MASARYKOVA UNIVERZITA
Přírodovědecká fakulta
Ústav matematiky a statistiky

Diplomová práce

Brno 2019 Alexandra Porembová

MASARYKOVA UNIVERZITA
Přírodovědecká fakulta
Ústav matematiky a statistiky

Matematický seminář pro talentované studenty

Diplomová práce

Alexandra Porembová

Vedoucí práce: Mgr. Michal Bulant, Ph.D. **Brno 2019**

Bibliografický záznam

Autor:	Bc. Alexandra Porembová Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita Ústav matematiky a statistiky
Název práce:	Matematický seminář pro talentované studenty
Studijní program:	Fyzika
Studijní obor:	Učitelství fyziky pro střední školy Učitelství matematiky pro střední školy
Vedoucí práce:	Mgr. Michal Bulant, Ph.D.
Akademický rok:	2018/2019
Počet stran:	xix + 158
Klíčová slova:	vzdělávaní; matematika; střední škola; matematická olympiáda; matematický seminář

Bibliografický záznam

Autor:	Bc. Alexandra Porembová Prírodovedecká fakulta, Masarykova univerzita Ústav matematiky a štatistiky
Názov práce:	Matematický seminár pre talentovaných študentov
Študijný program:	Fyzika
Študijný odbor:	Učiteľstvo fyziky pre stredné školy Učiteľstvo matematiky pre stredné školy
Vedúci práce:	Mgr. Michal Bulant, Ph.D.
Akademický rok:	2018/2019
Počet strán:	xix + 158
Kľúčové slová:	vzdelávanie; matematika, stredná škola; matematická olympiáda; matematický seminár

Bibliographic Entry

Author:	Bc. Alexandra Porembová Faculty of Science, Masaryk University Department of Mathematics and Statistics
Title of Thesis:	Mathematical seminar for talented students
Degree Programme:	Physics
Field of Study:	Upper Secondary School Teacher Training in Physics Upper Secondary School Teacher Training in Mathematics
Supervisor:	Mgr. Michal Bulant, Ph.D.
Academic Year:	2018/2019
Number of Pages:	xix + 158
Keywords:	education; mathematics; high school; Mathematical Olympiad; mathematical seminar

Abstrakt

Diplomová práce se zabývá tvorbou osnovy prezenčního matematického semináře pro talentované studenty. Ten má připravovat studenty prvního ročníku střední školy na účast na matematických soutěžích, zejména matematické olympiádě. V první části práce představuje přehled aktivit, do kterých se můžou středoškoláci se zájmem o matematiku zapojit, společně se stručným přehledem typů úloh matematické olympiády kategorie C a vzdělávacího programu pro předmět matematika v prvním ročníku. Na základě toho potom práce v druhé části obsahuje návrh konkrétního obsahu jednotlivých setkání matematického semináře ve formě převzatých řešených příkladů doplněných o komentář.

Abstrakt

Diplomová práca sa zaoberá tvorbou osnovy prezenčného matematického seminára pre talentovaných študentov. Ten má pripravovať študentov prvého ročníka strednej školy na účasť na matematických súťažiach, najmä matematickej olympiáde. V prvej časti práca predstavuje prehľad aktivít, do ktorých sa môžu stredoškoláci so záujmom o matematiku zapojiť, spolu so stručným prehľadom typov úloh matematickej olympiády kategórie C a vzdelávacieho programu pre predmet matematika v prvom ročníku. Na základe toho potom práca v druhej časti obsahuje návrh konkrétneho obsahu jednotlivých stretnutí matematického seminára vo forme prevzatých riešených príkladov sprevádzaných komentárom.

Abstract

The diploma thesis deals with the creation of a curriculum of an attended mathematical seminar for talented students. The seminar is supposed to prepare first year high school students for the participation in mathematical competitions, especially the Mathematical Olympiad. In the first part, the work presents an overview of activities in which high school students interested in mathematics can engage, together with a brief outline of the types of problems encountered in the Mathematical Olympiad of C category and in the first year mathematics curriculum. Based on these, the work in the second part contains a specific programme of the the mathematical seminar's individual meetings in the form of adopted solved problems accompanied by a commentary.

MASARYKOVA UNIVERZITA
Přírodovědecká fakulta

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

Akademický rok: 2015/2016

Ústav:	Ústav matematiky a statistiky
Studentka:	Bc. Alexandra Porembová
Program:	Fyzika
Obor:	Učitelství fyziky pro střední školy Učitelství matematiky pro střední školy

Ředitel *Ústavu matematiky a statistiky* PřF MU Vám ve smyslu Studijního a zkušebního řádu MU určuje diplomovou práci s tématem:

Téma práce:	Matematický seminář pro talentované studenty
Téma práce anglicky:	Mathematical seminar for talented students

Oficiální zadání:
Studentka sestaví podrobnou osnovu včetně řešených příkladů a cvičení pro středoškolský seminář připravující studenty na matematické soutěže (zejména matematickou olympiádu). Obsah semináře zohlední RVP pro gymnázia i obvyklý průběh studia, stejně jako typické úlohy řešené v matematických soutěžích. Dle zájmu studentky je možné práci pojmout buď jako přípravu podkladů pro prezenční seminář nebo jako přípravu virtuálního webového semináře.

Literatura:

HERMAN, Jiří, Radan KUČERA a Jaromír ŠIMŠA. *Metody řešení matematických úloh I*. 3. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2011. 278 s. ISBN 978-80-210-5636-7.

HERMAN, Jiří, Radan KUČERA a Jaromír ŠIMŠA. *Metody řešení matematických úloh II.*. 3., přeprac. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2004. 355 s. ISBN 80-210-3569-2.

ENGEL, Arthur. *Problem-solving strategies*. [New York], N.Y.: Springer, 1998. ISBN 0-387-98219-1.

ZEITZ, Paul. *The art and craft of problem solving*. New York: John Wiley & Sons, 1999. xvii, 334. ISBN 0-471-13571-2.

Jazyk závěrečné práce:	slovenština

Vedoucí práce:	Mgr. Michal Bulant, Ph.D.
Datum zadání práce:	7. 10. 2015
V Brně dne:	19. 11. 2015

Souhlasím se zadáním (podpis, datum):

Porembová		
Bc. Alexandra Porembová **studentka**	Mgr. Michal Bulant, Ph.D. **vedoucí práce**	prof. RNDr. Jan Slovák, DrSc. **ředitel Ústavu matematiky a statistiky**

Poďakovanie

Na tomto mieste by som rada poďakovala Mgr. Michalovi Bulantovi, Ph.D. za neuveriteľnú trpezlivosť, pomoc, dôveru a povzbudivé slová v priebehu vypracovania práce.

Ďakujem tiež mojim rodičom a bratovi, Kubovi, Jurajovi, Honzovi, Martinovi, Matúšovi a ostatným parádnym kamarátom za podporu technickú, intelektuálnu aj psychickú. Bez vás by nebolo ani dobre, ani diplomová práca.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svoji diplomovou práci vypracovala samostatně s využitím informačních zdrojů, které jsou v práci citovány.

Brno 7. januára 2019

. . . .

Alexandra Porembová

Obsah

Úvod 1

Kapitola 1. Širší kontext práce 3
1.1 Príležitosti pre študentov so záujmom o matematiku 3
1.2 Bližšia špecifikácia zadania práce 5
1.3 Východiská pri tvorbe osnov 6
1.4 Doplňujúce zdroje, materiály a inšpirácia 8
1.5 Celoročný koncept seminára 9

Kapitola 2. Osnovy seminárnych stretnutí 13
2.1 September 13
2.2 Október 25
2.3 November 48
2.4 December 74
2.5 Január 88
2.6 Február 95
2.7 Marec 108
2.8 Apríl 123
2.9 Máj 134
2.10 Jún 150

Záver 155

Zoznam použitej literatúry 157

Úvod

Diplomová práca sa venuje tvorbe prezenčného matematického seminára pre študentov prvého ročníka so záujmom o matematiku. Práca má dve časti. V prvej z nich zasadíme seminár do širšieho kontextu matematického vzdelávania stredoškolákov. Podávame stručný prehľad mimoškolských aktivít, do ktorých sa študenti so záujmom o matematiku môžu zapojiť. Sem bezpochyby patrí najstaršia predmetová olympiáda – matematická olympiáda, rozličné korešpondenčné semináre, tábory, sústredenia a letné školy s matematickou tematikou, ako aj jednodňové podujatia, či už sú to súťaže alebo (ma)tematicky zamerané semináre. Pri tvorbe obsahov seminárnych stretnutí sme potom vychádzali zo školského vzdelávacieho programu pre prvý ročník gymnázií (ktorý vychádza z rámcového vzdelávacieho programu, je však hmatateľnejším vodidlom k tomu, aké znalosti a zručnosti by študenti mali mať) a analýzy úloh matematickej olympiády kategórie C.

Na základe poznatkov z prvej kapitoly sme potom vytvorili osnovy seminárov pre študentov so záujmom o ďalšie matematické vzdelávanie. Semináre sú naplánované s týždennou frekvenciou, pričom jedno seminárne stretnutie má trvať približne 120 minút. V hlavnom texte ponúkame návrh úloh, ktorými sa študenti pod vedením vedúceho seminára majú zaoberať, sprievodné komentáre aj domáce práce. Ďalej sú obsahom stretnutí tímové matematické súťaže a zaradené sú aj semináre zamerané na analýzu úloh aktuálneho ročníka matematickej olympiády.

Práca bola napísaná s využitím systému LaTeX, väčšinu obrázkov sme prevzali zo verejne dostupných vzorových riešení úloh MO, ostatné vytvorili v programe *Ipe*.

Kapitola 1

Širší kontext práce

1.1 Príležitosti pre študentov so záujmom o matematiku

Stredoškoláci, ktorých matematika zaujíma a láka ich odhaľovanie matematických tajomstiev aj za hranicami 3–4 hodín bežnej školskej matematiky, majú počas svojich stredoškolských štúdií veľké množstvo príležitostí. Cibriť si svoj matematický um môžu v rôznych dlhodobých či jednorázových súťažiach, seminároch či letných školách. V tejto krátkej kapitole uvedieme stručný prehľad možností, ktoré sa študentom slovenských a českých stredných škôl ponúkajú. Predstavíme matematickú olympiádu, korešpondenčné semináre a ďalšie súťaže. Nekladieme si však za cieľ podať úplný a vyčerpávajúci prehľad všetkých školských aj mimoškolských matematických aktivít spolu s ich historickým vývojom, ale skôr predstaviť čitateľovi mozaiku matematických príležitostí pre stredoškolákov. Pre záujemcov o hlbší pohľad do problematiky európskych matematických súťaží môže byť zaujímavým čítaním [Huv12], o vývoji práce s matematickými talentmi pútavo pojednáva [Švr14] a o histórii matematickej olympiády na Slovensku a v Českej republike sa nemálo dozvieme z [DOS07].

Matematická olympiáda

Matematická olympiáda je najstaršou predmetovou olympiádou a je zároveň „kráľovnou“ matematických súťaží u nás. Prvýkrát sa matematická olympiáda konala v školskom roku 1951/52 a teda v školskom roku 2017/18 sa mali študenti možnosť zúčastniť už 67. ročníka.

Úlohy matematickej olympiády sú autorské a náročnejšie ako typické školské úlohy. Často vyžadujú okrem dobrého zvládnutia školských poznatkov aj istý matematický cvik, vo vyšších kategóriách je na vyriešenie niektorých úloh nezriedka potrebné naštudovanie pasáží, ktoré nie sú bežnou súčasťou osnov. Okrem samotného výsledku úlohy je veľmi dôležitý postup, ktorým sa študent k riešeniu dopracoval a jeho zdôvodnenie. Účastníci olympiády sa tak trénujú nielen v riešení matematických úloh, ale aj v prehľadom a zrozumiteľnom zápise ich riešenia.

V súčasnosti študenti súťažia v ôsmich rôznych kategóriách, ktoré sú určené pre žiakov druhého stupňa ZŠ a študentov SŠ, kategórie Z5, Z6, Z7, Z8, Z9, sú po rade určené žiakom 5., 6., 7., 8. a 9. ročníka, kategórie C, B, A sú pripravené pre študentov 1., 2. a 3.–4. ročníkov gymnázií a stredných odborných škôl a zodpovedajúcich ročníkov viacročných gymnázií. Študenti sa okrem svojej príslušnej kategórie môžu tiež zúčastniť olympiády v kategórii vyššej. Všetky kategórie začínajú domácim kolom, základoškolákov potom preverí kolo okresné, kde súťaž pre kategórie Z5–Z8 končí. Kategória Z9 je zavŕšená kolom krajským. Stredoškolské kategórie pokračujú po domácom kole ešte školským a krajským, v prípade kategórie A sa najlepší riešitelia z celej republiky stretnú na kole celoštátnom. Šestica najúspešnejších riešiteľov celoštátneho kola postupuje na Medzinárodnú matematickú olympiádu, kde si meria sily so stredoškolákmi z celého sveta.

Korešpondenčné semináre

Korešpondenčné semináre sú ďalším spôsobom, akým si študenti môžu rozširovať a trénovať svoje (nielen) matematické znalosti a skúsenosti. Obsahovo sú matematické semináre podobné matematickej olympiáde, pretože študenti sa taktiež venujú úlohám vyššej ako školskej náročnosti, ktorých riešenia spolu s postupom a zdôvodnením prehľadne spisujú. Korešpondenčné semináre nie sú len doménou matematikov, existujú totiž aj semináre z programovania, fyziky, biológie či ekológie.

Aj keď sa jednotlivé matematické semináre od seba v detailoch odlišujú, ich priebeh veľmi podobný. Organizátori zverejnia zadania úloh a študenti majú niekoľko týždňov na ich vyriešenie. Úlohy sa potom posielajú organizátorom, ktorí ich opravia, ohodnotia bodmi, pridajú komentáre k jednotlivým riešeniam a pošlú ich naspäť študentom. Tento cyklus sa opakuje niekoľkokrát ročne, pričom sérií býva 4–8, v každej z nich na študentov čaká 4–9 úloh. Neoddeliteľnou súčasťou korešpondenčných seminárov sú sústredenia pre niekoľko desiatok najlepších riešiteľov, ktoré študentov zvyčajne okrem matematických vedomostí obohatia aj o nové priateľstvá a ďalšie zážitky.

V Českej republike a na Slovensku existuje matematických korešpondenčných seminárov niekoľko, nebýva výnimkou, že slovenskí študenti riešia aj semináre české a naopak. Uvedieme semináre, ktoré môžu byť zaujímavé pre stredoškolských študentov.

České korešpondenčné semináre

- *PraSe* (*MKS*) – *Pražský korešpondenční seminář* organizovaný Matematicko-fyzikálnou fakultou Karlovej univerzity v Prahe, osem sérií úloh rozdelených na jesennú a jarnú časť, väčšina sérií obsahuje 8 úloh, okrem toho ešte tematická séria zameraná na istú oblasť matematiky, dve sústredenia ročne. Podrobnejšie informácie je možné nájsť na [PraSe].

- *BrKoS* – *Brněnský korešpondenční seminář* organizovaný pod záštitou Prírodovedeckej fakulty Masarykovej univerzity v Brne, šesť sérií po siedmich úlohách, jedno jesenné sústredenie. Viac informácií je zverejnených na [BRKOS].

- *M&M* – organizovaný opäť Matematicko-fyzikálnou fakultou Karlovej univerzity v Prahe, typovo sa líši od predchádzajúcich dvoch: študenti majú okrem riešenia zadaných úloh možnosť bádať nad zadanými témami, písať články a reagovať na články rovesníkov. Pre najlepších riešiteľov je taktiež pripravené sústredenie. Viac informácií je dostupných na [MaM].

Slovenské korešpondenčné semináre

- *KMS* – *Korešpondenčný matematický seminár* organizovaný neziskovou organizáciou *Trojsten*, zimná a letná časť, každá pozostávajúca z troch sérií desiatich úloh, dve vekové kategórie, pre ktoré sú na konci každej časti organizované samostatné sústredenia. Podrobnejší prehľad na [KMS].

- *STROM* – *Seminár talentovaných riešiteľov obľubujúcich matematiku* organizovaný združením *STROM*, takisto dve časti po tri série úloh a dve sústredenia. Ďalšie informácie sa nachádzajú na [STROM].

Česko-slovenský seminár

- *iKS – Medzinárodný korešpondenčný seminár* určený pre pokročilých riešiteľov, obsahuje ťažké úlohy, a tomu odpovedá aj počet riešiteľov, ktorý je rádovo menší ako v ostatných zmienených seminároch. Viac informácií je možné nájsť na [iKS].

Okrem archívu súťažných úloh a ich riešení väčšina seminárov zverejňuje ďalšie zaujímavé články z rôznych oblastí matematiky, materiály zo sústredení a doplňujúce úlohy. Webové stránky týchto seminárov sa tak stávajú takmer nevyčerpateľnou zásobárňou inšpirácie a priestoru na precvičovanie riešiteľských zručností. Na niektoré z textov sa budeme odkazovať v neskorších častiach práce.

Krátkodobé súťaže

Okrem vyššie spomínaných dlhodobejších súťaží sa študenti môžu zapojiť do ďalších matematických akcií. Jednoznačne najmasovejšou[1] z nich je *Matematický klokan*, ktorý je pripravovaný pre študentov základných a stredných škôl. Na rozdiel od predchádzajúcich súťaží tu študenti riešia menej náročné, no stále originálne úlohy a dôležitý je len správny výsledok, ktorý študenti vyberajú z piatich ponúknutých možností. Viac je možné dočítať sa na [MK].

Jednou z mála súťaží, ktorá nie je určená pre jednotlivcov, je *Náboj*. V *Náboji* riešia 5-členné družstvá po dobu dvoch hodín úlohy, ktoré „si vyžadujú istú dávku invencie a dôvtipu“ [Naboj]. Na začiatku súťaže dostanú družstvá šesticu úloh, po vyriešení ktorejkoľvek z nich výmenou za ňu získa novú úlohu. V roku 2018 sa súťaž, pripravovaná pod záštitou viacerých univerzít a korešpondenčných seminárov, uskutočnila dokonca v 15 mestách celej Európy.

Letné školy a tábory

Študentom, ktorým by sa letné prázdniny mohli zdať málo matematicky intenzívne, vychádzajú v ústrety rôzne letné školy a tábory, na ktoré sa môžu prihlásiť aj bez toho, aby predtým riešili korešpondenčné či iné súťaže. Príkladmi sú *Letná škola matematiky a fyziky*, *Letný tábor Trojstenu*, *Letná škola Trojstenu*, sústredenie MOFO pre riešiteľov matematickej a fyzikálnej olympiády či *Letné študentské sústredenie TNC*. Na rozdiel od predchádzajúcich aktivít nie je počas letných táborov a škôl kladený dôraz len na získavanie nových poznatkov z matematiky (a prípadne fyziky), ale aj na netradičné hry, športové a nešportové aktivity a upevňovanie priateľstiev medzi účastníkmi. Vlastné skúsenosti autorky sa môžu len pridať k hlasom, ktoré tvrdia, že sústredenia a tábory sú zážitkami na celý život.

1.2 Bližšia špecifikácia zadania práce

Všeobecné zadanie práce bolo po diskusii s vedúcim práce konkretizované nasledujúcim spôsobom. Obsahom diplomovej práce budú podklady pre prezenčný seminár určený študentom prvého ročníka gymnázia so záujmom o matematiku. Neprázdnu podmnožinu účastníkov tak pravdepodobne budú tvoriť študenti na matematiku nadaní, cieľom však nie je vytvoriť seminár, ktorý by malú skupinu študentov pripravoval na úspešnú účasť na Medzinárodnej matematickej olympiáde už v takomto mladom veku. Túto úlohu spĺňa nemalé množstvo existujúcich aktivít (bohatý a výstižný prehľad je možné nájsť v [Švr14]) a tento text nemá ambíciu byť ďalším z nich. Omnoho dôležitejším predpokladom pre účasť na seminári je tak záujem študenta o matematiku, viac než jeho objektívne ohodnotené nadanie.

[1] V roku 2018 sa súťaže zúčastnilo viac ako 22 000 stredoškolákov.

Práca si kladie za cieľ vytvoriť súbor seminárov obsahujúci dostatok úloh a problémov k samostatnému precvičovaniu, ktorý by bol prístupný širšiemu spektru študentov, nielen úzkej matematickej špičke. Dúfame, že si tak nájde cestu k väčšiemu okruhu študentov a učiteľov. V neposlednom rade pri špecifikácii zadania zavážil fakt, že autorka má k zvolenej vekovej kategórii blízko, či už ako organizátorka matematických seminárov a sústredení pre žiakov druhého stupňa základnej školy, alebo začínajúca učiteľka v nižších triedach gymnázia.

1.3 Východiská pri tvorbe osnov

Obsah seminárnych stretnutí sa opiera najmä o dva kľúčové aspekty – matematickú olympiádu kategórie C a školský vzdelávací program (ŠVP) pre gymnáziá.

Školský vzdelávací program

Pre potreby tejto práce sme vychádzali zo ŠVP publikovaného na webových stránkach Gymnázia Brno, třída Kapitána Jaroše.

Školský vzdelávací program pre prvý ročník gymnaziálneho vzdelávania sa svojim zameraním zásadne nelíši medzi matematickou a nematematickou triedou a zahŕňa štyri oblasti, ktoré sú podrobnejšie popísané v nasledujúcej tabuľke.

Algebraické výrazy, mocniny a odmocniny	
Žiak	Učivo
▷ efektívne upravuje výrazy s premennými, určuje definičný obor výrazov ▷ rozkladá mnohočleny na súčin vynímaním a použitím vzorcov ▷ uskutočňuje operácie s mocninami a odmocninami, upravuje číselné výrazy	▷ mnohočleny, lomené výrazy ▷ mocniny s prirodzeným, celým a racionálnym exponentom, druhá a tretia odmocnina ▷ výrazy s mocninami a odmocninami

Teória množín, výroková logika, matematické vety a dôkazy	
Žiak	Učivo
▷ uskutočňuje správne operácie s množinami, množiny využíva pri riešení úloh ▷ pracuje správne s výrokmi, používa správne logické spojky a kvantifikátory ▷ presne formuluje svoje myšlienky a zrozumiteľne sa vyjadruje ▷ rozumie logickej stavbe matematickej vety ▷ vhodnými metódami uskutočňuje dôkazy jednoduchých matematických viet	▷ množiny, operácie s množinami (zjednotenie, prienik, rozdiel množín, doplnok množiny v množine, podmnožina, rovnosť množín, Vennove diagramy, de Morganove pravidlá) ▷ výroky, negácie, kvantifikátory, logické spojky (konjunkcia, alternatíva, implikácia, ekvivalencia), výrokové formuly, tautológia, obmena a obrátenie implikácie ▷ definícia, veta, dôkaz ▷ priamy dôkaz, nepriamy dôkaz, dôkaz sporom

Teória čísel	
Žiak	Učivo
▷ vysvetlí vzťahy medzi číselnými obormi $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}'_{\mathbb{R}}, \mathbb{R}$ ▷ používa vlastnosti deliteľnosti prirodzených čísel ▷ operuje s intervalmi, aplikuje geometrický význam absolútnej hodnoty, ▷ odhaduje výsledky numerických výpočtov a efektívne ich uskutočňuje, účelne používa kalkulačku	▷ číslo, premenná ▷ číselné obory $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}'_{\mathbb{R}}, \mathbb{R}$ ▷ prirodzené čísla, deliteľnosť (a delí b, najväčší spoločný deliteľ, najmenší spoločný násobok, čísla súdeliteľné a nesúdeliteľné, prvočísla a zložené čísla, základná veta aritmetiky) ▷ celé čísla ▷ racionálne čísla ▷ reálne čísla, intervaly, absolútna hodnota

Rovnice a nerovnice	
Žiak	Učivo
▷ rieši lineárne a kvadratické rovnice, nerovnice a ich sústavy, v jednoduchých prípadoch diskutuje riešiteľnosť alebo počet riešení ▷ rozlišuje ekvivalentné a neekvivalentné úpravy, zdôvodní, kedy je skúška nutnou súčasťou riešenia ▷ geometricky interpretuje číselné, algebraické a funkčné vzťahy, graficky znázorňuje riešenia rovníc, nerovníc a ich sústav ▷ analyzuje a rieši problémy, v ktorých aplikuje riešenie lineárnych a kvadratických rovníc a ich sústav	▷ lineárne rovnice a nerovnice ▷ kvadratická rovnica (diskriminant, vzťahy medzi koreňmi a koeficientami, rozklad kvadratického trojčlenu, doplnenie na štvorec), kvadratická nerovnica ▷ rovnice a nerovnice v súčinovom a podielovom tvare ▷ rovnice s neznámou v menovateli a pod odmocninou ▷ lineárna a kvadratická rovnica s parametrom ▷ kartézsky súčin, binárna relácia a ich grafy ▷ sústavy lineárnych rovníc a nerovníc

Matematická olympiáda kategórie C

Ďalším oporným pilierom boli zadania matematických olympiád kategórie C. Podrobne sme preskúmali úlohy všetkých kôl posledných 10 ročníkov MO (počínajúc 66. ročníkom v školskom roku 2016/2017 a končiac 57. ročníkom v školskom roku 2007/2008) a úlohy v nich sme rozdelili do štyroch kategórií nasledovne.

- Algebraické výrazy, rovnice, sústavy rovníc, nerovnosti
  - úpravy výrazov využívajúce identity,
  - lomené výrazy,
  - slovné úlohy vedúce na riešenie rovníc,
  - sústavy rovníc,
  - rovnice s parametrami,
  - nerovnosti.
- Teória čísel
  - deliteľnosť, rozklad na prvočísla,
  - najmenší spoločný násobok, najväčší spoločný deliteľ,
  - ciferné zápisy čísel,
  - zvyškové triedy.
- Geometria
  - úlohy využívajúce podobnosť trojuholníkov,
  - úlohy využívajúce Pytagorovu vetu,
  - úlohy o obsahoch rovinných útvarov,
  - úlohy o kružniciach vpísaných a opísaných trojuholníku,
  - netradičné úlohy.
- Rôzne (najčastejšie kombinatorika)
  - úlohy využívajúce mriežky a šachovnice,
  - hľadanie víťaznej stratégie,
  - úlohy využívajúce Dirichletov princíp,
  - úlohy o počte známych (teória grafov),
  - logické úlohy nevyžadujúce žiadne špeciálne vedomosti.

Toto rozdelenie ďalej zohráva úlohu v zaraďovaní obsahov seminárov – v nich sa budeme postupne venovať všetkým štyrom vyššie spomenutým oblastiam. Zároveň však krajské kolo kategórie C prebieha v prvej polovici apríla, preto je zmysluplné využiť zostávajúcu časť školského roka na pozvoľné začatie prípravy na úlohy MO kategórie B, prípadne ďalšie matematické zaujímavosti.

1.4 Doplňujúce zdroje, materiály a inšpirácia

Aj napriek tomu, že prevažná väčšina seminárov sa opiera najmä o úlohy matematickej olympiády z minulých rokov, vychádzali sme pri tvorbe obsahu z ďalších zdrojov.

Výborným sprievodcom do sveta riešenia matematických problémov je [Hol10], ktorý veľmi pútavou formou zoznamuje čitateľa s rôznymi oblasťami stredoškolskej olympiádnej matematiky a metódami riešenia problémov. Kniha je plná veľkého množstva cvičení a úloh, všetky majú v publikácii aj riešenia.

Podobne zaujímavým počinom je aj [Zei07], ktorý však obsahuje aj matematiku vysokoškolskej úrovne. Obe publikácie sú písané v angličtine, český ani slovenský preklad zatiaľ nevyšiel, no ak je čitateľ vybavený angličtinou aspoň na základnej úrovni, nemali by tieto dve knihy ujsť jeho pozornosti.

V českých a slovenských kruhoch MO sú veľmi populárne knihy z edície *Škola mladých matematikov*, ktorá začala vychádzať v roku 1961 na podnet Ústredného výboru MO. Edícia obsahuje 61 knižočiek na rozličné témy rozširujúce a prehlbujúce matematické znalosti stredoškolákov. Nie všetky knižky sú však v celom svojom obsahu prístupné mladším žiakom gymnázií, keďže mnohé sa venujú aj pokročilejším partiám matematiky. Užívateľsky príjemný je fakt, že všetky knihy sú dostupné na [DMK].

Poslednou, ale určite nie najmenej dôležitou dvojicou kníh je [HKŠ04] a [HKŠ11], ktoré ponúkajú hlboký a precízny pohľad na riešenie úloh z oblasti rovníc, nerovností, teórie čísel a kombinatoriky.

1.5 Celoročný koncept seminára

Pri tvorbe a zaradení jednotlivých seminárov sme okrem ŠVP pre gymnáziá a typických úloh MO brali do úvahy aj rytmus školského roka, ktorý ovplyvňujú najmä termíny prázdnin a v prípade matematicky zameraných študentov aj termíny jednotlivých kôl MO. V ďalších odsekoch tak vysvetlíme, ako sme všetky uvedené skutočnosti pretavili do osnovy obsahu seminára na jeden školský rok.

Školský rok má približne 40 týždňov (10 mesiacov $\times$ 4 týždne). Predpokladáme, že seminárne stretnutia začnú v druhom septembrovom týždni, keďže prvý týždeň sa časové plány študentov aj učiteľov ešte len ustaľujú. Podobne, posledné dva júnové týždne bývajú v školách často nepravidelné, pretkané školskými výletmi a ďalšími aktivitami. Študentov tiež potešia vianočné a jarné, týždeň trvajúce, prázdniny, kedy sa seminár neuskutoční. Okrem toho sme v máji zaradili len tri stretnutia, keďže v tomto období je na mnohých školách režim, vzhľadom na maturitné skúšky, nepravidelný.

Celkovo teda v našom pláne počítame s 34 stretnutiami počas celého školského roka, pričom si autorka práce uvedomuje, že tento počet stretnutí nie je univerzálne použiteľný každým učiteľom v každom školskom roku.

Prirodzenými míľnikmi, okrem väčších prázdninových úsekov, sú tiež termíny späté s jednotlivými kolami MO, v našom prípade budeme brať ohľad najmä na kategóriu C. Riešenia domáceho kola musia študenti spravidla odovzdať najneskôr v prvej polovici januára. Približne desať dní po tomto termíne sa koná kolo školské a sezóna je zavŕšená krajským kolom, ktoré študentov potrápi zvyčajne v prvej polovici apríla.

Za vhodné tiež považujeme zmieniť, že žiadne kolo žiadneho ročníka MO sa nezaobíde bez geometrickej úlohy. Tie tak tvoria minimálne štvrtinu až polovicu všetkých úloh v danom ročníku. ŠVP pre gymnáziá však geometriu v prvom ročníku neobsahuje. Pohľad na olympiádne úlohy nám prezradí, že úlohy kategórie C nevyžadujú žiadne špeciálne geometrické vedomosti, je však vhodné so študentami osviežiť ich poznatky zo základnej školy a riešenie úloh z geometrie postupne trénovať.

Seminár je rozdelený na tri hlavné časti – pred termínom domáceho kola, medzi domácim a krajským kolom a po krajskom kole. Prvé dve časti sú usporiadané tak, aby sme sa v každej z nich dotkli väčšiny zo štyroch zmienených typov úloh MO, teda v každom z dvoch blokov sa budeme postupne venovať algebraickým výrazom a rovniciam (úpravy výrazov, riešenie (systémov) rovníc a dokazovanie nerovností), teórii čísel (deliteľnosť, prvočísla, ciferné zápisy) a geometrii, v druhom bloku seminár obsahuje aj stretnutia zamerané na kombinatorické úlohy. V treťom bloku sa so študentami začíname venovať úlohám kategórie B, keďže svoje pôsobenie v kategórii C krajským kolom ukončili. Zaradili sme dva geometrické semináre, dva algebraické semináre zamerané na to, čo by približne v rovnakom čase mali preberať študenti na vyučovacích hodinách, matematickú hru a opakovanie pod taktovkou samotných študentov.

Možnosťou, ktorú sme pri zaraďovaní obsahu jednotlivých stretnutí zvažovali, bolo rozdelenie celého školského roka do štyroch veľkých blokov, ktoré by zodpovedali štyrom oblastiam úloh MO. Tomuto variantu sme však nakoniec prednosť nedali, pričom hlavným dôvodom bolo, že sme chceli študentov pripraviť na čo najširšie spektrum úloh už pred domácim a školským kolom. Zároveň veríme, že vracanie sa k už načatým témam pomôže študentom lepšie si ich upevniť, preto sa nám rozdelenie popísané vyššie zdalo vhodnejšie.

Stručný prehľad obsahu seminárov

V tabuľke nižšie uvádzame konkrétne zamerania jednotlivých seminárov, ktoré vznikli na základe zohľadnenia poznatkov z predchádzajúcich štyroch odsekov. Tento stručný prehľad má poslúžiť ako počiatočná orientácia v kontexte celého školského roka. Konkrétnejší popis obsahu, spolu s úlohami, komentármi a domácou prácou je obsahom nasledujúcej kapitoly.

September		
1.	Úvod do seminára, *Matematico*	Základné informácie, očakávania, matematická hra.
2.	Ako riešiť I	Menová reforma v Tramtárii – samostatné matematické objavovanie.
3.	Ako riešiť II	Všeobecná diskusia o spôsobe riešenia úloh/problémov v matematike.
Október		
4.	Algebraické výrazy a rovnice I	Opakovanie vedomostí zo ZŠ, práca s výrazmi.
5.	Algebraické výrazy a rovnice II	Jednoduchšie nerovnosti.
6.	Algebraické výrazy a rovnice III	Rovnice a systémy rovníc.
7.	Teória čísel I	Opakovanie vedomostí zo ZŠ, deliteľnosť.
November		
8.	Teória čísel II	Najmenší spoločný násobok, najväčší spoločný deliteľ.
9.	Teória čísel III	Ciferné zápisy čísel.
10.	Geometria I	Opakovanie poznatkov zo ZŠ, správne riešenie geometrickej úlohy.
11.	Geometria II	Úlohy využívajúce podobnosť trojuholníkov a Pytagorovu vetu.
December		
12.	Geometria III	Úlohy o obsahoch.
13.	Geometria IV	Úlohy o kružnici vpísanej a opísanej trojuholníku.
14.	*Náboj*	Vianočná tímová súťaž v počítaní úloh.
Január		
15.	Domáce kolo MO	Analýza úloh domáceho kola.
16.	Konzultačný seminár	Konzultácia nejasností pred školským kolom MO.
17.	Školské kolo MO	Analýza úloh školského kola.
18.	Algebraické výrazy a rovnice IV	Nerovnosti – pokračovanie.
Február		
19.	Algebraické výrazy a rovnice V	Zložitejšie rovnice a sústavy rovníc
20.	Teória čísel IV	Úlohy o prvočíslach.
21.	Teória čísel V	Miš-maš.
Marec		
22.	Geometria V	Úlohy o štvoruholníkoch.
23.	Geometria VI	Netradičné geometrické úlohy.
24.	Súťaž *Náboj*	Účasť na medzinárodnej súťaži tímov.
25.	Rôzne I	Úlohy o mriežkach a šachovniciach.
Apríl		
26.	Rôzne II	Hľadanie víťaznej stratégie, logické úlohy.
27.	Krajské kolo MO	Analýza úloh krajského kola MO.

28.	Algebraické výrazy a rovnice VI	Sústavy rovníc, rovnice s parametrom.
29.	Algebraické výrazy a rovnice VII	Úlohy o kvadratických rovniciach využívajúce vzťahy medzi koreňmi.
Máj		
30.	Hra SET	Matematická hra, úlohy využívajúce kartičky z hry.
31.	Geometria VII	Stredové, obvodové a úsekové uhly, tetivové štvoruholníky.
32.	Geometria VIII	Výpočtové úlohy.
Jún		
33.	Opakovanie I	Opakovanie poznatkov zo školského roka v réžii študentov.
34.	Opakovanie II	Záverečné riešenie úloh, spätná väzba, uzavretie.

Záverom prvej kapitoly ešte poznamenajme, že veľkú väčšinu úloh v seminári tvoria úlohy prevzaté z rôznych kôl MO kategórie C. V ďalšom texte sú tieto úlohy jasne označené v tradičnom formáte značenia úloh MO, kde prvé číslo je príslušný ročník MO, ďalej kolo (I pre kolo domáce, S pre kolo školské a II pre kolo krajské) a číslo úlohy. Ak za číslom úlohy nasleduje ešte ďalší identifikátor, znamená to, že ide o príslušnú úlohu návodnú (N) alebo doplňujúcu (D). V poslednej štvrtine seminára sa zameriavame na úlohy kategórie B, tie majú pred číslom ročníka uvedené ešte písmeno B. Taktiež riešenia sú takmer vždy prevzaté z oficiálnych riešení (ktoré sú spolu so zadaniami voľne prístupné na stránkach MO [SKMO], [CZMO]). Prevzaté alebo len mierne upravené riešenia sú označené hviezdičkou *, pôvodné riešenia hviezdičku nemajú.

Kapitola 2

Osnovy seminárnych stretnutí

2.1 September

Seminár 1: Úvod do seminára, očakávania, *Matematico*

Ciele

Zoznámiť študentov s povahou seminára a plánom na školský rok, zoznámiť sa so študentami, motivovať na začiatok matematickou hrou.

Priebeh

Keďže ide o prvý seminár, oboznámime študentov s tým, čo môžu v priebehu roka od stretnutí očakávať: aká bude forma seminárov a čo bude ich obsahom. Zároveň považujeme za vhodné porozprávať sa so študentmi o ich motivácii – čo ich na seminár privádza a čo od neho očakávajú. Takáto informácia nám potom môže poslúžiť pri plánovaní alebo prispôsobovaní obsahu konkrétnej skupine, s ktorou budeme pracovať. Napríklad ak sa seminára budú účastniť v drvivej väčšine študenti s ambíciami na úspešné umiestnenie na Medzinárodnej matematickej olympiáde, je možné hravejšie semináre nahradiť náročnejšími matematickými partiami.

Po tomto úvode zaradíme matematicko-logickú hru *Matematico*, ktorá študentov otestuje v rýchlom a optimálnom rozhodovaní sa.

Pravidlá

Každý študent dostane tabuľku pozostávajúcu z 5×5 štvorčekov, do ktorej si bude zapisovať čísla, ktoré bude vedúci seminára postupne vyťahovať z balíčka. Balíček obsahuje 52 čísel, každé z čísel 1–13 sa v balíčku nachádza štyrikrát. Študenti majú vždy 7 sekúnd na to, aby číslo zapísali do práve jedného voľného políčka v tabuľke. Po vyplnení všetkých políčok si študenti spočítajú body podľa kľúča v tabuľke 2.1.

Jednotlivé výsledky študentov píšeme na tabuľu, aby bolo možné vidieť rozsah nahraných bodov. Aby si sa študenti s hrou poriadne zoznámili, je vhodné zahrať aspoň dve alebo tri kolá. Po nich povzbudíme študentov, aby so spolužiakmi prediskutovali stratégiu, ktorú počas hry používajú, čo sa im overilo a čo nie, príp. podľa akého kľúča zapisujú čísla do tabuľky a či stratégiu v priebehu hry menia. Po výmene skúseností opäť odohráme dve alebo tri kolá a sledujeme, či sa priemerný počet nahraných bodov zvýšil.

Po poslednom kole vyzveme študentov, aby sa použitím čísel, ktoré boli v tomto kole vytiahnuté z balíčka, snažili maximalizovať bodový zisk, t.j. daných 25 čísel majú usporiadať do tabuľky tak, aby

Číselná kombinácia	v riadku alebo stĺpci	na uhlopriečke
dve zhodné čísla	10	20
dva páry zhodných čísel	20	40
tri zhodné čísla	40	50
tri zhodné čísla a dve zhodné čísla	80	90
štyri zhodné čísla	160	170
päť za sebou idúcich čísel	50	60
tri jednotky a dve trinástky	100	110

Tabuľka 2.1: Body v hre *Matematico*

získali čo najviac bodov. Získané počty bodov pripíšeme na tabuľu porovnáme s predchádzajúcim kolom.

Zaujímavým pozorovaním je, že rozptyl bodov v takomto modifikovanom kole je značne menší ako v troch pôvodných. Môžeme sa so žiakmi porozprávať o dôvodoch, ktoré k tomu môžu viesť.

Na záver seminára môžeme študentov nechať maximalizovať bodový zisk použitím ľubovoľných čísel v ponuke a vyhlásiť súťaž o bonus.

Hra je dostupná aj online na [Matematico10], prípadne na [Matematico12].

Variácie

Študenti môžu *Matematico* hrať aj v dvojiciach. Takéto usporiadanie ponúka možnosť diskutovať rozhodnutia, ktoré študenti robia a trénuje ich argumentačné a vysvetľovacie schopnosti.

Záverečný komentár. Prvý seminár je časovo aj obsahovo menej hutný ako semináre nasledujúce, nie je to však nijako na škodu, keďže jeho zámer bol viac organizačný a informatívny, než matematický.

Seminár 2: Menová reforma v Tramtárii – samostatné objavovanie matematického problému

Ciele

Umožniť študentom zažiť proces riešenia otvoreného problému bez zjavného spôsobu riešenia a otvoriť diskusiu o tom, čo správne a úplné riešenie úlohy obsahuje.

Úvodný komentár

Cieľom tohto seminára nie je študentom predať isté konkrétne znalosti, ale dať im príležitosť zažiť si objavný riešiteľský proces. Sada úloh, ktoré sú na seminár pripravené, nie je typickým reprezentantom úloh MO, považujeme však za dôležité so študentmi precvičovať rozličné typy úloh. Zároveň tento seminár slúži na otvorenie diskusie o tom, čo obsahuje úplné a dôkladné riešenie matematickej úlohy.

Úlohy a riešenia

Úloha 2.1. [[BH82], úloha 43] V Tramtárii chcú zaviesť novú základnú peňažnú jednotku: toliar. V spojitosti s reformou sa vynorila otázka: aké majú mať hodnoty mince, ktoré pripraví mincovňa? Starí obyvatelia Tramtárie považovali 3 a 5 za šťastné čísla. Preto popredný historik navrhol, aby sa obmedzili na razenie troj- a päťtoliarových mincí. Svoj návrh zdôvodňoval takto: troj- a päťtoliarovými mincami možno vyplatiť hociktorú celočíselnú sumu a to skoro vždy presne, bez vrátenia. Ten, kto peniaze dostáva, musí niečo vrátiť iba vtedy, ak je vyplácaná suma 1, 2, 4 alebo 7 toliarov. Bola by to pravda?

Riešenie*. Úloha nie je ľahká: ak je tvrdenie pravdivé, tak naraz treba pre všetky celé čísla dokázať, že toľko toliarov možno vyplatiť troj- a päťtoliarovými mincami (v prípade 1, 2, 4 a 7 s vydaním, inak bez neho) – a ak to nie je pravda, tak o nejakom celom čísle treba dokázať, že toľko toliarov nemožno nijakým spôsobom vyplatiť (v prípade 1, 2, 4 a 7 ani s vydaním, inak bez vydania).

O to posledné sa márne pokúšame: naopak, ak vezmeme hocijaké celé číslo, po väčšom alebo menšom počte pokusov vždy nájdeme nejaký spôsob výplaty. To poukazuje na to, že tvrdenie je asi pravdivé.

Ale v tom prípade bude najúčelnejšie, ak celé čísla berieme radom a s každým jednotlivo sa o to pokúsime.

Napríklad 1 toliar možno vyplatiť tak, že z dvoch kusov trojtoliarnikových mincí vydáme päťtoliarnikovú. Stručne:

$$1 = 2 \cdot 3 - 5.$$

Podobne

$$2 = 5 - 3.$$

3 toliare možno vyplatiť jednou mincou. 4 toliare môžeme vyplatiť tak, že „zdvojnásobíme“ 2 toliare:

$$4 = 2 \cdot 5 - 2 \cdot 3.$$

5 toliarov možno vyplatiť jednou mincou, 6 toliarov dvoma trojtoliarnikovými mincami. $7 = 3 + 4$, preto 7 toliarov vyplatíme ako 4 toliare, ale pridáme navyše jednu trojtoliarovú mincu, teda vydáme o 1 menej:

$$7 = 2 \cdot 5 - 3.$$

8 toliarov zase môžeme vyplatiť zdvojnásobením 4, čiže $8 = 4 \cdot 5 - 4 \cdot 3$, to sa ale neoplatí, lebo existuje aj jednoduchší spôsob bez vydania:

$$8 = 5 + 3.$$

Tým sme sa dostali k najdôležitejšej hranici: podľa tvrdenia totiž, začínajúc od hodnoty 8, výplatu možno vyplatiť aj bez vydania.

Pretože aj tak nemôžeme do nekonečna pokračovať v pokusoch o spôsobe výplaty jednotlivých súm, začínajúc nejakým číslom musíme nájsť takú súvislosť (vzťah), ktorá zabezpečuje, že v postupnosti môžeme aj ďalej pokračovať. Čiže ak nejakú sumu toliarov môžeme vyplatiť, samozrejme bez vydania, tak môžeme vyplatiť aj sumu o 1 toliar väčšiu.

Predstavme si, že na stôl sme vyložili sumu n toliarov, ale sa ukáže, že nie toľko, ale $n+1$ toliarov máme vyplatiť. Ako vieme sumu zväčšiť o 1 toliar, keď nemáme jednotolirovú mincu?

Videli sme, že

$$1 = 2 \cdot 3 - 5.$$

Ak teda zo sumy na stole vezmeme jednu päťtoliarnikovú mincu a nahradíme ju dvoma trojtoliarnikovými, dosiahli sme svoj cieľ.

No dobre, ale čo urobíme v prípade, keď v tej hromade mincí, ktorou sme pôvodne chceli vyplatiť n toliarov, nie je päťtoliarniková (napr. pre $n = 9$ sme na stôl vyložili 3 trojtoliarnikové mince, alebo pre $n = 18$ je tam 6 trojtoliarnikových).

Aj v takomto prípade existuje východisko. Hodnotu 1 toliar možno dostať aj takto:

$$1 = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 3$$

a na tomto základe sumu vyloženú na stole môžeme zvýšiť o 1 toliar tak, že odoberieme 3 trojtoliarnikové mince a pridáme 2 päťtoliarnikové.

A aká je situácia, keď sa v pôvodne vyloženej sume nenachádza ani päťtoliarniková, ani 3 trojtoliarnikové mince? Tak tam môžu ležať najviac 2 trojtoliarnikové. Ak sme vyložili väčšiu sumu, tak sú tam aspoň 3 trojtoliarnikové mince, alebo aj jedna päťtoliarniková. (Teda suma, ktorá sa mala vyplatiť, je väčšia ako 6; ale 7 to nemôže byť, lebo 7 toliarov nemôžeme „vyložiť na stôl“, tie môžeme vyplatiť len s vydaním. Zato 8 – ako sme videli – už áno.)

Zhrňme teda podstatu našich úvah. Ak nejakú aspoň 8-toliarovú sumu „vyložíme na stôl“, tak v nej bude
a) buď 5-toliarniková minca,
b) alebo aspoň 3 trojtoliarové mince.

V prípade a) vezmeme päťtoliarnikovú mincu a nahradíme ju dvoma trojtoliarnikovými, v prípade b) vezmeme tri trojtoliarnikové a nahradíme ich dvoma päťtoliarnikovými.

Týmto spôsobom v obidvoch prípadoch, opierajúcich sa iba o vlastné mince, môžeme na stôl vyložiť aj o 1 toliar viac: vieme vyplatiť bez vydania.

Pretože pri 8 toliaroch už máme spôsob výplaty bez vydania, túto hodnotu – ak inak nie – opakovaním predošlých postov pri zväčšovaní o jednu, manipuláciu s mincami podľa a) alebo b) môžeme zvyšovať po hocijakú požadovanú hodnotu. Tramtárijský historik teda hovoril pravdu.

Poznámka. Uvedený postup sa nazýva „existenčný dôkaz“. Cieľom je dôkaz existencie spôsobu výplaty podľa tvrdenia. Spôsobom použitým v dôkaze môžeme teoreticky vyhľadať spôsob výplaty hociktorej sumy, ale v praxi je to dosť ťažkopádne. Ak by sme chceli výplatu 49 toliarov bez vydania uskutočniť touto metódou, tak by sa to stalo takto: na stôl by sme vyložili 8 toliarov v tvare $5+3$, potom by sme začali mince zamieňať. Situácia na stole sa bude meniť takto:

1 trojtoliar	1 päťtoliar	dovedna	8 toliarov,
3 trojtoliare	0 päťtoliarov	dovedna	9 toliarov,
0 trojtoliarov	2 päťtoliare	dovedna	10 toliarov,
2 trojtoliare	1 päťtoliar	dovedna	11 toliarov,
4 trojtoliare	0 päťtoliarov	dovedna	12 toliarov,
1 trojtoliar	2 päťtoliare	dovedna	13 toliarov, atď.

Je isté, že sa dostaneme aj po 49 toliarov, ale trvalo by to dosť dlho, pokiaľ by sme týmto spôsobom „vykúzlili“ požadovanú sumu. V praxi je užitočné to urobiť šikovnejšie.

Iné riešenie*. Spôsob výplaty pre 1 až 10 toliarov nájdeme tak ako v predchádzajúcom riešení. Pretože každé prirodzené číslo n dáva po delení tromi buď (I) zvyšok 0, alebo (II) zvyšok 1, alebo (III) zvyšok 2, teda ho možno napísať v tvare (I) $n = 3k$, alebo (II) $n = 3k+1$ alebo $n = 3k+2$ (k je prirodzené číslo alebo 0) a tak, ak $n > 10$, potom

v prípade (I) $n-9 = 3k-9 = 3(k-3)$,

v prípade (II) $n-10 = 3k+1-10 = 3k-9 = 3(k-3)$,

v prípade (III) $n-8 = 3k+2-8 = 3k-6 = 3(k-2)$

je to kladný celočíselný násobok troch, preto spôsob výplaty n toliarov dostaneme, ak k sume

v prípade (I) 9 toliarov,
v prípade (II) 10 toliarov,
v prípade (III) 8 toliarov,
pridáme potrebný počet trojtoliarov.

Komentár. Je pravdepodobné, že väčšina študentov bude zo začiatku skúšať jednotlivé možnosti, ako zaplatiť malé sumy a až potom sa bude snažiť svoje úvahy zovšeobecniť. Je vhodné študentom klásť otázky, ktoré budú študentov stimulovať k premýšľaniu, či sú ich závery skutočne správne. Ak by sa stalo, že študenti neprídu na druhé riešenie úlohy, bude určite zaujímavé im ho ukázať, keďže ide o veľmi elegantný spôsob, ako sa s úlohou vysporiadať.

Úloha 2.2. [[BH82], úloha 44] K návrhu z predchádzajúcej úlohy došiel upravujúci návrh. Istý občan píše: Uznávam síce, že troj- a päťtoliarovými mincami možno opísaným spôsobom naozaj zaplatiť každú sumu, ale sú to primalé hodnoty. Navrhujem, aby sa razili radšej päť- a osemtoliarové mince. Je zrejmé – zdôvodňoval ďalej –, že berúc do úvahy aj výdavok z peňazí, všetko, čo možno vyplatiť 3 a 5 toliarmi, možno vyplatiť aj 5 a 8 toliarmi. Tiež je zrejmé, že od istého čísla – vlastne v prípade väčších súm toliarov – ani tu netreba vrátiť mince. Je to skutočne také zrejmé?

Riešenie*. Všimnime si, že päťtoliar zostal bez zmeny, len trojtoliar nahradil osemtoliar.
Prvá časť tvrdenia je skutočne zrejmá. Pretože

$$3 = 8 - 5$$

a ak je aj vydanie povolené, tak vlastne nemáme nijaký problém: postupujeme ako pri troj- a päťtoliarových minciach.

Pravdivá je aj druhá časť – hoci to už nie je také samozrejmé. Na základe predošlého môžeme aj teraz použiť na pridanie 1 toliara „recepty“ z predchádzajúcej úlohy.

$$1 = 2\cdot 3 - 5 = 2(8-5) - 5 = 2\cdot 8 - 2\cdot 5 - 5 = 2\cdot 8 - 3\cdot 5,$$
$$1 = 2\cdot 5 - 3\cdot 3 = 2\cdot 5 - 3(8-5) = 2\cdot 5 - 3\cdot 8 + 3\cdot 5 = 5\cdot 5 - 3\cdot 8.$$

Teda nejakú sumu vieme zvýšiť o jeden toliar, ale pretože je reč o výplate „bez vydania“, tento rast musíme dosiahnuť výmenou, čiže už z vyložených peňazí musíme vedieť odobrať $3\cdot 5$ alebo $3\cdot 8$ toliarov.

Postupné pokračovanie je isté začínajúc sumou, keď je reč o toľkých toliaroch

1. koľko môžeme vyplatiť päťtoliarmi a osemtoliarmi bez vydania, a to tak, že buď paťtoliarov alebo osemtoliarov máme aspoň 3,
2. od ktorých viac bez najmenej 3 päťtoliarnikov alebo najmenej 3 osemtoliarov určite nevieme vyložiť.

Požiadavku 2 suma

$$26 = 2\cdot 5 + 2\cdot 8$$

a od toho väčšia určite spĺňa, ale požiadavku 1 nie. To platí aj o 27 toliaroch, avšak 28 už vyhovuje:

$$28 = 4\cdot 5 + 8.$$

Teda 28 toliarov možno vyplatiť aj bez vydania päťtoliarmi a osemtoliarmi. Vychádzajúc z toho platí, že ak istú (celočíselnú) sumu môžeme takto vyplatiť, potom môžeme vyplatiť aj sumu o 1 toliar väčšiu. Buď tak, že 3 paťtoliare nahradíme 2 osemtoliarmi alebo tak, že 3 osemtoliare nahradíme 5 päťtoliarmi.

Komentár. Úloha pravdepodobne nebude pre študentov veľmi náročná, zaujímavá však bude diskusia o tom, aká najväčšia suma sa ešte bez vydávania vyplatiť nedá.

Úloha 2.3. [[BH82], úloha 45] Diskusia, o ktorej sme v predchádzajúcich dvoch úlohách referovali, pokračovala aj ďalej. Boli aj takí, ktorí päť- a osemtoliarové mince považovali za primalé hodnoty a navrhovali väčšie. Návrhy na dve hodnoty toliarov boli napokon tieto:

a) 8 a 13,

b) 21 a 34,

c) 144 a 233.

Autori všetkých troch návrhov tvrdili, že týmito dvojicami hodnôt možno vyplatiť hocikoľko (celočíselných) súm toliarov a keď vyplácaná suma je dosť veľká, tak netreba ani vrátiť peniaze. Tvrdenie ktorého z týchto autorov je správne a ktorého nie?

Riešenie*. Čo zabezpečovalo v predchádzajúcej úlohe to, že môžeme aj naďalej súhlasne odpovedať?

To, že hodnota novej mince sa rovnala súčtu dvoch predošlých: $8 = 3+5$. Vynechanú hodnotu (trojtoliar) preto môžeme nahradiť rozdielom teraz používaných $3 = 8-5$.

Všetky tri tvrdenia sú pravdivé.

I. Práve tak, ako sme v predošlej úlohe prešli od trojtoliarov a päťtoliarov na paťtoliarové a osemtoliarové platidlá, tak môžeme z týchto prejsť na 8- a $8+5 = 13$-toliarové. Príslušný vzťah je $5 = 13-8$. S jeho pomocou z „receptov“ riešenia predošlej úlohy môžeme odvodiť nové a na ich základe môžeme napísať aj nové podmienky 1 a 2. Práve tak možno dokázať, že od istého čísla ďalej budú splnené.

II. Ak o hociktorých dvoch menových hodnotách, povedzme o a a b ($a < b$) je už dokázané, že pomocou nich možno vyplatiť hocijakú celočíselnú sumu toliarov, a t od určitého čísla začínajúc všetky väčšie už bez vydania, tak podľa predošlého textu možno dokázať, že to isté platí aj pre menové hodnoty b a $a+b$.

V konečnom dôsledku dôjdeme k tomu, že uvažované dve hodnoty môžu byť hociktoré dve po sebe idúce čísla Fibonacciho postupnosti:

$$1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,\ldots$$

Môžu to teda byť 8 a 13, 21 a 34 alebo 144 a 233 – tvrdenia uvedené v úlohe sú vo všetkých prípadoch splnené.

Úloha 2.4. [[BH82], úloha 46] Tri návrhy, ktoré sme uviedli v predchádzajúcej úlohe, neboli náhodné. Starí obyvatelia uctievali nielen čísla 3 a 5, ale aj všetky čísla Fibonacciho postupnosti. Pravdepodobne dospeli až k variáciám týchto čísel, pretože sa objavili aj také návrhy, aby hodnoty dvoch mincí boli

a) 2 a 8,

b) 3 a 21,

c) 21 a 144 toliarov.

Ktorý z týchto troch návrhov je vhodný na zaplatenie hocijakej (celočíselnej) sumy toliarov, dokonca tak, aby sa pri dostatočne veľkej sume nemuselo nič vrátiť?

Riešenie*. *Ani jedno.*

V prípade a) to môžeme hneď zbadať: totiž osemtoliar môžeme premeniť na 4 dvojtoliare. Ak by teda týmito dvoma hodnotami bolo možné vyplatiť hocijakú (celočíselnú) sumu, tak by sme ju mohli vyplatiť v samých dvojtoliaroch. To ale nie je pravda: dvojtoliarmi môžeme vyplatiť len párnu sumu toliarov. Vydanie v tomto prípade zrejme nemá význam.

Situácia je taká istá aj v prípade b): týmito dvoma hodnotami možno vyplatiť len takú sumu toliarov, ktorá je celočíselným násobkom troch (deliteľná troma bezo zvyšku).

Prípad c) je len zdanlivo zložitejší. Nakoľko totiž

$$21 = 7 \cdot 3, 144 = 48 \cdot 3, \tag{2.4.1}$$

tak obidve hodnoty môžeme premeniť na trojtoliare. Ak by týmito dvoma hodnotami bolo možné vyplatiť hociktorú sumu, tak by to bolo možné aj samými trjtoliarmi. To ale zrejme nie je pravda. Preto aj v c) navrhovanými hodnotami možno vyplatiť len takú sumu toliarov, ktorá je deliteľná 3.

Poznámka. Vhodnosť vymenovaných dvojíc hodnôt viditeľne prekazilo to, že 2 a 8 sú súčasne deliteľné 2, 3 a 21 zase 3. Nie je teda ťažké rozpoznať spoločnú matematickú podstatu všetkých troch prípadov: ak dve celé čísla majú spoločného deliteľa väčšieho ako 1, tak mince v príslušných hodnotách nie sú vhodné na výplatu hocijakej sumy (ani s vydaním).

Komentár. Prvá časť tejto úlohy je relatívne jednoduchá a mala by študentom pomôcť vyvodiť závery v častiach b) a c), kde najmä pre poslednú dvojicu nemusí byť na prvý pohľad zrejmé, že na vyplácanie ľubovoľnej sumy vhodná nie je.

Úloha 2.5. [[BH82], úloha 47] Diskusia o peňažnej reforme v Tramtárii nadobúdala čoraz väčšie rozmery. Mnohí jej účastníci tvrdili, že návrhy z úlohy 2.1 sa ukazujú byť správne, lebo rešpektujú aj poradie magických čísel, zatiaľ čo v úlohe 2.1 sú neúspešné, pretože toto pradie nerešpektovali. Ako skutočná bomba preto zapôsobil návrh, aby sa vydali mince v hodnote 4 a 11 toliarov. Ani jedna hodnota sa nenachádza medzi „magickými“ číslami! Napriek tomu autor tvrdil, že aj tieto hodnoty spĺňajú potrebné dve požiadavky: možno nimi vyplatiť hocijaké celočíselné množstvo toliarov a keď je táto suma dostatočne veľká, tak netreba ani nič vrátiť. Mal pravdu?

Riešenie*. *Áno.*

Nápad riešenia vyplýva z prvých dvoch úloh. Po krátkom skúšaní nie je ťažké prísť na to, že z 3 kusov štvortoliarov vydaním jedného jedenásťtoliara zvýši práve jeden toliar. Rovnaká je situácia, keď z 3 kusov jedenásťtoliarov vydáme 8 štvortoliarov.

Keďže

$$3 \cdot 4 - 1 \cdot 11 = 1 \quad \text{a} \quad 3 \cdot 11 - 8 \cdot 4 = 1, \tag{2.5.1}$$

po násobení oboch rovností číslom k dostaneme

$$3k \cdot 4 - k \cdot 11 = k \quad \text{a} \quad 3k \cdot 11 - 8k \cdot 4 = k.$$

Teda hocijaké (t.j. k) celočíselné množstvo toliarov môžeme vyplatiť hoci aj tak, že z trikrát takého počtu štvrotoliarov si vyberieme práve toľko jedenásťtoliarov, alebo aj tak, že z trikrát takého počtu jedenásťtoliarov vyberieme osemkrát toľko štvortoliarov.

Z rovnosti 2.5.1 vyplýva aj to, že 30 a viac toliarov môžeme vyplatiť aj bez vydania. Veď

$$30 = 2\cdot 11 + 2\cdot 4 \quad \text{a} \quad 31 = 11 + 5\cdot 4$$

a odtiaľ začínajúc už vždy môžeme zvyšovať počet toliarov buď tak, že jeden jedenásťtoliar zameníme za 3 štvortoliare alebo tak, že 8 štvortoliarov zameníme za 3 jedenásťtoliare. Totiž sumu 32 a viac toliarov môžeme vyplatiť len tak, ak buď je v nej jedenásťtoliar alebo aspoň 8 štvortoliarov.

Komentár. Úloha je náročnejšia v tom, že je otvorená a zo zadania nie je jasné, či máme tvrdenie vyvrátiť alebo dokázať. Bude tak zaujímavé sledovať, akými cestami a akými spôsobmi sa budú študentské riešenia odoberať. Ak sa v triede vyskytnú dva protikladné názory, je to výborná príležitosť nechať študentov argumentovať a hľadať chyby vo vlastných riešeniach.

Úloha 2.6. [[BH82], úloha 48] Veľká diskusia však odrazu skončila (práve vtedy, keď bola najživšia), pretože Národná banka Tramtárie na veľké prekvapenie oznámila, že zavedie dve platidlá: troj- a päťtoliarové mince. Koľkými spôsobmi možno nimi vyplatiť 49 toliarov bez vrátenia peňazí?

Riešenie*. Násobky piatich končia na 0 alebo 5. Teda ako od 49 odčítame číslo končiace na 0 alebo 5, vždy dostaneme číslo končiace na 9 alebo 4. Potom suma trojtoliarov bude také číslo, ktoré je menšie ako 49, končí sa na 4 alebo 9 a je (prirodzene) násobkom 3.

Takéto čísla sú len tri: 9, 24 a 39. Pri výplate 49 toliarov celková suma vyplatená trojtoliarmi môže byť len 9, 24 alebo 39 toliarov. Preto sú možné len tri spôsoby výplaty:

$$\begin{aligned} 3\cdot 3 + 8\cdot 5 &= 49,\\ 8\cdot 3 + 5\cdot 5 &= 49,\\ 13\cdot 3 + 2\cdot 5 &= 49. \end{aligned}$$

Komentár. Záverečná úloha seminára je relatívne jednoduchou bodkou, avšak trénuje systematický prístup k práci, preto jej zaradenie považujeme za vhodné.

Komentár. Na záver seminára je vhodné nechať si niekoľko (desiatok) minút času na otvorenie diskusie so študentmi. Mali by sme sa pobaviť o tom, čo správne riešenie úlohy obsahuje, aké typy poznáme a podobne. Nie je nutné prísť ku konkrétnym a špecifickým záverom, keďže téme sa budeme venovať ešte aj v nasledujúcom seminári.

Doplňujúce úlohy a materiály

V prípade, že študentov úlohy seminára zaujali, je možné ich odkázať na publikáciu [BH82], ktorá obsahuje ďalšie zovšeobecnenie riešených úloh a komentár o riešení diofantických rovníc.

Seminár 3: Prístup k riešeniu matematických úloh, typy dôkazov

Ciele

Prediskutovať so študentmi rôzne prístupy k riešeniu neznámych problémov, zopakovať a/alebo zoznámiť s typmi dôkazov používaných v matematike.

Priebeh

Seminár prebehne formou štrukturovanej diskusie, v ktorej so študentami rozoberieme korektný spôsob riešenia matematických úloh a problémov, zamyslíme sa nad tým, čo musí správne riešenie obsahovať a čoho sa, naopak, vyvarovať a vyzbrojíme študentov základnými stratégiami, ktoré môžu pri riešení úloh využiť.

Typy úloh

Pri riešení matematických problémov sa stretávame s dvoma základnými kategóriami: buď je úlohou dokázať (príp. vyvrátiť) dané tvrdenie, alebo nájsť objekty (čísla, tvary, výrazy, množiny bodov), ktoré vyhovujú zadanými podmienkam. Niekedy je úlohou nájsť aspoň jeden vhodný príklad, niekedy sa musia riešitelia popasovať s nájdením všetkých objektov majúcich vhodné vlastnosti.

Správne riešenie má…

V tejto časti seminára so študentmi prečítame zopár odsekov o riešení úloh z [KMS] a pozrieme na sa dve nesprávne riešenia úlohy o lodiach.

Nasledujúci text vo zvyšku tejto časti je (takmer) doslovným výťahom z rozsiahlejšieho textu „Ako riešiť“, dostupnom na [KMS].

Vyriešiť úlohu neznamená len nájsť výsledok. Treba taktiež dokázať, že nájdený výsledok je správny. (…) Pri riešení úloh je dôležité vedieť, kedy mám už úlohu dokončenú so všetkým, čo treba, a kedy mi k nej ešte niečo chýba.

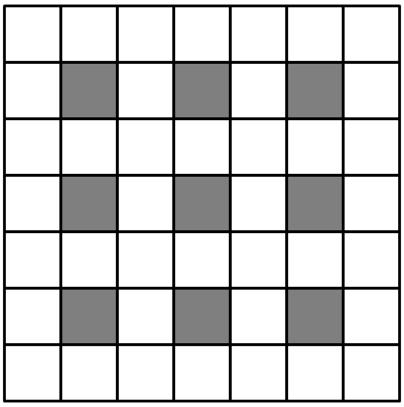
Opisuj svoje úvahy všeobecne. Veľa úloh (…) je formulovaných všeobecne. Treba v nich napríklad niečo dokázať pre všetky prirodzené čísla n (alebo niečo obdobné). Bežným postupom, ako prísť na riešenie takýchto úloh, je skúšať ich vyriešiť postupne pre n rovné $1, 2, 3, \ldots$ objaviť pri tom spoločné princípy a zovšeobecniť ich. Avšak nestačí do riešenia napísať, ako sa úloha rieši pre niekoľko malých hodnôt a zvyšok odbiť slovami a tak ďalej. Trénuj si pri riešení úloh všeobecné vyjadrenie, príde ti vhod počas strednej školy a neskôr aj počas vysokej.

Dokazuj veci poriadne, nie intuitívne. Častým nedostatkom riešení býva nedostatočné zdôvodnenie tvrdení, resp. zdôvodnenie len na intuitívnej úrovni. Veľmi častými pojmami, ktoré signalizujú intuitívne dokazovanie, sú tvrdenia: „Robíme to optimálne a preto to je najlepšie, ako sa dá.“ „Zoberieme si najhorší možný prípad…“ „Ak to spravíme inak, tak si len pohoršíme.“ Aby takéto pojmy mali význam v dôkazoch, musia byť riadne podložené matematickými pojmami. Väčšinou nám však len pomôžu na odhalenie správneho výsledku, ktorý potom už riadne bez nich dokážeme.

Príklad dôkazu, ktorý je založený na intuícii a nie je formálne správny, nasleduje.

Úloha 3.1. [Lode] Na pláne 7×7 hráme hru lode. Nachádza sa na ňom jedna loď $2 \times \times 3$. Môžeme vystreliť na ľubovoľné políčko plánu, a ak loď zasiahneme, hra končí. Ak nie, strieľame znova. Určte najmenší počet výstrelov, ktoré potrebujeme, aby sme s istotou loď zasiahli.

Pokus o riešenie 1*. Naším cieľom je strieľať čo najoptimálnejšie, aby sme použili čo najmenej výstrelov. Neoplatí sa nám preto strieľať na políčka pri sebe, lebo výstrely pri sebe pokryjú menej políčok ako výstrely ďalej od seba. Nesmieme však strieľať moc ďaleko od seba. Ak medzi dvoma výstrelmi sú aspoň dve políčka už sa tam môže zmestiť loď. Najlepšie teda bude, keď medzi susednými výstrelmi bude jedno voľné políčko. To vieme dosiahnuť vystrelením na políčka ako je znázornené na obrázku. Na to, aby sme s istotou zasiahli loď, potrebujeme najmenej 9 výstrelov. Na



Obr. 3.1.1

menej výstrelov to nie je možné, pretože sme strieľali najoptimálnejšie.

Rozbor riešenia.* Na prvý pohľad toto riešenie môže vyzerať výborne, avšak riešenie má vážny nedostatok - chýba mu zdôvodnenie, prečo nestačí menej ako 9 výstrelov. Ale prečo? Veď sa v riešení spomína, že menej výstrelov nestačí. Objavuje sa tu aj ďalší problém. Uvedené zdôvodnenia sú len veľmi vágne a len na intuitívnej úrovni. Poďme si to postupne rozobrať.

„Neoplatí sa nám preto strieľať na políčka pri seba...“ Slovíčko „neoplatí“ je znamením intuitívnych dôkazov. Aby malo v dôkaze význam, musí byť matematicky podložené. Ako je podložené tu? Riešiteľ síce opisuje, že výstrely pri sebe pokryjú menej políčok ako výstrely ďalej od seba, ale tu už matematické podklady končia. Riešiteľ nepíše, čo to znamená pokryť políčko. Znamená to, že doňho nesmie zasahovať loď, nesmie byť v ňom ľavý horný roh lode alebo niečo iné? Taktiež nezdôvodňuje, prečo počet pokrytých políčok bude menší. Patrilo by sa sem uviesť nejaký výpočet, že naozaj ten počet (tak ako ho máme definovaný) vyjde menší.

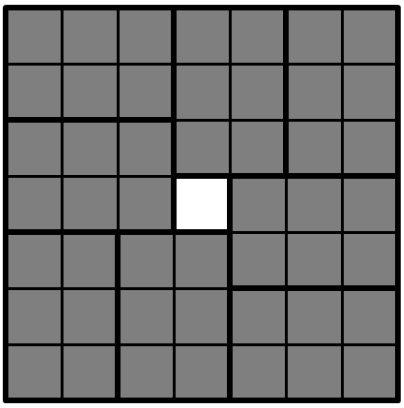
Ďalším problémom je, že riešiteľ sa pozerá na polohu iba dvoch políčok. Vo všeobecnosti neplatí, že lokálne najoptimálnejšie riešenie je najoptimálnejšie aj globálne. Môže sa nám stať (zatiaľ teoreticky), že dva výstrely nebudú umiestnené optimálne, ale to, čo pri nich stratíme, môžeme získať pri iných dvojiciach a môže nás to doviesť k ostro lepšiemu rozloženiu výstrelov ako keby sme sa snažili všetko spraviť „najoptimálnejšie“ na úrovni susedných výstrelov.

Uvedené riešenie teda iba intuitívne vysvetľuje, prečo je 9 najmenší počet výstrelov. Použitý postup je pre nás dobrý, keď sa snažíme nájsť políčka kam strieľať. Avšak z formálnej stránky to hodnote riešenia nepridáva a riešenie má rovnakú hodnotu, ako keby sme len v ňom uviedli obrázok s vetou, že 9 výstrelov stačí.

Z hľadiska formulácie riešenia je problém, že riešenie v sebe mieša dve časti: konštrukciu, že 9 výstrelov stačí a dôkaz, že menej nestačí. Síce toto nie je chyba, ktorá by sama o sebe zapríčinila stratu bodov. Ale rozčlenenie riešenia na dve časti vám pomôže si ujasniť, že každá z týchto častí je vyriešená úplne a nie len intuitívne.

Čo v tejto fáze riešenia? Rozhodne nie sme spokojní s tým, že úlohu máme. Keď máme pocit, že lepšie to už nejde, pustíme sa do dokazovania, že je to naozaj tak. Častokrát si táto fáza vyžaduje pozerať sa na úlohu z inej strany. To bude zrejme potrebné aj v našom prípade. Jednou našou možnosťou síce je matematicky podložiť naše úvahy, ale čaká nás niekoľko problémov. Ide hlavne o to, že sa chceme pozerať na to, ako musia byť umiestnené dva výstrely, čo nemusí stačiť, ako sme spomenuli vyššie.

Pokus o riešenie 2*. Na nasledujúcom obrázku vidíme 8 obdĺžnikov 2×3 rozmiestnených na plániku, ktoré sa neprekrývajú.



Obr. 3.1.2

Ak by sme mali menej ako 8 výstrelov, tak jeden z ôsmich obdĺžnikov nezasiahneme a zrovna tam sa môže nachádzať loďka. Potrebujeme teda do každého obdĺžnika vystreliť jeden výstrel. Musíme ich umiestniť zároveň tak, aby sa medzi ne nezmestila žiadna iná loď. Na to, aby sme s istotou zasiahli loď, potrebujeme najmenej 8 výstrelov.

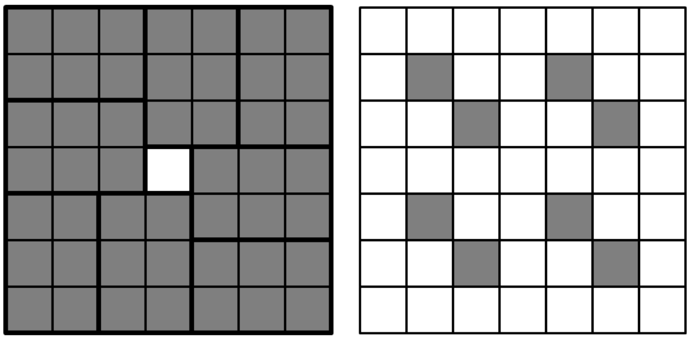
Rozbor riešenia.* Toto riešenie taktiež nie je úplné. Riešiteľ v ňom ukázal len, že potrebuje aspoň 8 výstrelov. Neukázal, že 8 výstrelov stačí. Hovorí iba v teoretickej rovine, že ak sa mu podarí tých 8 výstrelov vhodne umiestniť, tak budú stačiť. Ale je to naozaj možné? Čo ak z nejakého iného dôvodu 8 výstrelov stačiť nebude.

Spoločný rozbor.* Vidíme, že riešenia 1 a 2 majú rôzne výsledky, jedno tvrdí, že najmenej výstrelov je 9 a druhé 8. Jedno riešenie je teda nesprávne, ale ktoré? Ak sme pri riešení tejto úlohy v stave, že máme všetko, čo tieto dve riešenia spolu, tak vieme, že správnym riešením úlohy je 8 alebo 9 výstrelov. Pre dokončenie úlohy potrebujeme buď nájsť 8 políčok, na ktoré nám stačí vystreliť, alebo dokázať, že 8 výstrelov nestačí.

Na prekvapenie (možno nie pre všetkých je to prekvapenie) naozaj stačí 8 výstrelov. Všetky intuitívne argumenty v riešení 1 sú teda nesprávne. Na riešení uvedenom nižšie si môžete všimnúť, že nie je pravda, že sa neoplatí strieľať blízko seba. Stalo sa tu, pred čím sme varovali. Tým, že sme na niektorých miestach strieľali „neoptimálne“ zlepšilo situáciu inde a v konečnom dôsledku sme dosiahli lepšie riešenie.

Vzorové riešenie*. Ukážeme, že 8 je najmenší počet výstrelov, ktorý potrebujeme, aby sme s istotou zasiahli loď.

Na obrázku 3.1.3 vľavo vidíme, že môžeme na plán umiestniť 8 neprekrývajúcich sa obdĺžnikov



Obr. 3.1.3

2×3 (stredné políčko ostane prázdne). Aby sme s istotou zasiahli loď, musíme zasiahnuť aspoň jedno políčko v každom z ôsmich vyznačených obdĺžnikov, preto potrebujeme aspoň 8 výstrelov.

Na obrázku vpravo je uvedený príklad výberu ôsmych políčok, na ktoré stačí vystreliť, aby sa už mimo nich nedala na plán umiestniť žiadne loď 2×3. Preto týchto 8 výstrelov k zasiahnutiu lode vždy stačí.

Rozbor vzorového riešenia.* Táto úloha je pekným príkladom toho, ako sa to, čo je napísané v riešení, líši od toho, čím sme prechádzali pri riešení úlohy. Hoci je samotné riešenie úlohy krátke, úlohu sme veru krátko neriešili. Väčšina riešiteľov začne s deviatimi výstrelmi ako v pokuse 1 a potom sa postupne cez rôzne vylepšenia strieľania, rôzne pokusy o 8 výstrelov a ďalšie iné úvahy dostane k riešeniu s ôsmimi výstrelmi.

Všimnime si ďalej členenie riešenia. Najprv uvedieme, čo chceme ukázať (táto časť môže byť aj na konci) a vo zvyšku riešenia dokážeme, že naše riešenie je správne. Riešenie je pekne rozčlenené na dve časti podľa dvoch bodov, čo potrebujeme pri takejto úlohe ukázať (môžu byť aj vymenené). V prvej časti ukážeme, že potrebujeme aspoň 8 výstrelov. V druhej ukážeme, že 8 výstrelov nám naozaj stačí. Nie je tu žiadne premiešavanie týchto dvoch častí.

Komentár. V tejto časti seminára je možné so študentmi text vyššie spoločne prečítať a analyzovať. Zaujímavejšou a prínosnejšou sa však zdá byť možnosť, kedy študentom predostrieme vyššie spomenuté nesprávne pokusy o riešenie a spoločne budeme hľadať problematické miesta a diskutovať, ako ich vylepšiť.

Stratégie na začiatok

Častokrát sa stane, že úloha, pred ktorú sú študenti postavení, je náročná a nie je zrejmé, akým spôsobom sa pustiť do jej riešenia. Preto považujeme za vhodné predstaviť študentom štvoricu stratégií, ktoré im môžu pomôcť v začiatkoch riešenia problému. Tu uvedieme len stručné neformálne parafrázy, podrobnejší popis s príkladmi je vhodné nájsť v [Zei07]. Zaujímavejšia však bude diskusia so študentami o tom, či im navrhované prístupy pripadajú užitočné.

1. *Zorientujme sa.* Zistime, o čo sa v probléme jedná, čo je našou úlohou, či sme už podobnú úlohu niekedy riešili atď.

2. *Vyhrňme si rukávy a pusťme sa do práce.* Nebojme sa vyskúšať, ako sa problém správa pre nejaké malé hodnoty, hľadajme vzorce, systémy, podozrivé správanie.

3. *Predposledný krok.* Ako by mohol vyzerať predposledný krok, ktorý by nás doviedol k riešeniu? Ako sa k nemu dostať?

4. *Zjednodušujme.* Ako by vyzerala jednoduchšia verzia problému, s ktorou by sme sa vedeli popasovať? Aký je rozdiel medzi zložitým problémom, ktorý máme práce v rukách a jeho jednoduchšou variantou? Ako nám jednoduchší problém pomôže v riešení zložitejšieho?

Zároveň je vhodné sa k týmto stratégiám (ktoré samozrejme nie sú jediné) priebežne počas školského roka vracať, prípadne zoznam rozširovať o ďalšie.

Typy dôkazov

Ako sme už spomínali, úlohy je potrebné nielen vyriešiť, ale aj dokázať, že naše riešenie je skutočne správne, príp. že sme ozaj našli všetky riešenia. Dôkazových metód existuje množstvo, so študentmi považujeme za vhodné zopakovať tri základné metódy riešenia úloh (priamy dôkaz, dôkaz sporom, dôkaz použitím matematickej indukcie – len informatívne, pre riešenie úloh MO kategórie C nebude nevyhnutný), vhodne popísaných napr. v [Pol14].

Doplňujúce zdroje a materiály

Problematiku riešenia matematických problémov príjemne spracúvava [Hol10] a [Zei07], najmä úvodné kapitoly oboch publikácií. Taktiež na stánkach semináru *PraSe* je možné nájsť krátky textík[1].

2.2 Október

Seminár 4: Algebraické výrazy, rovnice a nerovnosti I – úprava výrazov

Ciele

Zopakovanie základných poznatkov o úprave algebraických výrazov a rovníc, ktoré by študenti mali po absolvovaní základnej školy ovládať, uplatnenie týchto poznatkov pri riešení jednoduchších úloh, úprava na štvorec.

Úvodný komentár

Na začiatku seminára spolu so študentami zopakujeme základné poznatky, ktoré sú nutnou podmienkou úspešného riešenia úloh v tomto a nasledujúcich troch seminároch. Študenti by mali[2]:

- ▷ vedieť, čo je výraz, mnohočlen, člen, koeficient,
- ▷ vedieť mnohočleny sčítať, odčítať, násobiť a v jednoduchších prípadoch aj deliť,
- ▷ ovládať spamäti vzorce pre druhú (príp. tretiu) mocninu dvojčlenu,
- ▷ vedieť rozkladať mnohočleny na súčin vynímaním alebo použitím vzorcov $(A \pm B)^2$, $A^2 - B^2$ (príp. $A^3 \pm B^3$),
- ▷ vedieť, čo je lineárna rovnica a diskutovať o počte jej riešení,
- ▷ vedieť riešiť ekvivalentnými úpravami lineárne rovnice.

---

[1] `https://mks.mff.cuni.cz/info/Jak.pdf`
[2] Spracované podľa [KHP00]

Úlohy a riešenia

Úloha 4.1. [65-I-3-N1] Pre ľubovoľné reálne čísla x, y a z dokážte nezápornosť hodnoty každého z výrazov

$$x^2z^2 + y^2 - 2xyz,\ x^2 + 4y^2 + 3z^2 - 2x - 12y - 6z + 13,\ 2x^2 + 4y^2 + z^2 - 4xy - 2xz$$

a zistite tiež, kedy je dotyčná hodnota rovná nule.

Riešenie*. Prvý výraz upravíme použitím vzorca $(A-B)^2$, kde $A = xz$ a $B = y$, čím dostaneme $x^2z^2 + y^2 - 2xyz = (xz - y)^2$. Keďže ide o druhú mocninu reálneho čísla, bude hodnota výrazu vždy nezáporná a rovnať sa nule bude v prípade $xz = y$.

Druhý výraz upravíme podobným spôsobom, obdržíme však súčet troch druhých mocnín: $x^2 + 4y^2 + 3z^2 - 2x - 12y - 6z + 13 = (x^2 - 2x + 1) + (4y^2 - 12y + 9) + 3(z^2 - 2z + 1) = (x-1)^2 + (2y-3)^2 + 3(z-1)^2$. Všetky tri sčítance sú nezáporné a teda aj ich súčet bude nezáporný a rovný nule bude v prípade, ak základy všetkých troch mocnín budú tiež rovné nule, teda $x = 1$, $y = \frac{3}{2}$ a $z = 1$.

Pohľad na posledné dva členy posledného výrazu nám napovie, že pravdepodobne opäť využijeme podobnú úpravu ako v predchádzajúcich prípadoch, základy mocnín však budú obsahovať dve premenné. Skutočne rozpísaním člena $2x^2 = x^2 + x^2$ a preusporiadaním poradia členov dostávame $(x^2 - 4xy + 4y^2) + (x^2 - 2xy + z^2)$, odkiaľ je už zrejmé, že výraz bude mať tvar súčtu dvoch druhých mocnín $(x-2y)^2 + (x-z)^2$. Výraz je vždy nezáporný a nulovú hodnotu nadobúda pre $x = 2y = z$.

Komentár. Cieľom úlohy je zopakovať použitie vzorcov $(A \pm B)^2$ v trochu menej priamočiarych mnohočlenoch než na aké je priestor v bežnom vyučovaní. Zároveň rozpísanie člena $2x^2$ na súčet dvoch rovnakých členov je trik, na ktorý je vhodné študentov upozorniť, keďže tento princíp nájde uplatnenie v nejednej úlohe.

Úloha 4.2. [63-I-1-N1-N4] a) Určte najmenšiu hodnotu výrazu $V = 5 + (x-2)^2$, $x \in \mathbb{R}$. Pre ktoré x ju výraz nadobúda?
b) Určte najmenšiu možnú hodnotu výrazu $W = 9 - ab$, kde a, b sú reálne čísla spĺňajúce podmienku $a + b = 6$. Pre ktoré hodnoty a, b je W minimálne?
c) Určte najmenšiu možnú hodnotu výrazu $Y = 12 - ab$, kde a, b sú reálne čísla spĺňajúce podmienku $a + b = 6$. Pre ktoré hodnoty a, b je Y minimálne?
d) Určte najväčšiu možnú hodnotu výrazu $K = 5 + ab$, kde a, b sú reálne čísla spĺňajúce podmienku $a + b = 8$. Pre ktoré hodnoty a, b je K maximálne?

Riešenie.

a) Výraz $(x-2)^2$ je pre všetky reálne čísla x nezáporný, jeho minimálna hodnota tak je 0, v prípade $x = 2$. Najmenšia hodnota výrazu V je potom 5.

b) Z podmienky vyjadríme premennú a pomocou premennej b, teda $a = 6 - b$, dosadíme do W a upravíme použitím vzorca $(A-B)^2$: $W = 9 - ab = 9 - (6-b)b = (b-3)^2$. Hodnota výrazu W je tak vždy nezáporná a $W_{min} = 0$, čo nastane pre $b = 3$ a $a = 3$.

c) Všimneme si, že $Y = W + 3$ a keďže aj podmienka je v tomto prípade rovnaká, platí $Y = (b-3)^2 + 3$. Potom $Y_{min} = 3$ pre $a = 3$ a $b = 3$.

d) Podobne ako v predchádzajúcich častiach, vyjadríme z podmienky premennú a pomocou premennej b: $a = 8 - b$ a dosadíme do výrazu K: $K = 5 + 8a - a^2 = -(a-4)^2 + 21$, kde sme využili tzv. úpravu na štvorec. Vidíme, že časť $-(a-4)^2$ je vždy nekladná, preto $K_{max} = 21$ pre $a = b = 4$.

Komentár. V častiach c) a d) predchádzajúcej úlohy sme využili tzv. úpravu výrazu na štvorec. Aj napriek tomu, že tento úkon je v ŠVP zaradený až v neskoršej časti školského roka (v časti o kvadratických rovniciach), považujeme za vhodné študentov s metódou zoznámiť už teraz. Je totiž prirodzene spojená s úpravami výrazov, jej pochopenie je možné aj bez širších znalostí riešenia kvadratických rovníc a v úlohách MO nájde uplatnenie často.

Úloha 4.3. [63-I-1] Určte, akú najmenšiu hodnotu môže nadobúdať výraz $V = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$, ak reálne čísla a, b, c spĺňajú dvojicu podmienok

$$\begin{aligned} a + 3b + c &= 6, \\ -a + b - c &= 2. \end{aligned}$$

Riešenie*. Sčítaním oboch rovníc z podmienky zistíme, že $b = 2$. Dosadením za b do niektorej z nich vyjde $c = -a$. Platí teda $V = (a-2)^2 + (2+a)^2 + (-2a)^2$. Po umocnení a sčítaní zistíme, že $V = 6a^2 + 8 \geq 8$. Rovnosť nastane práve vtedy, keď $a = 0$, $b = 2$ a $c = 0$.

Hľadaná najmenšia hodnota výrazu V je teda rovná 8.

Komentár. Riešenie úlohy vyžaduje prácu so sústavou dvoch rovníc, avšak manipulácia tejto sústavy nie je až taká zložitá, takže zaradenie úlohy bez toho, aby sme sa systematicky venovali riešeniu sústav rovníc, nepokladáme za problematické.

Úloha 4.4. [63-S-1] Určte, aké hodnoty môže nadobúdať výraz $V = ab + bc + cd + da$, ak reálne čísla a, b, c, d spĺňajú dvojicu podmienok

$$\begin{aligned} 2a - 5b + 2c - 5d &= 4, \\ 3a + 4b + 3c + 4d &= 6. \end{aligned}$$

Riešenie*. Pre daný výraz V platí

$$V = a(b+d) + c(b+d) = (a+c)(b+d).$$

Podobne môžeme upraviť aj obe dané podmienky:

$$2(a+c) - 5(b+d) = 4 \quad \text{a} \quad 3(a+c) + 4(b+d) = 6. \tag{4.4.1}$$

Ak teda zvolíme substitúciu $m = a + c$ a $n = b + d$, dostaneme riešením sústavy 4.4.1 $m = 2$ a $n = 0$. Pre daný výraz potom platí $V = mn = 0$.

Záver. Za daných podmienok nadobúda výraz V iba hodnotu 0.

Iné riešenie*. Podmienky úlohy si predstavíme ako sústavu rovníc s neznámymi a, b a parametrami c, d. Vyriešením tejto sústavy (sčítacou alebo dosadzovacou metódou) vyjadríme $a = 2 - c, b = -d$ $(c, d \in \mathbb{R})$ a po dosadení do výrazu V dostávame

$$V = (2-c)(-d) - dc + cd + d(2-c) = 0.$$

Komentár. Zadanie úlohy opäť obsahuje sústavu dvoch rovníc. Jej riešenie sa však po substitúcii zredukuje na veľmi jednoduchú sústavu, s ktorou sa študenti stretli už na základnej škole, takže by nemala spôsobiť výrazné problémy.

Úloha 4.5. [65-I-3]

a) Nájdite všetky reálne čísla x a y, pre ktoré daný výraz nadobúda svoju najmenšiu hodnotu.

b) Určte všetky dvojice celých nezáporných čísel x a y, pre ktoré je hodnota daného výrazu rovná číslu 16.

Riešenie*. Daný výraz $V(x,y)$ upravme podľa vzorcov pre $(A \pm B)^2$:

$$V(x,y) = x^2 - 2xy + y^2 + x^2 + 2x + 1 + 3 = (x-y)^2 + (x+1)^2 + 3.$$

a) Prvé dva sčítance v poslednom súčte sú druhé mocniny, majú teda nezáporné hodnoty. Minimum určite nastane v prípade, keď pre niektoré x a y budú oba základy rovné nule (v tom prípade pre inú dvojicu základov už bude hodnota výrazu $V(x,y)$ väčšia). Obe rovnosti $x - y = 0$, $x + 1 = 0$ súčasne naozaj nastanú, a to zrejme iba pre hodnoty $x = y = -1$. Dodajme (na to sa zadanie úlohy nepýta), že $V_{min} = V\ (-1,-1) = 3$. Daný výraz tak nadobúda svoju najmenšiu hodnotu iba pre $x = y = -1$.

b) Podľa úpravy z úvodu riešenia platí

$$V(x,y) = 16 \Leftrightarrow (x-y)^2 + (x+1)^2 + 3 = 16 \Leftrightarrow (x-y)^2 + (x+1)^2 = 13.$$

Oba sčítance $(x-y)^2$ a $(x+1)^2$ sú (pre celé nezáporné čísla x a y) z množiny $\{0,1,4,9,16,\ldots\}$. Jeden preto zrejme musí byť 4 a druhý 9. Vzhľadom na predpoklad $x \geq 0$ je základ $x+1$ mocniny $(x+1)^2$ kladný, musí preto byť rovný 2 alebo 3 (a nie -2 či -3). V prvom prípade, t. j. pre $x = 1$, potom pre základ mocniny $(x-y)^2$ dostávame podmienku $1 - y = \pm$, teda $y = 1 \pm 3$, čiže $y = 4$ (hodnota $y = -2$ je zadaním časti b) vylúčená). V druhom prípade, keď $x = 2$, dostaneme podobne z rovnosti $x - y = 2 - y = \pm 2$ dve vyhovujúce hodnoty $y = 0$ a $y = 4$. Celkovo teda všetky hľadané dvojice (x,y) sú $(1,4), (2,0)$ a $(2,4)$.

Komentár. Záverečná úloha stavia na poznatkoch z predchádzajúcich úloh, avšak vyžaduje dodatočnú analýzu, preto sme ju zvolili ako vyvrcholenie prvého algebraického seminára.

Domáca práca

Úloha 4.6. [65-II-1] Nájdite najmenšiu možnú hodnotu výrazu

$$3x^2 - 12xy + y^4,$$

v ktorom x a y sú ľubovoľné celé nezáporné čísla.

Riešenie*. Označme daný výraz V a upravme ho dvojakým doplnením na štvorec:

$$V = 3x^2 - 12xy + y^4 = 3(x-2y)^2 - 12y^2 + y^4 = 3(x-2y)^2 + (y^2-6)^2 - 36.$$

Zrejme platí $(x-2y)^2 \geq 0$, takže najmenšiu hodnotu výrazu V pri pevnom y dostaneme, keď položíme $x = 2y$. Ostáva preto nájsť najmenšiu možnú hodnotu mocniny $(y^2-6)^2$ s nezápornou celočíselnou premennou y. Keďže $y^2 \in \{0,1,4,9,16,25,\ldots\}$ a číslo 6 padne medzi čísla 4 a 9 tejto množiny, platí pre každé celé číslo y nerovnosť

$$(y^2-6)^2 \geq \min((4-6)^2,(9-6)^2) = \min\{4,9\} = 4.$$

Pre ľubovoľné celé čísla x a y tak dostávame odhad

$$V \geq 3 \cdot 0 + 4 - 36 = -32,$$

pritom rovnosť $V = -32$ nastáva pre $y = 2$ a $x = 2y = 4$.
Záver. Hľadaná najmenšia možná hodnota daného výrazu je -32.

Úloha 4.7. [65-I-3-D1, resp. B-61-S-1] V obore celých čísel vyriešte rovnicu

$$x^2 + y^2 + x + y = 4.$$

Riešenie*. Vynásobením oboch strán danej rovnice štyrmi dostaneme

$$4x^2 + 4y^2 + 4x + 4y = 16.$$

Výraz na ľavej strane takto upravenej rovnice doplníme na súčet druhých mocnín dvoch dvojčlenov. Obdržíme tak

$$(4x^2 + 4x + 1) + (4y^2 + 4y + 1) = (2x+1)^2 + (2y+1)^2 = 18.$$

Stačí teda vyšetriť všetky rozklady čísla 18 na súčet dvoch kladných nepárnych čísel, pretože čísla $2x+1$ a $2y+1$ nie sú deliteľné dvoma pre žiadne celé x a y.

Uvažujme preto nasledujúce rozklady:

$$18 = 1 + 17 = 3 + 15 = 5 + 13 = 7 + 11 = 9 + 9.$$

Medzi uvedenými súčtami je iba jeden (18 = 9 + 9) súčtom druhých mocnín dvoch celých čísel. Môžu teda nastať nasledujúce štyri prípady:

$$\begin{array}{lll}
2x+1 = 3, & 2y+1 = 3, & \text{t. j. } x = 1, y = 1, \\
2x+1 = 3, & 2y+1 = -3, & \text{t. j. } x = 1, y = -2, \\
2x+1 = -3, & 2y+1 = 3, & \text{t. j. } x = -2, y = 1, \\
2x+1 = -3, & 2y+1 = -3, & \text{t. j. } x = -2, y = -2.
\end{array}$$

Záver. Danej rovnici vyhovujú práve štyri dvojice celých čísel (x,y), a to $(1,1)$, $(1,-2)$, $(-2,1)$ a $(-2,-2)$.

Iné riešenie*. Danú rovnicu možno upraviť na tvar $x(x+1) + y(y+1) = 4$, z ktorého vidno, že číslo 4 je nutné rozložiť na súčet dvoch celých čísel, z ktorých každé je súčinom dvoch po sebe idúcich celých čísel. Keďže najmenšie hodnoty výrazu $t(t+1)$ pre kladné aj záporné celé t sú 0, 2, 6, $12, \ldots$, do úvahy prichádza iba rozklad $4 = 2 + 2$, takže každá z neznámych x, y sa rovná jednému z čísel 1 či -2 – jediných celých čísel t, pre ktoré $t(t+1) = 2$. Navyše je jasné, že naopak každá zo štyroch dvojíc (x,y) zostavených z čísel $1, -2$ je riešením danej úlohy.

Doplňujúce zdroje a materiály

V prípade, že na seminári zistíme, že študenti potrebujú získať zručnosť v rozkladaní výrazov na súčin, je možné odkázať ich na rôzne stredoškolské zbierky príkladov, napr. [KHP00] alebo [BC99], kde nájdu dostatočné množstvo príkladov na precvičenie.

Seminár 5: Algebraické výrazy, rovnice a nerovnosti II – nerovnosti

Ciele

Zoznámiť študentov so základnými metódami pri dokazovaní nerovností a nerovnosťou $a + \frac{1}{a} \geq 2$, ktorá platí pre každé kladné reálne číslo a.

Úvodný komentár

Dokazovanie nerovností nie je bežným obsahom základoškolskej, príp. gymnaziálnej výuky, keďže študenti sa stretávajú prevažne s cvičeniami a problémami, kde je ich úlohou riešiť (lineárne) nerovnice. Dokazovanie nerovností je však častou súčasťou všetkých kôl MO, preto považujeme za vhodné tieto typy úloh so študentami precvičovať. Keďže je tento seminár jedným z dvoch, ktoré sú na nerovnosti zamerané, budeme sa v ňom zaoberať jednoduchšími úlohami. Študenti si tak osvoja základné postupy, ktoré im neskôr (snáď) poslúžia pri úlohách zložitejších, zaradených do seminára v budúcnosti.

Úlohy a riešenia

Úloha 5.1. [58-S-1] Dokážte, že pre ľubovoľné nezáporné čísla a, b, c platí

$$(a+bc)(b+ac) \geq ab(c+1)^2.$$

Zistite, kedy nastane rovnosť.

Riešenie*. Roznásobením a ďalšími ekvivalentnými úpravami dostaneme

$$\begin{aligned} ab+b^2c+a^2c+abc^2 &\geq abc^2+2abc+ab, \\ b^2c+a^2c &\geq 2abc, \\ (a-b)^2c &\geq 0. \end{aligned}$$

Podľa zadania platí $c \geq 0$ a druhá mocnina reálneho čísla $a-b$ je tiež nezáporná, takže je nezáporná aj ľavá strana upravenej nerovnosti. Rovnosť v tejto (a rovnako aj v pôvodnej nerovnosti) nastane práve vtedy, keď $a-b=0$ alebo $c=0$, teda práve vtedy, keď je splnená aspoň jedna z podmienok $a=b$, $c=0$.

Komentár. Úloha demonštruje jeden zo základných spôsobov dokazovania nerovností: úpravu výrazu na jednej strane nerovnosti na tvar, o ktorom s určitosťou vieme, že je nezáporný/nekladný a jeho porovnanie s nulou. Taktiež si študenti precvičia ekvivalentné úpravy nerovností a úpravy výrazov do tvaru súčinu.

Úloha 5.2. [66-I-1-N1] Dokážte, že pre ľubovoľné reálne čísla x, y a z platia nerovnosti

a) $2xyz \leq x^2+y^2z^2$,

b) $(x^2-y^2)^2 \geq 4xy(x-y)^2$.

Riešenie. a) Prevedieme výraz $2xyz$ na pravú stranu nerovnosti a upravíme pomocou vzorca $A^2 - 2AB - B^2 = (A-B)^2$ na tvar $0 \leq (x-yz)^2$, ktorý je pravdivým výrokom, keďže druhá mocnina ľubovoľného výrazu je vždy nezáporná.

b) Výraz z pravej strany nerovnosti prevedieme na opačnú stranu a upravíme nasledujúcim spôsobom:

$$\begin{aligned} ((x-y)(x+y))^2 - 4xy(x-y)^2 &\geq 0, \\ (x-y)^2(x+y)^2 - 4xy(x-y)^2 &\geq 0, \\ (x-y)^2((x+y)^2 - 4xy) &\geq 0, \\ (x-y)^2(x+2xy+y^2-4xy) &\geq 0, \\ (x-y)^4 &\geq 0. \end{aligned}$$

Posledná nerovnosť je zrejme pravdivým tvrdením a pôvodná nerovnosť je tak dokázaná.

Komentár. Úloha neprináša žiadny nový princíp, je však dobrým tréningom práce s upravovaním výrazov, podobne ako úloha nasledujúca.

Úloha 5.3. [66-I-1-N2] Dokážte, že pre ľubovoľné kladné čísla a, b platí nerovnosť

$$\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

Riešenie*. Nerovnosť zo zadania ekvivalentne upravíme. Vynásobíme celú nerovnosť kladným výrazom a^2b^2. Ľavú stranu a^3+b^3 upravíme na súčin pomocou vzorca $a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$, pravú stranu ab^2+a^2b upravíme na súčin vyňatím výrazu ab na tvar $ab(a+b)$. Dostaneme tak nerovnosť $(a+b)(a^2-ab+b^2) \geq ab(a+b)$. Tá po vydelení kladným výrazom $a+b$ a úprave na súčin dostane tvar $(a-b)^2 \geq 0$, ktorý je zrejme pravdivým tvrdením.

Komentár. Úloha využíva rovnaký princíp ako prechádzajúce dve. Prvýkrát však pri úprave využívame násobenie a delenie výrazmi. Tým sa z úlohy stáva dobrá príležitosť na pripomenutie faktu, že pri úprave nerovností musíme brať do úvahy (ne)zápornosť výrazov, ktoré pri takýchto úkonoch využívame.

Komentár. Ďalším z užitočných nástrojov pri dokazovaní nerovností je znalosť nerovnosti $u + \frac{1}{u} \geq 2$ pre každé kladné reálne číslo u, pričom táto nerovnosť prechádza v rovnosť len pre $u = 1$. Dokázanie tohto faktu nie je zložité: vynásobením celej nerovnosti u, prevedením všetkých členov na jednu stranu dostávame $(u-1)^2 \geq 0$, čo je pravdivé tvrdenie. Nasledujúce úlohy sú zaradené ako tréning uplatnenia tejto nerovnosti.

Úloha 5.4. [62-I-2-N1] Dokážte nerovnosť

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{cd} \geq \frac{8}{(a+b)(c+d)}$$

pre ľubovoľné kladné čísla a, b, c, d.

Riešenie. Celú nerovnosť vynásobíme kladným výrazom $(a+b)(c+d)$ a použitím ekvivalentných úprav upravíme nasledovne.

$$\frac{(a+b)(c+d)}{ab}+\frac{(a+b)(c+d)}{cd}\geq 8,$$
$$\frac{ac+ad+bc+bd}{ab}+\frac{ac+ad+bc+bd}{cd}\geq 8,$$
$$\frac{c}{b}+\frac{d}{b}+\frac{c}{a}+\frac{d}{a}+\frac{a}{d}+\frac{a}{c}+\frac{b}{d}+\frac{b}{c}\geq 8.$$

Všimneme si, že ľavá strana obsahuje štyri páry súčtov navzájom obrátených zlomkov:

$$\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{a}{d}+\frac{d}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{b}{d}+\frac{d}{b}\right)\geq 8.$$

Sčítaním štyroch nerovností v tvare $u+\frac{1}{u}\geq 2$, ktoré platia pre každé kladné reálne u, kde v našom prípade je u postupne $\frac{a}{c}$, $\frac{a}{d}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{b}{d}$ potom dostaneme tvrdenie, ktoré sme chceli dokázať.

Úloha 5.5. [66-I-1] Dokážte, že pre ľubovoľné reálne číslo a platí nerovnosť

$$a^2+\frac{1}{a^2-a+1}\geq a+1.$$

Určte, kedy nastáva rovnosť.

Riešenie*. Úpravou dvojčlena a^2-a doplnením na štvorec a využitím faktu že druhá mocnina reálneho čísla je nezáporná ukážeme, že menovateľ zlomku v nerovnosti je kladný:

$$a^2-a+1=\left(a^2-a+\frac{1}{4}\right)+\frac{3}{4}=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geq\frac{3}{4}>0.$$

Ak ním teda obe strany dokazovanej nerovnosti vynásobíme, dostaneme ekvivalentnú nerovnosť

$$a^2(a^2-a+1)+1\geq(a+1)(a^2-a+1).$$

Po roznásobení a zlúčení rovnakých mocnín a dôjdeme k nerovnosti

$$a^4-2a^3+a^2\geq 0,$$

ktorá však platí, pretože jej ľavá strana má rozklad $a^2(a-1)^2$ s nezápornými činiteľmi a^2 a $(a-1)^2$. Tým je pôvodná nerovnosť pre každé reálne číslo a dokázaná. Zároveň sme zistili, že rovnosť vo výslednej, a teda aj v pôvodnej nerovnosti nastane práve vtedy, keď platí $a^2(a-1)^2=0$, teda jedine vtedy, keď $a=0$ alebo $a=1$.

Iné riešenie*. Danú nerovnosť môžeme prepísať na tvar

$$(a^2-a+1)+\frac{1}{a^2-a+1}\geq 2 \quad \text{čiže} \quad u+\frac{1}{u}\geq 2,$$

pričom $u=a^2-a+1$. Využitím faktu, že posledná nerovnosť platí pre každé kladné reálne číslo u a že prechádza v rovnosť jedine pre $u=1$.

Na dôkaz pôvodnej nerovnosti ostáva už len overiť, že výraz $u=a^2-a+1$ je kladný pre každé reálne číslo a. To možno spraviť rovnako ako v prvom riešení, alebo prepísať nerovnosť $a^2-a+1>0$ na tvar

$$a(a-1)>-1$$

a uskutočniť krátku diskusiu: Posledná nerovnosť platí ako pre každé $a \geq 1$, tak pre každé $a \leq 0$, lebo v oboch prípadoch máme dokonca $a(a-1) \geq 0$; pre zvyšné hodnoty a, teda pre $a \in (0,1)$, je súčin $a(a-1)$ síce záporný, avšak určite väčší ako -1, pretože oba činitele a, $a-1$ majú absolútnu hodnotu menšiu ako 1. Prepísaná nerovnosť je tak dokázaná pre každé reálne číslo a, a tým je podmienka pre použitie nerovnosti $u+\frac{1}{u} \geq 2$ pre $u = a^2+a+1$ overená.

Ako sme už uviedli, rovnosť $u+\frac{1}{u} = 2$ nastane jedine pre $u = 1$. Pre rovnosť v nerovnosti zo zadania úlohy tak dostávame podmienku $a^2-a+1 = 1$, čiže $a(a-1) = 0$, čo je splnené iba pre $a = 0$ a pre $a = 1$.

Komentár. Úloha využíva spojenie viacerých poznatkov – faktu, že druhá mocnina akéhokoľvek reálneho čísla je nezáporná, úpravu na štvorec, ekvivalentné úpravy nerovností a tiež známu nerovnosť $u+\frac{1}{u} \geq 2$ pre každé kladné reálne u. Je síce náročnejšia ako úlohy, ktorými sme sa doteraz zaoberali, ale považujeme ju za vhodnú ilustráciu toho, ako nám rozšírený arzenál metód pomôže v úspešnom zvládnutí zložitejších problémov. Úloha tiež demonštruje, že k správnemu riešeniu častokrát vedú viaceré cesty.

Úloha 5.6. [59-I-5] Dokážte, že pre ľubovoľné kladné reálne čísla a,b platí

$$\sqrt{ab} \leq \frac{2(a^2+3ab+b^2)}{5(a+b)} \leq \frac{a+b}{2},$$

a pre každú z oboch nerovností zistite, kedy prechádza na rovnosť.

Riešenie*. Pravá nerovnosť je ekvivalentná s nerovnosťou

$$4(a^2+3ab+b^2) \leq 5(a+b)^2,$$

ktorú možno ekvivalentne upraviť na nerovnosť $a^2+b^2-2ab = (a-b)^2 \geq 0$. Tá je splnená vždy a rovnosť v nej nastane práve vtedy, keď $a = b$.

Z ľavej nerovnosti odstránime zlomky a umocníme ju na druhú,

$$25ab(a^2+2ab+b^2) \leq 4(a^4+9a^2b^2+b^4+6a^3b+6ab^3+2a^2b^2),$$
$$25ab(a^2+b^2)+50a^2b^2 \leq 4a^4+4b^4+44a^2b^2+24ab(a^2+b^2),$$

takže po úprave dostaneme ekvivalentnú nerovnosť

$$4a^4+4b^4-6a^2b^2 \geq ab(a^2+b^2).$$

Po odčítaní výrazu $2a^2b^2$ od oboch strán nerovnosti sa nám podarí na oboch stranách použiť úpravu na štvorec. Dostaneme tak (opäť ekvivalentnú) nerovnosť

$$4(a^2-b^2)^2 \geq ab(a-b)^2.$$

Rozdiel štvorcov v zátvorke na ľavej strane ešte rozložíme na súčin a vzťah upravíme na tvar $4(a-b)^2(a+b)^2 \geq ab(a-b)^2$.

Ak $a = b$, platí rovnosť. Ak $a \neq b$, môžeme poslednú nerovnosť vydeliť kladným výrazom $(a-b)^2$ a dostaneme tak nerovnosť $4(a+b)^2 \geq ab$, čiže $4a^2+4b^2+7ab \geq 0$. Ľavá strana tejto nerovnosti je vždy kladná, preto vyšetrovaná nerovnosť platí pre všetky kladné čísla a,b, pričom rovnosť v nej nastane práve vtedy, keď $a = b$.

Komentár. Táto úloha prvýkrát prináša sústavu nerovností a je vhodné so študentmi zopakovať, ako k dokazovaniu sústav nerovností pristupujeme: musíme dokázať riešenie každej nerovnosti zvlášť. V priebehu riešenia opäť využijeme úpravu na štvorec a nezápornosť druhej mocniny reálneho čísla. Úloha sa dá riešiť ešte iným spôsobom, ten si však ukážeme v ďalšom seminári zameranom na nerovnosti.

Domáca práca

Úloha 5.7. [59-II-2] Dokážte, že pre ľubovoľné čísla a, b z intervalu $\langle 1, \infty)$ platí nerovnosť

$$(a^2+1)(b^2+1)-(a-1)^2(b-1)^2 \geq 4$$

a zistite, kedy nastane rovnosť.

Riešenie*. Danú nerovnosť ekvivalentne upravujme:

$$\begin{aligned}
(a^2b^2+a^2+b^2+1)-(a^2-2a+1)(b^2-2b+1) &\geq 4,\\
(a^2b^2+a^2+b^2+1)-(a^2b^2-2ab^2+b^2)+&\\
+(2a^2b-4ab+2b)-(a^2-2a+1) &\geq 4,\\
2ab(a+b)-4ab+2(a+b) &\geq 4,\\
2(a+b)(ab+1) &\geq 4(ab+1),\\
2(ab+1)(a+b-2) &\geq 0.
\end{aligned}$$

Vzhľadom na predpoklad $a \geq 1$, $b \geq 1$ je $a+b \geq 2$, takže upravená nerovnosť zrejme platí. Rovnosť v nej (a teda aj v zadanej) nerovnosti pritom nastane práve vtedy, keď $a+b=2$, čiže $a=b=1$.

Iné riešenie*. Pri označení $m = a^2+1$ a $n = b^2+1$ možno ľavú stranu dokazovanej nerovnosti prepísať na tvar $L = mn-(m-2a)(n-2b) = 2an+2bm-2ab-2ab$, z ktorého vynímaním dostaneme $L = 2a(n-b)+2b(m-a)$.

Čísla a, b sú z intervalu $\langle 1, \infty)$, preto $1 = m-a^2 \leq m-a$. Odtiaľ $2b(m-a) \geq 2$. Analogicky dostaneme $2a(n-b) \geq 2$. Teda $L \geq 4$ a rovnosť nastáva práve vtedy, keď $a=b=1$.

Iné riešenie*. Po substitúcii $a = 1+m$ a $b = 1+n$, pričom $m, n \geq 0$, získa ľavá strana nerovnosti tvar

$$L = (m^2+2m+2)(n^2+2n+2)-m^2n^2.$$

Po roznásobení, ktoré si stačí iba predstaviť, sa zruší člen m^2n^2, takže L bude súčtom nezáporných členov, medzi ktorými bude aj člen $2 \cdot 2 = 4$. Tým je nerovnosť $L \geq 4$ dokázaná. A keďže medzi spomenutými členmi budú aj $4m$ a $4n$, z rovnosti $L = 4$ vyplýva $m = n = 0$, čo naopak rovnosť $L = 4$ tiež zrejme zaručuje. To znamená, že rovnosť nastáva práve vtedy, keď $a = b = 1$.

Úloha 5.8. [66-I-1-D3, resp. 58-I-6] Dokážte, že pre ľubovoľné rôzne kladné čísla a, b platí

$$\frac{a+b}{2} < \frac{2(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Riešenie*. Ľavú nerovnosť dokážeme ekvivalentnými úpravami:

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{2} &< \frac{2(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}, \quad |\cdot 6(a+b) \\ 3(a+b)^2 &< 4(a^2+ab+b^2), \\ 0 &< (a-b)^2. \end{aligned}$$

Posledná nerovnosť vzhľadom na predpoklad $a \neq b$ platí. Aj pravú nerovnosť zo zadania budeme ekvivalentne upravovať, začneme umocnením každej strany na druhú:

$$\begin{aligned} \frac{4(a^2+ab+b^2)^2}{9(a+b)^2} &< \frac{a^2+b^2}{2}, \quad |\cdot 18(a+b)^2 \\ 8(a^2+ab+b^2)^2 &< 9(a^2+b^2)(a+b)^2, \\ 8(a^4+b^4+2a^3b+2ab^3+3a^2b^2) &< 9(a^4+b^4+2a^3b+2ab^3+2a^2b^2), \\ 6a^2b^2 &< a^4+b^4+2a^3b+2ab^3. \end{aligned}$$

Posledná nerovnosť je súčtom nerovností $2a^2b^2 < a^4+b^4$ a $4a^2b^2 < 2a^3b+2ab^3$, ktoré obe platia, lebo po presune členov z ľavých strán na pravé dostaneme po rozklade už zrejmé nerovnosti $0 < (a^2-b^2)^2$, resp. $0 < 2ab(a-b)^2$.

Doplňujúce zdroje a materiály

Publikácií a článkov zaoberajúcich sa dokazovaním nerovností existuje veľké množstvo. Ak by študenti mali záujem o širšie štúdium tejto problematiky, na úvod je vhodné odporučiť im napr. publikáciu [BBC94].

Seminár 6: Algebraické výrazy, rovnice a nerovnosti III – lineárne rovnice a sústavy lineárnych rovníc

Ciele

Upevniť poznatky o riešení lineárnych rovníc a sústav lineárnych rovníc.

Úvodný komentár

SSeminárne stretnutie je zamerané na prácu s rovnicami a úlohami, ktoré na rovnice, príp. sústavy rovníc vedú. Ide o jedno z dvoch stretnutí (ďalším je Seminár 19), v tejto chvíli sa zameriame na jednoduchšie (priamočiarejšie) úlohy, v pokračovaní sa potom budeme zaoberať zložitejšími rovnicami a sústavami.

Úlohy a riešenia

Úloha 6.1. [60-I-1-N1] Máme tri čísla so súčtom 2010, pričom každé z nich je aritmetickým priemerom zvyšných dvoch. Aké sú to čísla?

Riešenie. Označme hľadané čísla a, b a c. Podľa zadania platí

$$\frac{a+b}{2} = c,$$
$$\frac{b+c}{2} = a,$$
$$\frac{c+a}{2} = b.$$

Riešením sústavy dostávame $a = b = c$ a z podmienky $a+b+c = 2010$ potom jediné riešenie úlohy $a = b = c = 670$.

Úloha 6.2. [60-I-1-N2] Máme tri čísla, o ktorých vieme, že každé z nich je aritmetickým priemerom niektorých dvoch z našich troch čísel. Dokážte, že naše tri čísla sú rovnaké.

Riešenie*. Predpokladajme, že niektoré z našich čísel je priemerom seba a iného z našich čísel. Potom ich vieme označiť a, b, c tak, že $a = (a+b)/2$. Z tejto rovnosti vyplýva $a = b$. Číslo c je buď priemerom čísel a a b, z čoho hneď máme, že je týmto číslam rovné, alebo je priemerom seba a niektorého z čísel a, b, čiže $c = (c+a)/2$, z toho opäť dostaneme $c = a = b$. Ak každé z našich čísel je aritmetickým priemerom zvyšných dvoch, riešime predošlú úlohu.

Úloha 6.3. [60-I-1] Lucia napísala na tabuľu dve nenulové čísla. Potom medzi ne postupne vkladala znamienka plus, mínus, krát a delené a všetky štyri príklady správne vypočítala. Medzi výsledkami boli iba dve rôzne hodnoty. Aké dve čísla mohla Lucia na tabuľu napísať?

Riešenie*. Označme hľadané čísla a, b. Keďže $b \neq 0$ nutne $a+b \neq a-b$. Každé z čísel $a \cdot b, a : b$ je rovné buď $a+b$, alebo $a-b$. Stačí teda rozobrať štyri prípady a v každom z nich vyriešiť sústavu rovníc. Ukážeme si však rýchlejší postup. Ak by platilo

$$a+b = a \cdot b \text{ a } a-b = a : b \quad \text{alebo} \quad a+b = a : b \text{ a } a-b = a \cdot b,$$

vynásobením rovností by sme v oboch prípadoch dostali $a^2 - b^2 = a^2$, čo je v spore s $b \neq 0$. Preto sú čísla $a \cdot b$ a $a : b$ buď obe rovné $a+b$ alebo obe rovné $a-b$. Tak či tak musí platiť $a \cdot b = a : b$, odkiaľ po úprave $a(b^2 - 1) = 0$. Keďže $a \neq 0$, nutne $b \in \{1, -1\}$. Ale ak $b = 1$, tak štyri výsledky sú postupne $a+1$, $a-1$, a, a, čo sú pre každé a až tri rôzne hodnoty. Pre $b = -1$ máme výsledky $a-1$, $a+1$, $-a$, $-a$. Dva rôzne výsledky to budú práve vtedy, keď $a-1 = -a$ alebo $a+1 = -a$. V prvom prípade dostávame $a = \frac{1}{2}$, v druhom $a = -\frac{1}{2}$. Lucia mohla na začiatku na tabuľu napísať buď čísla $\frac{1}{2}$ a -1, alebo čísla $-\frac{1}{2}$ a -1.

Komentár. Ak sa študenti rozhodnú riešiť sústavy rovníc pre spomínané štyri prípady, je to v poriadku, na záver by však bolo inšpiratívne ukázať im aj rýchlejší postup.

Úloha 6.4. [60-II-1] Na tabuli sú napísané práve tri (nie nutne rôzne) reálne čísla. Vieme, že súčet ľubovoľných dvoch z nich je tam napísaný tiež. Určte všetky trojice takých čísel.

Riešenie*. Označme čísla napísané na tabuli a, b, c. Súčet $a+b$ sa tiež nachádza na tabuli, je teda rovný jednému z čísel a, b, c. Keby $a+b$ bolo rovné a alebo b, bola by na tabuli aspoň jedna nula. Rozoberieme preto tri prípady podľa počtu núl napísaných na tabuli.

Ak sú na tabuli aspoň dve nuly, ľahko sa presvedčíme, že súčet každých dvoch čísel z tabule je tam tiež. Dostávame, že trojica $t,0,0$ je pre ľubovoľné reálne číslo t riešením úlohy.

Ak je na tabuli práve jedna nula, je tam trojica $a,b,0$, pričom a aj b sú nenulové čísla. Súčet $a+b$ teda nie je rovný ani a, ani b, musí preto byť rovný 0. Dostávame tak ďalšiu trojicu $t,-t,0$, ktorá je riešením úlohy pre ľubovoľné reálne číslo t. Ak na tabuli nie je ani jedna nula, súčet $a+b$ nie je rovný ani a, ani b, preto $a+b=c$. Z rovnakých dôvodov je $b+c=a$ a $c+a=b$. Dostali sme sústavu troch lineárnych rovníc s neznámymi a,b,c, ktorú môžeme vyriešiť. Avšak hneď z prvých dvoch rovníc po dosadení vyjde $b+(a+b)=a$, čiže $b=0$. To je v spore s tým, že na tabuli žiadna nula nie je.

Záver. Úlohe vyhovujú trojice $t,0,0$ a $t,-t,0$ pre ľubovoľné reálne číslo t a žiadne iné.

Úloha 6.5. [60-S-1] Po okruhu behajú dvaja atléti, každý inou konštantnou rýchlosťou. Keď bežia opačnými smermi, stretávajú sa každých 10 minút, keď bežia rovnakým smerom, stretávajú sa každých 40 minút. Za aký čas zabehne okruh rýchlejší atlét?

Riešenie*. Označme rýchlosti bežcov v_1 a v_2 tak, že $v_1 > v_2$ (rýchlosti udávame v okruhoch za minútu). Predstavme si, že atléti vyštartujú z rovnakého miesta, ale opačným smerom. V okamihu ich ďalšieho stretnutia po 10 minútach bude súčet dĺžok oboch prebehnutých úsekov zodpovedať presne dĺžke jedného okruhu, teda $10v_1+10v_2=1$. Ak bežia atléti z rovnakého miesta rovnakým smerom, dôjde k ďalšiemu stretnutiu, akonáhle rýchlejší atlét zabehne o jeden okruh viac ako pomalší. Preto $40v_1-40v_2=1$. Dostali sme sústavu dvoch lineárnych rovníc s neznámymi v_1,v_2:

$$10v_1+10v_2=1,$$
$$40v_1-40v_2=1,$$

ktorú vyriešime napríklad tak, že k štvornásobku prvej rovnice pripočítame druhú, čím dostaneme $80v_1=5$, čiže $v_1=\frac{1}{16}$. Zaujíma nás, ako dlho trvá rýchlejšiemu bežcovi prebehnúť jeden okruh, teda hodnota podielu $1/v_1$. Po dosadení vypočítanej hodnoty v_1 dostaneme odpoveď: 16 minút.

Poznámka. Úlohu možno riešiť aj úvahou: za 40 minút ubehnú atléti spolu 4 okruhy (to vyplýva z prvej podmienky), pritom rýchlejší o 1 okruh viac ako pomalší (to vyplýva z druhej podmienky). To teda znamená, že prvý za uvedenú dobu ubehne 2,5 okruhu a druhý 1,5 okruhu, takže rýchlejší ubehne jeden okruh za 40/2,5 = 16 minút.

Komentár. V tomto prípade vyžaduje netriviálne úsilie správne zostavenie sústavy rovníc tak, aby skutočne zodpovedala zadaniu. Jej vyriešenie potom už zložité nie je. Za zmienku stojí, že úloha je vhodným príkladom situácie, v ktorej si zmysluplnosť výsledku môžeme aspoň približne overiť (záporné rýchlosti, rýchlosti väčšie ako rýchlosť svetla).

Úloha 6.6. [66-I-4-N1] Určte všetky dvojčleny $P(x)=ax+b$, pre ktoré platí $P(2)=3$ a $P(3)=2$.

Riešenie. Z podmienok zo zadania zostavíme dve rovnice s dvomi neznámymi a a b:

$$P(2)=2a+b=3,$$
$$P(3)=3a+b=2.$$

Odčítaním prvej rovnice od druhej ihneď dostávame $a = -1$, dosadením tejto hodnoty do jednej z podmienok potom máme $b = 5$. Sústava má práve jedno riešenie, a preto zadaniu vyhovuje jediný dvojčlen $P(x) = -x + 5$.

Úloha 6.7. [66-I-4-N2] Určte všetky trojčleny $P(x) = ax^2 + bx + c$, pre ktoré platí $P(1) = 4$, $P(2) = 9$ a $P(3) = 18$.

Riešenie. Podobne, ako v predchádzajúcej úlohe, zostavíme z podmienok sústavu troch lineárnych rovníc s tromi neznámymi a, b a c:

$$\begin{aligned} P(1) &= a + b + c = 4, \\ P(2) &= 4a + 2b + c = 9, \\ P(3) &= 9a + 3b + c = 18. \end{aligned}$$

Sústava má opäť jediné riešenie $a = 2, b = -1, c = 3$, a preto existuje práve jeden trojčlen vyhovujúci zadaniu: $P(x) = 2x^2 - x + 3$.

Komentár. Predchádzajúce dve jednoduchšie úlohy majú prípravný charakter na nasledujúcu úlohu a domácu prácu. Študenti si prostredníctvom nich zopakujú metódy riešenia sústav rovníc s viacerými neznámymi. Tieto metódy by študentom mali byť známe zo ZŠ, ak však zistíme, že ich používanie nie je až také samozrejmé, je vhodné zaradiť niekoľko jednoduchších úloh, napr. z [KHP00].

Úloha 6.8. [66-I-4-N3] Určte všetky dvojčleny $P(x) = ax + b$ s celočíselnými koeficientmi a a b, pre ktoré platí $P(1) < P(2)$ a $P(1)^2 + P(2)^2 = 5$.

Riešenie*. Keďže a a b sú podľa zadania celé čísla, budú celými číslami aj hodnoty $P(1)$ a $P(2)$. Preto hľadáme, akými spôsobmi sa dá číslo 5 zapísať ako súčet dvoch druhých mocnín celých čísel. Ak neberieme ohľad na poradie sčítancov, je taký spôsob jediný: $5 = (\pm 1)^2 + (\pm 2)^2$. Zároveň vieme, že $P(1) < P(2)$, preto dvojicu $(P(1), P(2))$ tvoria niektoré z nasledujúcich štyroch možností: $(1,2), (-1,2), (-2,-1), (-2,1)$. Každá z týchto štyroch dvojíc podmienok potom vedie k sústave dvoch rovníc s dvomi neznámymi, takže dostávame objemnejšiu variáciu prvej úlohy tohto seminára. Vyriešením systémov získame 4 vyhovujúce dvojčleny $x + 0$, $3x - 4$, $x - 3$ a $3x - 5$.

Komentár. Úloha využíva takmer rovnaký princíp ako prvé dve seminárne úlohy, vyžaduje však dodatočnú analýzu plynúcu z poslednej podmienky, čo úlohe pridáva na náročnosti. Poslednou úlohou tejto gradovanej série je domáca práca, ktorej analýza povedie k riešeniu niekoľkých sústav troch rovníc s tromi neznámymi.

Úloha 6.9. [66-I-4-D2] Koeficienty a, b, c trojčlena $P(x) = ax^2 + bx + c$ sú reálne čísla, pritom každá z troch jeho hodnôt $P(1), P(2)$ a $P(3)$ je celým číslom. Vyplýva z toho, že aj čísla a, b, c sú celé, alebo je nutne celé aspoň niektoré z nich (ktoré)?

Riešenie*. Nevyplýva. Uvážme príklad trojčlena $P(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$: z vyjadrenia $P(x) = \frac{1}{2}x(x + 1) + 1$ vyplýva, že $P(x)$ je celým číslom pre každé celé x, pretože súčin $x(x+1)$ je vtedy deliteľný dvoma. Vo všeobecnej situácii je iba koeficient c nutne celé číslo; vyplýva to z vyjadrenia

$c = P(0) = 3P(1) - 3P(2) + P(3)$.

Komentár. Úloha je zaujímavá tým, že cesta k riešeniu je tentoraz menej priamočiara a študenti pravdepodobne prídu na viac rôznych príkladov mnohočlenov s neceločíselnými koeficientami, ktoré dané podmienky spĺňajú. Zaujímavá bude tiež pravdepodobne diskusia nad zdôvodnením, ktoré z koeficientov nutne celočíselné byť musia.

Úloha 6.10. [59-S-3] Nájdite všetky dvojice nezáporných celých čísel a, b, pre ktoré platí

$$a^2 + b + 2 = a + b^2.$$

Riešenie*. Rovnicu prepíšeme na tvar $2 = (b^2 - a^2) - (b - a)$, z ktorého po využití vzťahu pre rozdiel štvorcov a následnom vyňatí výrazu $b - a$ dostaneme $2 = (b - a)(a + b - 1)$. Keďže 2 je prvočíslo, máme pre uvedený súčin nasledujúce štyri možnosti:

a) $b - a = 1$ a $a + b - 1 = 2$, potom $a = 1$ a $b = 2$.

b) $b - a = 2$ a $a + b - 1 = 1$, potom $a = 0$ a $b = 2$.

c) $b - a = -1$ a $a + b - 1 = -2$. Druhú rovnicu možno prepísať na tvar $a + b = -1$, z ktorého vidíme, že rovnosť nenastane pre žiadnu dvojicu nezáporných celých čísel.

d) $b - a = -2$ a $a + b - 1 = -1$. Druhú rovnicu možno prepísať na tvar $a + b = 0$, z ktorého vidíme, že vyhovuje jediná dvojica nezáporných celých čísel $a = b = 0$, ktorá však nevyhovuje prvej rovnici.

Záver. Úloha má dve riešenia: Buď $a = 1$ a $b = 2$, alebo $a = 0$ a $b = 2$.

Poznámka. Namiesto rozboru štyroch možností môžeme začať úvahou, že nulové čísla a, b nie sú riešením úlohy, takže $a + b - 1 = 0$, a teda aj $b - a = 0$. Stačí teda uvažovať iba možnosti a) a b).

Iné riešenie*. Rovnicu upravíme na tvar $2 = (b^2 - b) - (a^2 - a)$, resp. na tvar $2 = b(b - 1) - a(a - 1)$. Z nasledujúcej tabuľky a tvaru čísel $x^2 - x = x(x - 1)$ je zrejmé, že rozdiely medzi susednými hodnotami výrazov $x(x - 1)$ rastú s rastúcim x (ľahko sa o tom presvedčíme výpočtom: $(x + 1)x - x(x - 1) = 2x$).

x	0	1	2	3	4	5	…
$x(x-1)$	0	0	2	6	12	20	…

Môže teda platiť iba $b^2 - b = 2$ a $a^2 - a = 0$. Odtiaľ $a \in \{0, 1\}$ a $b = 2$. Riešením úlohy sú teda dve dvojice nezáporných celých čísel: $a = 0, b = 2$ a $a = 1, b = 2$.

Komentár. Úloha je (okrem iného) zaujímavá tým, že poskytuje priestor na rôznorodé prístupy k riešeniu a môže byť dobrým podnetom na vzájomné vysvetľovanie riešení medzi študentmi. Kľúčovým prvkom riešenia je úprava rovnice na vhodný tvar – na tomto mieste je študentom vhodné pripomenúť, že zručnosť a dôvtip pri manipulácii s algebraickými výrazmi nájdu uplatenie v širokom spektre problémov, nielen na prvom seminárnom stretnutí, ktoré na túto problematiku bolo zamerané.

Domáca práca

Úloha 6.11. [66-I-4] Nájdite všetky trojčleny $P(x) = ax^2 + bx + c$ s celočíselnými koeficientami a,b,c, pre ktoré platí $P(1) < P(2) < P(3)$ a zároveň

$$(P(1))^2 + (P(2))^2 + (P(3))^2 = 22.$$

Riešenie*. Keďže a,b,c sú podľa zadania celé čísla, sú také aj hodnoty $P(1), P(2)$ a $P(3)$. Ich druhé mocniny, čiže čísla $P(1)^2, P(2)^2$ a $P(3)^2$, sú preto druhými mocninami celých čísel, teda tri (nie nutne rôzne) čísla z množiny $\{0,1,4,9,16,25,\ldots\}$. Ich súčet je podľa zadania rovný 22, takže každý z troch sčítancov je menší ako šieste možné číslo 25. Akými spôsobmi možno vôbec zostaviť súčet 22 z troch čísel vybraných z množiny $\{0,1,4,9,16\}$? Systematickým rozborom rýchlo zistíme, že rozklad čísla 22 na súčet troch druhých mocnín je (až na poradie sčítancov) iba jeden, a to $22 = 4+9+9$. Dve z čísel $P(1), P(2)$ a $P(3)$ majú teda absolútnu hodnotu 3 a tretie 2, a keďže $P(1) < P(2) < P(3)$, musí nutne platiť $P(1) = -3$, $P(3) = 3$ a $P(2) \in \{-2,2\}$. Pre každú z oboch vyhovujúcich trojíc $(P(1),P(2),P(3)) = (-3,-2,3)$ a $(P(1),P(2),P(3)) = (-3,2,3)$ určíme koeficienty a,b,c príslušného trojčlena $P(x)$ tak, že nájdené hodnoty dosadíme do pravých strán rovníc

$$\begin{aligned} a+b+c &= P(1),\\ 4a+2b+c &= P(2),\\ 9a+3b+c &= P(3) \end{aligned}$$

a výslednú sústavu troch rovníc s neznámymi a,b,c vyriešime. Tento jednoduchý výpočet tu vynecháme, v oboch prípadoch vyjdú celočíselné trojice (a,b,c), ktoré zapíšeme rovno ako koeficienty trojčlenov, ktoré sú jedinými dvoma riešeniami danej úlohy:

$$P_1(x) = 2x^2 - 5x \quad \text{a} \quad P_2(x) = -2x^2 + 11x - 12.$$

Úloha 6.12. [62-II-3] Nájdite všetky dvojice celých kladných čísel a a b, pre ktoré je číslo $a^2 + b$ o 62 väčšie ako číslo $b^2 + a$.

Riešenie*. Zadanie zapíšeme rovnosťou, ktorej pravú stranu rovno upravíme na súčin:

$$62 = (a^2+b) - (b^2+a) = (a^2-b^2) - (a-b) = (a-b)(a+b-1).$$

Súčin celých čísel $u = a-b$ a $v = a+b-1$ je teda rovný súčinu dvoch prvočísel $2 \cdot 31$. Keďže $v \geq 1+1-1 = 1$, je nutne aj číslo u kladné a zrejme $u < v$, takže (u,v) je jedna z dvojíc $(1,62)$ alebo $(2,31)$. Ak vyjadríme naopak a,b pomocou u,v, dostaneme

$$a = \frac{u+v+1}{2} \quad \text{a} \quad b = \frac{v-u+1}{2}.$$

Pre $(u,v) = (1,62)$ tak dostávame riešenie $(a,b) = (32,31)$, dvojici $(u,v) = (2,31)$ zodpovedá druhé riešenie $(a,b) = (17,15)$. Iné riešenia úloha nemá.

Komentár. Úloha je veľmi podobná tej, ktorou sme sa zaoberali na stretnutí, slúži tak na overenie toho, či si študenti princíp riešenia osvojili. Zároveň ale zadanie nie je zapísané priamo rovnosťou, takže úloha precvičí aj schopnosť transformovať slovný text na matematický zápis.

Úloha 6.13. [60-I-1-D1] Nech n je prirodzené číslo väčšie ako 2. Máme n čísel so súčtom n, pričom každé z nich je aritmetickým priemerom ostatných čísel. Aké sú to čísla?

Riešenie*. Usporiadajme si naše čísla podľa veľkosti, nech $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$. Aritmetický priemer skupiny čísel je aspoň taký, ako najmenšie z nich. Aritmetický priemer čísel $x_2, x_3, \ldots, x_n$ je preto aspoň x_2, a je rovný x_1 len v prípade, že žiadne z čísel $x_3, \ldots, x_n$ nie je väčšie ako x_2. Z toho hneď dostávame, že všetky naše čísla musia byť rovnaké a teda rovné 1.

Seminár 7: Teória čísel I – úlohy o deliteľnosti

Ciele

Zopakovať základné poznatky o deliteľnosti prirodzených čísel a precvičiť metódy dokazovania deliteľnosti daným číslom

Úvodný komentár

Keďže ide o prvé stretnutie zo série seminárov zameraných na elementárnu teóriu čísel, je potrebné so študentmi zopakovať základné znalosti, ktoré by mali mať zo základnej školy (voľne spracované podľa [**kubat200**]):

- ▷ chápať rozdiel medzi číslom a cifrou,
- ▷ používať rozvinutý a skrátený zápis čísla v desiatkovej sústave,
- ▷ rozumieť pojmom prvočíslo a zložené číslo,
- ▷ vedieť určiť najmenší spoločný násobok a najväčší spoločný deliteľ daných dvoch celých čísel,
- ▷ poznať pravidlá deliteľnosti číslami 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10.

Študenti by mali byť schopní zdôvodniť všetky pravidlá deliteľnosti. Ak si ich nepamätajú, môže byť táto úloha vhodnou rozcvičkou pred riešením pripravených problémov.

Takisto je vhodné zjednotiť značenie, ktoré budeme používať. Fakt, že celé číslo a delí celé číslo b budeme zapisovať v tvare $a \mid b$. V tomto texte tiež označujeme (a,b) najväčší spoločný deliteľ čísel a a b a $[a,b]$ ich najmenší spoločný násobok.

Pripomenieme ešte, že ak pre prirodzené čísla a,b,c platí $a \mid (b \cdot c)$ a zároveň $(a,b) = 1$, musí nutne $a \mid c$. Toto tvrdenie budeme v priebehu seminárov využívať často, je preto dôležité, aby ho študenti vzali za svoje. Vyzbrojení všetkými spomenutými znalosťami sa môžeme pustiť do riešenia úloh.

Úlohy a riešenia

Úloha 7.1. [[Hol10], úloha 38, str. 115] Nech N je päťciferné kladné číslo také, že $N = \overline{a679b}$. Ak je N deliteľné 72, určte prvú cifru a a poslednú cifru b.

Riešenie*. Keďže je číslo N deliteľné $72 = 8 \cdot 9$, musí byť súčasne deliteľné ôsmimi aj deviatimi. Z pravidla pre deliteľnosť ôsmimi vyplýva, že číslo $\overline{79b}$ musí byť násobkom ôsmich a teda $b = 2$. Pravidlo pre deliteľnosť deviatimi diktuje, že ciferný súčet hľadaného čísla $a+6+7+9+2 = a+24$ je násobkom deviatich, dostávame tak $a = 3$. Hľadaným číslom je $N = 36792$.

Komentár. Úloha nie je náročná a je zaradená ako zahrievacie cvičenie a ukážka práce s deliteľnosťou zloženým číslom.

Úloha 7.2. [66-I-2-N1] Dokážte, že v nekonečnom rade čísel

$$1 \cdot 2 \cdot 3, 2 \cdot 3 \cdot 4, 3 \cdot 4 \cdot 5, 4 \cdot 5 \cdot 6, \ldots,$$

je číslo prvé deliteľom všetkých čísel ďalších.

Riešenie. Prvé číslo v nekonečnom rade je číslo 6. Dokazujeme tak, že všetky výrazy tvaru $n(n+1)(n+2)$, kde $n \geq 2$ je prirodzené číslo, sú deliteľné šiestimi. To ale zjavne platí, keďže z troch po sebe idúcich čísel je vždy práve jedno deliteľné tromi a minimálne jedno z nich je tiež párne. Deliteľnosť dvomi a tromi zároveň nám tak zaručí deliteľnosť šiestimi a požadované tvrdenie je dokázané.

Komentár. Táto jednoduchá úloha zoznámi žiakov s poznatkom často využívaným v úlohách zameraných na dokazovanie deliteľnosti číslom, ktoré je násobkom troch: z troch po sebe idúcich prirodzených čísel je vždy práve jedno deliteľné tromi.

Úloha 7.3. [63-I-5-N1] Dokážte, že pre každé prirodzené n je číslo $n^3 + 2n$ deliteľné tromi.

Riešenie. Každé prirodzené číslo n je tvaru $n = 3k$, $n = 3k+1$ alebo $n = 3k+2$, kde k je prirodzené číslo alebo 0. Dokazované tvrdenie overíme pre každú z týchto možností zvlášť.

a) $n = 3k$: $n^3 + 2n = (3k)^3 + 2 \cdot 3k = 27k^3 + 6k = 3k(9k^2 + 2)$, tvrdenie platí.

b) $n = 3k+1$: $n^3 + 2n = (3k+1)^3 + 2(3k+1) = (27k^3 + 27k^2 + 9k + 1) + (6k+2) = 27k^3 + 27k^2 + 15k + 3 = 3(9k^3 + 9k^2 + 5k + 1)$, tvrdenie platí.

c) $n = 3k+2$: $n^3 + 2n = (3k+2)^3 + 2(3k+2) = (27k^3 + 54k^2 + 36k + 8) + (6k+4) = 27k^3 + 54k^2 + 42k + 12 = 3(9k^3 + 18k^2 + 14k + 4)$, a preto $3 \mid n^3 + 2n$ aj v tomto prípade.

Iné riešenie. Môžeme sa inšpirovať predchádzajúcou úlohou a opäť využiť poznatok, že súčin troch po sebe idúcich čísel je vždy deliteľný tromi. Číslo $n^3 + 2n$ môžeme napísať ako $n^3 - n + 3n$. Číslo $n^3 - n$ je deliteľné tromi pre každé prirodzené n, keďže ide o súčin troch po sebe idúcich čísel: $n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n-1)(n+1)$. $3 \mid 3n$ a preto aj $3 \mid n^3 + 2n$.

Komentár. Úloha zoznamuje študentov s ďalším možným postupom pri dokazovaní deliteľnosti výrazu daným prirodzeným číslom m: rozdelenie na m možností podľa zvyšku po delení číslom m a dokázanie tvrdenia pre každú z týchto možností zvlášť. Je vhodné diskutovať so študentmi o výhodnosti tejto metódy pre (ne)veľké m.

V druhom prístupe k riešeniu sme využili to, že sme číslo $2n$ zapísali v na prvý pohľad zložitejšom tvare $-n + 2n$, čo nám však v konečnom dôsledku pomohlo úlohu elegantne vyriešiť. Táto myšlienka nájde uplatnenie aj v iných úlohách (o.i. aj v úlohe **7.10**), preto ak s ňou študenti neprídu sami, je vhodné na ňu upozorniť.

Úlohu je možné dokázať použitím matematickej indukcie, avšak tá nie je štandardnou náplňou osnov nematematických gymnázií, preto sme toto riešenie nezvolili ako vzorové. Ak sa však študenti s dôkazom použitím indukcie stretli, je vhodné s nimi rozobrať aj tento spôsob riešenia.

Úloha 7.4. [63-I-5-N2] Dokážte, že pre každé nepárne číslo n je číslo $n^2 - 1$ deliteľné ôsmimi.

Riešenie. Výraz $n^2 - 1$ upravíme na súčin $(n-1)(n+1)$. To je súčin dvoch po sebe idúcich párnych čísel, keďže n je nepárne. Preto práve jedno z čísel $n-1$ a $n+1$ je deliteľné 4 a druhé z nich je nepárnym násobkom čísla 2. Celkovo je teda súčin $(n-1)(n+1)$ deliteľný ôsmimi.

Komentár. Posledná úloha zo série jednoduchých dôkazov deliteľnosti využíva podobnú myšlienku ako úloha **7.2**, navyše však vyžaduje upravenie výrazu $n^2 - 1$ do vhodného tvaru. Následná diskusia o riešení je už jednoduchá.

Úloha 7.5. [63-I-5-N3+63-I-5-N4, resp. 55-I-1]

a) Dokážte, že pre všetky celé kladné čísla m je rozdiel $m^6 - m^2$ deliteľný šesťdesiatimi.

b) Určte všetky kladné celé čísla m, pre ktoré je rozdiel $m^6 - m^2$ deliteľný číslom 120.

Riešenie*. a) Číslo $n = m^6 - m^2 = m^2(m^2-1)(m^2+1)$ je vždy deliteľné štyrmi, pretože pri párnom m je m^2 deliteľné štyrmi a pri nepárnom m sú čísla $m^2 - 1$, $m^2 + 1$ obe párne, jedno z nich je dokonca deliteľné štyrmi a ich súčin je teda deliteľný ôsmimi. Z troch po sebe idúcich prirodzených čísel $m^2 - 1$, m^2, $m^2 + 1$ je práve jedno deliteľné tromi, a preto je aj číslo n deliteľné tromi. Ak je m deliteľné piatimi, je m^2 deliteľné piatimi, dokonca dvadsiatimi piatimi. V opačnom prípade je m tvaru $5k + r$, kde r je rovné niektorému z čísel 1, 2, 3, 4 a k je prirodzené alebo 0. Potom $m^2 = 25k^2 + 10kr + r^2$ a r^2 sa rovná niektorému z čísel 1, 4, 9, 16. V prvom a v poslednom prípade je číslo $m^2 - 1$ deliteľné piatimi, v ostatných dvoch prípadoch je číslo $m^2 + 1$ deliteľné piatimi. Teda číslo n je vždy deliteľné nesúdeliteľnými číslami 4, 3 a 5, a teda aj ich súčinom 60.

b) Už sme ukázali, že v prípade nepárneho m je súčin $(m^2-1)(m^2+1)$ deliteľný ôsmimi a číslo $n = m^6 - m^2$ je teda deliteľné číslom $120 = 8 \cdot 3 \cdot 5$. Ak je však číslo m párne, sú čísla $m^2 - 1$, $m^2 + 1$ nepárne, žiadne nie je deliteľné dvoma. Číslo n je potom deliteľné ôsmimi iba v prípade, že m^2 je deliteľné ôsmimi, teda m je deliteľné štyrmi. Číslo n je potom deliteľné šestnástimi, tromi a piatimi, a preto dokonca číslom 240.

Záver. Naše výsledky môžeme zhrnúť. Číslo $n = m^6 - m^2$ je deliteľné číslom 120 práve vtedy, keď m je nepárne alebo deliteľné štyrmi.

Komentár. Sada dvoch na seba nadväzujúcich úloh využíva poznatky získané pri riešení jednoduchších prípravných úloh zo začiatku seminára a vyžaduje sústredené a starostlivé aplikovanie všetkých z nich.

Úloha 7.6. [59-II-1] Dokážte, že pre ľubovoľné celé čísla n a k väčšie ako 1 je číslo $n^{k+2} - n^k$ deliteľné dvanástimi.

Riešenie*. Vzhľadom na to, že $12 = 3 \cdot 4$, stačí ukázať, že číslo $a = n^{k+2} - n^k = n^k(n^2-1) = (n-1)n(n+1)n^{k-1}$ je deliteľné tromi a štyrmi. Prvé tri činitele posledného výrazu sú tri po sebe idúce prirodzené čísla, takže práve jedno z nich je deliteľné tromi, a preto aj číslo a je deliteľné tromi. Je deliteľné aj štyrmi, lebo pri párnom n je v poslednom výraze druhý a štvrtý činiteľ párny, zatiaľ čo pri nepárnom n je párny prvý a tretí činiteľ. Tým je dôkaz hotový.

Iné riešenie*. Položme $a = n^{k+2} - n^k = n^k(n^2 - 1) = (n-1)n^k(n+1)$. Opäť ukážeme, že a je deliteľné štyrmi a tromi. Ak je n párne, je n^k deliteľné štyrmi pre každé celé $k \geq 2$. Ak je n nepárne, sú činitele $n-1$ a $n+1$ párne čísla, takže a je deliteľné štyrmi pre každé celé $n = 2$.

Deliteľnosť tromi je zrejmá pre $n = 3l$. Ak $n = 3l+1$, pričom l je celé kladné číslo, je tromi deliteľný činiteľ $n-1$ (a teda aj číslo a). Ak $n = 3l+2$ (l je celé nezáporné), je tromi deliteľný činiteľ $n+1$. Keďže iné možnosti pre zvyšok čísla n po delení tromi nie sú, je číslo a deliteľné tromi. Tým je požadovaný dôkaz ukončený.

Komentár. Deliteľnosť štyrmi je tiež možné dokázať aj rozborom možností $n = 4l$, $n = 4l+1$, $n = 4l+2$ a $n = 4l+3$, pre l celé a nezáporné. Kľúčovým krokom v riešení bolo vhodné rozloženie čísla a na súčin. To však súdiac podľa priemerného počtu bodov udelených za túto úlohu v krajských kolách[3] na Slovensku bola úloha pre riešiteľov neľahká.

Úloha 7.7. [58-S-3] Keď isté dve prirodzené čísla v rovnakom poradí sčítame, odčítame, vydelíme a vynásobíme a všetky štyri výsledky sčítame, dostaneme 2 009. Určte tieto dve čísla.

Riešenie*. Pre hľadané prirodzené čísla x a y sa dá podmienka zo zadania vyjadriť rovnicou

$$(x+y)+(x-y)+\frac{x}{y}+(x\cdot y) = 2009, \tag{7.7.1}$$

v ktorej sme čiastočné výsledky jednotlivých operácií dali do zátvoriek.

Vyriešme rovnicu 7.7.1 vzhľadom na neznámu x (v ktorej je, na rozdiel od neznámej y, rovnica lineárna):

$$\begin{aligned} 2x+\frac{x}{y}+xy &= 2009,\\ 2xy+x+xy^2 &= 2009y,\\ x(y+1)^2 &= 2009y,\\ x &= \frac{2009y}{(y+1)^2}. \end{aligned} \tag{7.7.2}$$

Hľadáme práve tie prirodzené čísla y, pre ktoré má nájdený zlomok celočíselnú hodnotu, čo možno vyjadriť vzťahom $(y+1)^2 \mid 2009y$. Keďže čísla y a $y+1$ sú nesúdeliteľné, sú nesúdeliteľné aj čísla y a $(y+1)^2$, takže musí platiť $(y+1)^2 \mid 2009 = 7^2\cdot 41$. Keďže $y+1$ je celé číslo väčšie ako 1 (a činitele 7, 41 sú prvočísla), poslednej podmienke vyhovuje iba hodnota $y = 6$, ktorej po dosadení do 7.7.2 zodpovedá $x = 246$. (Skúška nie je nutná, lebo rovnice 7.7.1 a 7.7.2 sú v obore prirodzených čísel ekvivalentné.)

Hľadané čísla v uvažovanom poradí sú 246 a 6.

Komentár. Úloha je zaujímavá v tom, že na prvý pohľad nemusí riešiteľ tušiť, že ide o problém využívajúci poznatky z deliteľnosti. Zároveň vyžaduje netriviálnu zručnosť a nápad pri upravovaní počiatočnej rovnice do vhodného tvaru, nadväzuje tým na predchádzajúce semináre o algebraických

[3] 3,0 b v prípade úspešných riešiteľov, 1,8 b v prípade všetkých riešiteľov, najmenej zo všetkých úloh krajského kola daného ročníka

výrazoch a rovniciach. Úloha je tak peknou ukážkou toho, že v matematike (a nielen tam) nie sú znalosti a koncepty nesúvisiace, ale často sú vzájomne prepojené.

Úloha 7.8. [66-I-2-N2] Nájdite všetky celé $d > 1$, pri ktorých hodnoty výrazov $U(n) = n^3 + 17n^2 - 1$ a $V(n) = n^3 + 4n^2 + 12$ dávajú po delení číslom d rovnaké zvyšky, nech je celé číslo n zvolené akokoľvek.

Riešenie*. Hľadané d sú práve tie, ktoré delia rozdiel $U(n) - V(n) = 13n^2 - 13 = 13(n-1)(n+1)$ pre každé celé n. Tento rozdiel je tak určite deliteľný 13. Aby sme ukázali, že (zrejme vyhovujúce) $d = 13$ je jediné, dosaďme do rozdielu $U(n) - V(n)$ hodnotu $n = d$: číslo d je s číslami $d-1$ a $d+1$ nesúdeliteľné, takže delí súčin $13(d-1)(d+1)$ jedine vtedy, keď delí činiteľ 13, teda keď $d = 13$. Vyhovuje jedine $d = 13$.

Komentár. Úloha stavia na myšlienke deliteľnosti rozdielu $U(n)$ a $V(n)$ hľadaným d, čo je ďalší užitočný nástroj: namiesto upravovania výrazov $U(n)$ a $V(n)$ ich odčítať. Taktiež je vhodné upozorniť študentov, že druhá časť riešenia – dokázanie, že nájdené riešenie je jediné – je taktiež podstatnou súčasťou riešenia (nielen) tejto úlohy.

Úloha 7.9. [66-I-2-D1] Pre ktoré prirodzené čísla n nie je výraz $V(n) = n^4 + 11n^2 - 12$ násobkom ôsmich?

Riešenie*. Upravme výraz $V(n)$ do tvaru súčinu: $V(n) = (n^2-1)(n^2+12) = (n-1)(n+1)(n^2 + 12)$. Vidíme, že $V(n)$ je určite násobkom ôsmich v prípade nepárneho n (viď. tretia úloha tohto seminára). Keďže pre párne n je súčin $(n-1)(n+1)$ nepárny, hľadáme práve tie n tvaru $n = 2k$, pre ktoré nie je deliteľný ôsmimi výraz $n^2 + 12 = 4(k^2+3)$, čo nastane práve vtedy, keď k je párne. Hľadané n sú teda práve tie, ktoré sú deliteľné štyrmi.

Komentár. Úloha využíva vhodnú úpravu výrazu V na súčin. Tu študenti zúročia zručnosti nadobudnuté v algebraických seminároch. Zároveň využijú skôr dokázané tvrdenie o deliteľnosti ôsmimi a napokon, úloha ich pripraví na nasledujúci komplexnejší problém.

Úloha 7.10. [66-I-2] Nájdite najväčšie prirodzené číslo d, ktoré má tú vlastnosť, že pre ľubovoľné prirodzené číslo n je hodnota výrazu

$$V(n) = n^4 + 11n^2 - 12$$

deliteľná číslom d.

Riešenie*. Vypočítajme najskôr hodnoty $V(n)$ pre niekoľko najmenších prirodzených čísel n a ich rozklady na súčin prvočísel zapíšme do tabuľky:

n	$V(n)$
1	0
2	$48 = 2^4 \cdot 3$
3	$168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$
4	$420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

Z toho vidíme, že hľadaný deliteľ d všetkých čísel $V(n)$ musí byť deliteľom čísla $2^2 \cdot 3 = 12$, spĺňa teda nerovnosť $d \leq 12$. Preto ak ukážeme, že číslo $d = 12$ zadaniu vyhovuje, t. j. že $V(n)$ je násobkom čísla 12 pre každé prirodzené n, budeme s riešením hotoví.

Úprava

$$V(n) = n^4 + 11n^2 - 12 = (12n^2 - 12) + (n^4 - n^2),$$

pri ktorej sme z výrazu $V(n)$ "vyčlenili" dvojčlen $12n^2 - 12$, ktorý je zrejmým násobkom čísla 12, redukuje našu úlohu na overenie deliteľnosti číslom 12 (teda deliteľnosti číslami 3 a 4) dvojčlena $n^4 - n^2$. Využijeme na to jeho rozklad

$$n^4 - n^2 = n^2(n^2 - 1) = (n-1)n^2(n+1).$$

Pre každé celé n je tak výraz $n^4 - n^2$ určite deliteľný tromi (také je totiž jedno z troch po sebe idúcich celých čísel $n-1$, n, $n+1$) a súčasne aj deliteľný štyrmi (zaručuje to v prípade párneho n činiteľ n^2, v prípade nepárneho n dva párne činitele $n-1$ a $n+1$).

Dodajme, že deliteľnosť výrazu $V(n)$ číslom 12 možno dokázať aj inými spôsobmi, napríklad môžeme využiť rozklad $V(n) = n^4 + 11n^2 - 12 = (n^2 + 12)(n^2 - 1)$ z predchádzajúcej úlohy alebo prejsť k dvojčlenu $n^4 + 11n^2$ a podobne.

Záver. Hľadané číslo d je rovné 12.

Komentár. Úloha je okrem využitia všetkých doterajších poznatkov zaradená aj z dôvodu prvého kroku riešenia. Je vhodné študentom ukázať, že preskúmanie výrazu pre niekoľko malých hodnôt n nám môže pomôcť utvoriť si predstavu o tom, ako sa bude výraz správať ďalej, príp. vytvoriť hypotézu, ktorú sa neskôr pokúsime dokázať. Táto metóda nájde uplatnenie nielen v tejto konkrétnej úlohe, ale aj v ďalších partiách matematiky.

Domáca práca

Úloha 7.11. [66-S-2] Označme M množinu všetkých hodnôt výrazu $V(n) = n^4 + 11n^2 - 12$, pričom n je nepárne prirodzené číslo. Nájdite všetky možné zvyšky po delení číslom 48, ktoré dávajú prvky množiny M.

Riešenie*. Najskôr vypočítame prislúchajúce hodnoty výrazu V pre niekoľko prvých nepárnych čísel:

n	$V(n)$
1	0
3	$168 = 3 \cdot 48 + 24$
5	$888 = 18 \cdot 48 + 24$
7	$2928 = 61 \cdot 48$
9	$7440 = 155 \cdot 48$

Medzi hľadané zvyšky teda patria čísla 0 a 24. Ukážeme, že iné zvyšky už možné nie sú. Na to stačí dokázať, že pre každé nepárne číslo n platí $24 \mid V(n)$. Zo školskej časti seminára vieme, že pre každé prirodzené číslo n platí $12 \mid V(n)$, teda aj $3 \mid V(n)$. Keďže čísla 3 a 8 sú nesúdeliteľné, stačí ukázať, že pre každé nepárne číslo n platí $8 \mid V(n)$. Využijeme pritom rozklad daného výrazu na súčin

$$V(n) = n^4 + 11n^2 - 12 = (n^2 - 1)(n^2 + 12) = (n-1)(n+1)(n^2 + 12). \tag{7.11.1}$$

Ľubovoľné nepárne prirodzené číslo n možno zapísať v tvare $n = 2k-1$, pričom $k \in \mathbb{N}$. Pre také n potom dostávame

$$V(2k-1) = [(2k-1)-1][(2k-1)+1][(2k-1)^2+12] = 4(k-1)k(4k^2-4k+13),$$

a keďže súčin $(k-1)k$ dvoch po sebe idúcich celých čísel je deliteľný dvoma, je celý výraz deliteľný ôsmimi.

Záver. Daný výraz môže dávať po delení číslom 48 práve len zvyšky 0 a 24.

Poznámka. Poznatok, že $8 \mid V(n)$ pre každé nepárne n, možno dokázať aj inak, bez použitia rozkladu 7.11.1. Ak je totiž $n = 2k-1$, pričom $k \in \mathbb{N}$, tak číslo

$$n^2 = (2k-1)^2 = 4k^2-4k+1 = 4k(k-1)+1$$

dáva po delení ôsmimi (vďaka tomu, že jedno z čísel k, $k-1$ je párne) zvyšok 1, a teda rovnaký zvyšok dáva aj číslo n^4 (ako druhá mocnina nepárneho čísla n^2). Platí teda $n^2 = 8u+1$ a $n^4 = 8v+1$ pre vhodné celé u a v, takže hodnota výrazu

$$V(2k-1) = (8v+1)+11(8u+1)-12 = 8(v+11u)$$

je naozaj násobkom ôsmich.

Pripojme aj podobný dôkaz poznatku $3 \mid V(n)$ zo seminárneho stretnutia. Pre čísla n deliteľné tromi je to zrejmé, ostatné n sú tvaru $n = 3k \pm 1$, takže číslo

$$n^2 = (3k \pm 1)^2 = 9k^2 \pm 6k+1 = 3k(3k \pm 2)+1$$

dáva po delení tromi zvyšok 1, rovnako tak aj číslo $n^4 = (n^2)^2$. Dosadenie $n^2 = 3u+1$ a $n^4 = 3v+1$ do výrazu $V(n)$ už priamo vedie k záveru, že $3 \mid V(n)$.

Úloha 7.12. [60-I-2] Dokážte, že výrazy $23x+y$, $19x+3y$ sú deliteľné číslom 50 pre rovnaké dvojice prirodzených čísel x, y.

Riešenie*. Predpokladajme, že pre dvojicu prirodzených čísel x, y platí $50 \mid 23x+y$. Potom pre nejaké prirodzené číslo k platí $23x+y = 50k$. Z tejto rovnosti dostaneme $y = 50k-23x$, čiže $19x+ + 3y = 19x+3(50k-23x) = 150k-50x = 50(3k-x)$, takže číslo $19x+3y$ je násobkom čísla 50.

Podobne to funguje aj z druhej strany. Ak pre nejakú dvojicu prirodzených čísel x, y platí $50 \mid 19x+ +3y$, tak $19x+3y = 50l$ pre nejaké prirodzené číslo l. Z tejto rovnosti vyjadríme číslo y; dostaneme $y = (50l-19x)/3$ (ďalší postup by bol podobný, aj keby sme vyjadrili x namiesto y). Po dosadení dostaneme

$$23x+y = 23x+\frac{50l-19x}{3} = \frac{69x+50l-19x}{3} = \frac{50\cdot(x+l)}{3}.$$

O výslednom zlomku vieme, že je to prirodzené číslo. Čitateľ tohto zlomku je deliteľný číslom 50. V menovateli je len číslo 3, ktoré je nesúdeliteľné s 50, preto sa číslo 50 nemá s čím z menovateľa vykrátiť a teda číslo $23x+y$ je deliteľné 50.

Iné riešenie*. Zrejme $3\cdot(23x+y)-(19x+3y) = 50x$, čiže ak 50 delí jedno z čísel $23x+y$ a $19x+3y$, tak delí aj druhé z nich.

Doplňujúce zdroje a materiály

Výborným zdrojom úloh jednoduchých aj zložitejších je publikácia [Hol10], najmä jej časti 4.1, 4.2 a 4.3, ktoré obsahujú mnoho jednoduchších aj zložitejších príkladov na dokazovanie deliteľnosti, spoločné delitele a násobky aj úlohy o ciferných zápisoch, preto môže byť vhodným doplnením banky úloh nielen pre tento, ale aj nasledujúce dva semináre.

2.3 November

Seminár 8: Teória čísel II – úlohy o najmenšom spoločnom násobku a najväčšom spoločnom deliteli

Ciele

Zoznámiť sa s metódami riešenia príkladov o spoločných deliteľoch a násobkoch, upevniť znalosti zo seminára predchádzajúceho.

Úlohy a riešenia

Úloha 8.1. [61-I-3-N1] Určte, pre ktoré prirodzené čísla a, b platí $(a,b) = 10$ a zároveň $[a,b] = 150$.

Riešenie*. Pretože $10 = 2 \cdot 5$ a $150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$, požadované rovnosti sú splnené práve vtedy, keď $a = 2 \cdot 3^s \cdot 5^t$ a $b = 2 \cdot 3^u \cdot 5^v$, kde $\{s,u\} = \{0,1\}$ a $\{t,v\} = \{1,2\}$. Riešením je teda jedna zo štvoríc $\{a,b\} = \{10,150\}$ alebo $\{a,b\} = \{30,50\}$.

Komentár. Úloha je relatívne jednoduchá a nevyžaduje žiadne špeciálne znalosti, zároveň však nie je triviálna. Tvorí tak príjemné preklenutie medzi školskými a olympiádnymi príkladmi.

Úloha 8.2. [60-I-5-N1] Nech d je najväčší spoločný deliteľ prirodzených čísel a a b. Ukážte, že čísla a/d a b/d sú celé a nesúdeliteľné.

Riešenie. Ak je d najväčším spoločným deliteľom čísel a a b, potom existujú prirodzené čísla u a v také, že $a = ud$ a $b = vd$, čím sme dokázali prvú časť tvrdenia. Druhú dokážeme sporom. Predpokladajme, že a/d a b/d nie sú nesúdeliteľné. Potom existuje ich najväčší spoločný deliteľ d_1. Číslo d_1 však potom delí aj čísla a a b, čo je spor s predpokladom, že $d = (a,b)$.

Komentár. Táto mini-úloha je prípravným krokom k nasledujúcemu všeobecnejšiemu tvrdeniu a zároveň môže pripomenúť použitie dôkazu sporom.

Úloha 8.3. [60-I-5-N2] Dokážte, že pre ľubovoľné prirodzené čísla a, b platí vzťah

$$[a,b] \cdot (a,b) = ab.$$

Riešenie. Nech $d = (a,b)$, potom $a = ud$, $b = vd$ pre nesúdeliteľné u a v, a teda $[a,b] = uvd$. Porovnaním ľavej a pravej strany dokazovanej nerovnosti dostávame $uvd \cdot d = ud \cdot vd$, čo je pravdivé tvrdenie, teda vzťah je dokázaný.

Alternatívne môžeme vzťah dokázať úvahou o exponentoch prvočísel, z ktorých sú čísla a a b zložené. Nech $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ a $b = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k}$, kde p_1 až p_k sú prvočísla a α_k, β_k prirodzené čísla. Potom

$$\begin{aligned}(a,b) &= p_1^{\min\{\alpha_1,\beta_1\}} \cdot p_2^{\min\{\alpha_2,\beta_2\}} \cdots p_k^{\min\{\alpha_k,\beta_k\}},\\ [a,b] &= p_1^{\max\{\alpha_1,\beta_1\}} \cdot p_2^{\max\{\alpha_2,\beta_2\}} \cdots p_k^{\max\{\alpha_k,\beta_k\}},\\ ab &= p_1^{\alpha_1+\beta_1} \cdot p_2^{\alpha_2+\beta_2} \cdots p_k^{\alpha_k,\beta_k}.\end{aligned}$$

Keďže pre akékoľvek čísla α, β platí $\max\{\alpha,\beta\} + \min\{\alpha,\beta\} = \alpha + \beta$, a to vo všetkých prípadoch $\alpha < \beta$, $\alpha = \beta$, $\alpha > \beta$, je naše tvrdenie dokázané.

Komentár. Predchádzajúce tvrdenie je stavebným kameňom mnohých úloh o spoločných násobkoch a deliteľoch, najmä myšlienka zápisu prirodzených čísel a a b v tvare $a = ud$ a $b = vd$, kde u a v sú prirodzené čísla také, že $(u,v) = 1$ a $d = (a,b)$ nájde uplatnenie veľmi často.

Úloha 8.4. [64-I-5-N4] Platí pre každé tri prirodzené čísla a,b,c a ich najväčší spoločný deliteľ d a ich najmenší spoločný násobok n rovnosť $abc = nd$?

Riešenie. Neplatí, uvedieme protipríklad. Napríklad pre čísla 15, 18 a 24 je $d = (15,18,24) = 3$, $n = [15,18,24] = 360$. Ďalej $15 \cdot 18 \cdot 24 = 6480$ a $(15,18,24) \cdot [15,18,24] = 3 \cdot 360 = 1080$, to však nie sú rovnaké čísla a tvrdenie neplatí.

Komentár. Všeobecnejší pohľad na predchádzajúci problém by sme dostali skrz pohľad na exponenty prvočísel, z ktorých sú čísla a,b,c zložené. Skúmaná rovnosť nastane len v prípade, že sú všetky tri čísla navzájom po dvoch nesúdeliteľné.

Zároveň úloha demonštruje riešenie uvedením protipríkladu, čo je princíp, s ktorým sme sa v seminároch zatiaľ nestretli a jeho spomenutie je určite vhodné.

Úloha 8.5. [64-I-5-N5] Ak majú prirodzené čísla a,b najväčšieho spoločného deliteľa d, majú rovnakého najväčšieho spoločného deliteľa aj čísla a, b, $a-b$, $a+b$. Dokážte. Platí rovnaké tvrdenie pre najmenší spoločný násobok?

Riešenie. Najväčší spoločný deliteľ týchto štyroch čísel nebude určite väčší ako d (ak by bol, potom by d nebol najväčší spoločný deliteľ čísel a a b, čo by bolo v spore s predpokladom úlohy). Stačí teda ukázať, že d delí $a+b$ a $a-b$. Ak zapíšeme a a b v tvare $a = ud$ a $b = vd$, pričom pre prirodzené čísla u, v platí $(u,v) = 1$, bude potom $a+b = ud+vd = (u+v)d$, $a-b = ud-vd = (u-v)d$. Vidíme, že d delí súčet aj rozdiel čísel a a b, tvrdenie je teda dokázané.

Tvrdenie pre najmenší spoločný násobok neplatí, uvedieme protipríklad. Pre čísla $a = 12$, $b = 8$, $a+b = 20$, $a-b = 4$, $[12,8] = 24$, avšak $[12,8,20,4] = 120$.

Komentár. Úloha precvičuje dôkaz všeobecného tvrdenia a opäť prináša protipríklad ako dostatočný argument.

Úloha 8.6. [61-I-3-N4, resp. 50-II-1] Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel a, b, pre ktoré platí $a+b+[a,b]+(a,b)=50$.

Riešenie*. Položme $a=ud$, $b=vd$, kde d je najväčší spoločný deliteľ čísel a,b, prirodzené čísla u,v sú nesúdeliteľné a $[a,b]=uvd$. Podľa zadania má platiť $ud+vd+uvd+d=50$. Inak napísané, $(1+u)(1+v)d=50$. Nájdime preto všetky rozklady čísla 50 na súčin troch prirodzených čísel $d, u+$ $+1, v+1$, z ktorých posledné dve sú väčšie ako 1. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $a \leq b$, tj. $u \leq v$. Dostaneme nasledujúce možnosti.

d	$u+1$	$v+1$	u	v	a	b
1	2	25	1	24	1	24
1	5	10	4	9	4	9
2	5	5	4	4	8	8
5	2	5	1	4	5	20

V prípade $d=2$ dostaneme $u=v=4$, to je však spor s tým, že u a v sú nesúdeliteľné. Preto má úloha práve tri riešenia.

Komentár. Úloha okrem vhodného zapísania čísel a, b a $[a,b]$ vyžaduje ešte vhodnú úpravu rovnosti zo zadania, opäť tak kombinuje algebraické poznatky s poznatkami z oblasti teórie čísel.

Úloha 8.7. [61-S-1] Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel a, b, pre ktoré platí rovnosť množín
$$\{a \cdot [a,b], b \cdot (a,b)\} = \{45, 180\}.$$

Riešenie*. Z danej rovnosti vyplýva, že číslo b je nepárne (inak by obe čísla naľavo boli párne), a teda číslo a je párne (inak by obe čísla naľavo boli nepárne). Rovnosť množín preto musí byť splnená nasledovne:
$$a \cdot [a,b] = 180 \quad \text{a} \quad b \cdot (a,b) = 45. \tag{8.7.1}$$

Keďže číslo a delí číslo $[a,b]$, je číslo $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ deliteľné druhou mocninou (párneho) čísla a, takže musí platiť buď $a=2$, alebo $a=6$.

V prípade $a=2$ (vzhľadom na to, že b je nepárne) platí
$$a \cdot [a,b] = 2 \cdot [2,b] = 2 \cdot 2b = 4b,$$

čo znamená, že prvá rovnosť v 8.7.1 je splnená jedine pre $b=45$. Vtedy $b \cdot (a,b) = 45 \cdot (2,45) = 45$, takže je splnená aj druhá rovnosť v 8.7.1, a preto dvojica $a=2, b=45$ je riešením úlohy.

V prípade $a=6$ podobne dostaneme
$$a \cdot [a,b] = 6 \cdot [6,b] = 6 \cdot 2 \cdot [3,b] = 12 \cdot [3,b],$$

čo znamená, že prvá rovnosť v 8.7.1 je splnená práve vtedy, keď $[3,b]=15$. Tomu vyhovujú jedine hodnoty $b=5$ a $b=15$. Z nich však iba hodnota $b=15$ spĺňa druhú rovnosť v 8.7.1, ktorá je teraz v tvare $b \cdot (6,b) = 45$. Druhým riešením úlohy je teda dvojica $a=6$, $b=15$, žiadne ďalšie riešenia neexistujú.

Záver. Hľadané dvojice sú dve, a to $a = 2, b = 45$ a $a = 6, b = 15$.

Iné riešenie*. Označme $d = (a,b)$. Potom $a = ud$ a $b = vd$, pričom u, v sú nesúdeliteľné prirodzené čísla, takže $[a,b] = uvd$. Z rovností

$$a \cdot [a,b] = ud \cdot uvd = u^2vd^2 \quad \text{a} \quad b \cdot (a,b) = vd \cdot d = vd^2$$

vidíme, že číslo $a \cdot [a,b]$ je u^2-násobkom čísla $b \cdot (a,b)$, takže zadaná rovnosť množín môže byť splnená jedine tak, ako sme zapísali vzťahmi (1) v prvom riešení. Tie teraz môžeme vyjadriť rovnosťami

$$u^2vd^2 = 180 \quad \text{a} \quad vd^2 = 45.$$

Preto platí $u^2 = 180/45 = 4$, čiže $u = 2$. Z rovnosti $vd^2 = 45 = 3^2 \cdot 5$ vyplýva, že buď $d = 1$ (a $v = 45$), alebo $d = 3$ (a $v = 5$). V prvom prípade $a = ud = 2 \cdot 1 = 2$ a $b = vd = 45 \cdot 1 = 45$, v druhom $a = ud = 2 \cdot 3 = 6$ a $b = vd = 5 \cdot 3 = 15$.

Poznámka. Keďže zo zadanej rovnosti okamžite vyplýva, že obe čísla a, b sú deliteľmi čísla 180 (takým deliteľom je dokonca aj ich najmenší spoločný násobok $[a,b]$), je možné úlohu vyriešiť rôznymi inými cestami, založenými na testovaní konečného počtu dvojíc konkrétnych čísel a a b. Takýto postup urýchlime, keď vopred zistíme niektoré nutné podmienky, ktoré musia čísla a, b spĺňať. Napríklad spresnenie rovnosti množín na dvojicu rovností (1) možno (aj bez použitia úvahy o parite čísel a, b) vysvetliť všeobecným postrehom: súčin $a \cdot [a,b]$ je vždy deliteľný súčinom $b \cdot (a,b)$, pretože ich podiel možno zapísať v tvare

$$\frac{a \cdot [a,b]}{b \cdot (a,b)} = \frac{a}{(a,b)} \cdot \frac{[a,b]}{b},$$

teda ako súčin dvoch *celých* čísel.

Komentár. Úloha je zložitejšia ako predchádzajúce, dá sa však riešiť mnohými spôsobmi a bude iste zaujímavé vidieť rôzne študentské riešenia. Je taktiež vhodným miestom na to, aby sme študentov nechali diskutovať o prístupoch medzi sebou a prípadne skúšali hľadať slabiny jednotlivých zdôvodnení. Určite považujeme za vhodné zmieniť poslednú rovnosť z poznámky, keďže ide o zaujímavý postreh a metóda vhodného zapísania tvaru zlomku je užitočná nielen tu. Na túto úlohu nadväzuje komplexnejšia domáca práca, ktorá však vychádza z veľmi podobného princípu.

Úloha 8.8. [64-I-5] Rozdiel dvoch prirodzených čísel je 2010 a ich najväčší spoločný deliteľ je 2014-krát menší ako ich najmenší spoločný násobok. Určte všetky také dvojice čísel.

Riešenie*. Označme hľadané čísla a a b $(a > b)$ a d ich najväčší spoločný deliteľ. Potom $a = ud$, $b = vd$, pričom $u > v$ sú nesúdeliteľné čísla. Keďže najmenší spoločný násobok čísel a, b je číslo uvd, dosadením do zadaných vzťahov dostaneme rovnosti

$$a - b = (u - v)d = 2010,$$

$$uvd = 2014d, \quad \text{čiže} \quad uv = 2014.$$

Podľa rozkladu na súčin prvočísel $2014 = 2 \cdot 19 \cdot 53$ vypíšeme všetky možné dvojice (u, v) a pre každú z nich sa presvedčíme, či číslo $u - v$ je deliteľom čísla 2010. V pozitívnom prípade príslušný podiel udáva číslo d a výpočet neznámych $a = ud$ a $b = vd$ je už jednoduchý:

a) $u = 2014$ a $v = 1$: $u - v = 2013$ nedelí 2 010;
b) $u = 19 \cdot 53 = 1007$ a $v = 2$: $u - v = 1005 \mid 2010$, $d = 2$, $a = 1007 \cdot 2 = 2014$, $b = 2 \cdot 2 = 4$;
c) $u = 2 \cdot 53 = 106$ a $v = 19$: $u - v = 87$ nedelí 2 010;
d) $u = 53$ a $v = 2 \cdot 19 = 38$: $u - v = 15 \mid 2010$, $d = 134$, $a = 53 \cdot 134 = 7102$, $b = 38 \cdot 134 = 5092$.
Záver. Hľadané čísla tvoria jednu z dvojíc $(2014, 4)$ alebo $(7102, 5092)$.

Komentár. Úloha neprináša žiadne nové poznatky a princípy, je však vhodná na trénovanie riešenia sústavy dvoch rovníc s dvomi neznámymi a opäť tak vytvorí prepojenie s minulými seminármi.

Úloha 8.9. [60-I-5-D3] Nájdite všetky dvojice kladných celých čísel a, b, pre ktoré má výraz

$$\frac{a}{b} + \frac{14b}{9a}$$

celočíselnú hodnotu.

Riešenie*. Nech $d = (a, b)$, potom $a = ud$, $b = vd$ pre nesúdeliteľné prirodzené u a v. Skúmaný výraz bude po dosadení $(9u^2 + 14v^2)/(9uv)$, takže $9u \mid 14v^2$ a z nesúdeliteľnosti u a v máme $u \mid 14$, navyše $3 \mid v$. Podobne $v \mid 9$; vyskúšame konečne veľa možností.

Komentár. Úloha je zaujímavá tým, že prácu s najväčším spoločným deliteľom obsahuje nepriamo a využíva tiež poznatky o deliteľnosti z minulého seminára.

Úloha 8.10. [60-I-5] Dokážte, že najmenší spoločný násobok $[a, b]$ a najväčší spoločný deliteľ (a, b) ľubovoľných dvoch kladných celých čísel a, b spĺňajú nerovnosť

$$a \cdot (a, b) + b \cdot [a, b] \geq 2ab.$$

Zistite, kedy v tejto nerovnosti nastane rovnosť.

Riešenie*. Nerovnosť by bolo ľahké dokázať, ak by niektorý z dvoch sčítancov na ľavej strane bol sám o sebe aspoň taký, ako pravá strana. Číslo $[a, b]$ je zjavne násobkom čísla a. Ak $[a, b] \geq 2a$, tak $b[a, b] \geq 2ab$ a v zadanej nerovnosti platí dokonca ostrá nerovnosť, lebo číslo $a(a, b)$ je kladné. Ak $[a, b] < 2a$, tak neostáva iná možnosť ako $[a, b] = a$. To však nastane iba v prípade, keď $b \mid a$. V tomto prípade $(a, b) = b$ a v zadanej nerovnosti nastane rovnosť.

Iné riešenie*. Označme $d = (a, b)$, takže $a = ud$ a $b = vd$ pre nesúdeliteľné prirodzené čísla u, v. Z toho hneď vieme, že $[a, b] = uvd$. Keďže

$$\begin{aligned} a \cdot (a, b) + b \cdot [a, b] &= ud^2 + uv^2d^2 = u(1 + v^2)d^2, \\ 2ab &= 2uvd^2, \end{aligned}$$

je vzhľadom na $ud^2 > 0$ nerovnosť zo zadania ekvivalentná s nerovnosťou $1 + v^2 \geq 2v$, čiže $(v - 1)^2 \geq 0$, čo platí pre každé v. Rovnosť nastane práve vtedy, keď $v = 1$, čiže $b \mid a$.

Iné riešenie*. Označme $d = (a, b)$. Je známe, že $[a, b] \cdot (a, b) = ab$. Po vyjadrení $[a, b]$ z tohto vzťahu, dosadení do zadanej nerovnosti a ekvivalentnej úprave dostaneme ekvivalentnú nerovnosť

$d^2 + b^2 \geq 2bd$, ktorá platí, lebo $(d-b)^2 \geq 0$. Rovnosť nastáva pre $d = b$, čiže v prípade $b \mid a$.

Komentár. Na úspešné zvládnutie úlohy je opäť potrebná znalosť z predchádzajúceho seminára o nerovnostiach a taktiež ponúka široké spektrum prístupov, takže bude zaujímavé sledovať, ako k nej študenti pristúpia.

Domáca práca

Úloha 8.11. [61-I-3] Nájdite všetky trojice prirodzených čísel a, b, c, pre ktoré platí množinová rovnosť

$$\{(a,b),(a,c),(b,c),[a,b],[a,c],[b,c]\} = \{2,3,5,60,90,180\},$$

pričom (x,y) a $[x,y]$ označuje postupne najväčší spoločný deliteľ a najmenší spoločný násobok čísel x a y.

Riešenie*. Prvky danej množiny M rozložíme na prvočinitele:

$$M = \{2,3,5,2^2 \cdot 3 \cdot 5, 2 \cdot 3^2 \cdot 5, 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5\}.$$

Odtiaľ vyplýva, že v rozklade hľadaných čísel a, b, c vystupujú iba prvočísla 2, 3 a 5. Každé z nich je pritom prvočiniteľom práve dvoch z čísel a, b, c: keby bolo prvočiniteľom len jedného z nich, chýbalo by v rozklade troch najväčších spoločných deliteľov a jedného najmenšieho spoločného násobku, teda v štyroch číslach z M; keby naopak bolo prvočiniteľom všetkých troch čísel a, b, c, nechýbalo by v rozklade žiadneho čísla z M. Okrem toho vidíme, že v rozklade každého z čísel a, b, c je prvočíslo 5 najviac v jednom exemplári.

Podľa uvedených zistení môžeme čísla a, b, c usporiadať tak, že rozklady čísel a, b obsahujú po jednom exemplári prvočísla 5 (potom $(c,5) = 1$) a že $(a,2) = 2$ (ako vieme, aspoň jedno z čísel a, b musí byť párne). Číslo 5 z množiny M je potom nutne rovné (a,b), takže platí $(b,2) = 1$, a preto $(b,3) = 3$ (inak by platilo $(b,c) = 1$), odtiaľ zase s ohľadom na $(a,b) = 5$ vyplýva $(a,3) = 1$. Máme teda $a = 5 \cdot 2^s$ a $b = 5 \cdot 3^t$ pre vhodné prirodzené čísla s a t.

Z rovnosti $[a,b] = 2^s \cdot 3^t \cdot 5$ vyplýva, že nastane jeden z troch nasledujúcich prípadov.

(1) $2^s \cdot 3^t \cdot 5 = 60 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5$. Vidíme, že platí $s = 2$ a $t = 1$, čiže $a = 20$ a $b = 15$. Ľahko určíme, že tretím číslom je $c = 18$.

(2) $2^s \cdot 3^t \cdot 5 = 90 = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5$. V tomto prípade $a = 10$, $b = 45$ a $c = 12$.

(3) $2^s \cdot 3^t \cdot 5 = 180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$. Teraz $a = 20$, $b = 45$ a $c = 6$.

Záver. Hľadané čísla a, b, c tvoria jednu z množín $\{20,15,18\}$, $\{10,45,12\}$ a $\{20,45,6\}$.

Iné riešenie*. V danej rovnosti je množina napravo tvorená šiestimi rôznymi číslami väčšími ako 1, takže čísla $(a,b),(a,c),(b,c)$ musia byť netriviálnymi deliteľmi postupne čísel $[a,b],[a,c],[b,c]$. Čísla 2, 3, 5 ale žiadne netriviálne delitele nemajú, musí teda platiť

$$\{(a,b),(a,c),(b,c)\} = \{2,3,5\} \quad \text{a} \quad \{[a,b],[a,c],[b,c]\} = \{60,90,180\}.$$

Pretože poradie čísel a, b, c nehrá žiadnu úlohu, môžeme predpokladať, že platí $(a,b) = 2$, $(a,c) = 3$ a $(b,c) = 5$. Odtiaľ vyplývajú vyjadrenia

$$a = 2 \cdot 3 \cdot x = 6x, \quad b = 2 \cdot 5 \cdot y = 10y, \quad c = 3 \cdot 5 \cdot z = 15z$$

pre vhodné prirodzené čísla x,y,z. Zo známej rovnosti $[x,y]\cdot(x,y)=xy$ tak dostaneme vyjadrenia najmenších spoločných násobkov v tvare

$$[a,b]=\frac{6x\cdot 10y}{2}=30xy,\quad [a,c]=\frac{6x\cdot 15z}{3}=30xz,\quad [b,c]=\frac{10y\cdot 15z}{5}=30yz.$$

Z rovnosti $\{30xy,30xz,30yz\}=\{60,90,180\}$ upravenej na $\{xy,xz,yz\}=\{2,3,6\}$ potom vďaka tomu, že 2 a 3 sú prvočísla, vyplýva $\{x,y,z\}=\{1,2,3\}$. Pretože z podmienky $5=(b,c)=(10y,15z)$ vyplýva $y\neq 3$ a $z\neq 2$, prichádzajú do úvahy len trojice (x,y,z) rovné (1, 2, 3), (2, 1, 3) a (3, 2, 1), ktorým postupne zodpovedajú trojice (a,b,c) rovné (6, 20, 45), (12, 10, 45), (18, 20, 15). Skúškou sa presvedčíme, že všetky tri vyhovujú množinovej rovnosti zo zadania úlohy.

Úloha 8.12. [63-S-2] Čísla $1,2,\dots,10$ rozdeľte na dve skupiny tak, aby najmenší spoločný násobok súčinu všetkých čísel prvej skupiny a súčinu všetkých čísel druhej skupiny bol čo najmenší.

Riešenie*. Pre uvažované súčiny a a b určite platí $a\cdot b=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 10=2^8\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7$. Aspoň jedno z čísel a,b je preto deliteľné 2^4, aspoň jedno deliteľné 3^2, aspoň jedno deliteľné 5 a práve jedno deliteľné 7. Pre najmenší spoločný násobok n čísel a,b preto platí $n\geq 2^4\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7=5040$, pritom rovnosť tu nastane práve vtedy, keď ani jedno z čísel a, b nebude deliteľné žiadnym z čísel $2^5,3^3$ a 5^2.

Ak zvolíme napríklad $a=2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6=720$ a $b=1\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10=5040$, bude najmenší spoločný násobok oboch čísel práve 5040. Tým je ukázané, že 5040 je naozaj najmenšia zo všetkých možných hodnôt n.

I keď bolo úlohou nájsť iba jeden príklad, pre úplnosť uvedieme všetky rozdelenia s minimálnou hodnotou $n=5040$:

Prvá skupina čísel	Druhá skupina čísel
2, 3, 4, 5, 6	1, 7, 8, 9, 10
3, 5, 6, 8	1, 2, 4, 7, 9, 10
2, 5, 8, 9	1, 3, 4, 6, 7, 10
1, 2, 3, 4, 5, 6	7, 8, 9, 10
1, 3, 5, 6, 8	2, 4, 7, 9, 10
1, 2, 5, 8, 9	3, 4, 6, 7, 10
2, 3, 4, 5, 6, 7	1, 8, 9, 10
3, 5, 6, 7, 8	1, 2, 4, 9, 10
2, 5, 7, 8, 9	1, 3, 4, 6, 10
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	8, 9, 10
1, 3, 5, 6, 7, 8	2, 4, 9, 10
1, 2, 5, 7, 8, 9	3, 4, 6, 10

Nájsť ich nie je ťažké, keď si uvedomíme, že čísla 1 a 7 môžeme dať do ľubovoľnej z oboch skupín, zatiaľ čo v tej istej skupine spolu nemôžu byť 4 s 8, 5 s 10, 3 s 9 ani 6 s 9; s 8 spolu môže byť práve jedno z párnych čísel 2, 6 a 10. Získame tak iba tri základné rozdelenia (prvé tri riadky tabuľky), z ktorých možno každé štyrmi spôsobmi doplniť číslami 1 a 7.

Poznámka. Úlohu možno vyriešiť aj bez výpočtu súčinu $a\cdot b$. Deliteľnosť n číslami $3^2,5$ a 7 vyplýva z ich priameho zastúpenia medzi rozdeľovanými číslami, deliteľnosť číslom 2^4 z jednoduchej úvahy o rozdelení všetkých piatich párnych čísel: ak nie je číslo 8 vo svojej skupine ako párne jediné, je všetko jasné, v opačnom prípade sú v rovnakej skupine čísla 2, 4 a 6 (aj 10, ale to už ani nepotrebujeme).

Doplňujúce zdroje a materiály

Materiály vhodné na ďalšie počítanie nájdeme v minulom seminári. Keďže témy sú si veľmi blízke, publikácie zvyčajne obsahujú úlohy zamerané na obe témy.

Seminár 9: Teória čísel III – úlohy o ciferných zápisoch

Ciele

Precvičenie úloh zaoberajúcich sa cifernými zápismi, použitie rozvinutého zápisu čísla a úvah o deliteľnosti pri riešení týchto úloh.

Úvodný komentár

Seminár nie je náročný z pohľadu objemu nových poznatkov, nemalé úsilie však bude vyžadovať systematická práca, využitie poznatkov o deliteľnosti z predchádzajúcich seminárov, zváženie všetkých možných variantov či hľadanie správneho riešenia efektívnejším spôsobom než vypísaním všetkých možností.

Úlohy a riešenia

Úloha 9.1. [59-I-6-N1] Trojciferné číslo sa končí cifrou 4. Ak túto cifru presunieme na prvé miesto (a ostatné dve cifry necháme bez zmeny), dostaneme číslo, ktoré je o 81 menšie ako pôvodné číslo. Určte pôvodné číslo.

Riešenie. Označme prvé dve cifry hľadaného trojciferného čísla a a b. Zadanie potom môžeme prepísať do nasledujúcej rovnice $100a+10b+4=4\cdot 100+10a+b+81$. Po úprave a vydelení celej rovnosti deviatimi dostávame $10a+b=53$. Keďže a aj b sú kladné jednociferné čísla (pretože sú to cifry), je zrejmé, že $a=5$ a $b=3$. Hľadaným trojciferným číslom je tak číslo 534, čo potvrdí aj skúška správnosti.

Komentár. Úloha je v porovnaní s tým, čo v seminárnom stretnutí nasleduje, jednoduchá, osvieži však študentom často používanú myšlienku: číslo $\overline{abc}$ môžeme zapísať v tvare $100a+10b+c$. Tú využijeme v mnohých ďalších úlohách.

Úloha 9.2. [[Hol10], úloha 20, str. 110] Nájdite všetky prirodzené dvojciferné čísla, ktoré sa rovnajú dvojnásobku súčinu svojich cifier.

Riešenie*. Označme naše hľadané číslo $\overline{ab}$. Zadanie potom môžeme napísať ako $10a+b=2ab$, pričom $a\neq 0$ (inak by hľadané číslo nebolo dvojciferné). Taktiež $b\neq 0$, pretože $10a+b=2ab>0$. Keďže čísla $10a$ a $2ab$ sú párne, musí byť párne aj b, teda $b=2k$, $k\in\{1,2,3,4\}$. Využitím tohto poznatku môžeme rovnicu z úvodu riešenia upraviť na tvar $10a=b(2a-1)=2k(2a-1)$, teda $5a=k(2a-1)$ Preto buď $5\mid k$ alebo $5\mid(2a-1)$. Keďže ale $k\in\{1,2,3,4\}$, platí $5\nmid k$ a preto musí platiť $5 \mid (2a-1)$. Jediné možnosti, ktoré túto podmienku spĺňajú, sú $a=3$ alebo $a=8$. Ak je $a=8$, dostávame zo zadania $10\cdot 8+b=2\cdot 8\cdot b$, teda $b=16/3$. To však riešením úlohy byť nemôže, pretože b musí byť celé jednociferné číslo. Preto ostáva len možnosť $a=3$, odkiaľ odvodíme $b=6$. Skúškou overíme, že nájdené číslo 36 vyhovuje zadaniu.

Komentár. Úloha má krátke a jednoduché zadanie, jej riešenie však vyžaduje uplatnenie znalostí o deliteľnosti aj zápis čísla v rozvinutom tvare.

Úloha 9.3. [61-II-2] Janko má tri kartičky, na každej je iná nenulová cifra. Súčet všetkých trojciferných čísel, ktoré možno z týchto kartičiek zostaviť, je číslo o 6 väčšie ako trojnásobok jedného z nich. Aké cifry sú na kartičkách?

Riešenie*. Označme $\overline{abc}$ to trojciferné číslo, o ktorého trojnásobku sa píše v texte úlohy. Platí tak rovnica

$$3\overline{abc}+6=\overline{abc}+\overline{acb}+\overline{bac}+\overline{bca}+\overline{cab}+\overline{cba}$$

Keďže na pravej strane je každá z cifier a,b,c dvakrát na mieste jednotiek, desiatok aj stoviek, môžeme rovnicu prepísať na tvar

$$300a+30b+3c+6=222a+222b+222c, \quad \text{čiže} \quad 78a+6=192b+219c.$$

Po vydelení číslom 3 dostaneme rovnicu $26a+2=64b+73c$, z ktorej vidíme, že c je párna cifra. Platí preto $c\geq 2$, čo spolu so zrejmou nerovnosťou $b\geq 1$ (pripomíname, že všetky tri neznáme cifry sú podľa zadania nenulové) vedie k odhadu

$$64b+73c\geq 64+146=210.$$

Musí preto platiť $26a+2\geq 210$, odkiaľ $a\geq (210-2):26=8$, takže cifra a je buď 8, alebo 9. Pre $a=8$ však v nerovnosti z predošlej vety nastane rovnosť, takže nutne $b=1$ a $c=2$ (a rovnica zo zadania úlohy je potom splnená). Pre $a=9$ dostávame rovnicu

$$64b+73c=26\cdot 9+2=236,$$

z ktorej vyplýva, že c je jednak deliteľné štyrmi, jednak je menšie ako 4, čo nemôže nastať súčasne.

Záver. Cifry na kartičkách sú 8, 2 a 1.

Poznámka. Riešiť odvodenú rovnicu $26a+2=64b+73c$ pre neznáme (nenulové a navzájom rôzne) cifry a,b,c možno viacerými úplnými a systematickými postupmi, uviedli sme len jeden z nich.

Komentár. Úloha je zložitejšia než úvodné dve. Vychádza síce z rozvinutého zápisu čísla, avšak vyžaduje dodatočnú netriviálnu analýzu. Bude preto iste zaujímavé diskutovať so študentmi o tom, ako k pristupovali k riešeniu rovnice $26a+2=64b+73c$.

Úloha 9.4. [63-II-1] Nájdite všetky trojice (nie nutne rôznych) cifier a,b,c také, že päťciferné čísla $\overline{6abc3}$ a $\overline{3abc6}$ sú v pomere 63 : 36.

Riešenie*. Zostavíme a vyriešime rovnicu pre neznáme cifry a, b, c, ktorú vďaka tvaru zadaných čísel môžeme zapísať rovno pre jedinú neznámu $x = 100a + 10b + c$:

$$\begin{aligned} \frac{60000 + 10x + 3}{30000 + 10x + 3} &= \frac{63}{36} = \frac{7}{4}, \\ 40x + 240012 &= 70x + 210042, \\ 30x &= 29970, \\ x &= 999. \end{aligned}$$

Záver. Nájdenému x zodpovedá trojica cifier $a = b = c = 9$. Úloha má jediné riešenie.

Komentár. Úloha prináša zaujímavú myšlienku zjednodušenia zápisu, ktorý potom vedie k riešeniu jednoduchej lineárnej rovnice. Aj napriek tomu, že riešenie nevyžaduje mnoho počítania, ukrýva úloha záludnosť v podobe toho, že študenti môžu prísť k správnemu riešeniu nesprávnymi úvahami. Viac o tejto konkrétnej úlohe a jej úskaliach je možné nájsť v článku [Ště15], ktorý považujeme za hodný preštudovania.

Úloha 9.5. [57-I-6-D2, resp. 53-II-4] Žiaci mali vypočítať príklad $x + y \cdot z$ pre trojciferné číslo x a dvojciferné čísla y, z. Martin vie násobiť a sčítať čísla zapísané v desiatkovej sústave, ale zabudol na pravidlo prednosti násobenia pred sčítaním. Preto mu vyšlo síce zaujímavé číslo, ktoré sa píše rovnako zľava doprava ako sprava doľava, správny výsledok bol ale o 2004 menší. Určte čísla x, y, z.

Riešenie*. Martin vypočítal hodnotu $(x + y)z$ namiesto $x + yz$, takže podľa zadania platí

$$(x+y)z - (x+yz) = 2004, \quad \text{čiže} \quad x \cdot (z - 1) = 2004 = 12 \cdot 167,$$

pričom 167 je prvočíslo. Činitele x a $z - 1$ určíme, keď si uvedomíme, že z je dvojciferné číslo, takže $9 \le z - 1 \le 98$. Vidíme, že nutne $z - 1 = 12$ a $x = 167$, odkiaľ $z = 13$. Martin teda vypočítal číslo $V = (167 + y) \cdot 13$. Číslo V je preto štvorciferné, a pretože sa číta spredu rovnako ako zozadu, má tvar $\overline{abba} = 1001a + 110b$. Pretože $1001 = 13 \cdot 77$, musí platiť rovnosť $(167 + y) \cdot 13 = 13 \cdot 77a + 110b$, z ktorej vyplýva, že číslica b je deliteľná trinástimi, takže $b = 0$. Po dosadení dostaneme (po delení trinástimi) rovnosť $167 + y = 77a$, ktorá vzhľadom na nerovnosti $10 \le y \le 99$ znamená, že číslica a sa rovná 3, takže $y = 64$.

V druhej časti riešenia sme mohli postupovať aj nasledovne. Pre číslo $V = (167 + y) \cdot 13$ vychádzajú z nerovností $10 \le y \le 99$ odhady $2301 \le V \le 3458$. Zistíme preto, ktoré z čísel $\overline{2bb2}$, kde $b \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ a čísel $\overline{3bb3}$, kde $b \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, sú deliteľné trinástimi. Aj keď sa týchto dvanásť čísel dá rýchlo otestovať, urobme to všeobecne ich čiastočným vydelením trinástimi:

$$\begin{aligned} \overline{2bb2} &= 2002 + 110b = 13 \cdot (154 + 8b) + 6b, \\ \overline{3bb3} &= 3003 + 110b = 13 \cdot (231 + 8b) + 6b. \end{aligned}$$

Vidíme, že vyhovuje jedine číslo $\overline{3bb3}$ pre $b = 0$. Vtedy $167 + y = 231$, takže $y = 64$.

Záver. Žiaci mali počítať príklad $167 + 64 \cdot 13$, teda $x = 167$, $y = 64$ a $z = 13$.

Komentár. Na prvý pohľad sa môže zdať, že úloha nepatrí do tohto seminára, ako sa však v priebehu riešenia ukáže, má tu svoje miesto. Taktiež zaujímavým spôsobom spája poznatky o deliteľnosti, príp. sa v jej riešení uplatnia odhady – túto metódu sme už taktiež v dnešnom seminári využili.

Úloha 9.6. [58-I-3-N1, resp. 56-S-1] Určte počet všetkých štvorciferných prirodzených čísel, ktoré sú deliteľné šiestimi a v ktorých zápise sa vyskytujú práve dve jednotky.

Riešenie*. Aby číslo bolo deliteľné šiestimi, musí byť párne a mať ciferný súčet deliteľný tromi. Označme teda b číslicu na mieste jednotiek (tá musí byť párna, $b \in \{0,2,4,6,8\}$) a a tú číslicu, ktorá je spolu s číslicami 1, 1 ($a \neq 1$) na prvých troch miestach štvorciferného čísla, ktoré spĺňa požiadavky úlohy. Aby bol súčet číslic $a+1+1+b$ takého čísla deliteľný tromi, musí číslo $a+b$ dávať po delení tromi zvyšok 1. Pre $b \in \{0,6\}$ tak máme pre a možnosti $a \in 4,7$ ($a \neq 1$), pre $b \in \{2,8\}$ máme $a \in \{2,5,8\}$ a konečne pre $b = 4$ máme $a \in \{0,3,6,9\}$. Pre každé zvolené b a zodpovedajúce $a \neq 0$ sú zrejme tri možnosti, ako číslice 1, 1 a a na prvých troch miestach usporiadať, to je spolu $(2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3) \cdot 3 = 39$ možností, pre $a = 0$ (keď $b = 4$) potom sú len dve možnosti (číslica nula nemôže byť prvá číslica štvorciferného čísla).

Celkom existuje 41 štvorciferných prirodzených čísel, ktoré spĺňajú podmienky.

Alternatívnym postupom je vypísanie všetkých možností na základe ciferného súčtu, ktorý musí byť deliteľný troma a zároveň sa končiť párnou cifrou.

Komentár. Úloha využíva poznatky o deliteľnosti, takže pekne nadväzuje na predchádzajúce semináre. Tiež je prvou úlohou o cifernom zápise, v riešení ktorej nevyužijeme rozvinutý zápis čísla, ale skôr intuitívne kombinatorické úvahy.

Ak sa študenti vyberú cestou vypisovania všetkých možných kombinácií, skúsime ich povzbudiť, aby ich úsilie bolo čo najsystematickejšie a efektívne, príp. prediskutujeme, či sa riešenie dá nájsť aj inou cestou.

Úloha 9.7. [58-I-3-N2, resp.54-I-5] Určte počet všetkých trojíc dvojciferných prirodzených čísel a, b, c, ktorých súčin abc má zápis, v ktorom sú všetky cifry rovnaké. Trojice líšiace sa len poradím čísel považujeme za rovnaké, t. j. započítavame ich iba raz.

Riešenie*. Pre dvojmiestne čísla a,b,c je súčin abc číslo štvormiestne, alebo päťmiestne, alebo šesťmiestne. Ak sú teda všetky číslice čísla abc rovné jednej číslici k, platí jedna z rovností $abc = k \cdot 1111$, $abc = k \cdot 11111$ alebo $abc = k \cdot 111111$, $k \in \{1,2,\ldots,9\}$.

Čísla $1111 = 11 \cdot 101$ a $11111 = 41 \cdot 271$ však majú vo svojom rozklade trojmiestne prvočísla, takže nemôžu byť súčinom dvojmiestnych čísel. Ostáva preto jediná možnosť:

$$abc = k \cdot 111111 = k \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37.$$

Pozrime sa, ako môžu byť prvočísla 3, 7, 11, 13, 37 rozdelené medzi jednotlivé činitele a,b,c. Pretože súčiny $37 \cdot 3$ a $3 \cdot 7 \cdot 11$ sú väčšie ako 100, musí byť prvočíslo 37 samo ako jeden činiteľ a zvyšné štyri prvočísla 3, 7, 11, 13 musia byť rozdelené do dvojíc. Keďže aj súčin $11 \cdot 13$ je väčší ako 100, prichádzajú do úvahy iba rozdelenia na činitele $3 \cdot 11, 7 \cdot 13$ a 37, alebo na činitele $3 \cdot 13$, $7 \cdot 11$ a 37. K týmto činiteľom ešte pripojíme možné činitele z rozkladu číslice k a dostaneme riešenia dvoch typov:

$$a = 33k_1, b = 91, c = 37k_2, \quad \text{pričom } k_1 \in \{1,2,3\}, k_2 \in \{1,2\},$$

$$a = 39k_1, b = 77, c = 37k_2, \quad \text{pričom } k_1 \in \{1,2\}, k_2 \in \{1,2\},$$

Hľadaný počet trojíc čísel a,b,c je teda $3 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 10$.

Komentár. Posledná úloha seminára je zaujímavá myšlienkou, že čísla, ktoré majú všetky cifry rovnaké, sú násobkami čísel 11, 111, 1111, ... Ďalšia analýza uplatní poznatky o rozklade čísla na súčin prvočísel a je tak ďalším príkladom úlohy, v ktorej musia študenti zapojiť vedomosti z predchádzajúcich seminárov.

Domáca práca

Úloha 9.8. [58-I-3] Nájdite všetky štvorciferné čísla n, ktoré majú nasledujúce tri vlastnosti: V zápise čísla n sú dve rôzne cifry, každá dvakrát. Číslo n je deliteľné siedmimi. Číslo, ktoré vznikne otočením poradia cifier čísla n, je tiež štvorciferné a deliteľné siedmimi.

Riešenie*. V riešení budeme označovať číslo, ktoré vznikne otočením poradia cifier čísla n, ako $\overline{n}$. Rozoberieme tri prípady.

(i) Číslo n má tvar $aabb$, kde a, b sú rôzne cifry. Takže $n = 1100a + 11b$ a $\overline{n} = 1100b + 11a$. Číslo 7 má deliť ako n, tak $\overline{n}$, teda aj ich rozdiel $n - \overline{n} = 1089(a-b)$ a súčet $n + \overline{n} = 1111(a+b)$. Keďže ani číslo 1089, ani číslo 1111 nie sú násobkom siedmich a sedem je prvočíslo, tak $7 \mid a-b$ aj $7 \mid a+b$. Ak použijeme rovnakú úvahu ešte raz, vidíme, že $7 \mid (a-b) + (a+b) = 2a$ a $7 \mid (a+b) - (a-b) = 2b$, teda $7 \mid a$ a $7 \mid b$, čiže $a, b \in \{0, 7\}$. Cifry a, b sú navzájom rôzne, preto jedna z nich musí byť 0. Ale potom jedno z čísel $aabb$, $bbaa$ nie je štvorciferné. Hľadané číslo n teda nemôže mať uvedený tvar.

(ii) Číslo n má tvar $abab$. Potom $7 \mid n = 1010a + 101b$ a tiež $7 \mid \overline{n} = 1010b + 101a$. Podobne ako v predchádzajúcom prípade odvodíme, že $7 \mid n - \overline{n} = 909(a-b)$ a $7 \mid n + \overline{n} = 1111(a+b)$, a z rovnakých dôvodov ako v predchádzajúcom prípade zisťujeme, že $7 \mid a$, $7 \mid b$. Niektorá z cifier by teda musela byť 0. Číslo n tak nemôže mať ani tvar $abab$.

(iii) Číslo n má tvar $abba$. Potom otočením poradia cifier vznikne to isté číslo, takže máme jedinú podmienku $7 \mid 1001a + 110b$. Keďže $7 \mid 1001$ a $7 \nmid 110$, je táto podmienka ekvivalentná s podmienkou $7 \mid b$. Preto $b \in \{0, 7\}$, $a \in \{1, 2, \ldots, 9\}$, $a \neq b$. Vyhovuje tak všetkých 17 čísel, ktoré práve uvedené podmienky spĺňajú: 1001, 2002, 3003, 4004, 5005, 6006, 7007, 8008, 9009, 1771, 2772, 3773, 4774, 5775, 6776, 8778, 9779.

Úloha 9.9. [57-I-6] Klárka mala na papieri napísané trojciferné číslo. Keď ho správne vynásobila deviatimi, dostala štvorciferné číslo, ktoré sa začínalo rovnakou číslicou ako pôvodné číslo, prostredné dve číslice sa rovnali a posledná číslica bola súčtom číslic pôvodného čísla. Ktoré štvorciferné číslo mohla Klárka dostať?

Riešenie*. Hľadajme pôvodné číslo $x = 100a + 10b + c$, ktorého cifry sú a, b, c. Cifru, ktorá sa vyskytuje na prostredných dvoch miestach výsledného súčinu, označme d. Zo zadania vyplýva

$$9(100a + 10b + c) = 1000a + 100d + 10d + (a + b + c), \tag{9.9.1}$$

pričom výraz v poslednej zátvorke predstavuje cifru zhodnú s poslednou cifrou súčinu $9c$. To však znamená, že nemôže byť $c \geq 5$: pre také c sa totiž končí číslo $9c$ cifrou neprevyšujúcou 5, a pretože $a \neq 0$, platí naopak $a + b + c > c \geq 5$.

Zrejme tiež $c \neq 0$ (v opačnom prípade by platilo $a = b = c = x = 0$). Ostatné možnosti vyšetríme zostavením nasledujúcej tabuľky.

c	$9c$	$a+b+c$	$a+b$
1	9	9	8
2	18	8	6
3	27	7	4
4	36	6	2

Rovnosť 9.9.1 možno prepísať na tvar

$$100(b-a-d) = 10d + a + 11b - 8c. \tag{9.9.2}$$

Hodnota pravej strany je aspoň -72 a menšia ako 200, lebo každé z čísel a, b, c, d je najviac rovné deviatim. Takže buď $b-a-d=0$, alebo $b-a-d=1$.

V prvom prípade po substitúcii $d=b-a$ upravíme vzťah 9.9.2 na tvar $8c=3(7b-3a)$, z ktorého vidíme, že c je násobkom troch. Z prvej tabuľky potom vyplýva $c=3, a=4-b$, čo po dosadení do rovnice $8c=3(7b-3a)$ vedie k riešeniu $a=b=2, c=3$. Pôvodné číslo je teda $x=223$ a jeho deväťnásobok $9x=2007$.

V druhom prípade dosadíme $d=b-a-1$ do 9.9.2 a zistíme, že $8c+110=3(7b-3a)$. Výraz $8c+110$ je teda deliteľný tromi, preto číslo c dáva po delení tromi zvyšok 2. Dosadením jediných možných hodnôt $c=2$ a $b=6-a$ do poslednej rovnice zistíme, že $a=0$, čo je v rozpore s tým, že číslo $x=100a+10b+c$ je trojciferné.

Záver. Klárka dostala štvorciferné číslo 2 007.

Poznámka. Prvá tabuľka ponúka jednoduchší, ale numericky pracnejší postup priameho dosadzovania všetkých prípustných hodnôt čísel a, b, c do rovnice 9.9.1. Počet všetkých možností možno obmedziť na desať odhadom $b \geq a$, ktorý zistíme pomocou vhodnej úpravy vzťahu 9.9.1 napríklad na tvar 9.9.2. Riešenie uvádzame v druhej tabuľke.

a	1	2	3	4	1	2	3	1	**2**	1
b	7	6	5	4	5	4	3	3	**2**	1
c	1	1	1	1	2	2	2	3	**3**	4
$9x$	1539	2349	3159	3969	1368	2178	2988	1197	**2007**	1026

Doplňujúce zdroje a materiály

Výborným zdrojom úloh jednoduchších aj zložitejších je [Sed61].

Seminár 10: Geometria I – základné poznatky

Ciele

Zopakovať a upevniť základné poznatky z planimetrie, ktoré by študenti mali mať zo základnej školy. Venovať sa vlastnostiam uhlov, trojuholníkov, štvoruholníkov a kružníc. Niektoré z poznatkov odvodiť.

Úvodný komentár

Keďže planimetria častokrát nie je súčasťou osnov 1. ročníka gymnázií, je potrebné poznatky žiakov z tejto oblasti o to starostlivejšie zopakovať. Geometrické úlohy majú veľmi často najhoršiu úspešnosť v krajských kolách MO, čo môže mať viacero dôvodov. Nepopierateľne však študentom tréning pomôže, preto je geometrii v priebehu roka venovaných 8 seminárov.

Zo zmienených dôvodov má preto tento seminár odlišnú štruktúru ako predchádzajúce – viac ako riešeniu úloh z olympiád sa venujeme opakovaniu základných vlastností uhlov, trojuholníkov, štvoruholníkov a kružníc, ktorých znalosti budú nenahraditeľné v ďalších piatich geometrických seminároch. Spolu so študentmi tak vytvoríme základnú výbavu, ktorá im pomôže v boji s geometrickými záludnosťami.

Študenti by mali mať nasledujúce znalosti (voľne spracované podľa [KHP00]):

▷ uhly

- chápať pojmy vrcholové, vedľajšie, súhlasné a striedavé uhly, vedieť nájsť dvojice takých uhlov a používať ich pri riešení úloh,

▷ trojuholníky

- poznať základné vlastnosti strán a vnútorných uhlov trojuholníka: trojuholníková nerovnosť, súčet vnútorných uhlov,
- vedieť popísať rozdiely medzi ostrouhlým, pravouhlým, tupouhlým, všeobecným, rovnoramenným a rovnostranným trojuholníkom,
- chápať pojmy os uhla, os strany, výška, ťažnica, stredná priečka, kružnica vpísaná a opísaná trojuholníku a poznať ich vlastnosti,
- poznať a vedieť používať vzorec na výpočet obsahu trojuholníka,
- poznať a vhodne používať vety o zhodnosti (*sss*, *sus*, *usu*, *Ssu*) a podobnosti (*sss*, *sus*, *uu*, *Ssu*) trojuholníkov,
- poznať a používať Pytagorovu vetu pre pravouhlý trojuholník,

▷ štvoruholníky

- vedieť popísať všeobecný štvoruholník a jeho špecifické prípady: rovnobežník, štvorec, obdĺžnik, kosoštvorec, kosodĺžnik, lichobežník,
- poznať základné vzorce pre výpočet obsahu rôznych rovnobežníkov a lichobežníkov,
- vedieť, že uhlopriečky v pravouholníku a rovnobežníku sa polia a vedieť tento fakt využiť pri riešení úloh,

▷ kružnice a kruhy

- chápať pojmy kružnica, kruh, kružnicový oblúk, dotyčnica, sečnica, tetiva, stredový a obvodový uhol,
- poznať a vedieť používať Talesovu kružnicu,

▷ riešenie konštrukčných úloh

- náčrt, rozbor, popis konštrukcie, diskusia o počte riešení.

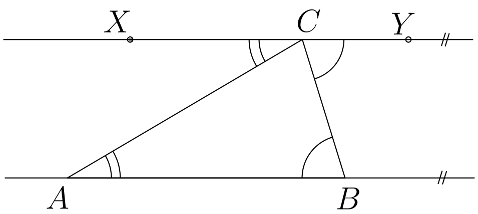
Komentár. Skôr než frontálny výklad je vhodné nechať skladať mozaiku vedomostí študentov. Ak pracujeme s malou skupinou, môžeme o vyššie spomenutých bodoch diskutovať všetci spoločne. Ak seminár navštevuje väčšie množstvo záujemcov o matematiku, rozdelíme študentov na menšie skupiny, pričom každá spracuje poznatky o zadanej neprázdnej podmnožine vyššie spomenutých oblastí. Tie si potom študenti navzájom odprezentujú, vedúci seminára nepresnosti vhodnými otázkami koriguje. Táto časť by mala zabrať približne polovicu, príp. dve tretiny času vyhradeného na seminár.

Komentár. V druhej polovici (až poslednej tretine seminára) niektoré zo základných tvrdení, ktoré budeme v priebehu ďalších stretnutí využívať, dokážeme.

Úlohy a riešenia

Úloha 10.1. Dokážte, že súčet veľkostí vnútorných uhlov ľubovoľného trojuholníka je 180°.

Riešenie. Veďme rovnobežku XY so stranou AB vrcholom C trojuholníka ABC, tak že bod C leží medzi bodmi X a Y (obr. 10.1.1). Potom $|\measuredangle BAC| = |\measuredangle ACX|$ a $|\measuredangle ABC| = |\measuredangle BCY|$, pretože ide o dvo-

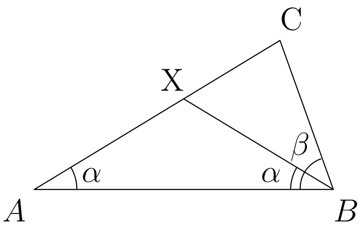


Obr. 10.1.1

jice striedavých uhlov. Keďže $|\measuredangle ACX| + |\measuredangle ACB| + |\measuredangle BCY| = 180^\circ$, pretože uhol XCY je priamy, platí aj $|\measuredangle BAC| + |\measuredangle ABC| + |\measuredangle ACB| = 180^\circ$.

Úloha 10.2. [66-I-3-N1] Z trojuholníkových nerovností medzi dĺžkami strán ľubovoľného trojuholníka odvoďte známe pravidlo $\alpha < \beta \Rightarrow a < b$ o porovnaní veľkostí vnútorných uhlov a dĺžok protiľahlých strán v ľubovoľnom trojuholníku ABC.

Riešenie*. Ak je $\alpha < \beta$, môžeme nájsť vnútorný bod X strany AC, pre ktorý platí $|\measuredangle ABX| = \alpha$, a teda $|AX| = |BX|$, takže z trojuholníkovej nerovnosti $|BC| < |BX| + |XC|$ už vyplýva $a < b$.



Obr. 10.2.1

Úloha 10.3. [63-I-4-N3] Dokážte vety:
a) Ak majú dva trojuholníky rovnakú výšku, potom pomer ich obsahov sa rovná pomeru dĺžok príslušných základní.
b) Ak majú dva trojuholníky zhodné základne, potom pomer ich obsahov sa rovná pomeru príslušných výšok.

Riešenie. a) Označme rovnakú výšku dvoch trojuholníkov v. V trojuholníku T_1 je táto výškou na základňu a_1, v trojuholníku T_2 na základňu a_2. Pomer obsahov týchto trojuholníkov je potom

$$\frac{S_{T_1}}{S_{T_2}} = \frac{\frac{1}{2}a_1 v}{\frac{1}{2}a_2 v} = \frac{a_1}{a_2},$$

čo sme chceli dokázať.

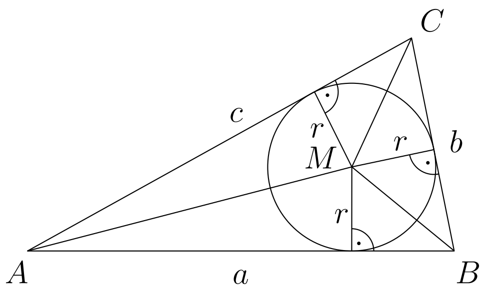
b) Označme zhodnú základňu dvoch trojuholníkov z, v trojuholníku T_1 je výška na túto základňu v_1, v trojuholníku T_2 je výška na túto základňu v_2. Pomer obsahov trojuholníkov T_1 a T_2 je

$$\frac{S_{T_1}}{S_{T_2}} = \frac{\frac{1}{2}zv_1}{\frac{1}{2}zv_2} = \frac{v_1}{v_2},$$

čo je pomer príslušných výšok.

Úloha 10.4. [61-I-5-N1] Pre všeobecný trojuholník ABC so stranami a, b, c a obsahom S platí pre polomer r vpísanej kružnice vzorec $r = 2S/(a+b+c)$. Dokážte.

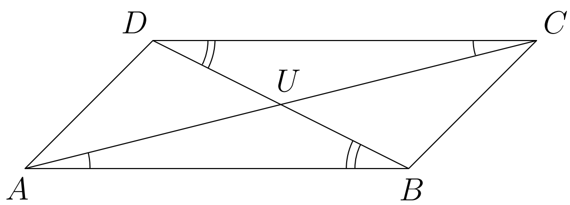
Riešenie*. Stred M vpísanej kružnice rozdeľuje uvažovaný trojuholník ABC na tri menšie trojuholníky BCM, ACM, ABM s obsahmi $\frac{1}{2}ar$, $\frac{1}{2}br$, $\frac{1}{2}cr$, ktorých súčet je S, odkiaľ vyplýva dokazovaný vzorec.



Obr. 10.4.1

Úloha 10.5. Dokážte, že uhlopriečky v rovnobežníku sa navzájom polia.

Riešenie. Označme U priesečník uhlopriečok AC a BD rovnobežníka $ABCD$ (obr. 10.5.1). Keďže

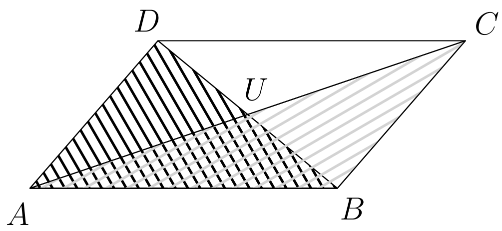


Obr. 10.5.1

uhly ABD a BDC sú striedavé, majú rovnakú veľkosť. Podobne uhly BAC a ACD sú rovnako veľké, pretože sú takisto dvojicou striedavých uhlov. Potom sú trojuholníky ABU a CDU zhodné, keďže sa zhodujú v jednej strane $|AB| = |CD|$ a v dvoch k nej priľahlých uhloch. Preto aj $|AU| = |UC|$, $|BU| = |UD|$ a tvrdenie je dokázané.

Úloha 10.6. [58-I-4-N1] Označme U priesečník uhlopriečok daného konvexného štvoruholníka $ABCD$. Dokážte, že priamky AB a CD sú rovnobežné práve vtedy, keď trojuholníky ADU a BCU majú rovnaký obsah.

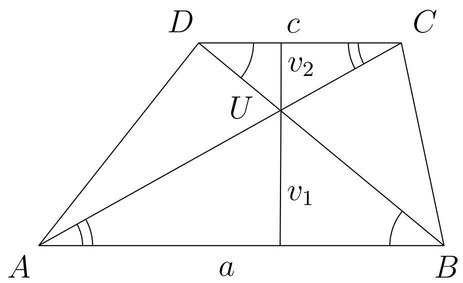
Riešenie. Rovnosť obsahov trojuholníkov ADU a BCU je ekvivalentná s rovnosťou obsahov trojuholníkov ABC a ABD so spoločnou stranou AB, pretože $S_{ABC} = S_{ABU} + S_{BCU}$ a $S_{ABD} = S_{ABU} + S_{AUD}$ (obr. 10.6.1). Trojuholníky ABC a ABD majú spoločnú základňu AB, takže ich obsahy budú rovnaké práve vtedy, ak výšky na túto stranu budú rovnaké, resp. ak body C a D budú od priamky AB rovnako vzdialené. To nastane len v prípade, ak body C a D ležia na priamke rovnobežnej s priamkou AB, čo sme chceli dokázať.



Obr. 10.6.1

Úloha 10.7. [64-I-4-N1] Lichobežník $ABCD$ má základne s dĺžkami $|AB| = a$ a $|CD| = c$ a jeho uhlopriečky sa pretínajú v bode U. Aký je pomer obsahov trojuholníkov ABU a CDU?

Riešenie. Trojuholníky ABU a CDU sú zrejme podobné ($|\measuredangle BAU| = |\measuredangle UCD|$, $|\measuredangle ABU| = |\measuredangle CDU|$,



Obr. 10.7.1

$|\measuredangle AUB| = |\measuredangle CUD|$, pretože prvé dve sú dvojice striedavých uhlov, posledné dva sú uhly vrcholové) s koeficientom podobnosti $k = a/c$. Preto pre výšku v_1 na stranu AB v trojuholníku ABU a výšku v_2 na stranu CD v trojuholníku CDU platí $v_1/v_2 = k$, resp. $v_1 = kv_2 = (av_2)/c$. Potom pre pomer obsahov trojuholníkov ABU a CDU máme

$$\frac{S_{ABU}}{S_{CDU}} = \frac{\frac{1}{2}av_1}{\frac{1}{2}cv_2} = \frac{a\frac{av_2}{c}}{cv_2} = \frac{a^2}{c^2}.$$

Záverečný komentár Na prvý pohľad by sa mohlo zdať, že študenti budú o(c)hromení množstvom nových poznatkov v tomto seminári. Dúfame však, že sa tak nestane, keďže veľká väčšina obsahu by mala byť prinajmenšom povedomá, ak nie úplne zrozumiteľná. Seminár tiež patrí k tým menej náročným, avšak je veľmi dôležitou prípravou pred tvrdšími orieškami.

Domáca práca

Úloha 10.8. [58-I-2-D1] Nech k je kružnica opísaná pravouhlému trojuholníku ABC s preponou AB dĺžky c. Označme S stred strany AB a D a E priesečníky osí strán BC a AC s jedným oblúkom AB kružnice k. Vyjadrite obsah trojuholníka DSE pomocou dĺžky prepony c.

Riešenie. Trojuholník DSE je pravouhlý rovnoramenný s pravým uhlom pri vrchole S, pretože odvesny DS a ES ležia na osiach navzájom kolmých strán. Odvesny majú dĺžku $\frac{c}{2}$, pretože sú to polomery kružnice opísanej trojuholníku ABC. Obsah trojuholníka DSE je $\frac{1}{2} \cdot |DS| \cdot |DE| = \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{c}{2} = \frac{c^2}{8}$.

Úloha 10.9. [58-I-2-D2] Vyjadrite obsah rovnoramenného lichobežníka $ABCD$ so základňami AB a CD pomocou dĺžok a, c jeho základní a dĺžky b jeho ramien.

Riešenie. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $a > b$. Najprv vyjadríme výšku v pomocou dĺžok základní a odvesien. Nech je P päta výšky z bodu D na stranu AB. Potom $|AP| = (a-c)/2$. Použitím Pytagorovej vety v pravouhlom trojuholníku APD máme

$$\left(\frac{a-c}{2}\right)^2 + v^2 = b^2,$$

odkiaľ $v = \sqrt{b^2 - (\frac{a-c}{2})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2 - (a-c)^2}$ a preto pre obsah lichobežníka dostávame

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(a+c) \cdot v = \frac{1}{4}(a+c)\sqrt{4b^2 - (a-c)^2}.$$

Doplňujúce zdroje a materiály

Ak študenti budú stále neistí v používaní základných geometrických poznatkov, je možné ich odkázať na základoškolské učebnice geometrie, v ktorých nájdu aj jednoduchšie príklady na precvičenie, príp. vhodným doplnkom geometrického vzdelania je aj publikácia [Kad96].

Seminár 11: Geometria II – podobné trojuholníky a Pytagorova veta

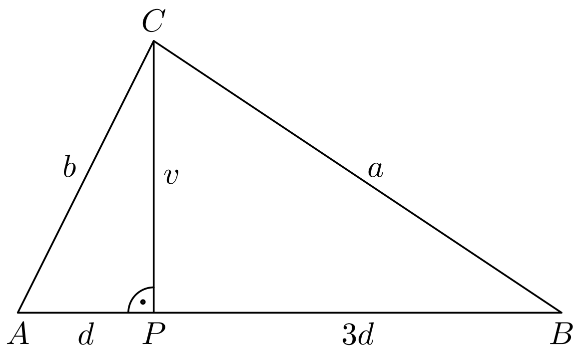
Ciele

Precvičiť riešenie úloh vhodným (viacnásobným) využitím Pytagorovej vety a dvojíc podobných trojuholníkov

Úlohy a riešenia

Úloha 11.1. [66-S-3] Päta P výšky z vrcholu C v trojuholníku ABC delí stranu AB v pomere $|AP| : |PB| = 1 : 3$. V rovnakom pomere sú aj obsahy štvorcov nad jeho stranami AC a BC. Dokážte, že trojuholník ABC je pravouhlý.

Riešenie*. Označme d dĺžku úsečky AP a v dĺžku výšky CP trojuholníka ABC. Dĺžky jeho strán označíme zvyčajným spôsobom a, b, c. Zo zadania teda vyplýva $|PB| = 3d$.



Obr. 11.1.1

Použitím Pytagorovej vety v trojuholníkoch APC a PBC dostávame rovnosti $b^2 = d^2 + v^2$ a $a^2 = 9d^2 + v^2$. Z druhého predpokladu úlohy potom vyplýva rovnosť $a^2 = 3b^2$, čiže $9d^2 + v^2 = 3d^2 + 3v^2$, odkiaľ $v^2 = 3d^2$. Dosadením do prvých dvoch rovností tak dostávame $a^2 = 12d^2$ a $b^2 = 4d^2$. A keďže $c = 4d$, čiže $c^2 = 16d^2$, dokázali sme, že pre dĺžky strán trojuholníka ABC platí $a^2 + b^2 = c^2$.

Trojuholník ABC je preto podľa obrátenej Pytagorovej vety pravouhlý.

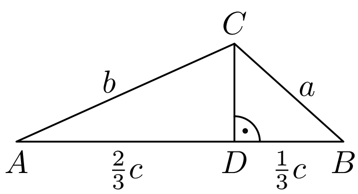
Poznámka. Ak zvážime pomocný pravouhlý trojuholník s odvesnami a a b, tak pre jeho preponu c' podľa Pytagorovej vety platí $c' = a^2 + b^2$. Porovnaním s odvodenou rovnosťou $c^2 = a^2 + b^2$ tak dostávame $c' = c$, takže pôvodný trojuholník je podľa vety *sss* zhodný s trojuholníkom pomocným, a je teda skutočne pravouhlý. Môžeme tolerovať názor, že samotná Pytagorova veta udáva nielen nutnú, ale aj postačujúcu podmienku na to, aby bol daný trojuholník pravouhlý.

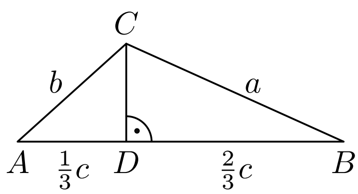
Komentár. Úloha relatívne priamočiaro využíva viacnásobné využitie Pytagorovej vety, je tak vhodným zahrievacím problémom tohto seminára.

Úloha 11.2. [66-I-3] Päta výšky z vrcholu C v trojuholníku ABC delí stranu AB v pomere 1 : 2. Dokážte, že pri zvyčajnom označení dĺžok strán trojuholníka ABC platí nerovnosť

$$3|a - b| < c.$$

Riešenie*. Päta D uvažovanej výšky je podľa zadania tým vnútorným bodom strany AB, pre ktorý platí $|AD| = 2|BD|$ alebo $|BD| = 2|AD|$. Obe možnosti sú znázornené na obr. 11.2.1 s popisom dĺžok strán AC, BC a oboch úsekov rozdelenej strany AB. Pytagorova veta pre pravouhlé trojuholníky ACD





Obr. 11.2.1

a BCD vedie k dvojakému vyjadreniu druhej mocniny spoločnej odvesny CD, pričom v situácii naľavo dostaneme

$$|CD|^2 = b^2 - \left(\frac{2}{3}c\right)^2 = a^2 - \left(\frac{1}{3}c\right)^2,$$

odkiaľ po jednoduchej úprave poslednej rovnosti dostaneme vzťah

$$3(b^2 - a^2) = c^2.$$

Pre druhú situáciu vychádza analogicky

$$3(a^2 - b^2) = c^2.$$

Závery pre obe možnosti možno zapísať jednotne ako rovnosť s absolútnou hodnotou

$$3|a^2 - b^2| = c^2.$$

Ak použijeme rozklad $|a^2 - b^2| = |a - b|(a + b)$ a nerovnosť $c < a + b$ (ktorú ako je známe spĺňajú dĺžky strán každého trojuholníka ABC), dostaneme z odvodenej rovnosti

$$3|a-b|c < 3|a-b|(a+b) = c^2,$$

odkiaľ po vydelení kladnou hodnotou c dostaneme $3|a - b| < c$, ako sme mali dokázať. Zdôraznime, že nerovnosť $3|a - b|c < 3|a - b|(a + b)$ sme správne zapísali ako ostrú – v prípade $a = b$ by síce prešla na rovnosť, avšak podľa nášho odvodenia by potom platilo $c^2 = 0$, čo odporuje tomu, že ide o dĺžku strany trojuholníka.

Iné riešenie*. Nerovnosť, ktorú máme dokázať, možno po vydelení tromi zapísať bez absolútnej hodnoty ako dvojicu nerovností

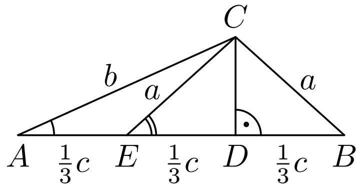
$$-\frac{1}{3}c < a - b < \frac{1}{3}c.$$

Opäť ako v pôvodnom riešení rozlíšime dve možnosti pre polohu päty D uvažovanej výšky a ukážeme, že vypísanú dvojicu nerovností možno upresniť na tvar

$$-\frac{1}{3} < a - b < 0, \quad \text{respektíve} \quad 0 < a - b < \frac{1}{3}c,$$

podľa toho, či nastáva situácia z ľavej či pravej časti obr. 11.2.1.

Pre situáciu z obr. 11.2.1 naľavo prepíšeme avizované nerovnosti $-\frac{1}{3}c < a - b < 0$ ako $a < b < a + \frac{1}{3}c$ a odvodíme ich z pomocného trojuholníka ACE, pričom E je stred úsečky AD, takže body D a E delia stranu AB na tri zhodné úseky dĺžky $\frac{1}{3}c$. V obr. 11.2.2 sme rovno vyznačili, že úsečka



Obr. 11.2.2

EC má dĺžku a ako úsečka BC, a to v dôsledku zhodnosti trojuholníkov BCD a ECD podľa vety *sus*. Preto je pravá z nerovností $a < b < a + \frac{1}{3}c$ porovnaním dĺžok strán trojuholníka ACE, ktoré má všeobecnú platnosť.

Ľavú nerovnosť $a < b$ odvodíme z druhého všeobecného poznatku, že totiž v každom trojuholníku oproti väčšiemu vnútornému uhlu leží dlhšia strana. Stačí nám teda zdôvodniť, prečo pre uhly vyznačené na obr. 11.2.2 platí $|\measuredangle CAE| < |\measuredangle AEC|$. To je však jednoduché: zatiaľ čo uhol CAE je vďaka pravouhlému trojuholníku ACD ostrý, uhol AEC je naopak tupý, pretože k nemu vedľajší uhol CED je ostrý vďaka pravouhlému trojuholníku CED.

Pre prípad situácie z obr. 11.2.1 napravo možno predchádzajúci postup zopakovať s novým bodom E, tentoraz stredom úsečky BD. Môžeme však vďaka súmernosti podľa osi AB konštatovať, že z dokázaných nerovností $-\frac{1}{3}c < a - b < 0$ pre situáciu naľavo vyplývajú nerovnosti $-\frac{1}{3}c < b - a < 0$ pre situáciu napravo, z ktorých po vynásobení číslom -1 dostaneme práve nerovnosti $0 < a - b < \frac{1}{3}$, ktoré sme mali v druhej situácii dokázať.

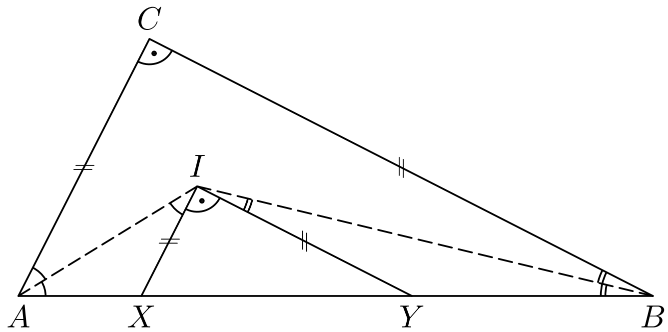
Komentár. Nosným prvkom úlohy je opäť Pytagorova veta, väčšiu pozornosť však vyžaduje rozbor úlohy, keďže päta výšky sa môže nachádzať v dvoch rôznych polohách.

Úloha 11.3. [63-S-3] Daný je trojuholník ABC s pravým uhlom pri vrchole C. Stredom I kružnice trojuholníku vpísanej vedieme rovnobežky so stranami CA a CB, ktoré pretnú preponu postupne v bodoch X a Y. Dokážte, že platí $|AX|^2 + |BY|^2 = |XY|^2$.

Riešenie*. Trojuholník AIX je rovnoramenný, pretože $|\measuredangle IAX| = |\measuredangle IAC| = |\measuredangle AIX|$ (prvá rovnosť vyplýva z podmienky, že bod I leží na osi uhla BAC, druhá potom z vlastností striedavých uhlov, obr. 11.3.1). Preto $|AX| = |IX|$. Analogicky zistíme, že $|BY| = |YI|$. Keďže úsečky IX a IY zvierajú (rovnako ako s nimi rovnobežné úsečky CA a CB) pravý uhol, podľa Pytagorovej vety pre pravouhlý trojuholník XIY platí

$$|AX|^2 + |BY|^2 = |IX|^2 + |YI|^2 = |XY|^2,$$

čo sme mali dokázať.



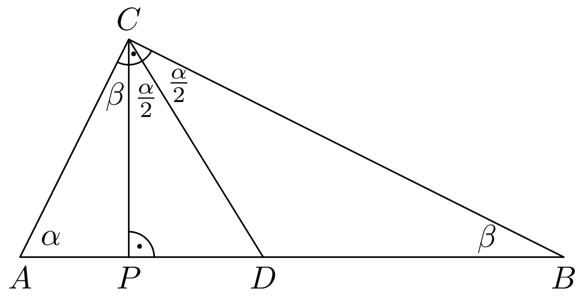
Obr. 11.3.1

Komentár. Úloha už vyžaduje trochu viac invencie a postrehu, keďže kľúčovým krokom v riešení je všimnúť si, že trojuholníky AIX a BIY sú rovnoramenné. K tomu však študentov môže naviesť poloha bodu I, ktorý leží na osi uhlov a to, že rovnobežky AC a XI, resp. BC a YI sú preťaté priečkami AI, resp. BI, takže v náčrtku vieme nájsť niekoľko dvojíc zhodných uhlov. Úloha tak kombinuje použitie Pytagorovej vety aj vlastnosti rovnoramenných trojuholníkov.

Úloha 11.4. [58-S-2] V pravouhlom trojuholníku ABC označíme P pätu výšky z vrcholu C na preponu AB. Priesečník úsečky AB s priamkou, ktorá prechádza vrcholom C a stredom kružnice vpísanej trojuholníku PBC, označíme D. Dokážte, že úsečky AD a AC sú zhodné.

Riešenie*. V pravouhlom trojuholníku ABC s preponou AB pre veľkosti α, β uhlov pri vrcholoch A, B platí $\alpha + \beta = 90°$, preto $|\measuredangle ACP| = 90° - \alpha = \beta$ a $|\measuredangle BCD| = |\measuredangle DCP| = \frac{1}{2}(90° - \beta) = \frac{1}{2}\alpha$ lebo priamka CD je osou uhla BCP (obr. 11.4.1). Pre vonkajší uhol ADC trojuholníka BCD tak zrejme platí $|\measuredangle ADC| = |\measuredangle DBC| + |\measuredangle BCD| = \beta + \frac{1}{2}\alpha = |\measuredangle DCA|$.

Zistili sme, že trojuholník ADC má pri vrcholoch C, D zhodné vnútorné uhly, je teda rovnoramenný, a preto $|AD| = |AC|$.



Obr. 11.4.1

Komentár. Úloha je zameraná na nájdenie veľkosti vhodných uhlov[4] a využitie poznatku, že uhly pri základni rovnoramenného trojuholníka majú rovnakú veľkosť.

Úloha 11.5. [64-I-4] Označme E stred základne AB lichobežníka $ABCD$, v ktorom platí $|AB| : |CD| = 3 : 1$. Uhlopriečka AC pretína úsečky ED, BD postupne v bodoch F, G. Určte postupný pomer $|AF| : |FG| : |GC|$.

Riešenie*. Keďže v zadaní aj v otázke úlohy sú iba pomery, môžeme si dĺžky strán lichobežníka zvoliť ako vhodné konkrétne čísla. Zvoľme teda napr. $|AB| = 6$, potom $|AE| = |BE| = 3$ a $|CD| = 2$. Hľadané dĺžky označme $|AF| = x$, $|FG| = y$, $|GC| = z$. Tieto dĺžky sme vyznačili na obr. 11.5.1, taktiež aj tri dvojice zhodných uhlov, ktoré teraz využijeme pri úvahách o trojuholníkoch podobných podľa vety *uu*.

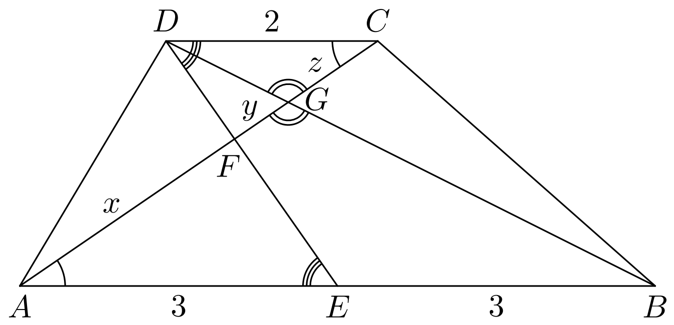
Trojuholníky ABG a CDG sú podobné, preto $(x+y) : z = 6 : 2 = 3 : 1$. Aj trojuholníky AEF a CDF sú podobné, preto $x : (y+z) = 3 : 2$. Odvodené úmery zapíšeme ako sústavu rovníc

$$\begin{aligned} x + y - 3z &= 0, \\ 2x - 3y - 3z &= 0. \end{aligned}$$

Ich odčítaním získame rovnosť $x = 4y$, čiže $x : y = 4 : 1$. Dosadením tohto výsledku do prvej rovnice dostaneme $5y = 3z$, čiže $y : z = 3 : 5$. Spojením oboch pomerov získame výsledok $x : y : z = 12 : 3 : 5$.

Komentár. Úloha je výborným tréningom na hľadanie vhodných dvojíc podobných trojuholníkov tak, aby sme pomocou údajov zo zadania boli schopní určiť hľadaný pomer, keďže jedna dvojica trojuholníkov na nájdenie odpovede zjavne stačiť nebude. Okrem toho tiež pozorovania z náčrtu vedú k sústave dvoch rovníc, takže študenti uplatnia aj svoje algebraické zručnosti.

[4] V anglickej literatúre sa tejto metóde – počítaniu veľkostí všemožných uhlov – hovorí *angle-chasing*.



Obr. 11.5.1

Úloha 11.6. [63-I-4] Vo štvorci $ABCD$ označme K stred strany AB a L stred strany AD. Úsečky KD a LC sa pretínajú v bode M a rozdeľujú štvorec na dva trojuholníky a dva štvoruholníky. Vypočítajte ich obsahy, ak úsečka LM má dĺžku 1 cm.

Riešenie*. Platí $|AK| = |DL|$ a $|AD| = |DC| = 2|AK|$ (obr. 11.6.1), takže pravouhlé trojuholníky AKD a DLC sú zhodné podľa vety *sus*. Okrem toho sú trojuholníky MLD a AKD podobné podľa vety *uu*, lebo $|\measuredangle LDM| = |\measuredangle KDA|$ a $|\measuredangle DLM| = |\measuredangle DLC| = |\measuredangle AKD|$. Analogicky sa dá overiť i podobnosť trojuholníkov MDC a AKD. Z podobnosti trojuholníkov AKD, MLD a MDC vyplýva, že $|MD| = 2|ML| = 2\,\text{cm}$ a $|MC| = 2|MD| = 4\,\text{cm}$. Obsahy útvarov MLD, MDC a $AKML$ sú

$$S_{MLD} = \frac{1\cdot 2}{2} = 1\,\text{cm}^2, \quad S_{MDC} = \frac{2\cdot 4}{2} = 4\,\text{cm}^2$$

a

$$S_{AKML} = S_{AKD} - S_{MLD} = S_{DLC} - S_{MLD} = S_{MDC} = 4\,\text{cm}^2.$$

Nakoniec pomocou Pytagorovej vety dostávame $S_{ABCD} = |DC|^2 = |DM|^2 + |CM|^2 = 20\,\text{cm}^2$, takže

$$S_{KBCM} = S_{ABCD} - (S_{MLD} + S_{MDC} + S_{AKML}) = 11\,\text{cm}^2.$$

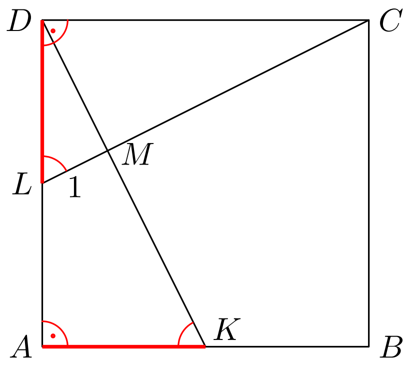
Záver. Obsahy trojuholníkov MLD, MDC a štvoruholníkov $AKML$, $KBCM$ sú postupne $1\,\text{cm}^2$, $4\,\text{cm}^2$, $4\,\text{cm}^2$ a $11\,\text{cm}^2$.

Komentár. Opäť je potrebné identifikovať podobné trojuholníky a potom pomocou známeho koeficientu určiť ich obsahy. Oproti predchádzajúcej úlohe ešte študenti navyše využijú Pytagorovu vetu.

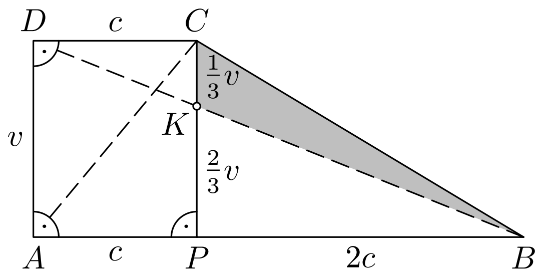
Úloha 11.7. [65-II-3] V pravouhlom lichobežníku $ABCD$ s pravým uhlom pri vrchole A základne AB je bod K priesečníkom výšky CP lichobežníka s jeho uhlopriečkou BD. Obsah štvoruholníka $APCD$ je polovicou obsahu lichobežníka $ABCD$. Určte, akú časť obsahu trojuholníka ABC zaberá trojuholník BCK.

Riešenie*. V pravouholníku $APCD$ označme $c = |CD| = |AP|$ a $v = |AD| = |CP|$ (obr. 11.7.1, pričom sme už vyznačili ďalšie dĺžky, ktoré odvodíme v priebehu riešenia)[5]. Z predpokladu $S_{APCD} =$

[5] Keďže podľa zadania uhlopriečka BD pretína výšku CP, musí jej päta P ležať medzi bodmi A a B, takže ide o „zvyčajný“ lichobežník $ABCD$ s dlhšou základňou AB a kratšou základňou CD.



Obr. 11.6.1



Obr. 11.7.1

$= \frac{1}{2}S_{ABCD}$ vyplýva pre druhú polovicu obsahu $ABCD$ vyjadrenie $\frac{1}{2}S_{ABCD} = S_{PBC}$, takže $S_{APCD} = S_{PBC}$ čiže $cv = \frac{1}{2}|PB|v$, odkiaľ vzhľadom na to, že $v \neq 0$, vychádza $|PB| = 2c$, v dôsledku čoho $|AB| = 3c$.

Trojuholníky CDK a PBK majú pravé uhly pri vrcholoch C, P a zhodné (vrcholové) uhly pri spoločnom vrchole K, takže sú podľa vety *uu* podobné, a to s koeficientom $|PB| : |CD| = 2c : c = 2$. Preto tiež platí $|PK| : |CK| = 2 : 1$, odkiaľ $|KP| = \frac{2}{3}v$ a $|CK| = \frac{1}{3}v$.

Posudzované obsahy trojuholníkov ABC a BCK tak majú vyjadrenie

$$S_{ABC} = \frac{|AB| \cdot |CP|}{2} = \frac{3cv}{2} \quad \text{a} \quad S_{BCK} = \frac{|CK| \cdot |BP|}{2} = \frac{\frac{1}{3}v \cdot 2c}{2} = \frac{cv}{3},$$

preto ich pomer má hodnotu

$$\frac{S_{BCK}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{3}cv}{\frac{3}{2}cv} = \frac{2}{9}.$$

Záver. Trojuholník BCK zaberá $2/9$ obsahu trojuholníka ABC.

Komentár. Najkomplexnejšia úloha tohto seminára precvičí študentov v používaní vlastností podobných trojuholníkov a taktiež vo vyjadrovaní obsahov trojuholníkov pomocou určiteľných hodnôt. Tvorí tak dôstojnú bodku za týmto seminárom.

Domáca práca

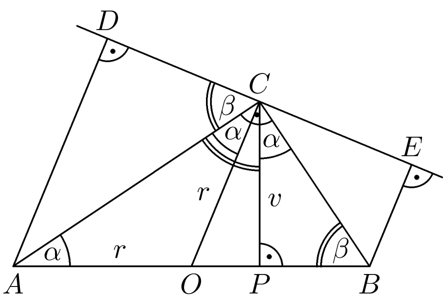
Úloha 11.8. [58-I-2] Pravouhlému trojuholníku ABC s preponou AB je opísaná kružnica. Päty kolmíc z bodov A, B na dotyčnicu k tejto kružnici v bode C označme D, E. Vyjadrite dĺžku úsečky DE pomocou dĺžok odvesien trojuholníka ABC.

Riešenie*. Označme odvesny trojuholníka ABC zvyčajným spôsobom a, b a protiľahlé uhly α, β. Stred prepony AB (ktorý je súčasne stredom opísanej kružnice) označíme O (obr. 11.8.1).

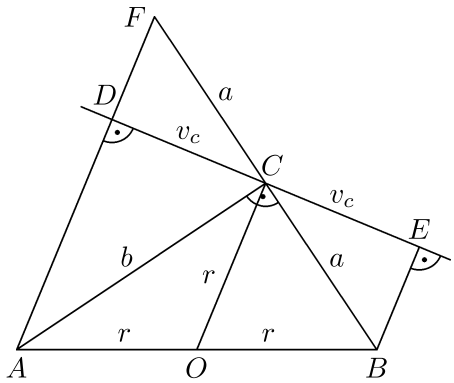
Výška $v = CP$ rozdeľuje trojuholník ABC na trojuholníky ACP a CBP podobné trojuholníku ABC podľa vety *uu* ($\alpha+\beta = 90°$), úsečka OC je kolmá na DE a navyše $|OC| = |OA| = r$ (polomer opísanej kružnice). Odtiaľ $|\measuredangle OCA| = |\measuredangle OAC| = \alpha$ a $|\measuredangle DCA| = 90° - |\measuredangle OCA| = \beta$.

Pravouhlé trojuholníky ACP a ACD so spoločnou preponou AC sa teda zhodujú aj v uhloch pri vrchole C. Sú preto zhodné, dokonca súmerne združené podľa priamky AC. Analogicky sú trojuholníky CBP a CBE súmerne združené podľa BC. Takže $|CD| = |CE| = v$, čiže $|DE| = 2v = 2ab/\sqrt{a^2+b^2}$, lebo z dvojakého vyjadrenia dvojnásobku obsahu trojuholníka ABC vyplýva $v = ab/|AB|$, pričom $|AB| = \sqrt{a^2+b^2}$.

Poznámka. Namiesto dvojakého vyjadrenia obsahu môžeme na výpočet výšky CP využiť podobnosť trojuholníkov CBP a ABC: $\sin\alpha = |CP|/|AC| = |BC|/|AB|$.



Obr. 11.8.1



Obr. 11.8.2

Iné riešenie*. Úsečka OC je strednou priečkou lichobežníka $DABE$, lebo je rovnobežná so základňami a prechádza stredom O ramena AB. Preto D je obrazom bodu E v súmernosti podľa stredu C. Obraz F bodu B v tej istej súmernosti leží na polpriamke AD za bodom D (obr. 11.8.2). Máme $|CF| = |BC| = a$, uhol ACF je pravý, a teda trojuholníky AFC a ABC sú zhodné. Vidíme, že CD je výška v trojuholníku AFC zhodná s výškou v_c trojuholníka ABC, a DE je jej dvojnásobkom. Veľkosť výšky v_c dopočítame rovnako ako v predchádzajúcom riešení.

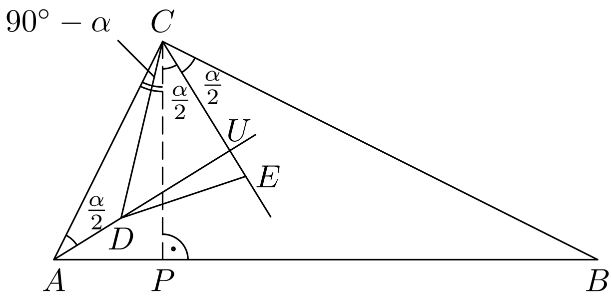
Záver. $|DE| = 2ab/\sqrt{a^2+b^2}$.

Úloha 11.9. [58-II-2] V pravouhlom trojuholníku ABC označíme P pätu výšky z vrcholu C na preponu AB a D, E stredy kružníc vpísaných postupne trojuholníkom APC, CPB. Dokážte, že stred kružnice vpísanej trojuholníku ABC je priesečníkom výšok trojuholníka CDE.

Riešenie*. V pravouhlom trojuholníku ABC s preponou AB označme α veľkosť vnútorného uhla pri vrchole A, zrejme potom platí $|\measuredangle ACP| = 90° - \alpha, |\measuredangle PCB| = \alpha$. Stred D kružnice vpísanej trojuholníku APC leží na osi uhla PAC, takže $|\measuredangle DAC| = \frac{1}{2}\alpha$, a podobne aj $|\measuredangle PCE| = \frac{1}{2}\alpha$. Odtiaľ pre veľkosť uhla AUC v trojuholníku AUC, pričom U je priesečník polpriamok AD a CE (obr. 11.9.1), vychádza

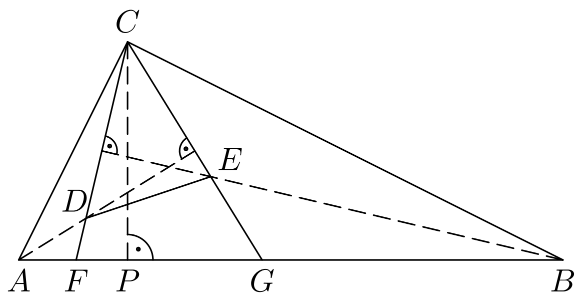
$$|\measuredangle AUC| = 180^\circ - \left(90^\circ - \alpha + \frac{1}{2}\alpha\right) - \frac{1}{2}\alpha = 90^\circ.$$

To znamená, že polpriamka AD je kolmá na CE, úsečka DU je teda výška v trojuholníku DEC. Úplne rovnako zistíme, že aj polpriamka BE (ktorá je zároveň osou uhla ABC) je kolmá na CD. Dostávame tak, že priesečník polpriamok AD a BE, čo je stred kružnice vpísanej trojuholníku ABC, je zároveň aj priesečníkom výšok trojuholníka DEC.



Obr. 11.9.1

Iné riešenie*. Označme F a G zodpovedajúce priesečníky priamok CD a CE so stranou AB (obr. 11.9.2). Podľa úlohy vyriešenej na seminári v škole je trojuholník CAG rovnoramenný so základňou CG. Os



Obr. 11.9.2

AD uhla CAG rovnoramenného trojuholníka CAG je tak aj jeho osou súmernosti, a je preto kolmá na základňu CG, teda aj na CE. Podobne zistíme, že aj trojuholník CBF je rovnoramenný so základňou CF, takže os BE uhla FBC je kolmá na CF, teda aj na CD. Priesečník oboch osí AD a BE je tak nielen stredom kružnice vpísanej trojuholníku ABC, ale aj priesečníkom výšok trojuholníka CDE, čo sme mali dokázať.

Doplňujúce zdroje a materiály

Vhodným doplnkom nielen tohto, ale všetkých ďalších geometrických seminárov je publikácia [ART13], ktorá obsahuje veľké množstvo riešených úloh z euklidovskej geometrie, od jednoduchých až po úroveň medzinárodných súťaží.

Ďalším výborným zdrojom, ktorý môžeme študentom odporučiť, alebo z neho sami čerpať ďalšiu inšpiráciu, je text „Počítanie uhlov“[6], ktorý je možné nájsť na stránkach Korešpondenčného

[6] https://old.kms.sk/~mazo/matematika/pocitanieUhlov.pdf

matematického seminára.

2.4 December

Seminár 12: Geometria III – obsahy trojuholníkov a štvoruholníkov

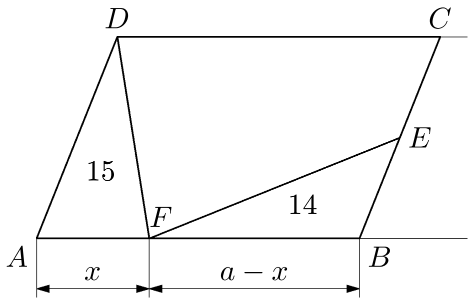
Ciele

Precvičenie úloh zaoberajúcich sa obsahmi trojuholníkov a štvoruholníkov, rôznorodé určovanie obsahu, príp. pomeru obsahov trojuholníkov v úlohách.

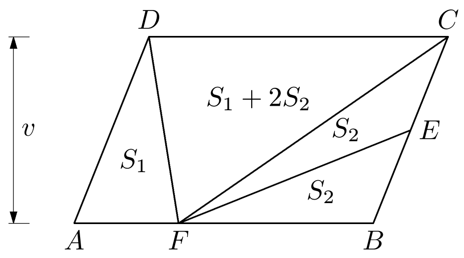
Úlohy a riešenia

Úloha 12.1. [57-S-2] V danom rovnobežníku $ABCD$ je bod E stred strany BC a bod F leží vnútri strany AB. Obsah trojuholníka AFD je $15\,\mathrm{cm}^2$ a obsah trojuholníka FBE je $14\,\mathrm{cm}^2$. Určte obsah štvoruholníka $FECD$.

Riešenie*. Označme v vzdialenosť bodu C od priamky AB, $a = |AB|$ a $x = |AF|$. Pre obsahy trojuholníkov AFD a FBE (obr. 12.1.1) platí $\frac{1}{2}x \cdot v = 15$, $\frac{1}{2}(a-x) \cdot \frac{1}{2}v = 14$. Odtiaľ $xv = 30$, $av - xv = 56$. Sčítaním oboch rovností nájdeme obsah rovnobežníka $ABCD$: $S_{ABCD} = av = 86\,\mathrm{cm}^2$. Obsah štvoruholníka $FECD$ je teda $S_{FECD} = S_{ABCD} - (S_{AFD} + S_{FBE}) = 57\,\mathrm{cm}^2$.



Obr. 12.1.1

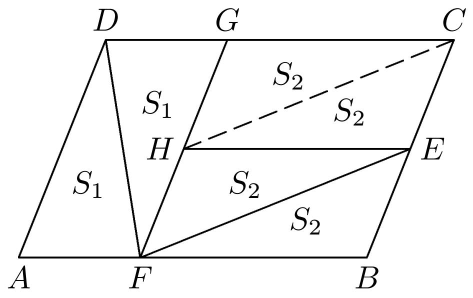


Obr. 12.1.2

Iné riešenie*. Trojuholníky BEF a ECF majú spoločnú výšku z vrcholu F a zhodné základne BE a EC. Preto sú obsahy oboch trojuholníkov rovnaké. Z obr. 12.1.2 vidíme, že obsah trojuholníka CDF je polovicou obsahu rovnobežníka $ABCD$ (oba útvary majú spoločnú základňu CD a rovnakú výšku). Druhú polovicu tvorí súčet obsahov trojuholníkov AFD a BCF. Odtiaľ $S_{FECD} = S_{ECF} + S_{CDF} = S_{ECF} + (S_{AFD} + S_{BCF}) = S_{AFD} + 3S_{FBE} = 57\,\mathrm{cm}^2$.

Iné riešenie*. Do rovnobežníka dokreslíme úsečky FG a EH rovnobežné so stranami BC a AB tak, ako znázorňuje obr. 12.1.3. Rovnobežníky $AFGD$ a $FBEH$ sú svojimi uhlopriečkami DF a EF rozdelené na dvojice zhodných trojuholníkov. Takže $S_{GDF} = S_{AFD} = 15\,\mathrm{cm}^2$ a $S_{HFE} = S_{BEF} = 14\,\mathrm{cm}^2$. Zo zhodnosti rovnobežníkov $HECG$ a $FBEH$ navyše ľahko usúdime, že všetky štyri trojuholníky FBE, EHF, HEC a CGH sú zhodné, takže obsah štvoruholníka $FECD$ je $S_{AFD} + 3S_{FBE} = 57\,\mathrm{cm}^2$.

Komentár. Úloha je zaradená ako rozcvička pred komplexnejšími problémami, nie je totiž veľmi náročná na vyriešenie. Pekne tiež demonštruje, že niekedy nám vhodný prístup, náčrtok alebo správne nakreslená priamka v obrázku riešenie úlohy významne zjednoduší.



Obr. 12.1.3

Úloha 12.2. [62-II-2] Vnútri rovnobežníka $ABCD$ je daný bod K a v páse medzi rovnobežkami BC a AD v polrovine opačnej k CDA je daný bod L. Obsahy trojuholníkov ABK, BCK, DAK a DCL sú $S_{ABK} = 18\,\text{cm}^2$, $S_{BCK} = 8\,\text{cm}^2$, $S_{DAK} = 16\,\text{cm}^2$, $S_{DCL} = 36\,\text{cm}^2$. Vypočítajte obsahy trojuholníkov CDK a ABL.

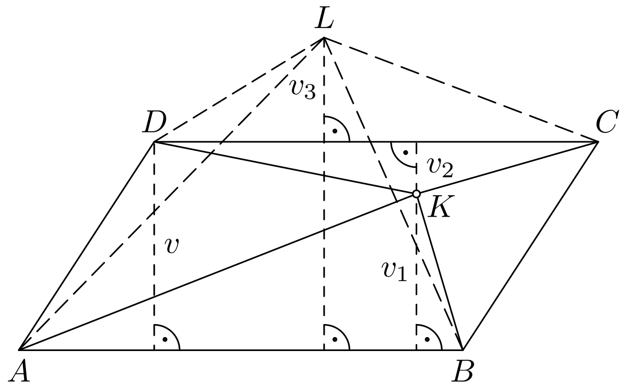
Riešenie*. Trojuholníky ABK a CDK majú zhodné strany AB a CD a súčet ich výšok v_1 a v_2 (vzdialeností bodu K od priamky AB, resp. CD) je rovný výške v rovnobežníka $ABCD$ (vzdialenosti rovnobežných priamok AB a CD, obr. 12.2.1). Preto súčet ich obsahov dáva polovicu súčtu obsahu daného rovnobežníka:

$$S_{ABK} + S_{CDK} = \frac{1}{2}|AB|v_1 + \frac{1}{2}|CD|v_2 = \frac{1}{2}|AB| \cdot (v_1 + v_2) = \frac{1}{2}|AB| \cdot v \;= \frac{1}{2}S_{ABCD}.$$

Podobne aj $S_{BCK} + S_{DAK} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$, teda

$$S_{CDK} = S_{BCK} + S_{DAK} - S_{ABK} = 6\,\text{cm}^2.$$

Trojuholníky ABL a DCL majú zhodné strany AB a CD. Ak v_3 označuje príslušnú výšku druhého



Obr. 12.2.1

z nich, je výška prvého z nich rovná $v+v_3$, takže pre rozdiel obsahov týchto trojuholníkov platí

$$S_{ABL}-S_{DCL}=\frac{1}{2}|AB|\cdot(v+v_3)-\frac{1}{2}|CD|\cdot v_3=\frac{1}{2}|AB|\cdot(v+v_3-v_3)=$$
$$=\frac{1}{2}|AB|\cdot v=\frac{1}{2}S_{ABCD}=S_{BCK}+S_{DAK}.$$

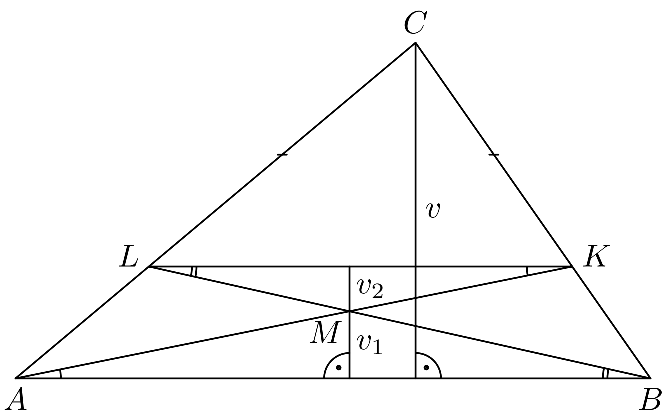
Odtiaľ vyplýva

$$S_{ABL}=S_{BCK}+S_{DAK}+S_{DCL}=60\,\mathrm{cm}^2.$$

Komentár. Úloha precvičuje použitie tvrdenia, ktoré sme dokázali v prvom geometrickom seminári, a to, že ak majú dva trojuholníky základňu rovnakej dĺžky, potom ich obsahy sú v rovnakom pomere ako ich výšky na túto základňu.

Úloha 12.3. [64-S-2] Označme K a L postupne body strán BC a AC trojuholníka ABC, pre ktoré platí $|BK|=\frac{1}{3}|BC|$, $|AL|=\frac{1}{3}|AC|$. Nech M je priesečník úsečiek AK a BL. Vypočítajte pomer obsahov trojuholníkov ABM a ABC.

Riešenie*. Označme v výšku trojuholníka ABC na stranu AB, v_1 výšku trojuholníka ABM na stranu AB a v_2 výšku trojuholníka KLM na stranu KL (obr. 12.3.1). Z podobnosti trojuholníkov LKC a ABC (zaručenej vetou *sus*) vyplýva, že $|KL|=\frac{2}{3}|AB|$. Z porovnania ich výšok zo spoločného vrcholu C vidíme, že výška v trojuholníka ABC je rovná trojnásobku vzdialenosti priečky KL od strany AB, teda $v=3(v_1+v_2)$. Keďže AK a BL sú priečky rovnobežiek KL a AB, vyplýva zo zhodnosti prislúchajúcich striedavých uhlov podobnosť trojuholníkov ABM a KLM. Keďže $|KL|=\frac{2}{3}|AB|$, je



Obr. 12.3.1

tiež $v_2=\frac{2}{3}v_1$, a preto $v_1+v_2=\frac{5}{3}v_1$, čiže

$$v=3(v_1+v_2)=5v_1.$$

Trojuholníky ABM a ABC majú spoločnú stranu AB, preto ich obsahy sú v pomere výšok na túto stranu, takže obsah trojuholníka ABC je päťkrát väčší ako obsah trojuholníka ABM.

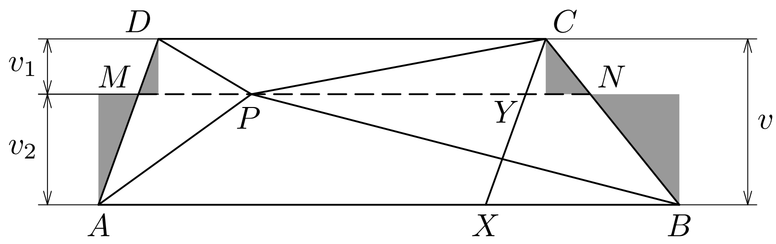
Komentár. Ďalšia úloha, ktorá precvičuje rovnaké tvrdenie ako predchádzajúca. Pomery výšok je tentoraz potrebné určiť z podobnosti trojuholníkov. Tu sa teda uplatnia znalosti precvičované na minulom seminárnom stretnutí.

Úloha 12.4. [64-II-3] Daný je lichobežník $ABCD$ so základňami AB, CD, pričom $2|AB| = 3|CD|$.

a) Nájdite bod P vnútri lichobežníka tak, aby obsahy trojuholníkov ABP a CDP boli v pomere 3 : 1 a aj obsahy trojuholníkov BCP a DAP boli v pomere 3 : 1.

b) Pre nájdený bod P určte postupný pomer obsahov trojuholníkov ABP, BCP, CDP a DAP.

Riešenie*. Predpokladajme, že bod P má požadované vlastnosti. Priamka rovnobežná so základňami lichobežníka a prechádzajúca bodom P pretína ramená AD a BC postupne v bodoch M a N (obr. 12.4.1). Označme v výšku daného lichobežníka, v_1 výšku trojuholníka CDP a v_2 výšku trojuholníka ABP. a) Keďže obsahy trojuholníkov ABP a CDP sú v pomere 3 : 1, platí



Obr. 12.4.1

$$\frac{|AB|v_2}{2} : \frac{|CD|v_1}{2} = 3:1, \quad \text{čiže} \quad \frac{v_1}{v_2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2} = \frac{1}{2}.$$

Z vyznačených dvojíc podobných pravouhlých trojuholníkov vyplýva, že v práve určenom pomere 2 : 1 výšok v_2 a v_1 delí aj bod M rameno AD a bod N rameno BC (v prípade pravého uhla pri jednom z vrcholov A či B je to zrejmé rovno). Tým je konštrukcia bodov M a N, a teda aj úsečky MN určená. Teraz zistíme, v akom pomere ju delí uvažovaný bod P.

Keďže obsahy trojuholníkov BCP a DAP sú v pomere 3 : 1, platí

$$\left(\frac{|NP|v_1}{2} + \frac{|NP|v_2}{2}\right) : \left(\frac{|MP|v_1}{2} + \frac{|MP|v_2}{2}\right) = 3:1,$$

$$\frac{|NP|(v_1+v_2)}{2} : \frac{|MP|(v_1+v_2)}{2} = 3:1, \quad |NP| : |MP| = 3:1.$$

Tým je konštrukcia (jediného) vyhovujúceho bodu P úplne opísaná.

b) Doplňme trojuholník DAC na rovnobežník $DAXC$. Jeho strana CX delí priečku MN na dve časti, a keďže $v_1 = \frac{1}{3}v$, môžeme dĺžku priečky MN vyjadriť ako $|MN| = |MY| + |YN| = |AX| + \frac{1}{3}|XB| = |CD| + \frac{1}{3}(|AB| - |CD|) = \frac{1}{3}|AB| + \frac{2}{3}|CD| = \frac{7}{6}|CD|$, lebo podľa zadania platí $|AB| = \frac{3}{2}|CD|$. Preto

$$|MP| = \frac{1}{4}|MN| = \frac{1}{4}\cdot\frac{7}{6}|CD| = \frac{7}{24}|CD|,$$

takže pre pomer obsahov trojuholníkov CDP a DAP platí

$$\frac{|CD|v_1}{2} : \frac{|MP|(v_1+v_2)}{2} = (|CD|v_1) : \left(\frac{7}{24} \cdot |CD| \cdot 3v_1\right) = 1 : \frac{7}{8} = 8 : 7.$$

Pomer obsahov trojuholníkov BCP a CDP je teda $21 : 8$ a pomer obsahov trojuholníkov ABP a BCP je tak $24 : 21$. Postupný pomer obsahov trojuholníkov ABP, BCP, CDP a DAP je preto $24 : 21 : 8 : 7$.

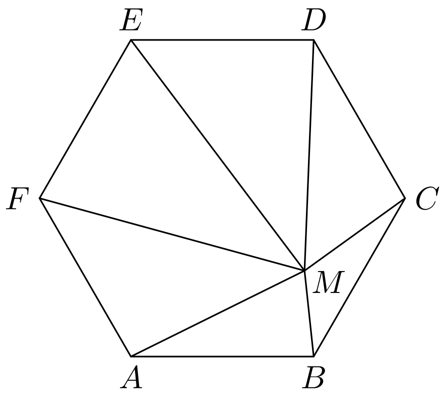
Komentár. Táto komplexná úloha je vrcholom tohto seminárneho stretnutia. Vyžaduje umnú prácu s pomermi obsahov, podobnými trojuholníkmi aj netriviálny nápad doplnenia trojuholníka DAC na rovnobežník. Je tak vhodné skôr než samostatne úlohu riešiť spoločne na tabuľu. Študentom tiež pripomenieme, že podobne ako v úvodnej úlohe, aj tu našlo vhodné rozdelenie zadaného útvaru svoje opodstatnenie a prispelo k úspešnému rozklúsknutiu problému.

Úloha 12.5. [62-I-6] Vnútri pravidelného šesťuholníka $ABCDEF$ s obsahom $30\,\text{cm}^2$ je zvolený bod M. Obsahy trojuholníkov ABM a BCM sú postupne $3\,\text{cm}^2$ a $2\,\text{cm}^2$. Určte obsahy trojuholníkov CDM, DEM, EFM a FAM.

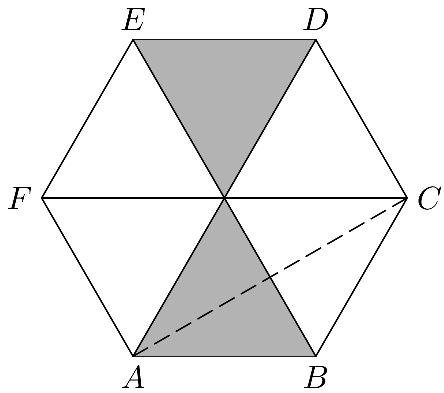
Riešenie*. Úloha je o obsahu šiestich trojuholníkov, na ktoré je daný pravidelný šesťuholník rozdelený spojnicami jeho vrcholov s bodom M (obr. 12.5.1). Celý šesťuholník s daným obsahom, ktorý označíme S, možno rozdeliť na šesť rovnostranných trojuholníkov s obsahom $S/6$ (obr. 12.5.2). Ak označíme r ich stranu, v vzdialenosť rovnobežiek AB, CD a v_1 vzdialenosť bodu M od priamky AB, dostaneme

$$S_{ABM} + S_{EDM} = \frac{1}{2}rv_1 + \frac{1}{2}r(v - v_1) = \frac{1}{2}rv = \frac{S}{3},$$

lebo $S/3$ je súčet obsahov dvoch vyfarbených rovnostranných trojuholníkov. Vďaka symetrii majú tú istú hodnotu $S/3$ aj súčty $S_{BCM} + S_{EFM}$ a $S_{CDM} + S_{FAM}$. Odtiaľ už dostávame prvé dva neznáme obsahy $S_DEM = S/3 - S_{ABM} = 7\,\text{cm}^2$ a $S_{EFM} = S/3 - S_{BCM} = 8\,\text{cm}^2$. Ako určiť zvyšné dva obsahy



Obr. 12.5.1



Obr. 12.5.2

S_{CDM} a S_{FAM}, keď zatiaľ poznáme len ich súčet $S/3$? Všimnime si, že súčet zadaných obsahov trojuholníkov ABM a BCM má významnú hodnotu $S/6$, ktorá je aj obsahom trojuholníka ABC (to vyplýva opäť z obr. 12.5.2). Taká zhoda obsahov znamená práve to, že bod M leží na uhlopriečke AC. Trojuholníky ABM a BCM tak majú zhodné výšky zo spoločného vrcholu B a to isté platí aj pre výšky trojuholníkov CDM a FAM z vrcholov F a D (t. j. bodov, ktoré majú od priamky AC rovnakú vzdialenosť). Pre pomery obsahov týchto dvojíc trojuholníkov tak dostávame

$$\frac{S_{CDM}}{S_{FAM}} = \frac{|CM|}{|AM|} = \frac{S_{BCM}}{S_{ABM}} = \frac{2}{3}.$$

V súčte $S_{CDM} + S_{FAM}$ majúcom hodnotu $S/3$ sú teda sčítance v pomere $2:3$. Preto $S_{CDM} = 4\,\mathrm{cm}^2$ a $S_{FAM} = 6\,\mathrm{cm}^2$.

Komentár. Úloha je odľahčeným a netradičným príkladom využitia princípu, na ktorom sme stavali celé toto seminárne stretnutie: súčty obsahov „protiľahlých" trojuholníkov sú stále rovnaké. Posledná časť úlohy vyžaduje netriviálny nápad a študenti tak možno budú potrebovať malú radu.

Domáca práca

Úloha 12.6. [65-I-4] Vnútri strán AB, AC daného trojuholníka ABC sú zvolené postupne body E, F, pričom $EF \parallel BC$. Úsečka EF je potom rozdelená bodom D tak, že platí

$$p = |ED| : |DF| = |BE| : |EA|.$$

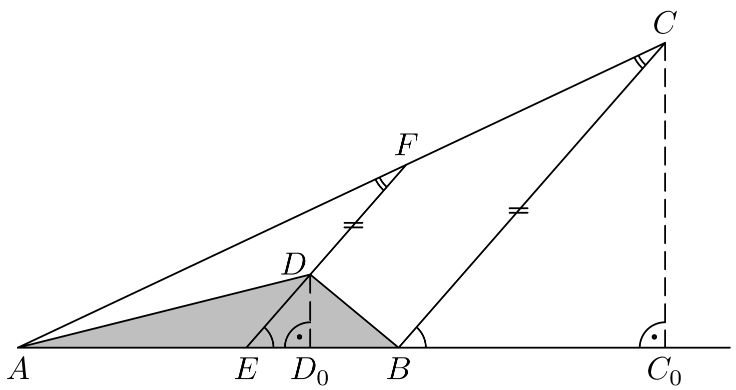
a) Ukážte, že pomer obsahov trojuholníkov ABC a ABD je pre $p = 2:3$ rovnaký ako pre $p = 3:2$.

b) Zdôvodnite, prečo pomer obsahov trojuholníkov ABC a ABD má hodnotu aspoň 4.

Riešenie*. Pre spoločnú hodnotu p oboch pomerov zo zadania platí

$$|ED| = p|DF| \quad \text{a zároveň} \quad |BE| = p|EA|. \tag{12.6.1}$$

Pred vlastným riešením oboch úloh a) a b) vyjadríme pomocou daného čísla p skúmaný pomer obsahov trojuholníkov ABC a ABD. Ten je rovný – keďže trojuholníky majú spoločnú stranu AB – pomeru dĺžok ich výšok CC_0 a DD_0 (obr. 12.6.1), ktorý je rovnaký ako pomer dĺžok úsečiek BC a



Obr. 12.6.1

ED, a to na základe podobnosti pravouhlých trojuholníkov BCC_0 a EDD_0 podľa vety *uu* (uplatnenej vďaka $BC \parallel ED$).[7] Platí teda rovnosť

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ABD}} = \frac{|BC|}{|ED|}. \tag{12.6.2}$$

[7] V prípade pravých uhlov ABC a AED to platí triviálne, lebo vtedy $B = C_0$ a $E = D_0$.

Vráťme sa teraz k rovnostiam 12.6.1, podľa ktorých

$$|EF| = (1+p)|DF| \quad \text{a} \quad |AB| = (1+p)|EA|,$$

a všimnime si, že trojuholníky ABC a AEF majú spoločný uhol pri vrchole A a zhodné uhly pri vrcholoch C a F (pretože $BC \parallel EF$), takže sú podľa vety *uu* podobné. Preto pre dĺžky ich strán platí

$$\frac{|AB|}{|AE|} = \frac{|BC|}{|EF|}, \quad \text{čiže} \quad 1+p = \frac{|BC|}{(1+p)|DF|}, \quad \text{odkiaľ} \quad |BC| = (1+p)^2|DF|.$$

Keď vydelíme posledný vzťah hodnotou $|ED|$, ktorá je rovná $p|DF|$ podľa 12.6.1, získame podiel z pravej strany 12.6.2 a tým aj hľadané vyjadrenie

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ABD}} = \frac{(1+p)^2}{p}. \tag{12.6.3}$$

a) Algebraickou úpravou zlomku zo vzťahu 12.6.3

$$\frac{(1+p)^2}{p} = \frac{1+2p+p^2}{p} = 2+p+\frac{1}{p}$$

zisťujeme, že hodnota pomeru $S_{ABC} : S_{ABD}$ je pre akékoľvek dve navzájom prevrátené hodnoty p a $1/p$ rovnaká, teda nielen pre hodnoty $2/3$ a $3/2$, ako sme mali ukázať.

b) Podľa vzťahu 12.6.3 je našou úlohou overiť pre každé $p > 0$ nerovnosť

$$\frac{(1+p)^2}{p} \geq 4, \quad \text{čiže} \quad (1+p)^2 \geq 4p.$$

To je však zrejme ekvivalentné s nerovnosťou $(1-p)^2 \geq 0$, ktorá skutočne platí, nech je základ druhej mocniny akýkoľvek (rovnosť nastane jedine pre $p = 1$).

Doplňujúce zdroje a materiály

Rovnako ako v predchádzajúcich geometrických seminároch ostávame v odporúčaniach verní publikáciám [ART13] a [Kad96].

Seminár 13: Geometria IV – kružnica vpísaná a opísaná trojuholníku

Ciele

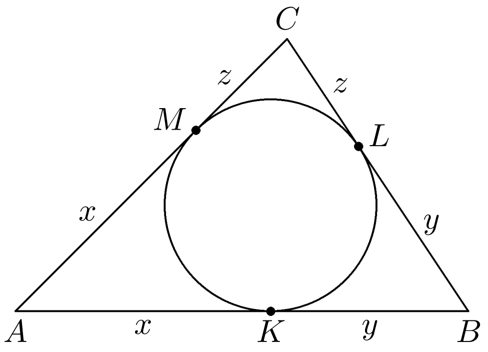
Precvičiť úlohy zamerané najmä na vlastnosti kružnice vpísanej a opísanej trojuholníku.

Úlohy a riešenia

Úloha 13.1. [57-II-1] Trojuholník ABC spĺňa pri zvyčajnom označení dĺžok strán podmienku $a \leq b \leq c$. Vpísaná kružnica sa dotýka strán AB, BC a AC postupne v bodoch K, L a M. Dokážte, že z úsečiek AK, BL a CM možno zostrojiť trojuholník práve vtedy, keď platí $b+c < 3a$.

Riešenie*. Označme $x = |AK| = |AM|$, $y = |BL| = |BK|$, $z = |CM| = |CL|$ (obr. 13.1.1) zhodné úseky dotyčníc z jednotlivých vrcholov trojuholníka ku vpísanej kružnici. Zrejme

$$a = y+z, \quad b = z+x, \quad c = x+y. \tag{13.1.1}$$



Obr. 13.1.1

Z uvedených rovností vidíme, že daná podmienka

$$b + c < 3a \tag{13.1.2}$$

je ekvivalentná nerovnosti

$$x < y + z, \tag{13.1.3}$$

čo je nutná podmienka existencie trojuholníka so stranami dĺžok x, y a z.

Dosadením z 13.1.1 do podmienok $b \le c$ a $a \le b$ zistíme, že $z \le y$ a $y \le x$. To znamená, že ďalšie dve trojuholníkové nerovnosti $y < z + x$ a $z < x + y$ sú automaticky splnené, takže nerovnosť 13.1.3, a tým aj 13.1.2 je podmienkou postačujúcou. Tým je tvrdenie úlohy dokázané.

Komentár. Úloha využíva poznatok, že spojnice vrcholov a bodov dotyku so stredom vpísanej kružnice rozdelia trojuholník na tri dvojice zhodných trojuholníkov. Ten využijeme v nasledujúcej úlohe aj domácej práci. Okrem toho, aj keď úloha nie je na výpočet nijako extrémne náročná, je študentov potrebné upozorniť, že dokazujú ekvivalenciu, takže nerovnosť zo zadania musí byť nielen podmienkou nutnou, ale aj postačujúcou.

Úloha 13.2. [61-S-2] Označme S stred základne AB daného rovnoramenného trojuholníka ABC. Predpokladajme, že kružnice vpísané trojuholníkom ACS, BCS sa dotýkajú priamky AB v bodoch, ktoré delia základňu AB na tri zhodné diely. Vypočítajte pomer $|AB| : |CS|$.

Riešenie*. Vďaka súmernosti podľa priamky CS sa obe vpísané kružnice dotýkajú výšky CS v rovnakom bode, ktorý označíme D. Body dotyku týchto kružníc s úsečkami AS, BS, AC, BC označíme postupne E, F, G, H (obr. 13.2.1). Pre vyjadrenie všetkých potrebných dĺžok ešte zavedieme označenie $x = |SD|$ a $y = |CD|$. Vzhľadom na symetriu dotyčníc z daného bodu k danej kružnici platia rovnosti

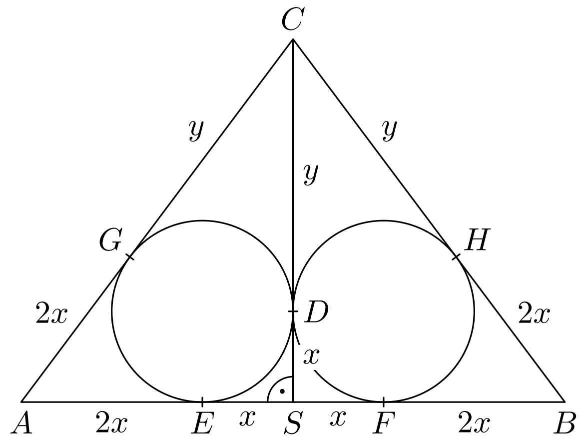
$$|SD| = |SE| = |SF| = x \quad \text{a} \quad |CD| = |CG| = |CH| = y.$$

Úsečka EF má preto dĺžku $2x$, ktorá je podľa zadania zároveň dĺžkou úsečiek AE a BF, a teda aj dĺžkou úsečiek AG a BH (opäť vďaka symetrii dotyčníc). Odtiaľ už bezprostredne vyplývajú rovnosti

$$|AB| = 6x, \quad |AC| = |BC| = 2x + y \quad \text{a} \quad |CS| = x + y.$$

Závislosť medzi dĺžkami x a y zistíme použitím Pytagorovej vety pre pravouhlý trojuholník ACS (s odvesnou A dĺžky $3x$):

$$(2x + y)^2 = (3x)^2 + (x + y)^2.$$



Obr. 13.2.1

Roznásobením a ďalšími úpravami odtiaľ dostaneme (x a y sú kladné hodnoty)

$$
\begin{aligned}
4x^2+4xy+y^2 &= 9x^2+x^2+2xy+y^2,\\
2xy &= 6x^2,\\
y &= 3x.
\end{aligned}
$$

Hľadaný pomer tak má hodnotu

$$|AB| : |CS| = 6x : (x+y) = 6x : 4x = 3 : 2.$$

Poznamenajme, že prakticky rovnaký postup celého riešenia možno zapísať aj pri štandardnom označení $c = |AB|$ a $v = |CS|$. Keďže podľa zadania platí $|AE| = \frac{1}{3}c$, a teda $|SE| = \frac{1}{6}c$, z rovnosti $|SD| = |SE|$ vyplýva $|CD| = |CS| - |SD| = v - \frac{1}{6}c$, odkiaľ

$$|AC| = |AG| + |CG| = |AE| + |CD| = \tfrac{1}{3}c + (v - \tfrac{1}{6}c) = v + \tfrac{1}{6}c,$$

takže z Pytagorovej vety pre trojuholník ACS,

$$(v+\tfrac{1}{6}c)^2 = (\tfrac{1}{2}c)^2 + v^2,$$

vychádza $3v = 2c$, čiže $c : v = 3 : 2$.

Komentár. Úloha vychádza z poznatku, ktorý si študenti osvojili v úlohe predchádzajúcej a pridáva k nemu ešte prácu s Pytagorovou vetou a manipuláciu s algebraickými výrazmi, takže tvorí prirodzené pokračovanie úlohy predchádzajúcej.

Úloha 13.3. [62-S-1] Danému rovnostrannému trojuholníku vpíšme a opíšme kružnicu. Označme S obsah vzniknutého medzikružia a T obsah kruhu, ktorého priemer je zhodný s dĺžkou strany daného trojuholníka. Ktorý z obsahov S, T je väčší? Svoju odpoveď zdôvodnite.

Riešenie*. Ukážeme, že sa oba obsahy rovnajú. Označme A, B, C vrcholy daného trojuholníka a r a R zodpovedajúce polomery jeho vpísanej a opísanej kružnice; dĺžku jeho strany označme a. Obe uvedené kružnice majú spoločný stred S. Označme ešte P bod dotyku vpísanej kružnice so stranou AB. Keďže trojuholník ABC je rovnostranný, je P zároveň stredom strany AB. Použitím Pytagorovej vety v pravouhlom trojuholníku PSB dostávame

$$R^2 - r^2 = (\tfrac{1}{2}a)^2,$$

čo je ekvivalentné s dokazovaným tvrdením $S = \pi(R^2 - r^2) = \pi\left(\tfrac{1}{2}a\right)^2 = T$.

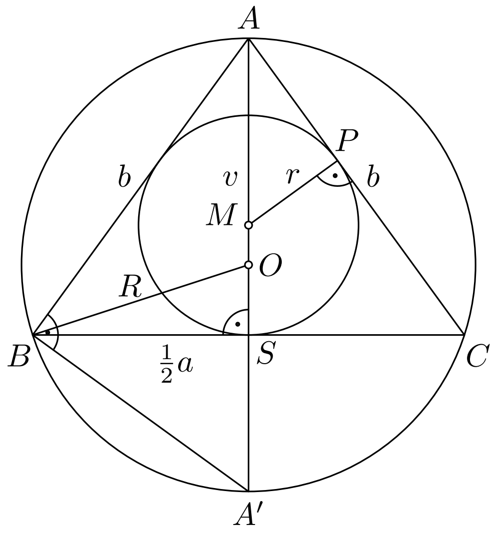
Poznámka. Rovnostranný trojuholník so stranou a má výšku veľkosti $v = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$, takže skúmané polomery sú $R = \frac{2}{3}v\left(= \frac{1}{3}a\sqrt{3}\right)$ a $r = \frac{1}{3}v\left(= \frac{1}{6}a\sqrt{3}\right)$, a preto

$$S = \pi(R^2 - r^2) = \pi\left(\tfrac{4}{9} - \tfrac{1}{9}\right)v^2 = \pi \cdot \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{3}{4}a^2 = \pi\left(\tfrac{1}{2}a\right)^2 = T.$$

Komentár. Úloha je relatívne jednoduchá, využíva znalosť o bode dotyku vpísanej kružnice a taktiež pripravuje študentov na nasledujúcu zložitejšiu analýzu.

Úloha 13.4. [61-I-5] Daný je rovnoramenný trojuholník so základňou dĺžky a a ramenami dĺžky b. Pomocou nich vyjadrite polomer R kružnice opísanej a polomer r kružnice vpísanej tomuto trojuholníku. Potom ukážte, že platí $R \geq 2r$ a zistite, kedy nastane rovnosť.

Riešenie*. Označme S stred základne BC daného rovnoramenného trojuholníka ABC, O stred jeho opísanej kružnice, M stred vpísanej kružnice a P pätu kolmice z bodu M na rameno AC (obr. 13.4.1). Z pravouhlého trojuholníka BSA pomocou Pytagorovej vety vyjadríme veľkosť v výšky AS, pričom



Obr. 13.4.1

v pravouhlom trojuholníku BSO s preponou dĺžky R pre odvesnu OS platí $|OS| = ||AS| - |AO|| = |v - R|$ (musíme si uvedomiť, že v tupouhlom trojuholníku ABC bude bod S ležať medzi bodmi A

a O!). Dostávame tak dve rovnosti

$$v^2 = b^2 - \frac{a^2}{4},$$
$$R^2 = \frac{a^2}{4} + (v - R)^2;$$

ich sčítaním vyjde

$$v^2 + R^2 = b^2 + (v - R)^2, \quad \text{čiže} \quad b^2 = 2vR.$$

Dosadením z prvej rovnice $v = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2 - a^2}$ do poslednej rovnosti dostaneme hľadaný vzorec pre R.

Dodajme, že rovnosť $b^2 = 2vR$, ktorú sme práve odvodili a z ktorej už ľahko vyplýva vzorec pre polomer R, je Euklidovou vetou o odvesne AB pravouhlého trojuholníka ABA' s preponou AA', ktorá je priemerom kružnice opísanej trojuholníku ABC (obr. 13.4.1).

Nájdený vzorec pre polomer R zapíšeme prehľadne spolu s druhým hľadaným vzorcom pre polomer r, ktorého odvodeniu sa ešte len budeme venovať:

$$R = \frac{\sqrt{b^2}}{\sqrt{4b^2 - a^2}} \quad \text{a} \quad r = \frac{a\sqrt{4b^2 - a^2}}{2(a+2b)}. \tag{13.4.1}$$

Druhý zo vzorcov 13.4.1 sa dá získať okamžite zo známeho vzťahu $r = 2S/(a+b+c)$ pre polomer r kružnice vpísanej do trojuholníka so stranami a, b, c a obsahom S; v našom prípade stačí len dosadiť $b = c$ a $2S = av$, kde $v = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2 - a^2}$ podľa úvodnej časti riešenia.

Ďalšie dva spôsoby odvodenia druhého zo vzorcov 13.4.1 založíme na úvahe o pravouhlom trojuholníku AMP, ktorého strany majú dĺžky

$$|AM| = v - r, \quad |MP| = r, \quad |AP| = |AC| - |PC| = b - |SC| = b - \frac{a}{2}.$$

Pre tento trojuholník môžeme napísať Pytagorovu vetu alebo využiť jeho podobnosť s trojuholníkom ACS, konkrétne zapísať rovnosť sínusov ich spoločného uhla pri vrchole A. Podľa toho dostaneme rovnice

$$(v-r)^2 = r^2 + \left(b - \frac{a}{2}\right)^2, \quad \text{resp.} \quad \frac{r}{v-r} = \frac{\frac{1}{2}a}{b},$$

ktoré sú obidve lineárne vzhľadom na neznámu r a majú riešenie

$$r = \frac{v}{2} - \frac{1}{2v} \cdot \left(b - \frac{a}{2}\right)^2, \quad \text{resp.} \quad r = \frac{av}{a+2b}.$$

Po dosadení za v v oboch prípadoch dostaneme hľadaný vzorec pre r. V druhom prípade je to zrejmé, v prvom to ukážeme:

$$r = \frac{v}{2} - \frac{1}{2v} \cdot \left(b - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{v^2 - b^2 + ab - \frac{1}{4}a^2}{2v} = \frac{2ab - a^2}{4v} =$$
$$= \frac{a(2b-a)}{2\sqrt{(2b-a)(2b+a)}} = \frac{a\sqrt{2b-a}}{2\sqrt{2b+a}} = \frac{a\sqrt{4b^2-a^2}}{2(a+2b)}.$$

Ešte ostáva dokázať nerovnosť $R \geq 2r$. Využijeme na to odvodené vzorce 13.4.1, z ktorých dostávame (pripomíname, že $2b > a > 0$)

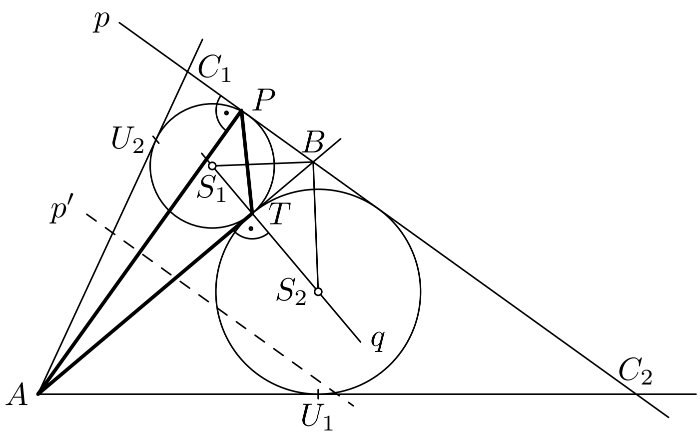
$$\frac{R}{2r} = R \cdot \frac{1}{2r} = \frac{b^2}{\sqrt{4b^2 - a^2}} \cdot \frac{a+2b}{a\sqrt{4b^2 - a^2}} = \frac{b^2}{a(2b-a)}.$$

Nerovnosť $R \geq 2r$ teda platí práve vtedy, keď $b^2 \geq a(2b-a)$. Posledná nerovnosť je však ekvivalentná s nerovnosťou $(a-b)^2 \geq 0$, ktorej platnosť je už zrejmá. Tým je dôkaz nerovnosti $R \geq 2r$ hotový. Navyše vidíme, že rovnosť v nej nastane jedine v prípade, keď $(a-b)^2 = 0$, čiže $a = b$, teda práve vtedy, keď je pôvodný trojuholník nielen rovnoramenný, ale dokonca rovnostranný.

Komentár. Úloha poskytuje mnoho prístupov k riešeniu a bude zaujímavé nechať študentov porovnať ich výsledky. Spája tiež zistenia z predchádzajúcich úloh, v niektorých prípadoch študenti využijú Euklidovu vetu a nezaobídu sa ani bez zručnej manipulácie s algebraickými výrazmi.

Úloha 13.5. [63-I-2] V rovine sú dané body A, P, T neležiace na jednej priamke. Zostrojte trojuholník ABC tak, aby P bola päta jeho výšky z vrcholu A a T bod dotyku strany AB s kružnicou jemu vpísanou. Uveďte diskusiu o počte riešení vzhľadom na polohu daných bodov.

Riešenie*. Vrchol B je určený polpriamkou AT a kolmicou p na výšku AP v bode P (obr. 13.5.1), na ktorej leží strana BC. Pritom bod T musí byť vnútorným bodom úsečky AB. Stred S kružnice vpísanej trojuholníku ABC potom dostaneme ako priesečník kolmice q na priamku AT v bode T



Obr. 13.5.1

s osou uhla ohraničeného priamkou p a polpriamkou BA. Jej polomer bude mať veľkosť $|ST|$.

Ostáva zostrojiť vrchol C hľadaného trojuholníka ABC. Ten bude ležať jednak na priamke p, jednak na druhej dotyčnici vpísanej kružnice z vrcholu A, ktorá je súmerne združená so stranou AB podľa priamky AS. Stačí teda zostrojiť bod U dotyku strany AC s kružnicou vpísanou ako obraz bodu T v uvedenej osovej súmernosti.

Odtiaľ vyplýva *konštrukcia*:

1. p: $P \in p$ a $p \perp AP$;

2. B: $B \in AT \cap p$, bod B musí ležať na polpriamke AT za bodom T;

3. q: $T \in q$ a $q \perp AT$;

4. u_1, u_2: dve (navzájom kolmé) osi rôznobežiek AB, p;

5. S_1, S_2: $S_1 \in q \cap u_1$, $S_2 \in q \cap u_2$;

6. U_1, U_2: obrazy bodu T v súmernostiach podľa priamok AS_1 a AS_2;
7. C_1, C_2: priesečníky priamky p s polpriamkami AU_1 a AU_2;
8. trojuholníky ABC_1 a ABC_2.

Diskusia. Bod B konštruovaný v 2. kroku existuje, len ak uhol PAT je ostrý (inak ani polpriamka AT nepretne priamku p) a zároveň bod T leží vnútri polroviny pA, čo je ekvivalentné s tým, že aj uhol APT je ostrý. Body S_1, S_2 existujú vždy a sú rôzne, lebo ležia v opačných polrovinách určených priamkou AB. Kružnica vpísaná leží celá v trojuholníku ABC, a teda i v páse určenom priamkou p a priamkou s ňou rovnobežnou, ktorá prechádza vrcholom A, takže stred S vpísanej kružnice musí padnúť do pásu tvoreného priamkou p a priamkou p' s ňou rovnobežnou, ktorá rozpoľuje výšku AP. V takom prípade dotyčnica ku kružnici $(S; |ST|)$ (súmerne združená s dotyčnicou AB podľa priamky AS) určite pretne priamku p v hľadanom vrchole C.

Diskusiu zhrnieme takto: Ak pre vnútorné uhly trojuholníka APT platí $|\measuredangle PAT| \geq 90°$ alebo $|\measuredangle APT| \geq 90°$, nemá úloha riešenie. Ak platí $|\measuredangle PAT| < 90°$ a zároveň $|\measuredangle APT| < 90°$, je počet riešení 0 až 2 podľa toho, koľko zo zostrojených bodov S_1 a S_2 leží medzi rovnobežkami p a p'.

Komentár. V posledných rokoch sa v MO nevyskytlo veľké množstvo konštrukčných úloh. Napriek tomu však považujeme za dôležité vyriešiť so študentmi aspoň jeden takýto problém a poukázať na to, že zostrojením vyhovujúceho útvaru riešenie úlohy nekončí a je potrebné uviesť aj diskusiu, ktorá je častokrát aspoň tak náročná ako vhodná konštrukcia. Zaradenie úlohy v tomto seminári považujeme za vhodné tiež preto, lebo úloha využíva vlastnosti kružnice vpísanej, a tak so cťou uzavrie toto seminárne stretnutie.

Domáca práca

Úloha 13.6. [59-I-4] Kružnica $k(S;r)$ sa dotýka priamky AB v bode A. Kružnica $l(T;s)$ sa dotýka priamky AB v bode B a pretína kružnicu k v krajných bodoch C, D jej priemeru. Vyjadrite dĺžku a úsečky AB pomocou polomerov r, s. Dokážte ďalej, že priesečník M priamok CD, AB je stredom úsečky AB.

Riešenie*. Keďže kružnica l má ako tetivu priemer CD kružnice k a dané kružnice nie sú totožné, platí pre ich polomery nerovnosť $s > r$. Ak označíme P pätu kolmice z bodu S na úsečku BT (obr. 13.6.1), tak z Pytagorovej vety pre pravouhlé trojuholníky CST a SPT vyplýva

$$|ST|^2 = s^2 - r^2 \quad \text{a} \quad |ST|^2 = |SP|^2 + (s - r)^2. \tag{13.6.1}$$

Odtiaľ pre veľkosť úsečky SP vychádza

$$|SP|^2 = (s^2 - r^2) - (s - r)^2 = 2r(s - r).$$

A keďže $ABPS$ je pravouholník, dostávame

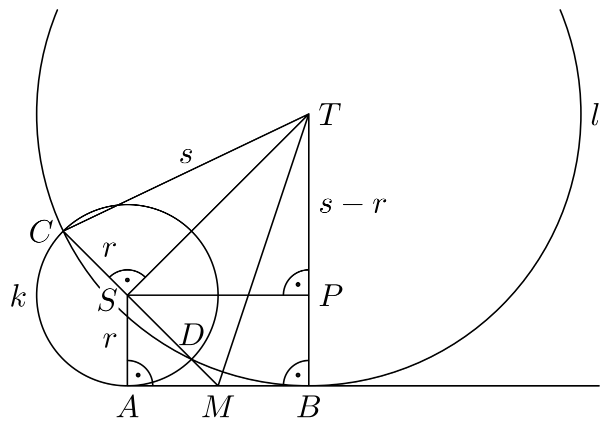
$$|AB| = |SP| = \sqrt{2r(s - r)}.$$

Z pravouhlých trojuholníkov AMS a MTS ďalej podľa prvej rovnosti v 13.6.1 vyplýva

$$|AM|^2 = |SM|^2 - r^2 = |MT|^2 - |ST|^2 - r^2 = |MT|^2 - s^2,$$

pritom z pravouhlého trojuholníka MBT máme

$$|BM|^2 = |MT|^2 - s^2.$$



Obr. 13.6.1

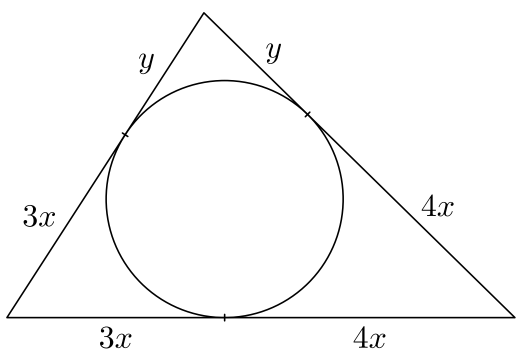
Preto $|AM| = |BM|$ a bod M je teda stredom úsečky AB.

Poznámka. Záver, že M je stredom úsečky AB, vyplýva okamžite aj z mocnosti bodu M k obom kružniciam (bod M leží na tzv. chordále oboch kružníc). Tieto pojmy sú však pre súťažiacich kategórie C zväčša neznáme a nebudú nutné ani pre riešenia ďalších súťažných kôl.

Úloha 13.7. [61-I-2] Dĺžky strán trojuholníka sú v metroch vyjadrené celými číslami. Určte ich, ak má trojuholník obvod 72 m a ak je najdlhšia strana trojuholníka rozdelená bodom dotyku vpísanej kružnice v pomere 3 : 4.

Riešenie*. Využijeme všeobecný poznatok, že body dotyku vpísanej kružnice delia hranicu trojuholníka na šesť úsečiek, a to tak, že každé dve z nich, ktoré vychádzajú z toho istého vrcholu trojuholníka, sú zhodné. (Dotyčnice z daného bodu k danej kružnici sú totiž súmerne združené podľa spojnice daného bodu so stredom danej kružnice.)

V našej úlohe je najdlhšia strana trojuholníka rozdelená na úseky, ktorých dĺžky označíme $3x$ a $4x$; dĺžku úsekov z vrcholu oproti najdlhšej strane označíme y (obr. 13.7.1). Strany trojuholníka majú teda dĺžky $7x$, $4x+y$ a $3x+y$, kde x, y sú neznáme kladné čísla (dĺžky berieme bez jednotiek). Ak má byť $7x$ dĺžka najdlhšej strany, musí platiť $7x > 4x+y$, čiže $3x > y$. Zdôraznime, že hľadané čísla x, y nemusia byť nutne celé, podľa zadania to však platí o číslach $7x$, $4x+y$ a $3x+y$. Údaj



Obr. 13.7.1

o obvode trojuholníka zapíšeme rovnosťou

$$72 = 7x + (3x + y) + (4x + y), \quad \text{čiže} \quad 36 = 7x + y.$$

Pretože $7x$ je celé číslo, je celé i číslo $y = 36 - 7x$; a pretože podľa zadania i čísla $4x + y$ a $3x + y$ sú celé, je celé i číslo $x = (4x + y) - (3x + y)$. Preto od tohto okamihu už hľadáme dvojice celých kladných čísel x, y, pre ktoré platí

$$3x > y \quad \text{a} \quad 7x + y = 36.$$

Odtiaľ vyplýva $7x < 36 < 7x + 3x = 10x$, teda $x \leq 5$ a súčasne $x \geq 4$.

Pre $x = 4$ je $y = 8$ a $(7x, 4x + y, 3x + y) = (28, 24, 20)$, pre $x = 5$ je $y = 1$ a $(7x, 4x + +y, 3x + +y) = (35, 21, 16)$. Strany trojuholníka sú teda $(28, 24, 20)$ alebo $(35, 21, 16)$. (Trojuholníkové nerovnosti sú zrejme splnené.)

Seminár 14: Matematická súťaž v riešení úloh *Náboj*

Príprava a prevedenie súťaže

Predvianočné seminárne stretnutie sa ponesie v odľahčenom duchu. Pre študentov bude pripravená tímová aktivita v štýle súťaže *Náboj*.

Pred seminárom je potrebné vytlačiť a pripraviť zadania úloh pre študentov. Úlohy sú dostupné na [Naboj] v rôznych jazykových mutáciách a voľne prístupné na použitie. Každý tím bude mať vlastnú sadu zadaní, rozstrihaných na jednotlivé úlohy. Okrem toho je potrebné mať pripravenú aj verziu pre opravovateľov, kde nájdu úlohy spolu s výsledkami a stručným riešením.

Posledným prípravným krokom je osloviť kolegov, ktorí by nám boli ochotní s organizáciou pomôcť, keďže pre jedného človeka je kontrolovanie výsledkov, vydávanie nových úloh a zapisovanie priebežného poradia dosť náročné, ak nie nemožné. S dobrovoľnými pomocníkmi sa potom pred seminárom dohodneme na rozdelení rolí, aby si prípadní opravovatelia mali čas prejsť zadania úloh.

Na seminárnom stretnutí potom rozdelíme študentov do štvorčlenných až päťčlenných tímov, vysvetlíme pravidlá, zodpovieme prípadné otázky, rozdáme zadania a súťaž môže začať. Ak máme študentov na seminári menej, je možné súťažiť aj v trojčlenných tímoch.

2.5 Január

Seminár 15: Domáce kolo MO – analýza úloh

Priebeh

Seminár je venovaný rozboru úloh domáceho kola aktuálneho ročníka MO. Od vedúceho seminára tak bude vyžadovať domácu prípravu navyše, keďže bude musieť samostatne vyriešiť zadané úlohy.

Na seminári potom so študentmi prediskutujeme ich spôsoby riešenia a prístupu k jednotlivým úlohám. Ak už budú mať študenti úlohy domáceho kola opravené, môžeme sa venovať aj najčastejším konkrétnym chybám a nejasnostiam, ktoré sa pri riešení úloh našimi zverencami objavili.

Domáca práca

Na záver seminára študentov požiadame, aby si zopakovali obsah seminára od začiatku školského roka a poznačili si prípadné nejasnosti alebo náročné partie. Nasledujúci seminár totiž bude príležitosťou všetky nejasnosti odstrániť.

Seminár 16: Konzultačné stretnutie v réžii študentov

Priebeh

Na seminár nie je zámerne naplánovaný žiadny konkrétny obsah, pretože je zamýšľaný ako priestor na konzultáciu, prinesenie vlastných otázok a nejasností, ktoré študenti majú, aby sme sa spoločne zbavili všetkých pochybností pred školským kolom.

Seminár 17: Školské kolo MO – analýza úloh

Priebeh

Seminár je venovaný, podobne ako pred dvoma týždňami, analýze úloh aktuálneho ročníka MO, tentoraz však kola školského. Opäť so študentami rozoberieme úskalia, na ktoré pri riešení narazili, najčastejšie postupy a prípadné spojenie s domácim kolom.

Seminár 18: Algebraické výrazy a (ne)rovnice IV – zložitejšie nerovnosti

Ciele

Zoznámiť a precvičiť so študentami riešenie úloh zameraných na dokazovanie zložitejších nerovností, AG-nerovnosť

Úlohy a riešenia

Úloha 18.1. [61-II-1] Pre všetky reálne čísla x, y, z také, že $x < y < z$, dokážte nerovnosť

$$x^2 - y^2 + z^2 > (x - y + z)^2.$$

Riešenie*. Aby sme mohli použiť vzorec $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$, presuňme najskôr jeden z krajných členov ľavej strany, napríklad člen z^2, na pravú stranu:

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &> (x - y + z)^2 - z^2, \\ (x - y)(x + y) &> (x - y + z - z)(x - y + z + z), \\ (x - y)(x + y) &> (x - y)(x - y + 2z). \end{aligned}$$

Keďže spoločný činiteľ $x - y$ oboch strán poslednej nerovnosti je podľa predpokladu úlohy číslo záporné, budeme s dôkazom hotoví, keď ukážeme, že zvyšné činitele spĺňajú opačnú nerovnosť $x + y < x - y + 2z$. Tá je však zrejme ekvivalentná s nerovnosťou $2y < 2z$, čiže $y < z$, ktorá podľa zadania úlohy naozaj platí.

Iné riešenie*. Podľa vzorca pre druhú mocninu trojčlena platí

$$(x - y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 2yz.$$

Dosaďme to do pravej strany dokazovanej nerovnosti a urobme niekoľko ďalších ekvivalentných úprav:

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 + z^2 &> x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 2yz, \\ 0 &> 2y^2 - 2xy + 2xz - 2yz, \\ 0 &> 2y(y - x) + 2z(x - y), \\ 0 &> 2(y - x)(y - z). \end{aligned}$$

Posledná nerovnosť už vyplýva z predpokladov úlohy, podľa ktorých je činiteľ $y-x$ kladný, zatiaľ čo činiteľ $y-z$ je záporný.

Komentár. Úloha sa dá vyriešiť jednoduchým použitím ekvivalentných úprav a diskusiou v závere, v ktorej je potrebné nezabudnúť na predpoklady z úvodu zadania. Ak študenti sami neprídu na dôkaz pomocou použitia vzorca A^2-B^2, je vhodné im ho ukázať, keďže tak budeme demonštrovať viacero odlišných prístupov k riešeniu úlohy. Zároveň úloha nevyžaduje špeciálne vedomosti a je tak príjemným prepojením tohto a minulého seminára o nerovnostiach.

Úloha 18.2. [66-II-4] Dokážte, že pre všetky kladné reálne čísla $a \le b \le c$ platí

$$(-a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \ge 3.$$

Riešenie*. Nerovnosť vynásobíme kladným výrazom abc a po roznásobení ju postupne (ekvivalentne) upravíme:

$$\begin{aligned}
-a(bc+ac+ab)+b(bc+ac+ab)+c(bc+ac+ab) &\ge 3abc,\\
-abc-a^2c-a^2b+b^2c+abc+ab^2+bc^2+ac^2+abc &\ge 3abc,\\
(b^2c-abc)+(bc^2-abc)+(ac^2-a^2c)+(ab^2-a^2b) &\ge 0,\\
bc(b-a)+bc(c-a)+ac(c-a)+ab(b-a) &\ge 0.
\end{aligned}$$

Vzhľadom na predpoklad $0<a\le b\le c$ je výsledná, a teda aj pôvodná nerovnosť splnená.

Iné riešenie*. Dokazovanú nerovnosť postupne upravíme, pričom využijeme známu nerovnosť $b/c+c/b \ge 2$, ktorá je pre kladné čísla b,c ekvivalentná s nerovnosťou $(b-c)^2 \ge 0$:

$$(-a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = 1+\left(\frac{b}{a}-\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}-\frac{a}{c}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right) \ge$$

$$\ge 1+\frac{b^2-a^2}{ab}+\frac{c^2-a^2}{ac}+2 \ge 3,$$

pretože zrejme platí aj $a^2 \le b^2 \le c^2$.

Iné riešenie*. Podľa predpokladov úlohy platia nerovnosti $-a+b+c \ge c$ a $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \ge \frac{2}{b}+\frac{1}{c}$. Obe nerovnosti (s kladnými stranami) medzi sebou vynásobíme a získame tak

$$(-a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \ge c\left(\frac{2}{b}+\frac{1}{c}\right) = 1+\frac{2c}{b} \ge 3$$

pretože $c/b \ge 1$ podľa zadania.

Komentár. Ďalšia úloha, ktorú je možné rozlúsknuť spektrom rozličných prístupov. Ak študenti zvolia len cestu ekvivalentných úprav, ukážeme im aj riešenie, ktoré využíva nerovnosť $b/c+c/b \ge$ ≥ 2 z predchádzajúceho seminára o nerovnostiach, rovnako ako riešenie pomocou vynásobenia nerovností medzi sebou. Takto dáme študentom príležitosť poznať aj iné prístupy, ktoré môžu byť užitočné pri ďalšom riešení úloh.

Úloha 18.3. [60-II-4] Nech x,y,z sú kladné reálne čísla. Ukážte, že aspoň jedno z čísel $x+y+z-xyz$ a $xy+yz+zx-3$ je nezáporné.

Riešenie*. Ukážeme, že ak je číslo $xy+yz+zx-3$ záporné, je číslo $x+y+z-xyz$ kladné. Ak $xy+yz+zx<3$, je aspoň jedno z čísel xy, yz, zx menšie ako 1, napr. xy. Potom $x+y+z-xyz = = x+y+z(1-xy)$ je zjavne súčet troch kladných čísel.

Iné riešenie*. Ukážeme, že ak je číslo $x+y+z-xyz$ záporné, tak číslo $xy+yz+zx-3$ je kladné. Predpokladajme, že $x+y+z<xyz$. Tým skôr $x<xyz$. Po skrátení kladného čísla x dostaneme $yz>1$. Podobne odvodíme odhady $xy>1$ a $zx>1$. Teraz ich stačí sčítať a máme $xy+yz+zx>3$.

Iné riešenie*. Tvrdenie úlohy dokážeme sporom. Predpokladajme, že $x+y+z<xyz$ a zároveň $xy+yz+zx<3$. Obe tieto nerovnosti sú symetrické, preto môžeme predpokladať, že čísla x,y,z sú označené tak, že z je najmenšie. Z druhej nerovnosti dostaneme, že $xy<3$. Potom však $x+y+z<xyz<3z$, teda $x+y<2z$. To je však spor s tým, že číslo z je najmenšie.

Komentár. Úloha je zaujímavá tým, že na prvý pohľad nemusí vyzerať ako úloha o nerovnostiach a tiež študentom nemusí byť úplne jasné, z ktorého konca úlohu uchopiť. Môže to byť tiež dobrá príležitosť na ukážku toho, ako sa dá uplatniť dôkaz sporom.

Úloha 18.4. [61-I-4] Reálne čísla a,b,c,d vyhovujú rovnici $ab+bc+cd+da=16$.

a) Dokážte, že medzi číslami a,b,c,d sa nájdu dve so súčtom najviac 4.

b) Akú najmenšiu hodnotu môže mať súčet $a^2+b^2+c^2+d^2$?

Riešenie*. a) Z rovnosti $16=ab+bc+cd+da=(a+c)(b+d)$ vyplýva, že obidva súčty $a+c$ a $b+d$ nemôžu byť väčšie ako 4 súčasne, lebo v opačnom prípade by bol ich súčin väčší ako 16. Preto vždy aspoň jeden zo súčtov $a+c$ alebo $b+d$ má požadovanú vlastnosť. b) Využijeme všeobecnú rovnosť

$$a^2+b^2+c^2+d^2=\frac{1}{2}(a-b)^2+\frac{1}{2}(b-c)^2+\frac{1}{2}(c-d)^2+\frac{1}{2}(d-a)^2+ab+bc+cd+da,$$

o platnosti ktorej sa ľahko presvedčíme úpravou pravej strany. Vzhľadom na nezápornosť druhých mocnín $(a-b)^2$, $(b-c)^2$, $(c-d)^2$ a $(d-a)^2$ dostávame pre ľavú stranu rovnosti odhad

$$a^2+b^2+c^2+d^2 \geq ab+bc+cd+da=16.$$

Je nájdené číslo 16 najmenšou hodnotou uvažovaných súčtov? Ináč povedané: nastane pre niektorú vyhovujúcu štvoricu v odvodenej nerovnosti rovnosť? Z nášho postupu je jasné, že musíme rozhodnúť, či pre niektorú z uvažovaných štvoríc platí $a-b=b-c=c-d=d-a=0$, čiže $a=b=c=d$. Pre takú štvoricu má rovnosť $ab+bc+cd+da=16$ tvar $4a^2=16$, čomu vyhovuje $a=\pm 2$. Pre vyhovujúce štvorice $a=b=c=d=2$ a $a=b=c=d=-2$ má súčet $a^2+b^2+c^2+d^2$ naozaj hodnotu 16, preto ide o hľadané minimum.

Komentár. Ďalšia úloha, ktorá nepracuje s priamym dokazovaním nerovností, avšak využíva fakt, ktorý sme si osvojili už pri prvom nerovnostnom seminári, a to že druhá mocnina ľubovoľného reálneho čísla je vždy nezáporná. To nám potom pomohlo uskutočniť odhad hodnoty súčtu zo zadania úlohy. Na tomto mieste považujeme sa vhodné študentom zmieniť, že odhadovanie hodnôt je ďalším miestom, kde sa znalosti o nerovnostiach výborne uplatnia, ako ukáže aj nasledujúca úloha.

Úloha 18.5. [62-I-2] Pre kladné reálne čísla a, b, c, d platí

$$a+b=c+d, \quad ad=bc, \quad ac+bd=1.$$

Akú najväčšiu hodnotu môže mať súčet $a+b+c+d$?

Riešenie*. Najskôr ukážeme, že prvé dve rovnosti zo zadania úlohy sú splnené len vtedy, keď platí $a=c$ a súčasne $b=d$. Naozaj, vďaka tomu, že zadané čísla sú kladné (a teda rôzne od nuly), môžeme uvedené rovnosti zapísať ako

$$a\left(1+\frac{b}{a}\right)=c\left(1+\frac{d}{c}\right) \text{ a } \frac{b}{a}=\frac{d}{c}.$$

Podľa druhej rovnosti vidíme, že súčty v oboch zátvorkách z prvej rovnosti majú rovnakú kladnú hodnotu, takže sa musia rovnať prvé činitele oboch jej strán. Platí teda $a=c$, odkiaľ už vyplýva aj rovnosť $b=d$. Keď už vieme, že platí $a=c$ a $b=d$, vystačíme ďalej len s premennými a a b a nájdeme najväčšiu hodnotu zadaného súčtu

$$S=a+b+c+d=2(a+b)$$

za jedinej podmienky, totiž že kladné čísla a, b spĺňajú rovnosť $a^2+b^2=1$, ktorá je vyjadrením tretej zadanej rovnosti $ac+bd=1$ (prvé dve sú vďaka rovnostiam $a=c$ a $b=d$ zrejmé). Všimnime si, že pre druhú mocninu (kladného) súčtu S platí

$$S^2=4(a+b)^2=4(a^2+b^2)+8ab=4\cdot 1+8ab=4(1+2ab),$$

takže hodnota S bude najväčšia práve vtedy, keď bude najväčšia hodnota $2ab$. Zo zrejmej nerovnosti $(a-b)^2 \geq 0$ po roznásobení však dostaneme

$$2ab \leq a^2+b^2=1,$$

pritom rovnosť $2ab=1$ nastane práve vtedy, keď bude platiť $a=b$, čo pre kladné čísla a, b spolu s podmienkou $a^2+b^2=1$ vedie k jedinej vyhovujúcej dvojici $a=b=1/\sqrt{2}$. Najväčšia hodnota výrazu $2ab$ je teda 1, takže najväčšia hodnota výrazu S^2 je $4(1+1)=8$, a teda najväčšia hodnota S je $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$. Dosiahne sa pre jedinú prípustnú štvoricu $a=b=c=d=1/\sqrt{2}$.

Komentár. Druhá z dvojice úloh, v ktorej majú študenti nájsť najväčšiu/najmenšiu hodnotu. Podobne ako v predchádzajúcej úlohe nám k tomu pomôže nezápornosť druhej mocniny reálneho čísla, tu ju však musíme skombinovať ešte s ďalšími závermi z úlohy. Predpokladáme, že úloha pre študentov bude výzvou a pravdepodobne budú potrebovať niekoľkých miestach poradiť (napr. skúmanie druhej mocniny súčtu S je netriviálnym nápadom).

Úloha 18.6. [62-I-2-N1] Ukážte, že nerovnosť $\frac{1}{2}(u+v) \geq \sqrt{uv}$ medzi aritmetickým a geometrickým priemerom dvoch ľubovoľných nezáporných čísel u a v vyplýva zo zrejmej nerovnosti $(a-b)^2 \geq 0$ vhodnou voľbou hodnoty a a b.

Riešenie*. Zvoľme $a = \sqrt{u}$ a $b = \sqrt{v}$. Vyjdime zo zrejmej nerovnosti $(\sqrt{u} - \sqrt{v}) \geq 0$ a tú ďalej ekvivalentne upravujme:

$$\begin{aligned}(\sqrt{u} - \sqrt{v})^2 &\geq 0,\\ u - 2\sqrt{uv} + v &\geq 0,\\ \frac{u+v}{2} &\geq \sqrt{uv}.\end{aligned}$$

Komentár. Vyššie dokázaná nerovnosť je špeciálnym prípadom tzv. AG-nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom ľubovoľných nezáporných čísel. Jej všeobecnejší tvar pre viac ako dve čísla však v tomto momente nepovažujeme za dôležité so študentami pokrývať, keďže AG-nerovnosť sa v úlohách kategórie C vyskytla v posledných rokoch veľmi zriedka (a aj vtedy bolo nerovnosti možné dokázať inými metódami). Je to však veľmi užitočný nástroj, ktorému by sme sa venovali v pokračovaní seminára vo vyšších ročníkoch.

Jeho využitie budeme demonštrovať v nasledujúcej úlohe.

Úloha 18.7. [62-I-2-N1] Dokážte, že pre ľubovoľné kladné čísla a, b, c platí nerovnosť

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{c}\right)\left(c + \frac{1}{a}\right) \geq 8$$

a zistite, kedy prechádza v rovnosť.

Riešenie*. Ľavú stranu L dokazovanej nerovnosti najskôr upravíme roznásobením a vzniknuté členy zoskupíme do súčtov dvojíc navzájom prevrátených výrazov:

$$\begin{aligned}L = \left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{c}\right)\left(c + \frac{1}{a}\right) &= \left(ab + \frac{a}{c} + 1 + \frac{1}{bc}\right)\left(c + \frac{1}{a}\right) =\\ &= \left(abc + \frac{1}{abc}\right) + \left(a + \frac{1}{a}\right) + \left(b + \frac{1}{b}\right) + \left(c + \frac{1}{c}\right).\end{aligned}$$

Pretože pre $u > 0$ je $u + \frac{1}{u} \geq 2$, pričom rovnosť nastane práve vtedy, keď $u = 1$, pre výraz L platí $L \geq 2 + 2 + 2 + 2 = 8$, čo sme mali dokázať. Rovnosť $L = 8$ nastane práve vtedy, keď platí

$$abc + \frac{1}{abc} = a + \frac{1}{a} = b + \frac{1}{b} = c + \frac{1}{c} = 2$$

teda, ako sme už spomenuli, práve vtedy, keď $abc = a = b = c = 1$, t. j. práve vtedy, keď $a = b = c = 1$.

Poznámka. Dodajme, že upravená nerovnosť

$$abc + a + b + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{abc} \geq 8$$

vyplýva okamžite aj z nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom ôsmich čísel

$$abc, \quad a, \quad b, \quad c, \quad \frac{1}{a}, \quad \frac{1}{b}, \quad \frac{1}{c}, \quad \frac{1}{abc},$$

lebo ich súčin (a teda aj geometrický priemer) je rovný číslu 1, takže ich aritmetický priemer má hodnotu aspoň 1.

Iné riešenie*. V dokazovanej nerovnosti sa najskôr zbavíme zlomkov, a to tak, že obe jej strany vynásobíme kladným číslom abc. Dostaneme tak ekvivalentnú nerovnosť

$$(ab+1)(bc+1)(ac+1) = 8abc,$$

ktorá má po roznásobení ľavej strany tvar

$$a^2b^2c^2 + a^2bc + ab^2c + abc^2 + ab + ac + bc + 1 \geq 8abc.$$

Poslednú nerovnosť možno upraviť na tvar

$$(abc-1)^2 + ab(c-1)^2 + ac(b-1)^2 + bc(a-1)^2 \geq 0.$$

Táto nerovnosť už zrejme platí, lebo na ľavej strane máme súčet štyroch nezáporných výrazov. Pritom rovnosť nastane práve vtedy, keď má každý z týchto štyroch výrazov nulovú hodnotu, teda práve vtedy, keď

$$abc-1 = c-1 = b-1 = a-1 = 0,$$

čiže

$$a = b = c = 1.$$

Iné riešenie*. Danú nerovnosť možno dokázať aj bez roznásobenia jej ľavej strany. Stačí napísať tri AG-nerovnosti

$$\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{b}\right) \geq \sqrt{\frac{a}{b}}, \quad \frac{1}{2}\left(b+\frac{1}{c}\right) \geq \sqrt{\frac{b}{c}}, \quad \frac{1}{2}\left(c+\frac{1}{a}\right) \geq \sqrt{\frac{c}{a}},$$

Ich vynásobením dostaneme

$$\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{b}\right) \cdot \frac{1}{2}\left(b+\frac{1}{c}\right) \cdot \frac{1}{2}\left(c+\frac{1}{a}\right) \geq \sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt{\frac{b}{c}} \cdot \sqrt{\frac{c}{a}} = 1,$$

odkiaľ po násobení ôsmimi obdržíme dokazovanú nerovnosť. Rovnosť v nej nastane práve vtedy, keď nastane rovnosť v každej z troch použitých AG-nerovností, teda práve vtedy, keď sa čísla v každej „priemerovanej" dvojici rovnajú:

$$a = \frac{1}{b}, \quad b = \frac{1}{c}, \quad c = \frac{1}{a}.$$

Z prvých dvoch rovností vyplýva $a = c$, po dosadení do tretej rovnosti potom vychádza $a = c = 1$, teda aj $b = 1$.

Komentár. Študenti možno úlohu vyriešia iným spôsobom než využitím AG-nerovnosti. V tom prípade však riešenie predvedieme, aby študenti získali predstavu, ako sa táto nerovnosť dá efektívne využívať.

Doplňujúce zdroje a materiály

Tak, ako v aj v prvom seminári zameranom na nerovnosti, môžeme študentom odporučiť rovnaké publikácie. Okrem toho je možné nájsť veľké množstvo úloh na precvičenie v archívoch matematických korešpondenčných seminárov [PraSe][8] či v iných online zdrojoch[9].

[8] Napr. `https://mks.mff.cuni.cz/archive/29/9.pdf` alebo `https://mks.mff.cuni.cz/library/AGNerovnostLZ/AGNerovnostLZ.pdf`.

[9] Napr. `http://www.talnet.cz/documents/18/3a616554-1f53-473c-af04-9544fcc95969`

2.6 Február

Seminár 19: Algebraické výrazy a rovnice – zložitejšie rovnice a ich systémy

Ciele

Zoznámiť študentov s ďalšími typmi rovníc a ich sústav (iracionálne koeficienty, dolná celá časť), tieto úlohy, spolu so slovnými úlohami precvičiť.

Úlohy a riešenia

Úloha 19.1. [59-S-1] Ak zväčšíme čitateľ aj menovateľ istého zlomku o 1, dostaneme zlomok o hodnotu 1/20 väčší. Ak urobíme s väčším zlomkom rovnakú operáciu, dostaneme zlomok o hodnotu 1/12 väčší, ako bola hodnota zlomku na začiatku. Určte všetky tri zlomky.

Riešenie*. Označme a/b pôvodný zlomok. Podľa zadania platia rovnosti

$$\frac{a+1}{b+1}-\frac{a}{b}=\frac{1}{20} \quad \text{a} \quad \frac{a+2}{b+2}-\frac{a}{b}=\frac{1}{12} \qquad (a,b\in\mathbb{N}),$$

ktoré sú ekvivalentné so vzťahmi

$$20b(a+1)-20a(b+1)=b(b+1) \quad \text{a} \quad 12b(a+2)-12a(b+2)=b(b+2).$$

Tie upravíme na tvar $19b-20a=b^2$ a $22b-24a=b^2$. Po odčítaní oboch vzťahov zistíme, že $4a = 3b$, čo po dosadení do druhej rovnosti dá $22b-18b=b^2$, čiže $b^2=4b$. Vzhľadom na podmienku $b\neq 0$ odtiaľ vyplýva $b=4$ a $a=3$. Hľadané zlomky sú teda $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$ a $\frac{5}{6}$.

Iné riešenie*. Označme a/b pôvodný zlomok. Zo vzťahov

$$\frac{1}{20}=\frac{1}{4\cdot 5} \quad \text{a} \quad \frac{1}{12}=\frac{1}{4\cdot 3}=\frac{2}{4\cdot 6}$$

možno odhadnúť, že riešením by mohlo byť $b=4$. Potom

$$\frac{4(a+1)-5a}{4\cdot 5}=\frac{1}{20} \quad \text{a} \quad \frac{4(a+2)-6a}{4\cdot 6}=\frac{1}{12},$$

čiže $a=3$. Musíme sa však ešte presvedčiť, že úloha iné riešenie nemá. Podmienky úlohy vedú ku vzťahom

$$\frac{b-a}{b(b+1)}=\frac{1}{4\cdot 5} \quad \text{a} \quad \frac{2(b-a)}{b(b+2)}=\frac{2}{4\cdot 6}.$$

Z podielu ich ľavých a pravých strán potom vyplýva

$$\frac{b+2}{b+1}=\frac{6}{5},$$

čomu vyhovuje jedine $b=4$.

Poznámka. V úplnom riešení nesmie chýbať vylúčenie možnosti $b\neq 4$. Napríklad z podobných rovností $1/20=30/(24\cdot 25)$ a $1/12=52/(24\cdot 26)$ by sme mohli hádať, že $b=24$, čo riešením nie je.

Úloha 19.2. [59-I-3-N1] Určte $\lfloor 0\rfloor, \lfloor 3{,}5\rfloor, \lfloor 2{,}1\rfloor, \lfloor -4\rfloor, \lfloor -3{,}9\rfloor, \lfloor -0{,}2\rfloor$. Symbol $\lfloor x\rfloor$ označuje najväčšie celé číslo, ktoré nie je väčšie ako číslo x, tzv. dolnú celú časť reálneho čísla x.

Riešenie. $\lfloor 0\rfloor=0, \lfloor 3{,}5\rfloor=3, \lfloor 2{,}1\rfloor=2, \lfloor -4\rfloor=-4, \lfloor -3{,}9\rfloor=-4, \lfloor -0{,}2\rfloor=-1.$

Úloha 19.3. [59-I-3-N2] Nech a je celé číslo a $t \in \langle 0;1)$. Určte $\lfloor a \rfloor$, $\lfloor a+t \rfloor$, $\lfloor a+\frac{1}{2}t \rfloor$, $\lfloor a-t \rfloor$, $\lfloor a+2t \rfloor$, $\lfloor a-2t \rfloor$.

Riešenie. $\lfloor a \rfloor = a$, $\lfloor a+t \rfloor = a$, $\lfloor a+\frac{1}{2}t \rfloor = a$, $\lfloor a-t \rfloor = a$, ak $t = 0$, resp. $\lfloor a-t \rfloor = a-1$, ak $t \neq 0$, $\lfloor a+2t \rfloor = a$, ak $t < 0,5$, resp. $\lfloor a+2t \rfloor = a+1$, ak $t \geq 0,5$, $\lfloor a-2t \rfloor = a$, ak $t = 0$, resp. $\lfloor a-2t \rfloor = a-1$ ak $t \leq 0,5$ a $\lfloor a-2t \rfloor = a-2$ ak $t > 0,5$.

Úloha 19.4. [59-I-3] Určte všetky reálne čísla x, ktoré vyhovujú rovnici $4x - 2\lfloor x \rfloor = 5$.

Riešenie*. Položme $\lfloor x \rfloor = a$, potom $x = a+t$, pričom $t \in \langle 0,1)$, a rovnicu $4(a+t)-2a = 5$ ekvivalentne upravme na tvar $a = \frac{5}{2} - 2t$. Aby bolo číslo a celé, musí byť $2t = k \cdot \frac{1}{2}$, pričom k je nepárne číslo. Navyše $2t \in \langle 0,2)$. Teda buď $2t = \frac{1}{2}$ a $a = 2$, alebo $2t = \frac{3}{2}$ a $a = 1$. Pôvodná rovnica má preto dve riešenia: $x_1 = 2,25$ a $x_2 = 1,75$.

Iné riešenie*. Rovnicu upravíme na tvar $2x - \frac{5}{2} = \lfloor x \rfloor$. Taká rovnica bude splnená práve vtedy, keď číslo $2x - \frac{5}{2}$ bude celé a bude spĺňať nerovnosti $x - 1 < 2x - \frac{5}{2} \leq x$, ktoré sú ekvivalentné s podmienkou $\frac{3}{2} < x \leq \frac{5}{2}$. Pre takéto x zrejme hodnoty výrazu $2x - \frac{5}{2}$ vyplnia interval $(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\rangle$. V ňom ležia práve dve celé čísla 1 a 2, teda hľadané x nájdeme z rovníc $2x - \frac{5}{2} = 1$ a $2x - \frac{5}{2} = 2$.

Komentár. Aj napriek tomu, že funkcia dolná celá časť nie je bežným učivom preberaným v školách, nemala by analýza úlohy robiť žiakom veľké problémy.

Úloha 19.5. [57-I-3-N1] Určte všetky celé čísla n, pre ktoré nadobúda zlomok $(4n+27)/(n+3)$ celočíselné hodnoty.

Riešenie. Zlomok $(4n+27)/(n+3)$ upravíme na tvar $4+15/(n+3)$, teda číslo $n+3$ musí deliť 15. Z toho dostávame $n \in \{-18,-8,-6,-4,-2,0,2,12\}$.

Úloha 19.6. [57-I-3] Máme určitý počet krabičiek a určitý počet guľôčok. Ak dáme do každej krabičky práve jednu guľôčku, ostane nám n guľôčok. Keď však necháme práve n krabičiek bokom, môžeme všetky guľôčky rozmiestniť tak, aby ich v každej zostávajúcej krabičke bolo práve n. Koľko máme krabičiek a koľko guľôčok?

Riešenie*. Keď označíme x počet krabičiek a y počet guľôčok, dostaneme zo zadania sústavu rovníc

$$x+n = y \quad \text{a} \quad (x-n)\cdot n = y \tag{19.6.1}$$

s neznámymi x, y a n z oboru prirodzených čísel. Vylúčením neznámej y dostaneme rovnicu $x+n = (x-n)\cdot n$, ktorá pre $n = 1$ nemá riešenie. Pre $n \geq 2$ dostaneme

$$x = \frac{n^2+n}{n-1} = n+2+\frac{2}{n-1}, \tag{19.6.2}$$

odkiaľ vidíme, že (prirodzené) číslo $n-1$ musí byť deliteľom čísla 2. Teda $n \in \{2,3\}$. Prípustné hodnoty n dosadíme do 19.6.1 a sústavu vyriešime (možno tiež využiť vzťah 19.6.2. Pre $n=2$ dostaneme $x=6, y=8$ a pre $n=3$ určíme $x=6$ a $y=9$.

Skúška. Majme šesť krabičiek a osem guľôčok. Keď do každej krabičky dáme práve jednu guľôčku, ostane $n=2$ guľôčok. Keď však odoberieme dve krabičky, môžeme do zostávajúcich štyroch rozdeliť guľôčky práve po dvoch. Podmienky úlohy sú teda splnené. Pre šesť krabičiek a deväť guľôčok urobíme skúšku rovnako ľahko.

Záver. Buď máme šesť krabičiek a osem guľôčok, alebo šesť krabičiek a deväť guľôčok.

Komentár. Úloha, spolu s úlohou predchádzajúcou, je bežnou slovnou úlohou vedúcou na sústavu rovníc. Jej úspešné vyriešenie však vyžaduje umnú manipuláciu s výrazmi.

Úloha 19.7. [57-II-4] Nájdite všetky trojice celých čísel x, y, z, pre ktoré platí

$$x+y\sqrt{3}+z\sqrt{7}=y+z\sqrt{3}+x\sqrt{7}.$$

Riešenie*. Rovnicu prepíšeme na tvar

$$x-y=(z-y)\sqrt{3}+(x-z)\sqrt{7}$$

a umocníme. Po jednoduchej úprave dostaneme

$$(x-y)^2-3(z-y)^2-7(x-z)^2=2(x-z)(z-y)\sqrt{21}. \tag{19.7.1}$$

Pre $x\neq z$ a $y\neq z$ nemôže rovnosť 19.7.1 platiť, pretože jej pravá strana je v takom prípade číslo iracionálne, zatiaľ čo ľavá strana je číslo celé. Rovnosť teda môže nastať, len keď $x=z$ alebo $y=z$.

V prvom prípade po dosadení $x=z$ do pôvodnej rovnice dostaneme $z-y=\sqrt{3}(z-y)$. Odtiaľ $z=y=x$.

V druhom prípade, keď $y=z$, dôjdeme analogicky k rovnakému výsledku.

Záver. Riešením danej rovnice sú všetky trojice $(x,y,z)=(k,k,k)$, kde k je ľubovoľné celé číslo.

Komentár. Aj napriek tomu, že vzorové riešenie úlohy vyzerá zrozumiteľne, úloha riešiteľov krajských kôl potrápila (bola najhoršie hodnotenou úlohou daného krajského kola). Záludnosti sa ukrývajú vo vytyčovaní iracionálnych čísel a nie neznámych, vhodnej úprave rovnice a diskusii o (i)racionalite oboch strán rovnice.

Úloha 19.8. [64-I-1] Určte všetky dvojice (x,y) reálnych čísel, ktoré vyhovujú sústave rovníc

$$\sqrt{(x+4)^2}=4-y,$$
$$\sqrt{(y-4)^2}=x+8.$$

Riešenie*. Vzhľadom na to, že pre každé reálne číslo a platí $\sqrt{a^2}=|a|$, je daná sústava rovníc ekvivalentná so sústavou rovníc

$$|x+4|=4-y,$$
$$|y-4|=x+8.$$

Z prvej rovnice vidíme, že musí byť $4-y \geq 0$, teda $y \leq 4$. V druhej rovnici môžeme teda odstrániť absolútnu hodnotu. Dostaneme tak

$$|y-4| = 4-y = x+8, \quad \text{t.j.} \quad -y = x+4.$$

Po dosadení za $x+4$ do prvej rovnice dostaneme

$$|-y| = |y| = 4-y.$$

Keďže $y \leq 4$, budeme ďalej uvažovať dva prípady.

Pre $0 \leq y \leq 4$ riešime rovnicu $y = 4-y$, a teda $y = 2$. Nájdenej hodnote $y = 2$ zodpovedá po dosadení do druhej rovnice $x = -6$.

Pre $y < 0$ dostaneme rovnicu $-y = 4-y$, ktorá však nemá riešenie.

Záver. Daná sústava rovníc má práve jedno riešenie, a to $(x,y) = (-6,2)$.

Iné riešenie*. Odstránením absolútnych hodnôt v oboch rovniciach, t. j. rozborom štyroch možných prípadov, keď
a) $(x+4 \geq 0) \wedge (y-4 \geq 0)$, t.j. $(x \geq -4) \wedge (y \geq 4)$,
b) $(x+4 \geq 0) \wedge (y-4 < 0)$, t.j. $(x \geq -4) \wedge (y < 4)$,
c) $(x+4 < 0) \wedge (y-4 \geq 0)$, t.j. $(x < -4) \wedge (y \geq 4)$,
d) $(x+4 < 0) \wedge (y-4 < 0)$, t.j. $(x < -4) \wedge (y < 4)$,
zistíme, že prípady a), b), c) nedávajú (vzhľadom na uvedené obmedzenia v jednotlivých prípadoch) žiadne reálne riešenie. V prípade d) potom dostaneme jediné riešenie $(x,y) = (-6,2)$ danej sústavy.

Komentár. V úvode riešenia pripomenieme vzťah $\sqrt{a^2} = |a|$, ktorý nám pomôže transformovať sústavu zo zadania na sústavu rovníc s absolútnou hodnotou, ktorú by študenti mali byť schopní bez väčších komplikácií vyriešiť.

Domáca práca

Úloha 19.9. [59-II-4] Určte všetky dvojice reálnych čísel x, y, ktoré vyhovujú sústave rovníc

$$\lfloor x+y \rfloor = 2010,$$
$$\lfloor x \rfloor - y = p,$$

ak a) $p = 2$, b) $p = 3$. Symbol $\lfloor x \rfloor$ označuje najväčšie celé číslo, ktoré nie je väčšie ako dané reálne číslo x (tzv. dolná celá časť reálneho čísla x).

Riešenie*. Keďže číslo p je celé, je aj $y = \lfloor x \rfloor - p$ celé číslo a $\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + y$. Pôvodná sústava rovníc je teda ekvivalentná so sústavou

$$\lfloor x \rfloor + y = 2010,$$
$$\lfloor x \rfloor - y = p,$$

ktorú ľahko vyriešime napríklad sčítacou metódou. Dostaneme $\lfloor x \rfloor = \frac{1}{2}(2010+p)$ (čo môže platiť len pre párne p) a $y = \lfloor x \rfloor - p$.

a) Pre $p = 2$ je riešením sústavy ľubovoľné $x \in \langle 1006, 1007)$ a $y = 1004$.

b) Pre $p = 3$ nemá sústava žiadne riešenie.

Iné riešenie*. Položme $\lfloor x \rfloor = a$, potom $x = a+t$, pričom $t \in \langle 0, 1)$.

a) Pre $p = 2$ sústavu prepíšeme na tvar $y = a - 2$ a $\lfloor 2a - 2 + t \rfloor = 2010$. Z poslednej rovnice vyplýva $2a - 2 = 2010$, odtiaľ $a = 1006$. Keďže $t \in \langle 0, 1)$, vyhovuje pôvodnej sústave každé $x \in \langle 1006, 1007)$, pričom $y = 1004$.

b) Pre $p = 3$ dostávame $y = a - 3$ a $\lfloor 2a - 3 + t \rfloor = 2010$. Posledná rovnica je ekvivalentná so vzťahom $2a - 3 = 2010$, ktorému nevyhovuje žiadne celé číslo a. Pre $p = 3$ nemá daná sústava rovníc riešenie.

Úloha 19.10. [64-S-1] V obore reálnych čísel vyriešte sústavu rovníc

$$\begin{aligned} |1-x| &= y+1, \\ |1+y| &= z-2, \\ |2-z| &= x-x^2. \end{aligned}$$

Riešenie*. Pravá strana prvej rovnice je nezáporné číslo, čo sa premietne do druhej rovnice, pričom môžeme odstrániť absolútnu hodnotu. Aj pravá strana druhej rovnice je nezáporné číslo, čo sa s využitím rovnosti $|z-2| = |2-z|$ premietne do tretej rovnice, pričom môžeme odstrániť absolútnu hodnotu. Daná sústava má potom tvar

$$\begin{aligned} |1-x| &= y+1, \\ 1+y &= z-2, \\ z-2 &= x-x^2 \end{aligned}$$

a odtiaľ jednoduchým porovnaním dostávame rovnicu

$$|1-x| = x-x^2.$$

Pre $x < 1$ dostaneme rovnicu $1 - x = x - x^2$ čiže $(1-x)^2 = 0$, ktorej riešenie $x = 1$ ale predpokladu $x < 1$ nevyhovuje.

Pre $x \geq 1$ vyjde rovnica $x^2 = 1$; z jej dvoch riešení $x = -1$ a $x = 1$ predpokladu $x \geq 1$ vyhovuje iba $x = 1$.

Z danej sústavy potom jednoducho dopočítame hodnoty $y = -1$ a $z = 2$. Sústava má teda jediné riešenie $(x, y, z) = (1, -1, 2)$.

Seminár 20: Teória čísel IV – prvočísla

Ciele

Precvičiť so študentmi rôzne úlohy o prvočíslach, pri riešení ktorých sa uplatnia poznatky o deliteľnosti nadobudnuté v seminároch 7 a 8.

Úlohy a riešenia

Úloha 20.1. [63-I-3-N2] Číslo n je súčinom dvoch rôznych prvočísel. Ak zväčšíme menšie z nich o 1 a druhé ponecháme, ich súčin sa zväčší o 7. Určte číslo n.

Riešenie. Označme $p < q$ prvočísla zo zadania. Potom platí $(p+1)q = pq + 7$. Po roznásobení ľavej strany a odčítaní výrazu pq od oboch strán rovnosti dostávame $q = 7$. Prvočíslo p má byť menšie ako q, preto $p \in \{2,3,5\}$ a hľadaným číslom n je tak jedno z čísel 14, 21 alebo 35.

Úloha 20.2. [63-I-3-N4] Číslo n je súčinom dvoch prvočísel. Ak zväčšíme každé z nich o 1, ich súčin sa zväčší o 35. Určte číslo n.

Riešenie. Podobne ako v predchádzajúcom prípade označme $p \leq q$ (nie nutne rôzne) prvočísla zo zadania a to prepíšme do tvaru rovnosti $(p+1)(q+1) = pq+35$. Po úprave dostávame $p+q = 34$. Hľadáme teda dvojice prvočísel, ktorých súčet bude 34. Takými sú jedine 3 a 31, 5 a 29, 11 a 23, 17 a 17. Riešením úlohy je potom $n \in \{93, 145, 253, 289\}$.

Komentár. Úvodné dve jednoduché úlohy majú prípravný charakter na úlohu nasledujúcu a sú skôr rozcvičkou, než náročnou aplikáciou vedomostí o prvočíslach.

Úloha 20.3. [63-I-3] Číslo n je súčinom troch rôznych prvočísel. Ak zväčšíme dve menšie z nich o 1 a najväčšie ponecháme nezmenené, zväčší sa ich súčin o 915. Určte číslo n.

Riešenie*. Nech $n = pqr, p < q < r$. Rovnosť $(p+1)(q+1)r = pqr+915$ ekvivalentne upravíme na tvar $(p+q+1)\cdot r = 915 = 3\cdot 5\cdot 61$, z ktorého vyplýva, že prvočíslo r môže nadobudnúť len niektorú z hodnôt 3, 5 a 61. Pre $r = 3$ ale z poslednej rovnice dostávame $(p+q+1)\cdot 3 = 3\cdot 5\cdot 61$, čiže $p+q = 304$. To je spor s tým, že r je najväčšie. Analogicky zistíme, že nemôže byť ani $r = 5$. Je teda $r = 61$ a $p+q = 14$. Vyskúšaním všetkých možností pre p a q vyjde $p = 3$, $q = 11$, $r = 61$ a $n = 3\cdot 11\cdot 61 = 2013$.

Komentár. Úloha vyžaduje vhodnú manipuláciu rovnosti zo zadania a potom už len dostatočne pozornú analýzu vzniknutých možností.

Úloha 20.4. [64-S-3] Nájdite najmenšie prirodzené číslo n s ciferným súčtom 8, ktoré sa rovná súčinu troch rôznych prvočísel, pričom rozdiel dvoch najmenších z nich je 8.

Riešenie*. Hľadané číslo n je súčinom troch rôznych prvočísel, ktoré označíme p,q,r, $p < q < r$. Číslo $n = pqr$ má ciferný súčet 8, ktorý nie je deliteľný tromi, preto ani n nie je deliteľné tromi a teda $p,q,r \neq 3$. Napokon hľadané číslo n nie je deliteľné ani dvoma, pretože by muselo byť $p = 2$ a $q = p+8 = 10$, čo nie je prvočíslo. Musí teda byť $p = 5$.

Ak je $p = 5$, je $q = p+8 = 13$, takže $r \in \{17, 19, 23, 29, 31, \dots\}$ a $n \in \{1105, 1235, 1495, 1885, 2015, \dots\}$. V tejto množine je zrejme najmenšie číslo s ciferným súčtom 8 číslo 2015.

Ak je $p > 5$, je $p = 11$ najmenšie prvočíslo také, že aj $q = p+8$ je prvočíslo. Preto $p = 11$, $q = 19$, a teda $r = 23$, takže pre zodpovedajúce čísla n platí $n = 11\cdot 19\cdot 23 = 4807 > 2015$.

Komentár. Úloha príjemne spája poznatky o deliteľnosti a prvočíslach a nemala by pre študentov byť neprekonateľnou výzvou.

Úloha 20.5. [57-S-1] Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel a, b väčších ako 1 tak, aby ich súčet aj súčin boli mocniny prvočísel.

Riešenie*. Z podmienky pre súčin vyplýva, že a aj b sú mocninami toho istého prvočísla p: $a = p^r$, $b = p^s$, pričom r, s sú celé kladné čísla. Keby bolo p nepárne, bol by súčet $a+b$ deliteľný okrem čísla p aj číslom 2, takže by nebol mocninou prvočísla. Teda $p = 2$. Ak $r < s$, je súčet $a+b = 2^r(1+2^{s-r})$ opäť číslo párne deliteľné nepárnym číslom väčším ako 1, nie je teda mocninou prvočísla. K rovnakému záveru dôjdeme aj v prípade, keď $r > s$. Ostáva preto jediná možnosť: $a = b = 2^r$, pričom r je celé kladné číslo. Skúška $a+b = 2^r + 2^r = 2^{r+1}$ a $ab = 2^{2r}$ potvrdzuje, že riešením sú všetky dvojice $(a, b) = (2^r, 2^r)$, kde r je celé kladné číslo.

Úloha 20.6. [65-I-1-D2, resp. 55-II-4] Nájdite všetky dvojice prvočísel p a q, pre ktoré platí $p+q^2 = q+145p^2$.

Riešenie*. Pre prvočísla p, q má platiť $q(q-1) = p(145p-1)$, takže prvočíslo p delí $q(q-1)$. Prvočíslo p nemôže deliť prvočíslo q, pretože to by znamenalo, že $p = q$, a teda $145p = p$, čo nie je možné. Preto p delí $q-1$, t. j. $q-1 = kp$ pre nejaké prirodzené k. Po dosadení do daného vzťahu dostaneme podmienku

$$p = \frac{k+1}{145-k^2}.$$

Vidíme, že menovateľ zlomku na pravej strane je kladný jedine pre $k \leq 12$, zároveň však pre $k \leq 11$ je jeho čitateľ menší ako menovateľ: $k+1 \leq 12 < 24 \leq 145k^2$. Iba pre $k = 12$ tak vyjde p prirodzené a prvočíslo, $p = 13$. Potom $q = 157$, čo je tiež prvočíslo. Úloha má jediné riešenie.

Komentár. Úloha opäť ukazuje, že upravenie podmienok zo zadania do vhodného tvaru, o ktorom môžeme ďalej diskutovať, je často kľúčovým krokom v riešení. V tomto prípade ide o podmienku $q = kp+1$ a následný rozbor hodnôt v čitateli a menovateli zlomku. To by v študentoch malo umocniť dojem, že zručné narábanie s algebraickými výrazmi nájde svoje široké uplatnenie.

Úloha 20.7. [62-I-5] Určte všetky celé čísla n, pre ktoré $2n^3 - 3n^2 + n + 3$ je prvočíslo.

Riešenie*. Ukážeme, že jedinými celými číslami, ktoré vyhovujú úlohe, sú $n = 0$ a $n = 1$.

Upravme najskôr výraz $V = 2n^3 - 3n^2 + n + 3$ nasledujúcim spôsobom:

$$V = (n^3 - 3n^2 + 2n) + (n^3 - n) + 3 = (n-2)(n-1)n + (n-1)n(n+1) + 3.$$

Oba súčiny $(n-2)(n-1)n$ a $(n-1)n(n+1)$ v upravenom výraze V sú deliteľné tromi pre každé celé číslo n (v oboch prípadoch sa jedná o súčin troch po sebe idúcich celých čísel), takže výraz V je pre všetky celé čísla n deliteľný tromi. Hodnota výrazu V je preto prvočíslom práve vtedy, keď $V = 3$, teda práve vtedy, keď súčet oboch spomenutých súčinov je rovný nule:

$$0 = (n-2)(n-1)n + (n-1)n(n+1) = n(n-1)[(n-2) + (n+1)] = n(n-1)(2n-1).$$

Poslednú podmienku však spĺňajú iba dve celé čísla n, a to $n = 0$ a $n = 1$. Tým je úloha vyriešená.

Poznámka. Fakt, že výraz V je deliteľný tromi pre ľubovoľné celé n, môžeme odvodiť aj tak, že doňho postupne dosadíme $n = 3k$, $n = 3k+1$ a $n = 3k+2$, pričom k je celé číslo, rozdelíme teda všetky celé čísla n na tri skupiny podľa toho, aký dávajú zvyšok po delení tromi.

Komentár. Aj keď vzorové riešenie môže vyzerať trikovo, po vyskúšaní niekoľko málo hodnôt n je vždy hodnota zo zadania deliteľná 3, čo by študentov mohlo priviesť na myšlienku skúsiť dokázať deliteľnosť čísla zo zadania tromi.

Úloha 20.8. [[HKŠ11], príklad 2.3, str. 174] Nájdite všetky prvočísla, ktoré sú súčasne súčtom a rozdielom dvoch vhodných prvočísel.

Riešenie*. Predpokladajme, že prvočíslo p je súčasne súčtom aj rozdielom dvoch prvočísel. Potom je však $p > 2$ a teda je p nepárne. Pretože je p zároveň súčet aj rozdiel dvoch prvočísel, jedno z nich musí byť vždy párne, teda 2. Takže hľadáme prvočísla p, p_1, p_2 tak, že $p = p_1 + 2 = p_2 - 2$, teda $p_1, p, p-2$ sú tri po sebe idúce nepárne čísla a teda práve jedno z nich je deliteľné troma (študenti by si mali rozmyslieť prečo). Avšak troma je deliteľné jediné prvočíslo 3, odkiaľ vzhľadom na to, že $p_1 \geq 1$ vyplýva $p_1 = 3$, $p = 5$ a $p_2 = 7$. Jediné prvočíslo vyhovujúce zadaniu je teda $p = 5$.

Komentár. Úloha, ktorá vyžaduje viac uvažovania, než tvrdého počítania, je zaujímavá práve jediným výsledkom.

Úloha 20.9. [[Thi86], príklad 3, str. 95] Nájdite celočíselné riešenia rovnice

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{p},$$

kde p je pevne dané prvočíslo.

Riešenie*. Ak existujú vôbec nejaké riešenia vyšetrovanej rovnice, potom sú nenulové. Preto môžeme rovnicu upraviť na ekvivalentný tvar $yx - px - py = 0$, resp. $(x-p)(y-p) - p^2 = 0$, a teda

$$(x-p)(y-p) = p^2.$$

Odtiaľ je vidieť, že celočíselné riešenia môžeme dostať len vtedy, ak $x - p$ prebehne všetkých deliteľov čísla p^2, pričom $y - p$ prebehne doplnkové delitele. Pretože je p prvočíslo, musí byť nutne

$$x - p \in \{1, p, p^2, -1, -p, -p^2\}.$$

Pretože $x \neq 0$, odpadá $x - p = -p$. Ostáva teda

$$x \in \{1+p, 2p, p+p^2, p-1, p-p^2\} \quad \text{a teda} \quad y \in \{p+p^2, 2p, 1+p, p-p^2, p-1\}.$$

Tieto hodnoty sú skutočne riešením, o čom sa môžeme presvedčiť skúškou.

Komentár. Úloha, v ktorej opäť predtým, než uplatníme znalosti o deliteľnosti, príp. prvočíslach, musíme umne upraviť východiskový tvar rovnice.

Domáca práca

Úloha 20.10. [65-I-1] Nájdite všetky možné hodnoty súčinu prvočísel p, q, r, pre ktoré platí

$$p^2 - (q+r)^2 = 637.$$

Riešenie*. Ľavú stranu danej rovnice rozložíme na súčin podľa vzorca pre $A^2 - B^2$. V takto upravenej rovnici

$$(p+q+r)(p-q-r) = 637$$

už ľahko rozoberieme všetky možnosti pre dva celočíselné činitele naľavo. Prvý z nich je väčší a kladný, preto aj druhý musí byť kladný (lebo taký je ich súčin), takže podľa rozkladu na súčin prvočísel čísla $637 = 7^2 \cdot 13$ ide o jednu z dvojíc $(637, 1)$, $(91, 7)$ alebo $(49, 13)$. Prvočíslo p je zrejme aritmetickým priemerom oboch činiteľov, takže sa musí rovnať jednému z čísel $\frac{1}{2}(637+1) = 319$, $\frac{1}{2}(91+7) = 49$, $\frac{1}{2}(49+13) = 31$. Prvé dve z nich však prvočísla nie sú ($319 = 11 \cdot 29$ a $49 = 7^2$), tretie áno. Takže nutne $p = 31$ a prislúchajúce rovnosti $31+q+r = 49$ a $31-q-r = 13$ platia práve vtedy, keď $q+r = 18$. Také dvojice prvočísel $\{q, r\}$ sú iba $\{5, 13\}$ a $\{7, 11\}$ (stačí prebrať všetky možnosti, alebo si uvedomiť, že jedno z prvočísel q, r musí byť aspoň $18 : 2 = 9$, nanajvýš však $18 - 2 = 16$). Súčin pqr tak má práve dve možné hodnoty, a to $31 \cdot 5 \cdot 13 = 2015$ a $31 \cdot 7 \cdot 11 = 2387$.

Doplňujúce zdroje a materiály

Ďalšie zaujímavé príklady je možné nájsť v [HKŠ11], paragraf 2 a taktiež v [Hol10].

Seminár 21: Teória čísel V – miš-maš

Ciele

Trénovať riešenie rôznorodých úloh z oblasti elementárnej teórie čísel bez špecifického zamerania

Úvodný komentár

Toto seminárne stretnutie sa nevyznačuje špecifickou témou, ale ide skôr o panoptikum rôznych úloh, ktoré sa dajú zahrnúť do oblasti teórie čísel lepšie ako do akejkoľvek inej.

Úlohy a riešenia

Úloha 21.1. [65-II-4] Adam s Barborou hrajú so zlomkom

$$\frac{10a+b}{10c+d}$$

takúto hru na štyri ťahy: Hráči striedavo nahrádzajú ľubovoľné z doposiaľ neurčených písmen a, b, c, d nejakou cifrou od 1 do 9. Barbora vyhrá, keď výsledný zlomok bude rovný buď celému číslu, alebo číslu s konečným počtom desatinných miest; inak vyhrá Adam (napríklad keď vznikne zlomok $\frac{11}{29}$). Ak začína Adam, ako má hrať Barbora, aby zaručene vyhrala? Ak začína Barbora, je možné poradiť Adamovi tak, aby vždy vyhral?

Riešenie*. Ak má prvý ťah Adam, môže Barbora hrať tak, aby bol výsledný zlomok rovný jednej, čo podľa zadania prinesie Barbore výhru. Taký zlomok vyjde, keď budú súčasne platiť obe rovnosti $a = c$ a $b = d$, ktoré Barbora dosiahne ťahmi „súmerne združenými" podľa zlomkovej čiary s Adamovými ťahmi.

Ak začína Barbora, môže Adam hrať tak, aby vyšiel zlomok s menovateľom $10c+d$ deliteľným tromi, ktorého čitateľ $10a+b$ však deliteľný tromi nebude. Na to Adamovi stačí po každom z oboch Barboriných ťahov vhodne „doplniť" čitateľ či menovateľ, napríklad podľa kritéria deliteľnosti tromi mu stačí zabezpečiť, aby sa ciferný súčet $a+b$ čitateľa rovnal 10 a aby sa ciferný súčet $c+d$ menovateľa rovnal 9 alebo 12. Adam tak vyhrá, pretože výsledný zlomok nebude možné krátiť tromi, takže sa nebude rovnať žiadnemu zlomku s mocninou čísla 10 v menovateli, akým sa dá zapísať každé číslo s konečným počtom desatinných miest.

Komentár. Úlohu je možné najprv zadať ako hru medzi dvoma hráčmi a až po tom, čo študenti odohrajú niekoľko kôl a vypozorujú zákonitosti, je vhodné pustiť sa do tvrdého riešenia. Zaujímavé tiež môže byť porovnať stratégie jednotlivých študentov medzi sebou, príp. ich po samostatnej práci nechať niekoľko súbojov odohrať znova, aby svoju stratégiu overili v praxi.

Úloha 21.2. [57-I-1-N1] Ak m, k a $\sqrt[k]{m}$ sú celé čísla väčšie ako 1, tak v rozklade čísla m na súčin prvočísel sa každé prvočíslo vyskytuje v mocnine, ktorej exponent je násobkom čísla k. Dokážte.

Riešenie*. Rozklad čísla m dostaneme, keď rozklad čísla $\sqrt[k]{m}$ umocníme na k-tu, každý exponent v rozklade čísla m tak bude súčinom exponentu v rozklade čísla $\sqrt[k]{m}$ a čísla k.

Komentár. Úloha je prípravou k riešeniu komplexnejšieho problému, ktorý nasleduje.

Úloha 21.3. [57-I-1] Určte najmenšie prirodzené číslo n, pre ktoré aj čísla $\sqrt{2n}, \sqrt[3]{3n}, \sqrt[5]{5n}$ sú prirodzené.

Riešenie*. Vysvetlíme, prečo prvočíselný rozklad hľadaného čísla musí obsahovať len vhodné mocniny prvočísel 2, 3 a 5. Každé prípadné ďalšie prvočíslo by sa v rozklade čísla n muselo vyskytovať v mocnine, ktorej exponent je deliteľný dvoma, tromi aj piatimi zároveň (viď predchádzajúca úloha). Po vyškrtnutí takého prvočísla by sa číslo n zmenšilo a skúmané odmocniny by pritom ostali celočíselné.

Položme preto $n = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$, pričom a, b, c sú prirodzené čísla. Čísla $\sqrt[3]{3n}$ a $\sqrt[5]{5n}$ sú celé, preto je exponent a násobkom troch a piatich. Aj $\sqrt{2n}$ je celé číslo, preto musí byť číslo a nepárne. Je teda nepárnym násobkom pätnástich: $a \in \{15, 45, 75, \ldots\}$. Analogicky je exponent b taký násobok desiatich, ktorý po delení tromi dáva zvyšok 2: $b \in \{20, 50, 80, \ldots\}$. Napokon c je násobok šiestich, ktorý po delení piatimi dáva zvyšok 4: $c \in \{24, 54, 84, \ldots\}$. Z podmienky, že n je najmenšie, dostávame $n = 2^{15} \cdot 3^{20} \cdot 5^{24}$.

Presvedčíme sa ešte, že dané odmocniny sú prirodzené čísla:

$$\sqrt{2n} = 2^8 \cdot 3^{10} \cdot 5^{12}, \quad \sqrt[3]{3n} = 2^5 \cdot 3^7 \cdot 5^8, \quad \sqrt[5]{5n} = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^5.$$

Záver. Hľadaným číslom je $n = 2^{15} \cdot 3^{20} \cdot 5^{24}$.

Komentár. Úloha je netradičným príkladom uplatnenia poznatkov o rozklade čísla na súčin prvočísel a vďaka návodnej úlohe by študenti mali byť dostatočne pripravení na jej samostatné riešenie.

Úloha 21.4. [60-II-2] Nájdite všetky kladné celé čísla n, pre ktoré je číslo $n^2 + 6n$ druhou mocninou celého čísla.

Riešenie*. Zrejme $n^2+6n > n^2$ a zároveň $n^2+6n < n^2+6n+9 = (n+3)^2$. V uvedenom intervale ležia iba dve druhé mocniny celých čísel: $(n+1)^2$ a $(n+2)^2$.

V prvom prípade máme $n^2+6n = n^2+2n+1$, teda $4n = 1$, tomu však žiadne celé číslo n nevyhovuje.

V druhom prípade máme $n^2+6n = n^2+4n+4$, teda $2n = 4$. Dostávame tak jediné riešenie $n = 2$.

Iné riešenie*. Budeme skúmať rozklad $n^2+6n = n(n+6)$. Spoločný deliteľ oboch čísel n a $n+6$ musí deliť aj ich rozdiel, preto ich najväčším spoločným deliteľom môžu byť len čísla 1, 2, 3 alebo 6. Tieto štyri možnosti rozoberieme.

Keby boli čísla n a $n+6$ nesúdeliteľné, muselo by byť každé z nich druhou mocninou. Rozdiel dvoch druhých mocnín prirodzených čísel však nikdy nie je 6. Pre malé čísla sa o tom ľahko presvedčíme, a pre $k = 4$ už je rozdiel susedných štvorcov k^2 a $(k-1)^2$ aspoň 7. Vlastnosť, že 1, 3, 4, 5 a 7 je päť najmenších rozdielov dvoch druhých mocnín, využijeme aj ďalej.

Ak je najväčším spoločným deliteľom čísel n a $n+6$ číslo 2, je $n = 2m$ pre vhodné m, ktoré navyše nie je deliteľné tromi. Ak $n(n+6) = 4m(m+3)$ je štvorec, musí byť aj $m(m+3)$ štvorec. Čísla m a $m+3$ sú však nesúdeliteľné, preto musí byť každé z nich druhou mocninou prirodzeného čísla. To nastane len pre $m = 1$, čiže $n = 2$. Ľahko overíme, že $n(n+6)$ je potom naozaj druhou mocninou celého čísla.

Ak je najväčším spoločným deliteľom čísel n a $n+6$ číslo 3, je $n = 3m$ pre vhodné nepárne m. Ak $n(n+6) = 9m(m+2)$ je štvorec, musia byť nesúdeliteľné čísla m a $m+2$ tiež štvorce. Také dva štvorce však neexistujú.

Ak je najväčším spoločným deliteľom čísel n a $n+6$ číslo 6, je $n = 6m$ pre vhodné m. Ak $n(n+6) = 36m(m+1)$ je štvorec, musia byť štvorce aj obe nesúdeliteľné čísla m a $m+1$, čo nastane len pre $m = 0$, my však hľadáme len kladné čísla n.

Úlohe vyhovuje jedine $n = 2$.

Komentár. K správnemu riešeniu úlohy vedú mnohé cesty. Prvé uvedené riešenie je trochu trikové, avšak nápadité, a preto ak ho študenti neobjavia, je vhodné im ho na záver ukázať. Nie je tiež nepravdepodobné, že študenti budú skúšať, ako sa číslo n^2+6n správa pre rôzne hodnoty n, čo by ich mohlo naviesť na správu cestu nájdenia jediného riešenia.

Úloha 21.5. [66-II-1] Nájdite všetky mnohočleny $P(x) = ax^2+bx+c$ s celočíselnými koeficientami spĺňajúce

$$1 < P(1) < P(2) < P(3) \quad \text{a súčasne} \quad \frac{P(1)\cdot P(2)\cdot P(3)}{4} = 17^2.$$

Riešenie*. Rovnosť zo zadania je ekvivalentná rovnosti $P(1)\cdot P(2)\cdot P(3) = 4\cdot 17^2$, takže čísla $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$ môžu byť iba z množiny deliteľov čísla $4\cdot 17^2$ väčších ako 1:

$$2 < 4 < 17 < 2\cdot 17 < 4\cdot 17 < 17^2 < 2\cdot 17^2 < 4\cdot 17^2.$$

Ak by platilo $P(1) = 4$, bol by súčin $P(1)\cdot P(2)\cdot P(3)$ aspoň $4\cdot 17\cdot (2\cdot 17) = 8\cdot 17^2$, čo nevyhovuje zadaniu. Preto $P(1) = 2$ a tak je nutne $P(2) = 17$, pretože keby bolo $P(2) = 4$, musel by byť daný súčin $4\cdot 17^2$ deliteľný číslom $P(1)\cdot P(2) = 8$, čo neplatí, a pre $P(2) = 2\cdot 17$ by bol súčin $P(1)\cdot P(2)\cdot P(3)$ opäť príliš veľký. Pre tretiu neznámu hodnotu $P(3)$ potom vychádza $P(3) = 4\cdot 17^2/(2\cdot 17) = 2\cdot 17$.

Hľadané koeficienty a, b, c tak sú práve také celé čísla, ktoré vyhovujú sústave

$$P(1) = a + b + c = 2,$$
$$P(2) = 4a + 2b + c = 17,$$
$$P(3) = 9a + 3b + c = 34.$$

Jej vyriešením dostaneme $a = 1$, $b = 12$, $c = -11$.

Záver. Úlohe vyhovuje jediný mnohočlen $P(x) = x^2 + 12x - 11$.

Komentár. Úloha spája poznatky o deliteľnosti, mnohočlenoch a na jej úspešné doriešenie je nutná aj schopnosť popasovať sa so sústavou troch rovníc s tromi neznámymi. Zaujímavé bude tiež pozorovať, koľko študentov si spomenie, že podobnou úlohou sa už zaoberali v seminári 6.

Úloha 21.6. [64-II-1] Celé čísla od 1 do 9 rozdelíme ľubovoľne na tri skupiny po troch a potom čísla v každej skupine medzi sebou vynásobíme.

a) Určte tieto tri súčiny, ak viete, že dva z nich sa rovnajú a sú menšie ako tretí súčin.

b) Predpokladajme, že jeden z troch súčinov, ktorý označíme S, je menší ako dva ostatné súčiny (ktoré môžu byť rovnaké). Nájdite najväčšiu možnú hodnotu S.

Riešenie*. Najskôr vyjadríme súčin všetkých deviatich čísel pomocou jeho rozkladu na súčin prvočísel:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7.$$

a) Označme dva z uvažovaných (rôznych) súčinov S a Q, pričom $S < Q$. Z rovnosti

$$S \cdot S \cdot Q = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$$

vidíme, že prvočísla 5 a 7 musia byť zastúpené v súčine Q, takže $Q = 5 \cdot 7 \cdot x = 35x$, pričom x je jedno zo zvyšných čísel 1, 2, 3, 4, 6, 8 a 9. Ďalej vidíme, že v rozklade dotyčného x musí mať prvočíslo 2 nepárny exponent a prvočíslo 3 párny exponent – tomu vyhovujú iba čísla 2 a 8. Pre $x = 2$ ale vychádza $Q = 35 \cdot 2 = 70 < S = 2^3 \cdot 3^2 = 72$, čo odporuje predpokladu $S < Q$. Preto je nutne $x = 8$, pre ktoré vychádza $Q = 35 \cdot 2 = 280$ a $S^2 = 2^4 \cdot 3^4$ čiže $S = 2^2 \cdot 3^2 = 36$. Trojica súčinov je teda $(36, 36, 280)$.

Ostáva ukázať, že získanej trojici naozaj zodpovedá rozdelenie daných deviatich čísel na trojice:

$$S = 1 \cdot 4 \cdot 9 = 36, \quad S = 2 \cdot 3 \cdot 6 = 36, \quad Q = 5 \cdot 7 \cdot 8 = 280.$$

b) Označme uvažované súčiny S, Q a R, pričom $S < Q$ a $S < R$ (nie je ale vylúčené, že $Q = R$). V riešení časti a) sme zistili, že platí rovnosť

$$S \cdot Q \cdot R = 70 \cdot 72 \cdot 72.$$

Ak teda ukážeme, že existuje rozdelenie čísel, pri ktorom $S = 70$ a $R = Q = 72$, bude $S = 70$ hľadaná najväčšia hodnota, lebo keby pri niektorom rozdelení platilo $S \geq 71$, muselo by byť $R \geq 72$ aj $Q \geq 72$ a tiež $S \cdot Q \cdot R \geq 71 \cdot 72 \cdot 72$, čo zrejme odporuje predchádzajúcej rovnosti. Nájsť potrebné rozdelenie je jednoduché:

$$S = 2 \cdot 5 \cdot 7 = 70, \quad Q = 1 \cdot 8 \cdot 9 = 72, \quad R = 3 \cdot 4 \cdot 6 = 72.$$

Komentár. Zaujímavá úloha, ktorá dôvtipne využíva rozklady čísel na súčin prvočísel.

Domáca práca

Úloha 21.7. [58-I-5] Z množiny $\{1,2,3,\ldots,99\}$ vyberte čo najväčší počet čísel tak, aby súčet žiadnych dvoch vybraných čísel nebol násobkom jedenástich. (Vysvetlite, prečo zvolený výber má požadovanú vlastnosť a prečo žiadny výber väčšieho počtu čísel nevyhovuje.)

Riešenie*. Čísla od 1 do 99 rozdelíme podľa ich zvyšku po delení číslom 11 do jedenástich deväťprvkových skupín $T_0, T_1, \ldots, T_{10}$:

$$
\begin{aligned}
T_0 &= \{11,22,33,...,99\},\\
T_1 &= \{1,12,23,...,89\},\\
T_2 &= \{2,13,24,...,90\},\\
&\vdots\\
T_{10} &= \{10,21,32,...,98\}.
\end{aligned}
$$

Ak vyberieme jedno číslo z T_0 (viac ich ani vybrať nesmieme) a všetky čísla z T_1, T_2, T_3, T_4 a T_5, dostaneme vyhovujúci výber $1+5\cdot 9 = 46$ čísel, lebo súčet dvoch čísel z $0,1,2,3,4,5$ je deliteľný jedenástimi jedine v prípade 0 + 0, z množiny T_0 sme však vybrali iba jedno číslo.

Na druhej strane, v ľubovoľnom vyhovujúcom výbere je najviac jedno číslo zo skupiny T_0 a najviac 9 čísel z každej zo skupín

$$T_1 \cup T_{10},\ \ T_2 \cup T_9,\ \ T_3 \cup T_8,\ \ T_4 \cup T_7,\ \ T_5 \cup T_6,$$

lebo pri výbere 10 čísel z niektorej skupiny $T_i \cup T_{11-i}$ by medzi vybranými bolo niektoré číslo zo skupiny T_i a aj niektoré číslo zo skupiny T_{11-i}; ich súčet by potom bol deliteľný jedenástimi. Celkom je teda vo výbere najviac $1+5\cdot 9 = 46$ čísel.

Poznámka. Možno uvedené „učesané“ riešenie vyzerá príliš trikovo. Avšak počiatočné úvahy každého riešiteľa k nemu rýchlo vedú: iste záleží len na zvyškoch vybraných čísel, takže rozdelenie na triedy T_i a vyberanie z nich je prirodzené. Je jasné, že z T_0 môže byť vybrané len jedno číslo a všetko ďalšie, o čo sa musíme starať, je požiadavka, aby sme nevybrali zároveň po čísle zo skupiny T_i aj zo skupiny T_{11-i}. Ak je už vybrané niektoré číslo z triedy T_i, kde $i \neq 0$, môžeme pokojne vybrať všetky čísla z T_i, to už skúmanú vlastnosť nepokazí. Je preto dokonca jasné, ako všetky možné výbery najväčšieho počtu čísel vyzerajú.

Komentár. Je veľmi vhodné sa k tejto úlohe v nasledujúcom seminári vrátiť s poznámkou, že množiny $T_1, \ldots, T_{10}$ nazývame zvyškové triedy.

Úloha 21.8. [64-I-6] Nájdite najmenšie prirodzené číslo n také, že v zápise iracionálneho čísla $\sqrt{n}$ nasledujú bezprostredne za desatinnou čiarkou dve deviatky.

Riešenie*. Označme a najbližšie väčšie prirodzené číslo k iracionálnemu číslu $\sqrt{n}$. Podľa zadania potom platí $a - 0,01 \leq \sqrt{n}$. Keďže a^2 je prirodzené číslo väčšie ako n, musí spolu platiť

$$(a-0,01)^2 \leq n \leq a^2 - 1.$$

Po úprave nerovnosti medzi krajnými výrazmi vyjde

$$\frac{1}{50}a \geq 1,0001, \quad \text{čiže} \quad a = 50,005.$$

Keďže je číslo a celé, vyplýva z toho $a = 51$. A keďže

$$(51 - 0,01)^2 = 2601 - \frac{102}{100} + \frac{1}{100^2} \in (2599, 2600),$$

je hľadaným číslom $n = 2600$.

Poznámka. Za správne riešenie možno uznať aj riešenie pomocou kalkulačky. Ak majú totiž byť za desatinnou čiarkou dve deviatky, musí byť číslo n veľmi blízko zľava k nejakej druhej mocnine. Preto stačí na kalkulačke vyskúšať čísla $\sqrt{3}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{15}$ atď. Keďže $51^2 = 2601$, nájdeme, že $\sqrt{2600} = 50,990195\ldots$

2.7 Marec

Seminár 22: Geometria V – štvoruholníky

Ciele

Uplatniť znalosti z predchádzajúcich geometrických seminárov pri riešení úloh o štvoruholníkoch.

Úlohy a riešenia

Úloha 22.1. [57-I-2] Štvoruholníku $ABCD$ je vpísaná kružnica so stredom S. Určte rozdiel $|\measuredangle ASD| - |\measuredangle CSD|$, ak $|\measuredangle ASB| - |\measuredangle BSC| = 40°$

Riešenie*. Päty kolmíc spustených zo stredu S vpísanej kružnice na strany AB, BC, CD a DA označme postupne K, L, M a N (obr. 22.1.1). Pravouhlé trojuholníky ASK a ASN sú zhodné podľa vety Ssu. Majú totiž spoločnú preponu AS a zhodné odvesny SK a SL, ktorých dĺžka je rovná polomeru vpísanej kružnice. Zo zhodnosti týchto trojuholníkov vyplýva jednak známe tvrdenie o dĺžkach dotyčníc ($|AK| = |AN|$), jednak zhodnosť uhlov ASK a ASN, ktorých spoločnú veľkosť označíme α:

$$|\measuredangle ASK| = |\measuredangle ASN| = \alpha.$$

Analogicky zistíme zhodnosť trojuholníkov SBK a SBL, ďalej SCL a SCM, a nakoniec SDM a SDN. Na základe uvedených zhodností môžeme položiť

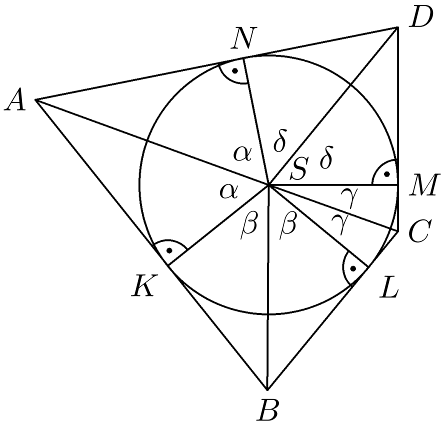
$$|\measuredangle BSK| = |\measuredangle BSL| = \beta, \quad |\measuredangle CSL| = |\measuredangle CSM| = \gamma, \quad |\measuredangle DSM| = |\measuredangle DSN| = \delta.$$

Odtiaľ a z obr. 22.1.1 potom dostávame

$$\begin{aligned}|\measuredangle ASD| - |\measuredangle CSD| &= (\alpha+\delta) - (\gamma+\delta) = \alpha - \gamma = \\ &= (\alpha+\beta) - (\gamma+\beta) = |\measuredangle ASB| - |\measuredangle BSC| = 40°.\end{aligned}$$

Záver. $|\measuredangle ASD| - |\measuredangle CSD| = 40°$.

Komentár. Úloha je relatívne nezložitým úvodom do seminára a nadväzuje na posledné geometrické stretnutie, ktoré sa zaoberalo opísanými a vpísanými kružnicami trojuholníku. Pre úplnosť len dodajme, že štvoruholník, ktorému je možné vpísať kružnicu, sa nazýva *dotyčnicový*.



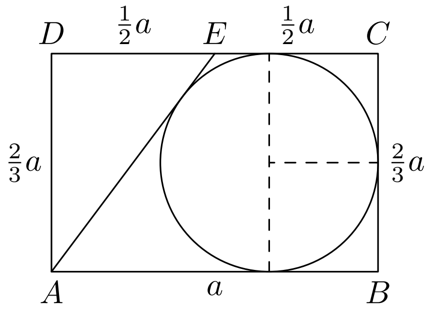
Obr. 22.1.1

Úloha 22.2. [61-II-3] Nech E je stred strany CD rovnobežníka $ABCD$, v ktorom platí $2|AB| = 3|BC|$. Dokážte, že ak sa dá do štvoruholníka ABCE vpísať kružnica, dotýka sa táto kružnica strany BC v jej strede.

Riešenie*. Keďže štvoruholník $ABCE$ je podľa zadania dotyčnicový, pre dĺžky jeho strán platí známa rovnosť[10]

$$|AB| + |CE| = |BC| + |AE|.$$

V našej situácii pri označení $a = |AB|$ platí $|BC| = |AD| = \frac{2}{3}a$ a $|CE| = |DE| = \frac{1}{2}a$ (obr. 22.2.1), odkiaľ po dosadení do uvedenej rovnosti zistíme, že $|AE| = \frac{5}{6}a$. Teraz si všimneme, že pre dĺžky



Obr. 22.2.1

strán trojuholníka ADE platí

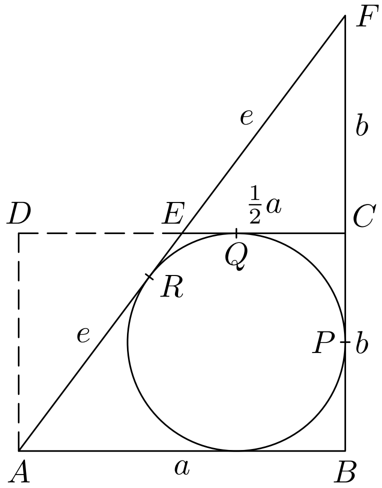
$$|AD| : |DE| : |AE| = \frac{2}{3}a : \frac{1}{2}a : \frac{5}{6}a = 4 : 3 : 5,$$

takže podľa (obrátenej časti) Pytagorovej vety má trojuholník ADE pravý uhol pri vrchole D, a teda rovnobežník $ABCD$ je obdĺžnik. Dotyčnica BC kružnice vpísanej štvoruholníku $ABCE$ je teda kolmá na dve jej (navzájom rovnobežné) dotyčnice AB a CE. To už zrejme znamená, že bod dotyku dotyčnice BC je stredom úsečky BC (vyplýva to zo zistenej kolmosti vyznačeného priemeru kružnice

[10] Rovnosť sa odvodí rozpísaním dĺžok strán na ich úseky vymedzené bodmi dotyku vpísanej kružnice a následným využitím toho, že každé dva z týchto úsekov, ktoré vychádzajú z rovnakého vrcholu štvoruholníka, sú zhodné.

na jej vyznačený polomer).

Iné riešenie*. Ukážeme, že požadované tvrdenie možno dokázať aj bez toho, aby sme si všimli, že rovnobežník $ABCD$ je v danej úlohe obdĺžnikom. Namiesto toho využijeme, že úsečka CE je stredná priečka trojuholníka ABF, pričom F je priesečník polpriamok BC a AE (obr. 22.2.2), lebo $CE \parallel AB$ a $|CE| = \frac{1}{2}|AB|$. Označme preto $a = |AB| = 2|CE|$, $b = |BC| = |CF|$ a $e = |AE| = |EF|$



Obr. 22.2.2

(rovnosť $2a = 3b$ použijeme až neskôr). Rovnako ako v prvom riešení využijeme rovnosť $b+e = a + \frac{1}{2}a (= \frac{3}{2}a)$, ktorá platí pre dĺžky strán dotyčnicového štvoruholníka $ABCE$. Kružnica jemu vpísaná sa dotýka strán BC, CE, AE postupne v bodoch P, Q, R tak, že platia rovnosti

$$|CP| = |CQ|, \quad |EQ| = |ER| \quad \text{a tiež} \quad |FP| = |FR|.$$

Pre súčet zhodných dĺžok $|FP|$ a $|FR|$ teda platí

$$|FP| + |FR| = (b + |CP|) + (e + |ER|) = (b+e) + (|CP| + |ER|) = \\ = \frac{3}{2}a + (|CQ| + |EQ|) = \frac{3}{2}a + \frac{1}{2}a = 2a,$$

čo znamená, že $|FP| = |FR| = a$.

Teraz už riešenie úlohy ľahko dokončíme. Rovnosť $|BP| = \frac{1}{2}b$, ktorú máme v našej situácii dokázať, vyplýva z rovnosti

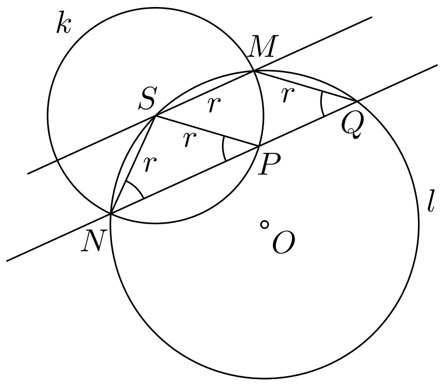
$$|BP| = |BF| - |FP| = 2b - a,$$

keď do nej dosadíme zadaný vzťah $a = \frac{3}{2}b$.

Komentár. Úloha nadväzuje na predchádzajúcu a využíva rovnosť súčtov dĺžok opačných strán dotyčnicového štvoruholníka. Ďalej študenti uplatnia buď Pytagorovu vetu alebo vedomosti o stredných priečkach v trojuholníku, čo úlohu činí zaujímavou z hľadiska pestrosti.

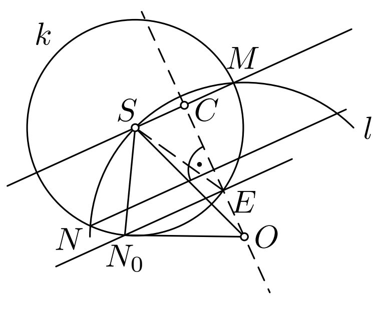
Úloha 22.3. [59-II-3] Daná je kružnica k so stredom S. Kružnica l má väčší polomer ako kružnica k, prechádza jej stredom a pretína ju v bodoch M a N. Priamka, ktorá prechádza bodom N a je rovnobežná s priamkou MS, vytína na kružniciach tetivy NP a NQ. Dokážte, že trojuholník MPQ je rovnoramenný.

Riešenie*. Polomer kružnice k označme r. Označenie vrcholov P, Q v trojuholníku MPQ nie je dôležité, preto bez ujmy na všeobecnosti označme P ten z bodov priamky vedenej bodom N rovnobežne s priamkou MS, ktorý leží na kružnici k. Bod Q potom leží na kružnici l a štvoruholník $NQMS$ je lichobežník vpísaný do kružnice l (obr. 22.3.1). Je teda rovnoramenný s ramenami MQ a NS dĺžky r. Navyše aj úsečky SP a SM majú dĺžku r. Z rovnoramenného trojuholníka NPS a rovnoramenného lichobežníka $NQMS$ vyplýva rovnosť uhlov $|\measuredangle SPN| = |\measuredangle SNP| = |\measuredangle MQP|$. Priečka PQ teda pretína priamky SP a MQ pod rovnako veľkými uhlami, a preto (podľa vety o súhlasných uhloch) sú priamky SP a MQ rovnobežné. Štvoruholník $PQMS$ je teda rovnobežník, a keďže $|SM| = |SP| = r$, je to dokonca kosoštvorec. Odtiaľ je už zrejmé, že trojuholník MPQ je rovnoramenný s ramenami PQ a MQ dĺžky r.



Obr. 22.3.1

Poznámka. Existencia tetív NP a NQ v zadaní je zaručená vďaka predpokladu, že kružnica l má väčší polomer ako kružnica k. Ak označíme C stred úsečky SM a E ten priesečník kružnice k s osou úsečky SM, ktorý leží v polrovine SMO, bude stred O kružnice l ležať na polpriamke CE až za bodom E (obr. 22.3.2). Ďalší priesečník N oboch kružníc preto padne do pásu medzi rovnobežkami

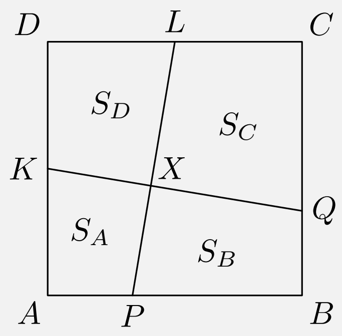


Obr. 22.3.2

SM a N_0E v polrovine OCS, pričom N_0 je štvrtý vrchol kosoštvorca s vrcholmi S, M, E. Na to stačí ukázať, že kružnica l pretne polpriamku EN_0 až za bodom N_0, teda že jej polomer OS je väčší ako dĺžka úsečky ON_0. Toto porovnanie dvoch strán trojuholníka OSN_0 jednoducho vyplýva z porovnania jeho vnútorných uhlov: uhol pri vrchole N_0 je najväčší, lebo oba uhly pri protiľahlej strane OS sú menšie ako $60°$ (trojuholník ESN_0 je rovnostranný). Ľahko nahliadneme, že každá z rovnobežiek uvedeného pásu pretína každú z oboch kružníc v dvoch bodoch (vždy súmerne združených podľa príslušnej osi kolmej na SM). Tým je dokázaná nielen existencia oboch tetív NP a NQ, ale aj to, že ich krajné body P a Q ležia na rovnakej strane od bodu N (ako na obr. 22.3.1), lebo oba body zrejme ležia v polrovine opačnej k spomenutej polrovine OCS.

Komentár. Diskusia v poznámke je len zaujímavým doplnkom úlohy, existencia tetív je totiž predpokladom zadania a nie je nutné ju dokazovať. Úloha využíva úvahu, že lichobežník, ktorého základne sú rovnobežné tetivy danej kružnice, je rovnoramenný, ktorá môže byť pre študentov zaujímavým uvedomením.

Úloha 22.4. [60-I-3] Máme štvorec $ABCD$ so stranou dĺžky 1 cm. Body K a L sú stredy strán DA a DC. Bod P leží na strane AB tak, že $|BP| = 2|AP|$. Bod Q leží na strane BC tak, že $|CQ| = 2|BQ|$. Úsečky KQ a PL sa pretínajú v bode X. Obsahy štvoruholníkov $APXK$, $BQXP$, $QCLX$ a $LDKX$ označíme postupne S_A, S_B, S_C, S_D.
a) Dokážte, že $S_B = S_D$.
b) Vypočítajte rozdiel $S_C - S_A$.
c) Vysvetlite, prečo neplatí $S_A + S_C = S_B + S_D$.



Riešenie*. a) Štvoruholníky $ABQK$ a $DAPL$ sú zhodné (jeden z nich je obrazom druhého v otočení o 90° so stredom v strede štvorca $ABCD$). Preto majú aj rovnaký obsah, čiže $S_A + S_B = S_A + S_D$. Z toho hneď dostaneme $S_B = S_D$.

b) Ľahko sa nám podarí vypočítať obsah pravouhlého lichobežníka $ABQK$, lebo poznáme dĺžky základní aj výšku. Dostaneme

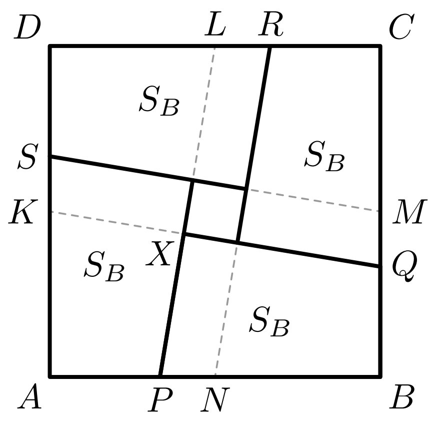
$$S_A + S_B = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{12}\,\text{cm}^2.$$

Podobne výpočtom obsahu lichobežníka $PBCL$ dostaneme

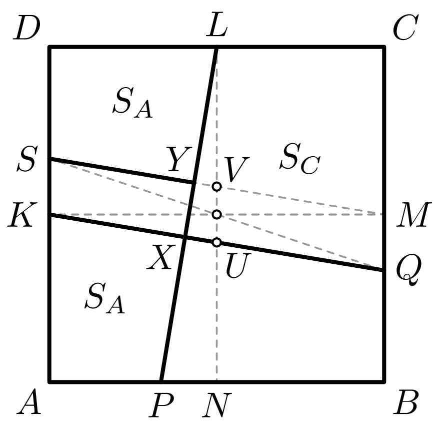
$$S_C + S_B = \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{12}\,\text{cm}^2.$$

Odčítaním prvej získanej rovnosti od druhej dostávame $S_C - S_A = \frac{7}{12} - \frac{5}{12} = \frac{1}{6}\,\text{cm}^2$.

c) Nerovnosť medzi obsahmi $S_A + S_C$ a $S_B + S_D$ (ktorých priame výpočty nie sú v silách žiakov 1. ročníka) môžeme zdôvodniť nasledovným spôsobom: Súčet týchto dvoch obsahov je 1 cm^2, takže sa nerovnajú práve vtedy, keď je jeden z nich menší ako $\frac{1}{2}$ cm^2. Bude to obsah $S_B + S_D$ (rovný $2S_B$, ako už vieme), keď ukážeme, že obsah S_B je menší ako $\frac{1}{4}$ cm^2. Urobíme to tak, že do celého štvorca $ABCD$ umiestnime bez prekrytia štyri kópie štvoruholníka $PBQX$. Ako ich umiestnime, vidíme na obr. 22.4.1, pričom M, N sú stredy strán BC, AB a R, S body, ktoré delia strany CD, DA



Obr. 22.4.1



Obr. 22.4.2

v pomere 1 : 2.

Iné riešenie* časti c). Tentoraz namiesto nerovnosti $S_B + S_D < \frac{1}{2}\,\text{cm}^2$ dokážeme ekvivalentnú nerovnosť $S_A + S_C > \frac{1}{2}\,\text{cm}^2$. Preto sa pokúsime „premiestniť“ štvoruholník $APXK$ tak, aby ležal pri štvoruholníku $XQCL$ a aby sa ich obsahy dali geometricky sčítať. Uhly AKQ a DLP sú zhodné a $|AK| = |DL|$, preto môžeme štvoruholník $APXK$ premiestniť vo štvorci $ABCD$ do jeho „rohu“ D tak, že k štvoruholníku $XQCL$ priľahne pozdĺž strany LX svojou stranou LY, pričom Y je priesečník úsečiek SM a PL z pôvodného riešenia (obr. 22.4.2). Obsah $S_A + S_C$ je potom obsahom šesťuholníka $DSYXQC$. Prečo je väčší ako $\frac{1}{2}\,\text{cm}^2$, môžeme zdôvodniť napríklad takto:

Úsečka spájajúca bod L so stredom U úsečky KQ pretne úsečku SM v jej strede V. Štvoruholník $UQMV$ má obsah rovný polovici obsahu rovnobežníka $KQMS$, teda rovný obsahu trojuholníka KMS. Preto má šesťuholník $DSVUQC$ obsah rovný obsahu štvoruholníka $KMCD$, t. j. polovici obsahu štvorca $ABCD$. Obsah $S_A + S_C$ je ešte väčší, a to o obsah štvoruholníka $XUVY$. Teda naozaj $S_A + S_C > \frac{1}{2}\,\text{cm}^2$.

Komentár. Prvé dve časti sú príjemným úvahovým rozohriatím k časti tretej, ktorá vyžaduje trochu viac invencie. Demonštruje však zaujímavý prístup k riešeniu a porovnávanie obsahov obrazcov namiesto priameho výpočtu obsahov.

Seminár 23: Geometria VI – miš-maš

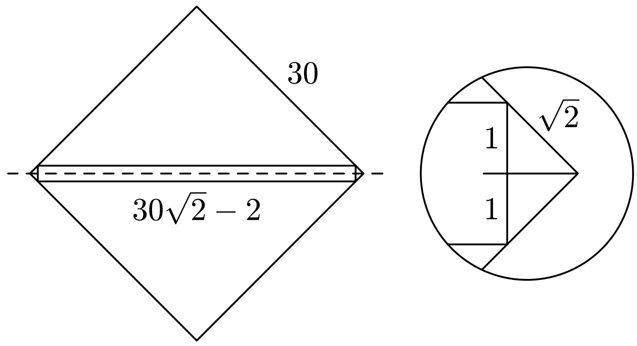
Ciele

Precvičenie geometrických poznatkov, rôznorodné netradičné úlohy

Úlohy a riešenia

Úloha 23.1. [66-II-3] Dokážte, že obdĺžnik s rozmermi 32×120 sa dá zakryť siedmimi zhodnými štvorcami so stranou 30.

Riešenie*. Štyrmi štvorcami so stranou 30 zrejme zakryjeme obdĺžnik 30×120. Zvyšnú časť 2×120 rozdelíme na tri zhodné časti, konkrétne obdĺžniky 2×40, a ukážeme, ako každý z nich (rovnako) pokryť jedným z troch zvyšných štvorcov so stranou 30. Dosiahneme to, keď štvorec položíme na obdĺžnik tak, že obe uhlopriečky štvorca budú ležať na osiach súmernosti dotyčného obdĺžnika. Stačí potom ukázať, že obdĺžnik so stranou 2 vpísaný do štvorca podľa obr. 23.1.1 má druhú stranu dlhšiu ako 40. Jej dĺžka je zrejme $30\sqrt{2}-2$ (od uhlopriečky štvorca odčítame na každej strane 1 ako veľkosť výšky pravouhlého trojuholníka so stranami 2, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, pozri zväčšenú časť obr. 23.1.1),



Obr. 23.1.1

takže stačí ukázať, že $30\sqrt{2}-2 \geq 40$. To je ekvivalentné s nerovnosťou $5\sqrt{2} \geq 7$, čiže $50 \geq 49$, čo je splnené. Daný obdĺžnik 32×120 teda naozaj možno zakryť siedmimi štvorcami so stranou 30.

Úloha 23.2. [60-S-2] Daný je štvorec so stranou dĺžky 6 cm. Nájdite množinu stredov všetkých priečok štvorca, ktoré ho delia na dva štvoruholníky, z ktorých jeden má obsah $12\,\mathrm{cm}^2$. (Priečka štvorca je úsečka, ktorej krajné body ležia na stranách štvorca.)

Riešenie*. Ak priečka delí štvorec na dva štvoruholníky, musia ich koncové body ležať na protiľahlých stranách štvorca. V takom prípade sú oba štvoruholníky lichobežníkmi alebo pravouholníkmi (pre potreby tohto riešenia budeme pravouholník považovať za špeciálny lichobežník). Označme daný štvorec $ABCD$, koncové body priečky označme K a L. Predpokladajme, že bod K leží na strane AD, potom bod L leží na strane BC. Jeden zo štvoruholníkov $KABL$ a $KDCL$ má podľa zadania obsah $12\,\mathrm{cm}^2$; nech je to napr. lichobežník $KABL$.

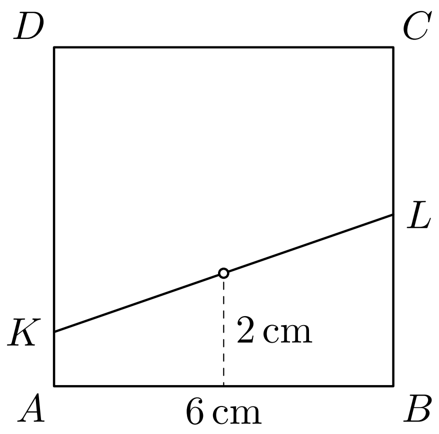
Obsah lichobežníka vypočítame ako súčin jeho výšky s dĺžkou strednej priečky. Výška je v našom prípade rovná dĺžke strany štvorca čiže 6 cm. Jeho stredná priečka má teda dĺžku 2 cm. Z toho vyplýva, že stred úsečky KL musí ležať na osi strany AB vo vzdialenosti 2 cm od stredu strany AB (obr. 23.2.1). Platí to aj naopak: Ak stred úsečky KL leží v opísanej polohe, bude štvoruholník $KABL$ lichobežník s obsahom $12\,\mathrm{cm}^2$.

Ak budeme namiesto lichobežníka $KABL$ uvažovať lichobežník $KDCL$, vyjde stred priečky KL na osi úsečky CD vo vzdialenosti 2 cm od stredu strany CD.

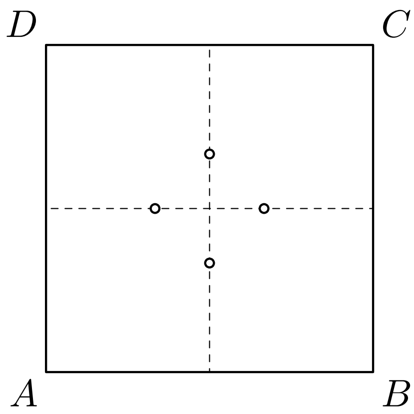
Ak priečka KL spája body na stranách AB a CD, dostaneme ďalšie dva možné body ležiace na spojnici stredov úsečiek AD a BC. Hľadanú množinu teda tvoria štyri body, ktoré ležia na priečkach spájajúcich stredy protiľahlých strán štvorca vo vzdialenosti 1 cm od jeho stredu (obr. 23.2.2).

Úloha 23.3. [65-S-3] V kružnici so stredom S zostrojíme priemer AB a ľubovoľnú naň kolmú tetivu CD. Zdôvodnite, prečo je obvod trojuholníka ACD menší ako dvojnásobok obvodu trojuholníka SBC.

Riešenie*. Želaný vzťah medzi obvodmi trojuholníkov ACD a SBC vyplynie, keď pre dĺžky ich



Obr. 23.2.1

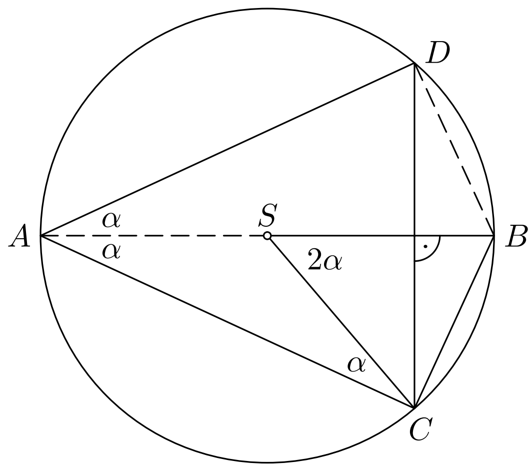


Obr. 23.2.2

strán objavíme nerovnosti

$$|AC| < 2|SB|, \quad |AD| < 2|SC| \quad \text{a} \quad |CD| < 2|BC|.$$

Prvé dve z nich sú dôsledkom toho, že tetivy AC a AD danej kružnice sú kratšie ako jej priemer AB (obr. 23.3.1), tretia nerovnosť zapísaná v tvare $\frac{1}{2}|CD| < |BC|$ je nerovnosťou medzi dĺžkami odvesny a prepony dvoch zhodných pravouhlých trojuholníkov, na ktoré je trojuholník BCD rozdelený priamkou AB, ktorá je totiž (vďaka predpokladu $AB \perp CD$) osou tetivy CD. Dodajme, že rovnako dobre možno využiť aj trojuholníkovú nerovnosť $|CD| < |BC| + |BD| = 2|BC|$. **Iné riešenie*.** Označme α

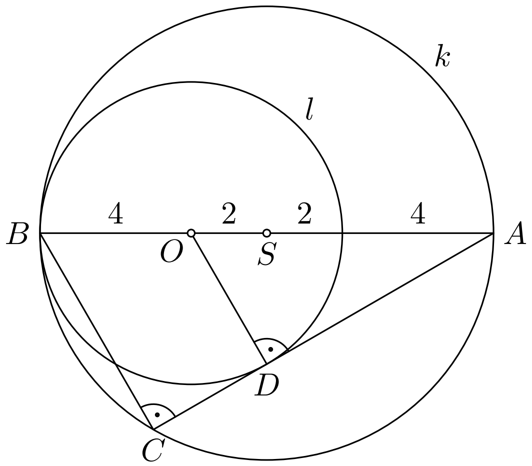


Obr. 23.3.1

veľkosti vnútorných uhlov pri základni AC rovnoramenného trojuholníka SAC. Potom jeho vonkajší uhol pri vrchole S, čiže uhol CSB, má veľkosť 2α, ktorú má aj uhol CAD, pretože polpriamka AB je jeho osou (obr. 23.3.1). Rovnoramenné trojuholníky ACD a SCB sa tak zhodujú vo vnútorných uhloch pri svojich hlavných vrcholoch A a S, a sú teda podobné. Preto je pomer ich obvodov rovný pomeru dĺžok ich ramien, a ten má naozaj hodnotu menšiu ako 2, lebo ramená trojuholníka ACD sú kratšie ako priemer danej kružnice, zatiaľ čo ramená trojuholníka SCB majú dĺžku jej polomeru.

Úloha 23.4. [59-S-2] Kružnice $k(S; 6\,\text{cm})$ a $l(O; 4\,\text{cm})$ majú vnútorný dotyk v bode B. Určte dĺžky strán trojuholníka ABC, pričom bod A je priesečník priamky OB s kružnicou k a bod C je priesečník kružnice k s dotyčnicou z bodu A ku kružnici l.

Riešenie*. Bod dotyku kružnice l s dotyčnicou z bodu A označme D (obr. 23.4.1). Z vlastností dotyčnice ku kružnici vyplýva, že uhol ADO je pravý. Zároveň je pravý aj uhol ACB (Tálesova



Obr. 23.4.1

veta). Trojuholníky ABC a AOD sú tak podobné podľa vety uu, lebo sa zhodujú v uhloch ACB, ADO a v spoločnom uhle pri vrchole A. Z uvedenej podobnosti vyplýva

$$\frac{|BC|}{|OD|} = \frac{|AB|}{|AO|}. \tag{23.4.1}$$

Zo zadaných číselných hodnôt vychádza $|OD| = |OB| = 4\,\text{cm}$, $|OS| = |SB| - |OB| = 2\,\text{cm}$, $|OA| = |OS| + |SA| = 8\,\text{cm}$ a $|AB| = 12\,\text{cm}$. Podľa 23.4.1 je teda $|BC| : 4\,\text{cm} = 12 : 8$ a odtiaľ $|BC| = 6\,\text{cm}$. Z Pytagorovej vety pre trojuholník ABC nakoniec zistíme, že $|AC| = \sqrt{12^2 - 6^2}\,\text{cm} = 6\,\text{cm}$.

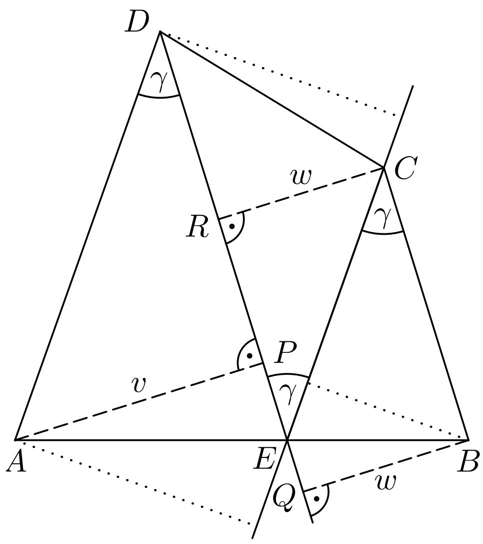
Úloha 23.5. [63-II-4] Daný je konvexný štvoruholník $ABCD$ s bodom$E$ vnútri strany AB tak, že platí $|\measuredangle ADE| = |\measuredangle DEC| = |\measuredangle ECB|$. Obsahy trojuholníkov AED a CEB sú postupne $18\,\text{cm}^2$ a $8\,\text{cm}^2$. Určte obsah trojuholníka ECD.

Riešenie*. Hľadaný obsah trojuholníka ECD označme S. Uhol DEC je striedavý s uhlami ADE a ECB, odtiaľ $AD \parallel EC$ a $ED \parallel BC$ (obr. 23.5.1). Trojuholníky EDA a EDC majú spoločnú stranu ED, pomer ich obsahov je teda rovný pomeru prislúchajúcich výšok. Ak navyše postupne označíme P, Q a R kolmé priemety vrcholov A, B a C na priamku DE a označíme $v = |AP|$, $w = |BQ| = |CR|$, dostaneme z podobných pravouhlých trojuholníkov AEP a BEQ úmeru

$$\frac{18}{S} = \frac{v}{w} = \frac{|AE|}{|EB|}.$$

Analogicky pre trojuholníky ECD a ECB zistíme, že

$$\frac{8}{S} = \frac{|EB|}{|AE|}.$$



Obr. 23.5.1

(V obr. 23.5.1 sú prislúchajúce priemety iba naznačené, ale jedná sa o ten istý výpočet ako v predošlom odseku, len v ňom zameníme zodpovedajúce body $A \leftrightarrow B, C \leftrightarrow D$ a prislúchajúce obsahy trojuholníkov AED a BEC.) Dokopy teda je $S : 8 = 18 : S$ čiže $S^2 = 144$, takže trojuholník ECD má obsah $S = 12\,\mathrm{cm}^2$.

Seminár 24: Náboj

Seminár sa nebude konať, namiesto neho sa študenti zúčastnia medzinárodnej matematickej súťaže 5-členných družstiev *Náboj*.

Seminár 25: Kombinatorika I – úlohy na mriežke a šachovnici

Ciele

Zoznámiť študentov s metódami, ktoré si budú vyžadovať rôznorodé úlohy využívajúce šachovnice alebo tabuľky.

Úlohy a riešenia

Úloha 25.1. [66-II-2] Štvorcovú tabuľku 6×6 zaplníme všetkými celými číslami od 1 do 36.

a) Uveďte príklad takého zaplnenia tabuľky, že súčet každých dvoch čísel v rovnakom riadku či v rovnakom stĺpci je väčší ako 11.

b) Dokážte, že pri ľubovoľnom zaplnení tabuľky sa v niektorom riadku alebo stĺpci nájdu dve čísla, ktorých súčet neprevyšuje 12.

Riešenie*. a) Aby sme dosiahli požadované rozmiestnenie čísel v tabuľke, nesmú v žiadnom riadku ani stĺpci spolu zostať dve z čísel nanajvýš rovných šiestim. Preto jednu z mnohých vyhovujúcich tabuliek zostavíme, keď čísla od 1 do 6 vpíšeme zhora nadol do políčok jednej uhlopriečky a ďalej budeme postupne zdola nahor brať rady políčok rovnobežných s druhou uhlopriečkou a do voľných miest každej z nich vpisovať zhora nadol zvyšné čísla 7, 8 atď. až 36:

1	35	33	29	25	19
36	2	30	26	20	15
34	31	3	21	16	11
32	27	22	4	12	9
28	23	17	13	5	7
24	18	14	10	8	6

Najmenšie súčty dvoch čísel z jednotlivých riadkov (zhora nadol) sú

$$1+19, 2+15, 3+11, 4+9, 5+7, 6+8$$

a z jednotlivých stĺpcov (zľava doprava)

$$1+24, 2+18, 3+14, 4+10, 5+8, 6+7.$$

Rýchlejší opis príkladu vyhovujúcej tabuľky a jeho jednoduchšiu kontrolu dostaneme, keď do tabuľky vpíšeme iba čísla od 1 do 12, ako vidíme nižšie. Rozmiestnenie čísel od 13 do 36 do prázdnych políčok už zrejme môže byť ľubovoľné – dve najmenšie čísla v každom riadku aj stĺpci sú totiž práve tie od 1 do 12.

1	11				
12	2				
		3	9		
		10	4		
				5	7
				8	6

b) Ak sú dve z čísel od 1 do 6 v rovnakom riadku alebo v rovnakom stĺpci, ich súčet neprevýši dokonca ani číslo $6+5=11$. V opačnom prípade sú čísla od 1 do 6 rozmiestnené vo všetkých riadkoch a všetkých stĺpcoch, takže číslo 7 je v rovnakom riadku s číslom x a v rovnakom stĺpci s číslom y, pričom x a y sú dve rôzne čísla od 1 do 6. Potom menšie z čísel $7+x$ a $7+y$ neprevýši menšie z čísel $7+6$ a $7+5$, teda číslo 12. Tým je tvrdenie dokázané.

Komentár. Úloha je relatívne jednoduchá a nevyžaduje žiadne špeciálne matematické vedomosti, len starostlivý logický úsudok. Študenti pravdepodobne vymyslia rôzne zaplnenia tabuľky a to môže byť výbornou príležitosťou nechať ich riešenia skontrolovať si medzi sebou navzájom.

Úloha 25.2. [62-I-1-N1] Kobylka skáče po úsečke dĺžky 10 cm a to skokmi o 1 cm alebo o 2 cm (vždy rovnakým smerom). Koľkými spôsobmi sa môže dostať z jedného krajného bodu úsečky do druhého?

Riešenie*. Ak označíme a_n počet spôsobov, koľkými sa môže kobylka dostať do bodu vzdialeného n cm od začiatočného bodu úsečky, tak pre každé $n \geq 1$ platí $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$. Keďže $a_1 = 1$ a $a_2 = 2$, môžeme ďalšie počty $a_3, a_4, \dots$ postupne počítať podľa vzorca z predošlej vety, až dospejeme k hodnote $a_{10} = 89$.

Pri inom postupe je možné rozdeliť všetky cesty podľa toho, koľko pri nich urobí kobylka skokov dĺžky dva (ich počet môže byť 0, 1, 2, 3, 4 alebo 5 a tým je tiež určený počet skokov dĺžky 1:

10, 8, 6, 4, 2 alebo 0). Ku každému takému počtu potom určíme počet všetkých rôznych poradí jednotiek a dvojok (dávajúcich v súčte 10). Dostaneme tak $1+9+28+35+15+1=89$ možných ciest.

Komentár. Úloha opäť pravdepodobne nebude pre študentov neprekonateľnou výzvou. Bude však určite zaujímavé sledovať, ako sa študenti popasujú s hľadaním počtu spôsobov. Taktiež úloha slúži ako príprava na úlohu nasledujúcu a domácu prácu.

Úloha 25.3. [62-I-1-N2] Škriatok sa pohybuje v tabuľke 10×15 skokmi o jedno políčko nahor alebo o jedno políčko doprava. Koľkými rôznymi cestami sa môže dostať z ľavého dolného do pravého horného políčka?

Riešenie*. Škriatok urobí 9 skokov nahor a 14 skokov doprava. Jeho cestu určíme, keď v poradí všetkých 23 skokov vyberieme tých deväť, ktoré povedú nahor. Počet týchto výberov 9 prvkov z daných 23 je rovný zlomku $\dfrac{23\cdot 22\cdots 16\cdot 15}{9\cdot 8\cdots 2\cdot 1}$, teda číslu 817 190.

Komentár. Ako sme už spomínali, táto úloha je tiež prípravou na domácu prácu. Je tiež vhodným miestom, kde môžeme prípadným tápajúcim študentom pripomenúť metódu riešenia, s ktorou sme sa už stretli: pokúsiť sa vypozorovať, ako sa úloha správa pre menšie rozmery, napr. tabuľku 3×3 a potom objavené výsledky zovšeobecniť.

Úloha 25.4. [64-II-2] V jednom políčku šachovnice 8×8 je napísané "$-$" a v ostatných políčkach "$+$". V jednom kroku môžeme zmeniť na opačné súčasne všetky štyri znamienka v ktoromkoľvek štvorci 2×2 na šachovnici. Rozhodnite, či po určitom počte krokov môže byť na šachovnici oboch znamienok rovnaký počet.

Riešenie*. Počty plusov a mínusov v tabuľke sú na začiatku 63 a 1, teda dve nepárne čísla. V ľubovoľnom štvorci 2×2 môžu byť zastúpené jedným zo spôsobov 2 + 2, 1 + 3 alebo 0 + 4 vo vhodnom poradí sčítancov, ktoré sa po vykonanom kroku zmenia na poradie opačné. Vidíme teda, že po jednom kroku sa celkové počty plusov a mínusov v tabuľke buď nemenia, alebo sa oba zmenia o 2, alebo sa oba zmenia o 4, takže to stále budú dve nepárne čísla ako na začiatku. To znamená, že nikdy nemôže byť na šachovnici oboch znamienok rovnaký počet, čiže párne číslo 32.

Komentár. Po krátkom experimentovaní by malo byť väčšine študentov jasné, ako sa bude šachovnica správať, a tým pádom aj aká bude odpoveď na otázku zo zadania. (Ne)náročnosti úlohy zodpovedá aj jej bodové hodnotenie v krajskom kole, kde sa stala najlepšie hodnotenou úlohou daného ročníka.[11]

Úloha 25.5. [64-I-3-N3] Simona a Lenka hrajú hru. Pre dané celé číslo k také, že $0 \leq \leq k \leq 9$, vyberie Simona k políčok šachovnice 3×3 a na každé z nich napíše číslo 1, na ostatné políčka napíše číslo 0. Lenka potom šachovnicu nejakým spôsobom pokryje tromi triminovými kockami, t. j. kockami tvaru 3×1, a čísla pod ich políčkami vynásobí. Ak je

[11] Na Slovensku, s priemerom 3,8 b medzi všetkými riešiteľmi a 5,5 b medzi úspešnými riešiteľmi.

počet kociek so súčinom 0 nepárny, vyhráva Simona, v ostatných prípadoch vyhráva Lenka. Určte, v koľkých percentách prípadov (vzhľadom na hodnotu k) má vyhrávajúcu stratégiu Simona.

Riešenie. Ukážeme, že víťaznú stratégiu má pre všetky k okrem 7 a 9 Simona. Ak má Simona vyhrať, musí 1 do políčok šachovnice umiestňovať tak, aby v každom riadku a každom stĺpci nechala priestor na aspoň jednu 0. Tým zaručí, že akokoľvek potom Lenka umiestni triminové kocky, každá z nich bude obsahovať aspoň jednu 0. Keďže spolu máme 10 možných hodnôt k a pre 8 z nich má Simona víťaznú stratégiu, vyhrá v 80 % prípadov.

Komentár. Zaujímavé bude sledovať, ako efektívne sa budú študenti schopní zhostiť úlohy. Keďže má úloha jednoznačný číselný výsledok, môžeme po chvíli samostatnej práce nechať študentov porovnať svoje výsledky a pokúsiť zistiť pôvod prípadných nezrovnalostí.

Úloha 25.6. [61-I-6-N1] Na hracej ploche $m \times n$ tvorenej bielymi štvorcovými políčkami sa Monika a Tamara striedajú v ťahoch jednou figúrkou pri nasledujúcej hre. Najskôr Monika položí figúrku na ľubovoľné políčko a toto políčko zafarbí namodro. Ďalej vždy hráčka, ktorá je na ťahu, urobí s figúrkou skok na políčko, ktoré je doposiaľ biele a zafarbí toto políčko namodro. Pritom pod skokom rozumieme ťah šachovou vežou, t. j. presuny figúrky v smere riadkov alebo v smere stĺpcov hracej dosky (o ľubovoľný počet políčok). Hráčka, ktorá je na rade a už nemôže urobiť ťah, prehráva. Rozhodnite, ktoré z hráčok môže hrať tak, že vyhrá nezávisle na ťahoch druhej hráčky?

Riešenie*. Ak sú obe čísla m a n nepárne, má víťaznú stratégiu prvá hráčka, ak je aspoň jedno z čísel m, n párne, má víťaznú stratégiu druhá hráčka. V oboch prípadoch si uvedená hráčka vopred v duchu rozdelí všetky políčka hracej dosky do dvojíc (v prvom prípade jedno políčko ostane, naň potom hráčka položí figúrku v úvodnom ťahu), a to tak, aby v každom zostavenom páre boli políčka navzájom dosiahnuteľné jedným skokom (pre ťahy vežou je to ľahké, stačí párovať len susedné políčka riadku alebo stĺpca); v priebehu hry potom táto hráčka môže vždy skočiť z jedného políčka na druhé políčko toho istého páru, takže vyhrá.

Komentár. Úloha je netriviálna, jej zvládnutie je však výborným predpokladom na úspešné vyriešenie domácej práce. Ak nám ostane na konci seminára dostatok času, môžeme študentov najprv odohrať pár kôl hry pre nimi zvolené rozmery tabuľky a na základe poznatkov z hry potom presne popísať víťaznú stratégiu.

Domáca práca

Úloha 25.7. [62-I-1] Štvorcová tabuľka je rozdelená na 16×16 políčok. Kobylka sa po nej pohybuje dvoma smermi: vpravo alebo dole, pričom strieda skoky o dve a o tri políčka (t. j. žiadne dva po sebe idúce skoky nie sú rovnako dlhé). Začína skokom dĺžky dva z ľavého horného políčka. Koľkými rôznymi cestami sa môže kobylka dostať na pravé dolné políčko? (Pod cestou máme na mysli postupnosť políčok, na ktoré kobylka doskočí.)

Riešenie*. V priebehu svojej cesty sa kobylka musí posunúť o celkom 15 políčok doprava a 15 políčok nadol. Dohromady sa tak posunie o 30 políčok, takže dvojicu skokov dĺžky $2+3=5$ zopakuje celkom šesťkrát. Presnejšie vyjadrené, jej jednotlivé skoky budú mať dĺžky postupne

$$2,3,2,3,2,3,2,3,2,3,2,3, \tag{25.7.1}$$

takže pôjde šesťkrát o skok dĺžky dva (2-skok) a šesťkrát o skok dĺžky tri (3-skok). Ak jednotlivým 2-skokom a 3-skokom pripíšeme poradové čísla podľa ich pozície v 25.7.1, bude kobylkina cesta jednoznačne určená výberom poradových čísel skokov smerujúcich doprava (zvyšné potom budú smerovať nadol). Musíme pritom dodržať len to, aby súčet dĺžok takto vybraných skokov (t. j. skokov doprava) bol rovný 15. To možno povolenými dĺžkami dosiahnuť (bez rozlíšenia poradia skokov) nasledujúcimi spôsobmi:

$$15 = 3+3+3+3+3,$$
$$15 = 3+3+3+2+2+2,$$
$$15 = 3+2+2+2+2+2+2.$$

V prvom prípade bude päť zo šiestich 3-skokov doprava (a všetky 2-skoky nadol), takže cesta bude určená len poradovým číslom toho (jediného) 3-skoku, ktorý bude smerovať nadol. Preto je ciest tohto typu práve 6.

V druhom prípade bude cesta určená poradovými číslami troch 3-skokov doprava a poradovými číslami troch 2-skokov doprava. Výbery oboch trojíc sú nezávislé (t. j. možno ich spolu ľubovoľne kombinovať) a pri každom z nich vyberáme tri prvky zo šiestich, čo možno urobiť 20 spôsobmi.[12] Preto je ciest tohto typu $20 \cdot 20 = 400$.

V treťom prípade je kobylkina cesta určená len poradovým číslom toho jediného 3-skoku, ktorý bude smerovať doprava, takže ciest tohto typu je (rovnako ako v prvom prípade) opäť 6.
Záver. Hľadaný celkový počet kobylkiných ciest je 6 + 400 + 6 = 412.

Iné riešenie*. Zadanú úlohu ”pre pravé dolné políčko“ vyriešime tak, že budeme postupne určovať počty kobylkiných ciest, ktoré vedú do jednotlivých políčok tabuľky (políčka budeme postupne voliť od ľavého horného políčka po jednotlivých vedľajších diagonálach[13], lebo ako ľahko zistíme, po určitom počte skokov skončí kobylka na tej istej vedľajšej diagonále; tak sa nakoniec dostaneme k tomu najvzdialenejšiemu, teda pravému dolnému políčku). Pre zjednodušenie ďalšieho výkladu označme (i, j) políčko v i-tom riadku a j-tom stĺpci.

Je zrejmé, že povoleným spôsobom skákania sa kobylka vie dostať len na niektoré políčka celej tabuľky. Po prvom skoku (ktorý musí byť 2-skok z políčka (1, 1)) sa kobylka dostane len na políčko (1, 3) alebo (3, 1), po druhom skoku (teda 3-skoku) to bude niektoré z políčok

$$(1,6),(3,4),(4,3),(6,1).$$

Vo všetkých doteraz uvedených políčkach je v tabuľke vpísané číslo 1, lebo na každé z nich vedie jediná kobylkina cesta. Situácia sa zmení po treťom skoku (2-skoku) kobylky, lebo na políčka (3, 6) a (6, 3) vedú vždy dve rôzne cesty, a to z políčok (1, 6) a (3, 4), resp. z políčok (6, 1) a (4, 3). Takto v ďalšom kroku našej úvahy určíme všetky políčka, na ktoré sa kobylka môže dostať po štyroch skokoch, aj počty ciest, ktoré v týchto políčkach končia. V zapĺňaní tabuľky týmito číslami (postupom podľa počtu skokov kobylky) pokračujeme, až sa dostaneme do „cieľového“ políčka (16,

[12] Väčšina riešiteľov kategórie C ešte zrejme nepozná kombinačné čísla, hodnotu $\binom{6}{3} = 20$ však možno vypočítať aj vypísaním jednotlivých možností.

[13] V tomto prípade pod vedľajšou diagonálou chápeme skupinu políčok, ktorých stredy ležia na priamke kolmej na spojnicu stredu začiatočného políčka so stredom koncového políčka.

16). Pritom neustále využívame to, že posledný skok kobylky na dané políčko má danú dĺžku a jeden či oba možné smery. V prvom prípade číslo z predposledného políčka na ceste na posledné políčko opíšeme, v druhom prípade tam napíšeme súčet čísel z oboch možných predposledných políčok.

1		1			1		1			1		1			1
1			1		2			2		3			3		4
		1		1			2		2			3		3	
			1			1		3			3		6		
1		2			4		6			9		12			16
				1		2			4		7			10	
1			2		6			9		18			24		40
		2		3			9		13			25		35	
			2			4		13			20		44		
1		3			9		18			36		61			101
				3		7			20		40			75	
1			3		12			25		61			105		206
		3		6			24		44			105		180	
			3			10		35			75		180		
1		4			16		40			101		206			412

Rovnako ako v prvom riešení prichádzame k výsledku 412.

Úloha 25.8. [61-I-6] Na hracej ploche $n \times n$ tvorenej bielymi štvorcovými políčkami sa Monika a Tamara striedajú v ťahoch jednou figúrkou pri nasledujúcej hre. Najskôr Monika položí figúrku na ľubovoľné políčko a toto políčko zafarbí namodro. Ďalej vždy hráčka, ktorá je na ťahu, urobí s figúrkou skok na políčko, ktoré je doposiaľ biele, a toto políčko zafarbí namodro. Pritom pod skokom rozumieme bežný ťah šachovým jazdcom, t. j. presun figúrky o dve políčka zvislo alebo vodorovne a súčasne o jedno políčko v druhom smere. Hráčka, ktorá je na rade a už nemôže urobiť ťah, prehráva. Postupne pre $n = 4, 5, 6$ rozhodnite, ktorá z hráčok môže hrať tak, že vyhrá nezávisle na ťahoch druhej hráčky.

Riešenie*. Ak je celkový počet políčok hracej plochy párny (v zadaní pre $n = 4$ a $n = 6$), môže v poradí druhá hráčka pomýšľať na túto víťaznú stratégiu: spárovať všetky políčka hracej dosky do dvojíc tak, aby v každom páre boli políčka navzájom dosiahnuteľné jedným skokom. Pokiaľ také spárovanie políčok druhá hráčka nájde, má víťaznú stratégiu: v každom ťahu urobí skok na druhé políčko toho páru, na ktorého prvom políčku figúrka práve leží.

Ak je celkový počet políčok hracej plochy nepárny (v zadaní pre $n = 5$), môže v poradí prvá hráčka pomýšľať na túto víťaznú stratégiu: spárovať všetky políčka hracej dosky okrem jedného do dvojíc tak, aby v každom páre boli políčka navzájom dosiahnuteľné jedným skokom. Pokiaľ také spárovanie prvá hráčka nájde, má víťaznú stratégiu: v prvom ťahu položí figúrku na (jediné) nespárované políčko a v každom ďalšom ťahu urobí skok na druhé políčko toho páru, na ktorého prvom políčku figúrka práve leží.

Nájsť požadované spárovania políčok je pre zadané príklady ľahké a je to možné urobiť viacerými spôsobmi. Ukážme tie z nich, ktoré majú určité črty pravidelnosti. Na obr. 25.8.1 zľava je vidno, ako je možné spárovať políčka časti hracej plochy o rozmeroch 4×2; celú hraciu plochu 4×4 rozdelíme na dva také bloky a urobíme spárovanie v každom z nich. I na spárovanie políčok hracej plochy 6×6 môžeme využiť spárovanie v dvoch blokoch 4×2; na obr. 25.8.1 uprostred je znázornené možné stredovo súmerné spárovanie všetkých políčok. Nakoniec na obr. 25.8.1 vpravo je príklad spárovania políčok hracej plochy 5×5 s nespárovaným políčkom v ľavom hornom rohu (nespárované políčko nemusí byť nutne rohové); opäť je pritom využitý jeden blok 4×2.

1	2
3	4
2	1
4	3

1	2	E'	A'	D'	B'
3	4	D'	B'	C'	A'
2	1	C'	E'	$3'$	$4'$
4	3	E	C	$1'$	$2'$
A	C	B	D	$4'$	$3'$
B	D	A	E	$2'$	$1'$

•	A	B	C	D
1	2	E	A	B
3	4	C	D	F
2	1	G	E	H
4	3	H	F	G

Obr. 25.8.1

2.8 Apríl

Seminár 26: Kombinatorika II – hry s hľadaním víťaznej stratégie a logické úlohy.

Ciele

Pokračovať v precvičovaní úloh zameraných na hľadanie víťaznej stratégie a úloh, ktoré nevyžadujú špeciálne matematické znalosti.

Úlohy a riešenia

Úloha 26.1. [61-I-6-N2] Na tabuli sú napísané všetky prvočísla menšie ako 100. Gitka a Terka sa striedajú v ťahoch pri nasledujúcej hre. Najprv Gitka zmaže jedno z prvočísel. Ďalej vždy hráčka, ktorá je na ťahu, zmaže jedno z prvočísel, ktoré má s predchádzajúcim zmazaným prvočíslom jednu zhodnú číslicu (tak po prvočísle 3 je možné zmazať trebárs 13 alebo 37). Hráčka, ktorá je na ťahu a nemôže už žiadne prvočíslo zmazať, prehráva. Ktorá z oboch hráčok môže hrať tak, že vyhrá nezávisle od ťahov súperky?

Riešenie*. Pretože prvočísel menších ako 100 je nepárny počet (25), ponúka sa hypotéza, že víťaznú stratégiu bude mať prvá hráčka. Ukážme, že to tak naozaj je. Táto hráčka si vopred v duchu spáruje (podľa spoločnej číslice) napísané prvočísla (dá sa to urobiť viacerými spôsobmi, uvedieme ten, pri ktorom v každom kroku párujeme najmenšie doposiaľ nespárované prvočíslo s najmenším ďalším doposiaľ nespárovaným prvočíslom so spoločnou číslicou): (2, 23), (3, 13), (5, 53), (7, 17), (11, 19), (29, 59), (31, 37), (41, 43), (47, 67), (61, 71), (73, 79), (83, 89); jediné zostávajúce nespárované prvočíslo 97 preto Gitka zmaže ako prvé a ďalej pri hre bude mazať vždy prvočíslo, ktoré je v páre s predchádzajúcim zmazaným prvočíslom. Týmto postupom musí vyhrať.

Komentár. Úloha je malým opakovaním toho, ktoré čísla do 100 sú prvočísla a môžeme ju využiť na pripomenutie definície prvočísla. Rovnako ako aj v nasledujúcich úlohách, aj tu môžeme študentov nechať najprv odohrať niekoľko hier a potom skúsiť ich čiastkové zistenia spoločne pretaviť do univerzálnej stratégie.

Úloha 26.2. [61-II-4] Na tabuli je napísaných prvých n celých kladných čísel. Marína a Tamara sa striedajú v ťahoch pri nasledujúcej hre. Najskôr Marína zotrie jedno z čísel na tabuli. Ďalej vždy hráčka, ktorá je na ťahu, zotrie jedno z čísel, ktoré sa od predchádzajúceho zotretého čísla ani nelíši o 1, ani s ním nie je súdeliteľné. Hráčka, ktorá je na ťahu a nemôže už žiadne číslo zotrieť, prehrá. Pre $n = 6$ a pre $n = 12$ rozhodnite, ktorá z hráčok môže hrať tak, že vyhrá nezávisle na ťahoch druhej hráčky.

Riešenie*. Úloha dvoch po sebe zotieraných čísel je v zadanej hre symetrická: ak je po čísle x možné zotrieť číslo y, je (pri inom priebehu hry) po čísle y možné zotrieť číslo x. Preto si môžeme celú hru (so zadaným číslom n) „sprehľadniť“ tak, že najskôr vypíšeme všetky takéto (nazývajme ich prípustné) dvojice (x, y). Keďže na poradí čísel v prípustnej dvojici nezáleží, stačí vypisovať len tie dvojice (x, y), v ktorých $x < y$.

V prípade $n = 6$ všetky prípustné dvojice sú

$$(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,5),(3,5).$$

Z tohto zoznamu ľahko odhalíme, že víťaznú stratégiu má (prvá) hráčka Marína. Ak totiž zotrie na začiatku hry číslo 4, musí Tamara zotrieť číslo 1, a keď potom Marína zotrie číslo 6, nemôže už Tamara žiadne ďalšie číslo zotrieť. Okrem tohto priebehu $4 \to 1 \to 6$ si môže Marína zaistiť víťazstvo aj inými, pre Tamaru "vynútenými“ priebehmi, napríklad $6 \to 1 \to 4$ alebo $4 \to 1 \to 3 \to 5 \to 2$.

V prípade $n = 12$ je všetkých prípustných dvojíc výrazne väčšie množstvo. Preto si položíme otázku, či všetky čísla od 1 do 12 možno rozdeliť na šesť prípustných dvojíc. Ak totiž nájdeme takú šesticu, môžeme opísať víťaznú stratégiu druhej hráčky (Tamary): ak zotrie Marína pri ktoromkoľvek svojom ťahu číslo x, Tamara potom vždy zotrie to číslo y, ktoré s číslom x tvorí jednu zo šiestich nájdených dvojíc. Tak nakoniec Tamara zotrie aj posledné (dvanáste) číslo a vyhrá (prípadne hra skončí skôr tak, že Marína nebude môcť zotrieť žiadne číslo).

Hľadané rozdelenie všetkých 12 čísel do šiestich dvojíc naozaj existuje, napríklad

$$(1,4),(2,9),(3,8),(5,12),(6,11),(7,10).$$

Iné vyhovujúce rozdelenie dostaneme, keď v predošlom dvojice (1, 4) a (6, 11) zameníme dvojicami (1, 6) a (4, 11). Ďalšie, menej podobné vyhovujúce rozdelenie je napríklad

$$(1,6),(2,5),(3,10),(4,9),(7,12),(8,11).$$

Záver. Pre $n = 6$ má víťaznú stratégiu Marína, pre $n = 12$ Tamara.

Komentár. Úloha je náročnejšia ako predchádzajúca, no študenti by mali prvú časť zvládnuť samostatne, v časti druhej môžu svoje sily spojiť s ďalšími spolužiakmi, príp. stratégie, ktoré vymysleli, otestovať pri vzájomnej hre.

Úloha 26.3. [61-I-6-N3] Dve hráčky majú k dispozícii pre hru, ktorú opíšeme, neobmedzený počet dvadsaťcentových mincí a stôl s kruhovou doskou s priemerom 1 m. Hra prebieha tak, že sa hráčky pravidelne striedajú v ťahoch. Najprv prvá hráčka položí jednu mincu kamkoľvek na prázdny stôl. Ďalej vždy hráčka, ktorá je na ťahu, položí na voľnú časť stola ďalšiu mincu (tak, aby nepresahovala okraj stola a aby sa skôr položených mincí nanajvýš dotýkala). Ktorá z oboch hráčok môže hrať tak, že vyhrá nezávisle od ťahov súperky?

Riešenie*. Víťaznú stratégiu má prvá hráčka: prvú mincu položí doprostred stola a v každom ďalšom kroku položí mincu na miesto súmerne združené podľa stredu stola s miestom práve položenej mince.

Komentár. Úloha je zaujímavým príkladom, kde zohráva špeciálnu úlohu jeden konkrétny bod hracej plochy. Nájdenie víťaznej stratégie je po uvedomení si tejto vlastnosti už úlohou jednoduchou. Na príklade tejto hry môžeme študentov upozorniť na ďalší všeobecný princíp, ktorý pri riešení matematických problémov môže prísť vhod – hľadanie symetrií, príp. špeciálnych bodov týchto symetrií a skúmanie ich vlastností, pričom symetrie nemusíme chápať nutne iba v geometrickom kontexte.

Úloha 26.4. [59-I-1] Erika a Klárka hrali hru "slovný logik" s týmito pravidlami: Hráč *A* si myslí slovo zložené z piatich rôznych písmen. Hráč *B* vysloví ľubovoľné slovo zložené z piatich rôznych písmen a hráč *A* mu prezradí, koľko písmen uhádol na správnej pozícii a koľko na nesprávnej. Písmená považujeme za rôzne, aj keď sa líšia iba mäkčeňom alebo dĺžňom (napríklad písmena *A*, *Á* sú rôzne). Keby si hráč *A* myslel napríklad slovo *LOĎKA* a *B* by vyslovil slovo *KOLÁČ*, odpovie hráč *A*, že jedno písmeno uhádol hráč *B* na správnej pozícii a dve na nesprávnej. Skrátene oznámi „1 + 2“, lebo sa naozaj obe slová zhodujú iba v písmene *O* vrátane pozície (druhej zľava) a v písmenách *K* a *L*, ktorých pozície sú odlišné. Erika si myslela slovo z piatich rôznych písmen a Klárka vyslovila slová *KABÁT, STRUK, SKOBA, CESTA* a *ZÁPAL*. Erika na tieto slová v danom poradí odpovedala 0 + 3, 0 + 2, 1 + 2, 2 + 0 a 1 + 2. Zistite, aké slovo si Erika mohla myslieť.

Riešenie*. Slová *ZÁPAL* a $STRUK$ nemajú spoločné písmená. Preto sa, ako vyplýva z odpovedí 1 + 2 a 0 + 2, medzi ich písmenami, ktoré dokopy tvoria množinu $M = \{Z, Á, P, A, L, S, T, R, U, K\}$, nachádza všetkých päť písmen hľadaného slova. V slove *SKOBA* majú byť práve tri z hľadaných písmen. Sú to teda písmená S, K, A. (Zvyšné písmená *B* a *O* totiž do množiny *M* nepatria.) V slove *CESTA* majú byť len dve z hľadaných písmen, a obe na správnej pozícii. Sú to už nájdené *S* a *A*, ktoré teda patria na tretie, resp. piate miesto hľadaného slova (a písmeno *T* môžeme z množiny *M* "vylúčiť"). Písmeno *K* nemôže byť ani na prvom, ani na druhom mieste: vyplýva to z odpovedí pre slová *KABÁT* (0 + 3) a *SKOBA* (1 + 2). Takže je na štvrtom mieste a ostáva určiť prvé dve písmená. V slove $STRUK$ sú len dve z hľadaných písmen (musia to teda byť *S* a *K*), obe na nesprávnych pozíciách. Preto z množiny *M* „ vylúčime“ aj písmená R, U (a T, ak sme to doteraz neurobili). Zvyšné dve hľadané písmená potom patria do množiny $\{Z, Á, P, L\}$. Z podmienok pre slovo *KABÁT* vyplýva, že jedno z nich je *Á*. V slove *ZÁPAL* je práve jedno písmeno na správnej pozícii. Keby to bolo *Z*, nemali by sme kam uložiť písmeno *Á*. Takže *Á* je na druhom mieste a navyše môžeme vylúčiť písmeno Z. Na prvom mieste hľadaného slova môže byť L alebo P. Ľahko sa presvedčíme, že nájdené slová *LÁSKA* aj *PÁSKA* vyhovujú všetkým podmienkam úlohy.

Komentár. Úloha opäť nevyžaduje žiadne matematické znalosti, je však výbornou previerkou toho, ako sú študenti schopní narábať s veľkým množstvom informácií, nestratiť v nich prehľad a využiť ich na zdarné vyriešenie zadaného problému.

Úloha 26.5. [63-I-6] Šachového turnaja sa zúčastnilo 8 hráčov a každý s každým odohral jednu partiu. Za víťazstvo získal hráč 1 bod, za remízu pol bodu, za prehru žiadny bod. Na konci turnaja mali všetci účastníci rôzne počty bodov. Hráč, ktorý skončil na 2. mieste, získal rovnaký počet bodov ako poslední štyria dokopy. Určte výsledok partie medzi 4. a 6. hráčom v celkovom poradí.

Riešenie*. Poslední štyria hráči odohrali medzi sebou 6 partií, takže počet bodov, ktoré dokopy získali, je aspoň 6. Hráč, ktorý skončil na 2. mieste, teda získal aspoň 6 bodov. Keby získal viac ako 6, teda aspoň 6,5 bodov, musel by najlepší hráč (vďaka podmienke rôznych počtov) získať všetkých 7 možných bodov; porazil by tak i hráča na 2. mieste, ktorý by v dôsledku toho získal menej ako 6,5 bodov, a to je spor. Hráč v poradí druhý preto získal práve 6 bodov. Presne toľko ale získali dokopy i poslední štyria, a tak mohli tieto body získať len zo vzájomných partií, čo znamená, že prehrali všetky partie s hráčmi z prvej polovice výsledného poradia. Hráč, ktorý skončil na 6. mieste, preto prehral partiu s hráčom, ktorý skončil na 4. mieste.

Domáca práca

Úloha 26.6. [63-II-2] Šachového turnaja sa zúčastnilo 5 hráčov a každý s každým odohral jednu partiu. Za prvenstvo získal hráč 1 bod, za remízu pol bodu, za prehru žiadny bod. Poradie hráčov na turnaji sa určuje podľa počtu získaných bodov. Jediným ďalším kritériom rozhodujúcim o konečnom umiestnení hráčov v prípade rovnosti bodov je počet výhier (kto má viac výhier, je na tom v umiestnení lepšie). Na turnaji získali všetci hráči rovnaký počet bodov. Vojto porazil Petra a o prvé miesto sa delil s Tomášom. Ako dopadla partia medzi Petrom a Martinom?

Riešenie*. Každý hráč odohral po jednej partii so zvyšnými štyrmi. Bolo teda odo hraných celkom $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 = 10$ partií, takže každý hráč získal práve 2 body. Sú len tri možnosti, ako získať odohraním štyroch partií 2 body, a podľa toho obsahovala celková tabuľka nanajvýš tri rovnocenné skupiny hráčov. Tieto skupiny, A, B a C, uvádzame v poradí, v ktorom by sa v konečnej tabuľke umiestnili:

Skupina A obsahuje všetkých hráčov, ktorí majú po dvoch výhrach a dvoch prehrách. Skupina B pozostáva z hráčov s jednou výhrou, jednou prehrou a dvoma remízami. Skupina C obsahuje hráčov so štyrmi remízami.

Vojto a Tomáš sú jediní víťazi, preto nepatria do skupiny C. Nepatria ani do skupiny B, pretože v opačnom prípade by s nimi museli všetci traja hráči zo skupiny C s horším výsledkom remizovať (a každý hráč skupiny B má len dve remízy).

Z toho vyplýva, že Vojto a Tomáš majú po dvoch výhrach a dvoch prehrách a skupina C je prázdna. Zvyšní traja hráči tak majú po jednej výhre, jednej prehre a dvoch remízach, ktoré museli uhrať navzájom medzi sebou.

Záver. Peter a Martin spolu remizovali.

Iné riešenie*. Využijeme (nadbytočný) údaj, že Vojto porazil Petra: Keby mali Vojto a Tomáš po jednej výhre, jednej prehre a dvoch remízach, musel by aj Peter patriť medzi víťazov turnaja. Jediný v poradí nižší celkový výsledok sú totiž štyri remízy, Peter však jednu partiu prehral, a tak musel aj jednu vyhrať. Vojto a Tomáš majú 1preto po dvoch výhrach a dvoch prehrách. Ak Peter prehral s Vojtom, musel poraziť Tomáša. (Nemohol mať dve prehry, keďže bol v poradí nižšie ako Tomáš a Vojto. Ani nemohol s Tomášom, ktorý žiadnu remízu nemá, remizovať.) Potrebný druhý bod získal dvoma remízami – s Martinom a nepomenovaným piatym hráčom.
Záver. Peter a Martin spolu remizovali.

Úloha 26.7. [64-I-3] Simona a Lenka hrajú hru. Pre dané celé číslo k také, že $0 \leq k \leq 64$, vyberie Simona k políčok šachovnice 8×8 a každé z nich označí krížikom. Lenka potom šachovnicu nejakým spôsobom vyplní tridsiatimi dvoma dominovými kockami. Ak je počet kociek pokrývajúcich dva krížiky nepárny, vyhráva Lenka, inak vyhráva Simona. V závislosti od k určte, ktoré z dievčat má vyhrávajúcu stratégiu.

Riešenie*. Riešenie rozdeľme podľa hodnoty čísla k.

Ak $k = 0$, je počet kociek pokrývajúcich dva krížiky rovný nule, preto vyhrá Simona.

Ak $0 < k \leq 32$, umiestni Simona krížiky napr. iba na biele políčka šachovnice. Potom pod žiadnou kockou nie sú dva krížiky, preto vyhrá Simona.

Ak $k > 32$, pričom k je párne, umiestni Simona 32 krížikov na biele políčka a zvyšné krížiky kamkoľvek. Potom pod párnym počtom kociek sú dva krížiky (takých kociek je totiž práve $k - 32$, pretože každá dominová kocka pokrýva jedno biele a jedno čierne políčko šachovnice), takže vyhrá Simona.

Ak $32 < k \leq 61$, pričom k je nepárne, nenapíše Simona krížiky do troch políčok v jednom z "bielych rohov", t. j. do rohového bieleho a do dvoch susedných čiernych políčok, ale napíše ich do všetkých ostatných 31 bielych políčok a zvyšok do akýchkoľvek čiernych políčok (okrem spomenutých dvoch). Na bielych políčkach je teda nepárny počet krížikov a na čiernych párny počet krížikov. Okolo každého čierneho políčka s krížikom sú všetky biele políčka tiež s krížikom, preto každá kocka, ktorá zakrýva čierne políčko s krížikom, zakrýva dva krížiky. Iné kocky dva krížiky nezakrývajú. Preto opäť vyhrá Simona.

Ak $k = 63$, dva krížiky nie sú iba pod jedinou kockou, preto v takom prípade vyhrá Lenka, a to bez potreby akejkoľvek stratégie.
Odpoveď. Pre každé $0 \leq k \leq 64$, $k \neq 63$, má vyhrávajúcu stratégiu Simona, pri $k = 63$ vyhráva automaticky Lenka.

Doplňujúce zdroje a materiály

Výborným zdrojom všemožných matematických hier, spolu s ich kategorizáciou a možnosťou využitia v triede je [BB91].

Seminár 27: Krajské kolo MO

Ciele

Analyzovať so študentmi úlohy krajského kola MO, ukázať na prípadné spojitosti s kolom domácim a školským, objasniť najčastejšie chyby.

Seminár 28: Hra SET

Ciele

Zoznámenie sa s hrou SET a riešenie jednoduchších aj zložitejších úloh využívajúcich vlastnosti herných kartičiek.

Úvodný komentár

Seminár má trochu odlišnú štruktúru, než na akú boli študenti v seminároch doteraz navyknutí, no nepovažujeme to za žiadny problém. Taktiež je tento a nasledujúci seminár zaradený ako odľahčenie po tom, čo matematická olympiáda kategórie C vyvrcholila v uplynulom týždni.

Priebeh seminára

Kartičky v hre SET

Hra SET je kartovou hrou pre dvoch a viac hráčov. Každá kartička zobrazuje sadu symbolov, ktorá má 4 charakteristiky, pričom každá sa vyskytuje v troch variantoch:

1. *farba*: červená, modrá, zelená;

2. *tvar*: obdĺžnik, ovál, trojuholník;

3. *výplň*: plná, polovičná, úplne biela;

4. *počet symbolov*: jeden, dva, tri.

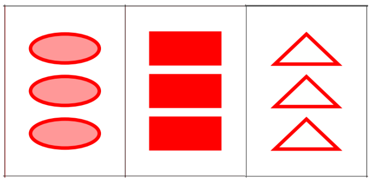
Úloha 30.1. Koľko kariet obsahuje hrací balíček?

Riešenie. Keďže každá zo 4 charakteristík sa môže vyskytnúť v troch rôznych variantoch, v balíčku je celkom $3^4 = 81$ rôznych kartičiek.

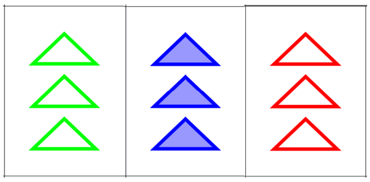
Komentár. Na seminár je vhodné mať kartičky nastrihané a zalaminované, aby sa s nimi študentom lepšie manipulovalo. Príklad kartičiek je v prílohe.

Zoznámenie sa s hrou SET

SET je trojica kartičiek, pre ktorú platí: každá z charakteristík je buď pre všetky tri kartičky rovnaká, alebo je na každej kartičke odlišná. Ak sa napríklad pozrieme na charakteristiku *tvar*, tak sú na všetkých troch kartičkách buď len samé ovály (alebo len samé obdĺžniky, alebo len samé trojuholníky), alebo sú na jednej kartičke ovály, na druhej obdĺžniky a na tretej trojuholníky. Podobne pre ďalšie charakteristiky.



Táto trojica kartičiek tvorí SET: farba je rovnaká, tvar je na každej kartičke iný, podobne výplň a všetky majú rovnaký počet symbolov.



Táto trojica nie je SET. Síce majú všetky tri kartičky rovnaký počet symbolov, symboly sú rovnakého tvaru a každá kartička je inej farby, výplň na dvoch kartičkách je prázdna zatiaľ čo tretia je vyplnená polovične.

Po zamiešaní sa z balíčka vyloží na stôl 12 kartičiek. Hráči medzi nimi hľadajú SETy. Ak sa to niekomu podarí, vykríkne „SET!“ a ukáže ho spoluhráčom. Ak je SET správny, hráč si ho vezme zo stola, namiesto neho sa vyložia nové tri kartičky a pokračuje sa v hre. V prípade, že sú hráči presvedčení, že sa medzi vyloženými kartičkami žiadny SET nenachádza, doložia na stôl ďalšie tri kartičky. Hra končí v momente, kedy hráči vyčerpajú všetky kartičky. Cieľom hry je, samozrejme, pozbierať čo najviac SETov. Hra sa dá hrať v takmer ľubovoľne veľkej skupine, z praktických dôvodov sa najviac osvedčili trojice a štvorice.

Komentár. Predtým, než sa pustíme do hrania, je vhodné so študentmi prejsť niekoľko trojíc kartičiek a pobaviť sa o tom, ktoré trojice SETmi sú, ktoré nie a prečo, prípadne premietnuť rozloženie 12 kartičiek a hľadať v nich SETy spoločne.

Po zahraní niekoľkých kôl sa so študentmi pobavíme o tom, akým spôsobom SETy hľadali, ktoré SETy sú na nájdenie jednoduchšie, prípadne iné ďalšie zaujímavosti, ktoré počas hry vypozorovali. K tejto diskusii sa môžeme vrátiť neskôr v priebehu seminára, keď sa budeme zaoberať kategorizovaním rôznych typov SETov.

Úlohy o balíčku kariet

Úloha 30.2. Ak vyberiem dve ľubovoľné kartičky z balíčka, koľko kartičiek existuje takých, aby s pôvodnými dvoma tvorili SET a prečo?

Riešenie. Taká kartička je práve jedna, keďže charakteristiky prvých dvoch priamo určujú, aká variácia každej charakteristiky musí byť na poslednej kartičke (ak sa prvé dve kartičky v charakteristike zhodujú, musí sa s nimi zhodovať aj tretia, ak sú odlišné, aj tretia kartička sa musí odlišovať).

Úloha 30.3. Koľko rôznych SETov (kartičky sa v rámci jednotlivých SETov môžu opakovať) sa nachádza v celom balíčku?

Riešenie. Na vytvorenie SETu potrebujeme tri kartičky. Prvú z nich môžem bez akéhokoľvek obmedzenia vybrať spomedzi všetkých 81 kartičiek, druhá kartička sa dá vybrať 80 spôsobmi a z predchádzajúceho vieme, že tretia kartička tvoriaca SET s už dvoma zvolenými je práve jedna. Keďže však nezáleží na poradí, v ktorom sme kartičky vyberali, vydelíme počet možností $81 \cdot 80$ počtom všetkých možných usporiadaní troch kartičiek, teda 6. Celkom dostávame $\frac{81 \cdot 80}{6} = 1080$ rozličných SETov.

Úloha 30.4. Z balíčka vyberieme jednu kartičku. Koľkých rôznych SETov môže byť táto kartička súčasťou?

Riešenie. Z predchádzajúceho plynie, že zvyšných 80 kartičiek v balíčku vieme rozdeliť na 40 neprelínajúcich sa dvojíc, pričom každá táto dvojica bude tvoriť s pôvodnou kartičkou SET.

Komentár. Menej zdatným študentom môže s pochopením vysvetlenia pomôcť vyložiť si na stôl konkrétne dvojice – teda hľadať konkrétne SETy, ktorých je vybraná kartička súčasťou.

Úloha 30.5. Ako je možné ukázať, že v danom rozložení kartičiek na stole sa nenachádza žiadny SET?

Riešenie. K tomuto problému je možné pristupovať rôznymi spôsobmi, no všetky spája potreba skontrolovať všetky možné kombinácie a vylúčiť prítomnosť SETu. Zaujímavé je pozorovať, akú stratégiu študenti zvolia (v porovnaní s tým, ako postupovali pri hraní hry). Nástavbou na túto úlohu môže byť otázka, ako dané rozloženie 12 kartičiek skontrolovať čo najefektívnejšie.

Úloha 30.6. Je možné SETy nejako kategorizovať? Ako? Koľko SETov v jednotlivých kategóriách je možné vytvoriť? Vieme správnosť našich výpočtov overiť pomocou nejakých predchádzajúcich úvah?

Riešenie. Táto úloha sa dá opäť uchopiť mnohými spôsobmi. Jedným z nich môže byť roztriedenie SETov pomocou počtu charakteristík, ktoré majú kartičky spoločné. Každé rozdelenie, ktoré žiaci vymyslia, by ich však v konečnom dôsledku malo priviesť k rovnakému počtu SETov ako v úlohe 2.

Záverečný komentár. Hra SET je pre študentov (a nielen nich) veľmi atraktívna a majú tendencie sa odhodlane púšťať aj do predkladaných problémov. Stretnutie je tak príjemnou zmenou tempa a obsahu doterajšieho priebehu seminára

Doplňujúce zdroje a materiály

Výborným sprievodcom plným zaujímavých úloh spolu s komentovanými študentskými riešeniami je možné nájsť na [SET].

Seminár 29: Algebraické výrazy a rovnice VI – sústavy rovníc, rovnice s parametrom

Ciele

Precvičiť so študentmi riešenie rovníc obsahujúcich parameter, zoznámiť študentov s niektorými metódami riešenia sústav rovníc

Úvodný komentár

Tento seminár je prvým zo seminárov zaoberajúcich sa úlohami kategórie B, keďže v uplynulom týždni študenti ukončili svoje pôsobenie v kategórii C. Semináre naplánované do konca roka obsahujú menší počet úloh ako doteraz – dôvodom je jednak vyššia náročnosť úloh a tiež to, aby mali študenti viac priestoru na samostatné premýšľanie a riešenie. Preto budeme študentom napovedať a pomáhať v riešení trochu striedmejšie ako doteraz.

Úlohy a riešenia

Úloha 29.1. [B-66-II-1] Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel a, b, pre ktoré platí

$$a+\frac{66}{a}=b+\frac{66}{b}.$$

Riešenie*. Anulovaním pravej strany upravíme danú rovnicu na tvar

$$a-b+66\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=(a-b)\left(1-\frac{66}{ab}\right)=\frac{1}{ab}(a-b)(ab-66)=0.$$

Z toho vyplýva, že hľadané dvojice (a,b) prirodzených čísel sú práve tie, pre ktoré platí $a=b$ alebo $ab=66$.

Úlohe teda vyhovuje nekonečne veľa dvojíc prirodzených čísel tvaru $(a,b)=(k,k)$, pričom k je ľubovoľné prirodzené číslo, a keďže číslo $66=2\cdot 3\cdot 11$ má osem deliteľov, tak aj osem dvojíc $(a,b)\in\{(1,66), (2,33), (3,22), (6,11), (11,6), (22,3), (33,2), (66,1)\}$.

Komentár. Úloha je relatívne jednoduchá a vhodná ako rozcvička na začiatok seminára. Pripomenie študentom metódu riešenia rovníc rozkladom na súčin výrazov, ktorý je rovný nule. Zároveň v záverečnej diskusii zľahka využijú vedomosti o deliteľnosti prirodzených čísel.

Úloha 29.2. [B-58-II-1] V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc

$$\begin{aligned} x+y&=1,\\ x-y&=a,\\ -4ax+4y&=z^2+4 \end{aligned}$$

s neznámymi x, y, z a reálnym parametrom a.

Riešenie*. Sčítaním prvej a druhej rovnice danej sústavy dostaneme $2x=1+a$, odčítaním druhej rovnice od prvej $2y=1-a$. Odtiaľ

$$x=\frac{1}{2}(1+a),\quad y=\frac{1}{2}(1-a). \tag{29.2.1}$$

Keď dosadíme za x a y do tretej rovnice pôvodnej sústavy, dostaneme rovnicu

$$-2a(1+a)+2(1-a)=z^2+4,\quad \text{čiže}\quad z^2+2a^2+4a+2=0,$$

ktorú upravíme na tvar

$$z^2+2(a+1)^2=0.$$

Oba sčítance na ľavej strane poslednej rovnice sú nezáporné čísla. Ich súčet je 0 práve vtedy, keď $z = 0$, $a = -1$. Dosadením týchto hodnôt do 29.2.1 dostaneme $x = 0, y = 1$.

Záver. Daná sústava rovníc má riešenie iba pre $a = -1$, a to $x = 0$, $y = 1$, $z = 0$. Skúška pri tomto postupe nie je nutná.

Komentár. Úloha vyžaduje umné narábanie so sústavou troch rovníc tak, aby bolo možné uskutočniť záverečnú diskusiu o existencii riešenia pre rôzne hodnoty parametra a. Je tiež vhodné so študentami prediskutovať, prečo v tomto prípade nie je nutné robiť skúšku správnosti.

Úloha 29.3. [B-60-S-1] V obore reálnych čísel vyriešte rovnicu

$$\sqrt{x+3} + \sqrt{x} = p$$

s neznámou x a reálnym parametrom p.

Riešenie*. Aby bola ľavá strana rovnice definovaná, musia byť oba výrazy pod odmocninami nezáporné, čo je splnené práve pre všetky $x \geq 0$. Pre nezáporné x potom $p = \sqrt{x+3} + \sqrt{x} \geq \sqrt{3}$, rovnica môže teda mať riešenie iba pre $p \geq \sqrt{3}$.

Upravujme danú rovnicu:

$$\begin{aligned}
\sqrt{3} + \sqrt{x+3} &= p, \\
2x + 3 + 2\sqrt{x(x+3)} &= p^2, \\
2\sqrt{x(x+3)} &= p^2 - 2x - 3, \\
4x(x+3) &= (p^2 - 2x - 3)^2, \\
4x^2 + 12x &= p^4 + 4x^2 + 9 - 4p^2x - 6p^2 + 12x, \\
x &= \frac{(p^2-3)^2}{4p^2}. \qquad (29.3.1)
\end{aligned}$$

Keďže sme danú rovnicu umocňovali na druhú, je nutné sa presvedčiť skúškou, že vypočítané x je pre hodnotu parametra $p \geq \sqrt{3}$ riešením pôvodnej rovnice:

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{(p^2-3)^2}{4p^2} + 3} + \sqrt{\frac{(p^2-3)^2}{4p^2}} &= \sqrt{\frac{p^4 - 6p^2 + 9 + 12p^2}{4p^2}} + \sqrt{\frac{(p^2-3)^2}{4p^2}} = \\
&= \sqrt{\frac{(p^2+3)^2}{4p^2}} + \sqrt{\frac{(p^2-3)^2}{4p^2}} = \frac{p^2+3}{2p} + \frac{p^2-3}{2p} = p.
\end{aligned}$$

Pri predposlednej úprave sme využili podmienku $p \geq \sqrt{3}$ (a teda aj $p^2 - 3 \geq 0$ a $p > 0$), takže $\sqrt{(p^2-3)^2} = p^2 - 3$ a $\sqrt{4p^2} = 2p$.

Poznámka. Namiesto skúšky stačí overiť, že pre nájdené x sú všetky umocňované výrazy nezáporné, teda vlastne stačí overiť, že

$$p^2 - 2x - 3 = \frac{(p^2-3)(p^2+3)}{2p^2} \geq 0.$$

Pre $p \geq \sqrt{3}$ to tak naozaj je.

Vynechať skúšku možno aj takouto úvahou: Funkcia $\sqrt{x+3} + \sqrt{x}$ je zrejme rastúca, v bode 0 (ktorý je krajným bodom jej definičného oboru) nadobúda hodnotu $\sqrt{3}$ a zhora je neohraničená.

Preto každú hodnotu $p \geq \sqrt{3}$ nadobúda pre práve jedno $x \geq 0$. Z toho vyplýva, že pre $p \geq \sqrt{3}$ má zadaná rovnica práve jedno riešenie, a teda (jediné) nájdené riešenie 29.3.1 musí vyhovovať.

Komentár. Úloha nie je algebraicky náročná, vyžaduje však starostlivú diskusiu definičného oboru, ktorý potom vyústi v obmedzenie hodnôt parametra p. Dôležitou súčasťou riešenia je v tomto prípade aj skúška správnosti, prípadne diskusia, ktorá je uvedená v závere prezentovaného riešenia˙

Úloha 29.4. [B-58-I-2] Určte všetky trojice (x, y, z) reálnych čísel, pre ktoré platí

$$x^2 + xy = y^2 + z^2,$$
$$z^2 + zy = y^2 + x^2.$$

Riešenie*. Odčítaním prvej rovnice od druhej dostaneme po úprave

$$(z - x)(2z + 2x + y) = 0.$$

Sú preto možné dva prípady, ktoré rozoberieme samostatne.

a) Prípad $z - x = 0$. Dosadením $z = x$ do prvej rovnice sústavy dostaneme $x^2 + xy = y^2 + x^2$, čiže $y(x - y) = 0$. To znamená, že platí $y = 0$ alebo $x = y$. V prvom prípade dostávame trojice $(x, y, z) = (x, 0, x)$, v druhom $(x, y, z) = (x, x, x)$; také trojice sú riešeniami danej sústavy pre ľubovoľné reálne číslo x, ako ľahko overíme dosadením (aj keď taká skúška pri našom postupe vlastne nie je nutná).

b) Prípad $2z + 2x + y = 0$. Dosadením $y = -2x - 2z$ do prvej rovnice sústavy dostaneme

$$x^2 + x(-2x - 2z) = (-2x - 2z)^2 + z^2, \quad \text{čiže} \quad 5(x + z)^2 = 0.$$

Posledná rovnica je splnená práve vtedy, keď $z = -x$, vtedy však $y = -2x - 2z = 0$.Dostávame trojice $(x, y, z) = (x, 0, -x)$, ktoré sú riešeniami danej sústavy pre každé reálne x, ako overíme dosadením. (O takej skúške platí to isté čo v prípade a).

Odpoveď. Všetky riešenia (x, y, z) danej sústavy sú trojice troch typov:

$$(x, x, x), \quad (x, 0, x), \quad (x, 0, -x),$$

kde x je ľubovoľné reálne číslo.

Iné riešenie*. Obe rovnice sústavy sčítame. Po úprave dostaneme rovnicu

$$y(x + z - 2y) = 0$$

a opäť rozlíšime dve možnosti.

a) Prípad $y = 0$. Z prvej rovnice sústavy ihneď vidíme, že $x^2 = z^2$, čiže $z = \pm x$. Skúškou overíme, že každá z trojíc $(x, 0, x)$ a $(x, 0, -x)$ je pre ľubovoľné reálne x riešením.

b) Prípad $x + z - 2y = 0$. Dosadením $y = \frac{1}{2}(x + z)$ do prvej rovnice sústavy dostaneme

$$x^2 + x(x + z)^2 = \frac{(x + z)^2}{4} + z^2, \quad \text{po úprave} \quad x^2 = z^2.$$

Platí teda $z = -x$ alebo $z = x$. Dosadením do rovnosti $x + z - 2y = 0$ v prvom prípade dostaneme $y = 0$, v druhom prípade $y = x$. Zodpovedajúce trojice $(x, 0, -x)$ a (x, x, x) sú riešeniami pre každé reálne x (prvé z nich sme však našli už v časti a).

Úloha 29.5. [B-60-I-1] V obore reálnych čísel vyriešte sústavu

$$\sqrt{x^2+y^2} = z+1,$$
$$\sqrt{y^2+z^2} = x+1,$$
$$\sqrt{z^2+x^2} = y+1.$$

Riešenie*. Umocnením a odčítaním prvých dvoch rovností dostaneme $x^2 - z^2 = (z+1)^2 - (x+1)^2$, čo upravíme na $2(x^2 - z^2) + 2(x - z) = 0$, čiže

$$(x-z)(x+z+1) = 0. \tag{29.5.1}$$

Analogicky by sme dostali ďalšie dve rovnice, ktoré vzniknú z 29.5.1 cyklickou zámenou neznámych $x \to y \to z$. Vzhľadom na túto symetriu (daná sústava sa nezmení dokonca pri ľubovoľnej permutácii neznámych) stačí rozobrať len nasledovné dve možnosti:

Ak $x = y = z$, prejde pôvodná sústava na jedinú rovnicu $\sqrt{2x^2} = x + 1$, ktorá má dve riešenia $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$. Každá z trojíc $(1 \pm \sqrt{2}, 1 \pm \sqrt{2}, 1 \pm 2)$ je zrejme riešením pôvodnej sústavy.

Ak sú niektoré dve z čísel x, y, z rôzne, napríklad $x \neq z$, vyplýva z 29.5.1 rovnosť $x + z = -1$. Dosadením $x + 1 = -z$ do druhej rovnice sústavy dostávame $y = 0$ a potom z tretej rovnice máme $x^2 + (x+1)^2 = 1$, čiže $x(x+1) = 0$. Posledná rovnica má dve riešenia $x = 0$ a $x = -1$, ktorým zodpovedajú $z = -1$ a $z = 0$. Ľahko overíme, že obe nájdené trojice $(0, 0, -1)$ a $(-1, 0, 0)$ sú riešeniami danej sústavy, rovnako aj trojica $(0, -1, 0)$, ktorú dostaneme ich permutáciou.

Daná sústava má päť riešení: $(0,0,-1), (0,-1,0), (-1,0,0), (1+\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$ a $(1 - \sqrt{2}, 1-\sqrt{2}, 1-\sqrt{2})$.

Komentár. Posledné dve úlohy seminára kombinujú princípy z prvých dvoch úloh: vhodné sčítanie a odčítanie rovníc medzi sebou a úpravu na súčin členov, ktorý je rovný nule. Dôležité však je, aby boli študenti pozorní pri vyvodzovaní záverov a pokryli v ich riešení všetky možnosti. Zároveň je posledná úloha pekným príkladom symetrie, je vhodné so študentami prediskutovať, ako táto úlohu zjednodušuje.

2.9 Máj

Seminár 30: Algebraické výrazy a rovnice VII – Kvadratické rovnice

Ciele

Precvičiť metódy používané pri práci s kvadratickými rovnicami a vzťahy medzi koreňmi rovnice

Úvodný komentár

Na začiatku seminára si spolu so študentami osviežime znalosti o kvadratických rovniciach, počte ich riešení a vzťahoch medzi reálnymi koreňmi a koeficientmi (Viètove vzorce). V čase konania seminára už študenti pravdepodobne budú mať za sebou preberanie tohto učiva na hodinách matematiky, takže by opakovanie nemalo zabrať priveľa času.

Úlohy a riešenia

Úloha 30.1. [B-57-I-5-N3] Nájdite všetky dvojice (a,b) reálnych čísel, pre ktoré má každá z rovníc $x^2+(a-2)x+b-3=0$, $x^2+(a+2)x+3b-5=0$ dvojnásobný koreň.

Riešenie. Kvadratická rovnica má dvojnásobný koreň práve vtedy, ak jej diskriminant je rovný nule. Z tejto podmienky pre rovnice zo zadania dostávame

$$\begin{aligned} a^2-4a-4b+16&=0,\\ a^2+4a-12b+24&=0. \end{aligned} \tag{30.1.1}$$

Odčítaním druhej rovnice od prvej máme po úprave $a=b-1$. Dosadením tohto vzťahu do jednej z rovníc v 30.1.1 potom určíme možné hodnoty b, ktoré sú 3 a 7. K nim odpovedajúce hodnoty a sú tak 2 a 6 a teda hľadané dvojice reálnych čísel (a,b) sú $(2,3)$ a $(6,7)$.

Komentár. Jednoduchá úloha na úvod, v ktorej študenti aplikujú znalosti o závislosti medzi hodnotou diskriminantu a počtom riešení kvadratickej rovnice. Ten potom vedie na riešenie sústavy dvoch rovníc s dvomi neznámymi.

Úloha 30.2. [B-57-I-5] Určte všetky dvojice a,b reálnych čísel, pre ktoré má každá z kvadratických rovníc

$$ax^2+2bx+1=0, \quad bx^2+2ax+1=0$$

dva rôzne reálne korene, pričom práve jeden z nich je spoločný obom rovniciam.

Riešenie*. Zo zadania vyplýva, že $a\neq 0$, $b\neq 0$ (inak by rovnice neboli kvadratické) a $a\neq b$ (inak by rovnice boli totožné, a ak by mali dva reálne korene, boli by oba spoločné).

Označme x_0 spoločný koreň oboch rovníc, takže

$$ax_0^2+2bx_0+1=0, \quad bx_0^2+2ax_0+1=0.$$

Odčítaním oboch rovníc dostaneme $(a-b)(x_0^2-2x_0)=x_0(a-b)(x_0-2)=0$. Keďže $a\neq b$ a 0 zrejme koreňom daných rovníc nie je, musí byť spoločným koreňom číslo $x_0=2$. Dosadením do daných rovníc tak dostaneme jedinú podmienku $4a+4b+1=0$, čiže

$$b=-a-\frac{1}{4}.$$

Diskriminant druhej z daných rovníc je potom $4a^2-4b=4a^2+4a+1=(2a+1)^2$, takže rovnica má dva rôzne reálne korene pre ľubovoľné $a\neq-\frac{1}{2}$. Podobne diskriminant prvej z daných rovníc je $4b^2-4a=4b^2+4b+1=(2b+1)^2$. Rovnica má teda dva rôzne reálne korene pre ľubovoľné $b\neq-\frac{1}{2}$, čiže $a\neq\frac{1}{4}$

Z uvedených predpokladov však zároveň vyplýva $a\neq-\frac{1}{4}$ $(b\neq 0)$ a $a\neq-\frac{1}{8}$ $(a\neq b)$.

Záver. Vyhovujú všetky dvojice $(a,-a-\frac{1}{4})$, kde $a\in\mathbb{R}\ \{-\frac{1}{2},-\frac{1}{4},-\frac{1}{8},0,\frac{1}{4}\}$.

Komentár. V úlohe sa k správnemu riešeniu dostaneme pomocou vhodného odčítania dvoch rovníc (a potom vhodnou úpravou takto vzniknutej rovnice). Považujeme za vhodné študentov na tento „trik“ upozorniť, keďže nájde uplatnenie nielen v nasledujúcej úlohe, ale aj v rôznych iných príkladoch.

Úloha 30.3. [B-57-II-1] Uvažujme dve kvadratické rovnice

$$x^2 - ax - b = 0, \quad x^2 - bx - a = 0$$

s reálnymi parametrami a, b. Zistite, akú najmenšiu a akú najväčšiu hodnotu môže nadobudnúť súčet $a + b$, ak existuje práve jedno reálne číslo x, ktoré súčasne vyhovuje obom rovniciam. Určte ďalej všetky dvojice (a, b) reálnych parametrov, pre ktoré tento súčet tieto hodnoty nadobúda.

Riešenie*. Odčítaním oboch daných rovníc dostaneme rovnosť $(b-a)x + a - b = 0$, čiže $(b-a)(x-1) = 0$. Odtiaľ vyplýva, že $b = a$ alebo $x = 1$.

Ak $b = a$, majú obidve rovnice tvar $x^2 - ax - a = 0$. Práve jedno riešenie existuje práve vtedy, keď diskriminant $a^2 + 4a$ je nulový. To platí pre $a = 0$ a pre $a = -4$. Pretože $b = a$, má súčet $a + b$ v prvom prípade hodnotu 0 a v druhom prípade hodnotu -8.

Ak $x = 1$, dostaneme z daných rovníc $a + b = 1$, teda $b = 1 - a$. Rovnice potom majú tvar

$$x^2 - ax + a - 1 = 0 \quad \text{a} \quad x^2 + (a-1)x - a = 0.$$

Prvá má korene 1 a $a - 1$, druhá má korene 1 a $-a$. Práve jedno spoločné riešenie tak dostaneme vždy s výnimkou prípadu, keď $a - 1 = -a$, čiže $a = \frac{1}{2}$ – vtedy sú spoločné riešenia dve.

Záver. Najmenšia hodnota súčtu $a + b$ je -8 a je dosiahnutá pre $a = b = -4$. Najväčšia hodnota súčtu $a + b$ je 1; túto hodnotu má súčet $a + b$ pre všetky dvojice $(a, 1 - a)$, kde $a \neq \frac{1}{2}$ je ľubovoľné reálne číslo.

Komentár. Úloha nadväzuje na predchádzajúcu, opäť rovnice v zadaní sčítame. Viac ako náročnosťou výpočtu je úloha zaujímavá svojim rozborom, kde je potrebné dať pozor na to, aby študenti správne zvážili oba prípady ($a = b$, $x = 1$).

Úloha 30.4. [B-62-II-1] Pre ľubovoľné reálne čísla $k \neq \pm 1$, $p \neq 0$ a q dokážte tvrdenie: Rovnica

$$x^2 + px + q = 0$$

má v obore reálnych čísel dva korene, z ktorých jeden je k-násobkom druhého, práve vtedy, keď platí $kp^2 = (k+1)^2 q$.

Riešenie*. Čísla x_1, x_2 sú koreňmi danej kvadratickej rovnice práve vtedy, keď platí

$$x_1 + x_2 = -p \quad \text{a} \quad x_1 x_2 = q. \tag{30.4.1}$$

Predpokladajme, že daná kvadratická rovnica má reálne korene $x_1 = \alpha$, $x_2 = k\alpha$. Dosadením do 30.4.1 dostaneme $(k+1)\alpha = -p$ a $k\alpha^2 = q$. Pre obe strany dokazovanej rovnosti $kp^2 = (k+1)^2 q$ odtiaľ vyplýva

$$kp^2 = k(-(k+1)\alpha)^2 = k(k+1)^2\alpha^2,$$

$$(k+1)^2 q = (k+1)^2 \cdot k\alpha^2 = k(k+1)^2\alpha^2,$$

teda daná rovnosť skutočne platí.

Nech naopak pre reálne čísla p, q a $k \neq -1$ platí $kp^2 = (k+1)^2 q$. Uvažujme dvojicu reálnych čísel

$$x_1 = \frac{-kp}{k+1} \quad \text{a} \quad x_2 = \frac{-p}{k+1}.$$

Také čísla (pre ktoré platí $x_1 = kx_2$) sú koreňmi danej kvadratickej rovnice, ak spĺňajú obe rovnosti 30.4.1. Overenie urobíme dosadením:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \frac{-kp}{k+1} + \frac{-p}{k+1} = \frac{-(k+1)p}{k+1} = -p, \\ x_1 x_2 &= \frac{-kp}{k+1} \cdot \frac{-p}{k+1} = \frac{kp^2}{(k+1)^2} = \frac{(k+1)^2 q}{(k+1)^2} = q. \end{aligned}$$

Tým je celý dôkaz hotový.

Úloha 30.5. [B-59-I-6] Reálne čísla a, b majú túto vlastnosť: rovnica $x^2 - ax + b - 1 = 0$ má v množine reálnych čísel dva rôzne korene, ktorých rozdiel je kladným koreňom rovnice $x^2 - ax + b + 1 = 0$.

a) Dokážte nerovnosť $b > 3$.

b) Pomocou b vyjadrite korene oboch rovníc.

Riešenie*. Označme x_1 menší a x_2 väčší koreň prvej rovnice. Potom platí $x_1 + x_2 = a$, $x_1 x_2 = b - 1$. Druhá rovnica má koreň $x_2 - x_1$, a keďže súčet oboch koreňov je a, musí byť druhý koreň $a - (x_2 - - x_1) = x_1 + x_2 - x_2 + x_1 = 2x_1$. Súčin koreňov druhej rovnice je $(x_2 - x_1) \cdot 2x_1 = b + 1$. Odtiaľ dostávame $b = -1 + 2x_1 x_2 - 2x_1^2 = -1 + 2(b-1) - 2x_1^2$, a teda

$$b = 3 + 2x_1^3 > 3, \tag{30.5.1}$$

lebo z rovnosti $x_1 = 0$ by vyplývalo $b + 1 = b - 1 = 0$.

Keďže $x_2 - x_1 > 0$ a $b + 1 > 0$, musí byť aj $x_1 > 0$; z 30.5.1 máme $x_1 = \sqrt{(b-3)/2}$ a ďalej

$$x_2 = \frac{b-1}{x_1} = \frac{(b-1)\sqrt{2}}{\sqrt{b-3}}.$$

Korene druhej rovnice sú potom

$$x_2 - x_1 = \frac{b+1}{} \quad \text{a} \quad 2x_1 = \sqrt{2(b-3)}.$$

Iné riešenie*. Korene prvej rovnice sú

$$x_1 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4b + 4}}{2}, \quad x_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b + 4}}{2},$$

pričom pre diskriminant máme

$$D = a^2 - 4(b-1) > 0. \tag{30.5.2}$$

Rozdiel koreňov $x_2 - x_1 = \sqrt{a^2 - 4b + 4}$ je koreňom druhej rovnice, a preto

$$\begin{aligned} a^2 - 4b + 4 - a\sqrt{a^2 - 4b + 4} + b + 1 &= 0, \\ a^2 - 3b + 5 &= a\sqrt{a2 - 4b + 4}, \\ a^4 + 2a^2(5 - 3b) + (3b-5)^2 &= a^4 - 4a^2 b + 4a^2, \\ (3b-5)^2 &= a^2(2b-6). \end{aligned} \tag{30.5.3}$$

Rovnosť $a = 0$ nastáva práve vtedy, keď $3b - 5 = 0$; potom by ale neplatilo 30.5.2. Preto $a^2 > 0$, $(3b-5)^2 > 0$, a teda aj $2b - 6 > 0$, čiže $b > 3$. Z 30.5.2 a 30.5.3 potom vyplýva $a > 0$, a teda $a = (3b-5)/\sqrt{2(b-3)}$; ďalej potom

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{3a-5}{\sqrt{2(b-3)}} - \sqrt{\frac{(3b-5)^2}{2(b-3)} - 4b + 4}\right) = \sqrt{\frac{b-3}{2}},$$
$$x_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3a-5}{\sqrt{2(b-3)}} + \sqrt{\frac{(3b-5)^2}{2(b-3)} - 4b + 4}\right) = \frac{(b-1)\sqrt{2}}{\sqrt{b-3}}.$$

Druhá rovnica má korene

$$x_3 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4b - 4}}{2} = \frac{b+1}{\sqrt{2(b-3)}} = x_2 - x_1$$
$$x_4 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b - 4}}{2} = \sqrt{2(b-3)}.$$

Komentár. Úloha sa dá vyriešiť relatívne „netrikovo“ vyjadrením koreňov prvej rovnice, dosadením ich rozdielu do druhej rovnice a odpovedajúcou diskusiou. Takýto prístup je síce zrozumiteľný, avšak dosť pracný. Ak študenti neprídu na prvý spôsob riešenia, považujeme za vhodné im ho ukázať ako dobrý príklad toho, ako nám použitie Viètovych vzorcov môže výraznej zjednodušiť výpočet.

Úloha 30.6. [B-64-II-4] Na tabuli je zoznam čísel $1, 2, 3, 4, 5, 6$ a „rovnica“

$$\frac{\square}{\square}x^2 + \frac{\square}{\square}x + \frac{\square}{\square} = 0.$$

Marek s Tomášom hrajú nasledujúcu hru. Najskôr Marek vyberie ľubovoľné číslo zo zoznamu, napíše ho do jedného z prázdnych políčok v „rovnici“ a číslo zo zoznamu zotrie. Potom Tomáš vyberie niektoré zo zvyšných čísel, napíše ho do iného prázdneho políčka a v zozname ho zotrie. Nato Marek urobí to isté a nakoniec Tomáš doplní tri zvyšné čísla na tri zvyšné voľné políčka v „rovnici“. Marek vyhrá, ak vzniknutá kvadratická rovnica s racionálnymi koeficientmi bude mať dva rôzne reálne korene, inak vyhrá Tomáš. Rozhodnite, ktorý z hráčov môže vyhrať nezávisle na postupe druhého hráča.

Riešenie*. Označme a, b, c koeficienty výslednej rovnice $ax^2 + bx + c = 0$. Tá má dva rôzne reálne korene práve vtedy, keď je jej diskriminant (v symbolickej podobe)

$$b^2 - 4ac = \left(\frac{\square}{\square}\right)^2 - 4\left(\frac{\square}{\square}\right)\left(\frac{\square}{\square}\right)$$

kladný.

Ukážeme, že vyhrávajúcu stratégiu má Marek. Najskôr do menovateľa zlomku pre koeficient b napíše 1.

a) Ak Tomáš obsadí vo svojom prvom ťahu iné miesto ako v čitateli b, napíše do neho Marek v nasledujúcom ťahu najväčšie zostávajúce číslo zo zoznamu (teda 5 alebo 6). Hodnota b^2 potom bude aspoň 25 a zo zvyšných čísel možno zostaviť výraz $4ac$ s hodnotou nanajvýš $4 \cdot \frac{6 \cdot 4}{3 \cdot 2} = 16$. Diskriminant vzniknutej kvadratickej rovnice tak bude určite kladný.

b) Predpokladajme, že Tomáš vo svojom ťahu doplní čitateľa b. Marek potom v druhom ťahu napíše najmenšie zostávajúce číslo zo zoznamu (2 alebo 3) do čitateľa a (alebo c).

   (i) V prípade, že Tomáš v prvom ťahu napísal do čitateľa b číslo 2, je hodnota b^2 rovná 4 a najväčšia možná hodnota $4ac$ (s prihliadnutím na druhý Marekov ťah) je $4 \cdot \frac{3\cdot 6}{4\cdot 5} = \frac{18}{5} \leq 4$, teda diskriminant vzniknutej kvadratickej rovnice bude opäť kladný.

   (ii) V prípade, že Tomáš v prvom ťahu napísal do čitateľa b iné číslo ako 2, je hodnota b^2 aspoň 9 a hodnota $4ac$ je nanajvýš $4 \cdot \frac{2\cdot 6}{3\cdot 4} = 4$, takže diskriminant vzniknutej kvadratickej rovnice bude aj v tomto prípade kladný.

Záver. V danej hre môže vyhrať Marek nezávisle na ťahoch Tomáša. Jeho víťazná stratégia je opísaná vyššie.

Komentár. Posledná úloha je zaujímavým spojením hľadania víťaznej stratégie a analýzy vlastností diskriminantu kvadratickej rovnice. Študentov necháme riešenie úlohy hľadať samostatne a potom ich vyzveme, aby stratégiu, ktorú našli, použili pri hre so spolužiakmi. Bude zaujímavé pozorovať, či nastane situácia, v ktorej aj neoptimálna stratégia zvíťazí.

Domáca práca

Úloha 30.7. [B-57-S-2] Určte všetky dvojice (a,b) reálnych čísel, pre ktoré majú rovnice

$$x^2 + (3a+b)x + 4a = 0, \quad x^2 + (3b+a)x + 4b = 0$$

spoločný reálny koreň.

Riešenie*. Nech x_0 je spoločný koreň oboch rovníc. Potom platí

$$x_0^2 + (3a+b)x_0 + 4a = 0, \quad x_0^2 + (3b+a)x_0 + 4b = 0.$$

Odčítaním týchto rovníc dostaneme $(2a-2b)x_0 + 4(a-b) = 0$, odkiaľ po úprave získame $(a - b)(x_0+2) = 0$.

Rozoberieme dve možnosti:

Ak $a = b$, majú obidve dané rovnice rovnaký tvar $x^2 + 4ax + 4a = 0$. Aspoň jeden koreň (samozrejme spoločný) existuje práve vtedy, keď je diskriminant $16a^2 - 16a$ nezáporný, teda $a \in (-\infty, 0\rangle \cup \langle 1, \infty)$.

Ak $x_0 = -2$, dostaneme z prvej aj z druhej rovnice $4 - 2a - 2b = 0$, teda $b = 2 - a$. Dosadením do zadania dostaneme rovnice

$$x^2 + (2a+2)x + 4a = 0, \quad x^2 + (6-2a)x + 8 - 4a = 0,$$

ktoré majú pri ľubovoľnej hodnote parametra a spoločný koreň -2.

Záver. Dané rovnice majú aspoň jeden spoločný koreň pre všetky dvojice (a,a), kde $a \in (-\infty, 0\rangle \cup \langle 1, \infty)$, a pre všetky dvojice tvaru $(a, 2-a)$, kde a je ľubovoľné.

Úloha 30.8. [B-59-S-1] Určte všetky hodnoty reálnych parametrov p, q, pre ktoré má každá z rovníc

$$x(x-p) = 3+q, \quad x(x+p) = 3-q$$

v obore reálnych čísel dva rôzne korene, ktorých aritmetický priemer je jedným z koreňov zvyšnej rovnice.

Riešenie*. Z Viètových vzťahov pre korene kvadratickej rovnice (ktoré vyplývajú z rozkladu daného kvadratického trojčlena na súčin koreňových činiteľov) ľahko zistíme, že súčet koreňov prvej rovnice je p, takže ich aritmetický priemer je $\frac{1}{2}p$. Toto číslo má byť koreňom druhej rovnice, preto

$$\frac{p}{2} \cdot \frac{3p}{2} = 3 - q. \tag{30.8.1}$$

Podobne súčet koreňov druhej rovnice je $-p$, ich aritmetický priemer je $-\frac{1}{2}p$, a preto

$$-\frac{p}{2} \cdot \left(-\frac{3p}{2}\right) = 3 + q. \tag{30.8.2}$$

Porovnaním oboch vzťahov 30.8.1 a 30.8.2 máme $3 - q = 3 + q$, čiže $q = 0$ a z 30.8.1 potom vyjde $p = 2$ alebo $p = -2$.

Z oboch nájdených riešení dostaneme tú istú dvojicu rovníc $x(x-2) = 3$, $x(x+2) = 3$. Korene prvej z nich sú čísla -1 a 3, ich aritmetický priemer je 1. Korene druhej rovnice sú čísla 1 a -3, ich aritmetický priemer je -1.

Seminár 31: Geometria VII – stredové, obvodové, úsekové uhly, tetivové štvoruholníky

Ciele

Zopakovať, príp. študentov zoznámiť s vlastnosťami stredových, obvodových a úsekových uhlov a ich využitím pri riešení úloh.

Úvodný komentár

Predtým, ako sa so študentmi pustíme do riešenia úloh, je vhodné predstaviť, príp. spoločne zopakovať vlastnosti uhlov, ktorými sa budeme v seminári zaoberať. Vhodným materiálom je [Kad96], kapitola 8.

Úlohy a riešenia

Úloha 31.1. [B-66-II-3] V rovine sú dané kružnice k a l, ktoré sa pretínajú v bodoch E a F. Dotyčnica ku kružnici l zostrojená v bode E pretína kružnicu k v bode H ($H \neq E$). Na oblúku EH kružnice k, ktorý neobsahuje bod F, zvoľme bod C ($E \neq C \neq H$) a priesečník priamky CE s kružnicou l označme D ($D \neq E$). Dokážte, že trojuholníky DEF a CHF sú podobné.

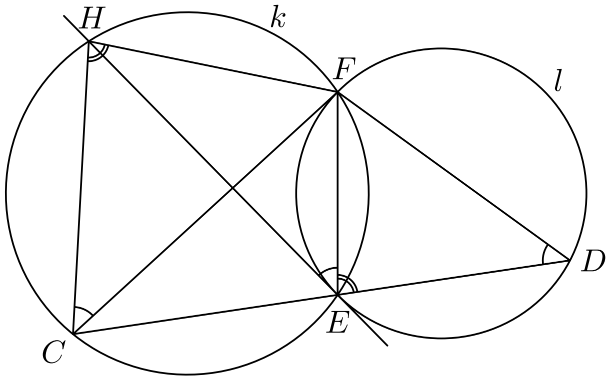
Riešenie*. Z rovnosti obvodových uhlov nad tetivou HF kružnice k vyplýva $|\measuredangle HCF| = |\measuredangle HEF|$. Uhol HEF je zároveň úsekovým uhlom prislúchajúcim tetive EF kružnice l, ktorý je však zhodný s obvodovým uhlom EDF (obr. 31.1.1). Celkovo tak platí

$$|\measuredangle HCF| = |\measuredangle HEF| = |\measuredangle EDF|. \tag{31.1.1}$$

Vzhľadom na to, že $CEFH$ je tetivový štvoruholník, je jeho vnútorný uhol pri vrchole H zhodný s vonkajším uhlom pri jeho protiľahlom vrchole E. Platí teda

$$|\measuredangle CHF| = |\measuredangle DEF|. \tag{31.1.2}$$

Z rovností 31.1.1 a 31.1.2 vyplýva na základe vety *uu* podobnosť trojuholníkov DEF a CHF. Tým je dôkaz hotový.

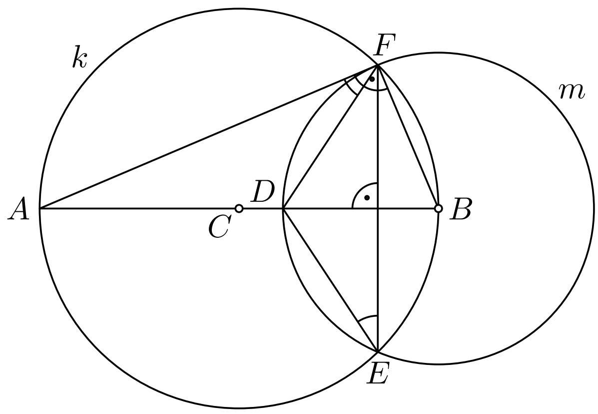


Obr. 31.1.1

Komentár. Úloha je relatívne jednoduchou aplikáciou poznatkov o stredových, obvodových a úsekových uhloch, preto dobe poslúži ako úvodná úloha seminára. Zároveň sa v úlohe vyskytuje spoločná tetiva dvoch kružníc, ktorá je prvkom mnohých geometrických úloh v kategórii B, takže je príjemné, že sa študenti s týmto prípadom zoznámia hneď na začiatku.

Úloha 31.2. [B-65-II-2] Daná je úsečka AB, jej stred C a vnútri úsečky AB bod D. Kružnice $k(C, |BC|)$ a $m(B, |BD|)$ sa pretínajú v bodoch E a F. Zdôvodnite, prečo je polpriamka FD osou uhla AFE.

Riešenie*. Kružnica k je Tálesovou kružnicou nad priemerom AB, takže trojuholník ABF je pravouhlý s pravým uhlom pri vrchole F. Inými slovami, priamka AF je kolmá na polomer BF kružnice



Obr. 31.2.1

m, a preto sa priamka AF dotýka kružnice m v bode F (obr. 31.2.1). Z rovnosti úsekového uhla zovretého tetivou DF s dotyčnicou AF a obvodového uhla nad tou istou tetivou máme (ako už je vyznačené na obrázku)

$$|\measuredangle AFD| = |\measuredangle DEF|.$$

Zo súmernosti úsečky EF podľa osi AB tak vyplýva

$$|\measuredangle AFD| = |\measuredangle DEF| = |\measuredangle DFE|,$$

čo znamená, že FD je osou uhla AFE.

Iné riešenie*. Označme β veľkosť uhla ABF a dopočítajme veľkosti uhlov DFE a AFE. Trojuholník DBF je rovnoramenný, lebo jeho ramená BD a BF sú polomery kružnice m, preto

$$|\measuredangle DFB| = \frac{1}{2}(180^\circ - \beta) = 90^\circ - \frac{\beta}{2}.$$

Keďže podobne aj trojuholník EBF je rovnoramenný s osou BD, platí

$$|\measuredangle EFB| = 90^\circ - \beta.$$

Spojením oboch predchádzajúcich rovností tak dostávame

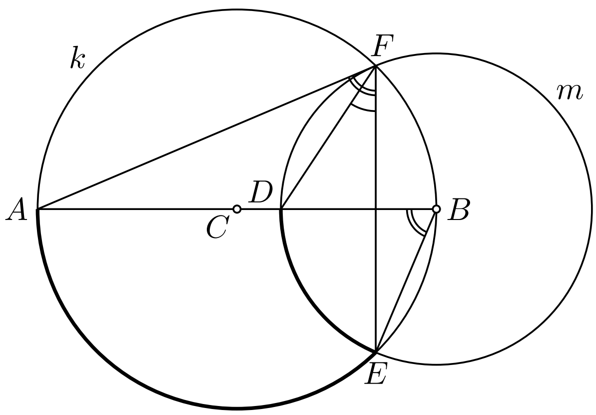
$$|\measuredangle DFE| = |\measuredangle DFB| - |\measuredangle EFB| = \frac{\beta}{2}.$$

Z vlastností Tálesovej kružnice k nad priemerom AB vieme, že uhol AFB je pravý. Pritom jeho časť uhol EFB má, ako sme už zistili, veľkosť $90^\circ - \beta$, takže jeho druhá časť, uhol AFE, má veľkosť β, čo je presne dvojnásobok veľkosti uhla DFE. Tým sme dokázali, že priamka FD je osou uhla AFE.

Iné riešenie*. Nad oblúkom AE kružnice k sa zhodujú uhly ABE a AFE (obr. 31.2.2). Oblúku DE kružnice m prislúcha obvodový uhol DFE a stredový uhol DBE. Spolu tak dostávame

$$|\measuredangle DFE| = \frac{1}{2}|\measuredangle DBE| = \frac{1}{2}|\measuredangle ABE| = \frac{1}{2}|\measuredangle AFE|,$$

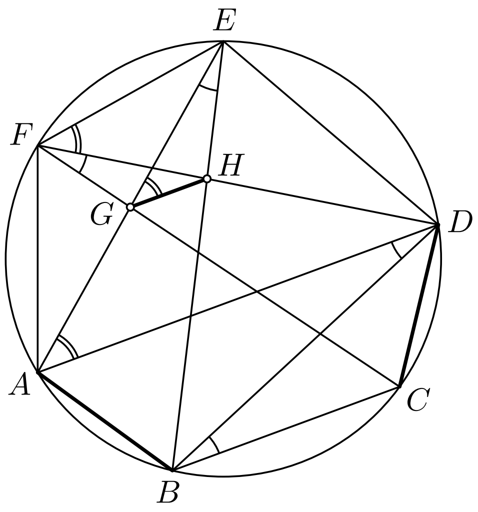
čo dokazuje, že FD je osou uhla AFE.



Obr. 31.2.2

Komentár. Úlohu je možné riešiť viacerými rôznymi spôsobmi, preto je to opäť vhodný priestor na to, aby si študenti svoje riešenia porovnali a skúsili obhájiť pred spolužiakmi. V úlohe sa znova vyskytla spoločná tetiva dvoch kružníc, pekne tak nadväzuje na úlohu predchádzajúcu.

Úloha 31.3. [B-65-I-5] Vrcholy konvexného šesťuholníka $ABCDEF$ ležia na kružnici, pričom $|AB| = |CD|$. Úsečky AE a CF sa pretínajú v bode G a úsečky BE a DF sa pretínajú v bode H. Dokážte, že úsečky GH, AD a BC sú navzájom rovnobežné.



Obr. 31.3.1

Riešenie*. Najskôr ukážeme, že $AD \parallel BC$. Keďže $|AB| = |CD|$, sú obvodové uhly nad tetivami AB a CD kružnice opísanej šesťuholníku $ABCDEF$ zhodné (obr. 31.3.1), teda $|\measuredangle ADB| = |\measuredangle DBC|$; to sú však striedavé uhly priečky BD priamok AD a BC, preto $AD \parallel BC$. Ostáva ukázať, že $GH \parallel AD$. Využitím zhodných obvodových uhlov nad tetivami AB a CD pri vrcholoch E a F dostávame

$$|\measuredangle GEH| = |\measuredangle AEB| = |\measuredangle CFD| = |\measuredangle GFH|,$$

čo znamená, že body E, F, G a H ležia na jednej kružnici, pretože vrcholy zhodných uhlov GEH a GFH ležia v rovnakej polrovine s hraničnou priamkou GH. Z toho vyplýva, že uhly EFH a EGH nad jej tetivou EH sú zhodné. To spolu so zhodnosťou uhlov EFD a EAD nad tetivou ED pôvodnej kružnice (obr. 31.3.1) vedie na zhodnosť súhlasných uhlov EGH a EAD priečky AE priamok GH a AD, ktoré sú teda naozaj rovnobežné. Tým je tvrdenie úlohy dokázané.

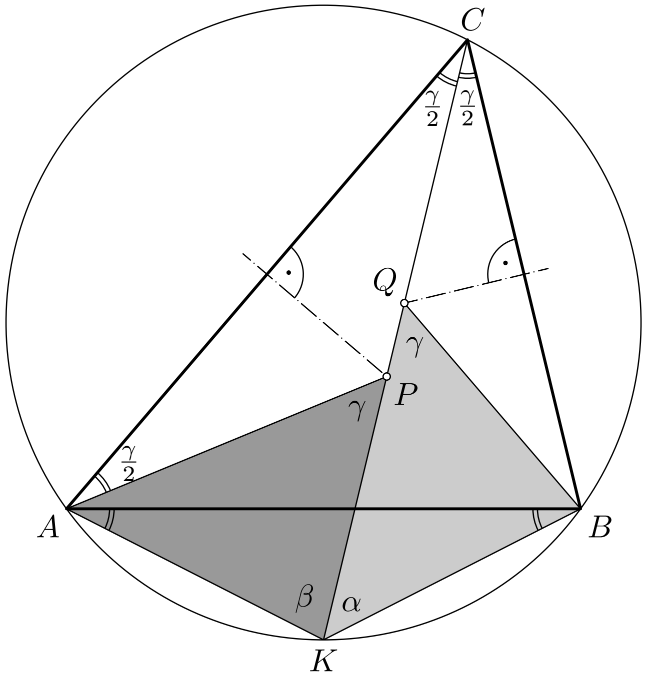
Komentár. Umiestnenie vrcholov šesťuholníka na kružnici priam nabáda, aby študenti hľadali dvojice rovnakých uhlov, ktoré im potom pomôžu vyvodiť závery o (ne)rovnobežnosti skúmaných úsečiek. Zároveň úloha obsahuje zaujímavú druhú časť, kedy objavíme, že body E, F, G, H ležia na jednej kružnici.

Úloha 31.4. [B-58-I-5] Trojuholníku ABC je opísaná kružnica k. Os strany AB pretne kružnicu k v bode K, ktorý leží v polrovine opačnej k polrovine ABC. Osi strán AC a BC pretnú priamku CK postupne v bodoch P a Q. Dokážte, že trojuholníky AKP a KBQ sú zhodné.

Riešenie*. Označme α, β, γ zvyčajným spôsobom veľkosti vnútorných uhlov trojuholníka ABC (obr. 31.4.1). Bod K leží na osi úsečky AB, preto $|AK| = |KB|$. Trojuholník AKB je rovnoramenný so základňou AB, jeho vnútorné uhly pri vrcholoch A a B sú teda zhodné. Podľa vety o obvodových uhloch sú zhodné aj uhly BCK a BAK, resp.ACK a ABK, preto sú zhodné aj uhly BCK a ACK. Polpriamka CK je teda osou uhla ACB:

$$|\measuredangle ACK| = |\measuredangle BCK| = \frac{\gamma}{2}.$$

Keďže bod P leží na osi strany AC, je trojuholník ACP rovnoramenný a jeho vnútorné uhly pri základni AC majú veľkosť $\frac{1}{2}\gamma$, takže jeho vonkajší uhol APK pri vrchole P má veľkosť $\frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{2}\gamma = \gamma$.



Obr. 31.4.1

Rovnako z rovnoramenného trojuholníka *BCQ* odvodíme, že aj veľkosť uhla *BQK* je γ. Podľa vety o obvodových uhloch sú zhodné uhly *ABC* a *AKC*, teda uhol *AKC* (čiže uhol *AKP*) má veľkosť β a – celkom analogicky – uhol *BKQ* má veľkosť α.

V každom z trojuholníkov *AKP* a *BKQ* už poznáme veľkosti dvoch vnútorných uhlov (β, γ, resp. α, γ), takže vidíme, že zostávajúce uhly *KAP* a *KBQ* majú veľkostiα, resp. β.

Z predošlého vyplýva, že trojuholníky *AKP* a *KBQ* sú zhodné podľa vety *usu*, lebo majú zhodné strany *AK* a *KB* aj obe dvojice k nim priľahlých vnútorných uhlov.

K uvedenému postupu dodajme, že výpočet uhlov *KAP* a *KBQ* cez uhly *APK* a *BQK* možno obísť takto: zhodnosť uhlov *KAP* a *BAC* (resp. *KBQ* a *ABC*) vyplýva zo zhodnosti uhlov *KAB* a *PAC* (resp. *KBA* a *QBC*).

Komentár. Posledná úloha seminára pekne kombinuje vlastnosti uhlov a zhodnosť trojuholníkov, je tak dôstojným zakončením tohto geometrického stretnutia.

Domáca práca

Seminár 32: Geometria VIII – výpočtové úlohy

Ciele

Precvičiť komplexnejšie úlohy zahŕňajúce geometrické výpočty

Úlohy a riešenia

Úloha 32.1. [B-59-II-1] Kružnica $l(T;s)$ prechádza stredom kružnice $k(S;2cm)$. Kružnica $m(U;t)$ sa zvonka dotýka kružníc k a l, pričom $US \perp ST$. Polomery s a t vyjadrené v centimetroch sú celé čísla. Určte ich.

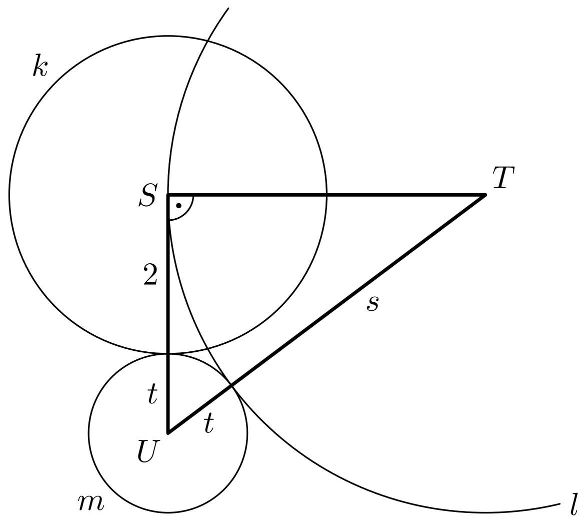
Riešenie*. Trojuholník UST je pravouhlý. Jeho prepona UT má dĺžku $s+t$, dĺžky odvesien sú $|US| = t+2$, $|ST| = s$ (obr. 32.1.1). Podľa Pytagorovej vety platí

$$(s+t)^2 = (t+2)^2 + s^2.$$

Úpravami postupne dostávame

$$\begin{aligned} s^2 + 2st + t^2 &= t^2 + 4t + 4 + s^2, \\ st &= 2t + 2, \\ t(s-2) &= 2. \end{aligned}$$

Čísla t a $s-2$ sú celé, preto t musí byť deliteľom čísla 2. Keďže t je kladné, sú len dve možnosti; ak $t = 1$ cm, tak $s = 4$ cm, a ak $t = 2$ cm, tak $s = 3$ cm.



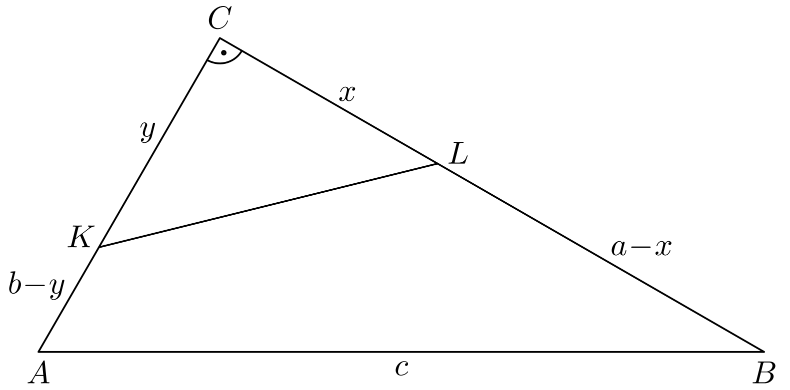
Obr. 32.1.1

Úloha 32.2. [B-66-S-2] Na odvesnách AC a BC daného pravouhlého trojuholníka ABC určte postupne body K a L tak, aby súčet

$$|AK|^2 + |KL|^2 + |LB|^2$$

nadobúdal najmenšiu možnú hodnotu a vyjadrite ju pomocou $c = |AB|$.

Riešenie*. V súlade s obr. 32.2.1 označme $x = |CL|$, $y = |CK|$, potom $|BL| = a - x$, a $|AK| = b - y$, pričom a, b sú postupne dĺžky odvesien BC, AC. Použitím Pytagorovej vety v pravouhlom trojuholníku KLC dostaneme $|KL|^2 = x^2 + y^2$, takže skúmaný súčet môžeme upraviť nasledujúcim



Obr. 32.2.1

spôsobom:

$$\begin{aligned} |AK|^2+|KL|^2+|LB|^2 &= (b-y)^2+x^2+y^2+(a-x)^2 = \\ &= 2x^2+2y^2-2ax-2by+a^2+b^2 = \\ &= 2\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+2\left(y-\frac{b}{2}\right)^2+\frac{a^2+b^2}{2} = \\ &= 2\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+2\left(y-\frac{b}{2}\right)^2+\frac{c^2}{2}. \end{aligned}$$

Vďaka nezápornosti druhých mocnín z toho vidíme, že skúmaný výraz nadobúda svoju najmenšiu hodnotu, konkrétne $\frac{1}{2}c$, práve vtedy, keď $x=\frac{1}{2}a$ a súčasne $y=\frac{1}{2}b$, teda práve vtedy, keď body K, L sú postupne stredmi odvesien AC, BC daného pravouhlého trojuholníka ABC.

Záver. Najmenšia možná hodnota skúmaného súčtu je rovná $\frac{1}{1}c^2$. Túto hodnotu dostaneme práve vtedy, keď body K, L budú postupne stredmi odvesien AC, BC daného pravouhlého trojuholníka.

Úloha 32.3. [B-63-S-3] Na priamke a, na ktorej leží strana BC trojuholníka ABC, sú dané body dotyku všetkých troch jemu pripísaných kružníc (body B a C nie sú známe). Nájdite na tejto priamke bod dotyku kružnice vpísanej.

V danom trojuholníku ABC označme X, Y, Z body dotyku vpísanej kružnice s jeho stranami a $x=|AY|=|AZ|$, $y=|BX|=|BZ|$, $z=|CX|=|CY|$ zhodné úseky dotyčníc k vpísanej kružnici z jednotlivých vrcholov (obr. 32.3.1). Ak označíme
zvyčajným spôsobom a, b, c dĺžky jednotlivých strán, platí

$$a=y+z, \quad b=z+x, \quad c=x+y.$$

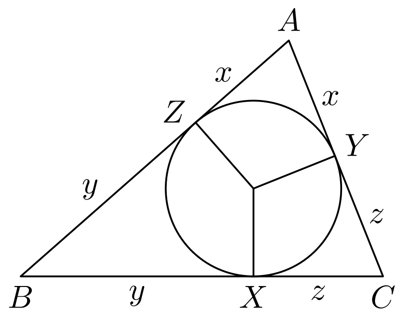
Sčítaním týchto troch rovníc dostaneme (pomocou s ako zvyčajne označujeme polovičný obvod trojuholníka)

$$2s=a+b+c=2x+2y+2z,$$

takže nám vyjde

$$x+y+z=s, \quad x=s-a, \quad y=s-b, \quad z=s-c. \tag{32.3.1}$$

Pozrime sa teraz na pripísanú kružnicu trojuholníku ABC, ktorá sa dotýka jeho strany BC v bode P a polpriamok AB a AC v bodoch R a Q (obr. 32.3.2). Zo zhodnosti úsekov príslušných dotyčníc



Obr. 32.3.1

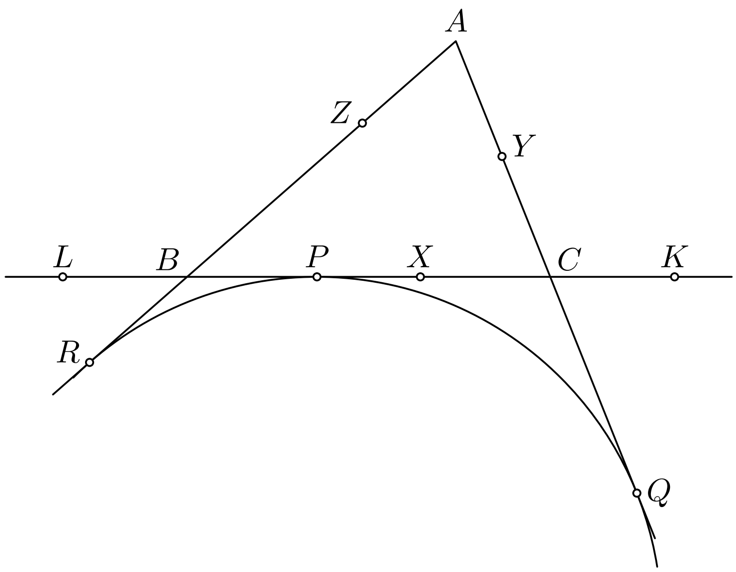
k tejto kružnici máme

$$|AR| = |AQ|, \quad |BR| = |BP|, \quad |CP| = |CQ|,$$

odkiaľ vychádza

$$\begin{aligned} 2|AR| = |AR| + |AQ| = |AB| + |BR| + |AC| + |CQ| = \\ = |AB| + |BP| + |AC| + |CP| = a + b + c = 2s, \end{aligned}$$

čiže $|AR| = |AQ| = s$. Z tejto rovnosti ale vyplýva, že $|BP| = |BR| = s - c$, čo je podľa 32.3.1 zároveň dĺžka z úsečky CX, teda $|BP| = |CX|$. To znamená, že body P a X sú súmerne združené podľa stredu úsečky BC. Analogicky by sme odvodili rovnosti $|BK| = s$ a $|CL| = s$ pre body dotyku K a L kružníc

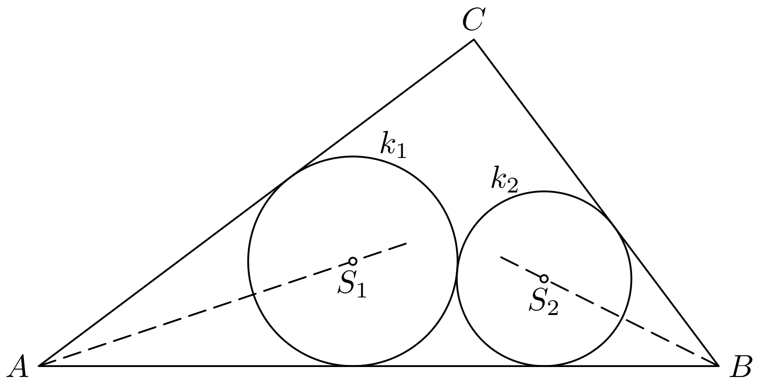


Obr. 32.3.2

pripísaných stranám CA a AB (obr. 32.3.2) trojuholníka ABC s priamkou a. Z týchto posledných rovností však vidíme, že $|BL| = s - a = |CK|$, teda aj body K a L sú súmerne združené podľa stredu úsečky BC. Body K a L sú známe (z troch daných bodov na priamke sú to tie dva krajné), poznáme teda aj stred S strany BC (je to stred úsečky KL) a bod X nájdeme ako obraz tretieho daného bodu P v stredovej súmernosti podľa stredu úsečky BC.

Úloha 32.4. [B-65-I-3] V pravouhlom trojuholníku ABC s preponou AB a odvesnami dĺžok $|AC| = 4$ cm a $|BC| = 3$ cm ležia navzájom sa dotýkajúce kružnice $k_1(S_1; r_1)$ a $k_2(S_2; r_2)$ tak, že k_1 sa dotýka strán AB a AC, zatiaľ čo k_2 sa dotýka strán AB a BC. Určte najmenšiu a najväčšiu možnú hodnotu polomeru r_2.

Riešenie*. Majme také dve kružnice, ktoré spĺňajú predpoklady úlohy (obr. 32.4.1). Zrejme stred S_1 leží na osi uhla BAC a stred S_2 na osi uhla ABC. Ďalej si uvedomme, že veľkosť polomeru r_1



Obr. 32.4.1

kružnice k_1 je priamo úmerná dĺžke úsečky AS_1 a podobne veľkosť r_2 priamo úmerná dĺžke úsečky BS_2. Keď zväčšíme polomer jednej z kružníc, musí sa nutne polomer druhej kružnice zmenšiť.

Kružnica k_2 nemôže mať polomer väčší ako najväčšia kružnica, ktorú možno do trojuholníka ABC vpísať. Takou kružnicou je zrejme kružnica k do trojuholníka ABC vpísaná. A naopak najmenší polomer bude mať kružnica k_2, ak zvolíme $k_1 = k$. (Že v oboch opísaných prípadoch pre $k_2 = k$ aj pre $k_1 = k$ existuje príslušná „vpísaná" kružnica k_1, resp. k_2, je vcelku zrejmé.)

Stačí teda vypočítať polomer r kružnice k do trojuholníka ABC vpísanej a polomer kružnice k_2, ktorá sa dotýka kružnice k a strán AB a BC daného trojuholníka.

Polomer r vpísanej kružnice vypočítame napríklad zo vzorca $2S_{ABC} = ro$, pričom S_{ABC} označuje obsah trojuholníka ABC a o jeho obvod.Obsah daného pravouhlého trojuholníka ABC s preponou AB je pri zvyčajnom označení dĺžok strán rovný $\frac{1}{2}ab$. Prepona v trojuholníku ABC má (v centimetroch) podľa Pytagorovej vety veľkosť $c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{3^2+4^2} = 5$. Maximálny polomer kružnice k_2 je teda

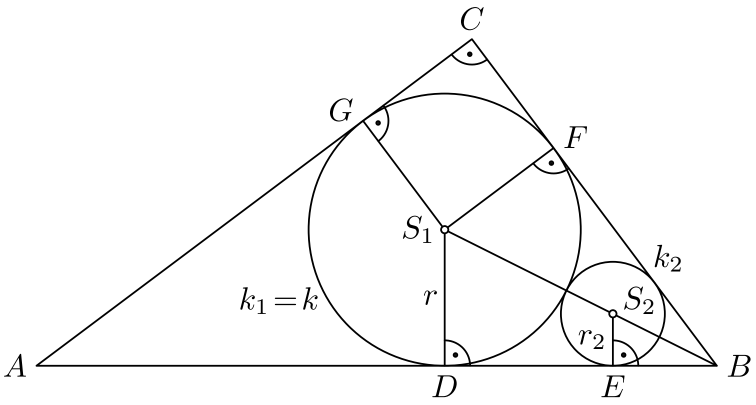
$$r = \frac{2S_{ABC}}{o} = \frac{ab}{a+b+c} = \frac{3 \cdot 4}{3+4+5} = 1.$$

Pre výpočet polomeru r_2 kružnice k_2, ktorá sa dotýka kružnice k a strán AB a BC, označme D a E body, v ktorých sa kružnice k a k_2 dotýkajú strany AB, a F, G dotykové body kružnice k postupne so stranami BC a AC (obr. 32.4.2). Keďže daný trojuholník je pravouhlý, je S_1FCG štvorec so stranou dĺžky $r = 1$, takže $|BF| = |BD| = 2$ a podľa Pytagorovej vety $|BS_1| = \sqrt{5}$. Z podobnosti pravouhlých trojuholníkov BES_2 a BDS_1 potom vyplýva

$$\frac{r_2}{|BS_2|} = \frac{r}{|BS_1|}, \quad \text{čiže} \quad \frac{r_2}{\sqrt{5}-r_2-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Po úprave tak pre hľadanú hodnotu neznámej r_2 dostaneme lineárnu rovnicu

$$r_2(\sqrt{5}+1) = \sqrt{5}-1,$$



Obr. 32.4.2

ktorú ešte zjednodušíme vynásobením $\sqrt{5}-1$. Zistíme tak, že najmenšia možná hodnota polomeru kružnice k_2 je rovná

$$r_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Úloha 32.5. [B-61-II-3] Pravouhlému trojuholníku ABC je vpísaná kružnica, ktorá sa dotýka prepony AB v bode K. Úsečku AK otočíme o $90°$ do polohy AP a úsečku BK otočíme o $90°$ do polohy BQ tak, aby body P, Q ležali v polrovine opačnej k polrovine ABC.

a) Dokážte, že obsahy trojuholníkov ABC a PQK sú rovnaké.

b) Dokážte, že obvod trojuholníka ABC nie je väčší ako obvod trojuholníka PQK.Kedy nastane rovnosť obvodov?

Riešenie*. a) Označme S stred a r polomer kružnice vpísanej trojuholníku ABC a L, M body dotyku tejto kružnice postupne so stranami BC, CA (obr. 32.5.1). Ak označíme $|AK| = x$, $|BK| = y$, tak $|AP| = |AM| = x$, $|KP| = x\sqrt{2}$, $|BQ| = |BL| = y$, $|KQ| = y\sqrt{2}$. Keďže oba uhly AKP, BKQ majú veľkosť $45°$, je trojuholník PQK pravouhlý, takže jeho obsah je

$$S_{PQK} = \frac{x\sqrt{2}y\sqrt{2}}{2} = xy.$$

Štvoruholník $SLCM$ je štvorec so stranou dĺžky r a $|AM| = x$, $|BL| = y$. Obsah trojuholníka ABC je rovný súčtu obsahov trojuholníkov ABS, BCS a CAS, teda

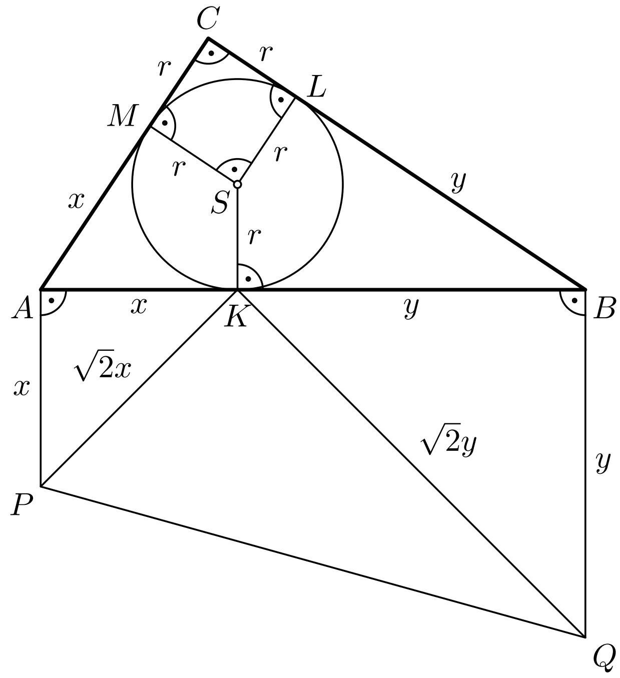
$$S_{ABC} = \frac{(x+y)r+(y+r)r+(x+r)r}{2} = (x+y+r)r.$$

Obsah trojuholníka ABC je zároveň rovný

$$S_{ABC} = \frac{|AC|\cdot|BC|}{2} = \frac{(x+r)(y+r)}{2} = \frac{xy}{2} + \frac{(x+y+r)r}{2} = \frac{xy}{2} + \frac{S_{ABC}}{2}.$$

Odtiaľ dostávame $S_{ABC} = xy$, čiže $S_{ABC} = S_{PQK}$, čo sme mali dokázať.

b) V trojuholníku ABC sú dĺžky strán $a = y+r$, $b = x+r$, $c = x+y$. Obvod trojuholníka ABC je $a+b+|AB|$, obvod trojuholníka PQK je $x\sqrt{2}+y\sqrt{2}+|PQ|$.



Obr. 32.5.1

Zrejme platí $|AB| \leq |PQ|$ ($|AB|$ je vzdialenosťou rovnobežiek AP, BQ, (obr. 32.5.1). Rovnosť nastane jedine v prípade $|AP| = |BQ|$, čiže $x = y$. Ešte dokážeme, že $a + b \leq x\sqrt{2} + y\sqrt{2}$, teda že $a + b \leq c\sqrt{2}$. Posledná nerovnosť je ekvivalentná s nerovnosťou, ktorú dostaneme jej umocnením na druhú, pretože obe jej strany sú kladné. Dostaneme tak $a^2 + b^2 + 2ab \leq 2c^2$. Keďže v pravouhlom trojuholníku ABC platí $a^2 + b^2 = c^2$, máme dokázať nerovnosť $2ab \leq a^2 + b^2$, ktorá je však ekvivalentná s nerovnosťou $0 \leq (a - b)^2$. Tá platí pre všetky reálne čísla a, b a rovnosť v nej nastane jedine pre $a = b$, t. j. $x = y$.

Celkovo vidíme, že obvod trojuholníka ABC je menší alebo rovný obsahu trojuholníka PQK a rovnosť nastane práve vtedy, keď je pravouhlý trojuholník ABC rovnoramenný.

Domáca práca

Keďže v nasledujúcom seminári je naplánované opakovanie, úlohou študentov bude si zbežne zopakovať, čomu sme sa posledných 9 mesiacov venovali. Zmyslom domácej práce nie je opätovné prepočítavanie všetkých príkladov, ale skôr získanie prehľadu a nadhľadu nad študovanými témami.

2.10 Jún

Seminár 33: Opakovanie I – pohľad späť na všetko, čo sme sa naučili

Ciele

Zopakovať kľúčové myšlienky, postupy a poznatky, ktoré v priebehu roka študenti získali.

Priebeh seminára

Študentov rozdelíme do 4 skupín a každej skupine pridelíme jednu zo študovaných oblastí (algebra, teória čísel, geometria, kombinatorika). Úlohou skupín bude vytvoriť myšlienkovú mapu, ktorá zhŕňa poznatky z priradenej oblasti – mala by obsahovať nie len konkrétne fakty (napr. „Súčet veľkostí protiľahlých vnútorných uhlov tetivového štvoruholníka je 180°.“), ale aj všeobecnejšie prístupy alebo metódy (napr. „Pozor na kreslenie náčrtu.“). Ak sa študenti ešte s myšlienkovými mapami nestretli, stručne im ich vysvetlíme, príp. ukážeme niekoľko príkladov. Na vypracovanie študentom necháme 20-30 minút. Po tomto čase jednotlivé skupiny prezentujú svoje výtvory a zvyšok osadenstva prispieva svojimi komentármi a otázkami. Na jednu skupinu si odporúčame vyhradiť aspoň 15 minút. Zaujímavé bude sledovať, či sa niektoré poznatky budú vyskytovať vo viacerých skupinách, prípadne či sa študenti budú odkazovať aj na inú oblasť, než akú spracovali.

Tento zvolený spôsob upevnenia a prepojenia poznatkov pokladáme za prínosný, pretože študentom dáva priestor premýšľať trochu iným spôsobom

Doplňujúce materiály

O myšlienkových mapách je možné nájsť viac na `https://www.mindmapping.com/mindmap.php` alebo `https://www.mindtools.com/pages/article/newISS_01.htm`, kde je tiež k dispozícii množstvo príkladov.

Seminár 34: Opakovanie II – samostatné riešenie úloh

Ciele

Samostatne overiť schopnosti študentov riešiť úlohy MO kategórie B (školské kolo).

Úvodný komentár

Posledné seminárne stretnutie študenti strávia riešením troch úloh školského kola MO kategórie B. Môžeme využiť školské kolo použité v roku, keď seminár prebieha, príp. využiť niektorý zo starších ročníkov. My sme zvolili ročník 51, ktorý sa nám skladbou úloh zdal veľmi vhodný. Vzhľadom na časové možnosti študentov nebudeme vyžadovať popísaný postup riešenia, necháme študentov len samostatne pracovať bez akéhokoľvek napovedania. Na riešenie študentom ponecháme 90 minút.

Vo zvyšnom čase so študentami prejdeme kľúčové myšlienky jednotlivých úloh, príp. ich vlastné nápady. Posledných niekoľko minút seminára je tiež vhodné venovať spätnej väzbe od študentov. Nezaškodí sa vrátiť k diskusii z prvého seminárneho stretnutia a zistiť, či seminár splnil očakávania, čo študenti na stretnutiach oceňovali a čo by, naopak, ešte privítali.

Úlohy a riešenia

Úloha 34.1. [B-51-S-1] Určte reálne číslo p tak, aby rovnica

$$x^2+4px+5p^2+6p-16=0$$

mala dva rôzne korene x_1, x_2 a aby súčet $x_1^2+x_2^2$ bol čo najmenší.

Riešenie*. Pre korene x_1, x_2 danej kvadratickej rovnice (pokiaľ existujú) platí podľa Viètových vzťahov rovnosti

$$x_1+x_2=-4p \quad \text{a} \quad x_1x_2=5p^2+6p-16,$$

z ktorých vypočítame skúmaný súčet

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (-4p)^2 - 2(5p^2 + 6p - 16) = \\ &= 6p^2 - 12p + 32 = 6(p-1)^2 + 26. \end{aligned}$$

Odtiaľ vyplýva nerovnosť $x_1^2 + x_2^2 = 26$, pritom rovnosť môže nastať, len keď $p = 1$. Zistíme preto, či pre $p = 1$ má daná rovnica skutočne dve rôzne riešenia. Ide o rovnicu $x^2 + 4x - 5 = 0$ s koreňmi $x_1 = -5$ a $x_2 = 1$. Tým je úloha vyriešená.

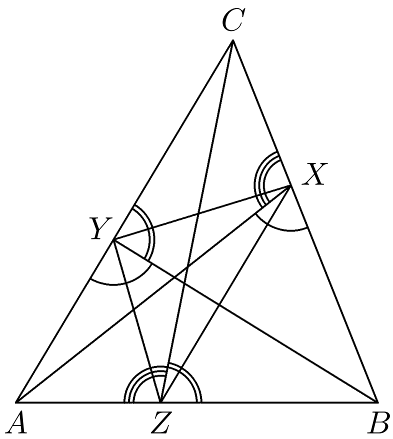
Dodajme, že väčšina riešiteľov pravdepodobne najprv zistí, pre ktoré p má daná rovnica dva rôzne korene. Pretože pre jej diskriminant D platí

$$D = (4p)^2 - 4(5p^2 + 6p - 16) = -4p^2 - 24p + 64 = -4(p+8)(p-2),$$

sú také p práve čísla z intervalu $(-8, 2)$.
Odpoveď. Minimálna hodnota súčtu $x_1^2 + x_2^2$ (rovná 26) zodpovedá jedinému číslu $p = 1$.

Úloha 34.2. [B-51-S-2] Vnútri strán BC, CA, AB daného ostrouhlého trojuholníka ABC sú po rade vybrané body X, Y a Z tak, že každému zo štvoruholníkov $ABXY$, $BCYZ$ a $CAZX$ sa dá opísať kružnica. Dokážte, že body X, Y, Z sú päty výšok trojuholníka ABC.

Riešenie*. V tetivovom štvoruholníku $ABXY$ označme $\varphi = |\measuredangle AXB| = |\measuredangle AYB|$ veľkosť oboch zhodných obvodových uhlov nad spoločnou tetivou AB (obr. 34.2.1). Podobne označme $\psi = |\measuredangle BZC| =$



Obr. 34.2.1

$= |\measuredangle BYC|$ a $\omega = |\measuredangle CXA| = |\measuredangle CZA|$ veľkosti zhodných obvodových uhlov nad tetivami BC a CA v tetivových štvoruholníkoch $BCYZ$ a $CAZX$. Keď zapíšeme postupne rovnosti pre každú z troch dvojíc vyznačených susedných uhlov pri vrcholoch X, Y a Z, dostaneme pre neznáme veľkosti φ, ψ a ω sústavu troch lineárnych rovníc

$$\begin{aligned} \varphi + \psi &= \pi, \\ \psi + \omega &= \pi, \\ \omega + \varphi &= \pi, \end{aligned}$$

ktorá má jediné riešenie $\varphi = \psi = \omega = \pi/2$, čo jednoducho zistíme napr. odčítaním ľubovoľných dvoch rovníc a dosadením. Tým je tvrdenie úlohy dokázané.

Poznámka. Ak sú naopak body X, Y a Z päty výšok trojuholníka ABC, sú štvoruholníky $ABXY$, $BCYZ$ a $CAZX$ tetivové podľa Tálesovej vety.

Úloha 34.3. [B-51-S-3] Na tabuli sú napísané čísla $1, 2, \ldots, 17$. Čísla postupne zotierame, a to tak, že z doposiaľ nezotretých čísel zvolíme ľubovoľné číslo k a zotrieme všetky tie čísla na tabuli, ktoré delia číslo $k + 17$. Dokážte, že opakovaním tejto procedúry sa nám nepodarí zotrieť všetky čísla.

Riešenie*. Pretože pre zvolené číslo k vždy platí $18 \leq k + 17 \leq 34$ a medzi číslami $18, 19, \ldots, 34$ má každé z čísel $12, 13, \ldots, 17$ iba jeden násobok (konkrétne dvojnásobok), ľubovoľné číslo $m \in \{12, 13, \ldots, 17\}$ zotrieme iba pri voľbe jediného čísla k (pri ktorom $k + 17 = 2m$). Napríklad číslo 15 zotrieme iba voľbou $k = 13$, číslo 13 iba voľbou $k = 9$. Na zotretie oboch čísel 15 a 13 teda musíme niekedy vybrať k= 13 a niekedy neskôr $k = 9$. Potom ale v okamihu výberu čísla $k = 9$ je už zotreté ako číslo 10 (zotreli sme ho najneskôr pri výbere $k = 13$), tak číslo 1 (to sme zotreli hneď pri prvom výbere). Číslo $k + 17$ je deliteľné deviatimi iba pri výberoch $k = 1$ a $k = 10$, pri žiadnom ďalšom výbere už preto nezotrieme číslo 9. Dokázali sme, že opakovaním danej procedúry nemožno zotrieť všetky tri čísla 15, 13 a 9, tým skôr nemožno zotrieť všetky čísla od 1 do 17.

Iné riešenie*. Pripusťme, že všetky čísla možno zotrieť po n výberoch čísla k (spojených so zotieraním všetkých deliteľov čísla $k + 17$) a že každým výberom sa niečo zotrie (inak je taký výber zbytočný). Posledné o. i. znamená, že každé číslo je vybrané najviac raz. Zrejme $n > 1$ a pre posledné vybrané číslo k_n musí platiť $k_n \mid (k_n + 17)$, t. j. $k_n = 17$ (možnosť $k_n = 1$ je vylúčená tým, že číslo 1 je zotreté hneď pri prvom výbere). Pred posledným výberom sú na tabuli len delitele čísla 34, teda okrem čísla 17 prípadne číslo 2. Keby tam číslo 2 nebolo, muselo by opäť platiť $k_{n-1} \mid (k_{n-1} + 17)$, čo už možné nie je. Preto nutne $kn - 1 = 2$. Taká voľba je ale zbytočná, pretože číslo $2 + 17$ je prvočíslo.

Záver

V diplomovej práci sme sa venovali tvorbe prezenčného seminára pre študentov prvého ročníka strednej školy so záujmom o matematiku, konkrétnejšie príprave podrobných osnov vrátane riešených príkladov. Seminár má za cieľ podporovať študentov pri príprave na matematické súťaže, najmä matematickú olympiádu. Po tom, čo sme seminár zasadili do kontextu matematického vzdelávania stredoškolákov a preskúmali sme úlohy matematickej olympiády kategórie C v posledných desiatich rokoch, sme jednotlivé stretnutia tematicky rozdelili a doplnili o semináre konzultačné a zamerané aj na inú súťaž než olympiáda, konkrétne *Náboj*.

Pri tvorbe obsahu sme sa snažili zakomponovať rôzne metódy výučby. Využili sme samostatnú i skupinovú prácu, matematické hry, tímové súťaže i prípravu obsahu seminára samotnými študentmi. To snáď prispelo k pestrosti seminára a rozvoju schopností a vedomostí študentov. Zároveň však pokladáme za dôležité poznamenať, že obsah a forma seminára nie sú jediným „správnym“ alebo najvhodnejším spôsobom práce so študentami a že prístupov k tejto úlohe je nespočetne mnoho. Taktiež nemá byť osnova seminára vnímaná ako nemenná dogma, ale skôr ako živý organizmus, ktorý sa väčšou alebo menšou mierou prispôsobuje potrebám konkrétnych študentov účastniacich sa konkrétneho seminára.

Výstup práce môže byť užitočný nielen vedúcim matematických krúžkov a seminárov, ale aj ostatným učiteľom matematiky. Tí v práci môžu nájsť náročnejšie úlohy než v bežných stredoškolských učebniciach matematiky a využiť ich v pravidelnej výuke pri práci s talentovanejšími študentmi v triede. Osnovy seminárov tiež poslúžia ako dobrý podporný materiál pre študentov, ktorí majú záujem pestovať svoje matematické zručnosti, jazyk práce a riešenia jednotlivých úloh sú totiž písané štýlom dobre zrozumiteľným aj pre stredoškolákov. Obsah seminára je okrem tejto práce uvedený aj na webovej stránke `seminar-mo.sk`, ktorý tak môže poslúžiť prípadným záujemcom.

Na záver už len dodám, že čas strávený vypracovaním diplomovej práce bol pre mňa veľmi prínosný, vďaka hľadaniu materiálov som objavila mnoho zaujímavých zdrojov úloh a metód, literatúry, aktivít a príkladov a som zvedavá, aký ohlas budú mať, až ich zakomponujem do svojej učiteľskej praxe.

Zoznam použitej literatúry

[ART13] T. Andreescu, M. Rolínek a J. Tkadlec. *106 Geometry Problems. From the AwesomeMath Summer Program*. 1st edition. Plano: XYZ Press, 2013.

[BB91] V. Burjan a Ľ. Burjanová. *Matematické hry*. 1. vydanie. Bratislava: Pytagoras, 1991. ISBN: 80-85409-00-3.

[BBC94] L. Boček, J. Bočková a J. Charvát. *Matematika pro gymnázia. Rovnice a nerovnice*. 3. dotisk. Praha: Prometheus, 1994. ISBN: 80-7196-154-X.

[BC99] I. Bušek a E. Calda. *Matematika pro gymnázia. Základní poznatky z matematiky*. 3. upravené vydání. Praha: Prometheus, 1999. ISBN: 80-7196-146-9.

[BH82] G. Bizám a J. Herczeg. *Zajímavá logika*. Bratislava: ALFA, 1982.

[BRKOS] PřF MU. *Seminár BRKOS*. URL: `http://brkos.math.muni.cz/` (cit. 2018-05-16).

[CZMO] Česká komise Matematické olympiády. *Oficiální stránka České komise Matematické olympiády*. URL: `http://www.matematickaolympiada.cz/` (cit. 2018-05-16).

[DMK] Matematický ústav AV ČR. *Digitální matematická knihovna*. URL: `https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/403423` (cit. 2018-05-16).

[DOS07] T. DOSKOČILOVÁ. “Rozbor řešení úloh matematické olympiády v Jihomoravském kraji [online]”. Diplomová práce. Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta, Brno, 2007. URL: `https://is.muni.cz/th/uzoi0/`.

[HKŠ04] J. Herman, R. Kučera a J. Šimša. *Seminář ze středoškolské matematiky*. 3. přepracované vydání. Brno: Masarykova univerzita, 2004. ISBN: 80-210-3528-5.

[HKŠ11] J. Herman, R. Kučera a J. Šimša. *Metody řešení matematických úloh I*. Brno: MUNI Press, 2011. ISBN: 978-80-210-8536-7.

[Hol10] D. A. Holton. *A First Step to Mathematical Olympiad Problems*. 1st edition. Danvers, USA: World Scientific, 2010. ISBN: 981-4273-87-2.

[Huv12] M. Huvarová. “Matematické soutěže pro žáky středních škol [online]”. Diplomová práce. Univerzita Palackého v Olomouci, Přírodovědecká fakulta, Olomouc, 2012. URL: `https://theses.cz/id/8f3xh5/`.

[iKS] Trojsten, MFF UK. *Seminár iKS*. URL: `http://iksko.org/` (cit. 2018-05-16).

[Kad96] J. Kadleček. *Geometrie v rovině a v prostoru. pro střední školy*. Praha: Prometheus, 1996. ISBN: 80-7196-017-9.

[KHP00] J. Kubát, D. Hrubý a J. Pilgr. *Sbírka úloh z matematiky pro střední školy. Maturitní minimum*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 2000. ISBN: 80-7196-030-6.

[KMS] Trojsten. *Seminár KMS*. URL: `https://kms.sk/` (cit. 2018-05-16).

[MaM] MFF UK. *M&M Korespondenční seminář a časopis MFF UK*. URL: https://mam.mff.cuni.cz/ (cit. 2018-05-16).

[Matematico10] J. Kaleta. *Matematico*. 2010. URL: http://yetty.github.io/Matematico/ (cit. 2018-05-16).

[Matematico12] R. Soják. *matematico online*. 2012. URL: http://matematico.cz/ (cit. 2018-05-16).

[MK] *Matematický klokan*. URL: http://matematickyklokan.net/ (cit. 2018-05-16).

[Naboj] *Matematický Náboj*. URL: https://math.naboj.org/ (cit. 2018-05-16).

[Pol14] J. Polák. *Didaktika matematiky. Jak učit matematiku zajímavě a užitečně*. 1. vydání. Plzeň: Fraus, 2014. ISBN: 978-80-7238-449-5.

[PraSe] MFF UK. *Seminár PraSe*. URL: https://mks.mff.cuni.cz/info/pravidla.php (cit. 2018-05-16).

[Sed61] J. Sedláček. *Co víme o přirozených číslech*. 3. vydání. Praha: Mladá fronta, 1961.

[SET] Set Enterprises. *Mathematics workbook: How to use SET® in the classroom*. URL: https://www.setgame.com/math-workbook (cit. 2018-05-16).

[SKMO] Slovenská komisia Matematickej olympiády. *Oficiálna stránka Slovenskej komisie Matematickej olympiády*. URL: https://skmo.sk/ (cit. 2018-05-16).

[STROM] Združenie STROM. *Seminár STROM*. URL: https://seminar.strom.sk/sk/prispevky/ (cit. 2018-05-16).

[Ště15] H. Štěpánková. "O záludnosti jedné úlohy z MO". In: *Matematika – fyzika – informatika* 24 (2015), s. 331–334.

[Švr14] J. Švrček. *Gradované řetězce úloh v práci s matematickými talenty*. 2014. ISBN: 9788024440187.

[Thi86] R. Thiele. *Matematické důkazy*. 2. nezměněné vydání. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1986.

[Zei07] P. Zeitz. *The art and craft of problem solving*. San Francisco: Wiley, 2007. ISBN: 0-471-13571-2.