + u_2, \frac{1}{2}((x_1 + u_1) + (x_2 + u_2) - 5)\right],$$

pre ktorý platí $f(X,Y) = Y - X = \overrightarrow{XY} = \vec{u}$. Teda zobrazenie $f_P = f(P,X)$ je zobrazene **surjektívne** - "na".

Ukážeme, že zobrazenie f je prosté zobrazenie (injektívne). Nech $X, Y \in \mathcal{A}$ sú ľubovoľné dva rôzne body a nech $\vec{u} = (u_1, u_2, \frac{1}{2}(u_1 + u_2))$ je pevne zvolený vektor množiny $\mathcal{V}$. Potom je $(x_1 \neq y_1) \vee (x_2 \neq y_2)$ a zrejme aj obrazy

$$f(P,X) = \left(p_1 - x_1, p_2 - x_2, \frac{1}{2}\left((p_1 - x_1) - (p_2 - x_2)\right)\right)$$

$$f(P,Y) = \left(p_1 - y_1, p_2 - y_2, \frac{1}{2}\left((p_1 - y_1) - (p_2 - y_2)\right)\right)$$

sú dva rôzne body. Teda zobrazenie $f_P = f(P,X)$ je **prosté**.

Odtiaľ dostávame, že **podmienka (A2) je splnená**.

Príklad 2. Daná je množina usporiadaných dvojíc

$$\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, x < -|a|\}$$

pre pevne zvolené $a, b \in \mathbb{R}$ a zobrazenie

$$f : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{V}; f\left([x_1, y_1], [x_2, y_2]\right) = y_1 - y_2$$

Dokážte, že trojica $(\mathcal{A}, \mathbb{R}, f)$ je jednorozmerný afinný priestor nad poľom reálnych čísel.

Riešenie.
Ukážeme platnosť podmienky (A1) a dôkaz platnosti podmienky (A2) prenechávame čitateľovi.

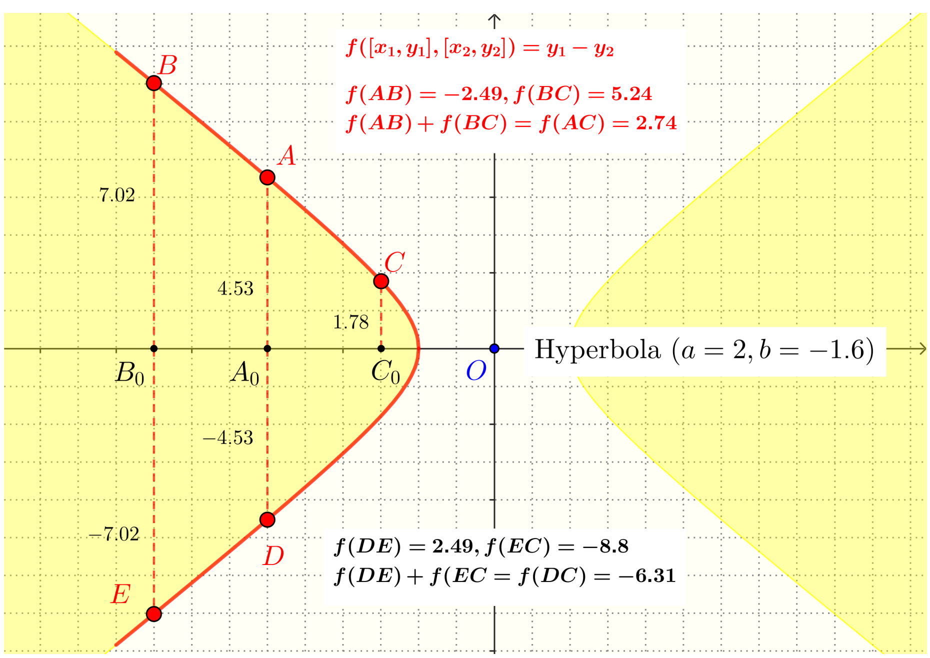
(A1) Pre ľubovoľne zvolené tri body $A[x_a, y_a], B[x_b, y_b], C[x_c, y_c]$ z definície zobrazenia f platí: (Otvotre si applet k obrázku 1.4)

$$f(A, B) = f\left([x_a, y_a], [x_b, y_b]\right) = y_a - y_b$$

$$f(B, C) = f\left([x_b, y_b], [x_c, y_c]\right) = y_b - y_c$$

po dosadení dostaneme

$$f(A, C) = f\left([x_a, y_a], [x_c, y_c]\right) = y_a - y_c = f(A, B) + f(B, C). \quad \square$$



Obr. 3: Afinný priestor - hyperbola Applet otvoríte Tu

(A1) Preskúmajme ako vyzerajú vektory priestoru $\mathbb{V}$. Podľa definície zobrazenia f, každé reálne číslo reprezentuje vektor vo vektorovom priestore afinného priestoru $\mathcal{A}$ a naopak. Podmienke

$$\forall A\,[x_a, y_a] \in \mathcal{A}, \vec{u} \in \mathbb{R} \text{ existuje práve jeden bod } B \in \mathcal{A}, \text{ pre ktorý } f(X,Y) = \overrightarrow{AB},$$

zrejme vyhovuje bod $B[x_b, y_a + u]$. Prvú súradnicu x_b určíme z podmienky, že bod B je bodom hyperboly v II. alebo v III. kvadrante. Napríklad pre bod $A[-6,\ 4.53]$ a vektor $\vec{u} = 2.49$ je to zrejme bod $B[-9,\ 7.02 = 4.53 + 2.49]$.

Riešte úlohy

Zistite, či usporiadaná trojica $(\mathcal{A}, \mathbb{V}, f)$ je afinným priestorom, ak áno určite aj bázu jeho zamerania.

1. Dané sú $\mathcal{A} = \{[x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2; x_2 = 1\}, \mathbb{V} = \{[x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2; x_2 = 0\}$
   a zobrazenie

   $$f : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{V}; ([x_1, x_2], [y_1, y_2]) \to (x_1 - y_1, x_2 - y_2)$$

   pričom môžete predpokladať, že $\mathbb{V}$ s operáciou sčítania po zložkách je vektorový priestor nad telesom $\mathbb{R}$.

2. Dané sú $\mathcal{A} = [x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{R}^3; x_3 = 1, \mathbb{V} = [x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{R}^3; x_3 = 0$
   a zobrazenie

   $$f : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{V}; ([x_1, x_2, x_3], [y_1, y_2, y_3]) \to (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 - y_3)$$

   pričom môžete predpokladať, že $\mathbb{V}$ s operáciou sčítania po zložkách je vektorový priestor nad telesom $\mathbb{R}$.

3. Symbol P_4 označuje množinu všetkých polynómov s reálnymi koeficientmi, ktorých stupeň nie je vyšší ako štyri.Operácia + je vhodné zúženie obvyklej operácie sčítania polynómov.
   Dané sú $\mathcal{A} = \{P(x) \in P_4; P(0) = 1\}$ a $\mathbb{V} = \{P(x) \in P_4; P(0) = 0\}$.

4. Možno vektorový priestor nad $\mathbb{R}$ považovať za afinný priestor nad $\mathbb{R}$?
   Výsledok: Áno. Prvkami bodovej aj vektorovej zložky budú vektory, operácia + bude definovaná na množine vektorov.

1.5 Afinné súradnice bodov

Definícia 1.5.

(a) Usporiadanú $n+1$ -ticu $[O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n]$ zloženú z bodu $O \in \mathcal{A}^n$ a bázy $[\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n]$ vektorového priestoru $\mathbb{V}^n(\mathcal{A}^n)$ nazývame **afinným súradnicovým repérom** v $\mathbb{A}^n$.

(b) **Lineárna sústava súradníc (LSS)** $\langle O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n \rangle$ v afinnom priestore $\mathbb{A}^n$ prislúchajúca k repéru $[O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n]$ je **bijektívne zobrazenie** z množiny $\mathcal{A}^n$ do $\mathbb{R}^n$, ktoré každému bodu $X \in \mathcal{A}^n$ priradí usporiadanú n-ticu $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ takú, že

$$X = O + x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n.$$

(c) Bod O nazývame **začiatok sústavy súradníc** a vektory $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ nazývame **súradnicovými vektormi**. Vzhľadom na to, že pre začiatok O afinnej súradnicovej sústavy

(d) Vektor $X - O$ nazývame **polohový vektor** bodu X vzhľadom na danú sústavu súradníc $[O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n]$, presnejšie vzhľadom na začiatok sústavy súradníc O.

(e) Súradnice bodu X afinného priestoru $\mathbb{A}^n$ vzhľadom na danú afinnú sústavu súradníc sú súradnice $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ jeho polohového vektora vzhľadom na bázu súradnicových vektorov.

Poznámka 1. *Z lineárnej algebry je známe, že ku každému vektoru existuje jediná usporiadaná n -tica $[\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n]$ taká, že*

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n.$$

Odtiaľ dostávame, že existuje jediná n -tica pre polohový vektor $\overrightarrow{OX}$

$$\overrightarrow{OX} = X - O = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n \text{ resp. } X = O + x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n$$

Príklad 3. Daný je afinný priestor $(\mathcal{A}, \mathbb{R}, f)$, kde

$$\mathcal{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, x < -|a|\}$$

$$f : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{V}; f([x_1, y_1], [x_2, y_2]) = y_1 - y_2.$$

Zistite, či zobrazenie

$$\mathcal{L} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}; \mathcal{L}([x,y]) = 5 + 2y$$

je lineárnaa sústava súradníc.

Riešenie.
Pokúsme sa charakterizovať zobrazenie $\mathcal{L}$ v priestore $\mathcal{R}^3$.

V príklade 2 sme ukázali, že ľubovoľný bod $A[x_a, y_a] \in \mathcal{A}$ je bodom hyperboly v II. alebo v III. kvadrante. V obrázku 1.5 je to časť žltej hyperboly. Nech $A[x_a, y_a], B[x_b, y_b]$ sú dva rôzne body hyperboly

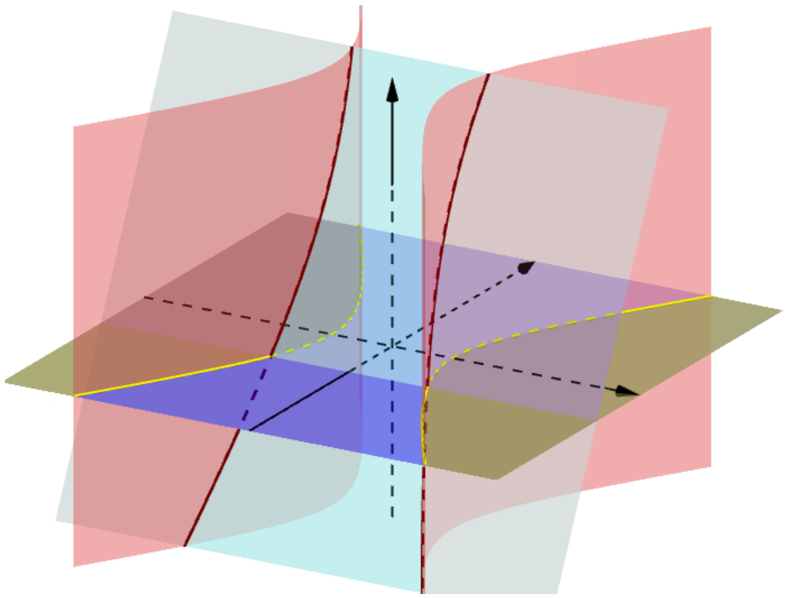
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, x < -|a|,$$

potom musí byť $y_a \neq y_b$. Z definície zobrazenia $\mathcal{L}$ sú týmto bodom priradené dve rôzne reálne čísla

$$\mathcal{L}([x_a, y_a]) = 5 + 2y_a, \quad \mathcal{L}([x_b, y_b]) = 5 + 2y_b.$$

Odtiaľ dostávame, že **zobrazenie** $\mathcal{L} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}; \mathcal{L}([x,y]) = 5 + 2y$ **je prosté**.

Tiež platí, že pre ľubovoľné reálne číslo $r \in \mathbb{R}$ existuje jediné reálne číslo $y = \frac{r-5}{2} \in \mathbb{R}$. Zároveň existuje práve jedno reálne číslo x také, že bod X[x,y] je bodom hyperboly v II. alebo v III. kvadrante. $\mathcal{L} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}; \mathcal{L}([x,y]) = 5 + 2y$ **je zobrazenie na** množinu $r \in \mathbb{R}$. Teda $\mathcal{L}$ je bijekcia. Tým sme dokázali, že $\mathcal{L} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ je lineárna sústava súradníc.



Obr. 4: Afinný priestor - hyperbola Applet otvoríte Tu

Uvažujme množinu bodov so súradnicami $\alpha = \{X[x, y, 5 + 2y]; x, y \in (\mathbb{R}\}$, Množina α je 2-parametrický útvar v priestore, ktorý predstavuje rovinu (v obrázku je to bledomodrá rovina). Ak chceme nájsť množinu

$$H = \{A[x_a, y_a, 5 + 2y_a]; y_a = b^2\sqrt{\frac{x_a^2 - a^2}{a^2}}\}$$

$\mathcal{L}$ obrazov len bodov hyperboly, tak táto množina je prienikom roviny α a Hyperbolic Cylinder

$$HC = \{[x, y, z]; \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 0.z^2 = 1\}.$$

Teda $H = \alpha \cap HC$ a to je hyperbola (v obrázku 1.5 je to krivka hnedej farby). Keďže hyperbola je jednoparametrický útvar, tak dimenzia $\mathcal{A}$ je rovná jednej. Zobrazenie $\mathcal{L}$ je zrejme bijektívne a z toho plynie záver:

Zobrazenie $\mathcal{L}$ je lineárna sústava súradníc. Bodu $A[x_a, y_a] \in \mathcal{A}$ je priradená súradnica

$$\mathcal{L}\left(\left[x_a, b^2\sqrt{\frac{x_a^2 - a^2}{a^2}}\right]\right) = 5 + 2b^2\sqrt{\frac{x_a^2 - a^2}{a^2}}.$$

Riešte úlohy

Daný je afinný priestor $(\mathcal{A}, \mathbb{V}, f)$. Zistite, či zobrazenie $\mathcal{L} := \ldots$ je lineárna sústava súradníc, ak áno určite jej počiatok a súradnicové vektory.

1. Dané sú $\mathcal{A} := \ldots$, $\mathbb{V} := \ldots$ a $f := \ldots$
2. Dané sú
3. Dané sú
4. Dané sú

1.6 Euklidovský bodový priestor

Definícia 1.6. Euklidovským bodovým priestorom $\mathbb{E}^n$ rozumieme afinný bodový priestor, ak na jeho zameraní je definovaný skalárny súčin.

Definícia 1.7. Skalárnym súčinom rozumieme operáciu, ktorá každej dvojici vektorov $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}$ priraďuje reálne číslo (skalár) $\vec{u} \cdot \vec{v} \in \mathbb{R}$ tak, že platí:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

$$(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$$

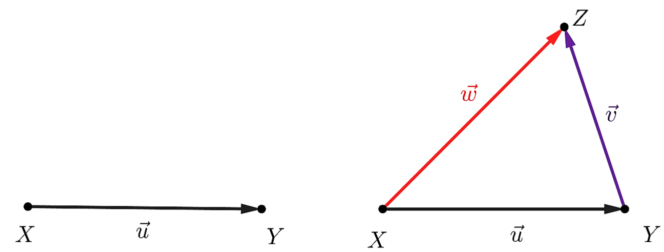
$$\vec{u} \cdot \vec{v} \geq 0 \wedge [\, \vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}\,]$$

1.7 Geometrické zobrazenia

Definícia 1.8. Geometrickým zobrazením f rozumieme predpis, ktorým je ľubovoľnému bodu $X \in \mathbb{E}^2$ (resp. priestoru $\mathbb{E}^3$) je jednoznačne priradený bod $X' = f(X) \in \mathbb{E}^2$ (resp. priestoru $\mathbb{E}^3$).

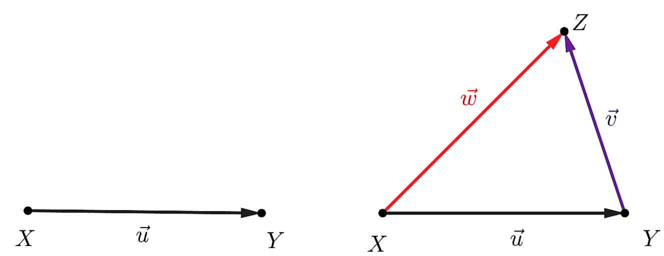
Príklady vektorových priestorov

1. Osová súmernosť je bijektívne geometrické zobrazenie.



Obr. 5: Zobrazenie

2. Rovnobežné premietanie priestoru $\mathbb{E}^3$ do roviny $\mathbb{E}^2$ nie je prosté.



Obr. 6: Zobrazenie

Poznámka 2. *This is a remark.* {} []

Príklad 4. This is a example.

Applet otvoríte Tu

Axióma 2. This is a axiom.

Dôsledok 2.1. This is a Dôsledok.

2.1 Citation

This is a citation[**?**].