# Axiomatická výstavba euklidovskej roviny

## Geometria 2 pre študentov učiteľstva matematiky

**Jana Chalmovianská**

UNIVERZITA
KOMENSKÉHO
V BRATISLAVE

Jana Chalmovianská

# Axiomatická výstavba euklidovskej roviny
## (Geometria 2 pre študentov učiteľstva matematiky)

2023
Univerzita Komenského v Bratislave

Recenzenti
prof. RNDr. Pavol Hanzel, CSc.
doc. RNDr. Štefan Solčan, PhD.
doc. RNDr. Margita Vajsáblová, PhD.



https://stella.uniba.sk/texty/FMFI_JCH_euklidovska_rovina_geometria_2.pdf

Vydavateľ
Univerzita Komenského v Bratislave

**ISBN 978-80-223-5682-4 (online)**

# Obsah

# Predhovor

Pred pár rokmi som na Fakulte matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského prevzala výučbu kurzu geometrie pre budúcich učiteľov matematiky. V rámci kurzu jeden semester bol venovaný základom planimetrie. Prvé roky som materiál v tejto časti kurzu trochu obmieňala, nakoniec sa ustálil v podobe, ktorá je prezentovaná v tejto učebnici. Učebnica tak pomerne presne pokrýva prednášku aj cvičenia a jej obsah je pohodlne zvládnuteľný v priebehu jedného semestra.

Prvá kapitola, venujúca sa najmä Euklidovým *Základom*, je akýmsi úvodom do problematiky. Študentom veľmi silno odporúčam si toto dielo, ktoré konečne vyšlo aj v slovenskom preklade od profesora Jána Čižmára, otvoriť a aspoň na chvíľu sa doň začítať. Myslím si, že oboznámenie sa aspoň s prvými štyrmi knihami *Základov* patrí k nevyhnutnej gramotnosti dobrého učiteľa matematiky.

Jadrom učebnice je však Hilbertov axiomatický systém geometrie. Hoci vo svojom diele *Grundlagen der Geometrie* vytyčuje Hilbert axiómami trojrozmerný priestor, v tejto učebnici sa pre prehľadnosť obmedzujem len na planimetriu.

Prvé tri sady axióm (incidencia, usporiadanie a zhodnosť) viac-menej vybudujú od základov geometriu do úrovne, s ktorou potom učiteľ na strednej škole pracuje so svojimi žiakmi: dokázané sú vety o zhodnosti trojuholníkov, trojuholníková nerovnosť a podobné „základné“, na strednej škole bez dôkazu vyslovené tvrdenia.

Čiastočne sa so stredoškolskou geometriou prelína aj časť o axióme rovnobežnosti. Tu sa však hlavne snažím pootvoriť študentom dvere k iným zaujímavým, neeuklidovským geometriám. Hlbšie sa im však nevenujem. Prípadní záujemci si určite nájdu množstvo relevantnej literatúry, prípadne si môžu aj na našej fakulte zapísať predmet, ktorý sa neeuklidovským geometriám venuje o čosi podrobnejšie.

Pri záverečnej sade axióm, t. j. pri axiómach spojitosti, som sa rozhodla neuspokojiť s populárnym, často používaným a pre geometriu v podstate dostatočným, no odľahčeným prístupom, ktorý pôvodné Hilbertove axiómy nahrádza geometrickejšími princípmi spojitosti kružnice. Chcela som študentov oboznámiť s prelínaním sa geometrie a matematickej analýzy a s Dedekindovými rezmi. Navyše na záver výkladu axiomatiky som chcela dospieť k reálnej euklidovskej rovine ako k univerzálnemu modelu Hilbertových axióm planimetrie.

Jedným z cieľov predmetu je teda vybudovať základy geometrie, na ktorých potom môže bezpečne stavať svoje poznatky geometria na stredných školách. Druhým cieľom je oboznámiť študentov s paradigmou axiomatickej výstavby matematickej disciplíny. Preto som sa snažila výklad čo najbohatšie dopĺňať modelmi v danej chvíli platných axióm. Študenti si tak, dúfam, uvedomia význam pojmov „pravdivé tvrdenie“, „dokázateľné tvrdenie“, „nezávislé tvrdenie“ a podobne.

Som vďačná Katedre geometrie a algebry, ktorá ma poverila vedením kurzu. Umožnila mi tak prežiť toto zaujímavé dobrodružstvo s geometriou tým, že ma primäla hlbšie sa zoznámiť s Hilbertovým axiomatickým systémom a s neeuklidovskými geometriami, o ktorých som prvýkrát počula ešte na hodinách matematiky na gymnáziu v Žiari nad Hronom od svojho učiteľa Jána Adamíka. Chcem poďakovať aj učiteľom Gymnázia sv. Františka z Assisi v Bratislave – Márii Adamovej a Jánovi Horeckému. Diskusia s nimi v začiatkoch výstavby kurzu spoluutvorila obsahovú stránku – vďaka nej som dala dôraz na axiomatickú štruktúru a modely geometrie. Študenti na našej fakulte, ktorých som doteraz tento predmet učila, tiež svojou spätnou väzbou prispeli k skvalitneniu materiálu a formovali svojimi názormi aj jeho obsah. Moja vďaka preto patrí aj im. A v neposlednom rade ďakujem aj recenzentom, ktorí v záverečnej fáze práce svojimi pripomienkami výrazne prispeli k skvalitneniu učebnice.

KAPITOLA 1

# Axiomatická výstavba geometrie

## 1.1. Pred Euklidom

Mnoho storočí pred naším letopočtom pozostávala matematika z rôznych návodov na výpočet potrebných dĺžok, množstiev atď. Išlo o slovné pokyny bez vysvetlenia, ktoré boli overené skúsenosťou, že fungujú. Niektoré boli správne a presné, niektoré len približné, ale dávajúce dostatočne uspokojivé výsledky.

Pre európsku kultúru bola dôležitou egyptská matematika. Egypťania boli veľmi pokročilí v geometrii. Napríklad pre účely výstavby pyramíd (aby vedeli, aké množstvo materiálu si potrebujú zabezpečiť) vedeli správne vypočítať objem zrezaného ihlana so štvorcovou podstavou. Samozrejme okrem Egypta sa matematika rozvíjala aj v iných ríšach (Babylon, India, Čína...)

V starovekom Grécku sa významne pestovala filozofia. Je možné, že práve filozofia zohrala dôležitú úlohu v tom, akú formu matematika v Grécku získala. Vo filozofii dôležitou disciplínou bola dialektika, umenie správnej argumentácie, a túto začali Gréci uplatňovať aj v matematike.

Prvým známym starogréckym matematikom (a tiež filozofom) bol Táles z Milétu (cca 600 pr. n. l.). Táles sa matematike priučil v Egypte a odtiaľ ju priniesol do Grécka. Z gréckej kultúry k nej práve on pridal spomínanú myšlienku, že tak ako vo filozofii treba dôsledne argumentovať aj v matematike. V dnešnom jazyku by sme povedali, že každé tvrdenie má byť sprevádzané dôkazom. Bola to veľmi významná zmena v chápaní matematiky, dá sa dokonca povedať, že šlo o akúsi revolúciu v matematike.

Táles už pracoval s abstraktnými objektami (úsečky, priamky). Pomocou podobnosti trojuholníkov meral výšky pyramíd. Pripisujú sa mu dôkazy viacerých tvrdení („uhly pri základni rovnoramenného trojuholníka sú zhodné“, „vrcholové uhly sú zhodné“, Tálesova veta...).

Asi 550 – 500 pr. n. l. sa stretávame s Pytagorom a jeho školou (pytagorejci). Aj Pytagoras bol výraznou osobnosťou zďaleka nielen v matematike. Rozvinul prvú teóriu čísel (uvažuje iba o kladných racionálnych číslach), spájal ju pritom s náboženskými konceptami. Matematika sa v tomto období už pestuje ako umenie, teda nielen kvôli praktickým výpočtom.

Zhruba 400 pr. n. l. Platón vo svojej Akadémii popri filozofii pestoval aj geometriu. V jeho škole pôsobili aj matematici, čo v tej dobe znamenalo to isté ako geometri, a títo začali matematiku axiomatizovať. Geometria (t. j. matematika) mala významné postavenie. Jej znalosť sa vyžadovala od všetkých v Akadémii, lebo

- svet myšlienok je dôležitejší než materiálny svet poznávaný zmyslami,
- geometria trénuje myseľ,
- vďaka vytrénovanej mysli môžeme korigovať, v čom nás zmysly klamú.

Dôležitým počinom v matematike boli zhruba 300 pr. n. l. Euklidom spísané *Základy*.

## 1.2. Geometria podľa Euklida

*„Pane, niet kráľovskej cesty ku geometrii"*

Euklides
(Odpoveď na žiadosť Ptolemaia I. vysvetliť mu svoje *Základy* rýchlo a ľahko.)

Euklidove *Základy* v 13 zväzkoch obsahujú súhrn vtedajšieho poznania o rovinnej geometrii, priestorovej geometrii a teórii čísel. Na geometrii je vystavaná celá matematika: aj algebraické operácie s číslami, aj teória čísel. *Základy* neobsahujú žiadne aplikácie matematiky, napriek tomu, že sa matematika využívala v mechanike, optike, astronómii atď, obsahujú len „čistú" abstraktnú matematiku.

Originál *Základov* sa nezachoval, Európa ich „znovuobjavila" vďaka arabským prekladom. Odvtedy vychádzali stále dookola a stali sa štandardom pre výučbu geometrie.

V *Základoch* je geometria (a na nej celá matematika) vybudovaná axiomatickou metódou. Na príklade si urobíme prvé priblíženie, čo sa pri takomto spôsobe budovania geometrie deje.

Príklad 1.1. Skúsime dôsledne vyargumentovať správnosť konštrukcie pravidelného šesťuholníka, ako ste sa ju naučili na strednej škole:

- päť strán šesťuholníka je z konštrukcie rovných polomeru kružnice, do ktorej je šesťuholník vpísaný, treba to isté ukázať o šiestej strane; tá sa tiež rovná polomeru,
- lebo plný uhol je 360°,
- a súčet uhlov trojuholníka je 180°,
- a to platí preto, lebo súhlasné uhly pri rovnobežkách preťatých transverzálnou sú zhodné,
- lebo ...? kam až ísť?

Pri axiomatickej metóde pracujeme s pojmami (objekty) a tvrdeniami (čo všeličo vieme o týchto pojmoch povedať).

Pri budovaní pojmov sa nové v geometrii definujú pomocou jednoduchších, už zavedených. Napríklad ak chceme zadefinovať pravý uhol, potrebujeme už vedieť, čo je priamka, polpriamka, čo sú susedné uhly, čo sa myslí pod zhodnosťou uhlov. Taktiež musia byť definície jasné a presné: o každom objekte treba vedieť jednoznačne rozhodnúť, či danú definíciu spĺňa alebo nie.

Asi najdôležitejšia definícia syntetickej rovinnej geometrie (bude platiť pre celý semester) je:

Definícia 1.2. Dve priamky sa nazývajú *rovnobežnými (rovnobežkami)*, ak nemajú spoločný bod.

Podobne ako pri definíciách nových pojmov, aj o každom novom vyslovenom tvrdení je potrebné dokázať, že vyplýva z iných tvrdení, ktoré už považujeme za pravdivé (napríklad sú už tiež dokázané).

Aby sme mohli geometriu axiomaticky vybudovať, musíme niekde začať. Potrebujeme teda:

- *základné objekty*, ktoré nedefinujeme, ale napriek tomu o nich panuje konsenzus, že čo to je,
- *základné tvrdenia (axiómy, postuláty)*, ktorých pravdivosť sa nespochybňuje,
- *pravidlá logiky*, t. j. dohodu, čo znamená odvodiť z jedného tvrdenia iné tvrdenie.

Keď si otvoríme Euklidove *Základy*, prvé štyri „definície“, ktoré nájdeme, sú:

- *Bod* je to, čo nemá žiadne časti.
- *Priamka (čiara?)* je dĺžka bez šírky.
- Konce čiar sú body.
- Priamka je v každom svojom bode rovnaká.

V dnešnom chápaní matematiky tieto charakterizácie priamky a bodu nedávajú zmysel. Môžeme sa preto domnievať, že asi to nie je snaha o skutočnú definíciu. Už v časoch Euklida bolo totiž matematikom jasné, že nejaké pojmy musia byť nedefinované. Navyše tieto „definície“ nevyhovovali ani vtedajším štandardom. Ide zrejme len o snahu v náznakoch popísať, čo si má čitateľ pod daným pojmom predstaviť. V skutočnosti sa predpokladá, že každý čitateľ/poslucháč vie, čo si má pod pojmom bod či priamka predstaviť.

Sám Euklides sa na tieto „definície“ neskôr vôbec neodkazuje. Je teda otázne, či je ich autorom naozaj Euklides, alebo či neboli do *Zakladov* zahrnuné dodatočne.

Omnoho zaujímavejšie pre nás sú Euklidove základné tvrdenia (postuláty) rovinnej geometrie ([**15**]):

E1: Od ktoréhokoľvek bodu ku ktorémukoľvek bodu možno viesť priamku.
E2: A priamku možno neohraničene na obe strany predĺžiť.
E3: A z akéhokoľvek bodu a akýmkoľvek polomerom možno narysovať kružnicu.

E4: A každé dva pravé uhly sú navzájom zhodné.
E5: A keď priamka pretínajúca dve priamky tvorí s nimi na jednej strane vnútorné uhly menšie než dva pravé, pretnú sa tieto priamky neohraničene predĺžené na tej strane, kde súčet uhlov je menší než dva pravé.

Explicitne sa postuluje len existencia konštruovaných objektov, v skutočnosti Euklides mlčky predpokladá aj jednoznačnosť a využíva ju v dôkazoch. Preto neskoršie komentáre zahŕňajú aj jednoznačnosť.

Za postulátmi nasledujú všeobecné pojmy alebo zásady, tzv. axiómy:

(1) Ak sa dve rovnajú tretiemu, rovnajú sa aj navzájom.
(2) A ak sa rovným pridá rovné, sú aj celky rovné.
(3) A ak sa od rovných odnímu rovné, sú aj celky rovné.
(4) A útvary, ktoré sa (pohybom?) stotožňujú, sú navzájom rovné.
(5) A celok je väčší ako časť.

Niekedy sa uvádza viac axióm (k nerovným pričítať rovné, dvojnásobky a polovice rovných sú rovné).

Vráťme sa teraz k postulátom E1 – E5 a krátko sa nad nimi zamyslíme. Druhý postulát hovorí, že každú úsečku možno ľubovoľne predĺžiť, podľa potreby. Postulát hovorí o potenciálnom nekonečne. Grécka matematika vôbec nepracovala s aktuálnym nekonečnom. Trvalo veľmi dlho, kým sa matematici zmierili s pojmom nekonečna.

Tretí postulát by sme dnes už vynechali a na charakterizáciu kružnice (t. j. množiny bodov spĺňajúcej nejakú vlastnosť) by sme sa už odkázali do teórie množín.

Prvé tri postuláty sú viac-menej pokynmi ku konštrukcii:

- spojiť dané dva body úsečkou,
- ľubovoľne predĺžiť úsečku,
- narysovať kružnicu s daným stredom a polomerom.

Pri formulovaní ďalších postulátov by sa patrilo dodefinovať nové pojmy:

- K štvrtému postulátu potrebujeme vedieť, čo znamená „byť zhodný“, potrebujeme zaviesť polpriamku, opačné polpriamky, susedné uhly, pravý uhol.
- K piatemu postulátu musíme rozumieť, čo sa myslí slovami „ležať na jednej strane“.

Prvé štyri postuláty popisujú skúsenosť z rysovania. Piaty sa svojou komplikovanosťou od nich výrazne líši. Sám Euklides sa mu vo svojich dôkazoch vyhýbal, pokiaľ to len šlo. Tento postulát nie je až taký jednoduchý a evidentný ako ostatné a kvôli svojej komplikovanosti sa ho matematici nejakú dobu (asi 2000 rokov) snažili dokázať z predchádzajúcich alebo ho aspoň nahradiť niečím jednoduchším, zjavnejším. Neúspešne.

Dnes sa postulát o rovnobežkách formuluje inak, trochu jednoduchšie:

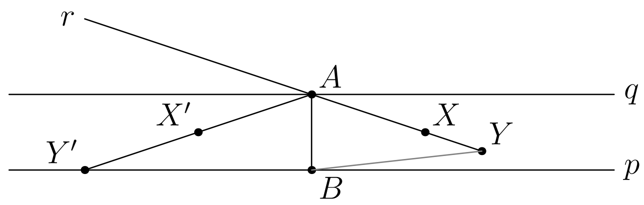
R: Pre danú priamku a daný bod neležiaci na tejto priamke existuje práve jedna priamka prechádzajúca týmto bodom, ktorá je rovnobežná so zadanou priamkou.

No stále je to podstatne komplikovanejšie tvrdenie než ostatné štyri postuláty.

Príklad 1.3. Adrien-Marie Legendre (1752-1833) bol jedným z najlepších matematikov svojho času. Publikoval asi 20 pokusov o dôkaz piateho Euklidovho postulátu. Toto je jeden z nich:

Daná je priamka $p$ a bod $A$ na nej neležiaci. Veďme bodom $A$ kolmicu na priamku $p$, pretne ju v bode $B$. Nech $q$ je priamka prechádzajúca bodom $A$ a kolmá na priamku $\overleftrightarrow{AB}$. Potom $q \parallel p$. Nech $r$ je iná priamka prechádzajúca bodom $A$, $r \neq q$. Ukážeme, že priamka $r$ pretína priamku $p$.

Nech $\overrightarrow{AX}$ je polpriamka na $r$ ležiaca na tej istej strane od $q$ ako bod $B$. Nech $X'$ je bod na opačnej strane od $\overleftrightarrow{AB}$ ako $X$ taký, že $\angle BAX' \cong \angle BAX$. Potom $B$ leží vo vnútri uhla $XAX'$. Keďže $p$ prechádza bodom $B$, pretína aspoň jedno z ramien tohto uhla. Ak $p$ pretína $\overrightarrow{AX}$, tak $p$ pretína $r$, a teda $r \nparallel p$, hotovo. Nech teda $p$ nepretína $\overrightarrow{AX}$ a pretína $\overrightarrow{AX'}$ v bode $Y'$. Nech $Y$ je bod na $\overrightarrow{AX}$ taký, že $AY \cong AY'$. Potom $\triangle BAY \cong \triangle BAY'$ (podľa vety sus o zhodnosti trojuholníkov, budeme ju neskôr dokazovať ako Vetu 5.2), teda uhol $ABY$ je pravý, čiže $Y$ je priesečník priamok $r$ a $p$.




Obr. 1. Legendrov pokus o dôkaz piateho postulátu

Po základných pojmoch, postulátoch a axiómach Euklides pristupuje k vyslovovaniu a dokazovaniu tvrdení v geometrii. Nezriedka sú formulované ako konštrukcie pomocou pravítka a kružidla. Takéto konštrukcie nazývame *euklidovskými konštrukciami*. Euklidovo pravítko nemá rysku pre kolmice a nedá sa pomocou neho merať. Slúži iba na narysovanie priamky, ak poznáme dva body na nej. Tiež Euklidovo kružidlo je tzv. kolabujúce: vieme ním narysovať kružnicu, ak poznáme stred a jeden bod na obvode, no nevieme ním preniesť dĺžku úsečky – to je už jedno z prvých tvrdení v *Základoch*, že aj takáto konštrukcia je možná.

Dokazované tvrdenia v *Základoch*, ktoré mali formu konštrukcie, sú napríklad:

I.1 Skonštruovať rovnostranný trojuholník s danou stranou.
I.2 Z daného bodu narysovať úsečku zhodnú s danou úsečkou.

I.9 Bisekcia uhla (t. j. rozdelenie uhla na dva navzájom zhodné uhly).
I.10 Bisekcia úsečky.
I.22 Skonštruovať trojuholník so stranami daných dĺžok, pokiaľ súčet dvoch je vždy väčší ako tretia. (V konštrukcii sa Euklides nikde na trojuholníkovú nerovnosť neodkazuje.)
I.46 Skonštruovať štvorec s danou stranou.

Iné boli opismi vlastností a vzťahov:

I.4 Veta sus o zhodnosti trojuholníkov.
I.5 Uhly pri základni rovnoramenného trojuholníka sú zhodné.
I.17 Súčet ľubovoľných dvoch uhlov v trojuholníku je menší než dva pravé uhly.
I.32 Súčet uhlov v trojuholníku je rovný dvom pravým uhlom.
I.47 Pytagorova veta.
III.5 Ak sa dve kružnice pretínajú, potom nemajú spoločný stred.
III.21 Obvodové uhly zostrojené nad spoločnou tetivou sú zhodné.
III.22 Súčet protiľahlých uhlov štvoruholníka vpísaného do kružnice je rovný dvom pravým uhlom.

Slávnymi problémami antickej geometrie boli tieto konštrukcie pomocou kružidla a pravítka:

- trisekcia uhla,
- kvadratúra kruhu,
- duplicita kocky.

Neriešiteľnosť vo všeobecnosti bola ukázaná až po zavedení súradníc a následného prekladu problémov do jazyka algebry.

Ďalšou úlohou, ktorou sa antická geometria zaoberala, bola konštrukcia pravidelného $n$-uholníka. Pre $n = 3, 4, 5, 6$ je konštrukcia uvedená v Euklidových *Základoch*. Vďaka konštruovateľnosti bisekcie uhla, či úsečky, vieme tiež z pravidelného $n$-uholníka zostrojiť pravidelný $2n$-uholník.

Poznámka 1.4. Pri konštrukcii pravidelného päťuholníka hrá kľúčovú úlohu konštrukcia zlatého rezu (zlatého pomeru): úsečka $AB$ je bodom $C \in AB$ rozdelená v zlatom pomere, keď pre dĺžky úsečiek $a = |AC|$, $b = |BC|$ platí

$$a : b = (a + b) : a.$$

Ak pomer $a/b$ označíme $\varphi$, potom ľahko odvodíme, že

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Euklidovská konštrukcia pravidelného 7-uholník už neexistuje.

V roku 1796 popísal Gauss aj konštrukciu pravidelného 17-uholníka. Odvodil tiež podmienky konštruovateľnosti pravidelného $n$-uholníka, dôkaz ale nepublikoval.

## 1.3. Po Euklidovi

Vedomosti o matematike vytvorené starovekými Grékmi pre nás uchovali Arabi. Keďže v arabskom svete prekvital obchod, začali Arabi pre svoju potrebu pestovať novú oblasť matematiky, kupecké počty, ktoré sa postupne rozvinuli do algebry.

Geometria a algebra tak nejakú chvíľu existovali izolovane. S myšlienkou prepojiť tieto dve oblasti matematiky zavedením súradníc prišli René Descartes a Pierre de Fermat. Vo svojej filozofickej rozprave *Discourse on Method* (1637) o hľadaní a rozpoznávaní poznania, predstavil Descartes víziu, že pomocou algebry sa treba pokúsiť vyriešiť všetky problémy klasickej gréckej geometrie. Navrhovanú metódu nazval „analytickou metódou“. Odtiaľ pochádza pojem „analytická geometria“.

Dôkazy v analytickej geometrii sú v porovnaní s tými v syntetickej pomerne mechanickými výpočtami a trochu akoby sa v nich strácala elegancia starovekej geometrie. Preto sa niektorí geometri analytickej geometrii bránili. Ešte v 19. storočí prebiehala v matematickej komunite veľká debata, či je v projektívnej geometrii správny syntetický prístup alebo algebraický (t. j. analytická geometria). Vášnivým zástancom syntetického prístupu bol Jean-Victor Poncelet. Po jeho smrti sa ale našli jeho súkromné poznámky, podľa ktorých pri niektorých svojich objavoch použil algebru.

## Cvičenia

### Základné euklidovské konštrukcie

Popíšte nasledovné konštrukcie kružidlom a pravítkom (náčrt, rozbor, postup konštrukcie). Uvažujte (používajte) pravítko bez rysky.

1. Zostrojte os daného uhla.

2. Zostrojte stred danej úsečky.

3. Zostrojte kolmicu z daného bodu na danú priamku, ak
   (a) bod leží na priamke,
   (b) bod neleží na priamke.

4. Preneste zadaný uhol. Presnejšie, pre uhol $\angle ABC$ a polpriamku $\overrightarrow{DE}$ nájdite polpriamku $\overrightarrow{DF}$ tak, aby platilo $\angle EDF \cong \angle ABC$.

5. Naštudujte si Euklidovu konštrukciu (s „kolabujúcim“ kružidlom!) prenášania úsečky (Euklides I.2). Buďte pripravení vysvetliť ju pred tabuľou.

(„Euklides I.2“ v tejto úlohe a podobne aj v niektorých ďalších úlohách je odkaz do Euklidových *Základov*. Siahnite po ľubovoľnom preklade podľa vlastých preferencií, napríklad [**1, 4, 8, 10**])

6. Rozdeľte úsečku na tri zhodné časti.

7. Nájdite stred kružnice.

8. Zostrojte dotyčnicu k danej kružnici z daného bodu ležiaceho zvonka kružnice. (Priamka je určená dvoma rôznymi na nej ležiacimi bodmi!)

9. Do daného trojuholníka vpíšte kružnicu. Nezabudnite svoju konštrukciu dostatočne zdôvodniť! (Vzdialenosť bodu od priamky je príliš komplikovaný pojem. Skúste ísť až na úroveň viet o zhodnosti trojuholníkov. Ak si neviete poradiť, inšpirujte sa Euklidom, IV.4.)

10. Danému trojuholníku opíšte kružnicu. Nezabudnite svoju konštrukciu dostatočne zdôvodniť! (Euklides, IV.5)

11. (Pappova úloha) Daná je priamka, na nej bod $A$ a mimo nej bod $B$. Zostrojte kružnicu, ktorá prechádza bodom $B$ a danej priamky sa dotýka v bode $A$.

12. Ukážte, že uhlopriečky obdĺžnika sú zhodné a že sa navzájom rozpoľujú.

### Uhly nad tetivou kružnice

13. Pomocou cvičenia 12 ukážte: Ak je $\triangle ABC$ pravouhlý s pravým uhlom pri vrchole $C$, tak všetky jeho vrcholy ležia na kružnici, ktorej priemerom je strana $AB$.

14. Dokážte opačnú implikáciu k cvičeniu 13, ktorá je známa ako Tálesova veta:
Ak $AB$ je priemerom kružnice $k$ a $C$ je ľubovoľný bod na kružnici $k$ rôzny od bodov $A$ a $B$, potom je $\angle ACB$ pravý uhol. (Tip: uvažujte rovnoramenné trojuholníky $\triangle ASC$ a $\triangle BSC$, kde $S$ je stred $AB$.)

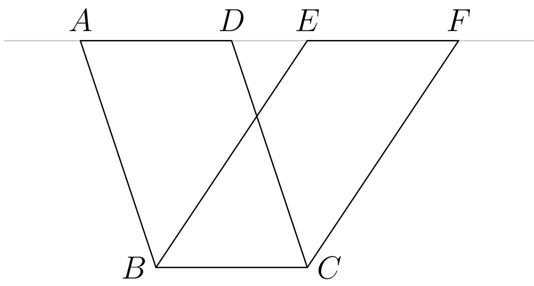
15. Ukážte, že stredový uhol nad tetivou kružnice je dvojnásobok príslušného obvodového. Presnejšie: Nech $k$ je kružnica so stredom $S$ a nech $AB$ je tetiva kružnice $k$ rôzna od priemeru. Nech bod $C$ ($C \neq A, C \neq B$) sa nachádza na kružnici $k$ na tej istej strane od priamky $\overleftrightarrow{AB}$ ako stred $S$ kružnice $k$. Potom veľkosť $\angle ASB$ (stredový uhol) je dvojnásobkom veľkosti $\angle ACB$ (obvodový uhol). (Tip: uvažujte rovnoramenné trojuholníky $\triangle ASC$ a $\triangle BSC$, kde $S$ je stred kružnice $k$. Musíte zvlášť vyšetriť tri prípady:

- stred $S$ leží vnútri trojuholníka $ABC$,
- stred $S$ leží na úsečke $AC$ alebo $BC$,
- stred $S$ leží zvonka trojuholníka $ABC$).

16. Ukážte, že ak $AB$ a $CD$ sú zhodné tetivy tej istej kružnice, potom obvodový uhol nad $AB$ je zhodný s obvodovým uhlom nad $CD$. (Tip: ukážte zhodnosť stredových uhlov.)

### Pytagorova veta

17. Nech v rovnobežníkoch $ABCD$ a $EBCF$ (obrázok na ďalšej strane) ležia strany $AD$ a $EF$ na spoločnej priamke. Ukážte (geometricky!), že rovnobežníky $ABCD$ a $EBCF$ majú rovnaký obsah (ukážete zhodnosť trojuholníkov $\triangle EAB$ a $\triangle FDC$ a použijete vhodné Euklidove axiómy. Viď Euklides I.35). Dôsledkom je tvrdenie o obsahoch trojuholníkov nad spoločnou stranou, sformulujte ho.




18. Naštudujte si Euklidov dôkaz Pytagorovej vety (Euklides I.47). Buďte pripravení vysvetliť ho pred tabuľou.

**Euklidova konštrukcia pravidelného päťuholníka**

19. Do danej kružnice vpíšte trojuholník podobný danému rovnoramennému trojuholníku. (Dva trojuholníky sú podobné, ak sa zhodujú v zodpovedajúcich uhloch.)

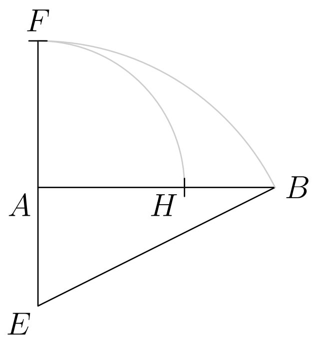
20. Overte, že nasledovným postupom skonštruujeme zlatý rez danej úsečky (Euklides II.11):
Daná je úsečka $AB$ (obrázok dole vľavo).

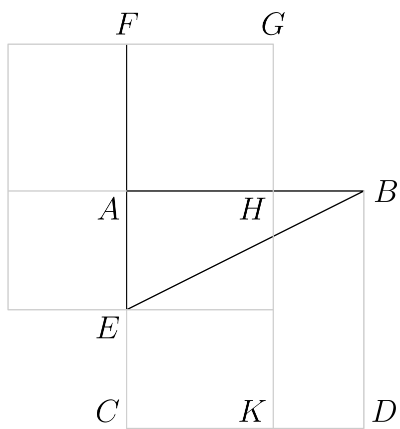
(1) Bodom $A$ vedieme kolmicu $p$ k priamke $\overleftrightarrow{AB}$.
(2) Na priamke $p$ zostrojíme bod $E$ tak, že $|AE| = \frac{1}{2}|AB|$.
(3) Na polpriamke $\overrightarrow{EA}$ zostrojíme bod $F$ tak, že $EF \cong EB$.
(4) Na úsečke $AB$ zostrojíme bod $H$ tak, že $AH \cong AF$.
(5) $H$ je bod deliaci úsečku $AB$ v zlatom pomere.

Je viacero postupov, ako zdôvodniť správnosť konštrukcie. Jednoduchý algebraický (ale „neeuklidovský“) dôkaz: výpočtami s dĺžkami úsečiek overte, že

$$|AH| : |HB| = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

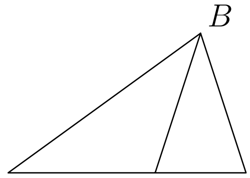
Euklidov (čisto geometrický) dôkaz: na obrázku dole vpravo sú $AHGF$ a $ABDC$



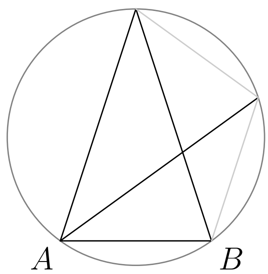
štvorce. Potrebujete ukázať, že obsah obdĺžnika $KDBH$ je zhodný s obsahom štvorca $AHGF$. K tomu budete musieť ukázať, že obsah obdĺznika $CKGF$ spolu s obsahom štvorca nad $AE$ je rovný obsahu štvorca nad $EF$, a tiež využijete Pytagorovu vetu.

21. Nech v rovnoramennom trojuholníku $\triangle ABC$ platí, že uhol pri základni trojuholníka je dvojnásobkom uhla pri protiľahlom vrchole. Overte, že dĺžka ramena a dĺžka základne sú v zlatom pomere. (Tip: Do trojuholníka vpíšte trojuholník s ním podobný, viď obrázok, a skúmajte všetky rovnoramenné trojuholníky, ktoré takto vzniknú).




22. Sformulujte opačnú implikáciu k implikácii v úlohe 21 a pokúste sa ju ukázať.

23. Nech $\triangle ABC$ je rovnoramenný trojuholník, v ktorom uhol pri základni trojuholníka je dvojnásobkom uhla pri vrchole, a nech $k$ je kružnica opísaná tomuto trojuholníku. Ukážte, že základňa trojuholníka $\triangle ABC$ je stranou pravidelného päťuholníka vpísaného do kružnice $k$, a rameno trojuholníka je jeho uhlopriečkou. (Tip: uvažujte priesečník osi uhla pri základni $\triangle ABC$ s kružnicou $k$ a skúmajte trojuholníky, ktoré Vám vzniknú. Nápomocné je aj cvičenie 16.)



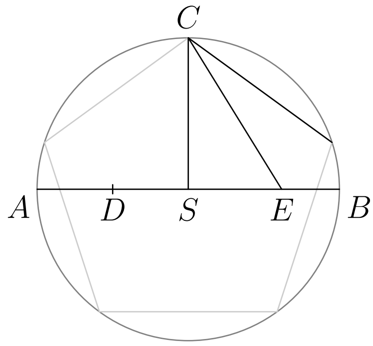

24. Na základe cvičení 19, 20, 21, 22 a 23 navrhnite konštrukciu pravidelného päťuholníka vpísaného do danej kružnice. Päťuholník si podľa tejto konštrukcie aj narysujte!

### Ptolemaiova konštrukcia pravidelného päťuholníka

25. Overte, že nasledovnou konštrukciou zostrojíme pravidelný päťuholník vpísaný do kružnice. (Klaudius Ptolemaios, asi 90 – 160 n.l., starogrécky astronóm)

Daná je kružnica $k$ so stredom $S$.

(1) $AB$ je priemer kružnice $k$.
(2) $C$ je taký bod na kružnici $k$, že $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{SC}$.
(3) $D$ je stred úsečky $AS$.
(4) $E$ je taký bod na úsečke $BS$, že $DE \cong DC$.
(5) Strana pravidelného päťuholníka vpísaného do $k$ je zhodná s úsečkou $EC$.



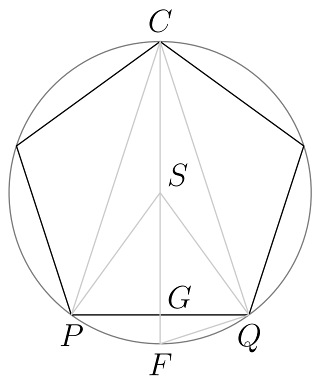

(Možný postup: vypočítajte dĺžku úsečky $EC$ a vypočítajte dĺžku strany pravidelného päťuholníka vpísaného do danej kružnice. Keď sa tieto hodnoty rovnajú, naozaj sa konštruuje pravidelný päťuholník.

Vypočítať dĺžku úsečky $EC$ by nemal byť problém.

Pre dĺžku strany pravidelného päťuholníka môžete postupovať viacerými spôsobmi. Napríklad si pomôžete trigonometriou. Vtedy možno budete potrebovať poznať presnú hodnotu $\cos 36°$. S trigonometrickými vzorcami je potom užitočné aj vyjadrenie, že

$$90° = 72° + 18° = 2 \cdot 36° + \frac{1}{2} \cdot 36°.$$

Alternatívne sa dĺžka strany pravidelného päťuholníka dá vypočítať pomocou klasickej Euklidovej geometrie, s využitím už dokázaných vlastností pravidelného päťuholníka, Tálesovej vety a vety o stredovom a obvodovom uhle, nápovedou je nasledovný obrázok.)



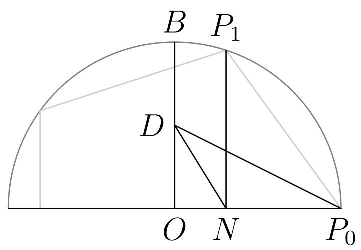

26. Narysujte si pravidelný päťuholník konštrukciou v cvičení 25.

### Richmondova konštrukcia pravidelného päťuholníka

27. Overte, že nasledovnou konštrukciou zostrojíme pravidelný päťuholník vpísaný do kružnice. (H.W.Richmond, *Quarterly Journal of Mathematics*, **26** (1893) pp. 296-297, podľa [**2**])

Daná je kružnica $k$ so stredom $S$.

(1) $OP_0$ je polomer kružnice $k$.
(2) $OB$ je polomer kružnice $k$, ktorý je kolmý na $OP_0$.
(3) $D$ je stred polomeru $OB$.
(4) $N$ je priesečník osi uhla $\angle ODP_0$ a polomeru $OP_0$.
(5) $P_1$ je bod na kružnici taký, že $NP_1 \perp OP_0$.
(6) $P_0P_1$ je strana pravidelného päťuholníka vpísaného do $k$.




28. Narysujte si pravidelný päťuholník konštrukciou v cvičení 27.

KAPITOLA 2

# Hilbertova axiomatika geometrie

Po objavení neeuklidovských geometrií vznikla potreba hlbšie preskúmať Euklidove axiómy a dôsledne doplniť medzery. V roku 1899 tak David Hilbert publikoval prácu *Grundlagen der Geometrie* (Základy geometrie), ktorej cieľom bolo dôslednejšie vybudovanie rovinnej a priestorovej geometrie z axióm než u Euklida. Toto jeho dielo bude tvoriť základ, ktorému sa budeme venovať. Pre prehľadnosť sa budeme zaoberať len rovinnou geometriou. Nie je to ale veľké obmedzenie, lebo pri štúdiu geometrie vo viac rozmeroch človek veľmi rýchlo zistí, že zaujímavé veci sa dejú práve v rovine, a aj vo viacerých rozmeroch sa často v konečnom dôsledku obmedzíme na niektorú dôležitú rovinu a skúmame situáciu v nej.

Pri axiomatickom systéme môžeme rozprávať o jeho rôznych vlastnostiach:

- bezrozpornosť = konzistentnosť – musí byť splnená úplne bezpodmienečne!
- nezávislosť (žiadna axióma nie je dokázateľná pomocou ostatných)
- úplnosť (buď je dokázateľné dané tvrdenie alebo jeho negácia)
- kategorickosť (všetky modely sú navzájom izomorfné)
- iné: jednoduchosť (estetická záležitosť), názornosť (tiež estetická záležitosť)...

Axiomatický systém je *konzistentný* (*bezrozporný*), ak nie je možné z axióm ukázať spor. Inak povedané, nie je možné vrámci axiomatického systému dokázať zároveň nejaké tvrdenie aj jeho negáciu.

Ak by bol axiomatický systém nekonzistentný (sporný), dalo by sa v ňom dokázať ľubovoľné tvrdenie, a síce pomocou dôkazu sporom: čokoľvek by sme predpokladali, vedeli by sme dospieť k sporu, takže dokázaným tvrdením by bola negácia predpokladu. Takýto axiomatický systém je pochopiteľne úplne bezcenný. Preto konzistentnosť sa od axiomatického systému vyžaduje vždy a bezpodmienečne.

Ako sme už spomenuli, axiomatický systém stojí na základných pojmoch a na základných tvrdeniach: axiómach. Základné pojmy (v našom prípade sú to bod, priamka, incidencia...) zvlášť nedefinujeme, sú popísané axiómami, čiže vlastnosťami, ktoré majú spĺňať. Axiómy sa nedokazujú, axiómy sú tvrdenia, o ktorých platnosti sa nepochybuje. Môžeme ich chápať ako požiadavky, ktoré kladieme na základné pojmy.

Okrem základných pojmov a axióm na vybudovanie teórie potrebujeme ešte pravidlá, ako z platných tvrdení odvodiť nové tvrdenia. Na začiatku sú platnými tvrdeniami iba axiómy, postupne sa k nim pridávajú aj dokázané vety. Týmito pravidlami logiky sa tu špeciálne zaoberať nebudeme, budeme ich priamo používať v našich dôkazoch. Teraz si len stručne spomeňme niektoré z nich:

- modus ponens (ak je pravdivá implikácia $p \Rightarrow q$ a je pravdivé tvrdenie $p$, potom je pravdivé aj tvrdenie $q$) – ide v podstate o priamy dôkaz, krásne sa realizuje napríklad v dokazovaní matematickou indukciou;
- modus tollens (ak je pravdivá implikácia $p \Rightarrow q$ a nie je pravdivé tvrdenie $q$, potom nie je pravdivé ani tvrdenie $p$) – ide o nepriamy dôkaz; modus tollens sa s modusom ponens radia medzi tzv. *sylogizmy*;
- zákon vylúčenia tretieho;
- dôkaz sporom („reducto ad absurdum“) – má svoje opodstatnenie v zákone vylúčenia tretieho;
- rozbor prípadov (case distinction) – ak je problém tvrdenie dokázať všeobecne, pomôžeme si rozložením situácie na viaceré prípady pokrývajúce všetky možnosti a tvrdenie potom dokážeme pre každý taký jednotlivý prípad zvlášť;
- ...

KAPITOLA 3

# Axiómy incidencie

Nedefinované pojmy:

- bod,
- priamka,
- incidencia:
  - „bod $B$ a priamka $p$ sú incidentné“
  - „bod $B$ leží na priamke $p$“
  - „priamka $p$ prechádza bodom $B$“
  - „$B \in p$“.

Axiómy:

I1: Každými dvoma rôznymi bodmi prechádza práve jedna priamka.
I2: Na každej priamke ležia aspoň dva rôzne body.
I3: Existujú také tri body, že žiadna priamka neprechádza všetkými troma.

Poznámka 3.1. Axióma I1 je u Hilberta v skutočnosti rozdelená na dve axiómy: existencia a jednoznačnosť. V Hilbertovej formulácii tak zreteľnejšie vynikne, čo bolo k prvým dvom Euklidovým postulátom pridané, a síce nielen existencia priamky určenej dvoma bodmi, ale aj jej jednoznačnosť.

Axiómy I2 a I3 sú u Hilberta spojené do jednej axiómy, navyše rozšírené ešte o analogické tvrdenie v trojrozmernom priestore.

Definícia 3.2. Body $B_1, B_2, B_3, \dots$ sú *kolineárne*, ak existuje priamka so všetkými týmito bodmi incidentná.

Majúc práve vyslovenú definíciu môžeme poslednú axiómu incidencie preformulovať nasledovne:

I3: Existujú tri nekolineárne body.

Už s takouto jednoduchou sadou definícií je možné skúmať nejaké vlastnosti priamok a bodov a dokazovať o nich tvrdenia. Napríklad sa môžeme pýtať, koľko spoločných bodov môžu mať dve rôzne priamky.

Tvrdenie 3.3. *Ak $p, q$ sú dve rôzne priamky, potom $p$ a $q$ majú najviac jeden spoločný bod.*

*Dôkaz.*

- Nech $A \in p$ aj $A \in q$ a tiež $B \in p$ aj $B \in q$.
- Nech $\overleftrightarrow{AB}$ je priamka určená bodmi $A$ a $B$ (axióma I1, existencia).
- Potom $\overleftrightarrow{AB} = p$, lebo $A, B \in p$ (axióma I1, jednoznačnosť).
- Podobne zistíme, že $\overleftrightarrow{AB} = q$,
- a teda priamky $p$ a $q$ sú totožné.

□

Nemalo by nám robiť žiaden problém exaktne definovať pojmy známe zo základnej a strednej školy. Napríklad už v predchádzajúcej kapitole sme si zadefinovali rovnobežné priamky. Podobne sa dajú zadefinovať pojmy ako nekolineárne body, rôznobežné priamky, priesečník rôznobežných priamok atď.

Geometria, v ktorej platia axiómy incidencie, sa nazýva *incidenčná geometria*.

## 3.1. Modely incidenčnej geometrie

Zostrojiť nejaký model incidenčnej geometrie znamená interpretovať pojmy „bod“, „priamka“ a „incidencia“, t. j. priradiť im konkrétny význam, a to tak, aby platili axiómy incidencie. Ak sú axiómy v tejto interpretácii (geometrii) pravdivé, potom máme *model* daného axiomatického systému. Všetko, čo sa nám podarilo dokázať vychádzajúc z axióm, je potom pravdivé aj v modeli, nemusíme to overovať.

Na druhej strane, ak máme akékoľvek tvrdenie (zatiaľ bez dôkazu) v incidenčnej geometrii a rozhodujeme sa o jeho pravdivosti, tak predtým ako sa pustíme do dokazovania, je rozumné si jeho platnosť najprv overiť na modeli. Ak sa nám totiž podarí nájsť model, v ktorom tvrdenie nie je pravdivé, určite nemá zmysel snažiť sa ho dokázať, pretože také tvrdenie sa dokázať nedá. Napríklad ak uvažujeme konečné incidenčné roviny, t. j. roviny s konečným počtom bodov, môžeme sa zamyslieť nad pravdivosťou tvrdenia: „všetky priamky majú rovnaký počet bodov“. Ak sa nám podarí nájsť konečnú rovinu s priamkami, ktoré nemajú rovnaký počet bodov, uvažované tvrdenie sa dokázať nedá.

Ako sme spomenuli v úvode, veľmi dôležitou vlastnosťou axiomatického systému je jeho konzistentnosť. Ak chceme ukázať, že axiomatický systém je konzistentný, mali by sme overiť, že spor sa z axióm odvodiť nedá. V praxi sa bezrozpornosť overuje existenciou modelov. V prípade, že nájdeme model spĺňajúci axiómy, axiomatický systém považujeme za bezrozporný. Našli sme totiž „svet“, ktorý zodpovedá axiómam, a nie je možné v ňom dokázať ľubovoľné vyslovené tvrdenie, napríklad nie je možné zároveň dokázať, že každá priamka má presne dva body, a tiež že každá priamka má aspoň tri body, keďže každé dokázateľné tvrdenie musí byť v modeli pravdivé.

Poďme teraz preskúmať niekoľko modelov incidenčnej geometrie.

**3.1.1. Trojbodová geometria.** Bodmi sú písmená $A, B, C$ a priamkami sú dvojprvkové množiny $\{A, B\}, \{A, C\}, \{B, C\}$. Incidencia je definovaná prirodzene, napríklad na priamke $\{A, B\}$ ležia dva body $A$, $B$. Ľahko overíme, že táto geometria spĺňa axiómy incidencie. Ide tak naozaj o model incidenčnej geometrie. Môžeme usúdiť, že incidenčná geometria je bezrozporná (konzistentná).

Tvrdenie o existencii jedinej rovnobežky k danej priamke neplatí. Odtiaľ hneď usúdime, že tvrdenie „daným bodom prechádza práve jedna rovnobežka k danej priamke“ sa v incidenčnej geometrii určite nedá dokázať.

Ak ako model uvažujeme kompletný graf s troma vrcholmi (bodmi sú vrcholy grafu, priamkami sú hrany, incidencia definovaná prirodzene), akosi nahliadneme, že v podstate ide ten istý model ako model s písmenami.

Definícia 3.4. Dve incidenčné geometrie sú *izomorfné*, ak existuje bijekcia medzi bodmi a priamkami zachovávajúca incidenciu.

Formálnejšie: $\varphi : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ je *izomorfizmus* incidenčných geometrií (modelov), ak $\varphi$ bijektívne zobrazí body modelu $\mathcal{M}_1$ na body modelu $\mathcal{M}_2$, priamky $\mathcal{M}_1$ na priamky $\mathcal{M}_2$ a platí, že v $\mathcal{M}_1$ bod $A$ leží na priamke $p$ práve vtedy, keď v $\mathcal{M}_2$ leží bod $\varphi(A)$ na priamke $\varphi(p)$.

Izomorfizmus incidenčnej geometrie sa tiež nazýva *kolineáciou*. V kolineácii sa kolineárne body zobrazia na kolineárne body.

Uvedené dva trojbodové modely sú izomorfné.

Z modelu incidenčnej geometrie môžeme skonštruovať novú geometriu pomocou *duality*: pre každú priamku pôvodného modelu v novom modeli zostrojíme bod, pre každý bod v pôvodnom modeli zas v novom zostrojíme priamku (teda bod nahradíme priamkou, priamku bodom), pričom incidenciu zachováme: ak v pôvodnom modeli $A \in p$, v duálnej geometrii bude platiť $\sigma(p) \in \sigma(A)$ ($\sigma$ označuje bod/priamku priradenú dualitou).

Nie vždy je duálna rovina k incidenčnej rovine tiež incidenčnou rovinou. Avšak napríklad duálna geometria k trojbodovej geometrii modelom incidenčnej geometrie je. Tento je izomorfný s pôvodným modelom.

Všetky trojbodové modely incidenčnej geometrie sú navzájom izomorfné. Preto ak by sme dodali ďalšiu axiómu „existujú práve tri rôzne body“, axiomatický systém by sa stal kategorickým.

**3.1.2. Štvorbodová geometria.** Túto geometriu zostrojíme podobne ako trojbodovú. Bodmi sú $A, B, C, D$, priamkami sú dvojice bodov. Ide tak vlastne o kompletný graf so štyrmi vrcholmi.

V tejto geometrii je tvrdenie o existencii rovnobežky pravdivé.

Presvedčili sme sa tak, že toto tvrdenie sa nedá ani dokázať ani vyvrátiť len na základe axióm incidencie. Vrámci incidenčnej geometrie ide o *nezávislé* tvrdenie.

Týmto sme si aj ilustrovali, ako sa ukazuje nezávislosť tvrdenia: tak ako bezrozpornosť, existenciou modelov. V prípade nezávislosti jednak existenciou modelu, kde je tvrdenie pravdivé, ako aj existenciou modelu, kde je nepravdivé.

**3.1.3. Päťbodová geometria.** Ak analogicky pokračujeme v konštruovaní modelov incidenčnej geometrie, na rade je kompletný graf s piatimi vrcholmi.

Tu stojí sa povšimnutie, že každým bodom vieme k danej priamke viesť nie jednu, ale dokonca dve rovnobežky.

**3.1.4. Sféra.** Ponechajme už kompletné grafy ako modely incidenčnej geometrie a pristúpme k niečomu novému.

Skúsme ako incidenčnú geometriu interpretovať dvojrozmernú sféru v trojrozmernom reálnom priestore. Bodmi nech sú body sféry. Priamkami nech sú tzv. *hlavné kružnice*, čo sú také kružnice na sfére, ktorých stred je totožný so stredom sféry.

Ľahko nahliadneme, že s touto geometriou nie je niečo v poriadku. Každé dve priamky sa pretínajú v dvoch bodoch, čo je v spore s Tvrdením 3.3. Preto nejde o model incidenčnej geometrie. Ak skúsime overiť, ktoré axiómy v tejto geometrii nie sú splnené, zisťujeme, že takáto geometria nesplĺňa axiómu I1: ak uvažujeme dva navzájom antipodálne body (opačné, protiľahlé, krajné body priemeru sféry), vieme touto dvojicou viesť nie jedinú ale nekonečne veľa priamok.

Aby sme zaručili platnosť všetkých axióm incidencie, model trochu modifikujeme: nech

- body sú dvojice $\{A, A'\}$, kde $A, A'$ sú navzájom protiľahlé body na sfére (napr. severný a južný pól), čiže stotožnili sme antipodálne body,
- priamky sú kružnice na sfére so stredom v strede sféry.

Takto skutočne dostávame model incidenčnej geometrie. Ide o veľmi dôležitý model. Kto sa už stretol s projektívnou geometriou, v ňom možno spozná projektívnu rovinu.

**3.1.5. Algebraické modely incidenčnej geometrie.** Afinné roviny nad ľubovoľným poľom $F$ ($\mathbb{Q}^2, \mathbb{R}^2, F_p^2, \dots$) sú modelmi incidenčnej geometrie. Bodmi v modeli sú body afinnej roviny, t. j. dvojice $(p_1, p_2) \in F^2$. Priamkami sú lineárne výrazy

$$ax + by + c \quad (a, b, c \in F,\ (a, b) \neq (0, 0))$$

modulo násobenie skalárom. To znamená, že dva výrazy

$$a_1x + b_1y + c_1 \quad \text{a} \quad a_2x + b_2y + c_2$$

určujú tú istú priamku, ak jeden je konštantným násobkom druhého, t. j. ak existuje $\lambda \neq 0$ také, že

$$a_1 = \lambda a_2, \quad b_1 = \lambda b_2, \quad \text{a} \quad c_1 = \lambda c_2.$$

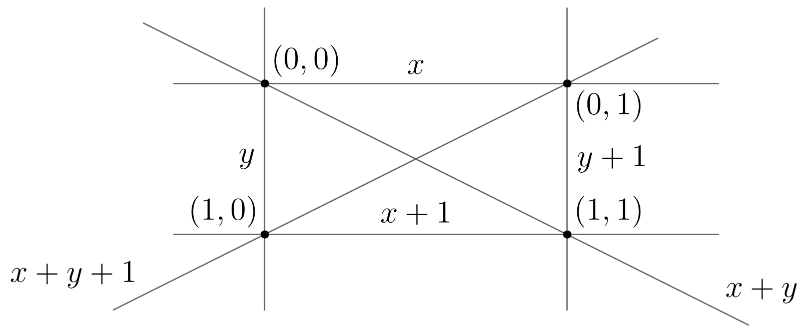
Bod $(p_1, p_2)$ leží na priamke $ax + by + c$, ak je koreňom príslušnej lineárnej rovnice, t. j. ak

$$ap_1 + bp_2 + c = 0.$$

Analytická geometria je zjavne modelom incidenčnej geometrie.

Ak ako pole $F$ uvažujeme konečné pole, dostaneme tak ako model nejakú konečnú geometriu:

Príklad 3.5. Afinná rovina nad $F_2$ (dvojprvkovým poľom) je ako incidenčná geometria izomorfná s kompletným grafom nad štyrmi vrcholmi




Obr. 2. Afinná rovina nad dvojprvkovým poľom

**3.1.6. Projektívna rovina.** Renesanční výtvarníci (cca 15. storočie) dôkladne prepracovali *lineárnu perspektívu*. Je to teória o projekcii bodov zo scény (trojrozmerný priestor) na plátno (dvojrozmerná rovina). V matematickom pozadí lineárnej perspektívy nájdeme *projektívnu geometriu*. Rovnobežky v scéne sa na plátne zjavne pretínali, neformálne sa to popisuje, že „rovnobežky sa pretínajú v nekonečne“.

Majme rovinu, v ktorej platí axióma rovnobežnosti, povedzme klasickú reálnu rovinu $\mathbb{R}^2$. Uvažujme reláciu na priamkach (rozšírená rovnobežnosť):

$$p \sim q \quad \text{práve vtedy, keď} \quad p = q \text{ alebo } p \parallel q.$$

Potom $\sim$ je reláciou ekvivalencie: reflexívnosť a symetrickosť sú zjavné, tranzitívnosť ukážeme:

- Nech $p, q, r$ sú navzájom rôzne (inak je to triviálne) a nech $p \sim q$ a $q \sim r$. Chceme ukázať, že $p \sim r$.
- Sporom, nech $p \not\sim r$, teda $p$ a $r$ sa pretnú v jedinom bode $B$.
- Potom máme dve rovnobežky ku $q$ cez bod $B$, čo je spor s axiómou rovnobežnosti.

Triedy ekvivalencie v relácii $\sim$ nech sú nové body, o ktoré rozšírime $\mathbb{R}^2$ („body v nekonečne“). Aby boli splnené axiómy, tak

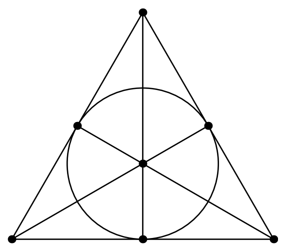
- každý z nových bodov leží na každej priamke, ktorá túto triedu ekvivalencie reprezentuje,

- body v nekonečne (t. j. triedy ekvivalencie) nech ležia všetky na „priamke v nekonečne“ – je to nová priamka, ktorú pridáme k už existujúcim priamkam.

Urobili sme tzv. *projektívne zúplnenie* $\mathbb{R}^2$.

Ako bolo spomenuté, táto konštrukcia funguje aj všeobecnejšie, a síce pre ľubovoľný model incidenčnej geometrie, v ktorom platí Euklidov postulát rovnobežnosti. Čiže každú afinnú rovinu nad poľom vieme zúplniť na projektívnu rovinu.

PRÍKLAD 3.6. Najmenšia projektívna rovina (tzv. *Fanova rovina*) vznikne projektívnym zúplnením uvedenej štvorbodovej roviny.



OBR. 3. Fanova rovina

POZNÁMKA 3.7. Projektívna rovina sa v incidenčnej geometrii môže definovať aj axiomaticky, nie iba ako projektívne zúplnenie afinnej roviny. Presnejšie, *projektívnou rovinou* sa nazýva taký model incidenčnej geometrie, kde

- každá priamka má aspoň tri body,
- každé dve priamky sa pretínajú.

## Cvičenia

### Axiómy incidencie

Každý krok dôkazu podložte axiómou alebo vetou, ktorú sme z axióm ukázali.

29. Ukážte, že existujú tri priamky, ktoré neprechádzajú všetky jedným bodom.

30. Ukážte, že pre každú priamku existuje bod, ktorý na nej neleží.

31. Ukážte, že pre každý bod existuje priamka, ktorá ním neprechádza.

32. Ukážte, že každým bodom prechádzajú aspoň dve rôzne priamky. Dá sa ukázať, že každým bodom prechádzajú aspoň tri priamky?

### Modely incidenčnej geometrie

33. Zistite, či duálna geometria k štvorbodovej geometrii (kompletný graf so štyrmi vrcholmi, model v odseku 3.1.2) je modelom incidenčnej geometrie.

34. Za akých podmienok je duálna geometria k incidenčnému modelu tiež modelom incidenčnej geometrie? Svoje tvrdenie dokážte.

35. Ukážte, že axiómy incidencie sú navzájom nezávislé, čiže pre každú dvojicu axióm nájdite reprezentáciu, ktorá tieto dve axiómy spĺňa, a pritom nespĺňa tretiu axiómu.

36. Vieme, že existuje len jeden trojbodový model incidenčnej geometrie, až na izomorfizmus. Platí to isté pre štvorbodové modely? Ak áno, ukážte. Ak nie, nájdite dva štvorbodové modely, ktoré nie sú izomorfné.

37. Uvažujme takúto interpretáciu pojmov „bod“, „priamka“ a „incidencia“:

- „bod“ je priamka v trojrozmernom priestore,
- „priamka“ je rovina v trojrozmernom priestore,
- „bod leží na priamke“, keď zodpovedajúca priamka leží v zodpovedajúcej rovine.

Je to model incidenčnej geometrie?

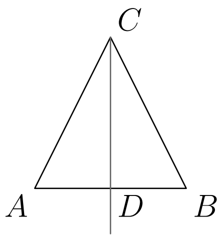
38. Uvažujme interpretáciu pojmov „bod“, „priamka“ a „incidencia“ ako v predchádzajúcom prípade, ale pracovať budeme len s priamkami a rovinami prechádzajúcimi daným pevne zvoleným bodom.

- Je to model incidenčnej geometrie?
- Porovnajte ho so sférou so stotožnenými dvojicami protiľahlých bodov.

KAPITOLA 4

# Axiómy usporiadania

PRÍKLAD 4.1. Ak by sme (vrámci stredoškolskej geometrie) chceli ukázať, že uhly pri základni $AB$ rovnoramenného trojuholníka $ABC$ sú zhodné, dôkaz by sa mohol vyvíjať napríklad takto.




OBR. 4

- Zostrojíme os $\angle ACB$.
- Nech $D$ je jej priesečník so základňou $AB$.
- Pomocou vety sus o zhodnosti trojuholníkov ukážeme, že $\triangle ACD$ a $\triangle BCD$ sú zhodné.

Konštrukcia bodu $D$ v druhom kroku je však problematická: len obrázok nám napovedá, že takýto bod existuje. Odkiaľ ale vlastne vieme, že os $\angle ACB$ naozaj pretne priamku $\overleftrightarrow{AB}$? A ak ju aj pretne, odkiaľ vieme, že sa tak stane medzi bodmi $A$ a $B$?

Teóriu o relácii usporiadania bodov vypracoval Moritz Pasch, od neho ju David Hilbert prevzal do svojich *Grundlagen der Geometrie*.

Nedefinované pojmy:

- usporiadanie bodov: „bod $B$ leží medzi bodmi $A$ a $C$", zápis $A*B*C$.

Axiómy:

U1: Ak $B$ leží medzi $A$ a $C$, potom $A, B, C$ sú tri rôzne kolineárne body a platí tiež, že $B$ leží medzi $C$ a $A$.

U2: Pre ľubovoľné navzájom rôzne body $A$ a $C$ existujú body $B$ a $D$ tak, že $A * B * C$ a $A * C * D$.

U3: Pre ľubovoľné tri navzájom rôzne kolineárne body práve jeden z nich leží medzi zvyšnými dvoma.
U4P: (O chvíľu, najprv si dodefinujeme úsečku, aby sa nám axióma ľahšie formulovala.)

Definícia 4.2. Nech $A \neq B$. *Úsečka* $AB$ je množina pozostávajúca z bodov $A$, $B$ a z takých bodov $X$, že $A * X * B$. Body $A, B$ sú *koncové body úsečky.*

Axióma:

U4P: **(Paschova axióma, 1882)** Nech priamka $p$ neprechádza žiadnym z nekolineárnych bodov $A, B, C$. Ak $p$ pretína úsečku $AB$, potom pretína buď úsečku $AC$ alebo úsečku $BC$.

Pasch ([**11**]) si všimol, že tvrdenie U4P Euklides používa bez dôkazu.

Dôsledok. *Každá priamka má aspoň päť bodov.*

*Dôkaz.* Na priamke určenej dvoma bodmi vieme pomocou axiómy U2 zostrojiť ďalšie tri body. Axiómami U1 a U3 vyargumentujeme, že žiadne dva z týchto piatich bodov nesplývajú do jedného, ide teda naozaj o päť rôznych bodov na jednej priamke. □

Ak by sme sa snažili axiómou U2 konštruovať ďalšie a ďalšie body a ilustrovať tak, že bodov na priamke je nekonečne veľa, narazíme na problém, keď sa budeme pomocou U1 a U3 snažiť ukázať, že každý skonštruovaný bod je skutočne novým bodom. No ako ilustruje nasledujúci príklad, iba z axióm U1, U2 a U3 sa toto ukázať nedá.

Príklad 4.3. Uvažujme množinu $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ s aritmetikou modulo 5. Táto množina môže reprezentovať priamku v rovine $\mathbb{A}^2(F_5)$, napríklad priamku $y = 0$, body na nej sú reprezentované svojimi $x$-súradnicami. Ak definujeme

$$a * b * c \text{ práve vtedy, keď } b = \frac{a+c}{2},$$

tak axiómy U1,U2,U3 sú splnené. Priamka má však iba 5 bodov.

Ponaučenie: treba si dať veľký pozor na vyhlásenia, ktoré sa nám zdajú samozrejmé, lebo v skutočnosti nemusia byť ani pravdivé!

To, že priamka má naozaj nekonečne veľa bodov, je možné ukázať až s pomocou Paschovej axiómy usporiadania. Potrebujeme popísať lineárnosť usporiadania bodov na priamke. K tomuto výsledku ale vedie ešte dlhá cesta.

Definícia 4.4. Nech $A \neq B$. *Polpriamka* $\overrightarrow{AB}$ je množina bodov úsečky $AB$ spolu s bodmi $X$ takými, že $A * B * X$.

Tvrdenie 4.5. *Pre ľubovoľné dva rôzne body $A, B$ platí:*

(a) $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA} = AB$,
(b) $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA} = \overleftrightarrow{AB}$.

*Dôkaz.* (a)

- Z definície polpriamky máme $AB \subset \overrightarrow{AB}$, to isté pre druhú polpriamku.
- Preto $AB \subset \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$.
- Pre opačnú inklúziu nech teraz $C \in \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$.
- Ak $C = A$ alebo $C = B$, dokazovaná inklúzia platí.
- Nech teda $C \neq A$, $C \neq B$. Z definície polpriamky $\overrightarrow{AB}$ tak musí platiť $A * C * B$ alebo $A * B * C$.
- Podobne keďže aj $C \in \overrightarrow{BA}$, tak musí platiť $B * C * A$ alebo $B * A * C$.
- Z axiómy U3 potom máme, že $C \in AB$.

(b) Cvičenie. □

## 4.1. Separačná vlastnosť v rovine a na priamke

Nasledujúci pojem je potrebný k pôvodnej verzii Euklidovej axiómy o rovnobežkách.

Definícia 4.6. Daná je priamka a body $A, B$ neležiace na tejto priamke. Hovoríme, že

- body $A, B$ ležia *na tej istej strane* od danej priamky, ak $A = B$ alebo ak $A \neq B$ a úsečka $AB$ túto priamku nepretína;
- body $A, B$ ležia *na opačných stranách* od danej priamky, ak úsečka $AB$ túto priamku pretína, t. j. ak na tejto priamke existuje bod $X$ tak, že $A * X * B$.

Veta 4.7 (**separačná vlastnosť v rovine, U4S**). *Ľubovoľná priamka $p$ delí rovinu okrem bodov priamky $p$ na dve triedy tak, že body ležia v tej istej triede práve vtedy, keď ležia na tej istej strane od priamky $p$. (t. j. neexistuje bod $X \in p$ taký, že $A * X * B$, kde $A$ a $B$ sú dané body.)*

Pre pohodlnejšiu prácu si separačnú vlastnosť na priamke „rozmeníme na drobné“. Iná formulácia toho istého tvrdenia je:

Veta 4.8 (**separačná vlastnosť v rovine, U4S**). *Pre priamku $p$ a body $A, B, C$ neležiace na tejto priamke platí:*

(i) *Ak $A$ a $B$ ležia na tej istej strane od priamky $p$ a $B$ a $C$ ležia na tej istej strane od priamky $p$, potom aj $A$ a $C$ ležia na tej istej strane od priamky $p$.*
(ii) *Ak $A$ a $B$ ležia na opačných stranách od priamky $p$ a $B$ a $C$ ležia na opačných stranách od priamky $p$, potom $A$ a $C$ ležia na tej istej strane od priamky $p$.*

(iii) *Ak $A$ a $B$ ležia na opačných stranách od priamky $p$ a $B$ a $C$ ležia na tej istej strane od priamky $p$, potom aj $A$ a $C$ ležia na opačných stranách od priamky $p$.*

*Dôkaz ekvivalencie Viet 4.7 a 4.8.* Tvrdenie (iii) Vety 4.8 je dôsledkom jej tvrdení (i) a (ii). Stačí teda pracovať s časťami (i) a (ii).

Z Definície 4.6 vyplýva, že pre danú priamku je „ležať na tej istej strane“ relácia na množine všetkých bodov okrem bodov tejto priamky, pričom táto relácia je reflexívna a symetrická.

Veta 4.7 tvrdí, že „ležať na tej istej strane“ je relácia ekvivalencie, ktorá rozkladá body roviny okrem bodov danej priamky na dve triedy.

Veta 4.8 tvrdí, že „ležať na tej istej strane“ je relácia, ktorá je okrem symetrickosti a reflexívnosti aj tranzitívna a rozkladá rovinu (okrem $p$) na maximálne dve triedy.

Pre dôkaz ekvivalencie potrebujeme preto ukázať len to, že dve triedy ekvivalencie určite existujú:

- nech $O \in p$ (I2)
- a nech $A \notin p$ (dôsledok I3).
- Potom $[A]$ je jedna trieda ekvivalencie.
- Nech $B$ je bod, že $A * O * B$ (U2).
- Potom $A$ a $B$ neležia na tej istej strane od $p$, čiže nie sú ekvivalentné,
- a teda $[B]$ je druhá trieda ekvivalencie.

□

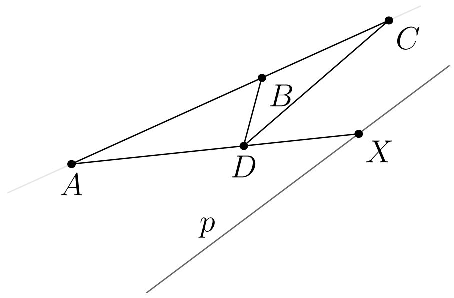
*Dôkaz Vety 4.8.* Ľahko sa presvedčíme, že ak niektoré z bodov $A, B, C$ splývajú, separačná vlastnosť na priamke platí. Predpokladajme teda, že body $A, B$ a $C$ sú navzájom rôzne. Najprv uvažujme prípad, že tieto body sú aj nekolineárne.

(i) Nech $A, B$ ležia na tej istej strane od $p$ a tiež nech $B, C$ ležia na tej istej strane od $p$. Ak by $A$ a $C$ ležali na opačných stranách od $p$, potom by podľa U4P musela priamka $p$ pretať aj úsečku $AB$ alebo úsečku $BC$, čo je spor s predpokladom. Preto $A$ a $C$ ležia na tej istej strane od $p$.

(ii) Nech $A$ a $B$ ležia na opačných stranách od priamky $p$ a nech aj $B$ a $C$ ležia na opačných stranách od priamky $p$. Podľa U4P potom priamka $p$ nepretína úsečku $AC$, a teda $A$ a $C$ ležia na tej istej strane od $p$.

Nech teraz sú $A, B, C$ rôzne kolineárne body.

(i) Nech $A$ a $B$ ležia na tej istej strane od priamky $p$ a aj $B, C$ ležia na tej istej strane od $p$. Nech bod $D \notin p$ leží na tej istej strane ako $A$ a nie je kolineárny s bodmi $A, B, C$. (Existuje: nech $X \in p$ je taký, že $X \notin \overleftrightarrow{AB}$ (I2), a nech $D$ je taký, že $A * D * X$ (U2).) Potom $B$ je na tej istej strane ako $D$ ((i) pre nekolineárne body $A, B, D$), $C$ je na tej istej strane ako $D$ ((i) pre nekolineárne body $B, C, D$) a $C$ je na tej istej strane ako $A$ ((i) pre nekolineárne body $A, C, D$).




Obr. 5

Prípad (ii) pre kolineárne body podobne (cvičenie). □

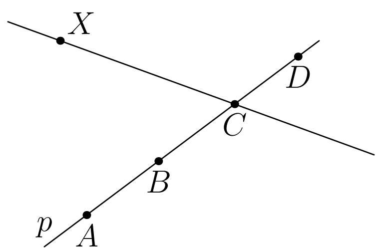
Definícia 4.9. *Polrovina* s *hranicou* $p$ je priamka $p$ spolu s jednou z dvoch tried určených touto priamkou podľa separačnej vlastnosti v rovine. Podrobnejšie, pre priamku $p = \overleftrightarrow{AB}$ a bod $C$ neležiaci na tejto priamke je polrovina $\overrightarrow{pC} = \overrightarrow{ABC}$ množina bodov $X$ takých, že $C$ a $X$ ležia na tej istej strane od priamky $p$ (*vnútorné body polroviny*) spolu s bodmi priamky $p$ (*hranica polroviny*). Obidve polroviny s tou istou hranicou nazývane *navzájom opačnými*.

Teraz chceme ukázať priamkovú analógiu separačnej vlastnosti v rovine, a síce, že bod na priamke túto delí na dve polpriamky.

Veta 4.10 (**o usporiadaní štyroch bodov**). *Nech $A * B * C$ a $A * C * D$. Potom $B * C * D$ aj $A * B * D$.*

*Dôkaz.* Podobne ako v dôkaze U4S (Veta 4.8) pre kolineárne body, aby sme dokázali tvrdenie o bodoch na priamke, bude treba vyjsť z priamky von do roviny. Tvrdenie ukážeme pomocou separačnej vlastnosti v rovine:

Ak $A*B*C$ a $A*C*D$, potom $B \neq D$, inak by sme sa dostali do sporu s U3. Preto $A, B, C, D$ sú určite štyri rôzne kolineárne body (U1).




Obr. 6

- Nech $X$ je bod neležiaci na tejto priamke (I3).

- Úsečka $AD$ pretína priamku $\overleftrightarrow{XC}$,
- teda body $A$ a $D$ ležia v opačných polrovinách od $\overleftrightarrow{XC}$.
- Body $A$ a $B$ musia byť na tej istej strane od $\overleftrightarrow{XC}$. (Sporom: ak by boli na opačných, potom úsečka $AB$ by pretínala priamku $\overleftrightarrow{XC}$, priesečník je nutne bod $C$, teda $A * C * B$, spor s predpokladom.)
- Odtiaľ $B, D$ sú na opačných stranách od $\overleftrightarrow{XC}$, čiže $B * C * D$.

Podobne (aj s využitím práve ukázaného $B*C*D$) sa ukáže, že $A*B*D$ (cvičenie).

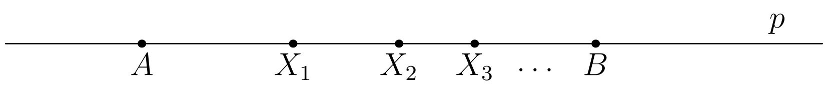
□

Dôsledok. *Na každej priamke leží nekonečne veľa bodov.*

*Dôkaz.*

- Nech $A, B$ ležia na danej priamke, $A \neq B$ (I1).
- Nech $X_1$ je bod, že $A * X_1 * B$ (U2). Zrejme $X_1 \neq A, X_1 \neq B$ (U1).
- Nech $X_2$ je bod, že $X_1 * X_2 * B$ (U2). Zrejme $X_2 \neq X_1, X_2 \neq B$ (U1). Podľa Vety 4.10 potom $A * X_2 * B$, teda $X_2 \neq A$.

Rovnakým spôsobom pokračujeme ďalej v konštruovaní ďalších bodov a dokazovaní, že novo skonštruovaný bod je rôzny od všetkých doterajších:




Obr. 7. Pomocou všetkých axióm usporiadania spolu s axiómami incidencie vieme na priamke skonštruovať nekonečne veľa bodov

- (indukčný predpoklad) Nech pre doteraz skonštruované body $X_1, X_2$ až $X_n$ platí $X_i * X_j * B$ $(i < j)$ a $A * X_i * B$.
- (indukčný krok) Nech $X_{n+1}$ je bod, že $X_n * X_{n+1} * B$ (U2). Potom z indukčného predpokladu pomocou Vety 4.10 dostávame tiež, že $X_i*X_{n+1}*B$ a $A * X_{n+1} * B$, teda $X_{n+1}$ je rôzny od všetkých doposiaľ skonštruovaných bodov.

□

O nasledovnom tvrdení Pasch ukázal, že sa nedá odvodiť z Euklidových postulátov. Je to analógia vety o usporiadaní štyroch bodov, tiež popisuje, z akých konfigurácii dvoch trojíc štvorice bodov vieme už usúdiť konfiguráciu zvyšných dvoch trojíc.

Veta 4.11 (**Paschova**). *Nech $A*B*C$ a $B*C*D$. Potom $A*B*D$ a $A*C*D$.*

*Dôkaz.* Ukazuje sa podobne ako Veta 4.10 (cvičenie). □

TVRDENIE 4.12 (**separačná vlastnosť na priamke, U***). *Nech $A * B * C$ sú body na priamke $p$. Potom pre každý bod $X \in p$, $X \neq B$ platí, že buď $X \in \overrightarrow{BA}$ alebo $X \in \overrightarrow{BC}$.*

*Inak sformulované: ak $A * B * C$ sú body na priamke $p$, potom $\overrightarrow{BA} \cap \overrightarrow{BC} = B$ a $\overrightarrow{BA} \cup \overrightarrow{BC} = p$.*

*Dôkaz.* Najprv ukážeme, že $\overrightarrow{BA} \cup \overrightarrow{BC} = p$.

- Pre polohu bodu $X$ vzhľadom na $A, B$ máme možnosti: $X = A$, $X * A * B$, $A * X * B$ a $A * B * X$.
- Prvé tri možnosti znamenajú, že $X \in \overrightarrow{BA}$ – hotovo.

(1) Nech $X \notin \overrightarrow{BA}$, teda platí $A * B * X$.

- Ak $X = C$, potom $X \in \overrightarrow{BC}$ – hotovo.
- Nech teda $X \neq C$, nastáva potom práve jedna z možností $B * C * X$, $B * X * C$ alebo $X * B * C$.
- Prvé dve možnosti znamenajú, že $X \in \overrightarrow{BC}$ – hotovo.

(2) Nech teda $X * B * C$.

- Pre body $A, C, X$ platí práve jedna z možností $A * C * X$, $A * X * C$, $X * A * C$.
- Prvá možnosť spolu s $C * B * X$ (2) implikuje $A * C * B$, spor s predpokladom.
- Druhá možnosť spolu s $X * B * C$ (2) implikuje $A * X * B$, spor s (1).
- Tretia možnosť spolu s $X * B * A$ (1) implikuje $B * A * C$, spor s predpokladom.

Ostáva ešte ukázať, že $\overrightarrow{BA} \cap \overrightarrow{BC} = B$.

- Nech $X \in p$, $X \neq B$.
- Nech $D \notin p$ (v dôsledku I3 bod $D$ existuje), potom priamka $\overleftrightarrow{BD}$ delí ostatné body roviny na dve triedy (U4S). Keďže $A * B * C$, tak body $A$ a $C$ ležia v rôznych polrovinách vzhľadom na túto priamku.
- Pre $X \in \overrightarrow{BA}$ nastane niektorá z možností $X = A$, $X * A * B$, $A * X * B$. Každá z nich znamená, že $X$ leží na tej istej strane od $\overleftrightarrow{BD}$ ako $A$.
- Podobne pre $X \in \overrightarrow{BC}$ platí, že $X$ leží na tej istej strane od $\overleftrightarrow{BD}$ ako $C$.
- Keďže „ležať na tej istej strane od priamky $\overleftrightarrow{BD}$“ je relácia ekvivalenie, môže nastať iba jedna z možností $X \in \overrightarrow{BA}$ a $X \in \overrightarrow{BC}$.

□

Preformulovanie separačnej vlastnosti na priamke:

TVRDENIE 4.13 (**separačná vlastnosť na priamke, U***). *Každý bod $B$ na priamke $p$ rozdeľuje ostatné body tejto priamky na dve triedy tak, že dva body $X$ a $Y$ neležia v tej istej triede práve vtedy, keď $X * B * Y$.*

Podobne ako tomu bolo pri separačnej vlastnosti v rovine, aj tu sú tvrdenia 4.12 a 4.13 za predpokladov I1-3, U1-3 ekvivalentné.

Poznámka 4.14. Separačná vlastnosť na priamke je dôležitá tým, že vďaka nej vieme body na priamke lineárne usporiadať. (Lineárne usporiadanie je presný matematický termín a bude dôsledne vyložený v časti 4.3.1: Usporiadaná rovina a usporiadané pole. Tu nám stačí neformálna predstava, že vieme body akoby zoradiť do radu, pekne jeden za druhým.)

Definícia 4.15. *Opačná polpriamka* k danej polpriamke $\overrightarrow{AB}$: nech $C * A * B$, potom opačnou polpriamkou k $\overrightarrow{AB}$ je $\overrightarrow{AC}$.

## 4.2. Modifikácie axióm usporiadania

Separačná vlastnosť v rovine (U4S) je za predpokladu platnosti axióm I1-3, U1-3 ekvivalentná Paschovej axióme. Že z U4P vyplýva U4S, sme si už demonštrovali. Preveriť opačnú implikáciu sa pokúsite vrámci cvičení. Z toho vyplýva, že ak by sme namiesto axióm U1, U2, U3 a U4P vyslovili axiómy U1, U2, U3 a U4S, dostali by sme tú istú geometriu. Môžeme sa preto (a aj to budeme robiť) na štvrtú axiómu odkazovať ako na U4.

Videli sme tiež, že ak s axiómami incidencie I1-3 uvažujeme iba prvé tri axiómy usporiadania U1-3, separačnú vlastnosť na priamke (U*) vieme odvodiť z Vety 4.10 (veta o usporiadaní štyroch bodov). Tiež to platí aj naopak: túto vetu ľahko ukážeme, ak predpokladáme separačnú vlastnosť na priamke (skúste si to!). Platí preto, že separačná vlastnosť na priamke je (za predpokladu platnosti axióm I1-3, U1-3) ekvivalentná Vete 4.10.

Paschova veta (4.11) tiež vyplýva zo separačnej vlastnosti na priamke. Odtiaľ vidíme, že Paschova veta je tiež dôsledkom Vety 4.10 (za predpokladu I1-3, U1-3).

Separačnú vlastnosť na priamke (U*) sme odvodili zo separačnej vlastnosti v rovine. U* je naozaj slabšia: zo separačnej vlastnosti na priamke sa nedá odvodiť U4S. Existujú geometrie, ktoré nespĺňajú U4, ale separačnú vlastnosť na priamke spĺňajú, ako si čoskoro ilustrujeme.

Niektorí autori, ktorí namiesto U4P používajú U4S, niekedy uvádzajú ako axiómu aj separačnú vlastnosť na priamke, práve kvôli jej významnosti, aj keď ide v skutočnosti o závislé tvrdenie, ktoré sa dá odvodiť z I1-3, U1-4. Sada axióm usporiadania vtedy vyzerá nasledovne: U1, U2, U3, U*, U4S.

Dokonca Hilbert mal medzi svojimi axiómami usporiadnia pôvodne uvedenú aj nasledovnú, o ktorej sa však tiež neskôr ukázalo, že je to v skutočnosti tvrdenie:

Tvrdenie 4.16 (**Hilbertova vynechaná axióma**). *Ľubovoľné štyri rôzne kolineárne body je možné označiť $A, B, C, D$ tak, že platí $A * B * C$, $A * B * D$, $A * C * D$ a $B * C * D$.*

Toto tvrdenie je totiž tiež ekvivalentné separačnej vlastnosti na priamke.

V prípade, že model spĺňa axiómy I1-3, U1-4, hovoríme, že ide o *usporiadanú rovinu.*

Mali ste príležitosť sa presvedčiť, že dôsledný axiomatický popis usporiadanej roviny je netriviálna záležitosť. Pritom usporiadanie bodov na priamke je intuitívne veľmi prirodzený pojem. Toto je v matematike veľmi častý jav, že tie najjednoduchšie pojmy je matematicky uchopiť veľmi náročné. Preto v niektorých výkladoch planimetrie, ktoré majú jednak ambíciu po vzore Euklida vybudovať geometriu z axióm, a tiež chcú dospieť k netriviálnym výsledkom, sa axiómy usporiadania jednoducho vynechajú, prípadne sa vezme do hry len Paschova axióma.

## 4.3. Modely axióm incidencie a usporiadania

Príklad 4.17. Konečné geometrie nie sú modelmi usporiadanej roviny, viď dôsledok Vety 4.10.

So zaujímavou geometriou sme sa stretli v Príklade 4.3, išlo o afinnú rovinu nad konečným poľom $F_5$. V tomto príklade sme overili, že táto geometria spĺňa axiómy U1-3. Avšak z U* vyplýva, že na priamke musí ležať nekonečne veľa bodov. Takže U* rovina $\mathbb{A}^2(F_5)$ nespĺňa. Odtiaľ môžeme hneď usúdiť, že ani axiómu U4 nespĺňa, a to aj bez toho, aby sme hľadali k nej v modeli kontrapríklad.

Príklad 4.18. Projektívna rovina napríklad nad reálnymi číslami s pôvodným (prirodzeným) usporiadaním bodov afinnej roviny nie je model usporiadanej roviny. Priamky v nej sú totiž topologické kružnice, t. j. akési uzavreté čiary: každej priamke afinnej roviny pribudol nevlastný bod (viď časť 3.1.6: Projektívna rovina), a nie je jasné, ako reláciu usporiadania rozšíriť, aby zahŕňala aj tento nový bod.

Niektoré projektívne roviny však môžu byť modelmi axióm incidencie a usporiadania, ak vhodne predefinujeme usporiadanie bodov na priamke ([**13**]):

Uvažujme body projektívnej roviny $\mathbb{P}^2(\mathbb{Q})$.

(1) $\mathbb{P}^2(\mathbb{Q}) \hookrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ (vnoríme našu rovinu do reálnej projektívnej roviny),
(2) v $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ zvoľme priamku cez $(1 : \pi : 0)$ a $(1 : 0 : \pi^2)$ ako novú nevlastnú priamku,
(3) v zodpovedajúcej afinnej mape usporiadame body štandardne ako v reálnej afinnej rovine,
(4) zúžime usporiadanie na pôvodnú množinu bodov.

Máme tak usporiadanú rovinu, v ktorej sa každé dve priamky pretnú, teda neexistujú žiadne rovnobežky.

Príklad 4.19. Geometriou, v ktorej neplatí U4S, ale separačná vlastnosť na priamke (U*) je splnená, je trojrozmerný priestor, napríklad afinný priestor nad reálnymi číslami.

Príklad 4.20. Predstavíme si ďalšiu geometriu, tentokrát pôjde o rovinu, bez U4S, ale so splnenou separačnou vlastnosťou na priamke (U*).

*Dyadické racionálne čísla* sú čísla tvaru $a/2^n$, kde $a, n \in \mathbb{Z}$. Množinu dyadických čísel označme $\mathbf{D}$. Pozor, $\mathbf{D}$ nie je pole! Ide o podmnožinu poľa racionálnych čísel: $\mathbb{Z} \subset \mathbf{D} \subset \mathbb{Q}$.

Bodmi nech je množina $\mathbf{D}^2$, t. j. každý bod má dve súradnice, ktorými sú dyadické čísla. Priamkami budú také priamky roviny, ktoré prechádzajú cez dva dyadické body (a tým obsahujú nekonečne veľa dyadických bodov).

Axiómy incidencie sú zjavne splnené. Z axióm usporiadania sú U1 a U3 zrejme splnené. Trochu viac pozornosti venujme axióme U2: ak $A, B$ sú body, potom

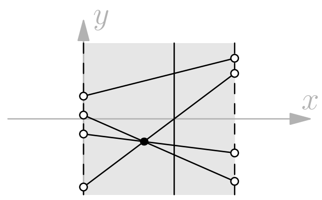
- $((a_1 + b_1)/2, (a_2 + b_2)/2 \in \mathbf{D}^2$ leží medzi $A$ a $B$,
- $(2a_1 - b_1, 2a_2 - b_2)$ je bod z druhej strany od $A$ než $B$.

Teda U2 je v $\mathbf{D}^2$ splnená.

Separačná vlastnosť na priamke platí.

Paschova axióma neplatí: pre trojuholník s vrcholmi $(1, 0), (-1, 0), (0, 1)$ priamka $y = 2x$ žiadnym z vrcholov neprechádza, a pretína len jednu stranu. Vidíme, že priamky v $\mathbf{D}^2$ sú akosi príliš „deravé“.

Príklad 4.21. Nekonečný pás $(0, 1) \times \mathbb{R}$ je modelom usporiadanej roviny. Priamkami sú tu reštrikcie priamok reálnej roviny, teda jednak priamky $x = a$ $(0 < a < 1)$, a tiež úsečky s koncovými bodmi na hranici pásu idúce „krížom cez pás“, z ktorých sú samozrejme koncové body vynechané.

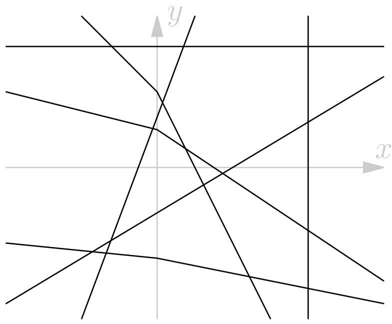



Obr. 8. Priamky v nekonečnom páse

Ide o zásadne iný model ako $\mathbb{R}^2$: niektoré priamky majú viac rovnobežiek prechádzajúcich daným bodom (viď Obrázok 8).

Príklad 4.22. Známym modelom usporiadanej roviny je Moultonova rovina. Množina bodov je $\mathbb{R}^2$, priamky sú troch druhov:

- priamky $(a)$, kde $a \in \mathbb{R}$, sú tie isté ako priamky v $\mathbb{R}^2$ s rovnicou $x = a$, teda $(p_1, p_2)$ leží na priamke, ak $p_1 = a$,
- priamky $(k, q)$, kde $k, q \in \mathbb{R}$ a $k \geq 0$, sú tie isté ako priamky v $\mathbb{R}^2$ s rovnicou $y = kx + q$, teda $(p_1, p_2)$ leží na priamke, ak $p_2 = kp_1 + q$,
- priamky $(k, q)$, kde $k, q \in \mathbb{R}$ a $k < 0$ sú „zlomené“: bod $(p_1, p_2)$ leží na priamke, ak
  - $p_1 < 0$ a $p_2 = kp_1 + q$ alebo
  - $p_1 \geq 0$ a $p_2 = 2kp_1 + q$.




Obr. 9. Priamky v Moultonovej rovine

**4.3.1. Usporiadaná rovina a usporiadané pole.** Afinná rovina nad poľom $F$ je vždy modelom incidenčnej geometrie (viď stať 3.1.5 v časti o incidenčnej geometrii):

- body sú dvojice $(p_1, p_2) \in F \times F$,
- priamky sú reprezentované lineárnymi výrazmi $ax + by + c$ $(a, b, c \in F,$ $(a, b) \neq (0, 0))$, kde dva výrazy reprezentujú tú istú priamku, ak jeden je násobkom druhého,
- bod $(p_1, p_2)$ leží na priamke $ax + by + c$, ak $ap_1 + bp_2 + c = 0$.

Afinná rovina napríklad nad racionálnymi číslami je aj usporiadanou rovinou. Toto však nie je pravda pre ľubovoľné pole: v Príklade 4.17 sme si uvedomili, že rovina obsahujúca len konečne veľa bodov, a teda špeciálne afinná rovina nad žiadnym konečným poľom nie je usporiadanou rovinou.

Prirodzene tak vyvstáva otázka, pre aké polia $F$ rovina $\mathbb{A}^2(F)$ usporiadanou rovinou je.

Definícia 4.23. Relácia $<$ je *ostré lineárne (totálne) usporiadanie*, ak je

(i) antireflexívna ($a \not< a$),
(ii) asymetrická (ak $a < b$ tak $b \not< a$),
(ii) tranzitívna (ak $a < b$ a $b < c$ tak $a < c$),
(iv) ak $a \neq b$, potom $a < b$ alebo $b < a$ (lineárnosť, úplnosť).

Poznámka 4.24. Vlastnosti (i),(ii) a (iv) sa súhrnne nazývajú aj *trichotómia*:

pre ľubovoľné dva prvky $a, b$ platí práve jedno z tvrdení
$$a = b,\ a < b,\ b < a.$$

Definícia 4.25. Pole $F$ je *usporiadané*, ak na poli $F$ máme definovanú reláciu ostrého lineárneho usporadania $<$, kde navyše platí:

(i) Ak $a < b$, potom $a + c < b + c$.
(ii) Ak $0 < a$ a $0 < b$, potom $0 < ab$.

Tvrdenie 4.26. *Ak $F$ je usporiadané pole, potom $\mathbb{A}^2(F)$ je modelom axióm incidencie a usporiadania (t. j. usporiadanou rovinou).*

*Dôkaz.* Vieme už, že afinná rovina nad $F$ je incidenčnou rovinou.

Reláciu usporiadania bodov definujeme pomocou usporiadania poľa. Nech $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ a $C = (c_1, c_2)$.

- Ak priamka má rovnicu $y = kx + q$, potom pre body na priamke nech platí $A * B * C$ vtedy, keď $a_1 < b_1 < c_1$ alebo $c_1 < b_1 < a_1$.
- Ak priamka má rovnicu $x = k$, potom pre body na priamke nech platí $A * B * C$ vtedy, keď $a_2 < b_2 < c_2$ alebo $c_2 < b_2 < a_2$.

Overíme, že v oboch prípadoch táto relácia spĺňa axiómy U1 až U4 (cvičenie). □

Tvrdenie 4.27. *Nech $\mathbb{A}^2(F)$ je usporiadanou rovinou. Potom $F$ je usporiadané pole.*

*Dôkaz.* Reláciu usporiadania v poli $F$ definujeme pomocou relácie usporiadania bodov na priamke.

Uvažujme priamku $p: \ y = 0$ (t. j. $x$-os). Pre každý prvok $a$ poľa $F$ leží na priamke $p$ bod $A = (a, 0)$. Označme body zodpovedajúce v poli $F$ neutrálnym prvkom vzhľadom na sčítanie a násobenie: $O = (0, 0)$, $E = (1, 0)$. Nenulové číslo $a \in F$ vieme porovnať s nulou nasledovne:

- $a < 0$ ak $A * O * E$,
- $0 < a$ inak, t. j. ak $O * A * E$ alebo $O * E * A$ alebo $A = E$. Inými slovami, $0 < a$ ak $A \in \overrightarrow{OE}$ a $A \neq O$.

Následne pre dve nenulové čísla $a, b \in F$ definujme

- $a < b$ práve vtedy, keď $0 < b - a$.

Ostáva už len overiť, že pole $F$ s takto definovanou reláciou usporiadania je usporiadaným poľom (cvičenie). □

## 4.4. Uhol

Definícia 4.28. Nech $A, B, C$ sú nekolieárne body. Potom polpriamky $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{BA}$ a $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{BC}$ tvoria *uhol* pri *vrchole* $B$. Označujeme ho $\angle ABC$, $\angle CBA$, $\angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c})$, $\angle(\overrightarrow{c}, \overrightarrow{a})$ prípadne aj $\angle B$, pokiaľ je z kontextu jasné, ktorými polpriamkami je určený. Polpriamky $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}$ nazývame *ramenami* uhla.

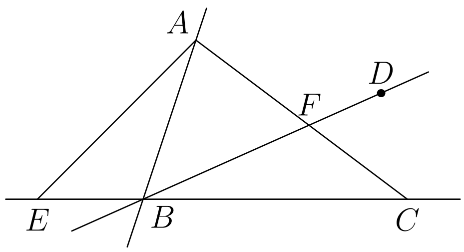
*Vnútro uhla (vnútorné body uhla)* $\angle ABC$ je prienik vnútorných bodov polroviny $\overrightarrow{BCA}$ (t. j. bodov ležiacich na tej istej strane od $\overleftrightarrow{BC}$ ako bod $A$) s vnútornými bodmi bodmi polroviny $\overrightarrow{BAC}$ (t. j. bodmi ležiacimi na tej istej strane od $\overleftrightarrow{AB}$ ako bod $C$).

*Vonkajšok uhla (vonkajšie body uhla)* $\angle ABC$ sú všetky body roviny okrem polpriamok $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ a vnútra $\angle ABC$.

POZNÁMKA 4.29. Ak polpriamky $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}$ spolu tvoria priamku, t. j. sú navzájom opačné, nazýva sa toto na strednej škole priamy uhol. My pod pojmom *uhol* budeme vždy myslieť uhol, ktorý nie je priamy.

Tak isto pojmy konvexný resp. nekonvexný uhol nebudeme používať, my sa budeme baviť o uhle spolu s jeho vnútrom resp. vonkajškom.

VETA 4.30 (**crossbar theorem, veta o priečke uhla**). *Nech $D$ je vnútorný bod uhla $\angle ABC$. Potom polpriamka $\overrightarrow{BD}$ pretína úsečku $AC$.*




OBR. 10

*Dôkaz.* Nech $E$ leží na polpriamke opačnej k $\overrightarrow{BC}$, t. j. $E{*}B{*}C$. Pomocou Paschovej axiómy aplikovanej na $\triangle ECA$ ukážeme, že priamka $\overleftrightarrow{BD}$ pretína úsečku $AC$.

- Priamka $\overleftrightarrow{BD}$ neprechádza bodmi $E$ ani $C$ (lebo $E * B * C$)
- a ani bodom $A$ (inak by $\overleftrightarrow{BD} = \overleftrightarrow{AB}$, a teda $D$ by nebol vnútorným bodom $\angle ABC$).
- Keďže $\overleftrightarrow{BD}$ pretína $EC$, z Paschovej axiómy pretína práve jednu z úsečiek $AE$ a $AC$. Ukážeme, že $\overleftrightarrow{BD}$ úsečku $AE$ nepretína.
- Poloha vzhľadom na $\overleftrightarrow{AB}$:
  - Všetky body úsečky $AE$ okrem bodu $A$ ležia na tej istej strane od $\overleftrightarrow{AB}$.
  - Keďže bod $C$ leží na opačnej strane od $\overleftrightarrow{AB}$ ako $E$ (z konštrukcie $E$), ležia všetky body úsečky $AE$ okrem $A$ na opačnej strane od $\overleftrightarrow{AB}$ ako $C$.
  - Ďalej všetky body $\overrightarrow{BD}$ okrem bodu $B$ ležia zas na tej istej strane od $AB$ ako bod $C$.
  - Odtiaľ vidíme, že úsečka $AE$ nepretína polpriamku $\overrightarrow{BD}$.
- Poloha vzhľadom na $\overleftrightarrow{BC}$:
  - Všetky body úsečky $AE$ okrem bodu $E$ ležia na tej istej strane od $\overrightarrow{BC}$ ako bod $A$.
  - Naopak, body polpriamky opačnej k $\overrightarrow{BD}$ okrem bodu $B$ ležia na opačnej strane od $\overleftrightarrow{BC}$ ako bod $A$,
  - čiže $AE$ nepretína polpriamku opačnú k $\overrightarrow{BD}$.
- Preto $\overleftrightarrow{BD}$ nepretína úsečku $AE$.
- Preto z Paschovej axiómy $\overleftrightarrow{BD}$ pretína úsečku $AC$, priesečník označme $F$.

Treba ešte ukázať, že priesečník $F$ leží na polpriamke $\overrightarrow{BD}$.

- Body $F$ a $D$ ležia na tej istej strane od $\overleftrightarrow{BC}$ (oba sú na tej istej strane ako $A$),
- teda buď $F = D$ alebo pre priesečník $B$ priamok $\overleftrightarrow{FD}$ a $\overleftrightarrow{BC}$ platí buď $B * F * D$ alebo $B * D * F$,
- v každom prípade $F$ leží na $\overrightarrow{BD}$.

□

Poznámka 4.31. Pozor, v predchádzajúcej vete sme nedokázali, že každý bod polpriamky $\overrightarrow{BD}$ je jej priesečníkom s úsečkou, ktorej koncové body ležia na ramenách uhla! Kontrapríklad sa dá nájsť v modeli z Príkladu 4.21.

Na Vetu o priečke uhla sa môžeme pozerať aj ako na parafrázu Paschovej axiómy. Veta rieši situáciu, keď priamka prechádza jedným (a iba jedným) z vrcholov trojuholníka, týmto vrcholom vojde dnu do trojuholníka, potom podľa Vety táto priamka pretína protiľahlú stranu trojuholníka.

Všimnite si, že Veta o priečke uhla nám pomohla vyriešiť problematický krok v dôkaze o uhloch pri základni rovnoramenného trojuholníka v Príklade 4.1.

## 4.5. Lomená čiara, mnohouholník, Jordanova veta

Definícia 4.32. Nech $n \geq 1$ a nech $A_0, A_1, \ldots, A_n$ sú body, pričom každé tri za sebou idúce body sú nekolineárne. *Lomená čiara* $A_0A_1 \ldots A_n$ pozostáva z úsečiek $A_0A_1, A_1A_2, \ldots A_{n-1}A_n$. Tiež budeme hovoriť, že ide o lomenú čiaru *spájajúcu body* $A_0$ a $A_n$.

Ak v lomenej čiare $A_0A_1 \ldots A_n$ platí, že $A_0 = A_n$ (tzv. *uzavretá* lomená čiara), potom ju nazývame tiež *mnohouholníkom (polygónom)*. Body $A_1, \ldots, A_n$ vtedy nazývame *vrcholmi* a úsečky $A_iA_{i+1}$ *stranami* mnohouholníka. Všetky body na stranách mnohouholníka nazývame tiež *hranicou mnohouholníka*.

Ak v mnohouholníku sú všetky vrcholy navzájom rôzne a okrem spoločného vrchola žiadne dve strany nezdieľajú spoločný bod, nazývame mnohouholník *jednoduchým*. Podobne môžeme zadefinovať jednoduchú lomenú čiaru.

Pre $n = 3, 4, 5, \ldots, n$ nazývame príslušný mnohouholník *trojuholníkom, štvoruholníkom, päťuholníkom, …, n-uholníkom*.

Veta 4.33 (**Jordanova, mnohouholníková verzia**). *Jednoduchý mnohouholník delí body roviny neležiace na jeho hranici na dve oblasti, tzv.* vnútro *a* vonkajšok *tak, že platí:*

- *Ak $X$ je vnútorný a $Y$ vonkajší bod, potom každá lomená čiara spájajúca $X$ a $Y$ obsahuje aspoň jeden bod hranice mnohouholníka.*

- *Ak $X_1$ a $X_2$ sú oba vnútornými bodmi mnohouholníka, potom existuje lomená čiara spájajúca body $X_1$ a $X_2$ a nepretínajúca hranicu mnohouholníka. To isté platí pre dva vonkajšie body $Y_1$ a $Y_2$ mnohouholníka.*

*Existuje priamka ležiaca celá zvonku mnohouholníka a neexistuje priamka ležiaca celá vnútri mnohouholníka.*

*Dôkaz.* [**6**] □

V prvom vydaní svojich *Grundlagen der Geometrie* Hilbert túto vetu vyslovil bez dôkazu a s komentárom, že čitateľ si ju ľahko dokáže sám s využitím Paschovej axiómy. Ako sa rýchlo ukázalo, nie je až také ľahké túto vetu dokázať, preto z ďalších edícií Hilbert túto poznámku už vynechal.

Dôkaz sa objavil niekoľko rokov neskôr ako samostatný vedecký článok.

Uhol vo všeobecnosti nemá tú vlastnosť ako mnohouholník, že jeho vnútro by neobsahovalo priamku. V euklidovskej rovine je to síce pravda, ale v niektorých modeloch usporiadanej roviny existujú uhly, ktoré vo svojom vnútri obsahujú celú priamku, napríklad znovu v modeli z Príkladu 4.21.

Špeciálny prípad mnohouholníka, konkrétne trojuholník, bude pre nás pri budovaní ďalšej teórie veľmi dôležitý. Našťastie v tomto prípade je jednoduché definovať si vnútro a vonkajšok trojuholníka. Urobme si to preto pre trojuholník separátne, keďže Jordanovu vetu si tu nedokazujeme.

Definícia 4.34. Nech $A, B, C$ sú nekolineárne body. Potom tieto body určujú *trojuholník* $ABC$, ozn. $\triangle ABC$. Jednotlivé úsečky sú *strany* $\triangle ABC$, body $A, B, C$ sú jeho *vrcholy*. Vrcholy a strany tvoria spolu *hranicu* $\triangle ABC$. Body, ktoré sú zároveň vnútornými bodmi $\overrightarrow{ABC}$, vnútornými bodmi $\overrightarrow{BCA}$ a vnútornými bodmi $\overrightarrow{CAB}$, sa nazývajú *vnútornými bodmi* alebo *vnútrom* $\triangle ABC$, a body, ktoré neležia ani na hranici ani vnútri $\triangle ABC$, sú *vonkajšími bodmi* alebo *vonkajškom* $\triangle ABC$.

## Cvičenia

### Axiómy usporiadania

39. Pre ľubovoľné dva rôzne body $A, B$ platí: $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA} = \overleftrightarrow{AB}$. Dokážte.

40. Pomocou Paschovej axiómy sme čiastočne dokázali separačnú vlastnosť v rovine (U4S, Veta 4.8), ktorá znela nasledovne:

Pre priamku $p$ a body $A, B, C$ neležiace na tejto priamke platí:

(i) Ak $A$ a $B$ ležia na tej istej strane od priamky $p$ a $B$ a $C$ ležia na tej istej strane od priamky $p$, potom aj $A$ a $C$ ležia na tej istej strane od priamky $p$.

(ii) Ak $A$ a $B$ ležia na opačných stranách od priamky $p$ a $B$ a $C$ ležia na opačných stranách od priamky $p$, potom $A$ a $C$ ležia na tej istej strane od priamky $p$.

(iii) Ak $A$ a $B$ ležia na opačných stranách od priamky $p$ a $B$ a $C$ ležia na tej istej strane od priamky $p$, potom $A$ a $C$ ležia na opačných stranách od priamky $p$.

Doplňte dôkaz tejto vety, čiže:

(a) overte, že tvrdenie (iii) je dôsledkom tvrdení (i) a (ii);
(b) presvedčte sa, že veta platí, ak $A = B$ alebo $A = C$ alebo $B = C$;
(c) vychádzajúc z faktu, že veta je dokázaná pre prípad, keď $A, B$ a $C$ sú nekolineárne, ukážte, že tvrdenie (ii) platí, aj keď $A, B$ a $C$ sú rôzne kolineárne body.

41. Na množine $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ s aritmetikou modulo 5 nech

$$a * b * c \text{ práve vtedy, keď } b = \frac{a+c}{2}.$$

Overte, že takto definovaná relácia usporiadania spĺňa axiómy U1,U2,U3.

42. Nech $A * B * C$ a $A * C * D$, potom $A * B * D$.
(Nápoveda: už sme ukázali (dôkaz Vety 4.10 o usporiadaní štyroch bodov), že za daných predpokladov platí $B*C*D$. Pre dôkaz $A*B*D$ uvažujte priamku $\overleftrightarrow{XB}$.)

43. (Paschova veta) Nech $A*B*C$ a $B*C*D$. Potom $A*B*D$ a $A*C*D$. Dokážte.

44. Ak $A * B * C$, potom $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$. Dokážte.

45. Dokončite dôkaz separačnej vlastnosti na priamke: ukážte, že ak $A * B * C$, tak $\overrightarrow{BA} \cap \overrightarrow{BC} = B$.

Množina bodov $\mathcal{M}$ sa nazýva *konvexnou*, ak pre každú dvojicu bodov $A, B \in \mathcal{M}$ platí, že celá úsečka $AB$ leží v množine $\mathcal{M}$.

46. Ukážte, že úsečka je konvexná množina.

47. Videli sme, že separačná vlastnosť na priamke (Veta 4.8) je dôsledkom vety o usporiadaní štyroch bodov (Veta 4.10):

„Nech $A * B * C$ a $A * C * D$. Potom $B * C * D$ aj $A * B * D$.“

Ukážte, že aj naopak táto veta je dôsledkom separačnej vlastnosti na priamke, teda ide (za predpokladu I1,I2,I3, U1,U2,U3, bez použitia U4!) o ekvivalentné tvrdenia.

48. Nech $A * B * C$. Ukážte, že $\overrightarrow{BC} \subset \overrightarrow{AB}$.

49. Nech $A * B * C$ a $B * C * D$. Ukážte, že $BC \subset AD$.

50. Ukážte, že separačná vlastnosť v rovine (U4S) je ekvivalentná Paschovej axióme. (Separačnú vlastnosť v rovine (U4S) sme si z axióm incidencie a usporiadania ukázali. Treba ešte overiť, že za predpokladov I1-3, U1-3 z U4S vyplýva U4P.)

51. Vynechajme z bodov algebraického modelu $\mathbb{R}^2$ body na $y$-osi, a z priamok vynecháme $y$-os. Ktoré z axióm usporiadania táto geometria spĺňa?

## Afinná rovina nad poľom

52. Ukážte, že komplexné čísla netvoria usporiadané pole. (Nápoveda: ukážte, že v každom usporiadanom poli platí $0 < 1$. Čo viete povedať potom o čísle $-1$?)

53. Overte, že relácia usporiadania bodov v dôkaze Vety 4.26 spĺňa axiómy U1 až U4.

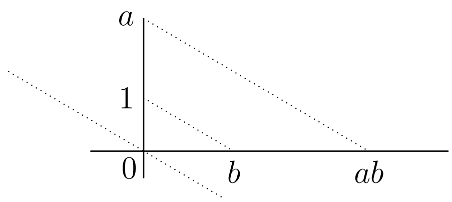
(Ak pre štvrtú axiómu usporiadania použijete formu U4S, pre overenie platnosti tejto axiómy treba usúdiť, že polroviny sú popísané nerovnicami. K tomu je nutné ukázať, že ak pre body $A$, $B$ ležiace v tej istej polrovine priamka $\overleftrightarrow{AB}$ pretína hranicu polroviny v bode $X$, tak bod $X$ neleží medzi bodmi $A$ a $B$.)

54. Overte, že relácia usporiadania na prvkoch poľa $F$ v dôkaze Vety 4.27 je ostrým lineárnym usporiadaním.

(Nápoveda: pre dôkaz trichotómie zrejme využijete axiómy U1-U3, pre tranzitívnosť treba siahnuť aj po Vete 4.10 (o usporiadaní štyroch bodov).)

55. Ukážte, že pole $F$ s lineárnym usporiadaním $<$ z cvičenia 54 tvorí usporiadané pole.

(Z definície porovnania dvoch prvkov poľa $F$ najprv ľahko ukážete, že je táto relácia kompatibilná so sčítaním. Pre kompatibilitu s násobením, teda že súčin kladných čísel je kladné číslo, popíšte násobenie geometricky: $ab$ je na $x$-osi reprezentovaný priesečníkom s priamkou cez $(0, a)$ a rovnobežnou s priamkou cez $(0, 1)$ a $(b, 0)$). Ďalšia rovnobežka cez $(0, 0)$ na $x$-osi aj na $y$-osi oddeľuje body s kladnou od bodov so zápornou nenulovou súradnicou.




## Uhol

56. Nech $D$ leží vnútri $\angle ABC$. Ukážte, že všetky body polpriamky $\overrightarrow{BD}$ okrem bodu $B$ sú vnútornými bodmi $\angle ABC$.

57. Ukážte, že vnútro uhla je konvexná množina.

* 58. Ukážte, že vnútro trojuholníka (podľa Definície 4.34) neobsahuje priamku. Inak sformulované: ak $D$ je vnútorný bod $\triangle ABC$, tak každá priamka prechádzajúca bodom $D$ musí pretínať hranicu $\triangle ABC$.

KAPITOLA 5

# Axiómy zhodnosti

Nedefinované pojmy:

- zhodnosť úsečiek: $AB \cong CD$ – úsečky $AB$ a $CD$ sú zhodné,
- zhodnosť uhlov: $\angle ABC \cong \angle DEF$ – uhly $\angle ABC$ a $\angle DEF$ sú zhodné.

Axiómy:

Z1: Pre ľubovoľné dva rôzne body $A$, $B$ a polpriamku vychádzajúcu z bodu $A'$ existuje na tejto polpriamke práve jeden bod $B'$ taký, že $A'B' \cong AB$.

Z2: Ak $AB \cong A'B'$ a $AB \cong A''B''$, potom $A'B' \cong A''B''$. Navyše, každá úsečka je zhodná sama so sebou: $AB \cong AB$.

Z3: Ak $A{*}B{*}C$, $A'{*}B'{*}C'$, $AB \cong A'B'$ a $BC \cong B'C'$, potom $AC \cong A'C'$.

Z4: Pre daný uhol $\angle ABC$, danú polpriamku $\overrightarrow{B'A'}$ a danú polrovinu ohraničenú priamkou $\overleftrightarrow{A'B'}$ existuje práve jedna polpriamka $\overrightarrow{B'C'}$ v danej polrovine tak, že $\angle A'B'C' \cong \angle ABC$.

Z5: Ak $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$ a $\angle ABC \cong \angle A''B''C''$, potom $\angle A'B'C' \cong \angle A''B''C''$. Navyše, každý uhol je zhodný sám so sebou: $\angle ABC \cong \angle ABC$.

Z6: (prekvapenie! nie, nie je to analógia Z3 pre uhly!) Ak pre trojuholníky $\triangle ABC$ a $\triangle A'B'C'$ platí, že $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$ a $\angle B \cong \angle B'$, potom $\angle A \cong \angle A'$ a $\angle C \cong \angle C'$.

Na základnej či strednej škole ste si zrejme zaviedli najprv mieru úsečiek (t. j. meranie ich dĺžky) a potom pomocou tejto ste sa zoznamovali s reláciou zhodnosti úsečiek. Je dôležité si tu všimnúť, že zhodnosť úsečiek je axiómami zavedená bez toho, že by sme vedeli merať dĺžku úsečiek! Zhodnosť je ľubovoľná relácia, ktorá vyhovuje axiómam.

Ak napríklad v euklidovskej rovine najprv viete merať dĺžky a potom definujete zhodnosť úsečiek ako

$$AB \cong CD \text{ práve vtedy, keď } |AB| = |CD|,$$

tak vlastne overujete, či euklidovská rovina je modelom daných axióm.

To isté platí pre zhodnosť uhlov a veľkosť uhlov.

Dôsledok. *Zhodnosť úsečiek (uhlov) je reláciou ekvivalencie na množine úsečiek (uhlov).*

*Dôkaz.* Cvičenie. □

U Hilberta sú Z1 a Z4 axiómami existencie. U Euklida to boli konštrukcie, ktoré ukazujú, že vieme preniesť dĺžku úsečky (I.2, presnejšie I.3), resp. veľkosť uhla (tiež niekde v prvej knihe). Axiómy Z2, Z3 a Z5 sú tzv. všeobecné pojmy (axiómy) u Euklida. Miesto axióm Z1, Z4 má Euklides (zrejme) tretí postulát: o konštruovateľnosti kružnice. My si kružnicu v našej axiomatike môžeme už zadefinovať.

## 5.1. Geometria trojuholníkov

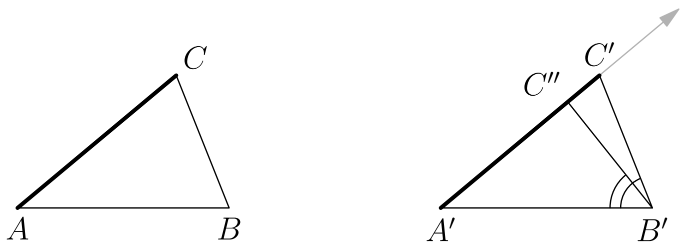
Rýchly dôsledok axiómy Z6 je veta sus o zhodnosti trojuholníkov.

Definícia 5.1. Hovoríme, že trojuholníky $\triangle ABC$ a $\triangle A'B'C'$ sú *zhodné*, označujeme $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$, ak $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$, $AC \cong A'C'$, $\angle A \cong \angle A'$, $\angle B \cong \angle B'$ a $\angle C \cong \angle C'$.

Veta 5.2 (**sus**). *(Základy, I.4) Ak pre trojuholníky $\triangle ABC$ a $\triangle A'B'C'$ platí, že $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$ a $\angle B \cong \angle B'$, potom sú tieto trojuholníky zhodné.*

Poznámka 5.3. Niekedy sa priamo sus zvykne uvádzať namiesto axiómy Z6.

*Dôkaz.* Zo Z6 máme, že $\angle A \cong \angle A'$ a $\angle C \cong \angle C'$. Treba ešte ukázať, že $AC \cong A'C'$.




Obr. 11

- Sporom, nech $AC \ncong A'C'$.

(1) Nech $C'' \in \overrightarrow{A'C'}$ je taký bod, že $AC \cong A'C''$, teda $C'' \neq C'$.

- Uvažujme teraz trojuholníky $\triangle ABC$ a $\triangle A'B'C''$. V nich $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C''$ a $\angle BAC \cong \angle B'A'C''$.
- Potom podľa Z6 je $\angle ABC \cong \angle A'B'C''$,
- čo spolu s predpokladom $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$ podľa axiómy Z5 dáva
- $\angle A'B'C' \cong \angle A'B'C''$.
- Zo Z4 (jedinečnosť) tak máme $\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{B'C''}$.
- Potom ale polpriamky $\overrightarrow{A'B'}$ a $\overrightarrow{B'C''}$ ležiace na rôznych priamkach majú dva spoločné body: $C$ a $C''$, čo je spor s Tvrdením 3.3.

□

Axióma Z6 dáva do súvisu zhodnosť úsečiek a uhlov. Euklides sa snažil vetu sus ukázať (tvrdenie I.4 v *Základoch*) bez axiómy Z6. No dôkaz je problematický, používa tzv. princíp superpozície:

„... Vskutku, ak sa trojuholník $ABC$ premiestni na trojuholník $A'B'C'$ tak, že bod $A$ sa umiestni do bodu $A'$, a priamka $\overleftrightarrow{AB}$ sa rovná priamke $\overleftrightarrow{A'B'}$, ...“,

ktorý podopiera svojou štvrtou axiómou

„Veci, ktoré sa stotožňujú, sa navzájom rovnajú.“

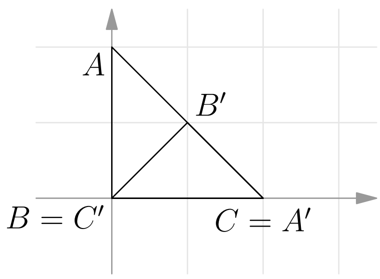
Nikde ale nie je zaručené, že posúvaním a otáčaním sa dĺžky a veľkosti uhlov nezmenia!

Axióma Z6 je naozaj nezávislá od ostatných axióm:

Príklad 5.4. Rovina $\mathbb{R}^2$ s taxikárskou metrikou pre meranie úsečiek (Manhattanská metrika, $L_1$ metrika: pre $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ je $|AB| = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|$) a štandardným meraním uhlov.

Uvažujme dva trojuholníky:

- $\triangle ABC$, kde $A = (0, 2)$, $B = (0, 0)$ a $C = (2, 0)$,
- $\triangle A'B'C'$, kde $A' = (2, 0)$, $B' = (1, 1)$ a $C' = (0, 0)$.




Obr. 12

Platí, že $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$ a $\angle B \cong \angle B'$. Avšak trojuholníky nie sú zhodné, lebo $AC \ncong A'C'$.

Príklad 5.5. Rovina $\mathbb{R}^2$, v ktorej zhodnosť je definovaná mierou úsečiek a uhlov. Uhly sa merajú štandardne, dĺžky sa merajú takto:

$$|(a_1, a_2), (b_1, b_2)| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + 4(b_2 - a_2)^2}.$$

Teda je to akoby meranie po naškálovaní v smere $y$-osi na dvojnásobok. Znovu, axióma Z6 neplatí.

Dôsledok (**Pappus**). *(Základy I.5) Ak v $\triangle ABC$ platí, že $AB \cong AC$, potom $\angle B \cong \angle C$.*

Jeden dôkaz sme si uviedli v Príklade 4.1 na začiatku časti o axiómach usporiadania. Ide o dôkaz populárny na stredných školách, pre nás je však zatiaľ príliš sofistikovaný: síce sme axiómami usporiadania vyriešili otázku, že os uhla oproti základni túto základňu naozaj pretne, stále sme ale ešte neukázali, že každý uhol má os.

Takže tu si uvedieme iný dôkaz.

*Dôkaz.* (Pappus) Z6 aplikovaná na trojuholníky $\triangle BAC$ a $\triangle CAB$. □

TVRDENIE 5.6 (**usu**). *Ak pre trojuholníky $\triangle ABC$ a $\triangle A'B'C'$ platí, že $AB \cong A'B'$, $\angle A \cong \angle A'$ a $\angle B \cong \angle B'$, potom sú tieto trojuholníky zhodné.*

*Dôkaz.* Postupuje sa podobne ako pri dokazovaní sus. Ukážeme, že $AC \cong A'C'$.

- Nech $C'' \in \overrightarrow{A'C'}$ je bod, pre ktorý $A'C'' \cong AC$.
- Potom podľa sus sú trojuholníky $\triangle ABC$ a $\triangle A'B'C''$ zhodné.
- Čiže $\angle A'B'C'' \cong \angle ABC$.
- Spolu s $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$ tak máme, že $\angle A'B'C' \cong \angle A'B'C''$.
- Podobne ako v dôkaze vety sus dostaneme, že $C' = C''$.

□

DÔSLEDOK. *Ak v $\triangle ABC$ platí, že $\angle B \cong \angle C$, potom $AB \cong AC$.*

*Dôkaz.* Veta usu aplikovaná na trojuholníky $\triangle BAC$ a $\triangle CAB$. □

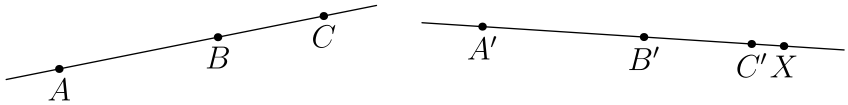
POZNÁMKA 5.7. Priamo z axióm zhodnosti vyplýva, že rovnoramenný trojuholník určite existuje. Naproti tomu existencia rovnostranného trojuholníka ešte nie je zaručená!

## 5.2. Aritmetika úsečiek

TVRDENIE 5.8 (**odčitovanie úsečiek**). *Nech $A * B * C$, $A' * B' * C'$. Ak $AB \cong A'B'$ a $AC \cong A'C'$, potom $BC \cong B'C'$.*

Ide o Euklidovu axiómu „ak od rovných odčítame rovné, sú aj celky rovné“. Euklides tieto axiómy (všeobecné pojmy) formuloval príliš vágne na to, aby sa dalo ukazovať, že sú závislé.

*Dôkaz.*




OBR. 13

- Sporom, predpokladajme, že $BC \ncong B'C'$.

- Existuje bod $X \in \overrightarrow{B'C'}$ taký, že $B'X \cong BC$ (Z1); z predpokladu zrejme $X \neq C'$.
- Keďže $AB \cong A'B'$, dostávame $AC \cong A'X$ (Z3).
- Z $AC \cong A'C'$ potom máme $A'C' \cong A'X$ (Z2).
- Odtiaľ $X = C'$ (Z1), spor.

$\square$

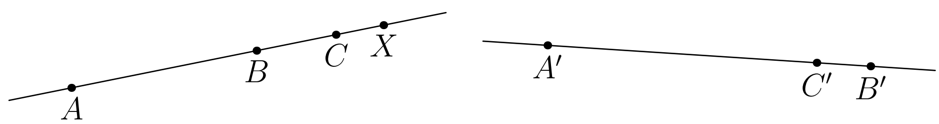
Vedeli by sme porovnať úsečky, ktoré majú spoločný jeden z koncových bodov a ležia na tej istej polpriamke so začiatkom v spoločnom bode.

Teraz chceme porovnávanie a usporiadanie rozšíriť tak, aby sme vedeli porovnať ľubovoľné dve úsečky. Pri porovnávaní úsečiek ich budeme prenášať na spoločnú polpriamku a potrebujeme mať istotu, že výsledok nebude závisieť od toho, na ktorú polpriamku úsečky prenesieme. Nasledovné tvrdenie nám to zaručí.

TVRDENIE 5.9 (**porovnávanie úsečiek**). *Nech $AC \cong A'C'$. Potom pre každý bod $B$ taký, že $A*B*C$ a pre bod $B' \in \overrightarrow{A'C'}$ taký, že $AB \cong A'B'$, platí $A'*B'*C'$.*

*Dôkaz.*

- Pre bod $B' \in \overrightarrow{A'C'}$ (ktorého existencia a jednoznačnosť je zaručená axiómou Z1) môžu nastať možnosti: $A' * B' * C'$, $B' = C'$ alebo $A' * C' * B'$.
- Ak $B' = C'$, potom $AB \cong A'B' \cong A'C' \cong AC$, kde $B$ a $C$ sú dva rôzne body na tej istej polpriamke, spor s axiómou Z1.
- Ostáva vylúčiť možnosť $A' * C' * B'$ (viď obrázok). Ak by nastala, tak na polpriamke opačnej k $\overrightarrow{CA}$ zostrojme bod $X$ taký, že $CX \cong C'B'$.
- Podľa Z3 potom $AX \cong A'B'$.
- Máme teda dva rôzne body $B$ a $X$ na spoločnej polpriamke, že $AB \cong AX$, spor s axiómou Z1.
- $A' * B' * C'$.




OBR. 14

$\square$

DEFINÍCIA 5.10. Hovoríme, že $AB < CD$ (prípadne, že $CD > AB$), ak medzi $C$ a $D$ existuje bod $E$ taký, že $AB \cong CE$.

TVRDENIE 5.11 (**usporiadanie úsečiek**). *Relácia $<$ pre dvojice úsečiek má nasledovné vlastnosti:*

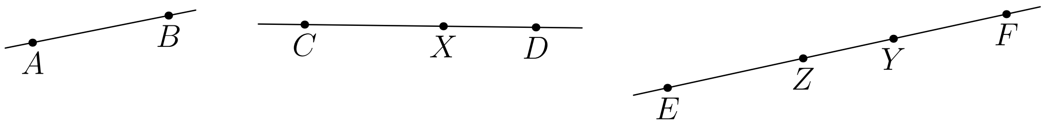
(i) *Pre ľubovoľné dve úsečky* $AB, CD$ *platí práve jedna z podmienok:* $AB < CD$, $CD < AB$, $AB \cong CD$ *(trichotómia).*
(ii) *Ak* $AB < CD$ *a* $CD < EF$*, potom* $AB < EF$ *(tranzitívnosť).*

*Teda* $<$ *je* usporiadanie.

*Dôkaz.* (i)

- Nech $X$ je bod na polpriamke $\overrightarrow{CD}$ taký, že $CX \cong AB$.
- Máme možnosti: $X = D$, $C * X * D$ alebo $C * D * X$, ktoré sú v poradí ekvivalentné s $AB \cong CD$, $AB < CD$ a $CD < AB$.

(ii)




Obr. 15

- Nech $X$ je bod medzi $C, D$ taký, že $AB \cong CX$.
- Nech $Y$ je bod medzi $E, F$ taký, že $CD \cong EY$.
- Nech nakoniec $Z$ je bod na polpriamke $\overrightarrow{EF}$ taký, že $EZ \cong CX$.
- Podľa predchádzajúceho tvrdenia máme $E * Z * Y$, a preto $E * Z * F$ (Veta 4.10).
- Keďže tiež $EZ \cong AB$, tak $AB < EF$.

□

Záver: úsečky vieme porovnávať aj usporiadať bez toho, aby sme ich merali. Tiež máme na úsečkách jednoduchú aritmetiku: vieme ich sčítavať, odčítavať.

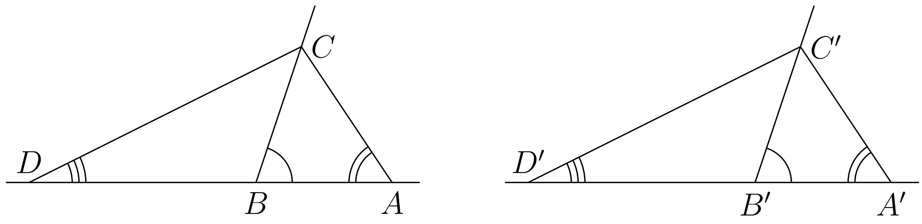
### 5.3. Geometria a aritmetika uhlov

Definícia 5.12. Dva uhly, ktoré majú spoločný vrchol, spoločné jedno rameno a druhé ramená tvoria spolu priamku, sa nazývajú *susedné.*

Veta 5.13. *Ak sú dva uhly zhodné, potom aj ich susedné uhly sú zhodné.*

*Dôkaz.*

- Nech $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$, nech $\angle CBD$ resp. $\angle C'B'D'$ je susedný k $\angle ABC$ resp. $\angle A'B'C'$.
- Nech body $A, A', C, C'$ na ramenách týchto uhlov a $D, D'$ na ramenách ich susedných uhlov sú zvolené tak, že $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$ a $BD \cong B'D'$.
- Potrebujeme ukázať, že $\angle CBD \cong \angle C'B'D'$.
- Trojuholníky $\triangle ABC$ a $\triangle A'B'C'$ sú zhodné (sus),




Obr. 16

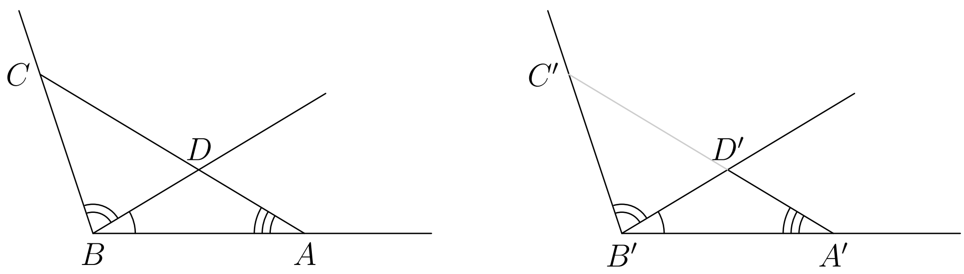
- a teda $AC \cong A'C'$, $\angle A \cong \angle A'$.
- Platí tiež $AD \cong A'D'$ (axióma Z3),
- preto trojuholníky $\triangle DAC$ a $\triangle D'A'C'$ sú zhodné (sus).
- Odtiaľ $CD \cong C'D'$ a $\angle D \cong \angle D'$.
- $\triangle BDC \cong \triangle B'D'C'$ (sus),
- a preto $\angle CBD \cong \angle C'B'D'$.

□

Definícia 5.14. Nech polpriamky $\overrightarrow{BA}$ a $\overrightarrow{BC}$ neležia na jednej priamke. Hovoríme, že polpriamka $\overrightarrow{BD}$ leží medzi polpriamkami $\overrightarrow{BA}$ a $\overrightarrow{BC}$, ak $D$ je vnútorný bod uhla $\angle ABC$.

Tvrdenie 5.15 (**sčitovanie uhlov**). *Majme uhly $\angle ABC$ a $\angle A'B'C'$. Nech polpriamka $\overrightarrow{BD}$ leží medzi polpriamkami $\overrightarrow{BA}$ a $\overrightarrow{BC}$, podobne nech polpriamka $\overrightarrow{B'D'}$ leží medzi polpriamkami $\overrightarrow{B'A'}$ a $\overrightarrow{B'C'}$. Ak $\angle ABD \cong \angle A'B'D'$ a $\angle CBD \cong \angle C'B'D'$, potom $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$.*

*Dôkaz.*




Obr. 17

- Z vety o priečke uhla (Veta 4.30) môžeme predpokladať, že $A * D * C$ (teda $D$ sa dá tak zvoliť).
- Z axiómy Z1 môžeme predpokladať (môžeme $A', C'$ a $D'$ zvoliť tak), že $A'B' \cong AB$, $B'C' \cong BC$ a $B'D' \cong BD$.
- Potom podľa (sus) $\triangle ABD \cong \triangle A'B'D'$ a $\triangle DBC \cong \triangle D'B'C'$. Preto $\angle ADB \cong \angle A'D'B'$, $\angle BAD \cong \angle B'A'D'$ a $\angle CDB \cong \angle C'D'B'$.

- Keďže $\angle ADB$ a $\angle A'D'B'$ su zhodné, sú podľa Vety 5.13 zhodné aj ich susedné uhly. Susedným uhlom k $\angle ADB$ je $\angle CDB$. Susedným uhlom k $\angle A'D'B'$ je uhol, ktorého jedno rameno je $\overrightarrow{D'B'}$, druhé je polpriamka opačná k $\overrightarrow{D'A'}$, a tento uhol je z tranzitívnosti zhodnosti zhodný s $\angle C'D'B'$, ktorého druhé rameno je v tej istej polrovine, kde čakáme aj rameno susedného uhla.
- Podľa Z4 tieto dve ramená (druhé rameno susedného uhla a $\overrightarrow{D'C'}$) splývajú, teda $\angle C'D'B'$ je naozaj susedný k $\angle A'D'B'$.
- Preto $A', D', C'$ sú kolineárne a $A' * D' * C'$.
- Z axiómy Z3 potom $AC \cong A'C'$, čiže podľa (sus) potom $\triangle BAC \cong B'A'C'$
- a odtiaľ $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$.

$\square$

Analogicky k prípadu úsečiek sa formulujú tvrdenia o aritmetike a porovnávaní uhlov. Dôkazy nasledovných troch tvrdení prenechávam ako cvičenie.

Tvrdenie 5.16 (**odčitovanie uhlov**). *Nech $\overrightarrow{BD}$ leží medzi $\overrightarrow{BA}$ a $\overrightarrow{BC}$ a nech $\overrightarrow{B'D'}$ leží medzi $\overrightarrow{B'A'}$ a $\overrightarrow{B'C'}$. Ak $\angle ABD \cong \angle A'B'D'$ a $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$, potom $\angle DBC \cong \angle D'B'C'$*

Tvrdenie 5.17 (**porovnávanie uhlov**). *Nech $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$. Potom pre každú $\overrightarrow{BD}$ medzi $\overrightarrow{BA}$ a $\overrightarrow{BC}$ a pre $\overrightarrow{B'D'}$ v tej istej polrovine od $\overleftrightarrow{A'B'}$ ako bod $C'$ takú, že $\angle ABD \cong \angle A'B'D'$, platí, že $\overrightarrow{B'D'}$ leží medzi $\overrightarrow{B'A'}$ a $\overrightarrow{B'C'}$.*

Definícia 5.18. Hovoríme, že $\angle ABC < \angle DEF$ (prípadne, že $\angle DEF > \angle ABC$), ak medzi $\overrightarrow{E}D$ a $\overrightarrow{E}F$ existuje $\overrightarrow{E}X$ taký, že $\angle ABC \cong \angle DEX$.

Tvrdenie 5.19 (**usporiadanie uhlov**). *Relácia $<$ pre dvojice uhlov má nasledovné vlastnosti:*

(i) *trichotómia: pre ľubovoľné dva uhly $\angle ABC, \angle DEF$ platí práve jedna z podmienok: $\angle ABC < \angle DEF$, $\angle DEF < \angle ABC$, $\angle ABC \cong \angle DEF$,*
(ii) *tranzitívnosť: ak $\angle ABC < \angle DEF$ a $\angle DEF < \angle GHI$, potom $\angle ABC < \angle GHI$.*

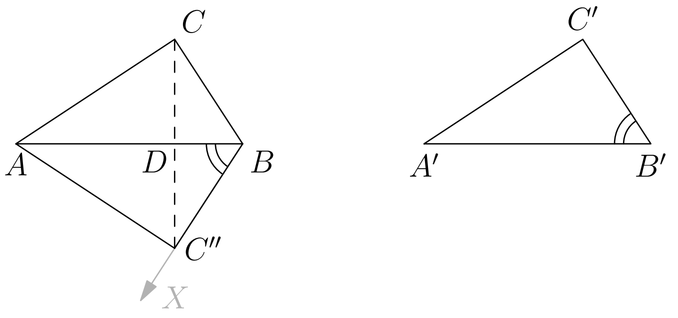
*Teda $<$ je usporiadanie.*

### 5.4. Geometria trojuholníkov, pokračovanie

Tvrdenie 5.20 (**sss**). *Ak pre trojuholníky $\triangle ABC$ a $\triangle A'B'C'$ platí, že $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$ a $AC \cong A'C'$, potom sú tieto trojuholníky zhodné.*

*Dôkaz.* Radi by sme ukázali, že niektorá dvojica zodpovedajúcich si uhlov je zhodná.

- V polrovine opačnej k $\overrightarrow{ABC}$ zostrojíme polpriamku $\overrightarrow{BX}$ tak, že $\angle ABX \cong \angle A'B'C'$.

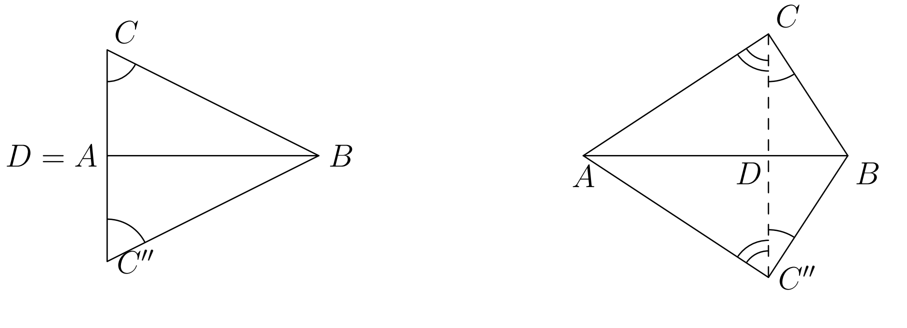



Obr. 18

- Na polpriamke $\overrightarrow{BX}$ nájdeme bod $C''$ taký, že $BC'' \cong B'C'$.
- Potom podľa (sus) sú trojuholníky $A'B'C'$ a $ABC''$ zhodné.

Z uvedenej konštrukcie vyplýva, že stačí ukázať (sss) pre trojuholníky v konfigurácii ako majú trojuholníky $\triangle ABC$ a $\triangle ABC''$.

- Keďže body $C$ a $C''$ ležia na opačných stranách od priamky $\overleftrightarrow{AB}$, úsečka $CC''$ ju pretína v bode $D$.
- Prípad $D = A$ (obrázok 19 vľavo): v trojuholníku $CC''B$ máme $BC \cong BC''$, odtiaľ $\angle BCC'' \cong \angle BC''C$ (Pappus), a keďže $A$ leží medzi $C$ a $C''$, sú podľa (sus) trojuholníky $\triangle ABC$ a $\triangle ABC''$ zhodné.
- Prípad $D = B$: tak isto.
- Prípad $A * D * B$ (obrázok 19 vpravo):
  - $\triangle ACC''$ je rovnoramenný, preto $\angle ACC'' \cong \angle AC''C$ (Pappus),
  - $\triangle BCC''$ je rovnoramenný, preto $\angle BCC'' \cong \angle BC''C$ (Pappus),
  - $\angle ACB \cong \angle AC''B$ (sčítavanie uhlov), teda $\triangle ABC \cong \triangle ABC''$.
- Prípady $A * B * D, D * A * B$: analogicky (uhly sa budú odčítavať).




Obr. 19

□

Definícia 5.21. *Vonkajší uhol trojuholníka* je uhol susedný s (vnútorným) uhlom trojuholníka.

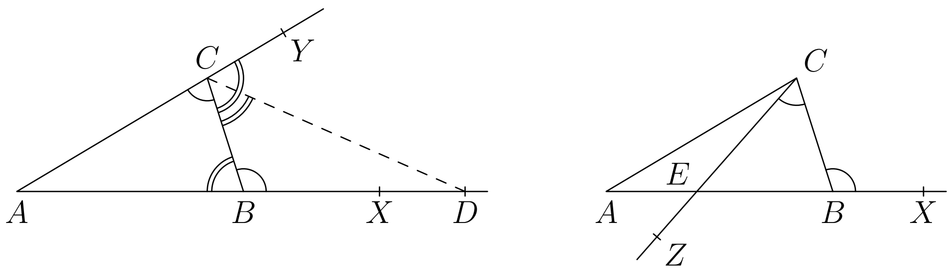
VETA 5.22 (**o vonkajšom uhle trojuholníka**). *Vonkajší uhol v trojuholníku je väčší ako ľubovoľný zo zvyšných dvoch vnútorných uhlov tohto trojuholníka.*

*Dôkaz.* V trojuholníku $\triangle ABC$ uvažujme uhol susedný k $\angle ABC$: Nech $X$ je bod, že $A * B * X$. Potrebujeme vylúčiť možnosti

(a) $\angle CBX \cong \angle C$,
(b) $\angle CBX < \angle C$,
(c) $\angle CBX \cong \angle A$,
(d) $\angle CBX < \angle A$

Prípad (a):

- sporom nech $\angle CBX \cong \angle C$.
- Nech $D \in \overrightarrow{BX}$ tak, že $BD \cong AC$.
- Potom $\triangle ACB \cong \triangle DBC$ (sus),
- čiže $\angle BCD \cong \angle ABC$.
- Nech $Y$ je bod, že $A * C * Y$.
- Uhol $\angle BCY$ je susedný k $\angle ACB$, preto $\angle BCY \cong \angle ABC$ (Veta 5.13 o susedných uhloch).
- Čiže uhly $\angle BCD$ a $\angle BCY$ sú zhodné, pričom body $D$ a $Y$ ležia na tej istej strane od $\overleftrightarrow{CB}$ (sú oba na opačnej ako $A$), spor so Z4.




OBR. 20. Dôkaz vety o vonkajšom uhle trojuholníka, vľavo: prípad (a), vpravo: prípad (b)

Prípad (b):

- sporom nech $\angle CBX < \angle C$.
- Potom existuje $\overrightarrow{CZ}$ medzi $\overrightarrow{CB}$ a $\overrightarrow{CA}$ tak, že $\angle BCZ \cong \angle CBX$ (aritmetika uhlov).
- Polpriamka $\overrightarrow{CZ}$ pretína úsečku $AB$ (veta o priečke uhla) v bode $E$.
- Potom v $\triangle EBC$ je vonkajší uhol pri vrchole $B$ zhodný s vnútorným uhlom pri vrchole $C$, čo však podľa prípadu (a) nie je možné.

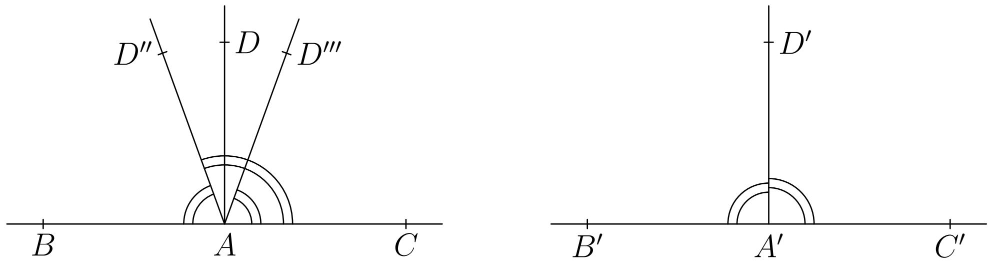
Prípady (c,d) sú analogické k (a,b). □

## 5.5. Pravý uhol

DEFINÍCIA 5.23. Uhol, ktorý je zhodný so svojím susedným, sa nazýva *pravý*.

VETA 5.24 (**Euklidov postulát o pravých uhloch (!)**). *Všetky pravé uhly sú navzájom zhodné.*

*Dôkaz.*




OBR. 21

- Nech sú nasledovné susedné uhly zhodné: $\angle BAD \cong \angle CAD$ a $\angle B'A'D' \cong \angle C'A'D'$, teda ide o pravé uhly.
- Potom z vlastnosti trichotómie platí práve jedna z možností $\angle BAD \cong \angle B'A'D'$ alebo $\angle BAD < \angle B'A'D'$ alebo $\angle BAD > \angle B'A'D'$. Potrebujeme vylúčiť druhú a tretiu možnosť.
- Nech $\angle BAD > \angle B'A'D'$. (Prípad $\angle BAD < \angle B'A'D'$ sa rieši analogicky.)
- Potom medzi $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{AD}$ existuje polpriamka $\overrightarrow{AD''}$ tak, že $\angle BAD'' \cong \angle B'A'D'$.
- Z vety 5.13 o susedných uhloch potom tiež $\angle CAD'' \cong \angle C'A'D'$. Keďže $\angle C'A'D'$ je pravý, tak $\angle C'A'D' \cong \angle B'A'D'$, a z tranzitívnosti zhodnosti uhlov (Z5) $\angle BAD'' \cong \angle CAD''$.
- Keďže $\angle BAD \cong \angle CAD$, z tvrdenia o porovnávaní uhlov (5.17) vyplýva, že medzi $\overrightarrow{AD}$ a $\overrightarrow{AC}$ existuje polpriamka $AD'''$ taká, že $\angle CAD''' \cong \angle BAD''$.
- Toto spolu s $\angle BAD'' \cong \angle CAD''$ dáva $\angle CAD'' \cong \angle CAD'''$, čo je spor s axiómou Z4.

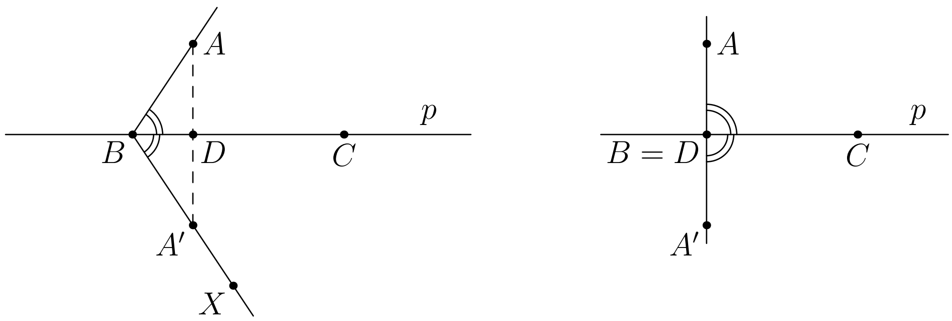
□

Z práve dokázanej vety vyplýva, že až na zhodnosť existuje nanajvýš jeden pravý uhol. Jeho existenciu ale táto veta nezaručuje! Tá vyplynie až z tvrdenia o existencii kolmice k priamke.

DEFINÍCIA 5.25. Priamky $p$ a $q$ sú navzájom *kolmé*, ozn. $p \perp q$, ak $p \cap q = B$ a polpriamka na $p$ so začiatkom v $B$ tvorí s polpriamkou na $q$ so začiatkom v $B$ pravý uhol.

VETA 5.26. *Pre danú priamku $p$ a daný bod $A$ existuje práve jedna priamka $q$ prechádzajúca bodom $A$ a kolmá na priamku $p$.*

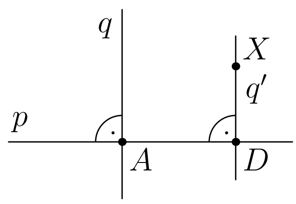
*Dôkaz.* Existencia: Nech $A$ neleží na priamke $p$.




Obr. 22. Konštrukcia kolmice na priamku z bodu neležiaceho na tejto priamke

- Nech $B, C$ sú body na priamke $p$.
- Na opačnej strane od priamky $p$ ako je bod $A$ existuje polpriamka $\overrightarrow{BX}$ tak, že $\angle CBX \cong \angle CBA$.
- Na polpriamke $\overrightarrow{BX}$ existuje bod $A'$ taký, že $A'B \cong AB$.
- $AA'$ pretína $p$ v bode $D$.
- Ak $D = B$, tak $AA' \perp p$ (definícia kolmosti).
- Ak $D \neq B$, tak $\triangle ABD \cong \triangle A'BD$ (sus).
- Preto $\angle ADB \cong \angle A'DB$, čiže $AA' \perp p$.

Nech $A$ leží na priamke $p$.




Obr. 23. Konštrukcia kolmice na priamku z bodu tejto priamky

- Existuje bod mimo priamky $p$.
- Podľa predchádzajúcej konštrukcie zostrojíme z neho kolmicu na $p$.
- Pomocou axiómy Z4 nájdeme kolmicu na $p$ prechádzajúcu $A$.

Jednoznačnosť. V prípade, že $A$ leží na priamke $p$, jednoznačnosť vyplýva z Vety 5.24.

V prípade, že $A$ neleží na priamke $p$, ak by existovali dve rôzne kolmice, mali by sme trojuholník s dvoma pravými uhlami čo by bol spor s Vetou 5.22. □

Príklad 5.27. Nie je úplne samozrejmé, že z daného bodu existuje jediná kolmica na danú priamky. Pre pochopenie sa vráťme k modelu sféry so stotožnenými protiľahlými bodmi, viď odsek 3.1.4 v časti o axiómach incidencie. V tejto geometrii vieme v niektorých prípadoch viesť z jedného bodu viac kolmíc na danú priamku (tzv. pól priamky).

Samozrejme sféra nie je modelom axióm zhodnosti.

## 5.6. Geometria na základnej a strednej škole

Definícia 5.28. Nech $A \neq B$. Bod $S \in \overleftrightarrow{AB}$ je stredom úsečky $AB$, ak $AS \cong BS$.

Tvrdenie 5.29. *Každá nenulová úsečka má práve jeden stred, a ten je jej vnútorným bodom.*

*Dôkaz.*

- Ak stred $S$ existuje, tak $A * S * B$: z definície stredu nepripúšťame $S = A$ alebo $S = B$ (inak by sme nemohli hovoriť o zhodnosti úsečiek $AS$ a $BS$). Ak $A * B * S$, tak na polpriamke $\overrightarrow{SA}$ máme spor so Z1.
- Jednoznačnosť: cvičenie.
- Existencia: cvičenie.

□

Pomocou axióm incidencie, usporiadania a zhodnosti a pomocou doteraz dokázaných tvrdení sa už pomerne pohodlne dajú dokázať aj ďalšie tvrdenia, z ktorých mnohé (zrejme bez dôkazu) poznáte zo základnej a strednej školy. Sú to tvrdenia ako napríklad

- Každý uhol má práve jednu os.
- V trojuholníku oproti väčšej strane leží väčší uhol.
- Trojuholníková nerovnosť.

Dôkazy týchto tvrdení ponechávame ako cvičenie.

## 5.7. Modely axióm incidencie, usporiadania a zhodnosti

Model axióm incidencie, usporiadania a zhodnosti sa nazýva *Hilbertova rovina.*

Príklad 5.30. V Príklade 5.27 sme si spomenuli sféru so stotožnenými antipodálnymi bodmi. Táto geometria je modelom axióm incidencie. Ide vlastne o projektívnu rovinu.

Ak túto rovinu uvažujeme nie nad reálnymi ale nad racionálnymi číslami, vieme na nej zaviesť aj reláciu usporiadania tak, aby spĺňala axiómy usporiadania (Príklad 4.18).

Keď sa následne snažíme zaviesť relácie zhodnosti uhlov prirodzene (konformne), teda napríklad dve priamky (t. j. hlavné kružnice) budú navzájom kolmé, ak ich dotyčnice v spoločnom bode sú na seba kolmé, zjavne by nešlo o Hilbertovu rovinu. V Príklade 5.27 sme totiž videli, že napríklad zo severného pólu na rovník vieme potom viesť viacero (dokonca nekonečne veľa) kolmíc.

Príklad 5.31. Rovina $\mathbb{Q}^2$ (afinná rovina nad racionálnymi číslami) je modelom axióm incidencie aj usporiadania, čiže je usporiadanou rovinou. Ak zhodnosť úsečiek a uhlov interpretujeme pomocou štandardnej euklidovskej vzdialenosti bodov a veľkosti uhlov, táto rovina bohužiaľ nie je Hilbertovou rovinou. Nie je splnená hneď prvá axióma zhodnosti: ak

$$A = A' = (0,0),\ B = (1,0),\ C = (1,1),$$

tak na polpriamke $\overrightarrow{A'C}$ neexistuje bod $B'$ taký, že $A'B' \cong AB$. (Analogicky na polpriamke $\overrightarrow{AB}$ neexistuje bod $C'$ taký, že $A'C' \cong AC$.)

Aby sa táto rovina stala Hilbertovou rovinou, obor pre súradnice bodov musíme zväčšiť z racionálnych napríklad na tzv. *konštruovateľné čísla*, t. j. všetky reálne čísla, ktoré vzniknú z racionálnych pomocou konečného počtu sčítaní, odčítaní, násobení, delení a druhých odmocnín, napríklad číslo

$$\frac{3\sqrt{5} - \sqrt{\frac{7}{8} + \sqrt{29}}}{1 + \sqrt{2 - \sqrt{3}}}.$$

Samozrejme, aj afinné roviny nad väčšími obormi čísel môžu byť Hilbertovými rovinami, napríklad ak uvažujeme všetky reálne čísla v algebraickom uzávere racionálnych čísel, alebo celý obor reálnych čísel.

Ďalšie modely Hilbertovej roviny si uvedieme v časti o axióme rovnobežnosti, budú totiž v tej oblasti relevantnejšie.

## Cvičenia

### Axiómy zhodnosti

59. Ukážte, že zhodnosť úsečiek (uhlov) je reláciou ekvivalencie na množine úsečiek (uhlov).

60. V rovine $\mathbb{R}^2$ so štandardným meraním uhlov a taxikárskou metrikou pre meranie úsečiek (Manhattanská metrika, $L_1$ metrika: pre $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ je $|AB| = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|$) nech dve úsečky sú zhodné, ak majú rovnakú dĺžku, podobne pre uhly.

Nájdite trojuholníky, pre ktoré nie je splnená axióma Z6. (Stačí „stopovať“ dôkaz Vety 5.2 (sus) pre trojuholníky v Príklade 5.4: $\triangle ABC$ a $\triangle A'B'C'$, kde $A = (0,2)$, $B = (0,0)$, $C = (2,0)$, $A' = (2,0)$, $B' = (1,1)$ a $C' = (0,0)$.)

### Aritmetika uhlov

61. Dokážte tvrdenie o odčitovaní uhlov:
Nech $\overrightarrow{BD}$ leží medzi $\overrightarrow{BA}$ a $\overrightarrow{BC}$ a nech $\overrightarrow{B'D'}$ leží medzi $\overrightarrow{B'A'}$ a $\overrightarrow{B'C'}$. Ak $\angle ABD \cong \angle A'B'D'$ a $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$, potom $\angle DBC \cong \angle D'B'C'$.

62. Dokážte tvrdenie o porovnávaní uhlov:
Nech $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$. Potom pre každú $\overrightarrow{BD}$ medzi $\overrightarrow{BA}$ a $\overrightarrow{BC}$ a pre $\overrightarrow{B'D'}$ v tej istej polrovine od $\overleftrightarrow{A'B'}$ ako bod $C'$ takú, že $\angle ABD \cong \angle A'B'D'$, platí, že $\overrightarrow{B'D'}$ leží medzi $\overrightarrow{B'A'}$ a $\overrightarrow{B'C'}$.

63. Dokážte tvrdenie o usporiadaní uhlov:
Relácia $<$ pre dvojice uhlov má nasledovné vlastnosti:

(i) trichotómia: pre ľubovoľné dva uhly $\angle ABC, \angle DEF$ platí práve jedna z podmienok: $\angle ABC < \angle DEF$, $\angle DEF < \angle ABC$, $\angle ABC \cong \angle DEF$,
(ii) tranzitívnosť: ak $\angle ABC < \angle DEF$ a $\angle DEF < \angle GHI$, potom $\angle ABC < \angle GHI$.

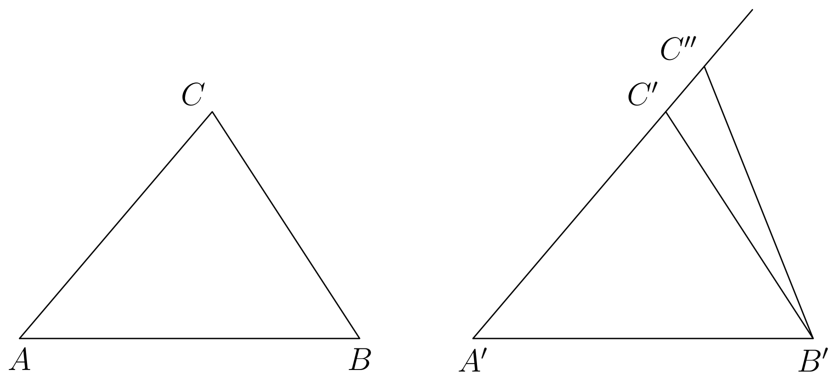
Teda $<$ je usporiadanie.

### Vety o zhodnosti trojuholníkov

64. Už poznáte vetu usu o zhodnosti trojuholníkov:

Ak pre trojuholníky $\triangle ABC$ a $\triangle A'B'C'$ platí, že $AB \cong A'B'$, $\angle A \cong \angle A'$ a $\angle B \cong \angle B'$, potom sú tieto trojuholníky zhodné.

Dôsledne verifikujte dôkaz tejto vety, teda v každom kroku odôvodite, prečo je tvrdenie v ňom pravdivé (na základe ktorej axiómy? na základe ktorej už dokázanej vety?) prípadne prečo sa objekt v tomto kroku určite dá skonštruovať:




(1) Nech $C'' \in \overrightarrow{A'C'}$ je bod, pre ktorý $A'C'' \cong AC$.
(2) Potom sú trojuholníky $\triangle ABC$ a $\triangle A'B'C''$ zhodné.
(3) Čiže $\angle A'B'C'' \cong \angle ABC$.
(4) Spolu s $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$ tak máme, že $\angle A'B'C' \cong \angle A'B'C''$.
(5) Preto $\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{B'C''}$,
(6) a tak $C' = C''$.

(7) Ukázali sme, že $AC \cong A'C'$, a preto $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

65. Dokážte vetu uus o zhodnosti trojuholníkov:
Ak pre trojuholníky $\triangle ABC$ a $\triangle A'B'C'$ platí, že $\angle A \cong \angle A'$, $\angle B \cong \angle B'$ a $BC \cong B'C'$, potom sú tieto trojuholníky zhodné.

(Nápoveda: postupuje sa podobne ako pri dôkazoch sus a usu. V tomto prípade v $\triangle ABC$ uvažujte na polpriamke $\overrightarrow{BA}$ bod $A''$, pre ktorý $A''B \cong A'B'$.)

### Ďalšie tvrdenia v planimetrii

Budeme dokazovať štandardné tvrdenia geometrie základnej a strednej školy (zadania 66, 68, 69 a 70). V každom dôkaze budeme podľa potreby využívať aj predchádzajúce (ideálne už dokázané) tvrdenia.

66. Ukážte, že v trojuholníku je protiľahlý uhol k väčšej strane väčší ako protiľahlý uhol k menšej strane. Inak: ak v $\triangle ABC$ platí $AB > AC$, potom $\angle C > \angle B$.

(Nápoveda: na strane $AB$ nájdite bod $D$ tak, že $AD \cong AC$ a skúmajte okrem $\triangle ABC$ aj rovnoramenný trojuholník $\triangle ADC$. Zrejme využijete porovnávanie uhlov, Pappovu vetu a vetu o vonkajšom uhle trojuholníka.)

67. Dokončite dôkaz existencie jediného stredu úsečky. (Nápoveda: pre jednoznačnosť uvažujte usporiadanie $A*S_1*S_2$ a $S_1*S_2*B$ na priamke $\overleftrightarrow{AB}$, vyargumentujte, že takto ste preverili všetky prípady. Pre existenciu nech $C \notin \overleftrightarrow{AB}$, nech $D$ je taký bod v polrovine opačnej k $\overrightarrow{ABC}$, že $\angle ABD \cong \angle BAC$ a $BD \cong AC$. Uvažujte priesečník $CD$ s $\overleftrightarrow{AB}$ a skúmajte trojuholníky, ktoré Vám týmto vzniknú.)

68. Ukážte, že v trojuholníku je protiľahlá strana k väčšiemu uhlu väčšia ako protiľahlá strana k menšiemu uhlu.

(Nápoveda: ide o veľmi jednoduchý dôsledok cvičenia 66.)

69. Dokážte trojuholníkovú nerovnosť. Presnejšie, ukážte, že v ľubovoľnom trojuholníku $\triangle ABC$ je súčet strán (úsečiek) $AC$ a $BC$ väčší ako strana (úsečka) $AB$.

(Nápoveda: na polpriamke opačnej k $\overrightarrow{CA}$ zostrojíte bod $D$ tak, že $CD \cong BC$. Potom okrem $\triangle ABC$ aj skúmajte aj rovnoramenný trojuholník $\triangle BDC$. Zrejme využijete Pappovu vetu, porovnávanie uhlov, a tvrdenie z cvičenia 68.)

70. Dokážte vetu Ssu o zhodnosti trojuholníkov:
Ak pre trojuholníky $\triangle ABC$ a $\triangle A'B'C'$ platí, že $AB \cong A'B' > AC \cong A'C'$ a $\angle C \cong \angle C'$, potom sú tieto trojuholníky zhodné.

(Možný postup: sporom predpokladajte $CB < C'B'$, naneste na $\overrightarrow{CB}$ bod $B''$ tak, že $CB'' \cong C'B'$. Porovnajte $AB$ s $AB''$. Využijete pritom vlastnosť trojuholníkov, že oproti väčšej strane sa nachádza väčší uhol a naopak, pozri úloha 66 a 68.)

71. Demonštrujte, že predpoklad v tvrdení z úlohy 70, že uvažovaný uhol musí ležať oproti väčšej z uvažovaných strán, je podstatný. Presnejšie, nájdite $\triangle ABC$

a $\triangle A'B'C'$ také, že $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C'$, $\angle C \cong \angle C'$, ale tieto dva trojuholníky nie sú zhodné.

72. Polpriamka $\overrightarrow{BD}$ medzi polpriamkami $\overrightarrow{BA}$ a $\overrightarrow{BC}$ uhla $\angle ABC$ je *osou uhla* $\angle ABC$, ak $\angle ABD \cong \angle DBC$.

Ukážte, že každý uhol má práve jednu os.

(Treba ukázať jednoznačnosť aj existenciu. Pri dôkaze jednoznačnosti sa môžete inšpirovať v Hilbertovom dôkaze štvrtého Euklidovho postulátu.)

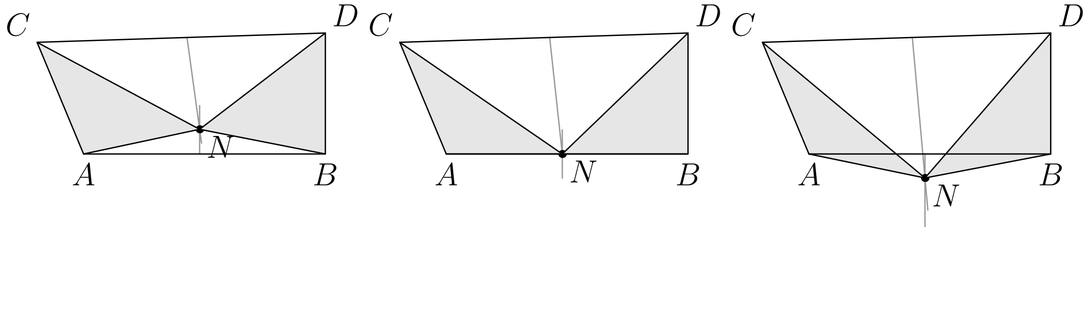
73. Nájdite chybu v dôkaze nasledovného tvrdenia:

*Tvrdenie:* Pravý uhol je zhodný s tupým uhlom.

*Dôkaz:* Nech $AB$ je úsečka, nech body $C$ a $D$ ležia v tej istej polrovine od $\overleftrightarrow{AB}$ tak, že $AC \cong BD$, $\angle ABD$ je pravý a $\angle BAC$ je tupý (viď obrázok). Ukážeme, že tieto dva uhly sú zhodné.

- Nech $o_1$ je os úsečky $AB$ a nech $o_2$ je os úsečky $CD$.
- Priamky $\overleftrightarrow{AB}$ a $\overleftrightarrow{CD}$ určite nie sú rovnobežné,
- preto aj $o_1$ a $o_2$ sú rôznobežné; označme ich priesečník $N$.
- Priesečník $N$ sa určite nachádza na tej istej strane od $\overleftrightarrow{CD}$ ako body $A$ a $B$,
- máme teda možnosti: $N$ leží vnútri štvoruholníka $ABDC$, $N$ leží na úsečke $AB$ alebo $N$ leží zvonka štvoruholníka $ABDC$ „pod priamkou“ $\overleftrightarrow{AB}$.
- Nech $N$ leží vnútri štvoruholníka $ABDC$. Uvažujme trojuholníky $\triangle ANC$ a $\triangle BNC$. V nich
  - $AN \cong BN$, lebo $N \in o_1$,
  - $CN \cong DN$, lebo $N \in o_2$,
  - $AC \cong BD$ z konštrukcie bodov $C$ a $D$,

  preto $\triangle ANC \cong \triangle BND$.
- Odtiaľ $\angle NAC \cong \angle NBD$.
- Ďalej $\triangle ABN$ je rovnoramenný, preto $\angle ABN \cong \angle BAN$.
- Sčítaním uhlov tak dostaneme $\angle BAC \cong \angle ABD$.
- V prípade, keď $N \in AB$, postupujeme tak isto, v tomto prípade zhodnosť uhlov $\angle BAC$ a $\angle ABD$ vyplynie hneď zo zhodnosti $\triangle ANC \cong \triangle BND$.
- Nakoniec v prípade, keď $N$ leží zvonka štvoruholníka $ABDC$ postupujeme tiež analogicky; zhodnosť uhlov $\angle BAC$ a $\angle ABD$ dostaneme odčítaním uhlov $\angle NAC - \angle NAB$ a $\angle NBD - \angle NBA$.



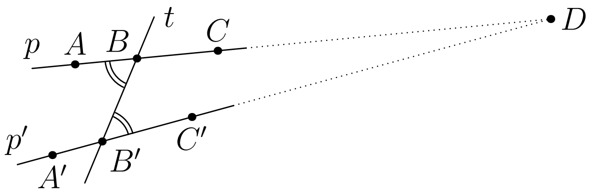
KAPITOLA 6

# Axióma rovnobežnosti

## 6.1. Axióma rovnobežnosti u Euklida a u Hilberta

VETA 6.1. *(Euklides I.27) Nech $p$ a $p'$ sú dve priamky a nech $t$ je priamka, ktorá ich obe pretína v bodoch $B$ a $B'$. Nech $A * B * C$ ležia na $p$ a $A' * B' * C'$ na $p'$ tak, že $A$ a $A'$ ležia na tej istej strane od transverzály $t$. Ak $\angle ABB' \cong \angle C'B'B$ (tzv.* striedavé uhly*), potom $p$ a $p'$ sú rovnobežné.*

*Dôkaz.*

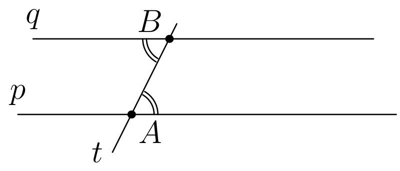



OBR. 24

Vyplýva z Vety 5.22. □

DÔSLEDOK. *Nech bod $B$ neleží na priamke $p$. Potom existuje priamka $q$ taká, že $q \ni B$ a $q \parallel p$.*

*Dôkaz.* Spojíme $B$ s ľubovoľným bodom na priamke $p$, máme tak novú priamku




OBR. 25

$t$. Následne skonštruujeme priamku $q$ tak, aby striedavé uhly pri priamkach $p$ a $q$ s transverzálnou $t$ boli zhodné (Z4). Rovnobežnosť $p$ a $q$ vyplýva z vety. □

Pri dokazovaní dôsledku je populárnym aj postup cez spúšťanie kolmice, viď Príklad 1.3 v prvej kapitole (Legendre-ov pokus o dôkaz piateho Euklidovho postulátu.)

Existenciu rovnobežky sme ukázali z ostatných axióm, teda postulovať stačí jednoznačnosť.

R: **(Playfairova axióma)** Pre každú priamku $p$ a pre každý bod $B$ neležiaci na tejto priamke existuje iba jedna priamka $q$ prechádzajúca bodom $B$ rovnobežná s priamkou $p$ (ozn. $p \parallel q$).

Poznámka 6.2. Často sa budeme odvolávať v texte na pravý uhol a budeme s ním porovnávať iné uhly. Aby formulácie boli čo najprehľadnejšie, je užitočné zaviesť pre pravý uhol nejaké označenie.

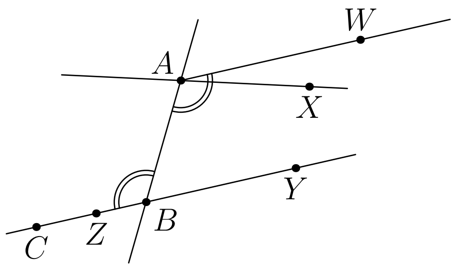
Keďže ešte nemáme zavedenú mieru uhla, formálne najčistejším riešením by bolo siahnuť po označení, ktoré nebude mieru uhla evokovať, ako ju evokuje značenie $\pi/2$ či $90°$. Na druhej strane zavádzať nové označenie pre objekt, ktorý už označenie má, dokonca nie jedno, prináša zbytočnú formálnu záťaž pri čítaní textu. Preto budeme pravý uhol označovať $90°$, dva pravé uhly budeme označovať $180°$. Treba však mať na pamäti, že (zatiaľ) ide iba o označenie, symbol, a nie o mieru uhla!

Euklidov piaty postulát znel:

E5: A keď priamka pretínajúca dve priamky tvorí s nimi na jednej strane vnútorné uhly menšie než dva pravé, pretnú sa tieto priamky neohraničene predĺžené na tej strane, kde súčet uhlov je menší než dva pravé.

Tvrdenie 6.3. *R $\Leftrightarrow$ E5 (za predpokladu platnosti ostatných axióm).*

*Dôkaz.* R $\Rightarrow$ E5:

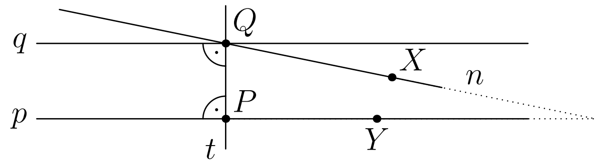



Obr. 26

- Majme $\overleftrightarrow{AB}$ a nech $\overrightarrow{AX}$ a $\overrightarrow{BY}$ sú polpriamky na tej istej strane od $\overleftrightarrow{AB}$ také, že $\angle XAB + \angle ABY < 180°$ (predpoklad).
- Nech $\angle ABZ$ je susedný k $\angle ABY$, teda $\angle ABZ + \angle ABY = 180°$.
- Potom $\angle XAB < 180° - \angle ABY = \angle ABZ$.
- Existuje jediná polpriamka $\overrightarrow{AW}$ na tej istej strane od $\overleftrightarrow{AB}$ ako $\overrightarrow{AX}$ taká, že $\angle BAW \cong \angle ABZ$.
- Potom $\overleftrightarrow{AW} \parallel \overleftrightarrow{BY}$ (Veta 6.1).

- Keďže $\overleftrightarrow{AX} \neq \overleftrightarrow{AW}$, tak $\overleftrightarrow{AX}$ pretína $\overleftrightarrow{BY}$ (R), označme priesečník $C$. Potrebujeme ešte ukázať, že $C$ leží na tej strane od $\overleftrightarrow{AB}$ ako body $X$ a $Y$.
- Ak by $C$ ležal na polpriamke opačnej k $\overrightarrow{AX}$, potom by v $\triangle ABC$ bol vonkajší uhol pri $A$ menší ako vnútorný uhol pri $B$, čo je spor,
- preto $C = \overrightarrow{AX} \cap \overrightarrow{BY}$.

E5 $\Rightarrow$ R (porovnajte s Legendrovým „dôkazom“ Euklidovho postulátu):




Obr. 27

- Nech bod $Q$ neleží na priamke $p$.
- Veďme bodom $Q$ kolmicu $t$ na $p$, priesečník nech je $P$,
- a potom tiež bodom $Q$ kolmicu $q$ na $t$.
- Potom $p \parallel q$, inak by sme mali trojuholník s dvoma pravými uhlami, čo je v spore s vetou o vonkajšom uhle trojuholníka.
- Nech $n$ je ľubovoľná iná priamka cez $Q$
- a nech $X$ je bod na priamke $n$ ležiaci na tej istej strane od $q$ ako $P$.
- Nech $Y \in p$ je na tej istej strane od $\overleftrightarrow{PQ}$ ako $X$.
- Potom $\angle PQX < 90°$ a teda $\angle QPY + \angle PQX < 180°$,
- preto sa priamky $p$ a $q$ pretnú (E5).

$\square$

## 6.2. Modely nespĺňajúce axiómu rovnobežnosti

Axióma rovnobežnosti (Playfairova) za často formuluje: „ku každej priamke existuje práve práve jedna rovnobežka prechádzajúca daným bodom“. Majme na pamäti, že v skutočnosi táto axióma postuluje jedinečnosť rovnobežky, keďže jej existencia sa dá v Hilbertovej rovine dokázať (Veta 6.1). Negácia Playfairovej axiómy, tzv. *Lobačevského axióma*, tak znie:

> Pre nejakú priamku $p$ a bod $A$ na nej neležiaci existujú aspoň dve priamky prechádzajúce bodom $A$ a rovnobežné s priamkou $p$.

Ak namiesto Playfairovej vyslovíme Lobačevského axiómu, dostávame takzvanú *hyperbolickú* alebo *Lobačevského* rovinu.

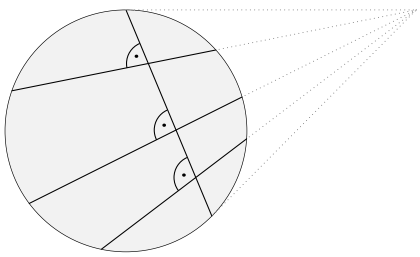
Model Hilbertovej roviny (teda model axióm incidencie, usporiadania a zhodnosti) je euklidovská rovina t. j. afinná rovina nad reálnymi číslami, prípadne afinná rovina nad iným vhodným poľom, ako sme si ich uviedli v predchádzajúcej časti.

Zaujímavejšími v tejto chvíli sú ale modely, ktoré axiómu rovnobežnosti nespĺňajú, čiže modely Lobačevského roviny, ktoré boli objavené v druhej polovici 19. storočia. Existencia týchto modelov definitívne ukazuje, že axióma rovnobežnosti je nezávislá od predchádzajúcich axióm, čiže jej platnosť sa nedá dokázať.

PRÍKLAD 6.4. *Beltramiho-Kleinov model* hyperbolickej geometrie:

- bodmi sú body otvoreného disku, t. j. vnútorné body kruhu,
- priamkami sú tetivy,
- incidencia a usporiadanie sú prirodzené, zhodnosť úsečiek aj uhlov je vhodne zadefinovaná tak, že aj axiómy zhodnosti sú splnené.

Popisu relácie zhodnosti úsečiek aj uhlov v tomto modeli sa nebudeme venovať, bol by príliš komplikovaný. No jednoducho sa dá ilustrovať aspoň kolmosť priamok, viď Obrázok 28.



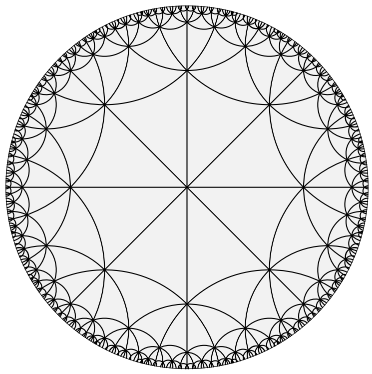
OBR. 28. Beltramiho-Kleinov model hyperbolickej roviny nie je konformný: na obrázku sú znázornené viaceré kolmice k jednej priamke

PRÍKLAD 6.5. *Poincarého model* hyperbolickej geometrie:

- bodmi sú body otvoreného disku,
- priamkami sú kružnicové oblúky v disku kolmé na jeho hranicu.
- Incidencia a usporiadanie sú prirodzené. Čo sa týka relácií zhodnosti, ide o konformný model, t. j. uhly sú zhodné, ak sa nám v modeli javia zhodné. Zhodnosť úsečiek je vhodne zadefinovaná tak, aby axiómy zhodnosti boli splnené.

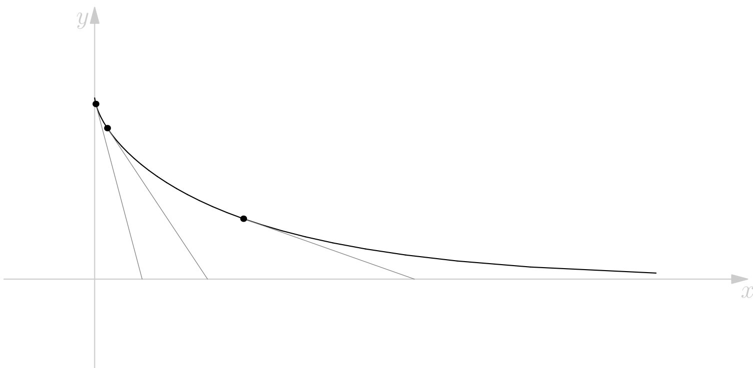
Zhodnosť úsečiek v Poincarého modeli hyperbolickej roviny sa dá ilustrovať pomocou jej pravidelnej teselácie, viď Obrázok 29.

POZNÁMKA 6.6. M. C. Escher (holandský umelec) po diskusiách s H. S. M. Coxeterom vytvoril sériu obrazov „Circle Limit“ umelecky ilustrujúcich teselácie hyperbolickej roviny. Zaujímavé na ich spolupráci je, že inšpirácia bola obojstranná: nielen že Escher umelecky stvárnil napríklad hyperbolickú rovinu, o ktorej sa dozvedel od Coxetera, ale aj naopak umelec matematika inšpiroval k štúdiu a následnému lepšiemu pochopeniu ekvidištánt v hyperbolickej geometrii.



Obr. 29. Pravidelná teselácia Poincarého modelu hyperbolickej roviny rovnostrannými trojuholníkmi, ktorých vnútorné uhly sú rovné polovici pravého uhla. V každom vrchole teselácie sa tak stretáva osem rovnostranných trojuholníkov. Všetky tieto trojuholníky sú navzájom zhodné.

Príklad 6.7. *Pseudosféra*, t. j. regulárna plocha s konštantnou zápornou Gaussovou krivosťou, je tiež modelom hyperbolickej geometrie. Hilbert v r. 1901 ukázal, že pseudosféra sa nedá izomorfne vnoriť do $\mathbb{R}^3$. Môžeme si ju v trojrozmernom priestore vizualizovať iba lokálne, napríklad ako *ako tractroidu*, čo je plocha, ktorá vznikne rotáciou tractrix okolo asymptoty.




Obr. 30. Tractrix, ktorej asymptotou je $x$-ová os.

Všetky uvedené modely sú v skutočnosti navzájom izomorfné. Popisujú tak tú istú hyperbolickú geometriu.

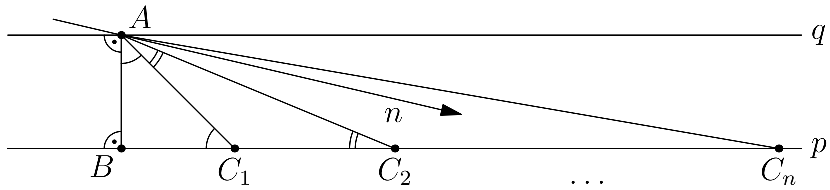
## 6.3. Rovnobežnosť a súčet uhlov v trojuholníku

Veta 6.8. *Ak platí axióma o rovnobežnosti, potom súčet vnútorných uhlov trojuholníka je rovný dvom pravým uhlom.*

*Dôkaz.* Cvičenie. ☐

VETA 6.9. *Ak je v každom trojuholníku súčet vnútorných uhlov rovný dvom pravým uhlom, potom platí axióma o rovnobežnosti R.*

*Dôkaz.*




OBR. 31

- Majme priamku $p$ a bod $A$ na nej neležiaci.
- Pomocou kolmíc zostrojíme cez bod $A$ rovnobežku $q$ ku priamke $p$.
- Nech $n$ je iná priamka prechádzajúca bodom $A$. Uvažujme na nej polpriamku začínajúcu v bode $A$ a ležiacu na tej istej strane od $q$ ako priamka $p$. Ukážeme, že táto polpriamka pretne priamku $p$, a preto $n$ určite nie je rovnobežná s $p$.
- Na $p$ zostrojíme bod $C_1$ tak, že bude ležať na ten istej strane od $\overleftrightarrow{AB}$ ($B \in p$, $\overleftrightarrow{AB} \perp p$) ako uvažovaná polpriamka na $n$, a nech $BC_1 \cong AB$.
- Potom $\triangle ABC_1$ je rovnoramenný a $\angle BAC_1 \cong BC_1A$.
- Keďže $\angle ABC$ je pravý a súčet uhlov v tomto trojuholníku je podľa predpokladu 180°, platí, že $\angle BC_1A = \frac{1}{2}\, 90°$.
- V druhom kroku zostrojíme bod $C_2$ tak, že $B * C_1 * C_2$ a $C_1C_2 \cong AC_1$.
- Potom $\triangle AC_1C_2$ je tiež rovnoramenný a $\angle C_1AC_2 \cong \angle C_1C_2A$.
- Takto pokračujeme v konštrukcii rovnoramenných trojuholníkov a dostávame tým tiež postupnosť pravouhlých trojuholníkov $\triangle ABC_i$, v ktorých $\angle BC_iA$ je zlomkom pravého uhla konvergujúcim k nule (ako cvičenie si detailne vypracujte dôkaz tohto tvrdenia indukciou).
- Po dostatočnom počte krokov tak zostrojíme $\triangle ABC_n$ taký, že $\angle BAC_n$ je väčší ako uhol, ktorý naša polpriamka na $n$ zviera s $\overrightarrow{AB}$.
- Polpriamka na $n$ tak leží medzi $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{AC_n}$,
- preto podľa vety o priečke uhla pretne priečku $BC_n$.

□

Ešte sa na chvíľku pristavíme pri Hilbertovej rovine a zamyslíme sa, čo by sme vedeli povedať o súčte uhlov v trojuholníku, pokiaľ axiómu rovnobežnosti do hry nepriberieme.

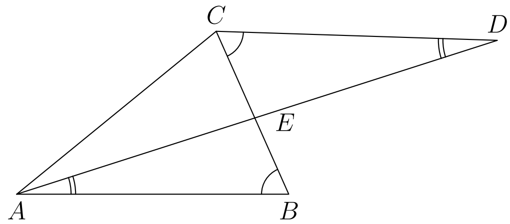
Z vety o vonkajšom uhle trojuholníka rýchlo usúdime, že trojuholník nemôže mať dva príliš veľké uhly, napríklad trojuholník s dvoma pravými uhlami je s touto vetou v spore, ako sme už videli. Avšak mohol by existovať trojuholník s troma uhlami, ktoré sú všetky rovné trom štvrtinám pravého uhla (vďaka bisekcii uhla vieme také uhly zostrojiť)?

Nasledovná konštrukcia nám dáva na túto otázku odpoveď.

VETA 6.10 (**Saccheri-Legendre**). *V Hilbertovej rovine (t. j. rovine spĺňajúcej axiómy incidencie, usporiadania a zhodnosti) majme $\triangle ABC$. Potom existuje aj $\triangle A'B'C'$, pre ktorý*

- $\angle A' + \angle B' + \angle C' = \angle A + \angle B + \angle C$,
- *niektorý z vnútorných uhlov $\triangle A'B'C'$ je menší, nanajvýš rovný $\frac{1}{2}\angle A$.*

*Dôkaz.*




OBR. 32. Súčet uhlov v $\triangle ADC$ je rovnaký ako súčet uhlov v $\triangle ABC$.

- Nech $\overrightarrow{CX}$ je polpriamka v opačnej polrovine od $\overleftrightarrow{BC}$ ako $A$, pre ktorú $\angle BCX \cong \angle CBA$.
- Nech $D \in \overrightarrow{CX}$ tak, že $CD \cong AB$.
- Bod $D$ je vnútorným bodom $\angle BAC$ (prečo? premyslite si!) a tiež leží na opačnej strane od $\overleftrightarrow{BC}$ ako bod $A$,
- a preto existuje $E = AD \cap BC$.
- Sledujme $\triangle ABE$ a $\triangle DCE$:
  - v nich $\angle ABE \cong \angle DCE$ (z konštrukcie $\angle BCD$),
  - $CD \cong AB$ (z konštrukcie bodu $D$)
  - a $\angle AEB \cong \angle DEC$ (ide o tzv. *vrcholové uhly*, a tieto sú podľa Vety 5.13 zhodné, keďže sú oba susednými uhlami k spoločnému uhlu, napr. k $\angle AEC$).
  - Preto $\triangle ABE \cong \triangle DCE$,
  - čiže $\angle EDC \cong \angle EAB$.
- Overíme, že hľadaným trojuholníkom je $\triangle ADC$:
  - keďže $\angle DAC + \angle ADC = \angle BAC$, máme, že $\angle DAC \leq \frac{1}{2}\angle BAC$ alebo $\angle ADC \leq \frac{1}{2}\angle BAC$,
  - súčet vnútorných uhlov $\triangle ADC$ je

$$\begin{aligned} \angle CAD + \angle ADC + \angle DCA &= \\ \angle CAD + \angle DAB + \angle DCB + \angle BCA &= \\ \angle CAB + \angle ABC + \angle BCA. \end{aligned}$$

□

DÔSLEDOK. *V Hilbertovej rovine súčet vnútorných uhlov v trojuholníku neprevyšuje dva pravé uhly.*

*Dôkaz.* Sporom predpokladajme, že existuje $\triangle ABC$ taký, že

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ + \epsilon,$$

kde $\epsilon$ je nejaký uhol. Konštrukciou z predchádzajúcej vety zostrojíme $\triangle A_1B_1C_1$, pre ktorý

- $\angle A_1 + \angle B_1 + \angle C_1 = 180^\circ + \epsilon$,
- $\angle A_1 \leq \frac{1}{2}\angle A$.

Túto konštrukciu opakujeme: v každom kroku zostrojíme $\triangle A_iB_iC_i$, v ktorom súčet vnútorných uhlov je stále ten istý ako v pôvodnom trojuholníku a $\angle A_i \leq \frac{1}{2}\angle A_{i-1}$. Takto po konečnom počte krokov zostrojíme $\triangle A_nB_nC_n$, pre ktorý

- $\angle A_n + \angle B_n + \angle C_n = 180^\circ + \epsilon$,
- $\angle A_n \leq \epsilon$.

Odtiaľ ale dostávame, že

$$\angle C_n \geq 180^\circ - \angle B_n.$$

To ale znamená, že v $\triangle A_nB_nC_n$ je vonkajší uhol pri vrchole $B_n$ menší ako vnútorný uhol pri vrchole $C_n$, prípadne s ním zhodný, čo je v spore s vetou o vonkajšom uhle trojuholníka. □

Ukázali sme si, že v Hilbertovej rovine je axióma rovnobežnosti ekvivalentná vete, že súčet uhlov v každom trojuholníku je 180°. Tvrdenie o súčte uhlov v trojuholníku zďaleka nie je jediným s touto vlastnosťou. V Hilbertovej rovine by sme mohli postulovať ktorékoľvek z nasledovných tvrdení a dostali by sme tú istú geometriu ako s axiómou rovnobežnosti:

- Existuje trojuholník taký, že súčet jeho vnútorných uhlov je 180°.
- Existuje trojuholník s ľubovoľne veľkým obsahom.
- Tri navzájom rôzne body ležia na spoločnej priamke alebo na spoločnej kružnici.
- Existujú dva podobné trojuholníky (t. j. trojuholníky so zhodnými zodpovedajúcimi si uhlami), ktoré nie sú zhodné.
- Ekvidištantou k priamke je priamka (presnejšie dvojica priamok).
- Pytagorova veta.

a mnoho ďalších.

## Cvičenia

74. Ukážte, že ak v Hilbertovej rovine (t. j. v rovine, kde platia axiómy incidencie, usporiadania a zhodnosti) platí axióma rovnobežnosti, potom je súčet vnútorných uhlov trojuholníka rovný dvom pravým uhlom. (Dôkaz možno niektorí poznáte zo strednej školy, prípadne sa inšpirujte: Euklides I.32.)

75. Vypracujte dôsledne indukciu v dôkaze vety: „Ak je v Hilbertovej rovine súčet uhlov v každom trojuholníku rovný dvom pravým, potom v tejto rovine platí axióma rovnobežnosti.“ (Veta 6.9).

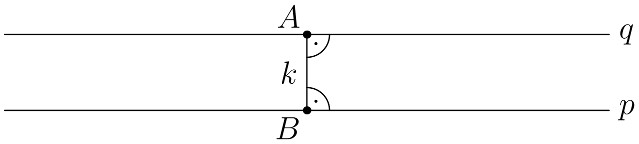
V dôkaze sa medzi rovnobežkami $p$, $q$ ($q$ zostrojená cez bod $A$ pomocou kolmíc) konštruuje postupnosť rovnoramenných trojuholníkov $\triangle AC_iC_{i+1}$ so základňou $AC_{i+1}$. Overte, že vnútorný uhol v $\triangle AC_iC_{i+1}$ pri základni je $(1/2^{i+1})$-násobok pravého uhla.

Všetky nasledujúce „dôkazy“ vychádzajú iba z axióm incidencie, usporiadania a zhodnosti a snažia sa ukázať, že jedinečnosť rovnobežky netreba postulovať, ale že sa dá dokázať.

76. Nájdite chybu v dôkaze nasledovného tvrdenia:

*Tvrdenie:* Pre danú priamku a daný bod neležiaci na tejto priamke existuje jediná priamka prechádzajúca týmto bodom a rovnobežná s danou priamkou.

*Dôkaz:* Daná je priamka $p$ a bod $A$ na nej neležiaci. Z bodu $A$ spustíme na

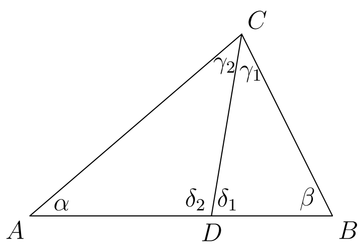



priamku $p$ kolmicu $k$. Potom bodom $A$ vedieme kolmicu na priamku $k$, označíme ju $q$. Vieme (dôsledok Vety 6.1), že $q$ a $p$ sú rovnobežné. Tiež už vieme (Veta 5.26), že kolmica $k$ spustená z bodu $A$ na priamku $p$ je jediná, a tiež kolmica $q$ ku $k$ vedená bodom $A$ je jediná, preto je rovnobežka $q$ ku priamke $p$ vedená bodom $A$ jediná.

77. Nájdite chybu v dôkaze nasledovného tvrdenia:

*Tvrdenie:* Súčet uhlov v trojuholníku je rovný dvom pravým uhlom (t. j. 180°) (bez použitia axiómy rovnobežnosti).

*Dôkaz:* Uvažujme označenie ako na obrázku: trojuholník $ABC$ je úsečkou $CD$ ($D$ je vnútorný bod strany $AB$) rozdelený na $\triangle ADC$ a $\triangle DBC$. Nech $x$ označuje




zatiaľ neznámy súčet uhlov v trojuholníku. Teda máme:

$$\begin{aligned} \alpha + \delta_2 + \gamma_2 &= x, \\ \delta_1 + \beta + \gamma_1 &= x. \end{aligned}$$

Sčítaním týchto dvoch rovností dostávame

$$\alpha + \delta_2 + \delta_1 + \beta + \gamma_1 + \gamma_2 \;=\; 2x.$$

Na druhej strane v $\triangle ABC$ máme

$$\alpha + \beta + \gamma_1 + \gamma_2 \;=\; x.$$

Navyše uhly $\delta_1$ a $\delta_2$ sú susedné, teda

$$\delta_1 + \delta_2 = 180°.$$

Odtiaľ dostávame, že

$$x + 180° = 2x.$$

a preto $x = 180°$ je hľadaný súčet uhlov v trojuholníku.

78. Nájdite chybu v dôkaze nasledovného tvrdenia:

*Tvrdenie:* Existuje trojuholník, v ktorom súčet jeho uhlov je rovný dvom pravým uhlom (t. j. 180°) (bez použitia axiómy rovnobežnosti).

*Dôkaz:* Aj bez axiómy rovnobežnosti vieme, že súčet vnútorných uhlov v trojuholníku nie je väčší ako dva pravé uhly (dôsledok Saccheri-Legendrovej vety). Uvažujme trojuholník, označme ho $\triangle ABC$, ktorý má najväčší možný súčet uhlov; ak je takých trojuholníkov viac, vezmime ľubovoľný z nich. Označme tento súčet $x$.

Tak ako v predchádzajúcom príklade rozdelíme $\triangle ABC$ bodom $D$ na strane $AB$ na dva trojuholníky. Pre súčty vnútorných uhlov v týchto menších trojuholníkov platí (viď obrázok v predchádzajúcom príklade)

$$\begin{aligned} \alpha + \delta_2 + \gamma_2 &\leq x, \\ \delta_1 + \beta + \gamma_1 &\leq x. \end{aligned}$$

Odtiaľ

$$\alpha + \delta_2 + \delta_1 + \beta + \gamma_1 + \gamma_2 \;\leq\; 2x.$$

Keďže

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma_1 + \gamma_2 &= x \\ \delta_1 + \delta_2 &= 180°, \end{aligned}$$

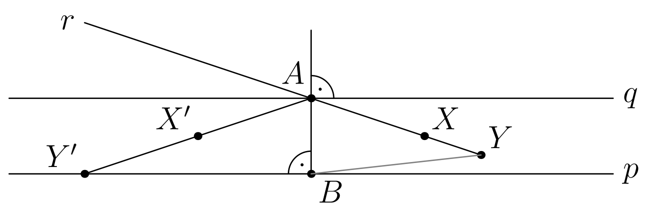
dostávame tak

$$x \;\geq\; 180°,$$

a keďže už vieme, že $x \leq 180°$, tak sme ukázali $x = 180°$.

79. Nájdite slabé miesto v Legendrovom „dôkaze“ tvrdenia, že každým bodom neležiacim na danej priamke prechádza jediná rovnobežka s danou priamkou. Čiže každý krok dôkazu sa pokúste odôvodniť nejakou axiómou alebo už dokázanou vetou a zistite, ktorý krok sa zdôvodiť nedá:

(1) Daná je priamka $p$ a bod $A$ na nej neležiaci.
(2) Veďme bodom $A$ kolmicu na priamku $p$, pretne ju v bode $B$.




(3) Nech $q$ je priamka prechádzajúca bodom $A$ a kolmá na priamku $\overleftrightarrow{AB}$.
(4) Potom $q \parallel p$.
(5) Nech $r$ je iná priamka prechádzajúca bodom $A$, $r \neq q$. Ukážeme, že priamka $r$ pretína priamku $p$.
(6) Nech $\overrightarrow{AX}$ je polpriamka na $r$ ležiaca na tej istej strane od $q$ ako bod $B$.
(7) Nech $X'$ je bod na opačnej strane $\overleftrightarrow{AB}$ ako $X$ taký, že $\angle BAX' \cong \angle BAX$.
(8) Potom $B$ leží vo vnútri uhla $XAX'$.
(9) Keďže $p$ prechádza bodom $B$, pretína aspoň jedno z ramien tohto uhla.
(10) Ak $p$ pretína $\overrightarrow{AX}$, tak $p$ pretína $r$, a teda $r \nparallel p$, hotovo.
(11) Nech teda $p$ nepretína $\overrightarrow{AX}$ a pretína $\overrightarrow{AX'}$ v bode $Y'$.
(12) Nech $Y$ je bod na $\overrightarrow{AX}$ taký, že $AY \cong AY'$.
(13) Potom $\triangle BAY \cong \triangle BAY'$ (sus),
(14) teda uhol $ABY$ je pravý,
(15) čiže $Y$ je priesečník priamok $r$ a $p$.

KAPITOLA 7

# Axiómy spojitosti

## 7.1. Princípy spojitosti a Hilbertove axiómy spojitosti

PRÍKLAD 7.1. Euklides I.1: Pre danú úsečku existuje rovnostranný trojuholník taký, že táto úsečka je jednou z jeho strán. Problém: nie je vôbec zaručené, že konštruované kružnice sa pretnú. Presnejšie, nevieme naisto, či spoločný bod týchto kružníc je bodom roviny (situácia podobná Príkladu 4.20).

DEFINÍCIA 7.2.

- Nech je daný bod $S$ a úsečka $AB$. *Kružnica* so stredom $S$ je množina bodov $X$ takých, že $SX \cong AB$.
- *Polomer* kružnice je úsečka spájajúca stred s niektorým bodom kružnice.
- *Tetiva* je akákoľvek úsečka spájajúca dva rôzne body na kružnici.
- *Priemer* je tetiva kružnice obsahujúca jej stred.
- Nech $X$ je bod na kružnici so stredom $S$. Bod $Y$ je *vonkajším* bodom kružnice, ak $SY > SX$, a je *vnútorným* bodom kružnice, ak $SY < SX$.

PRINCÍP SPOJITOSTI KRUŽNICE 1. Ak kružnica $k_1$ má bod ležiaci vnútri kružnice $k_2$ aj bod ležiaci zvonka kružnice $k_2$, potom sa kružnice $k_1$ a $k_2$ pretínajú v dvoch bodoch.

Prvý princíp zaručuje existenciu rovnostranného trojuholníka.

PRINCÍP SPOJITOSTI KRUŽNICE 2. Ak priamka obsahuje vnútorný bod kružnice, potom táto priamka pretína kružnicu v dvoch bodoch.

Druhý princíp využíval Euklides pri konštrukcii kolmice k danej priamke z daného bodu mimo nej (Euklides I.12). Je to konštrukcia, ktorú pravdepodobne poznáte zo základnej alebo strednej školy. Táto konštrukcia však v Hilbertovej rovine s axiómou rovnobežnosti nie je opodstatnená.

Je pravda, že my sme zvládli zostrojiť kolmicu už vrámci axióm zhodnosti, bez princípu spojitosti kružnice, no postupovali sme inak, nie klasickou Euklidovou konštrukciou.

PRINCÍP SPOJITOSTI KRUŽNICE 3. Ak jeden z koncových bodov úsečky je vnútorným a druhý vonkajším bodom kružnice, potom táto úsečka kružnicu pretína.

Princípy spojitosti kružnice nie sú navzájom nezávislé, napríklad druhý je pomerne jednoduchým dôsledkom tretieho (viď cvičenie 81). Tiež sa dá ukázať, že druhý aj tretí princíp spojitosti kružnice sú dôsledkom prvého.

Tieto princípy by sme mohli pridať ako nové axiómy. Pomerne často sa to tak aj robí, pretože tieto princípy sú jednak stále naozaj geometrické (čo nie je pravda pre Hilbertove axiómy spojitosti, ako čoskoro uvidíme) a tiež sú postačujúce pre všetky euklidovské konštrukcie.

Hilbert však svoj axiomatický systém budoval tak, aby bol kategorickým, teda aby po splnení všetkých axióm existoval až na izomorfizmus jediný model. Preto pre spojitosť postuloval toto:

Axiómy:

S1: **(Archimedova axióma)** Nech $A_0 * A_1 * B$. Pre $i \geq 2$ nech $A_i$ je také, že $A_0 * A_{i-1} * A_i$ a $A_{i-1}A_i \cong A_0A_1$. Potom pre nejaké $n \in \mathbb{N}$ platí, že $A_0 * B * A_n$.

S2: **(Axióma úplnosti)** K bodom a priamkam v rovine už nie je možné pridať ďalšie tak, aby výsledná geometria stále spĺňala všetky doteraz uvedené axiómy.

Axióma úplnosti je akousi „metaaxiómou“, je to tvrdenie o vlastnosti axiomatického systému.

**7.1.1. K Archimedovej axióme.** Archimedovu axiómu môžeme nazvať skôr „axiómou merateľnosti“ než spojitosti. Umožňuje zaviesť pojem dĺžky úsečky: každú úsečku vieme (aspoň približne) primerať k jednotkovej úsečke ($A_0A_1$ v axióme).

S Archimedovou axiómou ste sa zrejme stretli aj mimo geometrie, zrejme v matematickej analýze. Tam zvykne byť formulovaná nasledovne:

$$\forall u, v > 0\ \exists n \in \mathbb{N}:\ nv > u.$$

Platnosť Archimedovej axiómy nie je taká samozrejmá ako sa nám môže na prvý pohľad zdať, napr. v Kleinovom alebo Poincarého modeli hyperbolickej geometrie treba jej platnosť naozaj overiť.

Poznámka 7.3. Aj slávny Zenónov paradox o pretekoch Achilla s korytnačkou môžeme vnímať cez prizmu Archimedovej axiómy. Formulácia paradoxu nás obmedzuje na tú časť trate, kde Achilles korytnačku ešte nedostihol. Poslucháčovi sa podsúva, že náskok korytnačky na začiatku pretekov je rovnocenný s hociktorým úsekom dráhy medzi Achillom a korytnačkou počas pretekov. Ak podľahneme a takto si vlastne interpretujeme zhodnosť úsekov, celá trať až do cieľa Archimedovu axiómu nespĺňa – máme tak nearchimedovskú geometriu.

## 7.2. Dedekindova axióma

W. R. Dedekind, 1871:

> Nech všetky body na priamke pozostávajú z dvoch neprázdnych disjunktných množín tak, že žiaden bod z jednej množiny neleží medzi dvoma bodmi z druhej množiny. Potom existuje na tejto priamke práve jeden bod $B$ taký, že jedna z daných množín je polpriamka so začiatkom v bode $B$ a druhá množina je jej doplnkom.

Dvojica množín s vlastnosťami popísanými v Dedekindovej axióme je známa ako *Dedekindov rez*.

Pozor na rozdiel medzi Dedekindovou axiómou a separačnou vlastnosťou na priamke (U*)! Ide tam o opačné konštrukcie: v U* si najprv na priamke zvolíme bod a až následne pomocou neho skonštruujeme Dedekindov rez tejto priamky, kým v Dedekindovej axióme sa naproti tomu tvrdí, že každý Dedekindov rez zodpovedá nejakému existujúcemu bodu uvažovanej priamky.

Príklad 7.4. Priamka nad racionálnymi číslami (inak: množina racionálnych čísel) Dedekindovu axiómu nesplĺňa: nech

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &= \{a \in \mathbb{Q} \mid a < \sqrt{2}\},\\ \Sigma_2 &= \{a \in \mathbb{Q} \mid a > \sqrt{2}\}.\end{aligned}$$

Potom množiny $\Sigma_1$ a $\Sigma_2$ tvoria Dedekindov rez priamky racionálnych čísel: sú jej netriviálnym rozkladom a žiaden bod jednej množiny neleží medzi dvoma bodmi druhej množiny. Avšak ani $\Sigma_1$ ani $\Sigma_2$ nie je polpriamkou, obom totiž chýba začiatočný bod. Ide o Dedekindov rez, ktorý žiadnemu bodu priamky priradiť nevieme.

Dedekindove rezy sa v matematike tradične používajú na konštrukcia reálnych čísel z racionálnych tak, že za reálne čísla de facto prehlásime množinu Dedekindových rezov: každý rez reprezentuje jedno reálne číslo.

Z analýzy možno poznáte tzv. *Dedekindov princíp* alebo tiež *Bolzanov princíp*, ktorý sa zvykne formulovať ako existencia supréma:

> Ak je neprázdna množina zhora ohraničená, potom má minimálne horné ohraničenie.

(t. j. každá zhora ohraničená množina má suprémum.)

Tvrdenie 7.5. *Bolzanov princíp je ekvivalentný Dedekindovej axióme.*

*Dôkaz.* Overíme najprv, že Bolzanov princíp je dôsledkom Dedekindovej axiómy.

- Nech platí Dedekindova axióma.
- Nech $\mathcal{M}$ je zhora ohraničená neprázdna množina.
- Nech $\Sigma_1$ je množina všetkých horných ohraničení množiny $\mathcal{M}$. Potom z predpokladu ohraničenosti $\mathcal{M}$ je $\Sigma_1$ neprázdna.

- Nech $\Sigma_2$ je doplnok množiny $\Sigma_1$. Množina $\Sigma_2$ je neprázdna, keďže $\mathcal{M}$ je neprázdna: v $\Sigma_2$ budú určite čísla menšie ako niektoré číslo z $\mathcal{M}$.
- Pre ľubovoľné $d_1, d_2 \in \Sigma_1$ platí, že ak $d_1 < d < d_2$ (t. j. $d$ je medzi $d_1$ a $d_2$), tak aj $d \in \Sigma_1$ (premyslite si to!). Analogicky pre $d_1, d_2 \in \Sigma_2$ (premyslite si to!).
- Čiže $\Sigma_1$ a $\Sigma_2$ tvoria Dedekindov rez.
- Bod $B$ na číselnej osi, ktorého existencia vyplýva z Dedekindovej axiómy, je určite tiež horným ohraničením množiny $\mathcal{M}$ (sporom ľahko vyargumentujete, prečo).
- Preto bod $B$ je suprémom množiny $\mathcal{M}$.

Podobne ukážeme, že z Bolzanovho princípu vyplýva na číselnej osi Dedekindova axióma:

- Nech platí Bolzanov princíp.
- Nech $\Sigma_1$, $\Sigma_2$ je Dedekindov rez číselnej osi a nech pre $a \in \Sigma_1$ a $b \in \Sigma_2$ platí $a < b$.

(1) Potom pre všetky $c \in \Sigma_1$ a všetky $d \in \Sigma_2$ platí $c < d$ (premyslite si to ako cvičenie).

- Neprázdna množina $\Sigma_1$ je tak zhora ohraničená (lebo $\Sigma_2$ je neprázdna), má preto podľa Bolzanovho princípu suprémum $s$.
- Ak $s \in \Sigma_1$, potom $\Sigma_1$ je polpriamkou so začiatočným bodom $s$, v opačnom prípade je $\Sigma_2$ polpriamkou so začiatočným bodom $s$.

□

Okrem Bolzanovho princípu existujú aj iné charakteristiky spojitosti reálnych čísel. Napríklad sa používa aj tzv. *Cantorov výrok* o neprázdnosti prieniku postupnosti do seba zapadajúcich uzavretých intervalov, ktorý tiež zrejme poznáte z matematickej analýzy. Presnejšie:

Majme na priamke $p$ postupnosť úsečiek: $A_1B_1, A_2B_2, \ldots$ takú, že

$$\forall n \in \mathbb{N}: \; A_{n+1}B_{n+1} \subset A_nB_n.$$

Potom existuje $C \in p$, že $C \in A_nB_n$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$.

Podobne ako v prípade Bolzanovho princípu, aj tu sa dá ukázať, že Cantorov výrok je ekvivalentný Dedekindovej axióme.

## 7.3. Závislosti medzi rôznymi axiómami spojitosti

PRÍKLAD 7.6. Dedekindova axióma neplatí napr. v $\mathbb{Q}^2$. Na druhej strane Archimedova axióma v $\mathbb{Q}^2$ platí.

VETA 7.7. *Archimedova axióma je dôsledkom Dedekindovej axiómy.*

*Dôkaz.*

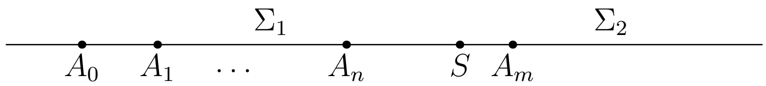
(1) Nech neplatí Archimedova axióma.

- Na priamke $p$ majme body $A_0, A_1$ ($A_0 \neq A_1$). Úsečku $A_0A_1$ budeme nanášať na polpriamku $\overrightarrow{A_0A_1}$ podľa Archimedovej axiómy.

(2) Nech $\Sigma_1$ pozostáva z bodov polpriamky opačnej k $\overrightarrow{A_0A_1}$ a zo všetkých „dosiahnuteľných“ bodov na $\overrightarrow{A_0A_1}$, t. j. z takých bodov $B$, že $A_0 * B * A_n$ pre nejaké $n$. Zrejme je $\Sigma_1$ neprázdna množina.

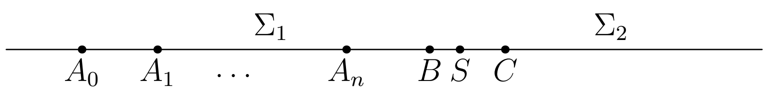
(3) Nech $\Sigma_2$ je doplnkom $\Sigma_1$ na $p$. Teda $\Sigma_2$ obsahuje všetky „nedosiahnuteľné“ body. Z predpokladu (1) je $\Sigma_2$ neprázdna. Overíme, že $\Sigma_1$ a $\Sigma_2$ tvoria Dedekindov rez.

- Už vieme ((2) a (3)), že $\Sigma_1$ a $\Sigma_2$ predstavujú netriviálny rozklad celej priamky.
- Nech $B, C \in \Sigma_1$, potom aj bod $D$ medzi $B$ a $C$ je „dosiahnuteľný“, a teda patrí $\Sigma_1$. (Overiť treba prípady, keď $B$ aj $C$ ležia na polpriamke opačnej k $\overrightarrow{A_0A_1}$, keď $B, C \in \overrightarrow{A_0A_1}$ sú oba „dosiahnuteľné“ a keď jeden z bodov je na $\overrightarrow{A_0A_1}$ „dosiahnuteľný“ a druhý na opačnej polpriamke. Výrazne sa využíva Veta o štyroch bodoch, prípadne separačná vlastnosť na priamke. Táto časť dôkazu pripomína dokazovanie v usporiadanej rovine.)
- Podobne ak $B$ a $C$ sú „nedosiahnuteľné“, aj každý bod medzi nimi je „nedosiahnuteľný“ (znovu s využitím Vety o štyroch bodoch).
- $\Sigma_1$ a $\Sigma_2$ tak tvoria Dedekindov rez priamky, existuje preto bod $S$, ktorý tieto rezy oddeľuje.
- Ak $S \in \Sigma_1$, teda $S$ je „dosiahnuteľný“, potom $A_0 * S * A_m$ pre nejaké $m \in \mathbb{N}$. Potom sú ale všetky body medzi $S$ a $A_m$ zároveň „dosiahnuteľné“ aj nedosiahnuteľné, čo je spor.




Obr. 33

- Nech $S \in \Sigma_2$, teda $S$ je „nedosiahnuteľný“. Nech $B \in \overrightarrow{SA_0}$ je taký, že $BS < A_0A_1$ a nech $C \in \overrightarrow{BS}$ je taký, že $BC \cong A_0A_1$, potom $B * S * C$. V tomto prípade všetky body medzi $S$ a $C$ sú zároveň „dosiahnuteľné“ aj nedosiahnuteľné, čo je znovu spor.




Obr. 34

□

POZNÁMKA 7.8. Dá sa ukázať, že aj axióma úplnosti (S2) je dôsledkom Dedekindovej axiómy. Obe axiómy spojitosti S1 a S2 by sme teda mohli nahradiť jedinou, Dedekindovou. S ňou sa aj pracuje omnoho príjemnejšie než napríklad s axiómou úplnosti. Napriek tomu Hilbert vo svojom systéme nepoužil Dedekindovu axiómu (ktorú už matematika poznala), ale spojitosť riešil dvojkrokovo, pretože ho zaujímali aj nearchimedovské geometrie.

Ako sme si už naznačili, princípy spojitosti kružnice sú slabšie ako Dedekindova axióma: ak by sme ako axiómy spojitosti zobrali princípy spojitosti kružnice, modelom všetkých axióm by bola aj rovina nad konštruovateľnými číslami (viď Príklad 5.31 v časti o axiómach zhodnosti), prípadne rovina nad reálnymi číslami algebraického uzáveru $\mathbb{Q}$. Avšak priamka v takejto rovine Dedekindovu axiómu (a tým ani Hilbertovu S2 axiómu) nespĺňa.

VETA 7.9. *Princípy spojitosti kružnice sú dôsledkom Dedekindovej axiómy.*

*Dôkaz.* Detailné dôkazy Princípov spojitosti kružnice 2 a 3 si skúste vypracovať ako cvičenie. Tu si len naznačíme, ako sa pri dokazovaní dá postupovať.

Pre dôkaz Princípu spojitosti kružnice 2 za predpokladu platnosti Dedekindovej axiómy treba zvoliť na priamke vnútorný bod $A$ kružnice, nájsť na nej vonkajší bod $B$ (vyargumentovať, že naozaj existuje) a skonštruovať rozklad priamky $\overleftrightarrow{AB}$ na množiny $\Sigma_1$ a $\Sigma_2$, kde $\Sigma_1$ sú body na $\overrightarrow{AB}$, ktoré sú zároveň vonkajšími bodmi kružnice. O tomto rozklade sa následne dokáže, že je Dedekindovým rezom $\overleftrightarrow{AB}$ a bod, ktorý tieto dva rezy oddeľuje, je bodom ležiacim aj na kružnici. Postupuje sa teda veľmi podobne ako v dôkaze Vety 7.7.

Postup pri dokazovaní princípu spojitosti kružnice 3 je veľmi podobný.

Dôkaz Princípu spojitosti kružnice 1 z Dedekindovej axiómy je možné nájsť v preklade Euklidových *Základov* od T. L. Heatha, [**8**]. Vrele odporúčam nazrieť do Heathovho prekladu Euklidových *Základov.* Jeho komentáre sú dôkladné nielen ohľadne matematického obsahu ale aj historických súvislostí. □

## Cvičenia

80. Vypracujte detailne krok (1) v dôkaze Tvrdenia 7.5:
ak $\Sigma_1$, $\Sigma_2$ je Dedekindov rez číselnej osi a $a < b$ pre nejaké $a \in \Sigma_1$ a $b \in \Sigma_2$, potom pre všetky $c \in \Sigma_1$ a všetky $d \in \Sigma_2$ platí $c < d$.

81. Overte, že Princíp spojitosti kružnice 2 je dôsledkom Princípu spojitosti kružnice 3. (Nápoveda: na priamke, ktorá obsahuje vnútorný bod kružnice, potrebujete nájsť aj vonkajšie body kružnice. Treba ich hľadať dostatočne ďaleko od vnútorného bodu a využiť pri argumentácii, že ide naozaj o vonkajší bod, trojuholníkovú nerovnosť.)

* 82. Vypracujte dôkaz Princípu spojitosti kružnice 2 z Dedekindovej axiómy.

* 83. Vypracujte dôkaz Princípu spojitosti kružnice 3 z Dedekindovej axiómy.

KAPITOLA 8

# Euklidovská rovina

## 8.1. Univerzálnosť Hilbertových axióm planimetrie

DEFINÍCIA 8.1. *Euklidovská rovina* je model všetkých uvedených axióm.

DEFINÍCIA 8.2. *Euklidovská rovina* je afinná rovina $\mathbb{R}^2$ so skalárnym súčinom definovaným na jej vektorovej zložke. (Ozn. aj $\mathbb{E}^2$, pre zdôraznenie, že ide o euklidovskú rovinu.)

Keďže $\mathbb{R}^2$ je univerzálny model všetkých (Hilbertových) axióm, nejde v druhej definícii o žiadne obmedzenie.

Keď geometria spĺňa všetky Hilbertove axiómy (dôležitá je pritom Archimedova axióma), môžeme v nej zaviesť meranie.

DEFINÍCIA 8.3. Zobrazenie úsečiek do $\mathbb{R}$, $AB \mapsto |AB|$ sa nazýva *miera* úsečiek, ak má nasledovné vlastnosti:

- $|AB| \in \mathbb{R}^+$ pre všetky úsečky $AB$,
- pre všetky $x \in \mathbb{R}^+$ existuje úsečka $AB$ taká, že $|AB| = x$,
- $|AB| = |CD|$ práve vtedy keď $AB \cong CD$,
- $|AB| < |CD|$ práve vtedy, keď $AB < CD$,
- ak $A * B * C$, potom $|AC| = |AB| + |BC|$.

Reálne číslo $|AB|$ nazývame *dĺžkou úsečky* $AB$.

Pri zavádzaní miery úsečiek môžeme postupovať dvoma spôsobmi:

(1) V synteticky (axiomaticky) chápanej Euklidovskej rovine (Definícia 8.1):
   (a) zhodnosť úsečiek je reláciou ekvivalencie, máme tak triedy ekvivalencie úsečiek,
   (b) ukážeme, že množina tried ekvivalencie sa dá vhodne (t. j. v súlade s Definíciou 8.3) stotožniť s množinou $\mathbb{R}^+$,
   (c) pre ľubovoľnú úsečku $AB$ budeme uvažovať jej triedu ekvivalencie a kladné reálne číslo, ktorému táto trieda zodpovedá, bude dĺžka úsečky $AB$.
(2) V analyticky chápanej Euklidovskej rovine (Definícia 8.2) použijeme skalárny súčin:
   (a) Nech skalárny súčin vektorov $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ a $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ je

$$\mathbf{u}.\mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2.$$

Potom pre $A = (a_1, a_2), B = (b_1, b_2) \in \mathbb{E}^2$ bude dĺžka

$|AB| = \sqrt{(B - A).(B - A)} = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}.$

Úsečky v (analyticky chápanej) $\mathbb{E}^2$ sú (definitoricky) zhodné, keď majú rovnakú dĺžku.

(b) Overíme, že takto definovaná miera úsečiek spĺňa podmienky Definície 8.3

Podobne môžeme merať aj uhly.

## 8.2. Bezrozpornosť Hilbertových axióm planimetrie

Tak ako v časoch Euklida bola celá matematika popísaná pomocou geometrie, v 20. storočí sa univerzálnym jazykom matematiky stala teória množín. Aj univerzálny model Hilbertových axióm, rovina $\mathbb{R}^2$, je popísaný pomocou teórie množín. Teória množín je tiež disciplínou, kde „pravidlá hry“ sú určené nejakými axiómami. Preto hovoríme o tzv. *relatívnej bezrozpornosti* axióm euklidovskej roviny: euklidovská geometria je bezrozporná, ak je náš jediný model v poriadku. Presnejšie, model $\mathbb{R}^2$ vychádza z teórie reálnych čísel,

- ktoré sú skonštruované pomocou Dedekindových rezov z racionálnych čísel,
- ktoré sú skonštruované ako podielové pole prirodzených čísel,
- ktoré sú skonštruované pomocou axióm teórie množín

a o teórii množín všetci len dúfame, že je bezrozporná.

Ak namiesto syntetickej geometrie (vybudovanej pomocou axióm) používame analytickú, teda ak pracujeme s modelom $\mathbb{R}^2$, tak bod je jasne definovaný pojem. To isté platí pre priamku, incidenciu, usporiadanie, zhodnosť. Nedefinovanými pojmami sú pojmy v teórii množín.

### Cvičenia

84. Nech $k$ je kružnica so stredom $S$ a nech $AB$ je jej tetiva. Nech $X$ je stred $AB$. Potom priamka $\overleftrightarrow{SX}$ je kolmá na priamku $\overleftrightarrow{AB}$.

(a) Dokážte toto tvrdenie s pomocou syntetickej (axiomaticky budovanej) geometrie. (Nápoveda: uvažujte trojuholníky $\triangle SXA$ a $\triangle SXB$.)

(b) Dokážte toto tvrdenie s pomocou analytickej geometrie. (Nápoveda: vhodne si zvoľte súradnicovú sústavu, napr. tak, aby stred kružnice bol v začiatku sústavy, potom pre body kružnice platí $x^2 + y^2 = r^2$, kde $(x, y)$ sú súradnice bodu na kružnici a $r$ je polomer kružnice.)

# Literatúra


[1] *Euclids's Elements of Geometry.* http://farside.ph.utexas.edu/Books/Euclid/Elements.pdf, 2008. Edited, and provided with a modern English translation, by Richard Fitzpatrick.

[2] H. S. M Coxeter. *Introduction to Geometry, Second Edition.* Wiley Classics Library. John Wiley & Sons, Inc., 2nd edition, 1969.

[3] Jakov Semenovič Dubnov. *Chyby v geometrických důkazech.* Státní nakladatelství technické literatury, 1953.

[4] Euklides. *Základy.* Perfekt, 2022. preklad a kometnáre prof. Ján Čižmár.

[5] Marvin Jay Greenberg. *Euclidean and non-Euclidean geometries.* W. H. Freeman and Company, New York, third edition, 1993. Development and history.

[6] Hans Hahn. Über die anordnungssätze der geometrie. *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 19:289–303, 1908.

[7] Robin Hartshorne. *Geometry: Euclid and Beyond.* Springer, 2000.

[8] Sir Thomas Little Heath. *The thirteen books of Euclid's Elements.* Dover Publications, 2nd edition, 1956.

[9] David Hilbert. *The Foundations of Geometry.* Project Gutenberg, 2005. Translated by E. J. Townsend.

[10] David E. Joyce. *Euclids's Elements.* 1996. Online version close to Heath's edition, http://mathcs.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html.

[11] Moritz Pasch. *Vorlesungen Über Neuere Geometrie.* 1882.

[12] Zita Sklenáriková and Ján Čižmár. *Elementárna geometria euklidovskej roviny.* Univerzita Komenského, 2005.

[13] Oswald Veblen. A system of axioms for geometry. *Transactions of the Americam Mathematical Society*, 5(3):343–384, 1904.

[14] Michal Grajcar Valent Zaťko Vladimír Piják, Ondrej Šedivý. *Konštrukčná geometria pre matematicko-fyzikálne a pedagogické fakulty.* Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 1985.

[15] Ján Čižmár. *Dejiny matematiky.* Perfekt, 2017.

Jana Chalmovianská

**Axiomatická výstavba euklidovskej roviny**
**(Geometria 2 pre študentov učiteľstva matematiky)**

Vydala Univerzita Komenského v Bratislave, 2023

Rozsah 86 strán, 4,17 AH, prvé vydanie,
vyšlo ako elektronická publikácia

**ISBN 978-80-223-5682-4 (online)**

ISBN 978-80-223-5682-4