To nejlepší ze stereometrie

Pepa Tkadlec

Abstrakt. Stereometrie známá ze školy se zabývá převážně určováním objemů a povrchů těles a konstrukcemi řezů. Stereometrie je však mnohem širší téma. Příspěvek proto uvádí dvacet netradičních trikových úloh všech obtížností. Obsahuje též stručné návody k řešením.

Lehké úlohy

Příklad 1. Rovina protíná hrany AB, AC, CD čtyřstěnu $ABCD$. Které všechny hrany ještě protíná?

Příklad 2. Lze meloun rozdělit na čtyři části tak, aby po snězení jeho vnitřku zbylo 5 kusů slupky?

Příklad 3. Krychli $3\times3\times3$ chceme rozkrájet na 27 jednotkových kostiček, přičemž po každém řezu můžeme všechny doposud vzniklé části libovolně přeskládat. Kolik řezů je na to minimálně potřeba?

Příklad 4. Obdélníkový stůl má nohy délek postupně 90 cm, 95 cm, 105 cm. Jak dlouhou má čtvrtou nohu, víme-li, že se neviklá? (PraSe 29–7–2)

Příklad 5. Jsou dány dvě brambory libovolného tvaru a velikosti. Dokažte, že lze vytvarovat drát tak, aby se dal těsně přiložit ke kterékoliv z nich.

Nesnadné úlohy

Příklad 6. Je dán kužel s vrcholem V a bodem A na kraji podstavy o poloměru 1 ($|VA| = 3$). Beruška leze nejkratší možnou cestou z bodu A po povrchu kužele opět do bodu A tak, že obleze celý kužel. Určete, v jaké vzdálenosti od V je beruška ve chvíli, kdy je k V nejblíže. (PraSe 26–3–5)

Příklad 7. Je dán čtyřstěn $ABCD$. Body B, C, D veďme postupně roviny kolmé na AB, AC, AD a označme A' jejich průsečík. Body B', C', D' definujeme obdobně. Ukažte, že čtyřstěny $ABCD$ a $A'B'C'D'$ jsou shodné. (PraSe 26–3–8)

Příklad 8. Vrcholy pravidelného čtyřstěnu jsou obarveny zelenou barvou. Nejdříve obarvíme zeleně všechny body, které leží na přímce s některými dvěma zelenými, následně provedeme tutéž operaci ještě jednou. Jsou teď všechny body prostoru zelené? (Prase 29–7–4)

Příklad 9. Lze prostor rozřezat na jednotkové krychle tak, aby existovala krychle, která žádnou svou stěnu nesdílí s některou jinou krychlí? (Turnaj Měst)

Příklad 10. Lze do krychle vyvrtat takovou díru, aby skrz ni bylo možno prostrčit druhou stejně velkou krychli?

Příklad 11. V prostoru je dán bod. Jaké je nejmenší n takové, že do prostoru lze rozmístit n disjunktních koulí tak, aby zcela zakrývaly výhled z tohoto bodu (tj. aby libovolná polopřímka z něj vycházející protínala alespoň jednu z koulí)?

Příklad 12. Existují v prostoru krychle a rovina tak, že vzdálenosti vrcholů této krychle od dané roviny jsou (v nějakém pořadí) čísla $1, 2, \ldots, 8$?

Příklad 13. Krychle $20 \times 20 \times 20$ je složena z 2000 kvádříků tvaru $2 \times 2 \times 1$. Ukažte, že ji lze propíchnout jehlou, která bude procházet protějšími stěnami a nepropíchne žádný kvádřík. (Turnaj Měst 1988)

Příklad 14. V prostoru jsou dány dva různě velké dvacetistěny tak, že některých 6 z jejich vrcholů tvoří vrcholy pravidelného osmistěnu. Určete poměr velikostí dvacetistěnů. (Sharygin 2010)

Obtížné úlohy

Příklad 15. Na letišti se za zavazadla (tvaru kvádru) platí úměrně tomu, jaký mají součet délek svých tří rozměrů. Lze ušetřit tím, že své zavazadlo zabalíme do jiného? Tedy existují kvádry K a L takové, že K se vejde do L a přitom má K větší součet délek hran než L?

Příklad 16. Existuje mnohostěn P a bod O mimo něj tak, že z bodu O není vidět žádný vrchol P?

Příklad 17. Ukažte, že existuje 2012 konvexních mnohostěnů, které lze umístit do prostoru tak, aby se každé dva dotýkaly a přitom žádné tři neměly společný bod. (PraSe 29–8–7b)

Příklad 18. Uvnitř jednotkové koule se středem O je dán konvexní n-stěn P obsahující O. Ukažte, že součet vzdáleností O od stěn P je nejvýše $n-2$. (Rumunsko)

Příklad 19. Určete nejmenší počet prken o šířce 10 cm, jimiž lze zakrýt studnu o průměru 1 m. Prkna lze klást přes sebe.

Příklad 20. Lze mezi dvě rovnoběžné roviny umístit nekonečně mnoho shodných mnohostěnů tak, aby se žádný mnohostěn nemohl pohnout bez toho, že by se pohnuly i nějaké jiné? (Moskva 2000)

Návody

1. Na kterých stranách od roviny leží které body?

2. Ano. Uvažte válcovou díru skrz.

3. Na samotnou prostřední krychličku je potřeba 6 řezů a 6 zřejmě stačí. Lze též pozorovat velikost největšího dílu.

4. Položte stůl na desku. Jak vysoká by musela být noha vedoucí z prostředku stolu?

5. Myšlenkově brambory protněte.

6. Rozstřihněte plášť podle VA a rozbalte ho. Nejkratší je úsečka.

7. Analogie ve 2D, Thaletova sféra a středová souměrnost.

8. Rozmyslete si, které body zezelenají kvůli dvěma konkrétním zeleným přímkám podle toho, zda jsou tyto přímky různoběžné nebo mimoběžné. Pomůže představit si vrcholy čtyřstěnu jako polovinu vrcholů krychle.

9. Ano. Vydlážděte prostor standardně, vyberte si jednu krychli a „rozposuňte" šest přilehlých neprotínajících se „komínů".

10. Ano. Podívejte se podél tělesové úhlopříčky. Do pravidelného šestiúhelníku o straně délky $\sqrt{2}/\sqrt{3}$ se vejde čtverec o straně délky 1.

11. Analogie ve 2D. Opište bodu čtyřstěn a výhled přes každou stěnu zakryjte jednou koulí (o hodně různých poloměrech). Uvědomte si, že tři koule nestačí.

12. Ano. Rovina $x + 2y + 4z = 0$ se „odklání" od směrů os rychlostmi v poměru $1 : 2 : 4$. Čísla 0 až 7 lze zapsat ve dvojkové soustavě. Rovinu lze o 1 vzdálit.

13. Je $3 \cdot 19^2$ možných vpichů. Žádný nemůže být narušen jen jedním kvádříkem (parita). Zároveň každý kvádřík blokuje jediný vpich. Konečně $3 \cdot 19^2 \cdot 2 = 2166 > 2000$.

14. Žádné tři vrcholy dvacetistěnu netvoří pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník, takže „dělba" vrcholů osmistěnu musí být $3 : 3$, a to na dva rovnostranné. Dvacetistěn obsahuje rovnostranné trojúhelníky jen dvou velikostí, poměr jejich velikostí je jako úhlopříčka pravidelného pětiúhelníka ku straně, tedy $\frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$.

15. Uvažte objemy ε-okolí obou kvádrů (tj. jakýchsi zaoblených nadkvádrů). Pro každé ε je objem ε-okolí vnějšího kvádru větší (obsahuje ε-okolí toho vnitřního uvnitř sebe), takže (úvahou o obrovském ε) musí mít větší koeficient u vedoucího členu ε^2 (členy s ε^3 se odečtou).

16. Ano. Ke každé stěne krychle přilepte rovnoběžně s jistými jejími hranami dlouhou tenkou destičku tak, aby se její konce při pohledu ze středu krychle „schovaly" za destičky přilepené k jiným stěnám. Odmyslete si krychli a 6 destiček spojte „mosty", které nebudou z jejího střed vidět.

17. Zkonstruujte nejdřív 2012 konvexních mnohoúhelníků, které budou všechny svislé, vůči sobě mírně pootočené a každý další se bude dotýkat všech předchozích „zespodu". Mnohoúhelníky poté doplňte na velmi placaté jehlany.

18. Vzpomeňte si, že povrch vrchlíku jednotkové koule je $2\pi \cdot h$, kde h je jeho výška. Vrchlíky odřezané všemi stěnami zakrývají (s překryvem) povrch celé koule, takže součet jejich povrchů je větši než 4π a součet jejich výšek než 2.

19. Uvažme polokouli nad studnou. Svislý průmět každého prkna určuje kulový polopás o pevném povrchu (ten totiž závisí jen na tloušťce pásu, nikoliv na jeho pozici – odečítáme kulové vrchlíky). Je potřeba zakrýt celou polokouli, tedy je potřeba alespoň 10 prken. Tolik stačí.

20. Ano. Skládejte pravidelné čtyřstěny do jedné vrstvy do jakési mřížky tak, aby měly jednu hranu „dole“ a jednu „nahoře“ a byly do sebe „zaklíněné“.

Literatura a zdroje

Čerpal jsem z archivu PraSátka a ze stránek *problems.ru*.