Geometria perspektívnych trojuholníkov

Dušan Vallo

Nitra 2005

Medzi geometry

„I přijdeme k jinému auditorium, nad nimž

Ondeiz agewmetrhtoz eisitw

napsáno bylo, a já zastavě se,
*„**Budem-liž tam moci**“ řekl sem, „**ponevadž tam geometry toliko pouštějí** ?“*
*„**Pojď předce**“, řekl Všudybud.*

I vejdem: a aj, tu jich množství, kteříž čáry, háky, kříže, kola, kvadráty, puňkty psali, každý sobě sám tiše…“

Ján Ámos Komenský
Labyrint světa a ráj srdce
Kapitola XI
Poutník přišel mezi filozofy

Autor: RNDr. Dušan Vallo, PhD.

Recenzenti: Prof. RNDr. Ondrej Šedivý, CSc.
Prof. RNDr. Zoltán Zalabai, CSc.

Vydané v júni 2005 Fakultou prírodných vied Univerzity Konštantína Filozofa v Nitre s podporou grantu projektu

KEGA 3 / 115 / 103
Tvorba nových učebných plánov a osnov v učiteľstve akademických predmetov - matematika

Vydavateľ: Fakulta prírodných vied
Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre

ISBN: 80-8050-825-9

Je mi milou povinnosťou poďakovať sa recenzentom prof. RNDr. Ondrejovi Šedivému, CSc. a prof. RNDr. Zoltánovi Zalabaiovi, CSc. za cenné pripomienky a návrhy, ktoré pomohli zlepšiť pôvodné znenie textu.

Moja vďaka patrí aj ostatným kolegom z Katedry matematiky FPV UKF v Nitre za ich všestrannú pomoc a podporu.

Autor

Úvod

Mám rád geometriu. A so všetkým, čo k nej patrí.
Nie je jednoduchá a nie je ani zložitá, ak ju človek raz pochopí. Udivuje prekvapivo jednoduchou krásou svojich tvrdení. Ponúka radosť a pocit víťazstva nad riešením úlohy. Prináša starosť a sklamanie, ak sa človek beznádejne stráca v tom, čo je na prvý, druhý, tretí, ... n-tý pohľad „jasné a zrejmé“.

Napísať úvod je posledná zastávka v koncipovaní rukopisu. Úvod by mal čitateľovi naznačiť cieľ a účel napísania knižky. Píše sa, z pochopiteľných príčin, vždy v čase, keď kapitoly už majú svoju štruktúru i obsah. Nie je dôvod znovu písať o niečom, čo už bolo napísané. Prečo nenechať knižku, nech hovorí sama za seba ?

Myslím, že geometriu treba „zažiť“. Ponúkam Vám možnosť v podobe tejto knižky.

Autor

Označenie

Ak budeme uvažovať o trojuholníku *ABC*, označíme

ABC	trojuholník *ABC*
A, B, C	vrcholy trojuholníka *ABC*
AB	strana *AB* trojuholníka *ABC* (priamka *AB*)
$\lvert AB \rvert$	dĺžka strany *AB* (resp. vzdialenosť bodov *A, B*)
a , b , g	vnútorné uhly ∠*CAB*, ∠*ABC*, ∠*BCA* (resp. ich veľkosť)
a´, b´,g ´	vonkajšie uhly s vrcholmi *A, B, C* (resp. ich veľkosť)
a, b, c	strany oproti vrcholom *A, B, C* (resp. ich dĺžky)
v_a , v_b , v_c	výšky na strany *a, b, c*
t_a , t_b , t_c	ťažnice na strany *a, b, c*
o_a , o_b , o_g	osi vnútorných uhlov ∠*CAB*, ∠*ABC*, ∠*BCA*
o'_a , o'_b , o'_g	osi vonkajších uhlov pri vrcholoch *A, B, C*
P_a , P_b , P_c	päty výšok v_a, v_b, v_c
S_a , S_b , S_c	stredy strán *a, b, c*
k	kružnica opísaná trojuholníku *ABC*
S	stred opísanej kružnice trojuholníku *ABC*
r	polomer opísanej kružnice trojuholníku *ABC*
V	ortocentrum
T	ťažisko
l	kružnica vpísaná do trojuholníka *ABC*
O	stred vpísanej kružnice do trojuholníka *ABC*
r	polomer vpísanej kružnice do trojuholníka *ABC*
l_a , l_b , l_c	pripísané kružnice trojuholníku *ABC* oproti stranám *a, b, c*
O_a , O_b , O_c	stredy pripísaných kružníc trojuholníku oproti stranám *a, b, c*
r_a , r_b , r_c	polomery pripísaných kružníc trojuholníku oproti stranám *a, b, c*
s	semiperimeter trojuholníka *ABC*, $s = (a + b + c)/2$
S_{ABC}	obsah trojuholníka *ABC*
s_a , s_b , s_c	symediány trojuholníka *ABC*

OBSAH

1 ZÁKLADNÉ POJMY A VETY

1.1 Sínusová a kosínusová veta

Budeme pracovať najmä s trojuholníkmi, preto dokážeme základné trigonometrické vety.

Veta (sínusová).

Nech *ABC* je ľubovoľný trojuholník. Pre jeho prvky platí

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2r$$

Dôkaz. Pre obsah trojuholníka ABC platí

$$2.S_{ABC}=ab\sin\gamma=bc\sin\alpha=ac\sin\beta=\frac{abc}{2r}$$

Odtiaľ

$$ab\sin\gamma=bc\sin\alpha \quad\Leftrightarrow\quad \frac{c}{\sin\gamma}=\frac{a}{\sin\alpha}$$

$$\| \qquad\qquad \|$$

$$bc\sin\alpha=ac\sin\beta \quad\Leftrightarrow\quad \frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}$$

$$\| \qquad\qquad \|$$

$$ac\sin\beta=\frac{abc}{2r} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{b}{\sin\beta}=2.r$$

Tým je dôkaz ukončený. ∎

Kvôli jednoduchšiemu a prehľadnejšiemu zápisu - ak aplikujeme sínusovu vetu na vybrané prvky trojuholníka ABC, symbolicky zapíšeme

Podľa $\triangle ABC \Rightarrow$

$$\frac{|AB|}{\sin\gamma}=\frac{|BC|}{\sin\alpha}=\frac{|AC|}{\sin\beta}=2r$$

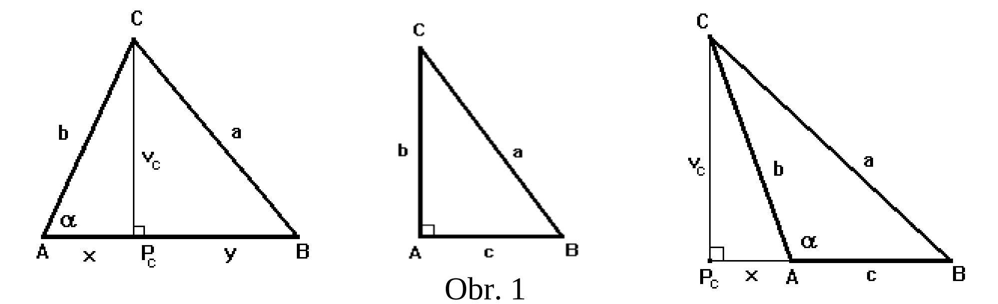
1 Základné pojmy a vety

Veta (kosínusová).

Nech *ABC* je ľubovoľný trojuholník. Pre jeho prvky platí

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2cb.\cos\alpha$$

Dôkaz 1. A) Nech *ABC* je ostrouhlý trojuholník (obr.1, vľavo).



Obr. 1

Podľa Pytagorovej vety platí

$$v_c^2 + x^2 = b^2,\ v_c^2 + y^2 = a^2, \text{ kde } x = |AP_c|,\ y = |P_cB|.$$

Naviac, $\cos\alpha = \dfrac{x}{b}$.

Eliminovaním v_c a dosadením za premenné x, y dostaneme

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2cb.\cos\alpha\ .$$

B) Nech je trojuholník *ABC* pravouhlý s pravým uhlom vo vrchole *A.* Potom $\cos\alpha = \cos 90^{\circ} = 0$ a vzťah triviálne platí s odvolaním sa na Pytagorovu vetu.

C) Nech je trojuholník *ABC* tupouhlý s tupým uhlom vo vrchole *A.* Opäť označíme $x = |AP_c|$. Čitateľovi je iste jasné, že platia nasledovné rovnice

$$\cos\alpha = -\frac{x}{b}, \qquad v_c^2 + x^2 = b^2 \qquad \text{a súčasne} \qquad v_c^2 + (x+c)^2 = a^2.$$

Odtiaľ vyplýva dokazované tvrdenie. ∎

Dôkaz 2. Veľmi elegantne možno dokázať vetu pomocou aparátu analytickej geometrie. Ak v trojuholníku *ABC* označíme $\vec{a} = \overrightarrow{BC}, \vec{b} = \overrightarrow{AC}, \vec{c} = \overrightarrow{AB}$, platí $\vec{a} = \vec{b} - \vec{c}$ a počítame

$$a^2 = \vec{a}.\vec{a} = (\vec{b} - \vec{c}).(\vec{b} - \vec{c}) = \vec{b}.\vec{b} - 2\vec{b}\vec{c} + \vec{c}.\vec{c} = b^2 - 2bc.\cos\alpha + c^2$$

∎

Je vhodné upozorniť čitateľa na *cyklickú zámenu* prvkov trojuholníka. Ak vymeníme odpovedajúce prvky podľa schémy

$a \to b \to c \to a$ (resp. $A \to B \to C \to A$) a $a \to b \to g \to a$,

sme schopní okamžite napísať odpovedajúce vzťahy pre dĺžky zvyšných strán

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos b$$

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ba.\cos g$$

Tento šikovný spôsob odvodenia vzťahov budeme často používať.

1.2 Perspektívne trojuholníky

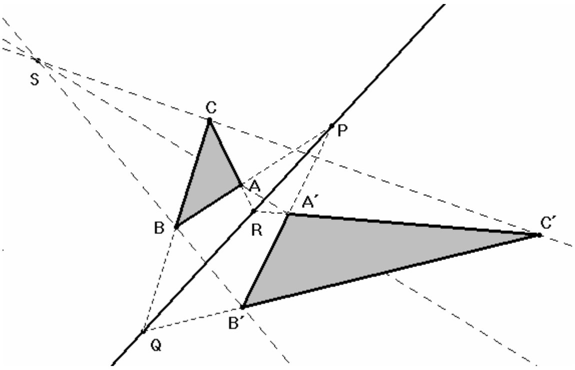
Čitateľovi vysvetlíme, čo budeme chápať pod pojmom „ ***perspektívne trojuholníky***“.

Samotný pojem *perspektívnosti* je charakteristický pre projektívnu geometriu. Jednou z najdôležitejších viet tejto geometrie je veta *Desarquesova* (čítame Desargova). Uvedieme bez dôkazu.

Veta (Desarquesova).

Nech sú v projektívnom priestore dané dva trojuholníky *ABC* a *A´B´C´* také, že priamky *AA´*, *BB´*, *CC´* prechádzajú jedným bodom *S*. Potom priesečníky priamok *AB, A´B´; BC, B´C´* a *AC, A´C´* sú kolineárne (ležia na jednej priamke **– Desarquesovej priamke).**

O trojuholníkoch *ABC* a *A´B´C´* sa niekedy hovorí, že sú *perspektívne* podľa bodu *S*. Čitateľ si iste všimol, že Desarquesova veta rieši problém perspektívnych trojuholníkov veľmi všeobecne – bez ohľadu na dimenziu priestoru a metrické vzťahy.



Obr.2

Napriek tomu, že naším cieľom je pracovať a skúmať útvary v euklidovskej rovine $\boldsymbol{E_2}$, preberieme terminológiu kvôli jednoduchšiemu vyjadrovaniu**.**

Ak povieme, že trojuholníky *ABC, A´B´C´* sú *perspektívne,* myslíme tým, že priamky *AA´*, *BB´*, *CC´* prechádzajú jedným bodom.

Kolineárnosť odpovedajúcich si priesečníkov $AB \cap A'B'$, $BC \cap B'C'$, $AC \cap A'C'$ nás nebude zaujímať.

1.3 Deliaci pomer usporiadanej trojice kolineárnych bodov

Dôležitým pojmom je ***deliaci pomer usporiadanej trojice kolineárnych bodov*** (v ďalšom texte len deliaci pomer).

Definícia. Nech *A, B, C´* sú tri navzájom rôzne kolineárne body. Deliacim pomerom usporiadanej trojice bodov *A,B, C´* na priamke *AB* nazývame reálne číslo $(ABC') = e\dfrac{|AC'|}{|BC'|}$**, kde** $B \neq C'$

e **= 1, ak bod *C´* je vonkajším bodom úsečky *AB* (alebo *C´* = *A*);**

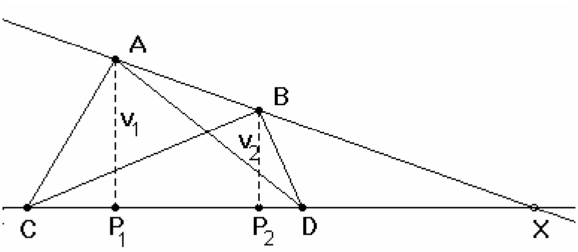
e **= -1, ak bod *C´* je vnútorným bodom úsečky *AB*.**

Ako konkrétny príklad deliaceho pomeru uvedieme $(ABS_c) = (-1)$, kde S_c je stred strany *AB* trojuholníka *ABC* .

Vzhľadom k tomu, že sme čitateľa upozornili na existenciu projektívnej roviny, je rozumné preskúmať deliaci pomer aj z iného hľadiska. Úvahy budú neskôr prospešné.

Nech sú dané dva navzájom rôzne body A, B euklidovskej roviny ležiace v jednej polrovine určenej danou priamkou CD a nech X je priesečník priamky CD s priamkou AB. Dokážeme, že platí

$$S_{CDA} : S_{CDB} = (ABX) \text{ !}$$



Obr. 2

Pre obsahy platí

$$S_{CDA} = \frac{1}{2}.|CD|.v_1$$

$$S_{CDB} = \frac{1}{2}.|CD|.v_2,$$ kde v_1 a v_2 sú výšky trojuholníkov CDA a CDB.

Päty výšok v_1, v_2 označíme P_1, P_2. Trojuholníky AP_1X , BP_2X sú podobné podľa vety ***UU*** a platí $\dfrac{v_1}{v_2} = \dfrac{|AX|}{|BX|}$.

Odtiaľ $S_{CDA} : S_{CDB} = (ABX)$ a dôkaz je hotový. W

Zaujímavejší je však dôsledok .

Ak položíme $v_1 = v_2$, triviálne platí $S_{CDA} : S_{CDB} = 1$.

Žiaľ, ak sú priamky AB, CD rovnobežné, bod X ako ich priesečník neexistuje a záver v tvare $S_{CDA} : S_{CDB} = (ABX)$ v euklidovskej rovine nemá zmysel**!**

Zmysel má však v *rozšírenej euklidovskej rovine*, kde je každá priamka doplnená o nevlastný bod U^{∞} (spoločný bod navzájom rovnobežných priamok) a naviac pôvodná euklidovská rovina je doplnená o nevlastnú priamku u^{∞} (množinu všetkých nevlastných bodov rozšírených euklidovských priamok). Rozšírená euklidovská rovina je jedným z modelov projektívnej roviny.

Na základe vyššie uvedeného môžeme intuitívne rozšíriť definíciu deliaceho pomeru pre body A, B, U^{∞}, kde U^{∞} je nevlastným bodom priamky AB. Definujeme $(AB\,U^{\infty}) = 1$, $(A\,U^{\infty}B) = 0$, $(U^{\infty}AB) = \infty$.

* Čitateľ si iste premyslí geometrický význam jednotlivých deliacich pomerov.

1.4 Cevova veta a veta k nej obrátená

V tejto chvíli máme pripravené všetko potrebné k tomu, aby sme mohli uviesť vety, ktoré efektívne riešia problém perspektívnosti trojuholníkov v euklidovskej rovine $\boldsymbol{E_2}$.

V roku 1678 publikoval taliansky matematik G. Ceva (čítame Čeva) v knihe *De lineis rectis* tvrdenie dnes známe ako *Cevova veta.*

Veta (Cevova).

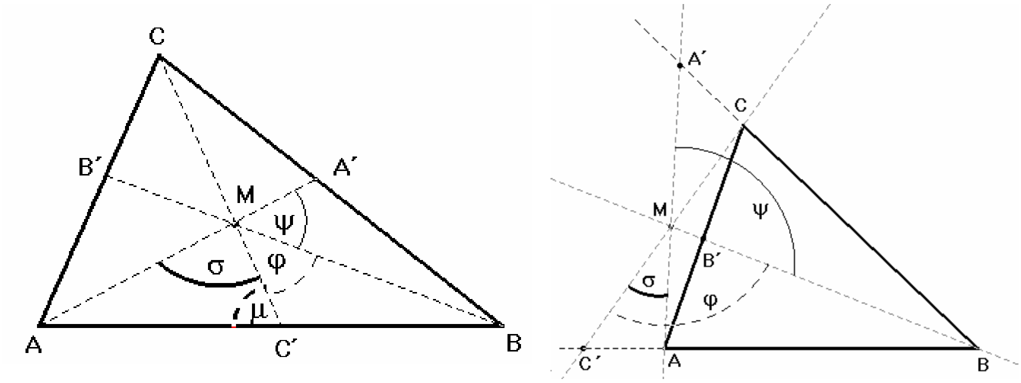
Nech *ABC* je ľubovoľný trojuholník, *M* je bod jeho roviny, ktorý neleží na žiadnej z priamok *BC, AC, AB*. Ak priamky *AM, BM, CM* pretínajú priamky *BC, AC, AB* postupne v bodoch *A´, B´, C´*, potom platí

$$(ABC').(BCA').(CAB') = (-1).$$

Dôkaz. **A**) Nech bod M je vnútorným bodom trojuholníka ABC. Označíme $\angle AC'M = m$, $\angle AMC' = s$, $\angle C'MB = j$, $\angle BMA' = y$ (obr. 3, vľavo).

Podľa **#** AMC' **]** dostaneme

$$\frac{|AC'|}{\sin s} = \frac{|AM|}{\sin m}$$



Obr. 3

Analogicky #*BMC´*]

$$\frac{|BC'|}{\sin j} = \frac{|BM|}{\sin\left(180^{\circ} - m\right)}$$

Z oboch výrazov odvodíme vzťah pre deliaci pomer (*ABC´*) v tvare

$$\left(ABC'\right) = -\frac{|AM|}{|BM|} \cdot \frac{\sin s}{\sin j}$$

Ďalšie dva vzťahy pre príslušné deliace pomery je možné odvodiť tým istým postupom

a platí $\left(BCA'\right) = -\frac{|BM|}{|CM|} \cdot \frac{\sin y}{\sin s}$ a $\left(CAB'\right) = -\frac{|CM|}{|AM|} \cdot \frac{\sin j}{\sin y}$.

Je zrejmé, že $\left(ABC'\right).\left(BCA'\right).\left(CAB'\right) = \left(-1\right)$.

B) * Dôkaz prípadu, keď bod *M* nie je bodom trojuholníka *ABC,* necháme záujmu čitateľa (ide o analogický postup ako v prípade A).
Ako návod iste poslúži obr. 3, vpravo. W

Vzťah pre (*ABC´*) možno slovne formulovať :

1 Základné pojmy a vety

Deliaci pomer usporiadanej trojice bodov *A, B, C´* na priamke *AB* sa rovná súčinu pomeru dĺžok priľahlých strán a pomeru sínusov veľkostí uhlov ležiacim oproti odpovedajúcim úsekom.

$$\left(ABC'\right)=\pm\frac{|AM|}{|BM|}\cdot\frac{\sin\left(\angle AMC'\right)}{\sin\left(\angle BMC'\right)}$$

Ak pristúpime k istému „limitnému prechodu“ a na miesto *M* dáme *C,* platí

$$\left(ABC'\right)=\pm\frac{|AC|}{|BC|}\cdot\frac{\sin\left(\angle ACC'\right)}{\sin\left(\angle BCC'\right)}.$$

Po rozšírení zlomku hodnotou $\frac{1}{2}\cdot|CM|$, dostaneme zaujímavý výsledok

$$\left(ABC'\right)=\pm\frac{S_{ACM}}{S_{BCM}}.$$

Hodnota znamienka pre $\left(ABC'\right)$ závisí od polohy bodu *M* (resp. orientácie trojuholníkov *ACM* , *BCM* v rovine)

*Odporúčame čitateľovi, aby si tento posledný vzťah zapamätal, pretože bude užitočný v súvislosti s dôkazom istej vlastnosti ťažiska trojuholníka.

Pre naše potreby bude dôležitá obrátená Cevova veta, ktorá znie :

Veta (obrátená Cevova veta).

Pre každý trojuholník *ABC* a body *A´, B´, C´*, ktoré ležia po poradí na priamkach *BC, AC, AB* a sú rôzne od vrcholov trojuholníka, platí:

Ak $$\left(ABC'\right).\left(BCA'\right).\left(CAB'\right)=\left(\text{-}1\right)$$

a priamky *AA´, BB´* sa pretínajú v bode *M*, prechádza týmto bodom aj priamka *CC´*.

Dôkaz. Nech priamka *CM* pretína priamku v bode C_1. Podľa Cevovej vety platí

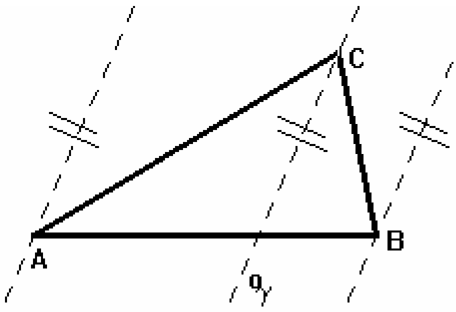
$$(ABC_1).(BCA').(CAB') = (-1)$$

a súčasne podľa predpokladu vety, ktorú dokazujeme tiež platí rovnica

$$(ABC').(BCA').(CAB') = (-1)\,.$$

Hneď je zrejmé, že body C_1 a *C´* sú totožné a priamka *CC´* prechádza bodom *M,* ako sme mali dokázať. W

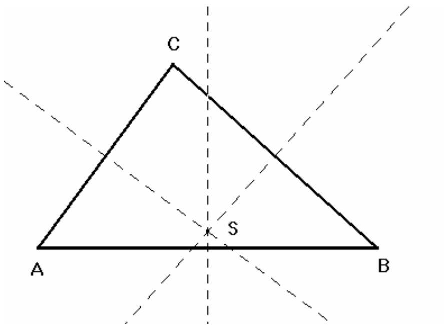
Priamky *AA´*, *BB´*, *CC´* sa nazývajú aj ***Cevovými priamkami.***



Obr. 4

* Je rozumné, aby si čitateľ starostlivo premyslel znenie obrátenej Cevovej vety, zvlášť predpoklady.
Kvôli usmerneniu myšlienok prikladáme obr. 4.

Súčasne musíme čitateľa upozorniť na jeden dôležitý moment.
Vieme, že osi strán trojuholníka sa pretínajú v strede kružnice opísanej trojuholníku.
Snaha dokázať takéto tvrdenie



Obr. 5

pomocou Cevovej vety vedie k hrubému omylu, pretože osi strán nemusia byť Cevovými priamkami. Ide o varovný príklad, ktorý nás učí nielen opatrne pracovať s predpokladmi vety, ale jasne vymedzuje pole jej pôsobnosti (obr. 5).

1.5 Odkazy na internetové adresy

1. Sine, Cosine and Ptolemy ´s Theorem

[online], [citované 25. október 2004]. Dostupné na Internete

http://www.cut-the-knot.com/proofs/sine_cosine.shtml

2. Ceva´s Theorem

[online], [citované 25. október 2004]. Dostupné na Internete

http://www.cut-the-knot.org/Generalization/ceva.shtml

3. Ceva´s theorem

[online], [citované 25. október 2004]. Dostupné na Internete

http://www.mathwords.com/c/cevas_theorem.htm

4. Generalizations Of Ceva Theorem

[online], [citované 25. október 2004]. Dostupné na Internete

http://www.planetmath.org/encyclopedia/GeneralizationsOfCevaTheorem.html

2 KLASICKÉ BODY TROJUHOLNÍKA

2.1 Ťažisko trojuholníka a niekoľko tvrdení

Budeme uvažovať o trojuholníku *ABC* v tom označení, ako sme uviedli. Pýtame sa: **Sú trojuholníky *ABC*, $S_aS_bS_c$ perspektívne?**

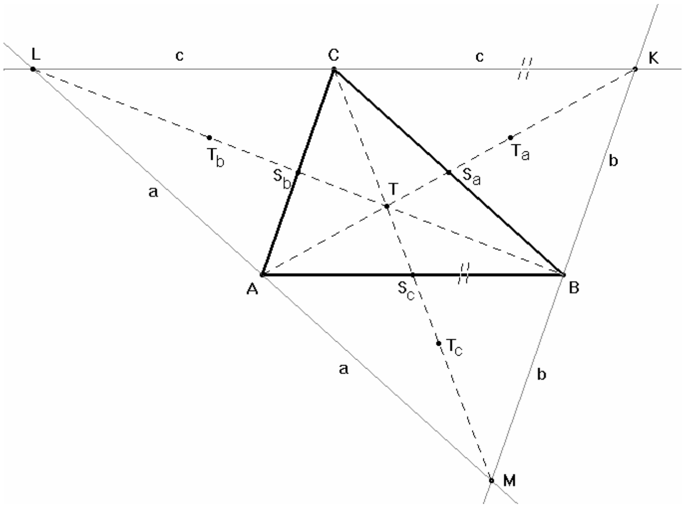
Skúmajme deliace pomery. Platí

$$\left(ABS_c\right)=\left(-1\right),$$

$$\left(BCS_a\right)=\left(-1\right),$$

$$\left(CAS_b\right)=\left(-1\right),$$

pretože body S_a, S_b, S_c sú stredy strán *BC, AC, AB.*



Obr. 6

Výsledný súčin je

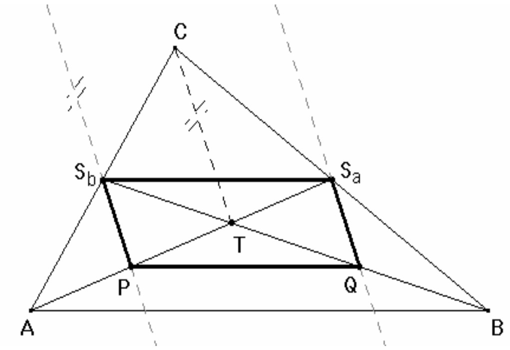
$$\left(ABS_c\right).\left(BCS_a\right).\left(CAS_b\right)=\left(-1\right)$$ W

Záver**. Trojuholníky *ABC*, $S_aS_bS_c$ sú perspektívne podľa bodu *T.***

Bod ***T*** sa nazýva **ťažisko** trojuholníka *ABC.*

V predchádzajúcich riadkoch sme v podstate dokázali existenciu najznámejšieho bodu trojuholníka. Dôkaz je veľmi triviálny. Dokonca tak, že mu chýba akási „geometrická elegancia“, za ktorou sa môžu skrývať dôležité poznatky. Ukážeme na inom type dôkazu, čo myslíme pod pojmom „geometrická elegancia“.

Nech je daný trojuholník *ABC* a nech sa ťažnice t_a , t_b pretnú v bode *T*. Stredmi S_a , S_b strán *BC, CA* zostrojíme rovnobežky s úsečkou *CT*, ktoré postupne pretnú ťažnice t_a, t_b v bodoch P, Q (obr. 7). Štvoruholník PQS_aS_b je rovnobežníkom s navzájom rozpoľujúcimi sa uhlopriečkami PS_a, QS_b.



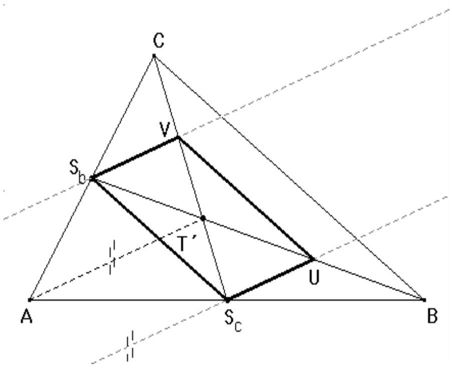
Obr. 7

Bod P je stredom úsečky AT, pretože úsečka PS_b je podľa konštrukcie strednou priečkou trojuholníka CTA. Analogicky bod Q je stredom úsečky BT.

To znamená, že priesečník T ťažníc t_a, t_b rozdeľuje obe ťažnice v pomere $|AT|:|TS_a| = |BT|:|TS_b| = 2:1$.

Nech sa ťažnice t_b, t_c pretnú v bode T'. Stredmi S_c, S_b strán AB, CA zostrojíme rovnobežky s úsečkou AT', ktoré postupne pretnú ťažnice t_b, t_c v bodoch U, V (obr. 8). Z rovnakých dôvodov opäť máme

$|BT'|:|T'S_b| = |CT'|:|T'S_c| = 2:1$



Obr. 8

Potom platí $|BT|:|TS_b| = 2:1 = |BT'|:|T'S_b|$, z toho vyplýva totožnosť bodov $T \equiv T'$, ako sme mali dokázať. W

Ako vidíme, tento typ dôkazu je „bohatší“ na nové informácie. Dokázali sme charakteristickú vlastnosť ťažiska T.

Naviac, ak si spomenieme na súvislosť medzi obsahmi odpovedajúcich si trojuholníkov a deliaceho pomeru, tak odvodíme

$$\boxed{S_{ABT} = S_{BCT} = S_{CAT} = \frac{1}{3} S_{ABC}}$$

* Čitateľ si iste premyslí pravdivosť napísaných rovností.

Ukazuje sa teda, že Cevova veta môže byť niekedy na škodu veci. Niekedy sa bez jej dôsledkov zase nezaobídeme. Bolo by teda chybou vybrať si jednostrannú cestu. V záujme plnohodnotnejšieho štúdia geometrie perspektívnych trojuholníkov budeme naše prístupy k jednotlivým problémom podľa potreby kombinovať.

Pokračujme v rozvíjaní úvah o ťažisku!

Ak zostrojíme rovnobežky postupne so stranami *BC, AC, AB,* ktoré prechádzajú po rade vrcholmi *A, B, C* trojuholníka *ABC* tak, ako je naznačené na obr. 6, zostrojíme trojuholník s vrcholmi *K, L, M.* Trojuholníky *ABC, KLM* sú tiež perspektívne podľa ťažiska *T* trojuholníka *ABC*, pretože štvoruholník *ABKC* je rovnobežníkom s navzájom rozpoľujúcimi sa uhlopriečkami.

Poznámka. Podľa ťažiska T budú následne perspektívne aj trojuholníky ABC, $T_aT_bT_c$ *, kde* T_a *,* T_b*,* T_c *sú ťažiská trojuholníkov BCK, CAL, ABM.*

Okrem iného, obr. 6 je priamo ukážkový, pokiaľ ide obsahy opísaných a vpísaných trojuholníkov.

Definícia. Hovoríme, že trojuholník *A´B´C´* je *vpísaný* trojuholníku *ABC*, ak vrcholy *A´, B´, C´* ležia na stranách daného trojuholníka *ABC.*

Hovoríme, že trojuholník *ABC* je *opísaný* trojuholníku *A´B´C´*, ak strany trojuholníka *ABC* prechádzajú vrcholmi *A´, B´, C´.*

Pre obsahy vpísaných a opísaných trojuholníkov platí vzťah

$$\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \frac{l\,n\,h - 1}{(l-1).(n-1).(h-1)},$$

kde $(BCA') = l, (CAB') = n, (ABC') = h$.

Na obr. 6 je trojuholník *KLM* opísaný trojuholníku *ABC*. Podľa uvedeného vzťahu platí

$$\frac{S_{ABC}}{S_{KLM}} = \frac{(-1)^3 - 1}{((-1)-1)^3} = \frac{1}{4},$$

čo je zrejmé na prvý pohľad.

* Akú hodnotu má pomer $\frac{S_{S_a S_b S_c}}{S_{ABC}}$?

* Naviac, nemohli sme dôkaz o perspektívnosti trojuholníkov *KLM, ABC* zjednodušiť úvahou, že strany trojuholníka *ABC* sú strednými priečkami trojuholníka *KLM* ?

Odpovede na posledné dve otázky nájde čitateľ iste sám.

Iné úvahy!

Zostrojíme trojuholník *KLM* nasledovne:

Nech priamka *p* je obrazom priamky *AB* v stredovej súmernosti so stredom v bode *C*, priamka *q* je obrazom priamky *BC* v stredovej súmernosti so stredom v bode *A*, priamka *u* je obrazom priamky *AC* v stredovej súmernosti so stredom v bode *B*. Ich prieniky označme $K = p \cap u$, $L = p \cap q$, $M = q \cap u$.

Sú trojuholníky *ABC* a *KLM* perspektívne podľa ťažiska *T* trojuholníka *ABC*?

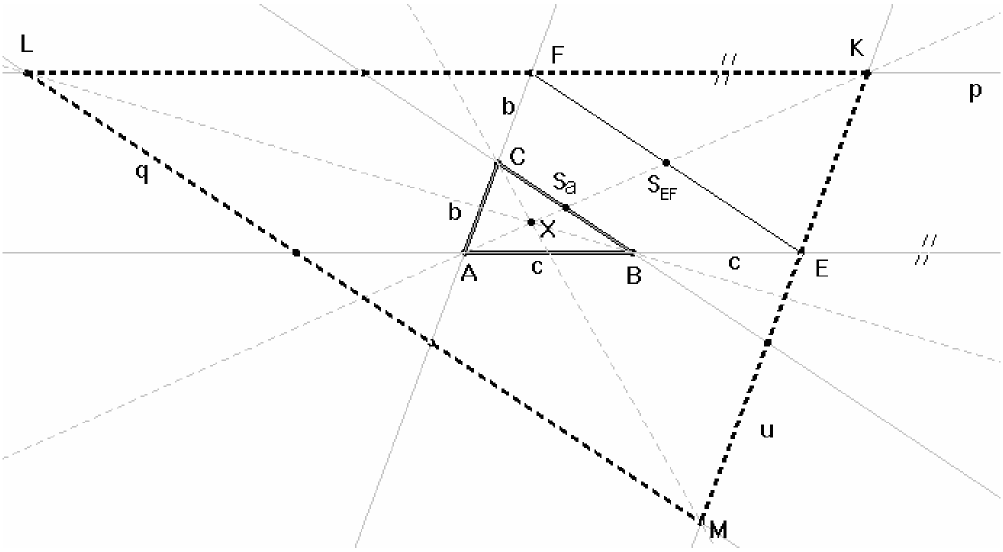
Premýšľajme!

Ak označíme priesečníky priamok $E = AB \cap u$, $F = AC \cap p$, štvoruholník *AEKF* je tiež rovnobežníkom, ktorého uhlopriečka *AK* je jednou z uvažovaných Cevových priamok (obr. 9).

Priamka *AK* súčasne rozpoľuje uhlopriečku *EF* v strede S_{EF} , a preto na priamke *AK* leží i ťažnica trojuholníka *EFA*, prechádzajúca vrcholom *A*.

Strana *BC* je zároveň strednou priečkou v trojuholníku *EFA*.

To znamená, že ťažnica t_a trojuholníka *ABC* leží na priamke *AK*. Odtiaľ triviálne vyplýva dokazované tvrdenie. W



Obr. 9

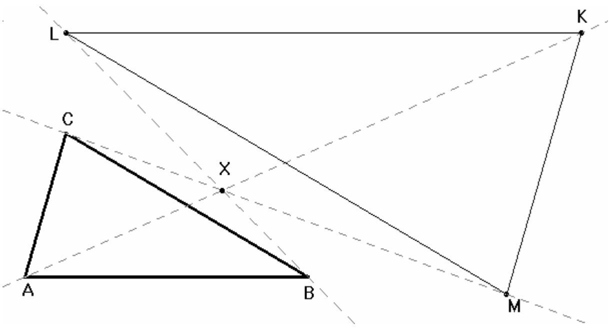
Záver. **Trojuholníky *ABC, KLM* sú perspektívne podľa ťažiska *T* trojuholníka *ABC*.**

V matematike má analógia pomocný charakter, pretože obyčajne ukazuje ďalšiu cestu možného zovšeobecnenia úlohy. Jedno zovšeobecnenie ponúkame v nasledujúcich riadkoch.

Vzhľadom ku konštrukcii môžeme povedať, že oba trojuholníky sú rovnoľahlé so stredom rovnoľahlosti v ťažisku *T*.

* Určenie koeficientu rovnoľahlosti nechávame na úvahu čitateľovi, rovnako ako aj výpočet pomeru $S_{KLM} : S_{ABC}$.

Ak by sme pracovali v rozšírenej euklidovskej rovine a pre priamky by platilo $AB \| KL$, $BC \| LM$, $AC \| KM$ (znak $\|$ znamená rovnobežnosť v euklidovskej rovine), boli by trojuholníky *ABC, KLM* tiež perspektívne.



Obr. 10

* Čitateľovi je asi jasné, že pravdivosť tvrdenia priamo vyplýva z Desarquesovej vety.

Pochopiteľne, spoločný bod *X* odpovedajúcich si Cevových priamok vo všeobecnosti nie je ťažiskom *T* trojuholníka *ABC.*

Rozvíjajme naše úvahy ďalej!

Čím nás ešte môže obr. 6 inšpirovať?

Všimnime si, že „nad stranami“ trojuholníka *ABC* sú zostrojené trojuholníky *ABM*, *BCK*, *CAL*, ktoré sú zhodné s pôvodným trojuholníkom *ABC.* Skúmajme prípad, keď nad stranami trojuholníka *ABC* zostrojíme rovnostranné trojuholníky *ABR, BCP, CAQ.*

Nech T_a , T_b , T_c sú postupne ťažiská trojuholníkov *BCP, CAQ, ABR* . Položme si otázku: **Sú trojuholníky *ABC*, $T_aT_bT_c$ perspektívne?**

Označíme $\left|\angle BT_aA'\right| = j$, kde $A' = AT_a \cap BC$ (obr. 11).

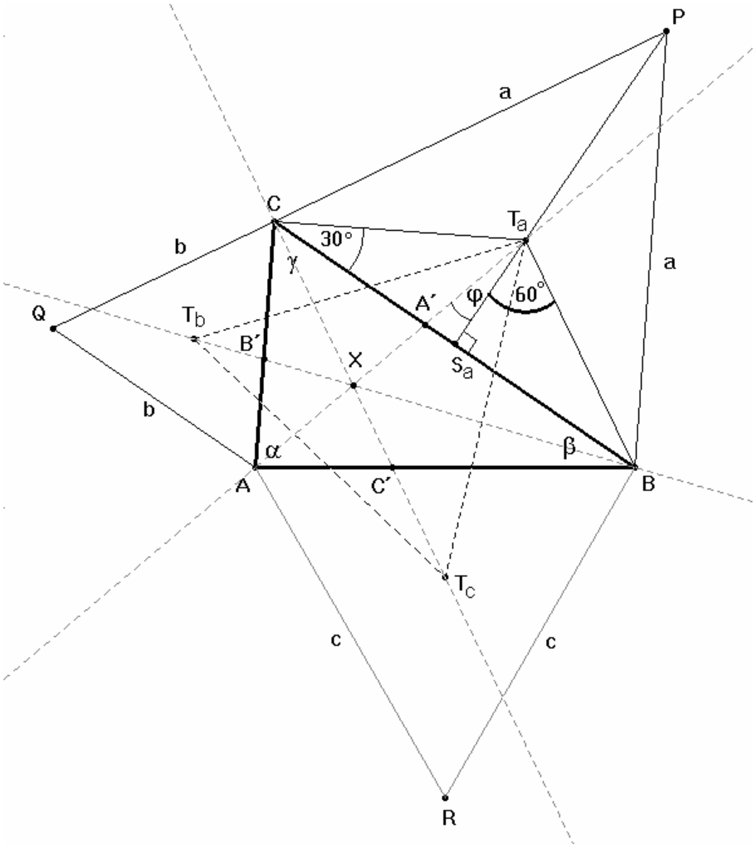
Platí
$$\frac{|BA'|}{|CA'|} = \frac{|BT_a|}{|CT_a|} \cdot \frac{\sin\left(60^\circ + j\right)}{\sin\left(60^\circ - j\right)}$$

Podľa $\# ABT_a$]

$$\frac{|AB|}{\sin\left(60^\circ + j\right)} = \frac{|AT_a|}{\sin\left(30^\circ + b\right)}$$

Analogicky $\# ACT_a$]

$$\frac{|AC|}{\sin\left(60^\circ - j\right)} = \frac{|AT_a|}{\sin\left(30^\circ + g\right)}$$



Obr. 11

Pre deliaci pomer usporiadanej trojice bodov (*BCA´*) platí

$$(BCA')=-\frac{|AB|}{|AC|}\cdot\frac{\sin\left(30^\circ+b\right)}{\sin\left(30^\circ+g\right)}, \text{ pretože } \left|BT_a\right|=\left|CT_a\right|.$$

Cyklickou zámenou

$$(CAB')=-\frac{|BC|}{|AB|}.\frac{\sin\left(30^\circ+g\right)}{\sin\left(30^\circ+a\right)} \qquad \text{a} \qquad (ABC')=-\frac{|AC|}{|CB|}.\frac{\sin\left(30^\circ+a\right)}{\sin\left(30^\circ+b\right)}.$$

Výsledný súčin deliacich pomerov je $(ABC').(BCA').(CAB')=(-1)$. W

Záver**. Trojuholníky *ABC, $T_aT_bT_c$* sú perspektívne podľa bodu X.**

Bod X sa nazýva **Napoleonov bod** a trojuholník ***$T_aT_bT_c$*** je známy pod názvom **Napoleonov trojuholník.**

Vedeli by sme určiť dĺžku strany T_aT_b ?

Podľa kosínusovej vety pre trojuholník T_aT_bC platí

$$\left|T_aT_b\right|^2 = \left|CT_a\right|^2 + \left|CT_b\right|^2 - 2.\left|CT_a\right|.\left|CT_b\right|.\cos\left(60^\circ + g\right)$$

Keďže trojuholníky *BCP, CAQ* sú rovnostranné, ľahko odvodíme

$$\left|T_aT_b\right|^2 = \frac{a^2 + b^2}{3} - \frac{2}{3}ab.\cos\left(60^\circ + g\right)$$

Pre prvky trojuholníka *ABC* platí

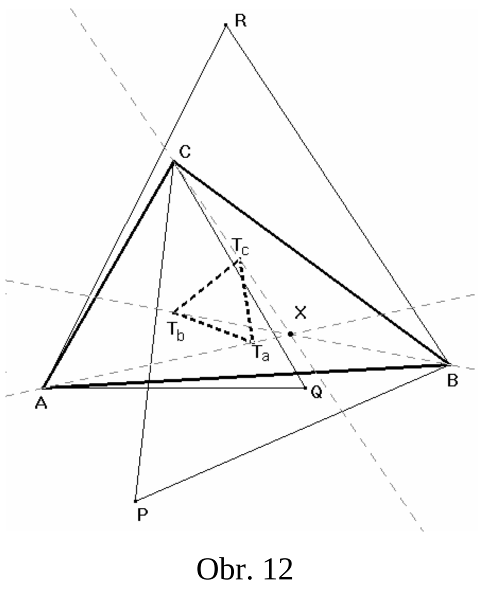
$$\cos g = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \quad , \quad \sin g = \frac{c}{2r} \quad , \quad S_{ABC} = \frac{abc}{4r}$$

Počítajme $\quad \left|T_aT_b\right|^2 = \dfrac{a^2+b^2}{3} - \dfrac{2ab}{3}.\left(\cos 60^\circ.\cos g - \sin 60^\circ.\sin g\right) = ...$

$$= \frac{a^2+b^2+c^2}{6} + \frac{2}{3}.\sqrt{3}.S_{ABC}$$

Vypočítaná dĺžka strany T_aT_b sa vzhľadom k cyklickej zámene prvkov trojuholníka *ABC* nezmení. Rovnakú dĺžku budú mať aj strany T_bT_c , T_aT_c.

Veta. ***Napoleonov*** **trojuholník je rovnostranným trojuholníkom.**



Obr. 12

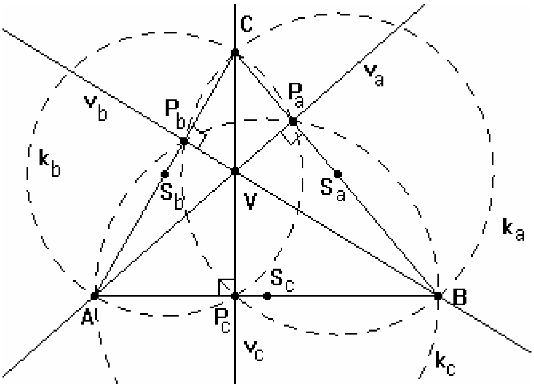
* Nechávame na úvahu čitateľa, aby si premyslel vlastnosti trojuholníka $T_aT_bT_c$, ak každý z trojuholníkov *ABR, BCP, CAQ* bude zostrojený v opačnej polrovine, než na obr. 11.

Podľa obr. 12, môžeme vysloviť iba hypotézu, že trojuholníky *ABC*, $T_aT_bT_c$ budú perspektívne i v tomto prípade.

* Naviac, pri pohľade na obr. 11 je jasné, že perspektívne sú aj trojuholníky *PQR*, $T_aT_bT_c$ podľa stredu *S* opísanej kružnice *k* trojuholníku *ABC* (hranica trojuholníka *PQR*, bod *S* a kružnica *k* nie sú na obr. 11 vyznačené).

2.2 Priesečník výšok trojuholníka a jeho vlastnosti

V literatúre sa často vyskytuje dôkaz o priesečníku výšok trojuholníka.

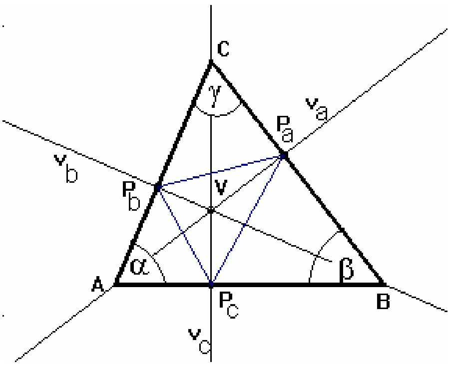


Obr. 13

Myšlienka jedného dôkazu je naznačená na obr. 13, kde priesečník výšok je spoločný chordálny bod troch Tálesových kružníc k_c, k_b, k_a zostrojených nad stranami *AB, CA, BC* trojuholníka *ABC* .

Pokúsime sa dokázať tvrdenie o výškach pomocou Cevovej vety.

Pýtame sa: **Sú trojuholníky *ABC*, $P_aP_bP_c$ perspektívne?**



Obr. 14

A) Nech trojuholník *ABC* je ostrouhlým trojuholníkom. Použijeme goniometrické funkcie pre pravouhlé trojuholníky ACP_c, BCP_c. Platí

$$\cos a = \frac{|AP_c|}{|AC|} \quad \text{a} \quad \cos b = \frac{|BP_c|}{|BC|}$$

Pretože je trojuholník ostrouhlý, platí

$$(ABP_c) = -\frac{|AC|}{|BC|}\cdot\frac{\cos a}{\cos b}$$

Cyklickou zámenou

$$(BCP_a) = -\frac{|AB|}{|AC|}\cdot\frac{\cos b}{\cos g}, \quad (CAP_b) = -\frac{|BC|}{|AB|}\cdot\frac{\cos g}{\cos a}$$

Výsledný súčin deliacich pomerov je

$$(ABP_c).(BCP_a).(CAP_b) = (-1).$$

Z toho vyplýva , že v ostrouhlom trojuholníku výšky prechádzajú jedným bodom *V*.

B) Nech je trojuholník *ABC* pravouhlý s pravým uhlom vo vrchole *A.* Výšky v_a, v_b, v_c sa triviálne pretnú v jednom bode - vo vrchole *A.*

C) Nech je trojuholník *ABC* tupouhlý s tupým uhlom vo vrchole *A.* Pre deliace pomery platí

$$(ABP_c) = -\frac{|AC|}{|BC|}\cdot\frac{\cos a}{\cos b}, \ (BCP_a) = -\frac{|AB|}{|AC|}\cdot\frac{\cos b}{\cos g}, \ (CAP_b) = -\frac{|BC|}{|AB|}\cdot\frac{\cos g}{\cos a}.$$

Výsledný súčin sa rovná (-1) a pre tupouhlý trojuholník platí, že priesečník výšok je jeden bod *V*. W

Záver**. Trojuholníky *ABC*, $P_aP_bP_c$ perspektívne podľa bodu *V*.**

Bod ***V*** sa nazýva **ortocentrum** trojuholníka *ABC.*

* Nechávame na čitateľa, aby si detailne premyslel funkciu znamienok pri jednotlivých pomeroch a prípadne aj zostrojil odpovedajúce obrázky pre pravouhlý a tupouhlý trojuholník

Trojuholník $P_aP_bP_c$ sa nazýva *úpätnicový* trojuholník. Pojem úpätnicového trojuholníka možno zovšeobecniť nasledovným spôsobom.

V rovine trojuholníka *ABC* leží bod *P*. Nech P_1, P_2, P_3 sú postupne päty kolmíc zostrojených z bodu *P* na priamky *BC, CA, AB.*

Ak vynecháme z našich úvah singulárne prípady (bod *P* je totožný s niektorým z vrcholov trojuholníka *ABC*; bod *P* leží na kružnici *k* opísanej trojuholníku *ABC*), vznikne trojuholník $P_1P_2P_3$, ktorý sa v anglicky písanej literatúre označuje pojmom *pedal triangle*.

* Tvrdenie, že by trojuholníky *ABC*, $P_1P_2P_3$ boli vždy perspektívne, nie je pravdivé. Nájde čitateľ príklad, ktorý podporí práve uvedený fakt?

Rozvíjajme naše úvahy iným smerom! (obr. 15)

Položme priamku *BC* za os súmernosti o_1 osovej súmernosti, ktorá zobrazí bod *A* do bodu A_0 ; priamku *AC* za os súmernosti o_2 osovej súmernosti, ktorá zobrazí bod *B* do bodu B_0 a nakoniec, nech priamka *AB* je osou súmernosti o_3 osovej súmernosti, ktorá zobrazí bod *C* do C_0.

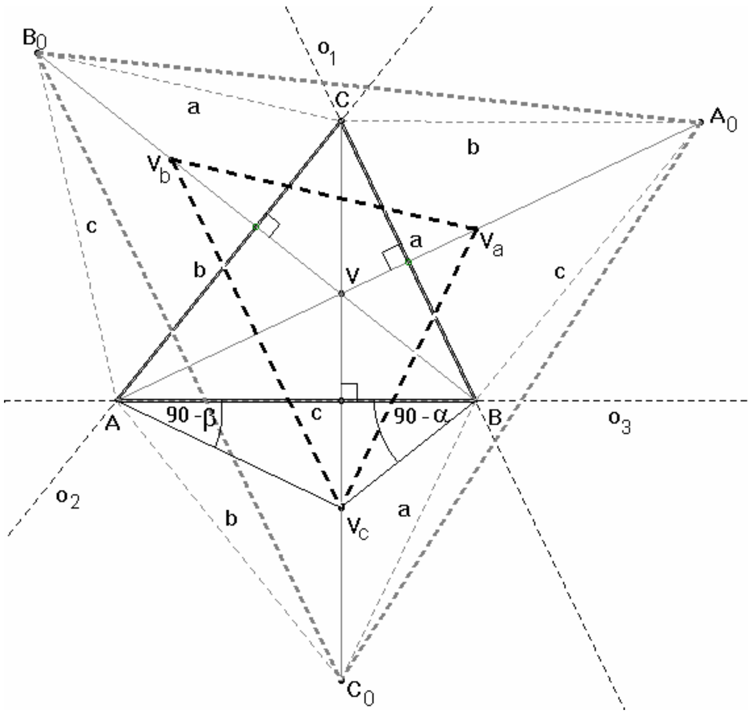
Otázka:

Sú trojuholníky *ABC*, $A_0B_0C_0$ perspektívne podľa ortocentra *V* ?

V dôsledku vlastností osových súmerností je štvoruholník ABA_0C deltoidom (uhlopriečky AA_0, *BC* sú kolmé) a teda priamka AA_0 je totožná s výškou v_a trojuholníka *ABC*.

Pre ostatné Cevove priamky BB_0, CC_0 je situácia analogická. W

Záver. **Trojuholníky *ABC*, $A_0B_0C_0$ perspektívne podľa ortocentra *V* trojuholníka *ABC*.**



Obr. 15

* Nech V_a, V_b, V_c sú postupne ortocentrá trojuholníkov BCA_0, CAB_0, ABC_0. Samozrejme, že trojuholníky ABC, $V_aV_bV_c$ sú tiež perspektívne podľa ortocentra V trojuholníka ABC.

Použitím metódy analógie (s odvolaním sa na Napoleonov trojuholník) sa pýtame:

Je trojuholník $V_aV_bV_c$ vždy rovnostranným trojuholníkom ?

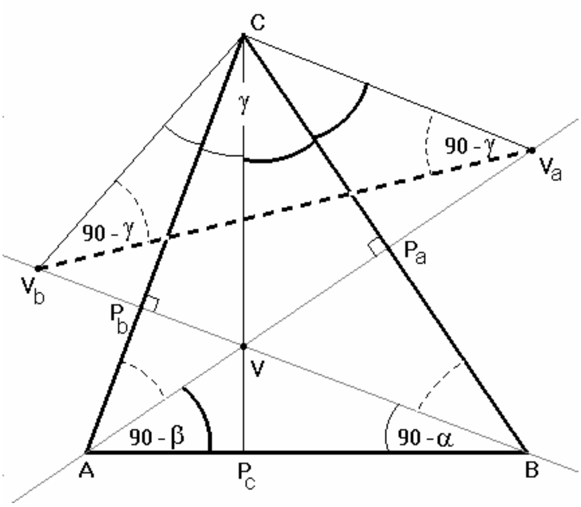
Vzhľadom na konštrukciu trojuholníka $V_aV_bV_c$ platí

$$|CV| = |CV_a| = |CV_b| \text{ a } |\angle V_a C V_b| = 90° - a + g + 90° - b = 2\gamma.$$

Pretože trojuholník V_aV_bC je rovnoramenný,

$$|\angle CV_aV_b| = |\angle CV_bV_a| = 90° - g$$

Pre dĺžku CV platí $$|CV| = a \cdot \frac{\cos g}{\sin a} = 2r.\cos g\ .$$



Obr. 16

Podľa #V_aV_bC]

$$|V_aV_b| = 2r.\sin 2g \ .$$

Vzťah pre výpočet dĺžky V_aV_b nie je symetrický vzhľadom k cyklickej zámene prvkov trojuholníka *ABC*.

Veta. Trojuholník $V_aV_bV_c$ rovnostranným trojuholníkom vtedy a len vtedy, keď je rovnostranný trojuholník *ABC*.

* Nechávame na úvahu čitateľa, aby si detailne premyslel naposledy sformulovanú vetu.

Všimnime si!

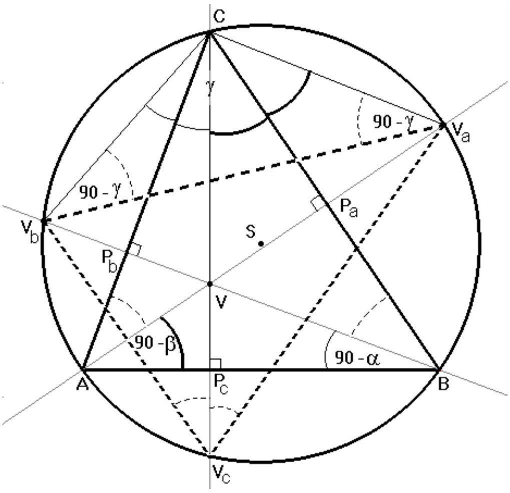
Zo súčtu veľkostí vnútorných uhlov trojuholníka ABV_c vychádza pre veľkosť uhla AV_cB $|\angle AV_cB| = a + b = 180^{\circ} - g$.

Potom $|\angle ACB| + |\angle AV_cB| = 180^{\circ}$ a teda štvoruholník AV_cBC je tetivovým štvoruholníkom.

Body *A, B, C,* V_c ležia na jednej kružnici - kružnici *k* opísanej trojuholníku *ABC.*

Z analogických dôvodov sú body V_a , V_b tiež bodmi kružnice *k.* W

Veta. Trojuholník $V_aV_bV_c$ je vpísaným trojuholníkom do kružnice *k* opísanej trojuholníku *ABC.*



Obr. 17

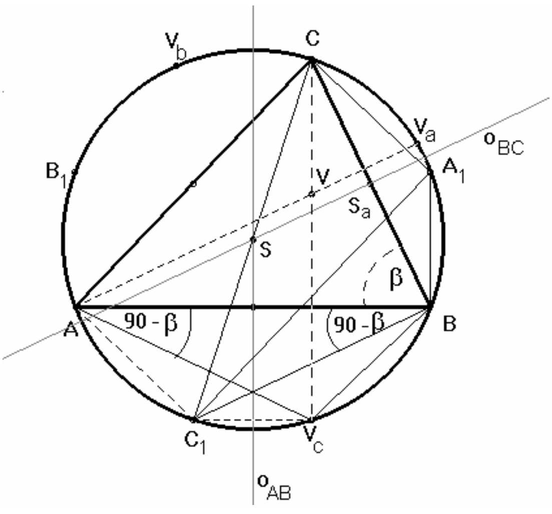
Naviac, podľa vety o obvodovom uhle platí, že $\angle V_b V_c C$ a $\angle V_a V_c C$ sú zhodné uhly.
To znamená, že priamka CV_c je osou uhla $V_aV_cV_b$. Analogicky priamky AV_a, BV_b sú osami zvyšných dvoch vnútorných uhlov. Bod V je spoločným bodom osí vnútorných uhlov trojuholníka $V_aV_bV_c$. Potom platí veta:

Veta. Priesečník osí vnútorných uhlov trojuholníka je jeden bod.

Rozvíjajme ďalej myšlienku bodov ležiacich na kružnici k. (obr. 17)

Nech A_1 je obraz bodu V_a v osovej súmernosti s osou o_{BC} strany BC, B_1 je obraz bodu V_b v osovej súmernosti s osou o_{AC} strany AC a C_1 je obraz bodu V_c v osovej súmernosti s osou o_{AB} strany AB (obr. 18). Pýtame sa:

Sú trojuholníky *ABC*, $A_1B_1C_1$ perspektívne?



Obr. 18

Vzhľadom na osovú súmernosť s osou o_{AB} strany AB platí

$$|\angle C_1BA| = 90° - b \ .$$

Uhol C_1BC je pravý, body C_1, B a C ležia na Tálesovej kružnici s priemerom CC_1 a potom priamka CC_1 prechádza stredom S kružnice k

opísanej trojuholníku *ABC*. Analogické tvrdenia platia pre priamky AA_1, BB_1. W

Záver**. Trojuholníky *ABC*, $A_1B_1C_1$ sú perspektívne podľa stredu *S* kružnice *k* opísanej trojuholníku *ABC*.**

* Nechávame na úvahu čitateľa, aby si premyslel pravdivosť tvrdenia: Bod A_1 je obrazom bodu *V* v stredovej súmernosti - so stredom S_a (obr. 18). Ako je to s bodmi B_1, C_1 ?

Ak sa lepšie pozrieme na obr. 18, môžeme tvrdiť, že sme dosť komplikovaným spôsobom dokázali:

Veta. Priesečník osí strán trojuholníka je jeden bod - stred opísanej kružnice.

Komplikovaným preto, že asi najjednoduchší dôkaz je založený na vlastnosti množiny bodov danej vlastnosti – osi úsečky.

* Je v silách čitateľa vykonať takýto dôkaz?

Okrem iného, trojuholníky *ABC*, $A_1B_1C_1$ sú stredovo súmerné podľa bodu *S*.

* Aký záver z toho vyplýva pre ich obsahy ?

* Pozorný čitateľ si iste všimol, že všetky obrázky v tejto kapitole sú načrtnuté pre ostrouhlý trojuholník. Čo nás oprávňuje vysloviť tento záver?

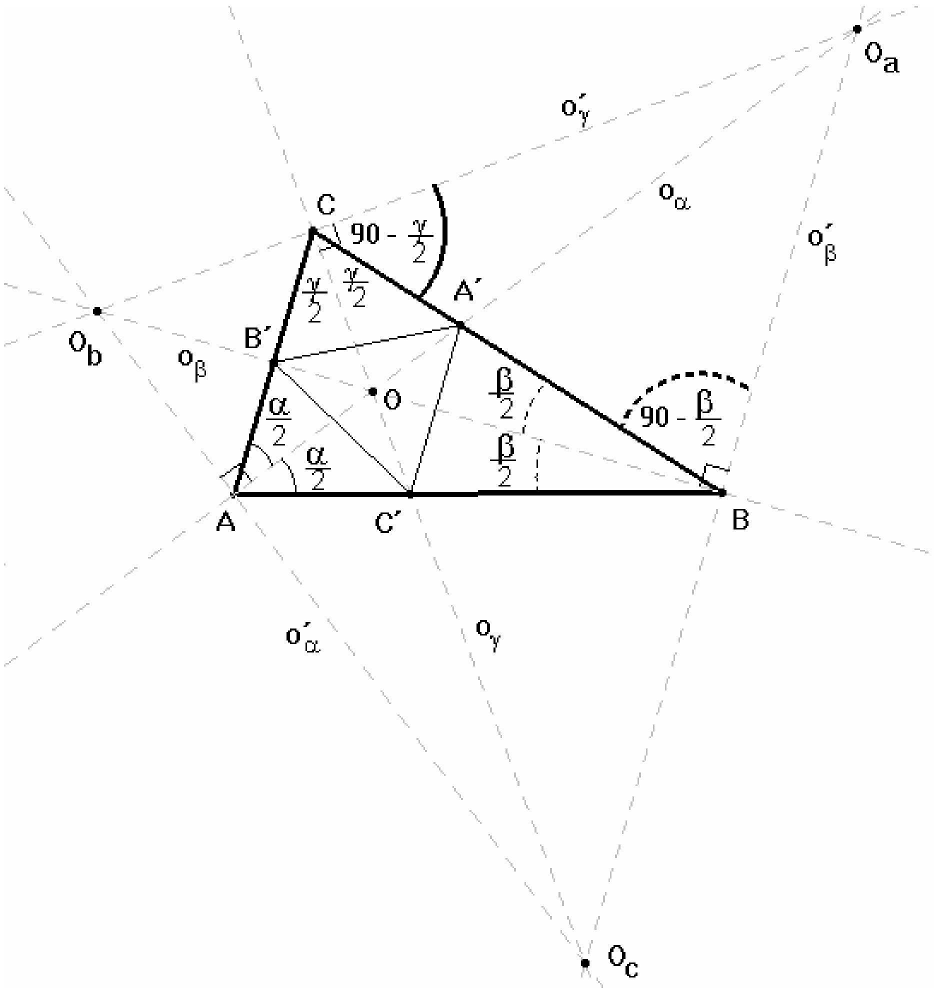
* Detailné dôkazy jednotlivých tvrdení pre pravouhlý a tupouhlý trojuholník *ABC* prenecháme záujmu čitateľa ako cvičenie.

2.3 Priesečníky osí uhlov trojuholníka

V predchádzajúcej kapitole sme pomocou ortocentra dokázali, že osi vnútorných uhlov trojuholníka sa pretínajú v jednom bode. Každý trojuholník má však tri vnútorné a šesť vonkajších uhlov. Urobíme dôkazy tvrdení o spoločnom priesečníku osiach uhlov pomocou Cevovej vety.

Nech je daný trojuholník *ABC.* Označíme priesečníky osí uhlov so stranami trojuholníka nasledovne: $A' = o_a \cap BC$, $B' = o_b \cap CA$, $C' = o_g \cap AB$.

Už tradičná otázka: **Sú trojuholníky *ABC*, *A´B´C´* perspektívne?**



Obr. 19

Podľa označenia na obr. 19 platí

$$(ABC') = -\frac{|AC|}{|BC|} \cdot \frac{\sin \frac{g}{2}}{\sin \frac{g}{2}} = -\frac{|AC|}{|BC|} \, .$$

Cyklickou zámenou $(BCA') = -\dfrac{|AB|}{|AC|}$ a $(CAB') = -\dfrac{|BC|}{|AB|}$.

Je zrejmé, že $(ABC').(BCA').(CAB') = (-1)$ a podľa dôsledkov Cevovej vety je platná nasledujúca veta. W

Veta. V ľubovoľnom trojuholníku osi vnútorných uhlov prechádzajú jedným bodom.

Pochopiteľne, existuje viac rôznych dôkazov o priesečníku osí vnútorných uhlov trojuholníka.

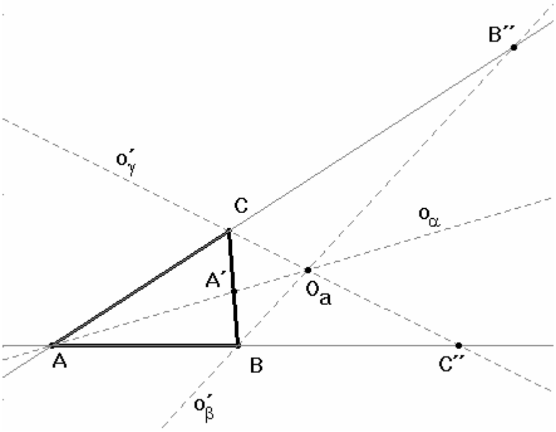
* Prenechávame na úvahu čitateľa, aby sa pokúsil vykonať taký dôkaz, v ktorom použije množinu bodov danej vlastnosti. Ako návod iste poslúži poznámka, že priesečník *O* osí vnútorných uhlov má rovnakú vzdialenosť od strán trojuholníka *ABC* a teda je stredom vpísanej kružnice *l*(*O*, *r*).

Naviac, ak sa lepšie pozrieme na obr. 19, zdá sa, že os vnútorného uhla pri jednom vrchole sa pretína v jednom bode s osami vonkajších uhlov pri zvyšných dvoch vrcholoch. Dokážeme!

Bez ujmy na všeobecnosti uvažujme o osiach o_a , o'_b , o'_g uhlov a, b' a g'.

Nech $C'' = o'_g \cap AB$, $B'' = o'_b \cap CA$ (obr. 20).

Vypočítame $$\frac{|AC''|}{|BC''|} = \frac{|AC|}{|BC|} \cdot \frac{\sin\left(90 + \frac{g}{2}\right)}{\sin\left(90 - \frac{g}{2}\right)}$$



Obr. 20

Zodpovedajúci deliaci pomer je

$$\left(ABC''\right)=\frac{|AC|}{|BC|}$$

Analogicky

$$\left(CAB''\right)=\frac{|BC|}{|AB|}$$

a platí

$$\left(ABC''\right).\left(BCA'\right).\left(CAB''\right)=(-1)$$

W

Analogicky, ako v prípade priesečníka osí vnútorných uhlov, i teraz v dôsledku Cevovej vety platí

Veta. V ľubovoľnom trojuholníku sa os vnútorného uhla pri jednom vrchole pretína s osami vonkajších uhlov v trojuholníka pri zvyšných dvoch vrcholoch v jednom bode.

* Čitateľ si iste uvedomil, že na základe dokázaného tvrdenia môžeme hovoriť o perspektívnosti trojuholníkov *ABC*, $O_aO_bO_c$ podľa bodu *O* - stredu vpísanej kružnice.

* Nechávame na úvahu čitateľa, aby si premyslel pravdivosť tvrdenia, že os vonkajšieho uhla je kolmá na os vnútorného uhla pri tom istom vrchole a následne dokázal

1) Priesečník *O* osí vnútorných uhlov trojuholníka *ABC* je ortocentrom trojuholníka $O_aO_bO_c$.
2) Trojuholník $O_aO_bO_c$ je vždy ostrouhlý.

3) Os vnútorného uhla trojuholníka sa pretína s osou strany ležiacej oproti tomuto uhlu v bode ležiacom na kružnici *k*.
4) Body *A, O, B,* O_c ležia na jednej kružnici - Tálesovej kružnici s priemerom OO_c, ktorej stred leží na kružnici *k* opísanej trojuholníku.

* Okrem iného, trojuholníky BCO_a, CAO_b, ABO_c sú navzájom podobné podľa vety ***UU***. Výpočet jednotlivých koeficientov podobnosti nechávame tiež na úvahu čitateľovi.

Body O_a, O_b, O_c sú stredmi pripísaných kružníc $l_a(O_a,\ r_a)$, $l_b(O_b,\ r_b)$, $l_c(O_c,\ r_c)$ oproti stranám *BC, CA, AB.*

Skúsme uvažovať takto!

Nech $A' = O_bO_c \cap O_aS_a$, $B' = O_cO_a \cap O_bS_b$ a $C' = O_aO_b \cap O_cS_c$. Opäť otázka:

Sú trojuholníky $O_aO_bO_c$, $A'B'C'$ perspektívne ?

Označíme $\angle AO_cC' = g_1$ a $\angle BO_cC' = g_2$ (obr. 21).

Platí
$$\frac{|O_aC'|}{|O_bC'|} = \frac{|O_aO_c|}{|O_bO_c|} \cdot \frac{\sin g_2}{\sin g_1}$$

a pre (ABS_c) máme

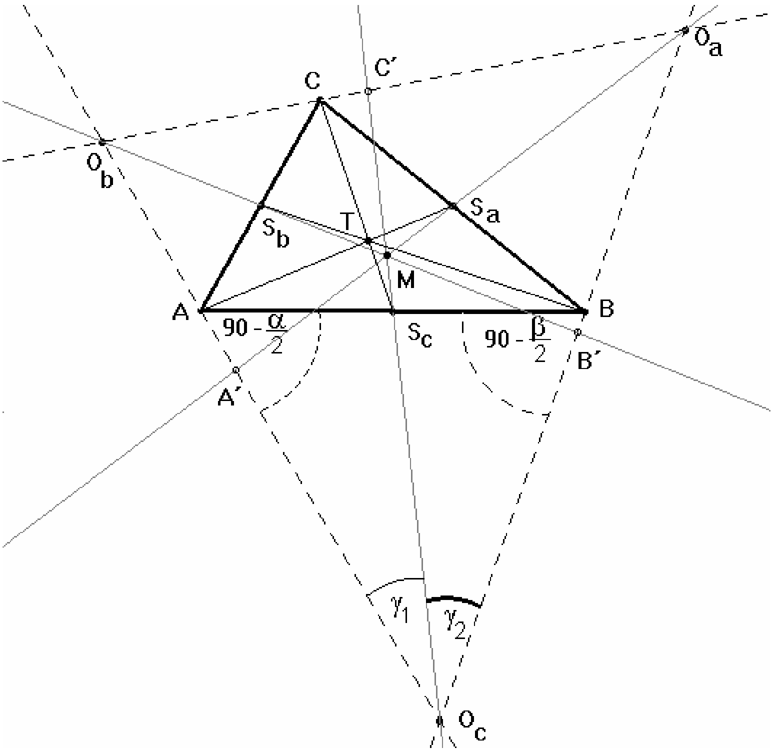
$$(ABS_c) = -\frac{|AO_c|}{|BO_c|} \cdot \frac{\sin g_1}{\sin g_2} = -\frac{\sin\left(90^\circ - \frac{b}{2}\right)}{\sin\left(90^\circ - \frac{a}{2}\right)} \cdot \frac{\sin g_1}{\sin g_2},$$

pretože podľa # ABO_c] platí

$$\frac{|AO_c|}{|BO_c|} = \frac{\sin\left(90^\circ - \frac{b}{2}\right)}{\sin\left(90^\circ - \frac{a}{2}\right)}$$

Výsledný deliaci pomer je

$$\left(O_aO_bC'\right)=\frac{\left|O_aO_c\right|}{\left|O_bO_c\right|}\cdot\frac{\sin\left(90^{\circ}-\frac{b}{2}\right)}{\sin\left(90^{\circ}-\frac{a}{2}\right)}\cdot\frac{1}{\left(ABS_c\right)}\,.$$



Obr. 21

Ostatné deliace pomery získame cyklickou zámenou.

$$\left(O_bO_cA'\right)=\frac{\left|O_bO_a\right|}{\left|O_cO_a\right|}\cdot\frac{\sin\left(90^{\circ}-\frac{g}{2}\right)}{\sin\left(90^{\circ}-\frac{b}{2}\right)}\cdot\frac{1}{\left(BCS_a\right)}$$

$$\left(O_cO_aB'\right)=\frac{\left|O_cO_b\right|}{\left|O_aO_b\right|}\cdot\frac{\sin\left(90^{\circ}-\frac{a}{2}\right)}{\sin\left(90^{\circ}-\frac{g}{2}\right)}\cdot\frac{1}{\left(CAS_b\right)}$$

Keďže priamky AS_a , BS_b , CS_c prechádzajú jedným bodom – ťažiskom T trojuholníka ABC, platí $(ABS_c).(BCS_a).(CAS_b)=(-1)$,

a potom $(O_aO_bC').(O_bO_cA').(O_cO_aB')=(-1)$. W

Výsledok nás oprávňuje vysloviť záver:

Záver. **Trojuholníky $O_aO_bO_c$,$A'B'C'$ sú perspektívne podľa bodu M.**

Spoločný priesečník priamok $O_aA' \cap O_bB' \cap O_cC'$ sme zámerne označili M, pretože tento bod je v literatúre známy ako ***mittenpunkt*** (resp. *middlespoint*).

*Samozrejme, podľa bodu M sú perspektívne i trojuholníky $O_aO_bO_c$, $S_aS_bS_c$.

2. 4 Odkazy na internetové adresy

1. **The medians**
[online]. [citované 27. októbra 2004]. Dostupné na Internete:
http://www.cut-the-knot.org/triangle/medians.shtml
2. **First Napoleon Point**
[online]. [citované 27. októbra 2004]. Dostupné na Internete:
http://mathworld.wolfram.com/FirstNapoleonPoint.html
3. **Napoleons Points**
[online]. [citované 27. októbra 2004]. Dostupné na Internete:
http://faculty.evansville.edu/ck6/tcenters/class/napoleon.html
4. **Napoleon´s Theorem**
[online]. [citované 27. októbra 2004]. Dostupné na Internete:
http://www.cut-the-knot.org/proofs/napoleon_intro.shtml
5. **The Altitudes**
[online].[citované 28. októbra 2004]. Dostupné na Internete:
http://www.cut-the-knot.org/triangle/altitudes.shtml

6. Pedal Triangle

[online]. [citované 2. novembra 2004]. Dostupné na Internete:

http://mathworld.wolfram.com/PedalTriangle.html

7. Apollonius Circle

[online]. [citované 10. novembra 2004]. Dostupné na Internete:

http://mathworld.wolfram.com/ApolloniusCircle.html

8. The Angle Bisectors

[online]. [citované 10. novembra 2004]. Dostupné na Internete:

http://www.cut-the-knot.org/triangle/ABisector.shtml

9. Angle Bisectors and Triangles

[online]. [citované 10. novembra 2004]. Dostupné na Internete:

http://www.pballew.net/Tribis.html

10. Mittenpunkt

[online]. [citované 10. novembra 2004]. Dostupné na Internete:
http://mathworld.wolfram.com/Mittenpunkt.html

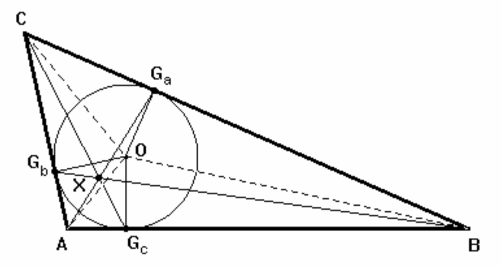
3 TROJUHOLNÍK A KRUŽNICA

3.1 Kružnica trojuholníku vpísaná

Pozrime sa bližšie na kružnicu $l(O,r\;)$, presnejšie na jej dotykové body so stranami trojuholníka *ABC.*

Nech sa vpísaná kružnica $l(O,\ r)$ dotýka postupne strán *AB, BC, CA* trojuholníka *ABC* v bodoch G_c, G_a, G_b.(obr. 22). Už tradičná otázka:

Sú trojuholníky *ABC*, $G_aG_bG_c$ perspektívne ?



Obr. 22

Z pravouhlých trojuholníkov odvodíme tieto vzťahy

$$|AG_c| = \frac{r}{\tan\frac{a}{2}}\,,\quad |BG_c| = \frac{r}{\tan\frac{b}{2}}$$

$$|BG_a| = \frac{r}{\tan\frac{b}{2}}\,,\quad |CG_a| = \frac{r}{\tan\frac{g}{2}}\,,$$

$$|CG_b| = \frac{r}{\tan\frac{g}{2}} \quad \text{a} \quad |AG_b| = \frac{r}{\tan\frac{a}{2}}\,.$$

Hľadaný súčin deliacich pomerov je

$$(ABG_c).(BCG_a).(CAG_b) = (-1)$$

a priamky AG_a, BG_b CG_c sú Cevovými priamkami. W

Záver**. Trojuholníky *ABC*, $G_aG_bG_c$ sú perspektívne podľa bodu *X* .**

Bod ***X*** sa nazýva ***Gergonnov bod*** (čítame Žergonov) a v literatúre sa zvykne označovať písmenom ***G***.

Skúsime iné úvahy.

Trojuholníky AOG_c, AOG_b sú zhodné (zhodujú sa v dvoch uhloch a strane oproti väčšiemu z nich). Z toho vyplýva, že zhodné aj úsečky AG_c, AG_b. Označíme $|AG_c| = |AG_b| = x$ .Analogicky $|BG_c| = |BG_a| = y$ a $|CG_a| = |CG_b| = z$.

Pre deliace pomery ľahko odvodíme

$$(ABG_c) = -\frac{x}{y}, \ (BCG_a) = -\frac{y}{z} \text{ a } (CAG_b) = -\frac{z}{x}.$$

Výsledný súčin $\quad (ABG_c).(BCG_a).(CAG_b) = (-1).$ W

* Nechávame na úvahu čitateľa, aby sa presvedčil o pravdivosti vzťahov $x = s - a,\ y = s - b,\ z = s - c$.

A naviac, čitateľ iste nájde súvislosť medzi Gergonnovým bodom a úpätnicovým trojuholníkom príslušným bodu *O*.

3.2 Kružnice trojuholníku pripísané

Skúmajme rozšírenie problému perspektívnosti trojuholníkov i pre prípad pripísaných kružníc. Ponúkajú sa dve možnosti.

A. Najprv vyšetríme perspektívnosť trojuholníkov ABC, $N_aN_bN_c$, kde N_a, N_b , N_c sú postupne body dotyku kružníc $l_a(O_a,\ r_a)$, $l_b(O_b,\ r_b)$, $l_c(O_c, r_c)$ pripísaných trojuholníku ABC oproti stranám BC, CA, AB. Nastolíme problém:

Sú trojuholníky ABC, $N_aN_bN_c$ perspektívne?

Z pravouhlých trojuholníkov BN_aO_a, CN_aO_a (obr. 23) odvodíme

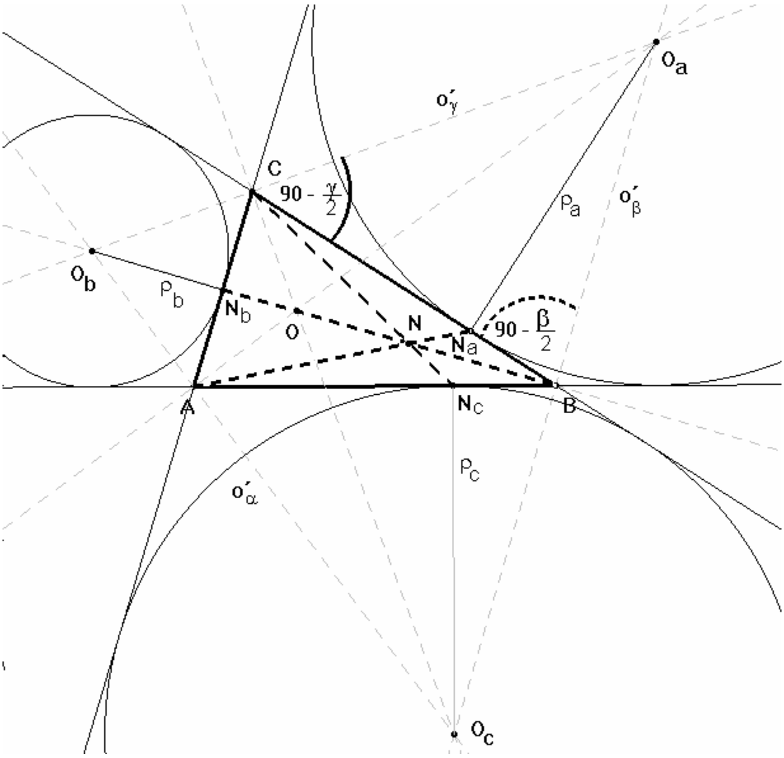
$$|BN_a| = r_a.\tan\frac{b}{2} \text{ a } |CN_a| = r_a.\tan\frac{g}{2}.$$

Analogicky by sme vypočítali

$$|CN_b| = r_b.\tan\frac{g}{2},\ |AN_b| = r_b.\tan\frac{a}{2},\ |AN_c| = r_c.\tan\frac{a}{2} \text{ a } |BN_c| = r_c.\tan\frac{b}{2}.$$

Súčin odpovedajúcich deliacich pomerov je

$$(ABN_c).(BCN_a).(CAN_b) = (-1) \ .$$ W



obr. 23

Z výsledku priamo vyplýva tento záver

Záver. **Trojuholníky *ABC*, $N_aN_bN_c$ sú perspektívne podľa bodu *N*.**

Bod ***N*** sa nazýva **Nagelov** bod.

* Čitateľ sa iste pokúsi vykonať dôkaz práve sformulovaného záveru pomocou odvodenia vzťahov pre dĺžky úsečiek AN_c, BN_c, BN_a, CN_a, CN_b a AN_b.

B. Druhá cesta, ktorej existenciu sme naznačili, spočíva v nasledovných úvahách.

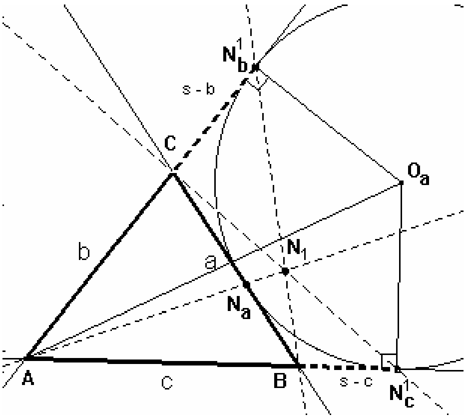
Nech N_c^1, N_b^1 sú dotykové body kružnice $l_a(O_a, r_a)$ postupne s priamkami *AB, AC* (obr. 24). Opäť nastolíme problém vo forme otázky:

Sú trojuholníky *ABC*, $N_aN_b^1N_c^1$ perspektívne ?

Vieme, že trojuholníky $AN_c^1O_a$, $AN_b^1O_a$ sú zhodné a ľahko sa odvodí platnosť vzťahov $\left|AN_c^1\right| = s$, $\left|BN_c^1\right| = s - c$, $\left|BN_a\right| = s - c$, $\left|CN_a\right| = s - b$, $\left|CN_b^1\right| = s - b$, $\left|AN_b^1\right| = s$. Pre súčin odpovedajúcich deliacich pomerov dostávame $\left(ABN_c^1\right).\left(BCN_a\right).\left(CAN_b^1\right) = (-1)$. W

Odtiaľ vyplýva tento záver

Záver**. Trojuholníky *ABC*, $N_aN_b^1N_c^1$ sú perspektívne podľa bodu N_1 .**



Obr. 24

V tejto chvíli sa musíme čitateľovi priznať, že nevieme, ako sa volá spoločný priesečník priamok AN_a, BN_b^1, CN_c^1.

Vieme však, že podobné tvrdenia možno sformulovať o zvyšných dvoch kružniciach $l_b(O_b,\ r_b)$, $l_c(O_c,\ r_c)$.

* Naviac, dotykové body jednotlivých kružníc so stranami *AB, BC, CA* trojuholníka *ABC* sú v zaujímavom vzťahu. Necháme čitateľovi na úvahu, aby si zamyslel nad pravdivosťou tvrdenia (prípadne nakreslil odpovedajúci obrázok):

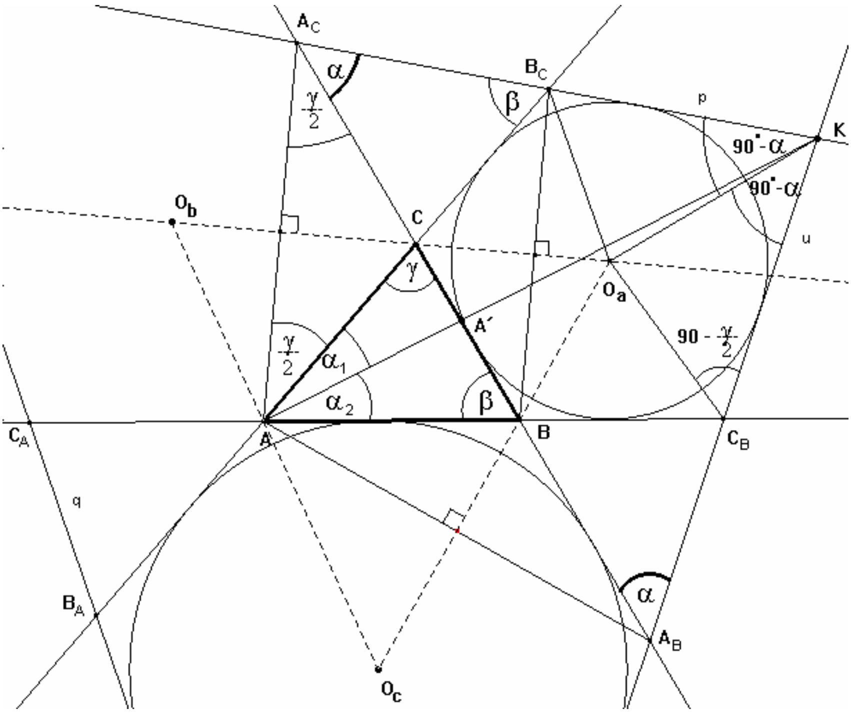
Obrazom bodu G_a v stredovej súmernosti so stredom S_a je bod N_a .

O zvyšných bodoch platí analogické tvrdenie.

Skúsme teraz premýšľať nasledovne!

Všimnime si, že priamky *AB, BC, CA* sú dotyčnicami kružníc l, l_a, l_b, l_c. Priamka *AB* je vonkajšou dotyčnicou kružníc l_a, l_b. Zostrojme im odpovedajúcu druhú vonkajšiu dotyčnicu *p* a tiež vykonajme konštrukcie „chýbajúcich“ vonkajších dotyčníc postupne pre kružnice l_b, l_c; l_a, l_c. Zostrojíme postupne priamky *q, u.* Označme $K = p \cap u$, $L = p \cap q$, $M = q \cap u$. Ako je to s perspektívnosťou trojuholníkov *KLM, ABC ?*

Sú trojuholníky *KLM, ABC* perspektívne ?



Obr. 25

Poznámka. Kvôli rozmernosti obrázku vyberáme len jeho časť.

Vypočítame deliaci pomer (BCA'), kde $A' = AK \cap BC$. Ostatné získame cyklickou zámenou. Označíme

$$AC \cap p = B_C\,,\ BC \cap p = A_C\,,\ AB \cap u = C_B\,,\ BC \cap u = A_B\,,\ a_1 = |\angle B_C AK|\,,$$

$$a_2 = |\angle C_B AK|\,.$$

Platí
$$(BCA') = -\frac{|AB|}{|CA|}.\frac{\sin a_2}{\sin a_1}\,.$$

V osovej súmernosti s osou O_aO_b sa bod A zobrazí do bodu A_C, bod B do bodu B_C. Podobne sa v osovej súmernosti s osou O_aO_c sa bod A zobrazí do bodu A_B, bod C do bodu C_B . V dôsledku toho

$$\left|\angle A_C AB_C\right| = \frac{g}{2}, \left|\angle C_B AA_B\right| = \frac{b}{2}, \ \left|\angle CB_C K\right| = 180^{\circ} - b, \left|\angle BC_B K\right| = 180^{\circ} - g,$$

$$\left|\angle CA_C K\right| = \left|\angle BA_B K\right| = a, \left|\angle B_C KC_B\right| = 180^{\circ} - 2a \ .$$

Podľa # AKB_C, # AKC_B]

$$\frac{\left|KC_B\right|}{\left|KB_C\right|} \cdot \frac{\left|AB\right|}{\left|CA\right|} = \frac{\sin a_2}{\sin a_1} .$$

Podľa #KB_CO_a, #KC_BO_a] (priamka KO_a je totožná s osou uhla C_BKB_C)

a vypočítame $$\frac{\left|KC_B\right|}{\left|KB_C\right|} = \frac{\cos\frac{b}{2}}{\cos\frac{g}{2}} \cdot \frac{\sin\left(a + \frac{g}{2}\right)}{\sin\left(a + \frac{b}{2}\right)} .$$

Hodnotu zlomku $\dfrac{\sin\left(a + \frac{g}{2}\right)}{\sin\left(a + \frac{b}{2}\right)}$ určíme podobným spôsobom

z trojuholníkov AB_CA_C , AC_BA_B a platí

$$\frac{\sin\left(a + \frac{g}{2}\right)}{\sin\left(a + \frac{b}{2}\right)} = \frac{\left|AB_C\right|}{\left|AC_B\right|} \cdot \frac{\left|A_BC_B\right|}{\left|A_CB_C\right|} \cdot \frac{\sin\frac{g}{2}}{\sin\frac{b}{2}} .$$

Zohľadnením všetkých pomocných vzťahov dostaneme výsledok v tvare

$$\left(BCA'\right) = -\frac{\left|AB\right|}{\left|CA\right|} \cdot \frac{tg\frac{g}{2}}{tg\frac{b}{2}} \cdot \frac{2s - c}{2s - b}, \text{ kde } s = \frac{a + b + c}{2} .$$

Cyklickou zámenou

$$\left(CAB'\right)=-\frac{|BC|}{|AB|}\cdot\frac{tg\,\frac{a}{2}}{tg\,\frac{g}{2}}\cdot\frac{2s-a}{2s-c}\qquad\left(ABC'\right)=-\frac{|AC|}{|BC|}\cdot\frac{tg\,\frac{b}{2}}{tg\,\frac{a}{2}}\cdot\frac{2s-b}{2s-a}.$$

Výsledný súčin $\left(ABC'\right).\left(BCA'\right).\left(CAB'\right)=\left(-1\right)$. W

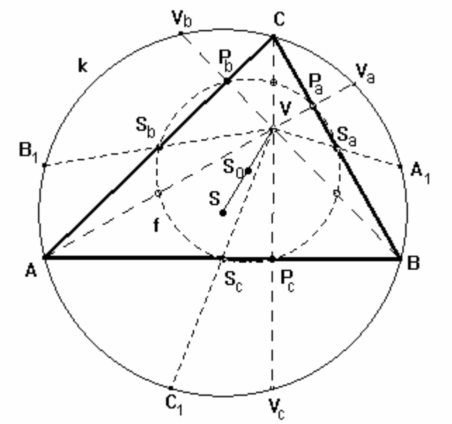
Záver**. Trojuholníky *ABC* , *KLM* sú perspektívne podľa bodu $\boldsymbol{C_L}$** .

Bod $\boldsymbol{C_L}$ sa nazýva **Clawsonov** bod.

3.3 Kružnica deviatich bodov

Kružnice l, l_a, l_b, l_c sa dotýkajú priamok *AB, BC* a *CA*. Existuje aj kružnica, ktorá sa dotýka všetkých štyroch kružníc l, l_a, l_b, l_c. Kružnica sa nazýva *kružnicou deviatich bodov* (v niektorej literatúre aj *Feuerbachova kružnica*). Označíme ju $f(S_0, r_0)$. Je jednoznačne určená stredmi strán trojuholníka *ABC* a ležia na nej aj päty výšok trojuholníka (obr. 26).

* Čitateľ iste dokáže túto pozoruhodnú vlastnosť, ak si spomenie na vlastnosť ortocentra *V* a kružnice *k* opísanej trojuholníku *ABC* (kapitola 2.2).



Obr. 26

Stačí uvažovať o rovnoľahlosti so stredom *V* a koeficientom $\frac{1}{2}$.

* Aký je polomer kružnice $f(S_0,r_0)$?

Skôr, ako preskúmame platnosť jedného tvrdenia o strede S_0 Feuerbachovej kružnice, definujeme dvojpomer a dokážeme lemu.

3. Trojuholník a kružnica

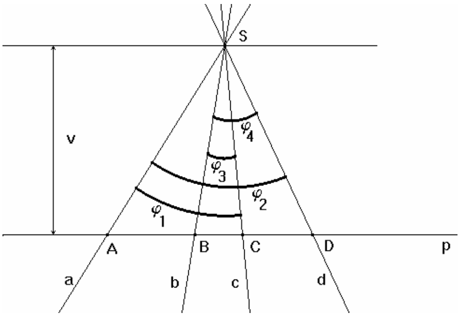
Definícia. Dvojpomerom usporiadanej štvorice bodov *A, B, C, D* na priamke *AB* nazývame reálne číslo (*ABCD*) = $\frac{(ABC)}{(ABD)}$**, kde (*ABD*) ≠ 0.**

Lema. Nech *S* je bod neležiaci na priamke *p* a nech *A, B, C, D* sú štyri navzájom rôzne body priamky *p*.

Označme priamky *a* º *SA*, *b* º *SB, c* º *SC*, *d* º *SD* (obr. 27).

Pre dvojpomer (*ABCD*) platí

$$(ABCD) = \frac{\sin(\angle(a,c)).\sin(\angle(b,d))}{\sin(\angle(a,d)).\sin(\angle(b,c))}.$$



Obr.27

Dôkaz. Vypočítame obsahy trojuholníkov *ACS* a *BCS*.

Platí $S_{ACS} = \frac{1}{2}\cdot|AC|.v =$

$$= \frac{1}{2}\cdot|SA|.|SC|.\sin j_1$$

$$S_{BCS} = \frac{1}{2}\cdot|BC|.v = \frac{1}{2}\cdot|SB|.|SC|.\sin j_3 .$$

Odtiaľ
$$\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|SA|}{|SB|}\cdot\frac{\sin j_1}{\sin j_3}.$$

Analogickým spôsobom z obsahov trojuholníkov *ADS* a *BDS* odvodíme

$$\frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|SA|}{|SB|}\cdot\frac{\sin j_2}{\sin j_4}.$$

Pomocou posledných dvoch rovníc získame dokazovaný vzťah

$$(ABCD) = \frac{\sin(\angle(a,c)).\sin(\angle(b,d))}{\sin(\angle(a,d)).\sin(\angle(b,c))} .$$ W

Poznámka. Ak bod D bude nevlastným bodom rozšírenej priamky p, tak

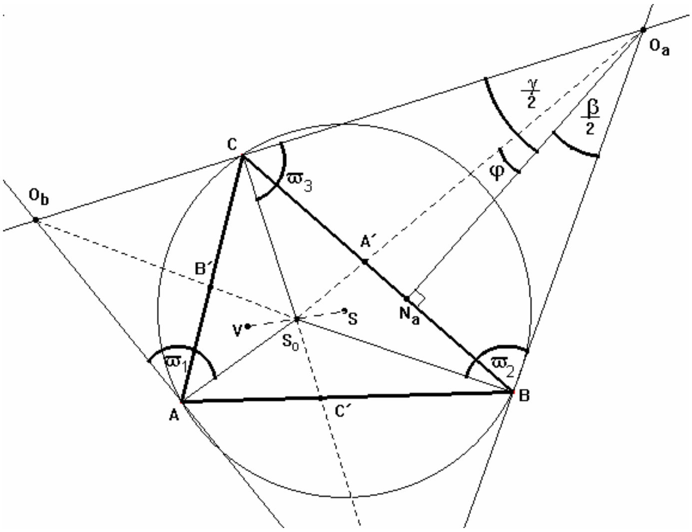
(ABCD$^{¥}$*) =* $\frac{\sin(\angle(a,c))}{\sin(\angle(b,c))}$, *pretože (ABD*$^{¥}$*) = 1.*

Sľúbený problém:

Nech $A' = S_0O_a \cap BC,\ B' = S_0O_b \cap CA,\ C' = S_0O_c \cap AB$ (obr. 27).

Sú trojuholníky *ABC, A´B´C´* perspektívne?

Opäť detailne vypočítame jeden z deliacich pomerov, napr. (BCA').



Obr. 27

Keďže N_a je dotykový bod kružnice l_a so stranou *BC*, platí

$$|\angle BO_aN_a| = \frac{b}{2},\ |\angle CO_aN_a| = \frac{g}{2}.$$

Označíme $w_1 = |\angle O_bAS_0|,\ w_2 = |\angle O_aBS_0|,\ w_3 = |\angle O_aCS_0|,\ j = |\angle N_aO_aS_0|$.

Platí $(BCN_aA') = \dfrac{(BCN_a)}{(BCA')}$ a pomocou lemy odvodíme

$$(BCA') = (BCN_a) \cdot \frac{\sin\frac{g}{2}}{\sin\frac{b}{2}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{b}{2} + j\right)}{\sin\left(\frac{g}{2} - j\right)}.$$

Podľa # CS_0O_a, # BS_0O_a]

$$\frac{\sin\left(\dfrac{b}{2}+j\right)}{\sin\left(\dfrac{g}{2}-j\right)}=\frac{\sin w_2}{\sin w_3}\cdot\frac{|BS_0|}{|CS_0|}.$$

Deliaci pomer (*BCA´*) je určený vzťahom

$$(BCA')=(BCN_a)\cdot\frac{\sin\dfrac{b}{2}}{\sin\dfrac{g}{2}}\cdot\frac{\sin w_2}{\sin w_3}\cdot\frac{|BS_0|}{|CS_0|}.$$

Pre deliace pomery (*CAB´*) a (*ABC´*) odvodíme

$$(CAB')=(CAN_b)\cdot\frac{\sin\dfrac{g}{2}}{\sin\dfrac{a}{2}}\cdot\frac{\sin(180^{\circ}-w_3)}{\sin w_1}\cdot\frac{|CS_0|}{|AS_0|}$$

$$(ABC')=(ABN_c)\cdot\frac{\sin\dfrac{a}{2}}{\sin\dfrac{b}{2}}\cdot\frac{\sin(180^{\circ}-w_1)}{\sin(180^{\circ}-w_2)}\cdot\frac{|AS_0|}{|BS_0|}.$$

Výsledný súčin $(ABC').(BCA').(CAB')=(-1)$,

pretože $(ABN_c).(BCN_a).(CAN_b)=(-1)$.

Priamky AN_a, BN_b, CN_c sa predsa pretínajú v Nagelovom bode *N*. W

Záver. **Trojuholníky *ABC, A´B´C´* sú perspektívne podľa bodu *X*.**

Poznámka. Názov bodu nám nie je známy (na obr. 27 nie je bod X vyznačený).

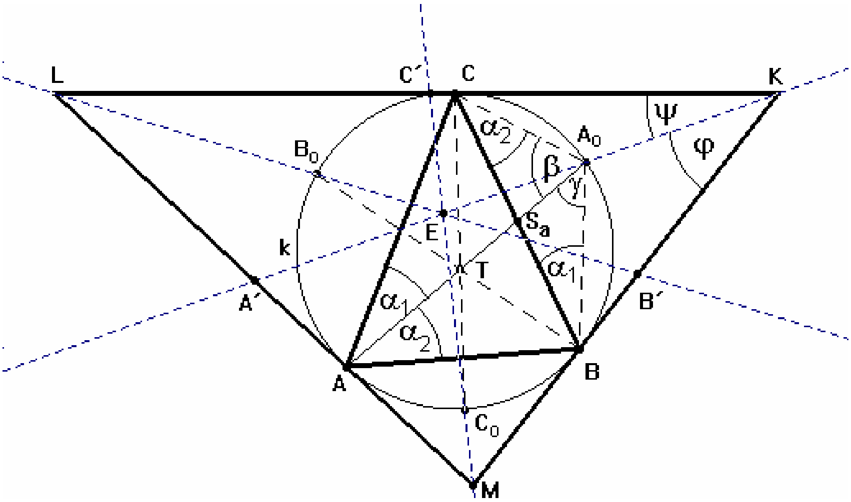
* Ako sa zmení postup posledného dôkazu, ak budeme na miesto bodu S_0 uvažovať o bode *V*, resp. inom vnútornom bode trojuholníka *ABC* ?

3. 4 Kružnica trojuholníku opísaná

Priamky *KL, LM* a *MK* sú postupne dotyčnice ku kružnici *k*(*S, r*) opísanej trojuholníku *ABC* s bodmi dotyku vo vrcholoch *C, A, B.* Nech $A_0=AT\cap k$, $B_0=BT\cap k$ a $C_0=CT\cap k$.

*Je zrejmé, že trojuholníky *ABC*, $A_0B_0C_0$ sú perspektívne podľa ťažiska *T*. Otázka je však iná:

Sú perspektívne trojuholníky *KLM*, $A_0B_0C_0$?



Obr. 28

Označíme $|\angle BKA_0| = \varphi$, $|\angle CKA_0| = \psi$, $|\angle CAA_0| = \alpha_1$, $|\angle BAA_0| = \alpha_2$,

$$A' = LM \cap KA_0,\ B' = KM \cap LB_0 \text{ a } C' = KL \cap MC_0 .$$

Vypočítame deliaci pomer (LMA'). Platí

$$(LMA') = -\frac{|KL|}{|MK|} \cdot \frac{\sin \psi}{\sin \varphi} .$$

Keďže štvoruholník ABA_0C je tetivovým štvoruholníkom vpísaným do kružnice *k*, platí

$$|\angle KCA_0| = \alpha_1 = |\angle CBA_0|,\ |\angle KBA_0| = \alpha_2 = |\angle BCA_0|,$$

$$|\angle CA_0A| = \beta \text{ a } |\angle BA_0A| = \gamma .$$

Podľa $\triangle KBA_0$, $\triangle KCA_0$ $\Rightarrow$

$$\frac{|BA_0|}{|CA_0|} \cdot \frac{\sin \psi}{\sin \varphi} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} .$$

A podľa # BCA_0] vypočítame $\dfrac{\sin y}{\sin j} = \left(\dfrac{\sin a_1}{\sin a_2} \right)^2$.

Keďže $\dfrac{\sin a_1}{\sin a_2} = -\dfrac{|AC|}{|AB|} \cdot \dfrac{1}{(BCS_a)}$,

Hľadaný vzťah je tvare $(LMA') = -\dfrac{|KL|}{|MK|} \cdot \left(-\dfrac{|AC|}{|AB|} \cdot \dfrac{1}{(BCS_a)} \right)^2$.

Cyklickou zámenou

$$(MKB') = -\frac{|LM|}{|KL|} \cdot \left(-\frac{|AB|}{|BC|} \cdot \frac{1}{(CAS_b)} \right)^2 \quad \text{a} \quad (KLC') = -\frac{|MK|}{|LM|} \cdot \left(-\frac{|CB|}{|AC|} \cdot \frac{1}{(ABS_c)} \right)^2.$$

Potom $(KLC').(LMA').(MKB') = (-1)$, z čoho vyplýva platnosť záveru: W

Záver. **Trojuholníky *KLM*, *$A_0B_0C_0$* sú perspektívne podľa bodu *E*.**

Bod ***E*** sa nazýva **Exeterovým** bodom.

3. 5 Odkazy na internetové adresy

1. **Gergonne Point**

   [online], [citované 25. október 2004]. Dostupné na Internete

   http://mathworld.wolfram.com/GergonnePoint.html

2. **Nagel Point**

   [online], [citované 25. október 2004]. Dostupné na Internete

   http://mathworld.wolfram.com/NagelPoint.html

3. **Clawson Point**

   [online], [citované 25. október 2004]. Dostupné na Internete

   http://mathworld.wolfram.com/ClawsonPoint.html

4. **Exeter Point**

   [online], [citované 25. október2004]. Dostupné na Internete

   http://mathworld.wolfram.com/ExeterPoint.html

4. INÉ ZNÁME BODY V TROJUHOLNÍKU

4.1 Lemoinov bod

Podobne ako je ťažisko trojuholníka spoločným priesečníkom ťažníc, tak aj samotný Lemoinov bod je spoločným priesečníkom troch priamok-symedián.

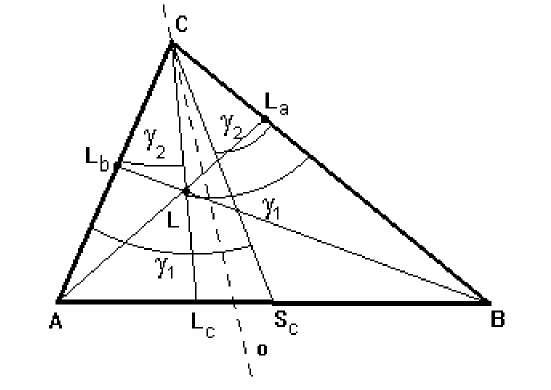
Definícia. Nech je daný trojuholník *ABC. Symediánou* s_c z vrcholu *C* nazveme priamku súmerne združenú s ťažnicou t_c na stranu *AB* podľa osi uhla *BCA.*

Podobne definujeme aj symediány z ďalších vrcholov.

Nech L_a, L_b, L_c sú priesečníky symedián s_a, s_b, s_c postupne z vrcholov *A, B, C* so stranami *BC, CA, AB* (obr. 29). Pomaly už klasická otázka:

Sú trojuholníky *ABC*, $L_aL_bL_c$ perspektívne ?

Označme $\left|\angle BCL_c\right| = g_1$, $\left|\angle ACL_c\right| = g_2$



Obr. 29

Pre deliaci pomer (ABL_c) platí

$$\left(ABL_c\right) = -\frac{|AC|}{|BC|}\cdot\frac{\sin g_2}{\sin g_1},$$ pretože

symediána s_c je súmerná s ťažnicou t_c podľa osi uhla g, pri zavedenom označení platí

$$\left|\angle BCS_c\right| = g_2,\ \left|\angle ACS_c\right| = g_1.$$

Pre $\left(ABS_c\right)$ ľahko odvodíme

$$(-1) = \left(ABS_c\right) = -\frac{|AC|}{|BC|}\cdot\frac{\sin g_1}{\sin g_2}.$$

Pre deliaci pomer (ABL_c) máme platný vzťah $(ABL_c) = -\left(\frac{|AC|}{|BC|}\right)^2$.

Cyklickou zámenou dostaneme

$$(BCL_a) = -\left(\frac{|AB|}{|AC|}\right)^2 \quad \text{a} \quad (CAL_b) = -\left(\frac{|BC|}{|AB|}\right)^2$$

Potom $(ABL_c).(BCL_a).(CAL_b) = (-1)$

a teda priamky AL_a, BL_b, CL_c sú Cevovými priamkami. W

Záver. **Trojuholníky *ABC*, , $L_aL_bL_c$ sú perspektívne podľa bodu *L*.**

Bod ***L*** sa nazýva **Lemoinov bod**.

*Lemoinov bod má mnohé zaujímavé vlastnosti. Nechávame na úvahu čitateľa, aby si premyslel pravdivosť tvrdenia:

Nech L je Lemoinov bod trojuholníka ABC. Ak $P_1P_2P_3$ je úpätnicový trojuholník príslušný Lemoinovmu bodu L, potom bod L je ťažiskom trojuholníka $P_1P_2P_3$.

4.2 Izogonálny bod trojuholníka

Nech je daný **ľubovoľný** bod *M* v rovine trojuholníka *ABC*, **rôzny** od bodov *A, B,* a *C.* V osovej súmernosti s osou o_a zostrojíme priamku AM_1 ako obraz priamky *AM,* v osovej súmernosti s osou o_b zostrojíme priamku BM_2 ako obraz priamky *BM* a na koniec v osovej súmernosti s osou o_g zostrojíme priamku CM_3 ako obraz priamky *CM.*

Nech $AM_1 \cap BC = A'$, $BM_2 \cap AC = B'$, $CM_3 \cap AB = C'$.

Poznámka. V predchádzajúcich kapitolách sme vždy položili otázku, či sú pôvodný a práve vykonštruovaný trojuholník perspektívne. Každé pravidlo má výnimku.
* *Čitateľ si iste premyslí existenciu niektorého z bodov A´, B´, C´.*

Vyhneme sa komplikáciám, ak sformulujeme otázku nasledovne:

Prechádzajú priamky AM_1, BM_2 a CM_3 vždy jedným bodom ?

Zavedieme označenie: $\angle MCO = g_0$, $\angle MBO = b_0$, $\angle MAO = a_0$ a dôkaz rozdelíme na niekoľko častí.

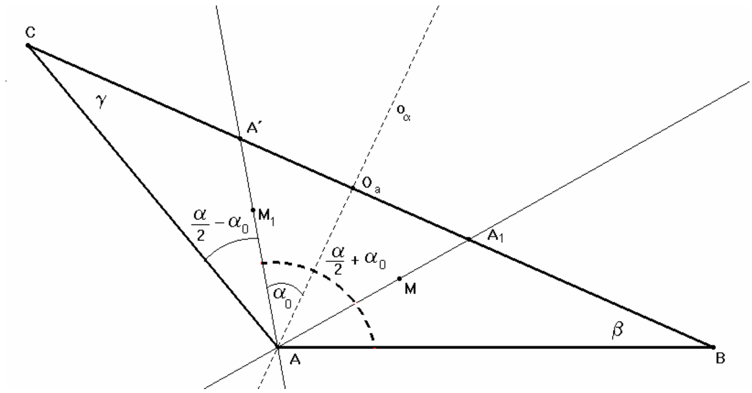
A) Bod *M* je bodom trojuholníka *ABC* (rôzny od vrcholov).

B) Bod *M* leží v rovine trojuholníka *ABC* a nie je bodom trojuholníka *ABC*.

Prípad A

a₁) Bod *M* leží vo vnútri trojuholníka *ABC*.

Označme postupne body C_1, B_1 a A_1 ako priesečníky priamok *CM*, *BM* a *AM* s priamkami *AB*, *AC* a *BC*. Naviac, aj príslušné priamky AM_1, BM_2 a CM_3 pretnú strany trojuholníka *ABC* postupne v bodoch *A´*, *B´* a *C´*.



Obr. 30

Vzhľadom k tomu, že priamka AM_1 je osovo súmerná podľa osi o_a s priamkou *AM*,

platí $|\angle CAA´| = \frac{\alpha}{2} - \alpha_0$ a $|\angle BAA´| = \frac{\alpha}{2} + \alpha_0$.

Podľa #*ABA´*, #*ACA´*]

$$\frac{|AA´|}{\sin b} = \frac{|BA´|}{\sin\left(\frac{a}{2} + a_0\right)} \quad \text{a} \quad \frac{|AA´|}{\sin g} = \frac{|CA´|}{\sin\left(\frac{a}{2} - a_0\right)}$$

Z oboch rovníc dostaneme

$$\frac{\sin g}{\sin b}\cdot\frac{\sin\left(\frac{a}{2}+a_0\right)}{\sin\left(\frac{a}{2}-a_0\right)}=\frac{|BA'|}{|CA'|}$$

a podľa # ABA_1 , # ACA_1] vypočítame

$$\frac{\sin g}{\sin b}\cdot\frac{|CA_1|}{|BA_1|}=\frac{\sin\left(\frac{a}{2}+a_0\right)}{\sin\left(\frac{a}{2}-a_0\right)}$$

Použitím práve uvedených vzťahov a podľa # ABC] má výsledný vzťah tvar

$$\left(BCA'\right)=\left(\frac{|AB|}{|AC|}\right)^2\cdot\frac{1}{\left(BCA_1\right)}$$

Cyklickou zámenou

$$\left(CAB'\right)=\left(\frac{|BC|}{|AB|}\right)^2\cdot\frac{1}{\left(CAB_1\right)}\ ,\qquad\qquad \left(ABC'\right)=\left(\frac{|AC|}{|BC|}\right)^2\cdot\frac{1}{\left(ABC_1\right)},$$

kde $\left(ABC_1\right).\left(BCA_1\right).\left(CAB_1\right)$ = (-1), pretože priamky *AM, BM* a *CM* prechádzajú bodom *M*.

Potom $\left(ABC'\right).\left(BCA'\right).\left(CAB'\right)$ = (-1).

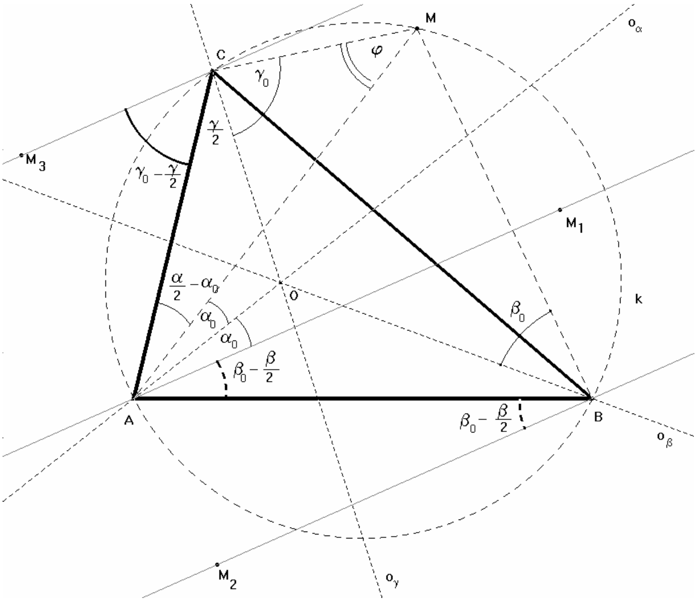
a_2) Nech bod *M* leží na hranici trojuholníka *ABC*.

Predpokladajme, bez ujmy na všeobecnosti, že *M* je vnútorným bodom úsečky *AB*. Jeho obraz, bod M_1 (obraz v osovej súmernosti s osou o_a) leží na priamke *AC*, ktorá je tým totožná s priamkou AM_1. Bod M_2 (obraz bodu *M* v osovej súmernosti s osou o_b) leží na priamke *BC*, ktorá je zase totožná s priamkou BM_2. Bod M_3 bude obrazom bodu *M* v osovej súmernosti s osou o_g. Priamky AM_1, BM_2 a CM_3 triviálne prechádzajú jedným bodom – bodom *C*.

Poznámka. Ak je bod M totožný s niektorým z vrcholov trojuholníka ABC, napr. s bodom C, priamky AM_1 a BM_2 sú totožné s priamkou AB. Naviac, priamku CM_3 nie je možné zostrojiť. Táto poloha bodu M je predpokladom vylúčená.

Prípad B

b$_1$) Bod *M* patrí opísanej kružnici *k* trojuholníka *ABC* a je rôzny od jeho vrcholov. Tvrdíme, že *priamky AM_1, BM_2 a CM_3 sú navzájom rôznymi rovnobežnými priamkami* ***vtedy a len vtedy****, keď bod M leží na kružnici k opísanej trojuholníku ABC a je rôzny od jeho vrcholov.*



Obr. 31

Tvrdenie dokážeme v dvoch krokoch.

I. Chceme dokázať: Ak platí $AM_1 \parallel BM_2 \parallel CM_3$, potom $M \in k$.

Vyznačíme príslušné uhly tak, ako vidno na obr. 31. Keďže priamky AM_1, BM_2 a CM_3 sú navzájom rôznymi rovnobežkami, platí

$$|\angle M_1AB| = |\angle M_2BA|, \qquad \text{t.j.} \qquad \beta_0 - \frac{\beta}{2} = \frac{\alpha}{2} - \alpha_0$$

$$|\angle M_3CB| = 180° - |\angle M_2BC|, \qquad \text{t.j.} \qquad \gamma_0 + \frac{\gamma}{2} = 180° - \left(\beta_0 + \frac{\beta}{2}\right)$$

Vypočítame $\varphi = |\angle CMA|$ z trojuholníka *ACM*, pričom z vyššie uvedených rovností dostávame

$$\varphi = 180° - \left[\left(\frac{\gamma}{2} + \gamma_0\right) + \left(\frac{\alpha}{2} - \alpha_0\right)\right] = \cdots = \beta\ .$$

Na základe vety o obvodových uhloch vyplýva, že bod *M* leží na kružnici *k*.

II. Nech ***M*** Î ***k***. Chceme dokázať, že ***AM*₁** ïï ***BM*₂** ïï ***CM*₃.**

Ak bod *M* leží na kružnici *k*, podľa vety o obvodových uhloch platí

$$|\angle MAB| = |\angle MCB| = \frac{\alpha}{2} + \alpha_0 .$$

Pretože bod M_3 je osovo súmerný s bodom *M* podľa osi o_g,

tak $|\angle M_3CA| = |\angle M_1AC|$.

To znamená, že priamky CM_3 a AM_1 sú navzájom rôznymi rovnobežnými priamkami.

Analogicky zistíme

$$|\angle MAC| = |\angle MBC| = \frac{\alpha}{2} - \alpha_0 \quad \text{a} \quad |\angle M_1AB| = |\angle M_2BA| .$$

Odtiaľ vyplýva, že priamka AM_1 je rovnobežná aj s priamkou BM_2 .

b₂) Bod *M* nepatrí kružnici *k* opísanej trojuholníku *ABC*

Myšlienka dôkazu sa veľmi nelíši od prípadu, keď bod *M* ležal vo vnútri trojuholníka *ABC.*

Ako sme však upozornili, existuje taká poloha bodu *M*, ktorá vylučuje existenciu niektorého z bodov *A´, B´, C´*, resp. A_1, B_1, C_1 (prípadne viacerých súčasne).

Ilustračne vyšetríme prípad, keď bude priamka *AM* **rovnobežná** s priamkou *BC*. Môžu nastať možnosti

i) bod M_1 nepatrí priamke *AM*

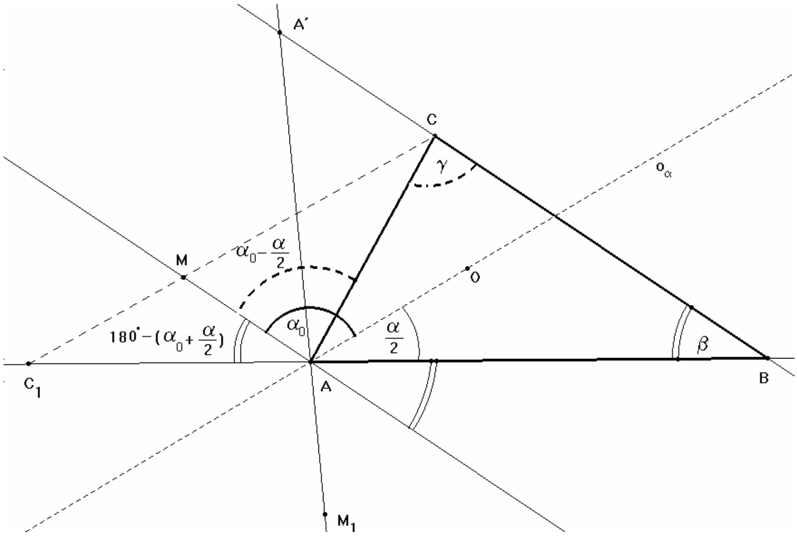
ii) bod M_1 patrí priamke *AM*

iii) priamka MM_1 je rovnobežná s priamkou *BC*

i) Bod A_1 neexistuje, predpokladáme však existenciu bodov B_1, C_1, A', B' a C'.

Vzhľadom k tomu, že priamka AM je rovnobežná s priamkou BC, platí

$$\beta = 180° - \left(\alpha_0 + \frac{\alpha}{2}\right), \qquad \gamma = \alpha_0 - \frac{\alpha}{2} \qquad \text{a} \qquad (BCA') = \left(\frac{|AB|}{|AC|}\right)^2$$



Obr. 32

Zistíme hodnotu súčinu

$$(ABC_1).(CAB_1).$$

Na základe rozšírenej definície deliaceho pomeru usporiadanej trojice kolineárnych bodov platí

$$(BCA_1) = 1.$$

Potom $$(ABC_1).(CAB_1) = (-1)$$

a výsledný súčin, ako predchádzajúcej časti, vychádza v tvare

$$(ABC').(BCA').(CAB') = (-1).$$

Priamky AM_1, BM_2 a CM_3 prechádzajú jedným bodom, čo sme mali dokázať.

ii) Predpokladáme existenciu bodov *B₁, C₁, A₁, B´* a *C´*. Ak je priamka AM_1 rovnobežná s priamkou *BC*, situácia je analogická. Pre deliace pomery platia

vzťahy $$\left(\frac{|AC|}{|BC|}\right)^2 \cdot \frac{1}{(ABC_1)} = (ABC')$$

$$\left(\frac{|BC|}{|AB|}\right)^2 \cdot \frac{1}{(CAB_1)} = (CAB')\ ,\ (BCA_1) = \left(\frac{|AB|}{|AC|}\right)^2,\ (BCA') = 1.$$

Priamky AM_1, BM_2 a CM_3 opäť prechádzajú jedným bodom.

iii) Ide o veľmi špeciálny prípad. Uhol $\alpha_0 = 90°$ a podľa i) platí $\gamma = 90° - \frac{\alpha}{2} = \beta$. Z toho vyplýva, že trojuholník *ABC* je rovnoramenný so základňou *BC*. Výpočet je triviálny a tým považujeme túto časť dôkazu za uzavretú. W

* Sú však aj iné polohy bodu *M*, napr. ak body *A, B, C* a *M* sú vrcholmi rovnobežníka. Postup pre odvodenie príslušných deliacich pomerov by bol analogický. Detailný dôkaz by nepriniesol v podstate nič nové, a preto preverenie ostatných možností prenechávame záujmu čitateľa ako cvičenie.

Záver. **Priamky AM_1, BM_2 a CM_3 prechádzajú jedným bodom alebo sú navzájom rôznymi rovnobežnými priamkami.**

Spoločný bod priamok AM_1, BM_2 a CM_3 sa nazýva **izogonálny** bod trojuholníka *ABC*.

* Čitateľ určite postrehol tento detail:

Ak by sme pracovali v rozšírenej euklidovskej rovine $\overline{E_2}$, mohli by sme tvrdiť, že priamky AM_1, BM_2 a CM_3 ***vždy*** prechádzajú jedným bodom.

Spoločný bod priamok by bol vlastným, alebo nevlastným bodom priamky AM_1 v $\overline{E_2}$. K výpočtu potrebných deliacich pomerov by sme použili rozšírenú definíciu deliaceho pomeru.

4.3 Izotomický bod trojuholníka

Začneme definíciou izotomicky konjugovaných priamok.

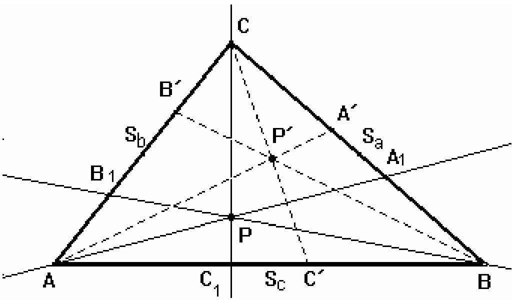
Definícia. Nech je daný trojuholník *ABC* a na strane *AB* bod *X*. Priamku *CX´* nazývame *izotomicky konjugovanou* s priamkou *CX*, ak pre bod *X´* ležiaci na strane *AB* platí $|AX| = |BX'|$.

* Čitateľovi je iste jasné, že body *X, X´* sú súmerné podľa stredu S_c.

Nech *P* je ľubovoľný bod trojuholníka *ABC*, rôzny od vrcholov *A, B, C.* Označíme $A_1 = BC \cap AP$, $B_1 = CA \cap BP$, $C_1 = AB \cap CP$ a nech *AA´, BB´, CC´* sú postupne izotomicky konjugované priamky k priamkam AA_1, BB_1, CC_1 (obr. 33).

Pýtame sa:

Sú trojuholníky *ABC, A´B´C´* perspektívne ?



Obr. 33

A) Nech je bod *P* vnútorným bodom trojuholníka *ABC.* Počítame

$$(ABC') = -\frac{|AC'|}{|BC'|} = -\frac{|BC_1|}{|AC_1|} = \frac{1}{(ABC_1)}$$

Cyklickou zámenou $\quad (BCA') = \dfrac{1}{(BCA_1)}, \qquad (CAB') = \dfrac{1}{(CAB_1)}.$

Priamky AA_1, BB_1, CC_1 prechádzajú bodom *P*, preto platí

$$(ABC').(BCA').(CAB') = (-1) .$$

Z toho vyplýva, že priamky AA', BB', CC' sú tiež Cevovými priamkami.

B) Nech bod *P*, bez ujmy na všeobecnosti, je vnútorným bodom strany *AB*. Platí $A_1 = B, B_1 = A, B' = C = A' = P'$.

Príslušné izotomicky konjugované priamky prechádzajú bodom *C*. W

Záver. **Trojuholníky *ABC, A´B´C´* sú perspektívne podľa bodu *P´*.**

Bod ***P´*** sa nazýva **izotomický bod** vzhľadom k bodu *P*, resp. izotomicky konjugovaný s bodom *P*.

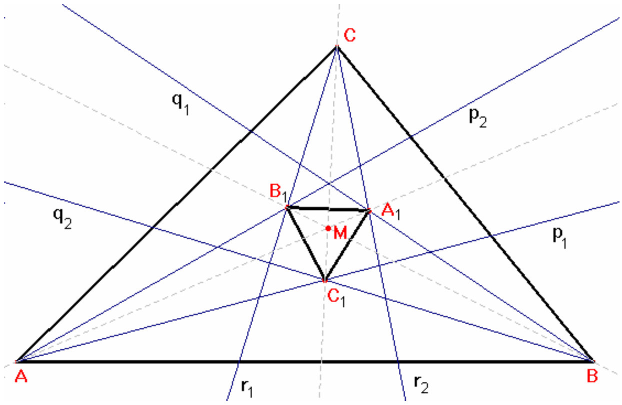
* Nechávame na úvahu čitateľa, aby si premyslel pravdivosť tvrdenia:

Ak je v trojuholníku ABC bod P izotomicky konjugovaný s bodom P´, potom je aj bod P´ izotomicky konjugovaný s bodom P.

* Je možné uvažovať o rozšírení definície izotomicky konjugovaných priamok? Bolo by sme schopní skúmať existenciu izotomicky konjugovaného bodu *P´* vzhľadom k bodu *P*, ktorý nie je bodom trojuholníka *ABC* ?

4.4 Morleyov bod

Nech je daný trojuholník *ABC* a nech priamky p_1, p_2 sú takými priamkami prechádzajúcimi vrcholom *A*, ktoré rozdelia uhol *CAB* na tri navzájom zhodné uhly; priamky q_1, q_2 tiež rozdelia uhol *CBA* na tri navzájom zhodné uhly a rovnako priamky r_1, r_2 rozdelia uhol *BCA* na tri navzájom zhodné uhly.



Obr. 34

Indexy priamok p_1, p_2 volíme tak, aby sa v otočení okolo vrcholu A v kladnom smere o uhol veľkosti $\frac{1}{3}|\angle CAB|$ priamka p_1 zobrazila na priamku p_2. Analogicky pre priamky q_1, q_2, resp. r_1, r_2.

Ďalej označíme $A_1 = q_1 \cap r_2$, $B_1 = p_2 \cap r_1$, $C_1 \in p_1 \cap q_2$.

Veta (Morleyova). Trojuholník $A_1B_1C_1$ je rovnostranným trojuholníkom.

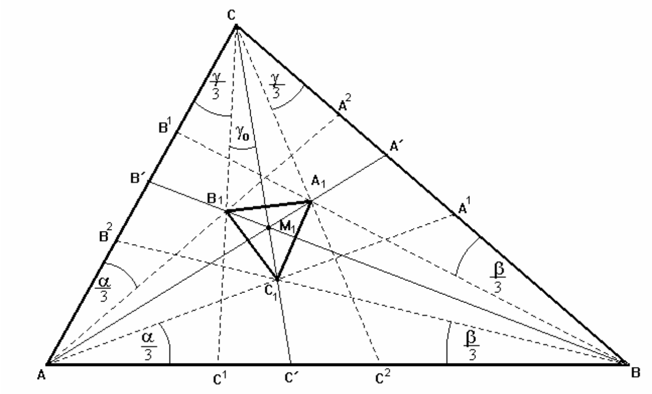
Dôkaz vety je značne rozsiahly a preto ho vynecháme. Uvedieme však internetové adresy, kde čitateľ, v prípade záujmu, tieto dôkazy nájde.

Poznámka. K problematike dĺžok strán trojuholníka $A_1B_1C_1$ sa ešte vrátime v piatej kapitole.

V súvislosti s Morleyovým trojuholníkom sa objavuje prirodzená otázka:

Sú trojuholníky ABC, $A_1B_1C_1$ perspektívne ?

Nech $A^1, A^2 \in BC$ sú body, pre ktoré platí $|\angle A^1AB| = |\angle A^2AC| = \frac{a}{3}$, analogicky pre body B^1, $B^2 \in AC$ zase $|\angle CBB^1| = |\angle ABB^2| = \frac{b}{3}$ a konečne pre body $C^1, C^2 \in AB$ bude platiť $|\angle ACC^1| = |\angle BCC^2| = \frac{g}{3}$.



Obr. 35

Zavedieme označenie

$A_1 = BB^1 \cap CC^2$, $B_1 = CC^1 \cap AA^2$, $C_1 = AA^1 \cap BB^2$, $A' \in AA_1 \cap BC$,

$B' \in BB_1 \cap AC$, $C' \in CC_1 \cap AB$, $|\angle C^1CC'| = g_0$ a vypočítame deliace pomery príslušných usporiadaných trojíc bodov.

Podľa $\#AC'C,\ \#C'BC$]

$$\frac{|AC'|}{\sin\left(\frac{g}{3}+g_0\right)}=\frac{|CC'|}{\sin a} \quad \text{a} \quad \frac{|BC'|}{\sin\left(\frac{2}{3}g-g_0\right)}=\frac{|CC'|}{\sin b}.$$

Zo vzťahov odvodíme

$$\frac{|AC'|}{|BC'|}.\frac{\sin\left(\frac{2}{3}g-g_0\right)}{\sin\left(\frac{g}{3}+g_0\right)}=\frac{|AC|}{|BC|}$$

Analogicky $\#CBC_1,\ \#CAC_1$]

$$\frac{|BC_1|}{\sin\left(\frac{2}{3}g-g_0\right)}=\frac{|CC_1|}{\sin\left(\frac{2}{3}b\right)} \quad \text{a súčasne} \quad \frac{|AC_1|}{\sin\left(\frac{g}{3}+g_0\right)}=\frac{|CC_1|}{\sin\left(\frac{2}{3}a\right)}$$

Odtiaľ

$$\frac{|BC_1|}{|AC_1|}\cdot\frac{\sin\left(\frac{g}{3}+g_0\right)}{\sin\left(\frac{2}{3}g-g_0\right)}=\frac{\sin\left(\frac{2}{3}a\right)}{\sin\left(\frac{2}{3}b\right)}$$

Podľa # ABC_1] platí
$$\frac{|BC_1|}{|AC_1|}=\frac{\sin\frac{a}{3}}{\sin\frac{b}{3}}$$

Potom
$$\frac{\sin\left(\frac{g}{3}+g_0\right)}{\sin\left(\frac{2}{3}g-g_0\right)}=\frac{\sin\frac{b}{3}}{\sin\frac{a}{3}}\cdot\frac{\sin\left(\frac{2}{3}a\right)}{\sin\left(\frac{2}{3}b\right)}$$

Deliaci pomer usporiadanej trojice bodov *A, B, C'* je nasledovný
$$(ABC')=-\frac{\sin\frac{b}{3}}{\sin\frac{a}{3}}\cdot\frac{\sin\left(\frac{2}{3}a\right)}{\sin\frac{2}{3}b}\cdot\frac{\sin b}{\sin a}$$

Cyklickou zámenou
$$(BCA')=-\frac{\sin\frac{g}{3}}{\sin\frac{b}{3}}\cdot\frac{\sin\left(\frac{2}{3}b\right)}{\sin\left(\frac{2}{3}g\right)}\cdot\frac{\sin g}{\sin b}\qquad (ACB')=-\frac{\sin\frac{a}{3}}{\sin\frac{g}{3}}\cdot\frac{\sin\left(\frac{2}{3}g\right)}{\sin\left(\frac{2}{3}a\right)}\cdot\frac{\sin a}{\sin g}$$

Výsledný súčin $(ABC').(BCA').(CAB') = (-1)$. W

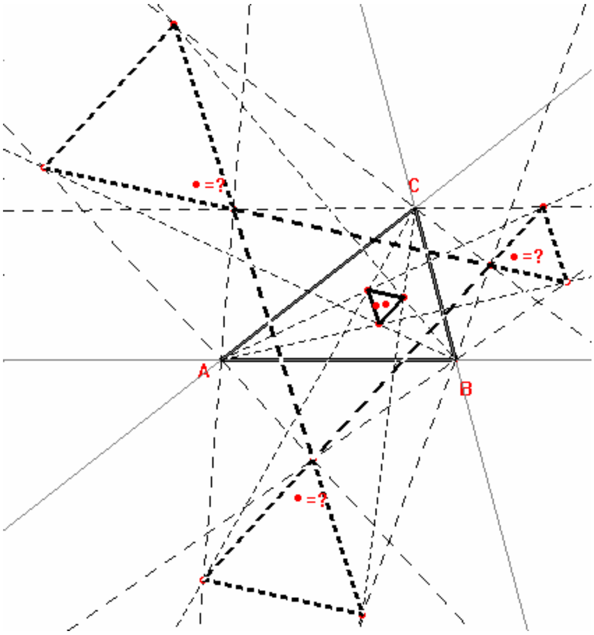
Podľa Cevovej vety platí

Záver. **Trojuholníky *ABC, A₁B₁C₁* sú perspektívne podľa bodu *M₁* .**

Bod ***M₁*** sa nazýva *prvý* **Morleyov** bod. Prvým sa nazýva preto, že ich zrejme existuje viac.

* Prenecháme na úvahu čitateľa, aby sa pokúsil dokázať analogické tvrdenie súvisiace s trisekciou vonkajších uhlov a',b',g' trojuholníka *ABC*.

Možno za návod považovať obr. 36? Bude to návod len pre jednu úvahu?



Obr. 36

4.5 Odkazy na internetové adresy

1. Lemoine Geometry

[online], [citované 25. október 2004]. Dostupné na Internete

http://mathworld.wolfram.com/LemoineGeometry.html

2. Triangle Centers

[online], [citované 25. október 2004]. Dostupné na Internete

http://faculty.evansville.edu/ck6/tcenters/

3. Isotomic Lines

[online], [citované 25. október 2004]. Dostupné na Internete

http://mathworld.wolfram.com/IsotomicLines.html

4. Morley´s Miracle. A Proof

[online], [citované 25. október 2004]. Dostupné na Internete

http://www.cut-the-knot.org/triangle/Morley/yours_truly.shtml

5. Morley ´s Miracle. An unexpected Variant

[online], [citované 25. október 2004]. Dostupné na Internete

http://www.cut-the-knot.org/triangle/Morley/Larry.shtml

5 NIEKTORÉ ZOVŠEOBECNENIA

V predchádzajúcich partiách sme uviedli množstvo tvrdení a dôkazov o perspektívnych trojuholníkoch, resp. významných bodoch trojuholníka.

Táto kapitola priblíži čitateľovi niektoré všeobecnejšie tvrdenia.

5.1 Zovšeobecnenie tvrdenia o Exeterovom bode

K zovšeobecnenému tvrdeniu o Exeterovom bode potrebujeme pomocné tvrdenie.

Lema. Nech je daný trojuholník *ABC* a nech v jeho rovine je daný bod *P*, ktorý neleží na žiadnej z priamok *AB, BC, CA.* Označme $AP \cap k = A_1$, $BP \cap k = B_1$, $CP \cap k = C_1$, kde *k* je opísaná kružnica trojuholníku *ABC.* Potom

$$\frac{|AB_1|}{|CB_1|} \cdot \frac{|BC_1|}{|AC_1|} \cdot \frac{|CA_1|}{|BA_1|} = 1$$

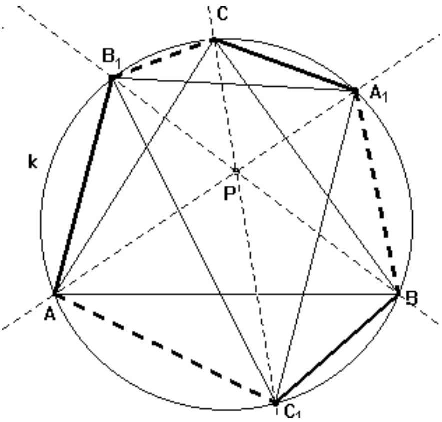
Dôkaz. Rozlíšime dva prípady.

A. Bod *P* leží v kruhu ohraničenom kružnicou *k.*

B. Bod *P* nie je bodom kruhu ohraničenom kružnicou *k.*

Prípad A. Podľa vety o obvodovom uhle platí $|\angle AB_1B| = |\angle BA_1B|$. Uhly $\angle APB_1, \angle BPA_1$ sú vrcholové uhly, a preto trojuholníky *AB₁P, BA₁P* sú podobné podľa vety *uu* a odtiaľ platí

$$\frac{|AB_1|}{|BA_1|} = \frac{|AP|}{|BP|}$$



Obr. 37

Obdobné tvrdenia platia aj o trojuholníkoch *BC_1P, CB_1P* a *CA_1P, AC_1P*. Dostaneme

$$\frac{|BC_1|}{|CB_1|}=\frac{|BP|}{|CP|},\ \frac{|CA_1|}{|AC_1|}=\frac{|CP|}{|AP|}$$

Ich vynásobením získame

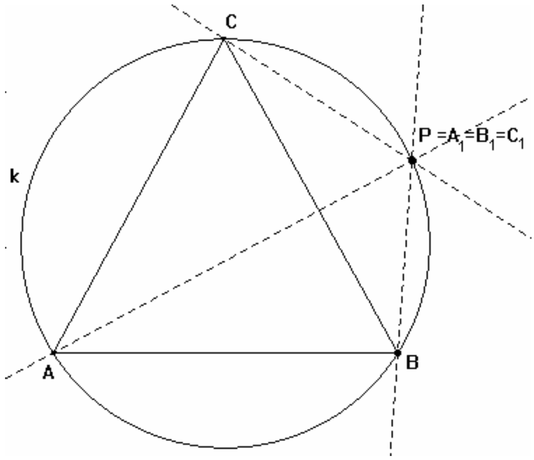
$$\frac{|AB_1|}{|CB_1|}\cdot\frac{|BC_1|}{|AC_1|}\cdot\frac{|CA_1|}{|BA_1|}=1$$

Ak bod P leží na kružnici k , tvrdenie triviálne platí, pretože

$P = A_1 = B_1 = C_1$

a dokazovaný vzťah má tvar

$$\frac{|AP|}{|CP|}\cdot\frac{|BP|}{|AP|}\cdot\frac{|CP|}{|BP|}=1$$



Obr. 38

<u>Prípad B.</u> * Dôkaz je analogický a prenecháme ho na úvahu čitateľa. Čitateľ si tiež premyslí dôležitosť predpokladu o polohe bodu *P*. Inak by sme získali neurčitý výraz $\frac{0}{0}$. W

Uvažujme takýmto spôsobom!

Nech je daný trojuholník *ABC* a nech postupne v bodoch *A, B, C* sú zostrojené dotyčnice ku kružnici *k* tak, že sa pretínajú v bodoch *K, L, M* (obr. 39). Ďalej nech *P* je ľubovoľný bod v rovine trojuholníka *ABC* a nech $AP \cap k = A'$, $BP \cap k = B'$, $CP \cap k = C'$, pričom predpokladáme, že <u>súčasne</u> nemôžu nastať práve dve z uvedených možností $A = A', B = B', C = C'$.

Hľadajme odpoveď na otázku :

Sú trojuholníky *KLM, A´B´C´* perspektívne ?

Rozlíšime dva hlavné prípady polohy bodu *P* podľa toho, či bod *P* patrí kruhu ohraničenému kružnicou *k* alebo nie.

<u>1. Nech bod *P* je bodom kruhu ohraničeného kružnicou *k.*</u>

Potom

A. bod *P* neleží na hranici trojuholníka *ABC*

B. bod *P* leží na hranici trojuholníka *ABC*

C. bod P leží na kružnici *k*

<u>Prípad A</u>

Nech priamka *AP* rozdelí uhol a na dva uhly $a_1^{'}$ a $a_2^{'}$, kde $a_1^{'} = |\angle CAA'|, a_2^{'} = |\angle A'AB|$. Priamka *KA´* zase rozdelí uhol *BKC* na dva uhly a_1 a a_2, kde $a_1 = |\angle CKA'|, a_2 = |\angle A'KB|$.

Trojuholník *CBK* je rovnoramenný trojuholník, kde platí $|\angle KBC| = |\angle CAK|$, pričom $|\angle \mathrm{KBC}| = a$, pretože ide o úsekový uhol kružnice *k.*

Naviac, štvoruholník *ABA´C* je tetivový, a potom platí

$$|\angle A'CB| = a_2^{'}, |\angle A'BC| = a_1^{'}, |\angle A'CK| = a_1^{'}, |\angle A'BK| = a_2^{'}.$$

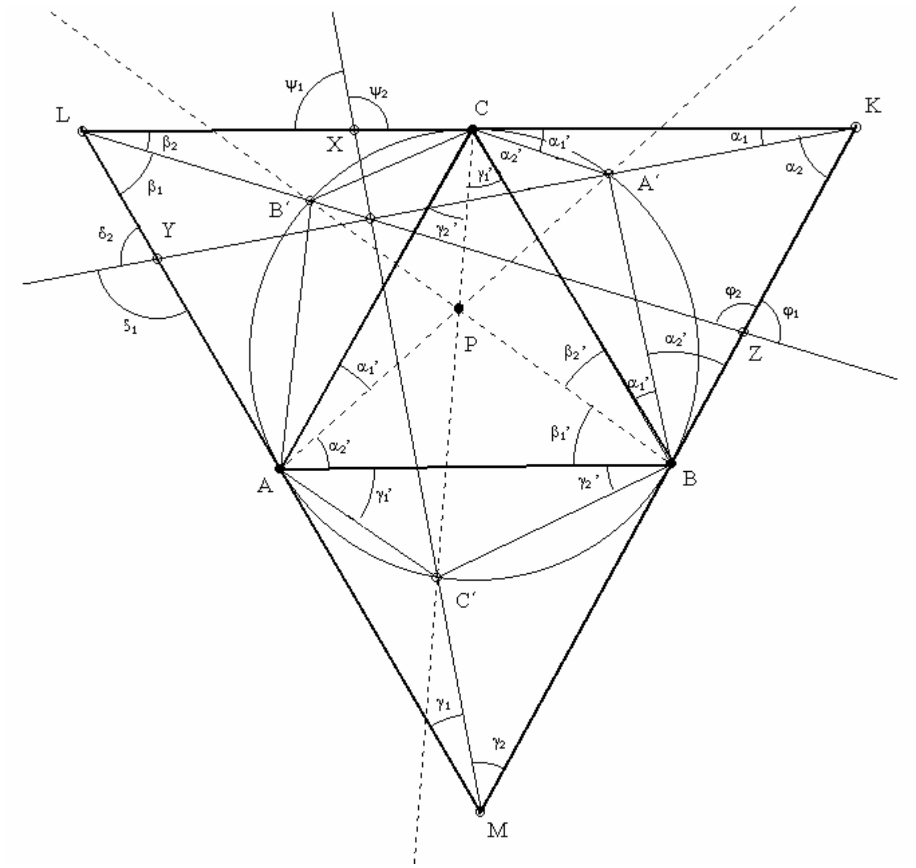
Analogická situácia platí pre trojuholníky *ACL, ABM* .

Označme prieniky priamok *KA´, LB´, MC´* so stranami trojuholníka *KLM* postupne *Y, Z, X* .

Budeme pracovať s uhlami pri týchto vrcholoch, preto nech

$$j_1 = |\angle LZM|,\ j_2 = |\angle LZK|,\ y_1 = |\angle MXK|,\ y_2 = |\angle MXL|,$$

$$d_1 = |\angle LYK|,\ d_2 = |\angle MYK|.$$



Obr.39

Podľa $\#KMX,\ \#LMX$] (vieme, že $y_1 + y_2 = 180°$)

$$\frac{|KX|}{|LX|} = \frac{|KM|}{|LM|} \cdot \frac{\sin g_2}{\sin g_1}$$

Analogickým spôsobom pomocou $\#KLY,\ \#KMY$] dostaneme vzťah

$$\frac{|LY|}{|MY|} = \frac{|KL|}{|KM|} \cdot \frac{\sin a_1}{\sin a_2}$$

a z trojuholníkov $\#LMZ,\ \#KLZ$]

$$\frac{|MZ|}{|KZ|} = \frac{|LM|}{|KL|} \cdot \frac{\sin b_1}{\sin b_2}$$

Upravíme

$$(KLX).(LMY).(MKZ)=(-1)\cdot\frac{\sin a_1}{\sin a_2}\cdot\frac{\sin b_1}{\sin b_2}\cdot\frac{\sin g_2}{\sin g_1}$$

Problematická zostáva hodnota zlomku

$$\frac{\sin a_1 \sin b_1 \sin g_2}{\sin a_2 \sin b_2 \sin g_1}$$

Počítajme!

Trojuholník *CBK* obsahuje bod *A´*. Úsečky *A´C, A´B, A´K* rozdelia trojuholník *CBK* na tri trojuholníky.

Podľa #*CA´K*, #*BA´K*]

$$\frac{|KA'|}{\sin a_1'}=\frac{|CA'|}{\sin a_1}, \qquad \frac{|KA'|}{\sin a_2'}=\frac{|BA'|}{\sin a_2}$$

Odtiaľ
$$\frac{|CA'|}{|BA'|}\cdot\frac{\sin a_2}{\sin a_1}=\frac{\sin a_2'}{\sin a_1'}$$

Naviac #*BCA´*]

$$\frac{|BA'|}{|CA'|}=\frac{\sin a_2'}{\sin a_1'}$$

Odtiaľ
$$\frac{\sin a_2}{\sin a_1}=\left(\frac{|BA'|}{|CA'|}\right)^2$$

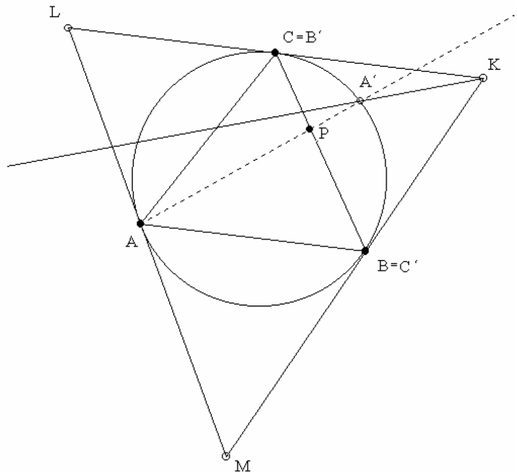
Podobne odvodíme $\frac{\sin b_2}{\sin b_1}=\left(\frac{|CB'|}{|AB'|}\right)^2$ a $\frac{\sin g_2}{\sin g_1}=\left(\frac{|BC'|}{|AC'|}\right)^2$

Potom
$$\frac{\sin a_2}{\sin a_1}\cdot\frac{\sin b_2}{\sin b_1}\cdot\frac{\sin g_1}{\sin g_2}=\left(\frac{|BA'|}{|CA'|}\cdot\frac{|CB'|}{|AB'|}\cdot\frac{|AC'|}{|BC'|}\right)^2,$$

pričom podľa lemy
$$\frac{|BA'|}{|CA'|}\cdot\frac{|CB'|}{|AB'|}\cdot\frac{|AC'|}{|BC'|}=1$$

Výsledný súčin deliacich pomerov

$$(KLX).(LMY).(MKZ)=(-1).$$



Obr. 40

Prípad B

Nech bez ujmy na všeobecnosti bod *P* leží na strane *BC*.

Obrazom bodu *A* je *A´*, avšak obrazom bodu *B* je bod *C* a naopak. Priamka *MC´* je totožná s priamkou *MK*, priamka *LB´* je zase totožná s priamkou *KL*.

Spoločný prienik priamok *KA´*, *LB´*, *MC´* je bod *K* a tvrdenie platí.

Prípad C

V tomto prípade sú body *A´*, *B´*, *C´* a *P* totožné a spoločný prienik priamok *KA´*, *LB´*, *MC´* je práve *P* a tvrdenie platí.

Ak bod *P* je vnútorným bodom kruhu ohraničeného opísanou kružnicou *k* trojuholníku *ABC*, potom sú trojuholníky *KLM* , *A´B´C´* perspektívne.

2. Nech bod *P* nie je bodom kruhu ohraničeného kružnicou *k*.

Rozlíšime

A. bod *P* neleží na žiadnej z priamok *AB*, *BC*, *CA*

B. bod *P* leží na jednej z priamok *AB*, *BC*, *CA*

Prípad A

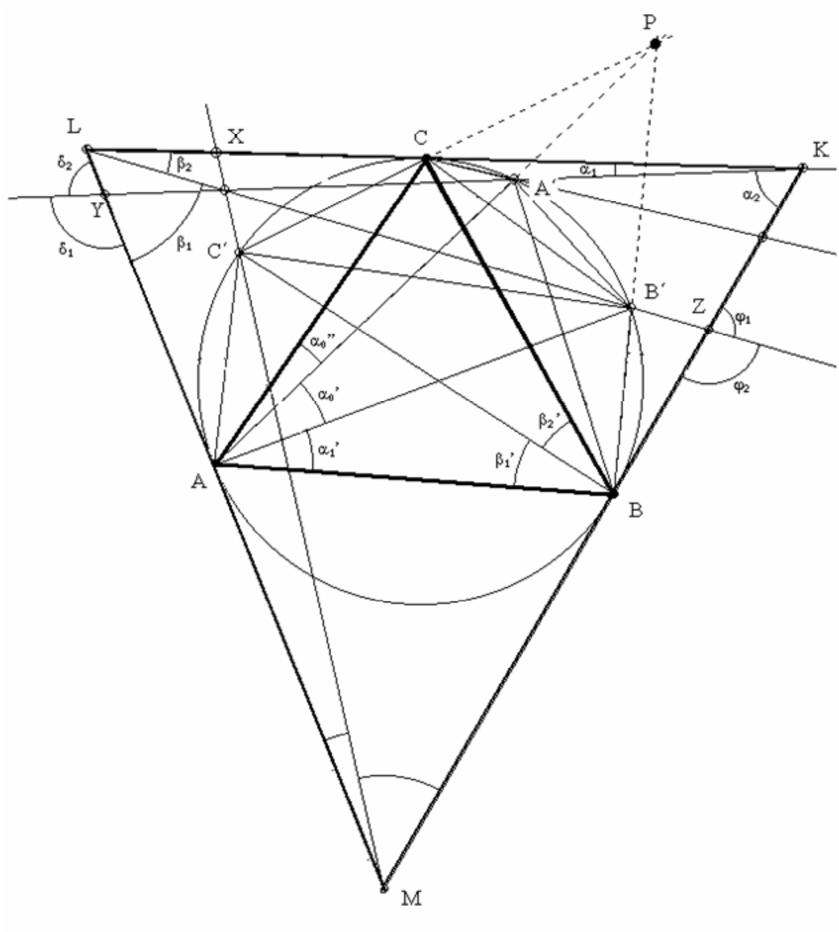
Ponecháme rovnaké označenie bodov a uhlov ako v prípade **1A**. (obr. 41).

Opäť platí
$$(KLX) = -\frac{|KM|}{|ML|} \cdot \frac{\sin g_2}{\sin g_1}$$

Analogicky

$$\left(LMY\right)=-\frac{\left|KL\right|}{\left|KM\right|}\cdot\frac{\sin a_1}{\sin a_2} \qquad \left(MKZ\right)=-\frac{\left|ML\right|}{\left|KL\right|}\cdot\frac{\sin b_1}{\sin b_2}$$

Potom $\quad \left(KLX\right).\left(LMY\right).\left(MKZ\right)=\left(-1\right)\cdot\frac{\sin g_2}{\sin g_1}\cdot\frac{\sin a_1}{\sin a_2}\cdot\frac{\sin b_1}{\sin b_2}$



Obr. 41

Opäť máme za úlohu určiť hodnotu zlomku

$$\frac{\sin g_2}{\sin g_1}\cdot\frac{\sin a_1}{\sin a_2}\cdot\frac{\sin b_1}{\sin b_2}$$

Podľa $\#LCB',\#LAB'$]

$$\frac{\left|CB'\right|}{\left|AB'\right|}\cdot\frac{\sin b_1}{\sin b_2}=\frac{\sin\left(a_2'+b'\right)}{\sin a_2'}$$

Kde $\sin\left(a_2' + b'\right) = \sin\left(a_1' + g'\right)$

Potom $$\frac{|CB'|}{|AB'|}\cdot\frac{\sin b_1}{\sin b_2} = \frac{\sin\left(a_1' + g'\right)}{\sin a_2'}$$

#*CAB´*] $$\frac{|CB'|}{|AB'|} = \frac{\sin a_2'}{\sin\left(g' + a_1'\right)}$$

Potom $$\frac{\sin b_1}{\sin b_2} = \left(\frac{|AB'|}{|CB'|}\right)^2$$

Podobne stačí uvažovať o trojuholníkoch *CKA´*, *BKA´* a *CBA´*.

Výsledok je $$\frac{\sin a_2}{\sin a_1} = \left(\frac{|BA'|}{|CA'|}\right)^2$$

Nakoniec z trojuholníkov *MAC´*, *MBC´* a *ABC´* získame

$$\frac{\sin g_1}{\sin g_2} = \left(\frac{|AC'|}{|BC'|}\right)^2 .$$

Použijeme lemu a výsledok je $\left(KLX\right).\left(LMY\right).\left(MKZ\right) = \left(-1\right)$.

<u>Prípad B</u>. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že bod *P* leží na priamke *BC* a súčasne nie je bodom strany *BC*.

* Necháme na úvahu čitateľa, aby si detailne premyslel predpoklady tvrdenia a dokázal, že prienikom odpovedajúcich priamok je bod *K*. W

Ak bod *P* nie je vnútorným bodom kruhu ohraničeného opísanou kružnicou *k* trojuholníku *ABC*, potom sú trojuholníky *KLM* , *A´B´C´* perspektívne.

Záver**. Trojuholníky *KLM* , *A´B´C´* sú vždy perspektívne.**

Poznámka. Nie je nám známe, či spoločný priesečník Cevových priamok KA´, LB´, MC´ má nejaké zvláštne pomenovanie. Nevieme, či ide o nové tvrdenie, alebo sme sa vlastnými úvahami len prepracovali k menej známej vete.

5.2 Iné zovšeobecnenie tvrdenia o Exeterovom bode

V predchádzajúcej kapitole sme podali dôkaz zovšeobecneného tvrdenia o Exeterovom bode, ktoré sa týkalo kružnice *k*(*S, r*) opísanej trojuholníku *ABC.* V konečnom dôsledku ide o kružnicu vpísanú do trojuholníka *KLM* .

Položme si otázku, či nie je možné podrobiť analogickým úvahám aj kružnicu pripísanú trojuholníku *KLM.*

Nech je daný trojuholník *KLM* a nech $m(S_k, r_k)$ je kružnica pripísaná trojuholníku *KLM* oproti vrcholu *K,* ktorej dotykové body s priamkami *KL, LM, MK* sú postupne body *C, A, B.* Nech v rovine trojuholníka *KLM* je bod *P* a nech body *A´, B´, C´* sú bodmi, pre ktoré platí $AP \cap m = A'$, $BP \cap m = B'$, $CP \cap m = C'$, pričom predpokladáme, že <u>súčasne</u> nemôžu nastať práve dve z uvedených možností $A = A', B = B', C = C'$. Pýtame sa :

Sú trojuholníky *KLM, A´B´C´* perspektívne ?

Rozlíšime dva hlavné prípady polohy bodu *P* podľa toho, či bod *P* patrí kruhu ohraničenému kružnicou *m* alebo nie.

A. <u>Nech bod *P* nie je bodom kruhu ohraničeného kružnicou *m.*</u>

A_1**.** Predpokladajme, že bod *P* neleží na žiadnej z priamok *AB, BC, CA.* Nech $X = KL \cap MC'$, $Y = LM \cap KA'$, $Z = KM \cap LB'$.

Zavedieme označenie (obr. 42)

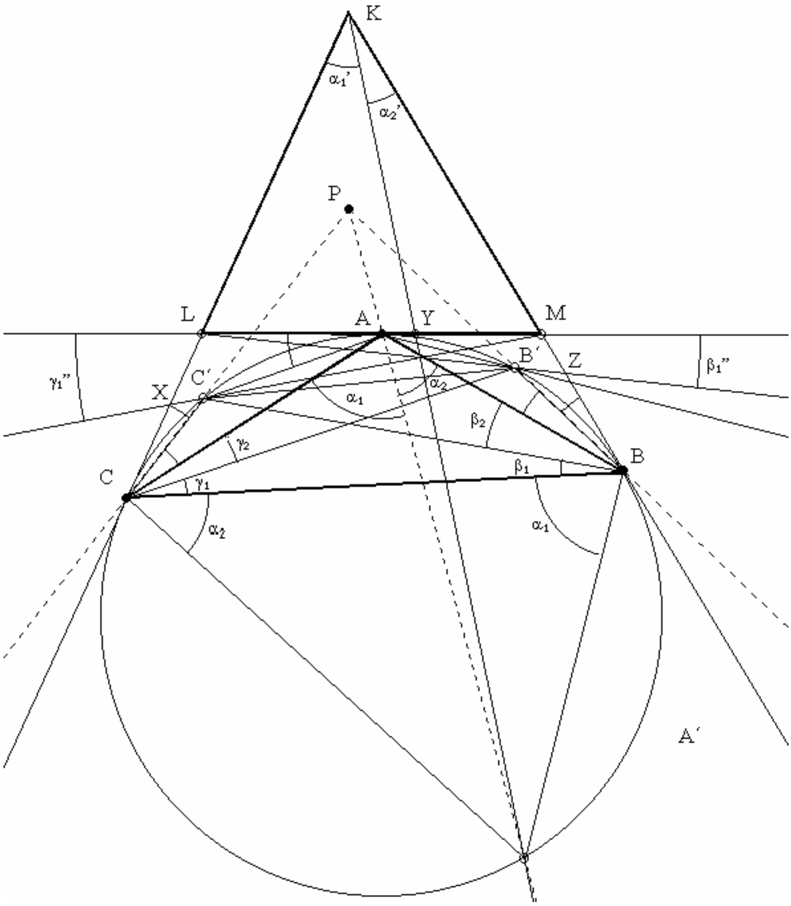
$$a' = |\angle MKL|, b' = |\angle KLM|, g' = |\angle LMK|,$$

$$g_1 = |\angle B'CB|, g_2 = |\angle ACB'|, b_1 = |\angle CBC'|, b_2 = |\angle ABC'|,$$

$$j_1 = |\angle LZB|, j_2 = |\angle LZM|, y_1 = |\angle MXC|, y_2 = |\angle MXL|,$$

$$d_1 = |\angle KYL|, d_2 = |\angle KYM|, b_1'' = |\angle MLZ|, b_2'' = |\angle CLZ|,$$

$$g_1'' = |\angle LMX|, g_2'' = |\angle BMX|, a_1' = |\angle LKY|, a_2' = |\angle MKY|$$



Obr. 42

Podľa #*MLX* , # *MKX*]

$$\frac{|KX|}{|LX|}\cdot\frac{\sin g_1^{''}}{\sin\left(g^{'}+g_1^{''}\right)}=\frac{|MK|}{|ML|}$$

Analogicky #*KLY*, # *MKY*]

$$\frac{|LY|}{|MY|}\cdot\frac{\sin a_2^{'}}{\sin a_1^{'}}=\frac{|LK|}{|MK|}$$

a konečne #*LMZ* , #*LKZ*]

$$\frac{|MZ|}{|KZ|}\cdot\frac{\sin\left(b^{'}+b_1^{''}\right)}{\sin b_1^{''}}=\frac{|ML|}{|LK|}$$

Z vyššie uvedených vzťahov a použitím definície deliaceho pomeru dostaneme

$$(KLX).(LMY).(MKZ)\cdot\frac{\sin g_1''}{\sin\left(g'+g_1''\right)}\cdot\frac{\sin a_2'}{\sin a_1'}\cdot\frac{\sin\left(b'+b_1''\right)}{\sin b_1''}=(-1)\,.$$

Pretože $g'+g_1''+g_2''=b'+b_1''+b_2''=180°$

platí $(KLX).(LMY).(MKZ)\cdot\frac{\sin g_1''}{\sin g_2''}\cdot\frac{\sin a_2'}{\sin a_1'}\cdot\frac{\sin b_2''}{\sin b_1''}=(-1)$

Zostáva určiť hodnotu zlomku $\frac{\sin g_1''}{\sin g_2''}.\frac{\sin a_2'}{\sin a_1'}.\frac{\sin b_2''}{\sin b_1''}$

Z #*AC´M*]

$$\frac{|AC'|}{\sin g_1''}=\frac{|MC'|}{\sin\left(b_1+a+g_1+g_2\right)}\,,$$

kde platí $b_1+a+g_1+g_2=180°-b_2$

Potom $\frac{|AC'|}{\sin g_1''}=\frac{|MC'|}{\sin b_2}$

Podľa #*BC´M*]

$$\frac{|BC'|}{\sin g_2''}=\frac{|MC'|}{\sin\left(b_2+g\right)}$$

a dostaneme $\frac{|AC'|}{|BC'|}.\frac{\sin g_2''}{\sin g_1''}=\frac{\sin(b_2+g)}{\sin b_2}$

Analogicky #*ABC´*]

$$\frac{|AC'|}{\sin b_2}=\frac{|BC'|}{\sin(a+b_1)}$$

Počítajme $b_2+g=b_2+180°-a-b=$

$$=180°-a-\left(b-b_2\right)=180°-a-b_1=180°-\left(a+b_1\right)$$

Potom platí $\sin(a+b_1)=\sin(b_2+g)$

Dosadením vyššie získame $\dfrac{\sin g_2''}{\sin g_1''} = \left(\dfrac{|BC'|}{|AC'|}\right)^2$

Podobne by sme vypočítali $\dfrac{\sin b_2''}{\sin b_1''} = \left(\dfrac{|CB'|}{|AB'|}\right)^2$

(stačí uvažovať o trojuholníkoch *LB´A, LB´C* a *CAB´).*

Označme $a_1 = \angle A'AC, a_2 = \angle A'AB$ (obr. 42).

Použijúc #*KCA´*, #*KBA´*]

$$\frac{|CA'|}{\sin a_1'} = \frac{|KA'|}{\sin(a_2 + b + g)} \text{ a } \frac{|BA'|}{\sin a_2'} = \frac{|KA'|}{\sin(a_1 + b + g)}$$

Potom $\dfrac{|CA'|}{|BA'|} \cdot \dfrac{\sin a_2'}{\sin a_1'} = \dfrac{\sin(a_2 + b + g)}{\sin(a_1 + b + g)}$, kde $\dfrac{\sin(a_2 + b + g)}{\sin(a_1 + b + g)} = \dfrac{\sin a_1}{\sin a_2}$,

pretože $a_1 + a_2 + b + g = 180°$.

Podľa # *CBA´*]

$$\frac{|BA'|}{|CA'|} = \frac{\sin a_2}{\sin a_1} \quad \text{a} \quad \frac{\sin a_1'}{\sin a_2'} = \left(\frac{|CA'|}{|BA'|}\right)^2$$

Aplikujeme lemu a dostávame $(KLX).(LMY).(MKZ) = (-1)$.

A_2. Nech, bez ujmy na všeobecnosti, bod *P* leží na priamke *AB.* Podľa predpokladu musí platiť $A = B'$ a $B = A'$. Prienikom odpovedajúcich si priamok je bod *M.*

A_3. * Necháme na úvahu čitateľa, aby sa sám pokúsil vykonať dôkaz pre prípad, ak bod *P* leží na niektorej z priamok *KL, LM, KM* .

Ak je bod *P* vonkajším bodom kružnice *m* , trojuholníky *ABC, KLM* sú perspektívne.

B. <u>Nech bod *P* je bodom kruhu ohraničeného kružnicou *m.*</u>

B_1. Predpokladajme, že bod *P* nie je bodom kružnice *m* a neleží na niektorej zo strán *AB, BC, AC* (obr. 43).

Označíme

$$w_1 = |\angle KMX|,\ w_2 = |\angle KLZ|,\ a_1^0 = |\angle CAB'|,\ a_1^{''} = |\angle B'AA'|,$$
$$a_2^{''} = |\angle A'AC|,\ a_2^0 = |\angle C'AB|,\ y_1 = |\angle MXL|,\ y_2 = (180° - y_1),$$
$$j_1 = |\angle LZK|,\ j_2 = (180° - j_1).$$

Inak ponecháme rovnaké označenie ako v predchádzajúcej časti dôkazu.

Podľa $\# KXM,\ \# LXM$]

$$\frac{|KX|}{|LX|}\cdot\frac{\sin(g' + w_1)}{\sin w_1} = \frac{|KM|}{|LM|}$$

Podobne $\# KLZ,\ \# LMZ,\ \# KLY,\ \# MYK$]

$$\frac{|MZ|}{|KZ|}\cdot\frac{\sin w_2}{\sin(w_2 + b')} = \frac{|LM|}{|KL|} \qquad \text{a} \qquad \frac{|LY|}{|MY|}\cdot\frac{\sin a_2'}{\sin a_1'} = \frac{|KL|}{|KM|}$$

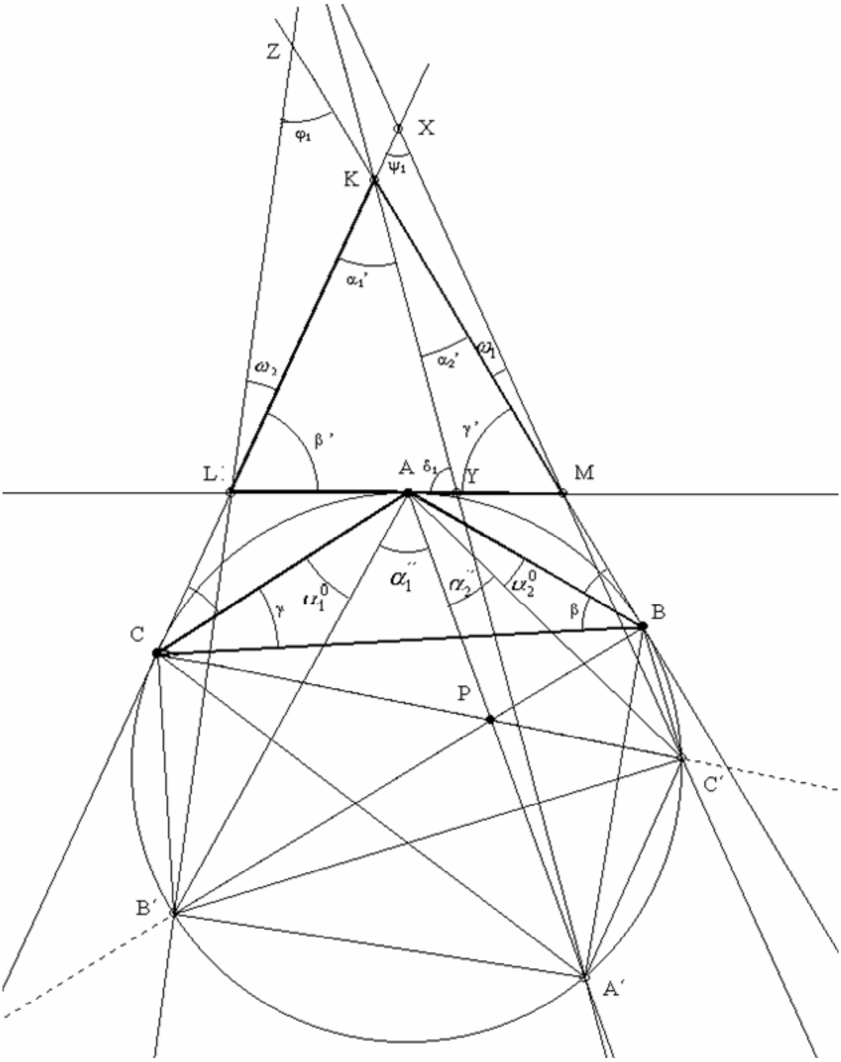
Z odvodených rovností vyplýva

$$(KLX).(LMY).(MKZ)\cdot\frac{\sin(g' + w)}{\sin w_1}\cdot\frac{\sin a_2'}{\sin a_1'}\cdot\frac{\sin w_2}{\sin(b' + w_2)} = (-1).$$

Znovu určíme hodnotu zlomku $\dfrac{\sin(g' + w).\sin a_2'.\sin w_2}{\sin w_1.\sin a_1'.\sin(b' + w_2)}$.

Z $\# A'BK,\ \# A'CK$]

$$\frac{|A'B|}{\sin a_2'} = \frac{|A'K|}{\sin(b + g + a_1^0 + a_1^{''})} \qquad \text{a} \qquad \frac{|A'C|}{\sin a_1'} = \frac{|A'K|}{\sin(b + g + a_2^0 + a_2^{''})}$$



Obr. 43

Potom
$$\frac{|A'B|}{|A'C|}\cdot\frac{\sin a_1^{'}}{\sin a_2^{'}}=\frac{\sin\left(b+g+a_2^0+a_2^{''}\right)}{\sin\left(b+g+a_1^0+a_1^{''}\right)}$$

Platí
$$b+g+a_2^0+a_2^{''}=b+g+a-\left(a_1^0+a_1^{''}\right)=180°-\left(a_1^0+a_1^{''}\right)$$
$$b+g+a_1^0+a_1^{''}=b+g+a-\left(a_2^0+a_2^{''}\right)=180°-\left(a_2^0+a_2^{''}\right),$$

Odtiaľ
$$\frac{|A'B|}{|A'C|}\cdot\frac{\sin a_1^{'}}{\sin a_2^{'}}=\frac{\sin\left(a_1^0+a_1^{''}\right)}{\sin\left(a_2^0+a_2^{''}\right)}$$

Pomocou # $A'BC$]

$$\frac{\sin\left(a_1^{0}+a_1^{''}\right)}{\sin\left(a_2^{0}+a_2^{''}\right)}=\frac{|A'C|}{|A'B|}$$

a teda platí
$$\frac{\sin a_1^{'}}{\sin a_2^{'}}=\left(\frac{|CA'|}{|BA'|}\right)^2$$

Analogicky #LCB', #LAB', #ACB', #MBC', #MAC', #ABC']

$$\frac{\sin\left(w_2+b^{'}\right)}{\sin w_2}=\left(\frac{|AB'|}{|CB'|}\right)^2 \qquad \text{a} \qquad \frac{\sin\left(g'+w_1\right)}{\sin w_1}=\left(\frac{|AC'|}{|BC'|}\right)^2$$

Celkovo

$$(KLX).(LMY).(MKZ)\left(\frac{|AC'|}{|BC'|}\cdot\frac{|BA'|}{|CA'|}\cdot\frac{|CB'|}{|AB'|}\right)^2=(-1).$$

Potom podľa lemy dostávame $(KLX).(LMY).(MKZ)=(-1)$.

B_2. Nech bez ujmy na všeobecnosti bod P leží na strane AB. Potom $A=B', B=A'$ Spoločný prienik priamok KA', LB', MC' je bod M a veta triviálne platí.

B_3. * Čitateľ si iste premyslí, že triviálny je aj prípad, keď bod P leží na kružnici k. Vtedy sú body A', B', C' navzájom totožné a prienikom príslušných priamok je bod P. W

Ak je bod *P* bodom kruhu ohraničeného kružnicou *k*, trojuholníky *ABC, KLM* sú perspektívne.

Záver**. Trojuholníky *ABC, KLM* sú vždy perspektívne.**

Poznámka. S pomenovaním spoločného priesečníku priamok AK, BL, CM máme rovnaké problémy ako v predchádzajúcej kapitole.

5.3 Zovšeobecnenie tvrdenia o prvom Morleyovom bode

Už sme dokázali tvrdenie o prvom Morleyovom bode v trojuholníku. Pokúsime sa o isté zovšeobecnenie.

Uvažujme!

Nech A^1, A^2 sú bodmi strany BC, pričom $\left|\angle A^1AB\right| = |\angle A^2AC| = \dfrac{a}{n}$;

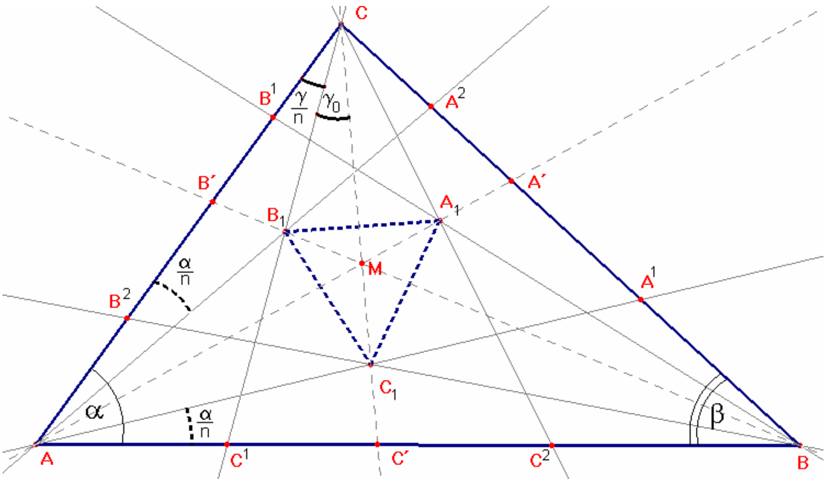
B^1, B^2 sú bodmi strany CA také, že platí $|\angle CBB^1| = \left|\angle ABB^2\right| = \dfrac{b}{n}$

a pre body C^1, C^2, ležiace na strane AB, platí $|\angle ACC^1| = \left|\angle BCC^2\right| = \dfrac{g}{n}$,

kde $n \in N, n \geq 2.$

Označíme $A_1 = BB^1 \cap CC^2$, $B_1 = CC^1 \cap AA^2$, $C_1 = AA^1 \cap BB^2$. Pýtame sa:

Sú trojuholníky *ABC* , *A₁B₁C₁* perspektívne?



Obr. 44

Doplníme označenie

$A' \in AA_1 \cap BC$, $B' \in BB_1 \cap AC$, $C' \in CC_1 \cap AB$, $|\angle C^1CC'| = g_0$.

Podľa $\#AC'C$, $\#C'BC$]

$$\frac{|AC'|}{\sin\left(\frac{g}{n}+g_0\right)} = \frac{|CC'|}{\sin a} \quad \text{a} \quad \frac{|BC'|}{\sin\left(\frac{n-1}{n}g - g_0\right)} = \frac{|CC'|}{\sin b}.$$

Odvodíme
$$\frac{|AC'|}{|BC'|}\cdot\frac{\sin\left(\frac{n-1}{n}g-g_0\right)}{\sin\left(\frac{g}{n}+g_0\right)}=\frac{|AC|}{|BC|}$$

Analogicky #CBC_1, #CAC_1]

$$\frac{|BC_1|}{\sin\left(\frac{n-1}{n}g-g_0\right)}=\frac{|CC_1|}{\sin\left(\frac{n-1}{n}b\right)} \quad \text{a} \quad \frac{|AC_1|}{\sin\left(\frac{g}{n}+g_0\right)}=\frac{|CC_1|}{\sin\left(\frac{n-1}{n}a\right)}$$

Odtiaľ
$$\frac{|BC_1|}{|AC_1|}\cdot\frac{\sin\left(\frac{g}{n}+g_0\right)}{\sin\left(\frac{n-1}{n}g-g_0\right)}=\frac{\sin\left(\frac{n-1}{n}a\right)}{\sin\left(\frac{n-1}{n}b\right)}$$

Podľa #ABC_1]
$$\frac{|BC_1|}{|AC_1|}=\frac{\sin\frac{a}{n}}{\sin\frac{b}{n}}$$

Potom
$$\frac{\sin\left(\frac{g}{n}+g_0\right)}{\sin\left(\frac{n-1}{n}g-g_0\right)}=\frac{\sin\frac{b}{n}}{\sin\frac{a}{n}}\cdot\frac{\sin\left(\frac{n-1}{n}a\right)}{\sin\left(\frac{n-1}{n}b\right)}$$

Deliaci pomer usporiadanej trojice bodov *A, B, C’* je nasledovný

$$(ABC')=-\frac{\sin\frac{b}{n}}{\sin\frac{a}{n}}\cdot\frac{\sin\left(\frac{n-1}{n}a\right)}{\sin\frac{n-1}{n}b}\cdot\frac{\sin b}{\sin a}$$

Cyklickou výmenou

$$(BCA')=-\frac{\sin\frac{g}{n}}{\sin\frac{b}{n}}\cdot\frac{\sin\left(\frac{n-1}{n}b\right)}{\sin\left(\frac{n-1}{n}g\right)}\cdot\frac{\sin g}{\sin b} \quad , \quad (ACB')=-\frac{\sin\frac{a}{n}}{\sin\frac{g}{n}}\cdot\frac{\sin\left(\frac{n-1}{n}g\right)}{\sin\left(\frac{n-1}{n}a\right)}\cdot\frac{\sin a}{\sin g}$$

Výsledný súčin (*ABC’*).(*BCA’*).(*CAB’*) = (-1) hovorí jasne. W

Záver**. Trojuholníky *ABC*, $A_1B_1C_1$ sú perspektívne.**

Poznámka. Špeciálne, ak budeme uvažovať o p-násobku, kde $p \in R^{+} - \left\{ 0 \right\}$, *veľkostí vnútorných uhlov trojuholníka ABC, skonštruujeme* ***Hofstadterov*** *bod.*

Odvodíme vzorec na výpočet dĺžky strán trojuholníka $A_1B_1C_1$.

Pre dĺžku strany B_1C_1 platí na základe kosínusovej vety

$$|B_1C_1|^2 = |AB_1|^2 + |AC_1|^2 - 2\,.\,|AB_1|\,.\,|AC_1|\,.\cos\left(\frac{n-2}{n}.a\right)$$

Rovnicu vydelíme výrazom $|AB_1|^2$ a upravíme

$$\frac{|B_1C_1|^2}{|AB_1|^2} =$$

$$= 1 + \left(\frac{|AC_1|}{|AB_1|}\right)^2 - 2\,.\,\frac{|AC_1|}{|AB_1|}\cdot\cos\left(\frac{n-2}{n}a\right) + \cos^2\left(\frac{n-2}{2}a\right) - \cos^2\left(\frac{n-2}{n}a\right) =$$

$$= 1 - \cos^2\left(\frac{n-2}{n}a\right) + \left[\frac{|AC_1|}{|AB_1|} - \cos\left(\frac{n-2}{n}a\right)\right]^2 .$$

Vypočítame hodnotu pomeru dĺžok úsečiek AC_1 a AB_1.

Podľa $\# ACB_1,\ \ \# ABC_1$]

$$\frac{|AC_1|}{|AB_1|} = \frac{\sin\frac{b}{n}}{\sin\frac{g}{n}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{a+b}{n}\right)}{\sin\left(\frac{a+b}{n}\right)} \cdot \frac{\sin g}{\sin b}, \text{ kde} \qquad |AB_1| = 2R\sin b \cdot \frac{\sin\frac{g}{n}}{\sin\left(\frac{a+g}{n}\right)}$$

(len pripomíname, R je polomer opísanej kružnice k trojuholníku ABC).

Dĺžka strany B_1C_1 je určená vzťahom

$$|B_1C_1| = 2R\sin b.\frac{\sin\frac{g}{n}}{\sin\frac{a+g}{n}}.\sqrt{\sin^2\left(\frac{n-2}{n}a\right) + \left(\frac{\sin g}{\sin b}.\frac{\sin\frac{b}{n}.\sin\frac{a+g}{n}}{\sin\frac{g}{n}.\sin\frac{a+b}{n}} - \cos\left(\frac{n-2}{n}a\right)\right)^2}$$

Cyklickou výmenou by čitateľ získal odpovedajúce ďalšie vzťahy.

Poznámka. Vzorec možno upraviť na tvar

$$|B_1C_1| = 2R \cdot \sin b \cdot \frac{\sin\frac{g}{n}}{\sin\frac{a+g}{n}} \cdot \sqrt{\sin^2\left(\frac{n-2}{n}a\right) + \left[\frac{\sin g}{\sin b} \cdot \left(\frac{ctg\frac{a}{n} + ctg\frac{g}{n}}{ctg\frac{a}{n} + ctg\frac{b}{n}}\right) - \cos\left(\frac{n-2}{n}a\right)\right]^2}$$

Ak $n = 2$, *hodnota druhej mocniny dĺžky strany* B_1C_1 *je*

$$|B_1C_1|^2 = (2R\sin b)^2 \cdot \frac{\sin^2\frac{g}{2}}{\cos^2\frac{b}{2}} \cdot \left[\frac{\sin g}{\sin b} \cdot \frac{\sin b}{\sin g} - 1\right]^2 = 0$$

Výsledok je v poriadku, pretože osi vnútorných uhlov trojuholníka sa pretínajú v jednom bode – v strede O vpísanej kružnice trojuholníku ABC, t.j. B_1 ° C_1 ° *O.*

Ak $n=3$, *trojuholník* $A_1B_1C_1$ *je rovnostranným trojuholníkom. To je tvrdenie Morleyovej vety, ktoré sme uviedli bez dôkazu (dôkazy nájde čitateľ na internetových adresách).*

* *Upozorníme čitateľa, že vypočítať dĺžky strán podľa uvedených vzťahov nie je vôbec jednoduchá záležitosť. V prípade záujmu, odporúčame čitateľovi uvažovať o špeciálnom trojuholníku, ktorého veľkosti vnútorných uhlov budú*

$$\alpha = \frac{1}{4}\pi \qquad \beta = \frac{3}{10}\pi \qquad \gamma = \frac{9}{20}\pi$$

Dôvod takého výberu je prostý. Dôležité hodnoty goniometrických funkcií dokážeme presne určiť pomocou druhých odmocnín a sú uvedené v tabuľke. Ostatné si čitateľ ľahko vypočíta pomocou známych goniometrických identít.
Tab.

$\sin\left(\frac{1}{12}\pi\right) = \frac{1}{4}\sqrt{2}\,(\sqrt{3} - 1)$
$\sin\left(\frac{1}{10}\pi\right) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{5}$
$\sin\left(\frac{3}{20}p\right) = \frac{1}{2}.\sqrt{2 - \frac{1}{2}.\sqrt{10 - 2.\sqrt{5}}}$

5.4 Iné zovšeobecnenie tvrdenia o Morleyovom bode

V euklidovskej rovine je možné uvažovať o istej analógii medzi koncepciou strany a vnútorného uhla trojuholníka.

Tento prístup stručne naznačuje tabuľka na ďalšej strane.

Tab.

Pravouholník	Kosoštvorec
∨ všetky ***uhly*** navzájom zhodné ∨ stred je rovnako vzdialený od ***vrcholov*** ∨ existuje ***opísaná*** kružnica ∨ osi súmernosti sú osi ***strán***	∨ všetky ***strany*** navzájom zhodné ∨ stred je rovnako vzdialený od ***strán*** ∨ existuje ***vpísaná*** kružnica ∨ osi súmernosti sú osami vnútorných ***uhlov***

Premýšľajme teda takto!

Rozdelíme každú stranu trojuholníka ABC na n navzájom zhodných úsečiek.

Pre vybrané deliace body na úsečkách BC, CA, AB označené postupne $A^1, A^2, B^1, B^2, C^1, C^2$ bude platiť

$$|AC^1| = |C^2B| = \frac{c}{n}; \quad |BA^1| = |A^2C| = \frac{a}{n}; \quad |CB^1| = |B^2A| = \frac{b}{n};$$

kde $n \in N$.

Priesečníky priamok AA^1 a BB^2, CC^2 a BB^1, CC^1 a AA^2 označíme postupne C_1, A_1 a B_1. Opäť nasleduje klasická otázka:

Sú trojuholníky $ABC, A_1B_1C_1$ perspektívne?

Nech body C', A', B' sú postupne priesečníky priamok CC_1 a AB, AA_1 a BC, BB_1 a AC (obr. 45).

Pretože priamky CC^1, AA^2 a BB' prechádzajú bodom B_1, musí podľa Cevovej vety platiť

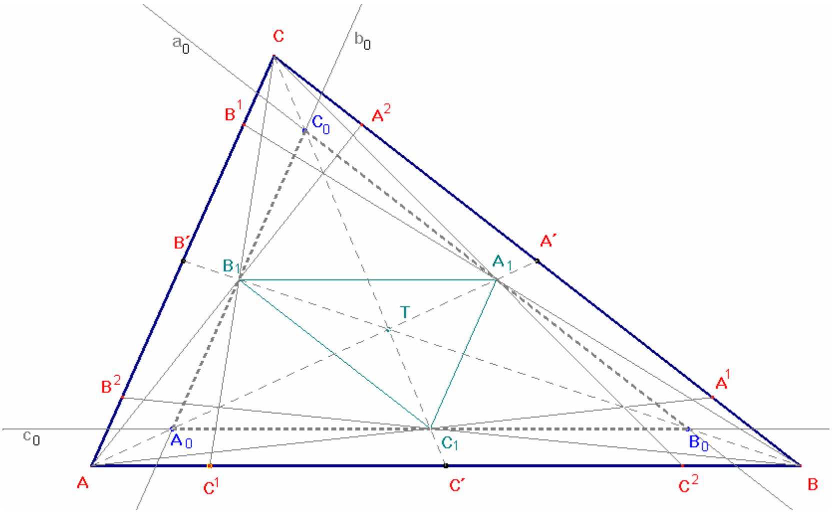
$$(ABC^1) \,.\, (BCA^2) \,.\, (CAB') = (-1).$$

Dosadením hodnôt za odpovedajúce dĺžky úsečiek

$$\frac{\frac{c}{n}}{\frac{n-1}{n}\,.\,c} \,.\, \frac{\frac{n-1}{n}\,.\,a}{\frac{a}{n}} \,.\, (CAB') = (-1).$$

Výsledok jasne ukazuje, že bod B' je stredom strany AC.

Podobne by sme dokázali, že A' je stredom strany BC a C' je stred strany AB. Priamky CC', BB' a AA' sa pretínajú v ťažisku T trojuholníka ABC. W



Obr. 45

Záver. **Trojuholníky $A_1B_1C_1$ a ABC sú perspektívne podľa ťažiska T trojuholníka ABC.**

Dokážeme, že trojuholníky $A_1B_1C_1$ a ABC sú aj rovnoľahlé so stredom rovnoľahlosti v bode T.

Dôkaz. Zostrojíme rovnobežku a_0 s priamkou BC prechádzajúcu bodom A_1, rovnobežku b_0 s priamkou AC prechádzajúcu bodom B_1 a rovnobežku c_0 s priamkou AB prechádzajúcu bodom C_1. Priesečníky takto zostrojených priamok označíme A_0, B_0, C_0 (obr. 45).

V rovnoľahlosti $H_{1[T,\chi_1]}$ sa priamka AB zobrazí na priamku c_0, v rovnoľahlosti $H_{2[T,\chi_2]}$ sa priamka AC zobrazí na priamku b_0 a v rovnoľahlosti $H_{3[T,\chi_3]}$ sa priamka BC zobrazí na priamku a_0. Zložením rovnoľahlostí $H_{1[T,\chi_1]}$, $H_{2[T,\chi_2]}$ a $H_{3[T,\chi_3]}$ je podľa opäť rovnoľahlosť H_4 so stredom v bode T a koeficientom $\chi_4 = \chi_1.\chi_2.\chi_3$. V rovnoľahlosti $H_{4[T,\chi_4]}$ sa trojuholník ABC zobrazí na trojuholník $A_0B_0C_0$, t.j. úsečky $A´B´$, $B´C´$, $C´A´$ sa zobrazia postupne na úsečky A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1.

V rovnoľahlosti H_5 so stredom v bode T a koeficientom χ_5 sa trojuholník $A´B´C´$ zobrazí na trojuholník $A_1B_1C_1$. Rovnoľahlosť $H_{6[T, -1/2]}$ zobrazí trojuholník ABC na trojuholník $A´B´C´$. Zložením rovnoľahlostí H_5 a H_6 je rovnoľahlosť H so stredom v bode T a koeficientom $c = \left(-\frac{1}{2}\right).c_5$. W

Záver. **Trojuholníky ABC, $A_1B_1C_1$ sú rovnoľahlé**.

* Čitateľ si iste uvedomil, že uvedené trojuholníky sú i podobné.

Ak chceme vypočítať obsah trojuholníka $A_1B_1C_1$, resp. určiť vzťahy pre dĺžky jeho strán, musíme stanoviť koeficient rovnoľahlosti H trojuholníkov ABC a $A_1B_1C_1$.

* Necháme na úvahu čitateľa, aby sa presvedčil, že v stredovom premietaní sa hodnota dvojpomeru nezmení a platí $(BTB_1B') = (BA'A^2C)$.

Odtiaľ vypočítame $$\frac{|BB_1|}{|TB_1|} = 3\,.\frac{n-1}{n-2}.$$

Pre dĺžku $|TB_1|$ odvodíme $$|TB_1| = \frac{2}{3}.t_b.\frac{n-2}{2n-1}.$$

Koeficient χ_5 rovnoľahlosti H_5 má hodnotu

$$|\chi_5| = \frac{|TB_1|}{|TB'|} = \frac{\frac{2}{3}t_b.\frac{n-2}{2n-1}}{\frac{1}{3}t_b} = 2.\frac{n-2}{2n-1}$$

Pre výsledný, hľadaný koeficient χ rovnoľahlosti H máme

$$\boxed{c = \left(-\frac{1}{2}\right).c_5 = -\frac{n-2}{2n-1}}$$

Strany trojuholníka $A_1B_1C_1$ majú dĺžky

$$|A_1B_1|=|AB|\cdot\frac{n-2}{2n-1};|B_1C_1|=|BC|\cdot\frac{n-2}{2n-1};\ |C_1A_1|=|CA|\cdot\frac{n-2}{2n-1}$$

a pre obsahy platí

$$\boxed{S_{A_1B_1C_1}=\left(\frac{n-2}{2n-1}\right)^2\cdot S_{ABC}}$$

Poznámka. Ak ***n=2***

$$S_{A_1B_1C_1}=\left(\frac{2-2}{4-1}\right)^2\cdot S_{ABC}=0$$

Body A_1, B_1, C_1 *sú totožné s bodom T.*

Ak n = 3

$$S_{A_1B_1C_1}=\left(\frac{3-2}{2.3-1}\right)^2\cdot S_{ABC}=\frac{1}{25}\cdot S_{ABC}$$

* K akej hodnote sa „blíži“ pomer $\dfrac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}}$ pre $n\to\infty$?

Ako súvisí tento výsledok so vzorcom uvedeným v kapitole 2.1?

5.5 Zovšeobecnenie tvrdenia o izotomickom bode

V dôkaze tvrdenia o izotomickom bode v kapitole 4.3 sme využili poznatok, že body C_1, C' sú stredovo súmerné podľa stredu S_c strany AB. Následne sme použili z toho plynúci záver o zhodnosti úsečiek AC_1, BC'.

Skúsme teraz uvažovať nasledovne!

Nech P je ľubovoľný bod v rovine trojuholníka ABC, rôzny od vrcholov A, B, C. V stredovej súmernosti so stredom S_a je obrazom bodu P bod P_1, v stredovej súmernosti so stredom S_b je obrazom bodu P bod P_2 a v stredovej súmernosti so stredom S_c je obrazom bodu P bod P_3 .

Sú trojuholníky ABC, $P_1P_2P_3$ perspektívne ?

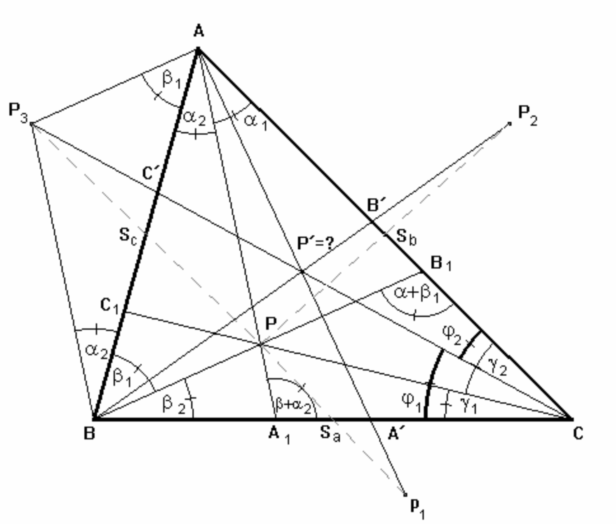
Rozlíšime niekoľko prípadov polohy bodu *P*.

A. <u>Nech bod P je vnútorným bodom trojuholníka *ABC*.</u> Označíme $A_1 = BC \cap AP$, $B_1 = CA \cap BP$, $C_1 = AB \cap CP$,

$|\angle CAP| = a_1$, $|\angle PAB| = a_2$, $|\angle ABP| = b_1$, $|\angle PBC| = b_2$, $|\angle BCP| = g_1$,

$|\angle PCA| = g_2$, $C' = AB \cap CP_3$, $A' = BC \cap AP_1$, $B' = CA \cap BP_2$,

$j_1 = |\angle BCC'|$, $j_2 = |\angle ACC'|$ (obr. 46).



Obr. 46

Platí $$(ABC') = \frac{|AC|}{|BC|} \cdot \frac{\sin j_2}{\sin j_1}$$

Podľa $\#ACP_3$, $\#BCP_3$ $]$ $$\frac{\sin j_2}{\sin j_1} = \frac{|BP|}{|AP|} \cdot \frac{\sin(a + b_1)}{\sin(b + a_2)}.$$

Analogicky $\#BCB_1$, $\#ACA_1$ $]$ $$\frac{\sin(a + b_1)}{\sin(b + a_2)} = \frac{|BC|}{|AC|} \cdot \frac{|AA_1|}{|BB_1|}.$$

Pre hľadaný deliaci pomer (ABC') dostávame

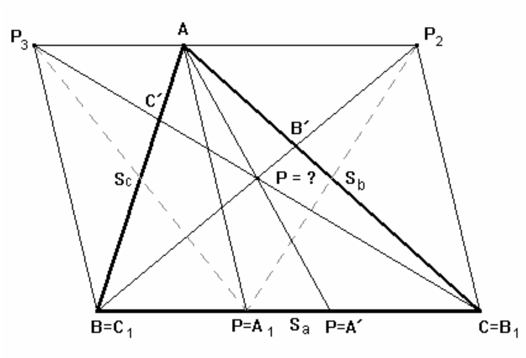
$$(ABC') = -\frac{|BP|}{|AP|} \cdot \frac{|AA_1|}{|BB_1|}.$$

Cyklickou zámenou

$$(BCA') = -\frac{|CP|}{|BP|}\cdot\frac{|BB_1|}{|CC_1|} \quad \text{a} \qquad (CAB') = -\frac{|AP|}{|CP|}\cdot\frac{|CC_1|}{|AA_1|}.$$

Výsledný súčin $\quad (ABC').(BCA').(CAB') = (-1)$.

B. <u>Nech bod *P* leží na hranici trojuholníka *ABC.*</u> Bez ujmy na všeobecnosti, môžeme predpokladať, že bod *P* je vnútorným bodom strany *BC* (obr. 47).



Obr. 47

Ľahko odvodíme

$$(ABC') = -\frac{|AP_3|}{|BC|},$$

$$(CAB') = -\frac{|BC|}{|AP_2|},$$

$$(BCA') = -\frac{|AP_2|}{|AP_3|}.$$

Výsledok $\quad (ABC').(BCA').(CAB') = (-1)$

C. * <u>Prípad, keď bod *P* nie je vnútorným bodom trojuholníka *ABC*,</u>

nechávame na záujem čitateľa. W

Podľa Cevovej vety vychádza vo všetkých troch prípadoch tento záver:

Záver**. Trojuholníky *ABC*, *$P_1P_2P_3$* sú perspektívne.**

Poznámka. Názov takto zovšeobecneného bodu nám nie je známy.

* Čitateľ sa iste zamyslí nad pravdivosťou tvrdenia:

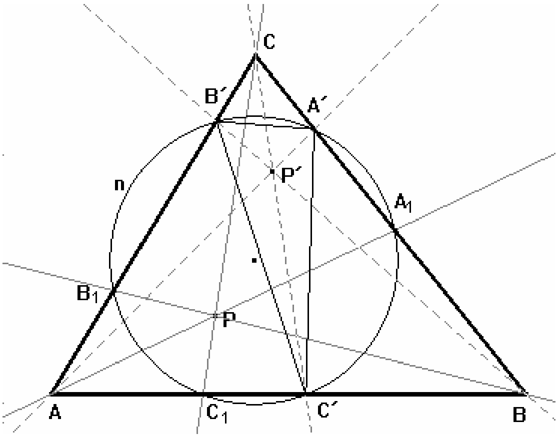
Trojuholník $P_1P_2P_3$ je zhodný s trojuholníkom ABC a odpovedajúce si strany sú rovnobežné.

5.6 Zopár záverečných tvrdení

Táto podkapitola je venovaná niektorým zaujímavým tvrdeniam, ktoré určite stoja za povšimnutie.

Prvé z nich je založené na úvahe:

Nech v rovine trojuholníka ABC je daný bod P neležiaci na žiadnej z priamok *AB, BC, CA* a nech $A_1 = BC \cap AP$, $B_1 = CA \cap BP$, $C_1 = AB \cap CP$. Bodmi A_1, B_1, C_1 je jednoznačne určená kružnica *n*, ktorá pretína priamky *AB, BC, CA* postupne v bodoch $A' = n \cap BC$, $B' = n \cap CA$, $C' = n \cap AB$.



Obr. 48

Sú trojuholníky *ABC, A´B´C´* perspektívne ?

Trojuholníky AC_1B', $AC'B_1$ (obr. 48) sú podobné podľa vety uu, pretože platí

$$|\angle C_1AB'| = |\angle B_1AC'| = a$$

$$|\angle AB'C'| = |\angle AC'B_1| .$$

Potom $$m_1 = |AC_1| . |AC'| = |AB_1| . |AB'| .$$

Poznámka. Reálne číslo $\boldsymbol{m_1}$ *sa nazýva* ***mocnosť*** *bodu A ku kružnici n.*

Analogicky by sme odvodili

$$m_2 = |BA_1| . |BA'| = |BC_1| . |BC'| , \qquad m_3 = |CA_1| . |CA'| = |CB_1| . |CB'| ,$$

kde m_2, m_3 sú mocnosti bodov *B, C* ku kružnici *n.*

Hneď vidno, že $$(ABC') . (ABC_1) = \frac{m_1}{m_2} ,$$

$$(BCA').(BCA_1)=\frac{m_2}{m_3} \qquad \text{a} \qquad (CAB').(CAB_1)=\frac{m_3}{m_1}.$$

Potom $$(ABC').(BCA').(CAB')=\frac{1}{(ABC_1).(BCA_1).(CAB_1)}.$$

Keďže priamky AA_1, BB_1, CC_1 prechádzajú bodom P, platí

$$(ABC').(BCA').(CAB')=(-1).$$

W

Záver. Trojuholníky *ABC, A´B´C´* sú perspektívne podľa *P´*.

Poznámka. Názov bodu nám nie je známy.

*Čitateľ sa iste zamyslí nad tým, v čom tkvie zovšeobecnenie. Pretože *ak je bod P totožný s ortocentrom V trojuholníka ABC, potom bod P´ je totožný s ťažiskom T.* Ako sa v tomto prípade nazýva kružnica *n* ?

Uvažujme inak !

Všimnime si, že kružnicu *n* (v predchádzajúcom tvrdení) sme jednoznačne určili pomocou bodu *P* a priamok *AB, BC, CA.*

Nech je v rovine trojuholníka *ABC* daná kružnica *n*, ktorá pretína jeho strany *AB, BC, CA* postupne v bodoch $C_1, C_2, A_1, A_2, B_1, B_2$ (kvôli názornosti viď obr. 49). Označíme

$A_0 = BB_1 \cap CC_2$, $B_0 = CC_1 \cap AA_2$, $C_0 = AA_1 \cap BB_2$. Pýtame sa:

Sú trojuholníky *ABC*, $A_0B_0C_0$ perspektívne ?

Opäť označíme $A' = AA_0 \cap BC$, $B' = BB_0 \cap CA$, $C' = CC_0 \cap AB$.

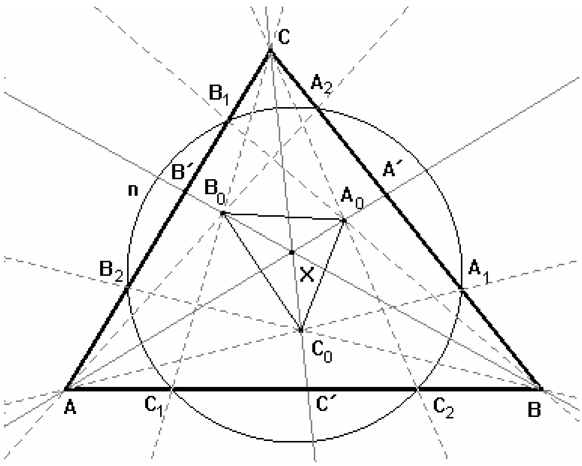
Keďže priamky AA', BB_1, CC_2 prechádzajú bodom A_0, platí

$$(ABC_2).(BCA').(CAB_1)=(-1).$$

Z analogických dôvodov

$$(ABC_1).(BCA_2).(CAB')=(-1)$$

$$(ABC').(BCA_1).(CAB_2)=(-1).$$



Obr. 49

Pre deliace pomery platí

$$(ABC_1).(ABC_2)=\frac{|AC_1|}{|BC_1|}\cdot\frac{|AC_2|}{|BC_2|},(CAB_1).(CAB_2)=\frac{|CB_1|}{|AB_1|}\cdot\frac{|CB_2|}{|AB_2|}$$

$$(BCA_1).(BCA_2)=\frac{|BA_1|}{|CA_1|}\cdot\frac{|BA_2|}{|CA_2|}$$

Pomocou mocností bodov *A, B, C* vzhľadom ku kružnici *n* odvodíme

$$\frac{|AC_1|}{|AB_1|}\cdot\frac{|AC_2|}{|AB_2|}=1,\qquad \frac{|BA_1|}{|BC_1|}\cdot\frac{|BA_2|}{|BC_2|}=1,\qquad \frac{|CB_1|}{|CA_1|}\cdot\frac{|CB_2|}{|CA_2|}=1$$

Výsledný súčin je $(ABC').(BCA').(CAB')=(-1)$. W

Záver. **Trojuholníky *ABC, $A_0B_0C_0$* sú perspektívne podľa *X*.**

Poznámka. Nevieme, či tento bod má nejaké pomenovanie.

Iná úvaha!

Nech je daný trojuholník *ABC* a O_a , O_b , O_c sú stredy pripísaných kružníc l_a, l_b , l_c a nech v rovine trojuholníka *ABC* je daný ľubovoľný bod *P*. Označíme $A' = PO_a \cap BC$, $B' = PO_b \cap CA$, $C' = PO_c \cap AB$. Pýtame sa:

Sú trojuholníky $O_aO_bO_c$, *A´B´C´* perspektívne?

* *Dôkaz* sme už vlastne vykonali. V závere kapitoly 3.3 sme dokázali špeciálny prípad práve formulovaného problému, keď bod *P* bol stotožnený so stredom S_0 Feuerbachovej kružnice *f*.

* Necháme na úvahu čitateľa, aby zostrojil obrázok (viď. obr. 27) a premyslel si myšlienku a spôsob toho dôkazu. W

Záver. **Trojuholníky $O_aO_bO_c$, $A´B´C´$ sú perspektívne.**

Na záver tejto kapitoly zdôrazníme ešte jeden podstatný dôsledok posledného tvrdenia.

Trojuholníky *ABC*, $O_aO_bO_c$ sú perspektívne podľa bodu *O*. Trojuholníky $O_aO_bO_c$, , $A´B´C´$ sú zase perspektívne podľa bodu *P*. Potom sú perspektívne aj trojuholníky *ABC*, $A´B´C´$ podľa $P´$.

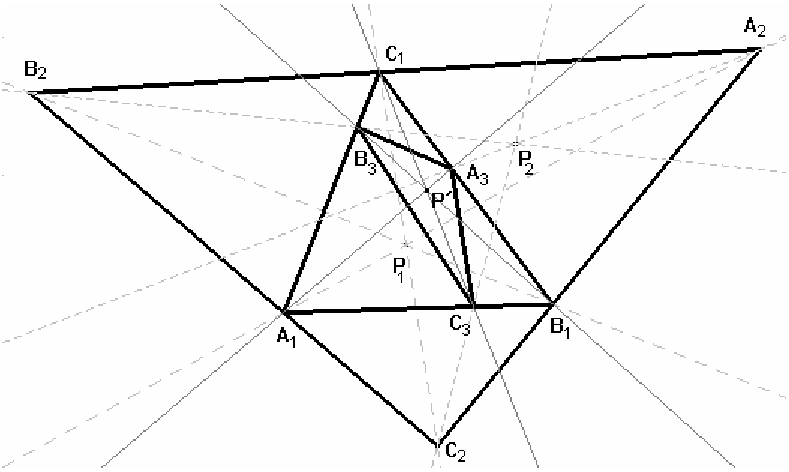
Táto „tranzitívnosť“ perspektívnosti nami uvažovaných trojuholníkov by mohla vyvolať dojem akéhosi zovšeobecnenia Desarquesovej vety, nebyť skrytého predpokladu o vpísaných trojuholníkoch (trojuholník $A´B´C´$ je vpísaný do *ABC* a ten je zase vpísaný do trojuholníka $O_aO_bO_c$).

Dovolíme si sformulovať hypotézu (obr. 50):

„Ak trojuholník $A_1B_1C_1$ je vpísaný do trojuholníka $A_2B_2C_2$ tak, že trojuholníky sú perspektívne podľa bodu P_1, trojuholník $A_2B_2C_2$ je perspektívny s trojuholníkom $A_3B_3C_3$ podľa bodu P_2 , pričom trojuholník $A_3B_3C_3$ je vpísaný do trojuholníka $A_1B_1C_1$, potom sú perspektívne aj trojuholníky $A_1B_1C_1$, $A_3B_3C_3$ podľa $P´$.“

* *Dôkaz* už nepodáme. Odhadujeme, že jeho prevedenie doteraz zaužívaným spôsobom by bolo zrejme dosť komplikované. Naproti tomu, veľmi elegantné riešenie by asi vyplynulo z použitia analytického modelu projektívnej roviny a odpovedajúcej analógii Cevovej vety. To však patrí do

inej oblasti a my naposledy nechávame na úvahu čitateľa, aby v prípade záujmu, tento problém riešil.



Obr. 50

5.7 Odkazy na internetové adresy

1. Hofstadter Point.

[online], [citované 25. október 2004]. Dostupné na Internete http://faculty.evansville.edu/ck6/tcenters/recent/hofstad.html

2. Triangel Centers

[online], [citované 25. október 2004]. Dostupné na Internete http://faculty.evansville.edu/ck6/tcenters/

3. Tucker Circles

[online], [citované 25. október2004]. Dostupné na Internete http://mathworld.wolfram.com/TuckerCircles.html

4. First Lemoine Circle

[online], [citované 25. október 2004]. Dostupné na Internete http://mathworld.wolfram.com/FirstLemoineCircle.html

5. Projective Geometry

[online], [citované 25. október 2004]. Dostupné na Internete http://mathworld.wolfram.com/ProjectiveGeometry.html

6 ZOPÁR MYŠLIENOK

1. Hneď v prvej kapitole sme upozornili čitateľa, že nebudeme venovať pozornosť kolineárnosti odpovedajúcich si priesečníkov priamok, na ktorých ležia strany uvažovaných perspektívnych trojuholníkov.

Priamka určená týmito priesečníkmi sa niekedy v literatúre nazýva ***os perspektivity.*** Možno by stálo za úvahu skúmať tieto osi pre jednotlivé perspektívne trojuholníky. Ťažko povedať, k akým zaujímavým výsledkom by sme sa prepracovali.

2. V podstate sme sa v tejto knižke zaoberali významnými bodmi trojuholníka *ABC.* Ponúka sa možnosť skúmať významné priamky trojuholníka. Známa je tzv. *Eulerova priamka*, na ktorej leží stred *S* opísanej kružnice *k,* ťažisko *T* a ortocentrum *V* trojuholníka *ABC* .

Zaujímavé je, že ich usporiadanie na priamke je v takom poradí, v akom sme ho uviedli a pre dĺžky platí $|ST|:|TV|=1:2$ (Čitateľ si pomer určite zapamätá, ak použije mnemotechnickú pomôcku „ $STV \to 1:2$ “ interpretovanú ako „Slovenská televízia, prvý a druhý program“) .

Na Eulerovej priamke leží aj Longchampov bod, ktorý je súčasne je aj obraz ortocentra *V* trojuholníka *ABC* v stredovej súmernosti so stredom v bode *S* – v strede opísanej kružnice *k* trojuholníka *ABC*.

Pomerne zaujímavou priamkou je Soddyho priamka, priamka určená stredom *O* vpísanej kružnice *l* a Gergonovým bodom *G* trojuholníka *ABC*. Prienikom Eulerovej a Soddyho priamky je už spomínaný Longchampov bod.

Možností je teda neúrekom, záleží len na nás, ktorou cestou pôjdeme.

3. Naše úvahy sa dotkli len jedného typu kužeľosečky - kružnice. Mnohé tvrdenia zostávajú v platnosti, ak nahradíme kružnicu inou kužeľosečkou. Napríklad v tvrdení o Gergonovom bode.

Ak do trojuholníka ABC vpíšeme elipsu a dotykové body so stranami AB, BC, CA označíme postupne C´, A´, B´, potom priamky AA´, BB´, CC´ sú Cevovými priamkami.

Analogicky možno zovšeobecniť i tvrdenia z kapitol 5.1, 5.2 a niektoré tvrdenia z kapitoly 5.6.

Do akej miery je vhodné použiť na dôkaz Cevovu vetu, je diskutabilné. Upozornili sme, že pravdepodobne vhodnejší bude analytický prístup jedného z modelov projektívnej geometrie, zvlášť pokiaľ ide o kužeľosečky.

4. Nakoniec, nie je vylúčená ani možnosť, že čitateľ zovšeobecní niektoré tvrdenie na základe myšlienok uvedených v tejto knižke.

V tom prípade veľmi radi skonštatujeme, že kniha dosiahla cieľ, s akým bola písaná. Možno čitateľa prekvapí, ak neskôr nájde „svoju“ vetu publikovanú v inej, staršej literatúre. Geometria je predmetom záujmu matematikov už tisícročia, a preto v tejto oblasti asi platí dvojnásobne, že „všetko tu už bolo a zase bude“. Na druhej strane, jeden nikdy nevie. V roku 1998 objavili na Eulerovej priamke ďalší zaujímavý bod – Baileyho bod.

V každom prípade *musíme zdôrazniť, že* ***hodnota*** *čitateľovho vlastného objavu spočíva v jeho schopnosti mobilizovať svoje vedomosti a spojiť ich do takej logickej štruktúry, ktorej zavŕšením je zmysluplný poznatok. Výsledok prináša radosť z dobre vykonanej práce a povzbudzuje dôveru vo vlastné sily.*

Prajem Vám veľa úspechov v tvorivej práci.

Autor

Literatúra

[1] ***Coxeter, G. S. M.***: *Introduction to geometry* (ruský preklad), Nauka Moskva, 1966

[2] ***Coxeter, H., S., M.; Greitzer, S., L***.: *Geometry revisited*, The mathematical association of America, 7. vyd., Washington 2001, ISBN : 0-88385-600-x

[3] ***H´Adamar, G***.: *Elementárna geometria 1*. časť Planimetria, ruský preklad 11.-teho vydania Gosudatstvennoe učebno- pedagogičeskoe izdateľstvo, Moskva, 1957, str. 607

[4] ***Kuřina, F***.:*10 pohledů na geometrii*, Albra Praha, 1996,ISBN:80-85823-21-7

[5] ***Kmeťová, M*** .: *On Menelaus´ theorem*, In.: Proceedings of symposiumon computer geometry SCG´ 2004, Vol. 13

[6] ***Pedoe, D***.: *Geometry. A Comprehensive course*. Dover publications, INC. New York 1988, ISBN : 0-486-65812-0, 444 str

[7] ***Polák, J***. *Přehled středoškolské matematiky*, SPN Praha, 1991, 5. vydanie, ISBN: 80-04-22885-2.

[8] ***Niederle, A***.: *Zajímavé dvojice trojúhelníku*, ÚV Mat. olympiády, Mladá fronta, Praha 1980, str. 254

[8] ***Smith, T. J***.: *Methods of Geometry* , A Wiley – Interscience Publication, New York 2000, ISBN : 0-471-25183-6, 486 str.

[9] ***Solčan, Š***.: *Projektívna geometria*, scriptum, MFF UK Bratislava, 1995, ISBN: 80-223–0887-0

[10] ***Strnad, A***.: *O trojuhelnících vzájemne vepsaných a opsaných*, In. Časopis pro pěstovaní mathematiky a fysiky, ročník XIII, Jednota českých mathematikú, Praha 1884

[11] ***Svrček J., Vanžura J.*** : *Geometrie trojúhelníka*. SNTL, Praha 1988, str. 248

[12] ***Šedivý, J.*** : *Shodnodst a podobnost v konštrukčních úlohách*, ÚV Mat. olympiády ,Mladá fronta, Praha 1980, 160 str.

[13] ***Šedivý, O., Čeretková, S., Malperová, M., Bálint, Ľ***.: *Matematika pre 7. ročník základných škôl, 2. časť*, SPN Bratislava, 2. vydanie , 2001, ISBN: 80-08-03303-7

[14] ***Šedivý, O***. a kol.: *Geometria 2*, SPN, Bratislava 1987, str. 280

[15] ***Villiers, M***.: *Dual Generalization of Van Aubel´s theorem*, The Mathematical Gazette, Nov, 405-412, 1998

[16] ***Škarka, A***.: *Vybrané spisy Jana Amose Komenského, svazek VII*, SPN 1974, 795 str.

Názov: Geometria perspektívnych trojuholníkov

Autor: RNDr. Dušan Vallo, PhD.

Vydavateľ: Fakulta prírodných vied UKF v Nitre

Schválené: Vedením Fakulty prírodných vied Univerzity Konštantína Filozofa v Nitre dňa 10. mája 2005

Rozsah: 92 strán

Formát: B5

Náklad: 100 kusov

Tlač: Michal Vaško, Námestie Kráľovnej pokoja 3, 080 01 Prešov

Rukopis neprešiel jazykovou úpravou

ISBN: 80-8050-825-9

9 788080 508258