UNIVERZITA MATEJA BELA V BANSKEJ BYSTRICI

RIEŠENIE ROVNÍC NA ZÁKLADNÝCH ŠKOLÁCH

Záverečná práca

2023 **Mgr. Martina Bosíková**

UNIVERZITA MATEJA BELA V BANSKEJ BYSTRICI

RIEŠENIE ROVNÍC NA ZÁKLADNÝCH ŠKOLÁCH

Záverečná práca

Vedúci záverečnej práce: **Prof. RNDr. Pavol Hanzel, CSc.**

Banská Bystrica 2023 **Mgr. Martina Bosíková**

Poďakovanie

Chcela by som sa poďakovať Prof. RNDr. Pavlovi Hanzelovi, CSc. za jeho čas, ochotný prístup a odbornú pomoc pri písaní tejto práce.

ABSTRAKT

BOSÍKOVÁ, Martina: Riešenie rovníc na základných školách. [Záverečná práca]. Univerzita Mateja Bela v Banskej Bystrici. Vedúci práce: Prof. RNDr. Pavol Hanzel, CSc. Stupeň odbornej kvalifikácie: Doplňujúce pedagogické štúdium. Banská Bystrica: 2023. Počet strán: 43

Záverečná práca pojednáva o rovniciach na základných školách. Práca sa snaží dať komplexný obraz o obsahu učiva rovnice na základných školách, o moderných spôsoboch vyučovania pomocou GeoGebry a o spracovaní tejto témy v súčasných učebniciach. Práca sa snaží aj o retrospektívny pohľad na staršiu učebnicu.

Kľúčové slová: lineárne rovnice, základná škola, GeoGebra, učebnice matematiky

ABSTRACT

BOSÍKOVÁ, Martina: Solving of equations on primary schools. [Final thesis]. The University of Matej Bell in Banská Bystrica. Thesis supervisor: Prof. RNDr. Pavol Hanzel, CSc. Degree of qualification: Supplementary pedagogic study. Banská Bystrica: 2023. Number of pages: 43

The final thesis is dedicated to solving of equations in primary schools. The thesis hopes to paint a complex picture of the contents of the curriculum of equations in primary schools, of the modern ways of education using GeoGebra and of the portrayal of this topic in contemporary textbooks. The thesis also attempts a retrospective look at an older textbook.

Key words: linear equations, primary school, GeoGebra, mathematics textbooks

OBSAH

1 ÚVOD

Matematika nikdy nepatrila medzi najobľúbenejšie predmety na základnej škole. Stále menej žiakov má o ňu záujem. Je to preto, že je málo atraktívna, zložitá? Rozhodne nie je zbytočná.
Tato práca sa venuje rovniciam. Rovnice sú jeden zo spôsobov, ako prepisovať problémy reálneho sveta do matematickej reči a riešiť ich.

Práca sa najprv v Teoretickej časti venuje obsahovým a výkonovým štandardom ohľadom rovníc na základnej škole. Prevedie nás základnými pojmami a definíciami v oblasti rovníc, predovšetkým lineárnych, pretože na základnej škole sa riešia len lineárne rovnice.
Zistíme, čo je rovnosť a rovnica, ako rovnice riešiť. Tiež sa pozrieme, aké typy lineárnych rovníc sa riešia na základných školách. A nezabudneme ani na najťažšie učivo a tým sú slovné úlohy riešené pomocou rovníc.

V práci sa zaoberáme aj programom GeoGebra, ktorý je určený študentom a učiteľom matematiky. Jedna sa o mimoriadny spôsob motivácie, pretože tento program spája komunitu, ktorá sa vzájomne podporuje v nápadoch ako učiť lepšie a atraktívnejšie. V práci je aj veľké množstvo príkladov zrealizovaných v tomto programe. V kapitole Váhy vo vyučovaní rovníc sa môžete dozvedieť o zaujímavej aplikácií v GeoGebre, ktorú vytvoril španielsky učiteľ matematiky Rafael Losada Liste. Táto aplikácia slúži na výučbu rovníc, je zábavná a môže byť pre žiakov motivujúca.

Posledná kapitola sa venuje učebniciam, z ktorých sa aktuálne rovnice učia naši žiaci. Medzi učebnicami sú veľké rozdiely. Učebnice sú dôležitou súčasťou vyučovania. Napísať dobrú učebnicu je náročné. Dnes majú školy na výber z viacerých učebníc. Práca sa snaží ich predstaviť a zmapovať, ako je v nich téma rovníc spracovaná. Práca ponúka aj o retrospektívny pohlaď, predstavíme si aj staršiu učebnicu matematiky.

Cieľom práce je oboznámiť sa s problematikou lineárnych rovníc a učebníc matematiky pre základné školy. Prestaviť si nové možnosti ako vyučovať. Zorientovať sa v nových učebniciach a pozrieť sa, či sú rovnako dobré, ako staršie učebnice matematiky.

2 TEORETICKÁ ČASŤ

2.1 Štátny vzdelávací program

Ministerstvo školstva, vedy, výskumu a športu SR definuje v inovovanom Štátnom vzdelávacom programe (ŠVP) pre základné školy (ISCED2) vzdelávacie štandardy pre 2.stupeň ZŠ v predmete Matematika. Dostupné z webu https://www.minedu.sk/data/att/22649.pdf

Obsahové štandardy ohľadom rovníc:

- rovnosť a nerovnosť dvoch algebrických výrazov
- lineárna rovnica s jednou neznámou
- ľavá a pravá strana rovnice
- riešenie (koreň) rovnice
- znamienka rovnosti
- skúška správnosti
- výraz, lomený výraz, výraz s neznámou v menovateli
- rovnica s jednou neznámou
- podmienky pre riešenie rovnice (s neznámou v menovateli), skúška správnosti
- slovná (kontextová) úloha, zápis, matematizácia textu úlohy
- postup riešenia, zostavenie lineárnej rovnice, skúška, odpoveď
- vyjadrenie neznámej zo vzorca

Výkonový štandard
Žiak na konci 9. ročníka základnej školy vie / dokáže:

- rozhodnúť o rovnosti (nerovnosti) dvoch číselných (algebrických) výrazov
- rozlíšiť zápisy rovnosti, rovnice
- vyriešiť jednoduchú lineárnu rovnicu s jedným výskytom neznámej
- vyriešiť jednoduchými úpravami lineárnu rovnicu s viacnásobným výskytom neznámej (napr. $2x + 3 = 3x - 4$)

- vyhodnotiť význam skúšky správnosti a rozumie tomu, prečo nie je pri niektorých rovniciach nutná
- vyriešiť jednoduché rovnice s jedným výskytom neznámej v menovateli (napr.: $\frac{2}{x+3} = 4$)
- urobiť skúšku správnosti riešenia jednoduchej rovnice s neznámou v menovateli
- určiť podmienky riešenia rovnice s neznámou v menovateli
- vyjadriť neznámu zo vzorca (z primeraných matematických a fyzikálnych vzorcov)
- vybrať vhodnú stratégiu riešenia slovnej úlohy (rovnicou, nerovnicou, tipovaním, ...)
- vyriešiť slovné (kontextové) úlohy vedúce k lineárnej rovnici

Vzdelávacie štandardy udávajú, že v 8. ročníku ZŠ preberáme určitý úvod do lineárnych rovníc. Ešte bez formálneho zápisu, pričom žiaci úlohy riešia metódou pokus-omyl, prípadne znázornením. V 9. ročníku už ide aj o formálne riešenie rovníc.

2.2 GeoGebra

Program GeoGebra je pre nekomerčné účely voľne dostupný softvér, ktorý je určený študentom a učiteľom matematiky a prírodovedných predmetov. Je vhodný na výučbu interaktívnej geometrie, algebry aj analýzy. Tento grafický program je dnes chápaný ako inovatívna metóda vyučovania, ktorú možno používať na všetkých úrovniach vzdelávania.

Autorom GeoGebry je Markus Hohenwarter. Program začal vyvíjať v roku 2001 na Univerzite v Salzburgu. V súčasnej dobe vývoj prebieha pod hlavičkou spoločnosti GeoGebra GmbH so sídlom v Linzi. Za tento čas získal projekt veľké množstvo ocenení pre vzdelávací softvér. V roku 2021 bola spoločnosť GeoGebra GmbH začlenená do rodiny produktov indickej spoločnosti BYJU'S, ktorá poskytuje vzdelávanie stovkám miliónov študentov.

Program je možné používať priamo z webového prostredia GeoGebry alebo po inštalácii na počítači s operačným systémom Microsoft Windows, prípadne na mobilných platformách iOS od Apple alebo Android od Google. Program GeoGebra možno používať v mnohých jazykoch vrátane slovenského a českého.

Obrovským benefitom tohto programu je jeho veľmi aktívna komunita, ktorá neustále vytvára množstvo návodov, nápadov a materiálov na využitie GeoGebry na vyučovanie nielen matematiky, ale aj zemepisu, elektrotechniky a iných. Platforma GeoGebry tiež umožňuje pomocou vlastného webového úložiska spoluprácu viacerých užívateľov na jednom dokumente a jeho zdieľanie.

GeoGebra podporuje priestorovú predstavivosť, zatraktívňuje učivo matematiky, motivuje, inšpiruje a spája učiteľov a žiakov z celého sveta.

Program je dostupný na adrese https://www.geogebra.org/download .
V tomto programe som pripravila riešenia zopár príkladov z lineárnych rovníc, ktoré budeme ďalej v tomto dokumente používať. Sú dostupné z linku https://www.geogebra.org/m/h2gwpqvp .

2.3 Rovnosť dvoch algebrických výrazov

Rovnosť prirodzene znamená, že dve veličiny sa rovnajú. V prípade číselného výrazu sa zapisuje:

$$2 + 8 = 10 \qquad 6 - 3 = 2 + 1 \qquad 3 \cdot 6 = 40 : 2 - 2$$

Rovnosť má nasledujúce vlastnosti

1. Rovnosť je reflexívna, to znamená, že každý výraz sa rovná sám sebe $a = a$.
2. Rovnosť je symetrická, to znamená, že ak $a = b$, tak potom $b = a$.
3. Rovnosť je tranzitívna, to znamená, že ak $a = b$ a $b = c$, tak potom $a = c$.

Tieto vlastnosti rovnosti žiaci základných škôl chápu intuitívne.

Každá rovnosť je znakom rovnosti (=) rozdelená na **pravú** a **ľavú stranu**. Pri riešení rovníc označujeme ľavú stranu ako **Ľ** a pravú stranu ako **P**. Z vlastností rovnosti vieme, že ľavá a pravá strana rovnosti sú zameniteľné (symetrickosť).
Ďalej rozlišujeme, či je rovnosť platná alebo neplatná. Ak Ľ = P, hovoríme, že **rovnosť je platná**. Ak sa ale pravá a ľavá strana rovnosti nerovnajú, hovoríme, že **rovnosť je neplatná**.
Rovnosť 10 – 3 = 5 je neplatná, pretože Ľ = 7 a P = 5. Potom výraz zapisujeme $10 - 3 \neq 5$ a nazývame ho nerovnosťou. Znak ≠ čítame: *„nerovná sa"* alebo *„je rôzne od"*.

Výraz s jednou premennou je taký výraz, ktorý obsahuje okrem čísel, matematických operácií a zátvoriek aj premennú (neznámu). Zapisujeme ju písmenami abecedy (napr. $1 + x$, $2a - 3$). Za premennú môžeme do výrazu dosadiť číslo a potom vypočítať hodnotu výrazu.
Výrazy s premennou vieme ďalej upravovať (sčitovať, odčitovať, násobiť a deliť číslom rôznym od nuly, roznásobovať zátvorky a vynímať pred zátvorku ...).

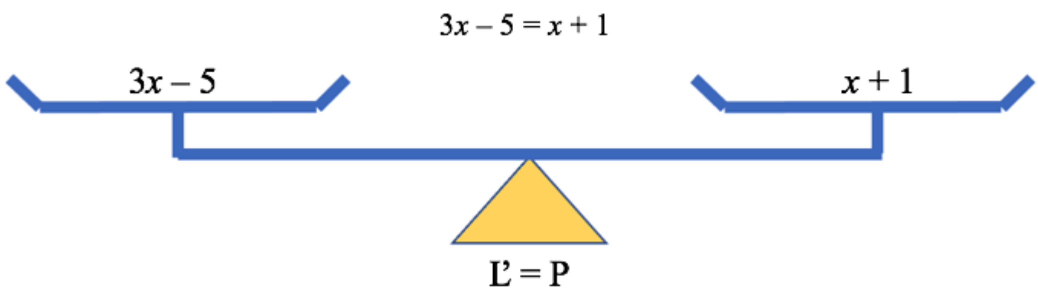
2.4 Rovnica s jednou neznámou

Pod pojmom **rovnica s jednou neznámou** chápeme zápis rovnosti dvoch výrazov s jednou premennou. Napríklad

$$3x - 5 = x + 1 \qquad \text{(I)}$$

je rovnica. Premennú x nazývame **neznáma**.

Pri riešení rovníc je našou úlohou určiť hodnotu premennej tak, aby rovnosť bola platná. Túto hodnotu potom nazývame **koreňom** rovnice. Intuitívne je možné rovnice chápať ako váhy, ktoré sú v rovnováhe.



Pod pojmom **riešenie rovnice** rozumieme:

- **postup**, ktorým vypočítame hodnotu neznámej x
- vypočítaná hodnota neznámej x - **koreň rovnice**

Postup, ktorým vypočítame koreň rovnice, pozostáva zo série úprav rovnice.

2.5 Obory rovnice

Pod pojmom **obor premennej** rovnice O rozumieme číselný obor, v ktorom riešime danú rovnicu. T. j. sú to všetky čísla, ktoré môžeme za premennú dosadiť. Neberieme pri tom ohľad na to, či bude mať daný vyraz zmysel. Obor premennej vymedzuje zadávateľ úlohy. Ak nie je obor premennej explicitne určený, tak potom danú rovnicu riešime v obore všetkých reálnych čísel $\mathbb{R}$.

Pod pojmom **definičný obor** rovnice D rozumieme takú podmnožinu oboru premennej O, v ktorej majú všetky výrazy zadanej rovnice zmysel (sú definované). Určujeme ho určením podmienok. Na základnej škole sa môžeme stretnúť s jednoduchou lineárnou rovnicou s neznámou v menovateli. Tam je nutné určiť definičný obor, t. j. podmienku, ktorá musí byť splnená, aby neznáma nenadobúdala také hodnoty, že by sme delili nulou.

Príklad: Rieš rovnicu $\frac{2}{x+3} = 4$.

Ak nie je povedané inak, predpokladáme, že obor premennej je $\mathbb{R}$.

Ďalej výraz $\frac{2}{x+3}$ má zmysel iba ak $x + 3 \neq 0$. Takže naše podmienka bude, že $x \neq -3$, čo nám pre potreby ZŠ bude stačiť. Ak ale chceme byť korektní, tak definičný obor rovnice $D = (-\infty,-3) \cup (-3, \infty)$.

Pod pojmom **obor pravdivosti** rovnice K rozumieme množinu všetkých koreňov danej rovnice.

2.6 Úpravy rovníc

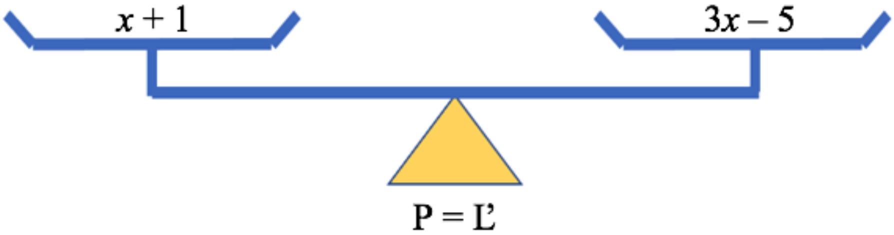
Existuje viacero úpravy rovníc, ktoré vedú k riešeniu danej rovnice. Delíme ich na **ekvivalentné** a **dôsledkové**.

Ekvivalentné úpravy rovnice sú také úpravy, ktoré nemenia korene rovnice.
Žiakom je možné ich ľahko demonštrovať pomocou váh. Uvedieme si niektoré typy ekvivalentných úprav, ktoré budeme používať pri riešení rovníc.

Typy ekvivalentných úprav:

- Výmena ľavej a pravej strany rovnice
  Toto vyplýva zo symetrickosti rovnosti. Môžeme si to demonštrovať na rovnici (I). Rovnováha sa nezmení, keď vymeníme pravú a ľavú stranu misiek.

$$x + 1 = 3x - 5$$



- Zjednodušenie výrazu, ktorý tvorí ľavú/pravú stranu rovnice

  Príklad: $2x + x - 5 = x + 2 - 1$

  $3x - 5 = x + 1$

- Pripočítanie/odpočítanie toho istého čísla alebo výrazu, ktorý je definovaný na celom definičnom obore rovnice (D), k obidvom stranám rovnice
  Rovnováha ostane zachovaná, lebo dané číslo alebo výraz pridáme/odoberieme na oboch stranách váh.

  Príklad: Pripočítajme k rovnici (I) číslo 5.

  Zapíšeme: $3x - 5 = x + 1 \quad / +5$

  $3x = x + 6 \qquad \text{(II)}$

  Teraz od rovnice (II) odpočítajme výraz $-x$

  Zapíšeme: $3x = x + 6 \quad / -x$

  $2x = 6 \qquad \text{(III)}$

- Vynásobenie/vydelenie oboch strán rovnice tým istým nenulovým číslom.
  Znova sa nám rovnováha nepokazí, ak daným číslom vynásobíme/vydelíme obe strany váh. Treba ale zdôrazniť, že toto číslo nesmie byť nula.

  Príklad: Vydelíme rovnicu (III) číslom 2.

  Zapíšeme: $2x = 6 \quad / :2$

  $x = 3$

  Čím sme rovnicu (I) aj vyriešili a zistili sme, že jej koreňom je číslo 3.

- Vynásobenie oboch strán rovnice rovnakým výrazom, ktorý pre všetky čísla z množiny D nadobúda iba nenulové hodnoty, a je definovaný na množine D.
  Túto úpravu budeme využívať pri riešení rovníc s neznámou v menovateli

  $$\frac{5}{x} = 1 \qquad \text{(IV)}$$

  Príklad: Vynásobíme rovnicu (IV) výrazom x. To, že nenásobíme nulovým výrazom, máme ošetrené v definičnom obore rovnice (v podmienke $x \neq 0$)

  Zapíšeme: $\frac{5}{x} = 1 \quad / \cdot x$

  $5 = x$

Dôsledkové úpravy nám tiež pomáhajú vyriešiť rovnicu, ale menia korene rovnice.
Všetky lineárne rovnice je možné riešiť výlučne ekvivalentnými úpravami. A na základnej škole preberáme len lineárne rovnice.
Napriek tomu, pre úplnosť, si predstavíme aj niektoré dôsledkové úpravy rovníc.

Typy dôsledkových úprav:

- Umocnenie oboch strán rovnice prirodzeným mocniteľom.
- Vynásobenie oboch strán rovnice tým istým výrazom s neznámou, ktorý je definovaný na definičnom obore D.

Dôsledkové úpravy označujeme aj ako implicitne úpravy. To znamená, že sú to také úpravy, pri ktorých nám vznikne nová rovnica, ktorej korene musia byť aj koreňmi rovnice pôvodnej. Takto získaná rovnica však môže mať aj nové korene, ktoré naša pôvodná rovnica nemala. Preto je nutné vždy urobiť skúšku správnosti.

2.7 Skúška správnosti

Po vyriešení rovnice vykonávame **skúšku správnosti**. Korene dosadzujeme do pôvodnej rovnice a overujeme, či je rovnosť Ľ = P platná. Ak sme pri riešení rovnice použili iba ekvivalentné úpravy, tak skúška nie je nutná. Takáto skúška nám môže odhaliť numerickú chybu výpočtu. V prípade, že sme použili dôsledkové úpravy, je skúška je nutnosťou a je súčasťou riešenia, pretože nám zistí, ktoré korene sme úpravami pridali a nevyhovujú pôvodnej rovnici. Hľadanými koreňmi sú len tie, ktoré vyhovujú skúške správnosti.

Príklad: Urobme skúšku správnosti rovnice (I) $3x - 5 = x + 1$, ktorú sme vyriešili a zistili sme, že jej koreň K = {3}.

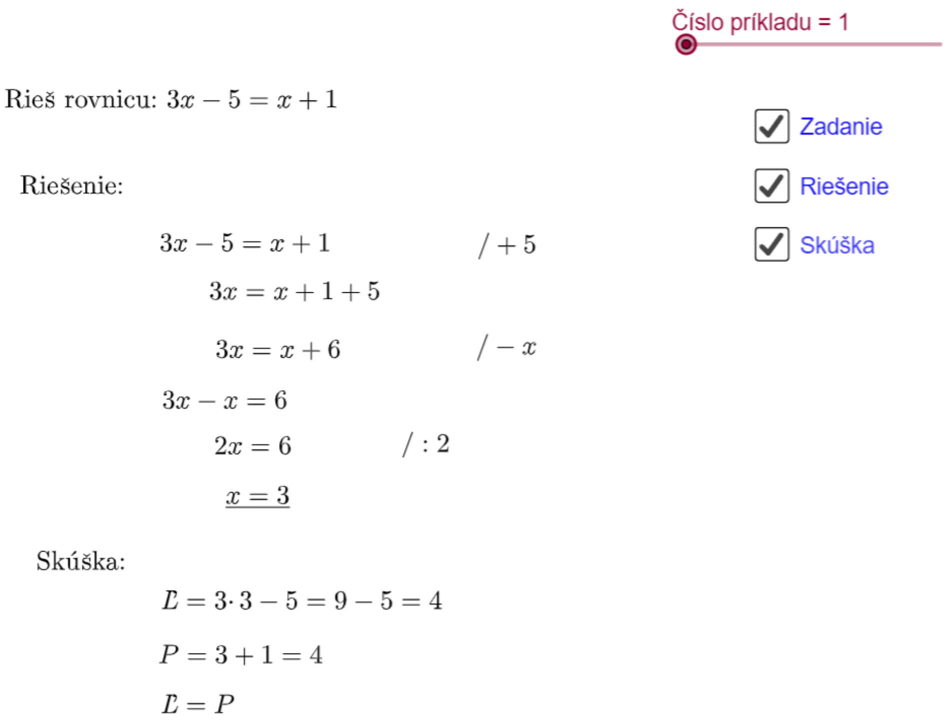
Skúška: Ľ = $3x - 5 = 3 \cdot 3 - 5$ (za x sme dosadili koreň 3) = 4

P = $x + 1 = 3 + 1 = 4$

Ľ = P

Overili sme, že rovnica (I) je vyriešená správne.

Riešenie v GeoGebre: https://www.geogebra.org/m/h2gwpqvp



2.8 Lineárna rovnica s jednou neznámou

Lineárna rovnica s neznámou x ja rovnica, ktorá obsahuje na oboch stranách prvú mocninu premennej x a je ju možné ekvivalentnými úpravami upraviť na tvar:

$$ax + b = 0 \qquad \text{(V)}$$

kde a, b (**koeficienty**) $\in \mathbb{R}$, a $\neq 0$. Lineárna rovnica má v $\mathbb{R}$ práve jeden koreň a tým je

$$x = -\frac{b}{a}$$

Pri riešení rovníc však môžu nastať aj iné možnosti. Na prvý pohľad sa môže niektorá rovnica javiť ako lineárna, po úpravách sa nám však premenná x vynuluje a vo formule (V) vzniknú dve možnosti:

- $a = 0 \wedge b = 0$, potom pôvodná rovnica nie je lineárna. Ak do nej dosadíme ľubovoľné $x \in$ D, dostaneme rovnosť 0 = 0, ktorá je platná. Takže pôvodná rovnosť platí pre ľubovoľné x z definičného oboru rovnice (D). K = D. Hovoríme, že rovnica má **nekonečne veľa riešení**.

  Príklad: Riešte rovnicu $3x - 5 = 2(x + 1) - (7 - x)$ v $\mathbb{R}$

  $$3x - 5 = 2(x + 1) - (7 - x)$$
  $$3x - 5 = 2x + 2 - 7 + x$$
  $$3x - 5 = 3x - 5 \quad / -3x + 5$$
  $$0 \cdot x = 0$$

  Pôvodná rovnica nie je lineárna a K = $\mathbb{R}$.

  Môžeme urobiť aj skúšku správnosti, ale nie je nutná. Za x môžeme dosadiť ľubovoľné číslo z $\mathbb{R}$, napr. 3. Zapíšeme to ako Ľ(3), P(3)

  Skúška: Ľ(3) = $3 \cdot 3 - 5 = 4$

  P(3) = $2(3 + 1) - (7 - 3) = 8 - 4 = 4$

  Ľ(3) = P(3)

  https://www.geogebra.org/m/h2gwpqvp?command=SetValue(n,2)

- $a = 0 \wedge b \neq 0$, aj v tomto prípade pôvodná rovnica nie je lineárna. Ak do nej dosadíme ľubovoľné $x \in$ D, ostaneme rovnosť $b = 0$, ktorá nie je platná. Takže pôvodná rovnosť neplatí pre žiadnu hodnotu neznámej x. K = {} = $\emptyset$. Hovoríme, že **rovnica nemá riešenie**.

Príklad: Riešte rovnicu $2x - 3 = 2(x + 1)$ v $\mathbb{R}$

$$2x - 3 = 2(x + 1)$$

$$2x - 3 = 2x + 2 \quad / - 2x + 3$$

$$0 \cdot x = 5$$

Pôvodná rovnica nie je lineárna a rovnosť neplatí pre žiadne x z $\mathbb{R}$. K = ∅.

Môžeme urobiť aj skúšku správnosti, ale nie je nutná. Za x môžeme dosadiť ľubovoľné číslo z $\mathbb{R}$, napr. 5.

https://www.geogebra.org/m/h2gwpqvp?command=SetValue(n,3) .

Číslo príkladu = 3

Zadanie

Riešenie

Skúška

Rieš rovnicu: $2x - 3 = 2(x + 1)$ v $\mathbb{R}$

Riešenie:

$$2x - 3 = 2(x + 1)$$

$$2x - 3 = 2x + 2 \qquad / - 2x + 3$$

$$\underline{0 \cdot x = 5} \qquad \underline{K = \varnothing}$$

Skúška:

$$L(5) = 2 \cdot 5 - 3 = 10 - 3 = 7$$

$$P(5) = 2(5 + 1) = 2 \cdot 6 = 12$$

$$L(5) \neq P(5)$$

2.9 Typy lineárnych rovníc s jednou neznámou

Lineárne rovnice s jednou neznámou sa na základnej škole preberajú podľa obtiažnosti od najjednoduchších typov po tie zložitejšie:

a) lineárne rovnice s neznámou na jednej strane rovnice
b) lineárne rovnice s neznámou na oboch stranách rovnice
c) lineárne rovnice so zátvorkami
d) lineárne rovnice s desatinnými číslami
e) lineárne rovnice so zlomkami
f) lineárne rovnice s neznámou v menovateli

Teraz sa pozrime na jednotlivé typy lineárnych rovníc trochu bližšie.

a) Lineárne rovnice s neznámou na jednej strane rovnice

Jedna sa o najjednoduchšie lineárne rovnice, ktoré je možné riešiť ešte odhadom a intuitívne, a sú vhodné ako úvod do lineárnych rovníc v 8. ročníku ZŠ a na prvé osvojovanie si ekvivalentných úprav.

Príklad: Riešte rovnicu: $x - 56 = 52$

$$x - 56 = 52 \quad / + 56$$

$$x = 108$$

Koreňom rovnice je K = {108}, skúška nie je nutná.

https://www.geogebra.org/m/h2gwpqvp?command=SetValue(n,4)

b) Lineárne rovnice s neznámou na oboch stranách rovnice

Pomocou ekvivalentných uprav eliminujeme neznámu na jednu stranu rovnice a čísla na druhú stranu.

Príklad: Riešte rovnicu: $2x + 3 = 3x - 4$

$$2x + 3 = 3x - 4 \quad / - 2x + 4$$

$$7 = x$$

K = {7}, skúška nie je nutná.

https://www.geogebra.org/m/h2gwpqvp?command=SetValue(n,5)

c) Lineárne rovnice so zátvorkami

Najprv odstránime zátvorky, zjednodušíme výrazy sa potom postupujeme už známym spôsobom.

Príklad: Riešte rovnicu: $(7x + 3) - 2(x - 1) = 3x - 2 - (x - 4)$

$$(7x + 3) - 2(x - 1) = 3x - 2 - (x - 4)$$
$$7x + 3 - 2x + 2 = 3x - 2 - x + 4$$
$$5x + 5 = 2x + 2 \qquad / - 2x - 5$$
$$3x = -3 \qquad / : 3$$
$$x = -1$$

K = {-1}, skúška nie je nutná.

https://www.geogebra.org/m/h2gwpqvp?command=SetValue(n,6)

d) Lineárne rovnice s desatinnými číslami

V týchto rovniciach sú ako koeficienty desatinné čísla. Napr.

$$0{,}15x - 0{,}23 = 2{,}02 - 1{,}1x \qquad \text{(VI)}$$

Tieto rovnice môžu spôsobovať ťažkosti žiakom, ktorí majú psychologický blok z desatinných čísel (napríklad kvôli dyskalkúlii). Existujú 2 spôsoby, ako si s týmito rovnicami poradiť:

1. **Spôsob** Daná rovnica mi nespôsobuje žiadne ťažkosti, aj desatinné čísla sú len čísla a tak ju vyriešim štandardne ako v prípade b)

$$0{,}15x - 0{,}23 = 2{,}02 - 1{,}1x \qquad / + 1{,}1x + 0{,}23$$
$$1{,}25x = 2{,}25 \qquad / : 1{,}25$$
$$x = 1{,}8$$

https://www.geogebra.org/m/h2gwpqvp?command=SetValue(n,7)

2. **Spôsob** Rovnicu vynásobíme takou mocninou desiatky, aby sme odstránili všetky desatinné čísla.

$$0{,}15x - 0{,}23 = 2{,}02 - 1{,}1x \qquad / \cdot 100$$
$$15x - 23 = 202 - 110x \qquad / + 110x + 23$$
$$125x = 225 \qquad / : 125$$
$$x = 1{,}8$$

https://www.geogebra.org/m/h2gwpqvp?command=SetValue(n,8)

Obidva spôsoby, pochopiteľne, vedú k rovnakému výsledku K = {1,8}. Skúška nie je nutná. Takéto príklady sú ale numericky náchylné na chybu, preto je rozumné ju vykonať.

e) Lineárne rovnice so zlomkami

Ak sa v lineárnej rovnici vyskytujú zlomky, tak je rozumné ich najprv odstrániť tak, že rovnice vynásobíme spoločným menovateľom týchto zlomkov.

Príklad: Riešte rovnicu $\frac{x}{2} - \frac{3}{5}x = \frac{1}{4}(x-7)$. Spoločným násobkom týchto zlomkov je 20.

$$\frac{x}{2} - \frac{3}{5}x = \frac{1}{4}(x-7) \qquad / \cdot 20$$

$$10x - 12x = 5(x-7)$$

$$-2x = 5x - 35 \qquad / + 2x + 35$$

$$35 = 7x \qquad / : 7$$

$$5 = x$$

Koreňom je K = {5}. Skúška nie je nutná.

https://www.geogebra.org/m/h2gwpqvp?command=SetValue(n,9)

f) Lineárne rovnice s neznámou v menovateli

Tieto rovnice sú z lineárnych rovníc najťažšie. Sú to rovnice, v ktorých sa vyskytujú zlomky a v ktorých aspoň jeden menovateľ obsahuje neznámu. Napr.

$$\frac{2}{x-3} = 1 \qquad \text{(VII)}$$

Riešme rovnicu (VII) v $\mathbb{R}$.

1. Musíme určiť **podmienku riešiteľnosti**, aby výraz v rovnici mal zmysel, t. j., x nesmie nadobúdať také hodnoty, že by sme delili nulou.

   Podmienka: $x - 3 \neq 0$

   $$x \neq 3 \qquad (D = \mathbb{R} - \{3\})$$

2. Rovnicu vynásobme výrazom - spoločným násobkom všetkých menovateľov, aby sme odstránili zlomky. Tento výraz je pre každú premennú rôzny od nuly, takže je to ekvivalentná úprava.

   $$\frac{2}{x-3} = 1 \qquad / \cdot (x-3)$$

   $$2 = x - 3$$

3. Takto upravenú rovnicu už riešime ekvivalentnými úpravami.

   $$2 = x - 3 \quad / + 3$$

   $$5 = x$$

4. Koreň rovnice porovnáme s podmienkami riešiteľnosti, z množiny koreňov rovnice musíme odstrániť tie, ktoré nevyhovejú podmienke. V našom prípade koreň rovnice (VII) vyhovuje podmienke. Takže môžeme vykonať skúšku správnosti.
https://www.geogebra.org/m/h2gwpqvp?command=SetValue(n,10)

Uveďme si ešte príklady, kde nám korene nevychádzajú tak jednoducho.

Príklad: Riešte rovnicu $\frac{2x-1}{x+3} = 2 - \frac{7}{x+3}$ v $\mathbb{R}$.

Riešenie: Podmienka: Nerovnosť upravujeme ekvivalentnými úpravami analogicky ako rovnosť: $x + 3 \neq 0 \quad / -3$

$x \neq -3 \quad (D = \mathbb{R} - \{-3\})$

$$\frac{2x-1}{x+3} = 2 - \frac{7}{x+3} \qquad / \cdot (x+3)$$

$$2x - 1 = 2(x+3) - 7$$

$$2x - 1 = 2x + 6 - 7 \qquad / -2x + 1$$

$$0 \cdot x = 0$$

Riešením sú všetky x, ktoré vyhovujú podmienke $x \neq -3$, t. j. $K = D = \mathbb{R} - \{-3\}$. Skúška správnosti nie je nutná.
https://www.geogebra.org/m/h2gwpqvp?command=SetValue(n,11)

Príklad: Riešte rovnicu $\frac{2}{x+1} = 3 - \frac{x-1}{x+1}$ v $\mathbb{R}$.

Riešenie: Podmienka: $x + 1 \neq 0 \;\Rightarrow\; x \neq -1 \quad (D = \mathbb{R} - \{-1\})$

$$\frac{2}{x+1} = 3 - \frac{x-1}{x+1} \qquad / \cdot (x+1)$$

$$2 = 3(x+1) - (x-1)$$

$$2 = 3x + 3 - x + 1$$

$$2 = 2x + 4 \qquad / -4$$

$$-2 = 2x \qquad / : 2$$

$$-1 = x$$

Riešenie nevyhovuje podmienke, preto rovnica nemá riešenie.
https://www.geogebra.org/m/h2gwpqvp?command=SetValue(n,12)

2.10 Slovné úlohy riešené pomocou lineárnych rovníc

Slovné úlohy sú najdôležitejšie a najťažšie učivo, s ktorým sa žiaci na ZŠ stretávajú. Je to spôsob, ako žiakov naučiť svoje vedomosti aplikovať v reálnom živote.

Úspešný riešiteľ pri riešení slovnej úlohy prechádza nasledovnými fázami, ktoré sa však môžu prelínať a v istom bode sa môže opätovne vracať k predchádzajúcim fázam (napríklad si ešte raz prečítať zadanie):

1. Porozumenie zadania úlohy.
2. Zostavenie matematického modelu.
3. Vyriešenie matematického modelu.
4. Kontrola získaného riešenia (Molnár, 2010, s. 9)

Pri riešení slovných úloh je dôležité pochopenie učiva, práca s informáciami, predstavivosť a kreatívnosť. Neexistuje jediný správny spôsob, ako slovne úlohy riešiť. Napriek tomu, že matematika je striktná, tak pri riešení úloh je nutná vysoká miera kreativity a originality, čo môže byť pre žiakov na jednej strane mätúce, ale na druhej strane motivujúce, ak môžu vyniknúť svojou originalitou.

Postup pri riešení slovných úloh pomocou lineárnych rovníc je zväčša nasledovný:

1. Identifikujeme neznámu, najčastejšie ju značíme písmenom x a zostavíme stručný zápis úlohy.
2. Zostavíme rovnicu s našou neznámou x a vyriešme ju ekvivalentnými úpravami.
3. Urobíme skúšku – reflexiu, či sme danú úlohu vyriešili správne.
4. Napíšeme odpoveď

Minecraft je obľúbená počítačová hra, ktorá je veľmi náučná a rozvíja geometrické myslenie detí. Je zložená z kociek a postavy v nej zažívajú deň a noc. Ale dni tam plynú rýchlejšie ako v realite. Na základe toho môžeme sformulovať nasledujúcu úlohu:

Príklad: Deň v Minecrafte trvá 20 minút nášho reálneho času. O koľko rýchlejšie plynie čas v Minecrafte ako v našej realite?

Riešenie: Ak si **označíme *x*** hodnotu, ktorú máme vypočítať, tak v našom prípade je x násobkom, ktorým musíme vynásobiť trvanie jedného dňa v Minecrafte, aby sme dostali trvanie 1 dňa v realite.

Môžeme to zapísať nasledovne.

1 deň v Minecrafte $* \, x$ = 1 deň v realite

Ďalej vieme, že jeden deň v Minecrafte trvá 20 minút.

1 deň v realite trvá 24 hodín, čo je 24 $*$ 60 minút=1440 minút.

Takže môžem urobiť formálny zápis našej slovnej úlohy.

Zápis:

1 deň v Minecrafte .... 20 minút

1 deň v realite .... 1440 minút

Deň v Minecrafte plynie x-krát rýchlejšie ako v realite

Výpočet:

$$20\,x = 1440 \quad / : 20$$

$$x = 72$$

Skúška: 20 minút $*$ 72 = 24 $*$ 60 minút

Odpoveď: Čas v Minecrafte plynie 72-krát rýchlejšie ako v realite.

Vieme ľahko odvodiť nasledujúcu tabuľku:

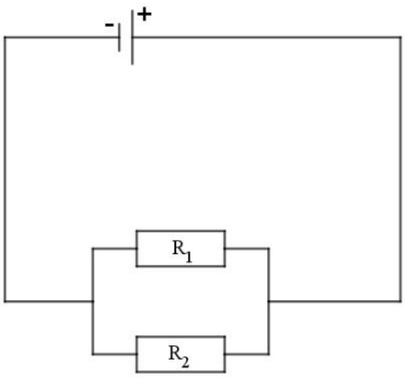
Reálny čas	**Minecraftový čas**
1 minúta	72 minút
20 minút	1 deň
1 hodina	3 dni
1 deň	72 dní
1 týždeň	504 dní
1 rok (365 dní)	26298 dní

2.11 Vyjadrenie neznámej zo vzorca

S rovnicami úzko súvisí problém vyjadrenia neznámej zo vzorca. S týmto problémom sa žiaci stretávajú predovšetkým vo fyzike.

Na vzorec sa pozeráme ako na rovnicu a na neznámu, ktorú chceme vyjadriť, ako na premennú. Ostatné premenné považujeme za konštanty a neznámu vyjadrujeme rovnakým spôsobom, ako keď riešime rovnicu. V prípade, že takýto vzorec spĺňa našu definíciu lineárnej rovnice, na vyjadrovanie neznámej zo vzorca používame iba ekvivalentné úpravy.

Typickým príkladom na vyjadrovanie neznámej zo vzorca je príklad s paralelne zapojenými rezistormi. Takýto príklad som vypracovala v GeoGebre: https://www.geogebra.org/m/ykfhrgyk



Dva paralelne zapojené rezistory R_1 a R_2 majú celkový odpor R.

Platí $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ (I)

Vyjadri zo vzorca odpor R a vypočítaj ho, ak vieme, že

$R_1 = 6\ \Omega$
$R_2 = 12\ \Omega$

Riešenie :

Vzorec (I) vynásobíme menovateľmi. Aby takáto úprava bola ekvivalentná, musí platiť:

Podmienky: $R \neq 0,\ R_1 \neq 0,\ R_2 \neq 0$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \qquad / \cdot R \cdot R_1 \cdot R_2$$

$$R_1 \cdot R_2 = R \cdot R_2 + R \cdot R_1$$ Vyjmeme R pred zátvorku.

$$R_1 \cdot R_2 = R \cdot (R_2 + R_1) \qquad / : (R_2 + R_1)$$ Výraz, ktorým delíme, musí byť nenulový. Do našich podmienkok musíme pridať: $R_1 + R_2 \neq 0$

$$\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = R \qquad \text{(II)}$$ Vyjadrili sme R zo vzorca (I)

V našom prípade sú splnené podmienky. Takže ak chceme R vypočítať, môžeme dosadiť do vzorca (II).

$$R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{6 \cdot 12}{6 + 12} = \frac{72}{18} = 4$$

Odpoveď :

Celkový odpor rezistorov je 4 Ω.

Vo fyzike sa často podmienky nestanovujú, pretože z povahy jednotlivých fyzikálnych veličín - ako napríklad odpor - je jasné, že hodnota nemôže byť záporná alebo nulová.

Skúšku môžeme vykonať tak, že do pôvodného vzorca dosadíme ako zadané, tak aj vypočítané hodnoty odporov. Ale od skúšky sa v týchto prípadoch tiež zväčša upúšťa.
Toto učivo spôsobuje žiakom najväčšie problémy, a preto je dobré ho robiť veľmi pedantne a venovať mu nadštandardnú pozornosť.

3 VÁHY VO VYUČOVANÍ ROVNÍC

3.1 Váhy a rovnice

Rovnoramenné váhy sú najrozšírenejší nástroj, ktorým je možné veľmi zrozumiteľne a názorne predstaviť žiakom na základných školách rovnice. Je dobré zaradiť do vyučovania aj aktivity, kde si žiaci váhy vyskúšajú a môžu s nimi experimentovať.

Paralela medzi rovnoramennými váhami a jednoduchými lineárnymi rovnicami ja dokonalá. Týmto spôsobom je možné interpretovať celé učivo lineárnych rovníc na základnej škole. Platná rovnosť nám predstavuje rovnováhu váh. Jednotlivé konštanty interpretujeme ako závažia a neznáma je nejaký predmet (napr. jablko), ktorého hmotnosť nepoznáme, ale chceli by sme ju vedieť. Týmto spôsobom môžeme pomôcť preklenúť krok medzi konkrétnym problémom, ktorý žiaci vedia jednoducho simulovať, a abstraktným zápisom tohoto problému, ktorý matematika reprezentuje ako výrazy.

Rovnakú analógiu je možné postrehnúť aj medzi ekvivalentnými úpravami a operáciami s váhami, ktoré rovnováhu nenarušujú. Veľmi jednoducho vieme vysvetliť, že ak niečo pridáme na ľavú stranu váh, tak na pravú stranu musíme pridať niečo, čo ma rovnakú hmotnosť ako sme pridali na ľavú stranu. Týmto spôsobom je možné ľahko vysvetliť, ktorá úprava rovnice je ekvivalentná a ktorá nie je. Veľký dôraz treba venovať významnému postaveniu nuly. Zatiaľ čo nula nič nekazí v číselných štruktúrach vzhľadom na operácie sčitovania a odčitovania, v prípade násobenia a delenia to neplatí. Pomocou váh ľahko vysvetlíme, že keď pravú stranu a ľavú stranu, ktoré nie sú v rovnováhe, vynásobíme nulou, tak zrazu máme rovnováhu aj tam, kde nemá byť. Vysvetliť prečo nie je delenie nulou ekvivalentná úprava už skutočne nie jednoduché. A naozaj úplné pochopenie tohoto faktu je podľa mňa možné až na vysokej škole. No aj napriek tomu treba tento netriviálny fakt neustále zdôrazňovať.

Možností, ako zabezpečiť váhy na experimentovanie, je veľa. Dá sa použiť vešiak - pri mladších žiakoch, ale najelegantnejšie riešenie je požiť počítačovú aplikáciu určenú na tento účel. Takýchto aplikácii existuje veľké množstvo.

3.2 Váhy Rafaela Losada Listeho

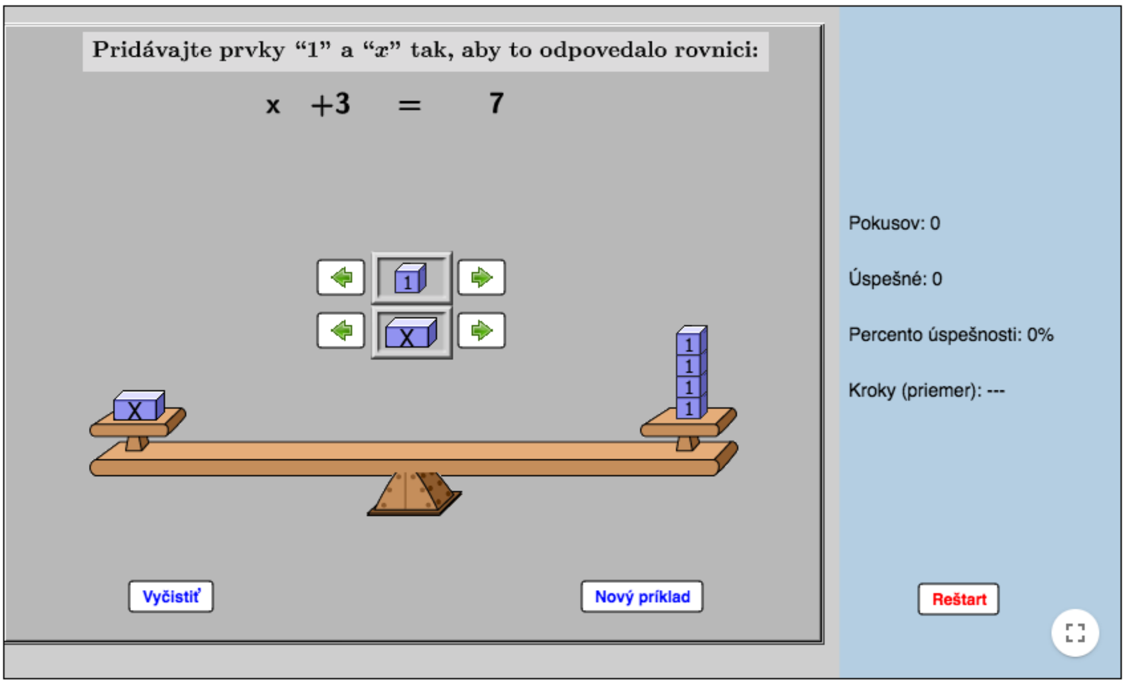
Rafael Losada Liste je školiteľ v International GeoGebra Institute (IGI) a prvého Inštitútu GeoGebry (IG) v Španielsku - The GeoGebra Institute of Cantabria (IGC). Učí žiakov od 12 do 18 rokov.

Pre svojich žiakov vytvoril v GeoGebre podarenú aplikáciu dostupnú z https://www.geogebra.org/m/bhx6uhda, ktorá prepojuje predstavu rovnoramenných váh a jednoduché lineárne rovnice. Jeho aplikácia sa skladá z dvoch úloh. Najprv musíme formálny zápis rovnice interpretovať pomocou závaží a potom rovnicu aj formálne vyriešiť. Program pripúšťa len ekvivalentné úpravy.

Rovnice sú jednoduché, ak sa snažíme vyriešiť rovnicu s čo najmenším počtom krokov, tak nikdy nebudeme potrebovať viac ako 3 kroky. S váhami v jeho aplikácií je možné experimentovať a žiaci môžu príklad riešiť aj priamo na váhe premiestňovaním závaží.

Váhy Rafaela Losada Listeho sú moderný prvok vo vyučovaní rovníc a zapájajú žiakov aktívne do vyučovania. Je to vynikajúci úvod do riešenia rovníc a oboznámenie sa s ekvivalentnými úpravami. Program je ako stvorený na hranie a experimentovanie pre deti.

Slovenský preklad tohoto programu urobil prof. Pavol Hanzel a je dostupný z https://www.geogebra.org/m/dnetcfmf .



4 POROVNANIE UČEBNÍC PRE ZÁKLADNÉ ŠKOLY

4.1 Prezentácia porovnávaných učebníc

Situácia s učebnicami pre aktuálny školský rok 2022/23 je nasledovná. Ministerstvo školstva, vedy, výskumu a športu SR poskytlo zo štátneho rozpočtu v roku 2022 základným školám, špeciálnym základným školám, stredným školám, praktickým školám a odborným učilištiam **príspevok na edukačné publikácie**. Školy si teda môžu vyberať, z akých učebníc budú učiť, zo zoznamu edukačných publikácií, ktorý uverejňuje Ministerstvo. Dostupné z webu https://www.minedu.sk/rok-2022/.

My budeme porovnávať učebnice vzhľadom na tému **rovnice**, ktoré sú predpísané ŠVP pre 8. a 9. ročník, takže nás budú zaujímať iba učebnice matematiky pre 8. a 9. ročník základnej školy. V aktuálnom **zozname EP na príspevok zo ŠR na školský rok 2022/23** (dostupné z webu https://www.minedu.sk/data/att/25244.xlsx) sa pre 8. a 9. ročník nachádzajú nasledujúce učebnice:

Zoznam EP na príspevok zo ŠR (školský rok 2022/2023)		
Názov edukačnej publikácie	**Autor**	**Ročník**
Matematika pre 8. ročník ZŠ a 3. ročník gymnázia s osemročným štúdiom, 1. a 2. časť	J. Žabka, P. Černek	8.
Matematika 8 pre 8. ročník ZŠ a 3. ročník gymnázií s osemročným štúdiom - učebnica	Z. Berová, P. Bero	8.
Matematika 9 pre 9. ročník ZŠ a 4. ročník gymnázií s osemročným štúdiom - učebnica	Z. Berová, P. Bero	9.
Matematika C učebnica pre 2. stupeň ZŠ a GOŠ	M. Hejný, P. Šalom, D. Jirotková, J. Hanušová, A. Sukniak	5. - 9.
Matematika pre 9. ročník ZŠ a 4. ročník gymnázia s osemročným štúdiom, 1. a 2. časť	V. Kolbaská	9.

Pri porovnávaní budem používať pre zaujímavosť aj staršie učebnice od autorov **O. Šedivý, S. Čeretková, M. Malperová, Ľ. Bálint**, ktoré dnes už nezodpovedajú platnému ŠVP, ale stále sú spomínané a prínosné.

4.2 Ako porovnávať učebnice

Úloha porovnať učebnice je odborne veľmi ťažká. Tejto problematike sa venuje aj publikácia od českých autorov Josefa Maňáka a Dušana Klapka **Učebnice pod lupou**. Vo svojej publikácii sa venujú problematike **teórie a výskumu učebnice** a uvádzajú, že v zahraničí je to veľmi rozsiahly a rozvinutý obor pedagogickej vedy, ale Česká republika v nej veľmi zaostáva.
A u nás je situácia podobná. Nedostatočne alebo vôbec sa zaoberáme výskumom učebníc. Nie je prevádzaná evaluácia učebníc a tak nezisťujeme ich didaktickú kvalitu.
Autori ďalej vyslovujú obavu, že kvôli nedostatočnej kontrole učebníc sa ich kvalita stále zhoršuje, čo sa obavám, že je problémom aj u nás.

Vzhľadom na moju nedostatočnú prax v danom obore sa pokúsim porovnať vybrané učebnice v nasledujúcich kategóriách:

1. **Design a vyhotovenie učebnice** – budeme sledovať celkové prevedenie učebníc, počet strán, väzbu, grafické prevedenie, či pomáha prehľadnosti učiva, alebo naopak, či nemá rušivé účinky alebo či nespôsobuje neprehľadnosť, a cenu.
2. **Prístup a spracovanie témy rovnice** a z toho plynúce možnosti štúdia z učebnice pre žiakov – budeme posudzovať obsah a prístup výkladu danej témy v učebnici.

V učebniciach budeme porovnávať iba témy **Rovnice**. Takže sa budeme zaoberať iba učebnicami, v ktorých sa témy rovnice nachádzajú. Chceme sa pokúsiť o aspoň základné zorientovanie sa v učebniciach odporúčaných Ministerstvom školstva. Na ohliadnutie sa späť do minulosti nám budú slúžiť už spomínané učebnice od Šedivého, Čeretkovej, Malperovej, Bálinta. Konkrétne rovnicami sa zaoberajú učebnice ***Matematika pre 7. ročník základných škôl*** a ***Matematika pre 9. ročník základných škôl***.

4.3 Design a vyhotovenie učebnice

Porovnáme základné údaje o učebniciach podľa ročníkov. Ceny sú s DPH a sú aktuálne k dňu 13. 3. 2023.

8. ročník				
	Matematika 8 Berová, Bero	**Matematika 8 Žabka, Černek**		**Matematika C Hejný a kol.**
Časti		**1.časť**	**2. časť**	
Rozmery	166 x 236 mm	210 x 297 mm	210 x 297 mm	170 x 240 mm
Väzba	šitá	brožovaná	brožovaná	Brožovaná
Počet strán	72	144	128	79
Hmotnosť	120 g	372 g	352 g	170 g
Cena	4,90 €	8 €	8 €	6,60 €

9. ročník				
	Matematika 9 Berová, Bero	**Matematika 9 V. Kolbaská**		**Matematika C Hejný a kol.**
Časti		**1.časť**	**2. časť**	
Rozmery	166 x 236 mm	210 x 295 mm	210 x 295 mm	170 x 240 mm
Väzba	šitá	brožovaná	brožovaná	brožovaná
Počet strán	76	128	136	79
Hmotnosť	124 g	372 g	406 g	170 g
Cena	4,90 €	7,90 €	7,90 €	6,60 €

Už takéto veľmi zbežné porovnanie učebníc naznačuje obrovské rozdiely medzi učebnicami

A) Matematika 8 a 9 od autorov Berová, Bero

Jedna sa o menší formát učebníc. Učebnice majú šitú väzbu, ktorá veľmi málo vydrží, a učebnice sa rýchlo začnú rozpadať. Autorská dvojica má knihu aj pre 8. aj pre 9. ročník Na každý rok je určená iba jedna kniha, ktorá ma relatívne malo strán. Kniha je ľahká a nezaberie v aktovke veľa miesta. Učebnice sú veľmi pekné, farebné, s peknými obrázkami. Čitateľnosti a prehľadnosti pomáha, že jednotlivé príklady majú vždy iný farebný podklad.

Jednotlivé kapitoly majú tiež svoju dominantnú farbu a tak sa ľahko orientuje, ktoré strany ešte patria k danej téme a ktoré nie. Definície sú zväčša podfarbené farbou fialového odtieňa, na ktorom je čierny text, čo je v poriadku. Občas sa však v definíciách objavuje aj text zelený alebo modrý a to môže spôsobovať nečitateľnosť pre žiakov s poruchou farbocitu.

Cenovo je to najvýhodnejší variant.

B) Matematika 8 od autorov Žabka, Černek

Jedná sa o väčší formát učebnice. Učebnica je trvácna. Pre 8. ročník je učebnica rozdelená na 1. a 2. časť. Čo je lepšie, aby žiaci nemuseli nosiť priťažkú knihu. Počet strán sa javí ako štandardný a primeraný.

Učebnica má veľký font písmen a číta sa veľmi dobre. Farebnosť tiež pomáha k lepšej orientácii na strane. Jednotlivé pasáže sú farebne odlíšené. Učebnica pôsobí farebne a pekne.

Tiež je každá kapitola podfarbená svojou farbou a ešte na okraji hore je vždy napísané, v akej kapitole sa pravé nachádzame.

Výsledná cena pre 8. ročník je až 16 eur a je to cenovo najdrahší variant.

C) Matematika 9 od autorky V. Kolbaskej

Jedna sa o väčší formát učebnice.. Učebnica je trvácna. Pre 9. ročník je učebnica rozdelená na 1. a 2. časť. Z hľadiska technického prevedenia je najviac porovnateľná so Žabkovou a Černekovou učebnicou.

Učebnica nemá žiadne zbytočné ofarbenia a každá farba v nej je použitá veľmi účelovo. Pomocou podfarbeného textu je hneď jasné, či ide o definíciu alebo zadanie príkladu. Samotné riešenie ma biele podfarbenie. Spôsobuje to na prvý dojem strohosť učebnice, ale prispieva to k lepšej prehľadnosti. Učebnica je plná tabuliek a ilustračných obrázkov. Ako nevýhoda sa mi zdá, že na niektorých miestach je text na strane učebnice v dvoch stĺpcoch, čo je mätúce, a žiakom, ktorým sa pracuje ťažko s textom, to môže spôsobovať problémy.

Cenovo nás tieto učebnice pre 9. ročník vyjdú najdrahšie a to 15,8 eur.

D) Matematika C od autorov Hejný a kol.

Jedná sa o učebnicu menšieho formátu. Rozhodne ide o najkvalitnejšie prevedenie z porovnávaných učebníc. Prvá a posledná strana sú veľmi kvalitné, väzba je dobrá a verím, že tieto učebnice skutočne vydržia aj horšie zaobchádzanie.

Zároveň je učebnica malá, veľmi skladná a ľahká. Design učebnice pôsobí ako učebnica pre 1. stupeň. Obsahuje veľmi infantilné obrázky a heslá. Je veľmi prostá a prehľadná.

E) Matematika 7 a 9 od Šedivého a kol.

Tieto staršie učebnice sú trvácne a výborne slúžia ešte aj dnes.

Pre každý ročník máme 2 knihy: 1. a 2. diel.

Ide o menší formát učebníc, knižky sú ľahké a v aktovke nezaberú veľa miesta.

V nasledujúcej tabuľke sú základné údaje o týchto učebniciach.

Staršie učebnice od autorov O. Šedivý, S. Čeretková, M. Malperová, Ľ. Bálint,				
	Matematika pre 7. ročník základných škôl		**Matematika pre 9. ročník základných škôl**	
Časti	**1.časť**	**2. časť**	**1.časť**	**2. časť**
Rozmery	168 x 232 mm	168 x 232 mm	170 x 235 mm	170 x 235 mm
Väzba	brožovaná	brožovaná	brožovaná	brožovaná
Počet strán	144	158	119	142
Hmotnosť	247 g	270 g	204 g	245 g

Učebnice sú pekné, v malých okienkach nám pri rôznych kapitolách približujú rôznych matematikov. Učebnice sa nevenujú len učivu, ale nájdu si čas a približujú aj ľudský rozmer matematiky. K žiakom pristupujú ako k zrelým jedincom, ktorí sú schopní už vnímať matematiku ako vedu. Tieto učebnice na mňa pôsobia mimoriadne premysleným dojmom.

Orientácia v texte je uľahčená horizontálnymi čiarami.

Dôležité informácie sú podfarbené červenou a žltou farbou.

4.4 Prístup a spracovanie témy rovnice

Učebnice pre 8. ročník

Začnime 8. ročníkom a zjednodušením pohľadom, ktorá kapitola a koľko strán v jednotlivých učebniciach je venovaná téme rovnice.

8. ročník				
	Matematika 8 Berová, Bero	**Matematika 8 Žabka, Černek**		**Matematika C Hejný a kol.**
Časti		**1.časť**	**2. časť**	
Kapitola	Premenná, výraz, rovnica	-	Výrazy, vzorce a rovnice I a II	Rovnice
Počet strán	14	-	20	3

A) Matematika 8 od autorov Berová, Bero

Učebnica sa venuje problematike rovnice v tretej ucelenej kapitole s názvom **Premenná, výraz, rovnica** a dĺžka tejto kapitoly je 14 strán. Kapitola začína tým, že nás oboznámi, čo sa v danej kapitole naučíme. Potom nasleduje zopár príkladov na zopakovanie počtových operácii, zátvoriek, číselnej osi a priamej a nepriamej úmernosti. Nové učivo začína definíciou číselného výrazu.

Číselný výraz *je výraz zapísaný pomocou čísel, znakov počtových operácií a zátvoriek.*

$35 + 89 - 17$	$6 \cdot 28 - 37$	$57 : 3 + 4 \cdot 12$
$35 + 89 - 17 = 107$	$6 \cdot 28 - 37 = 131$	$57 : 3 + 4 \cdot 12 = 67$

107, 131, 67 - hodnota výrazu.

Potom nasledujú príklady, ktoré nie sú vzorovo vyriešené. Ďalej sa kapitola venuje rôznym metódam riešenia slovných úloh. Nasleduje definícia výrazu s premennou a hodnoty výrazu s premennou. Za tým nasledujú neriešené príklady.

Potom sa autori venujú matematikovi al-Chorezmímu, čo je pekné dokreslenie tématiky rovnice. Rovnicu autori definujú takto:

Rovnica

$3x - 5 = 2x - 2$ $\qquad$ $54 + 8y = 26$

neznáme

Ďalej sa autori venujú tomu, ako sa počíta s výrazmi.

*Sčítať a odčítať vieme členy bez premennej. Sčítať a odčítať vieme členy **s rovnakou premennou**.*

$3x + 7 + 4x - 9 = 3x + 4x + 7 - 9 = 7x - 2$

$21 - 6y - 14 + 8y = 21 - 14 - 6y + 8y = 7 + 2y$

$4x - 2xy + 5 + 2xy = 4x - 2xy + 2xy + 5 = 4x + 5$

Ako sa násobí a delí výraz číslom a vynímaniu pred zátvorku.

Ak by sme súťažili v tom, ako povedať všetko podstatné a použiť čo najmenej slov, tak vyhráva táto učebnica. Jej štýl je jasný, čo najzrozumiteľnejšia definícia a potom zopár neriešených príkladov na precvičenie. Ako doplnok na prácu na hodine je to určite dostačujúce. Ale je to minimalisticky štýl, ktorý môže byť niekomu mimoriadne sympatický a pre niekoho iného zase môže byť nedostačujúci.

Ďalej sa autori v tejto kapitole venujú vzorcom.

Znova si zadefinujú vzorec a potom nasledujú neriešené príklady.

Vzorec

Vzorec je skrátený zápis vzťahov medzi veličinami.

Obvod štvorca je štvornásobkom dĺžky jeho strany.

$o = 4a$

Potom nasleduje aj akýsi ťahák pre lenivých, čo je vtipné.

Ešte sa kapitola venuje pravouhlej sústave súradníc a úmernosti a súradnicovej sústave.

Na konci kapitoly je zhrnutie, čo sa žiaci naučili.

Už vieš

- ✓ Čo je číselný výraz a výraz s premennou.
- ✓ Kedy sa rovnajú číselné výrazy.
- ✓ Ako sa počíta s číselnými výrazmi.
- ✓ Čo je premenná, člen s premennou a člen bez premennej.
- ✓ Ako sa určí hodnota výrazu.
- ✓ Ako sa počíta s výrazmi s premennou.
- ✓ Ako vyjadriť neznámu zo vzorca.
- ✓ Riešiť jednoduché slovné úlohy.
- ✓ Čo je pravouhlá sústava súradníc.
- ✓ Ako sa zobrazujú body v pravouhlej sústave súradníc.
- ✓ Čo je graf.
- ✓ Ako sa dá vyjadriť závislosť dvoch veličín graficky.

Tento prístup je veľmi stručný, minimalistická učebnica nie je vhodná pre samoštúdium ak žiak napríklad chýba alebo je lockdown.

Je vhodná na zopakovanie si učiva pred písomkou alebo ako dodatočné ujasnenie si, čo je v danom učive dôležité a čo treba vedieť.

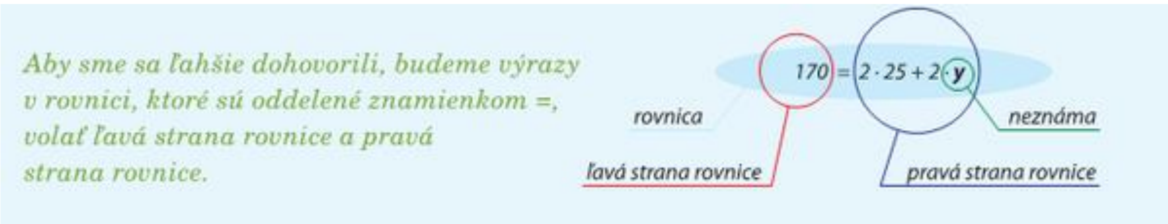
Učebnica sa snaží byť vtipná a prívetivá milým a prirodzeným spôsobom.

B) Matematika 8 od autorov Žabka, Černek

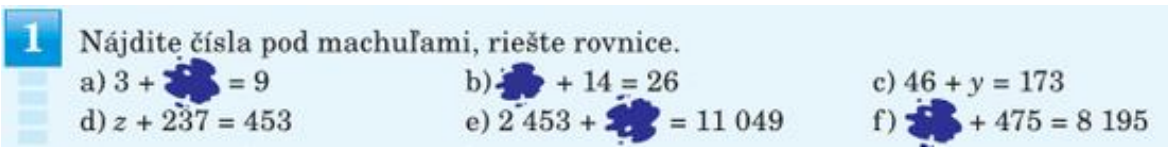
Autori sa venujú téme rovníc v 2. časti učebnice v kapitole pod názvom **Výrazy, vzorce a rovnice**. Samotná kapitola je rozdelená ešte na dve 10-stranové časti. Autori veria, že opakované vracanie sa k téme je bližšie mysleniu žiakov a podporuje to lepšie pochopenie a zapamätanie si učiva. Takže delenie kapitol je pre nich netypické aj pri iných témach.

Autori začínajú kapitolu so vzorcami a dosadzovaním do vzorca a porozumením vzorca, pričom upozorňujú na chyby, ktorých sa môžu žiaci dopustiť. Mnohé príklady sú riešené, autori to spracovali tak, že ich riešia fiktívne postavy, napr. Hedviga, Daniela, Dominik ...

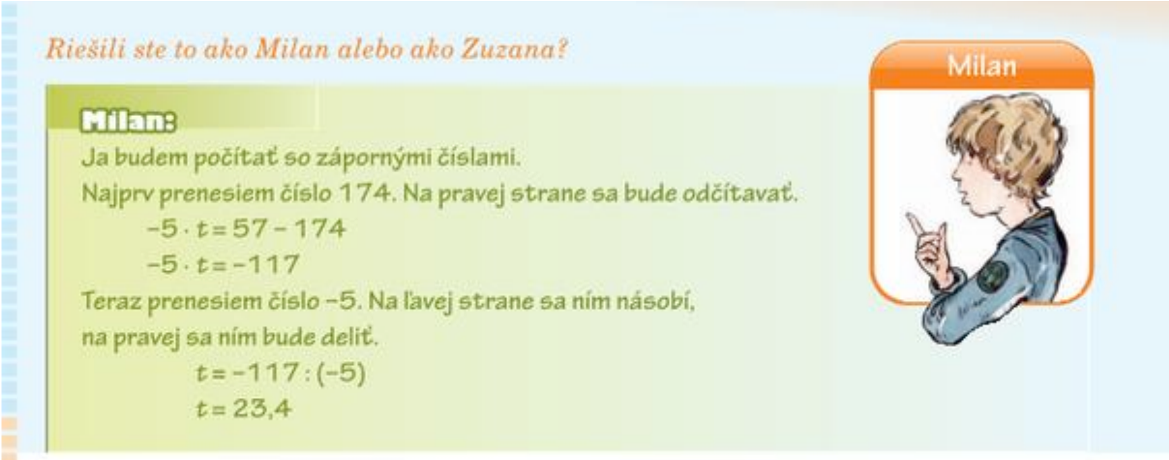
Potom autori definujú rovnicu takto:



Ďalej autori začínajú riešiť jednoduché príklady na rovnice, ktoré sa dajú riešiť ešte odhadom. A robia to pomocou „machúľ"



Potom riešia jednotlivé základné lineárne rovnice, ktoré ide riešiť odhadom a pomocou nápovedy od fiktívnych žiakov získame základný pohľad na riešenie rovníc. Ak neznáma je menšiteľ alebo menšenec. Tým prvá kapitola končí. Nasledujú dve iné kapitoly a potom sa autori k téme znovu vracajú. Riešia rovnice na súčin a podiel. Tie riešia rovnako jednoduchými odhadmi. Nasledujú zložitejšie rovnice. Tu už začínajú pomaly zavádzať ekvivalentné úpravy.



Riešili ste to ako Milan alebo ako Zuzana?

Milan:

Ja budem počítať so zápornými číslami.

Najprv prenesiem číslo 174. Na pravej strane sa bude odčítavať.

$-5 \cdot t = 57 - 174$

$-5 \cdot t = -117$

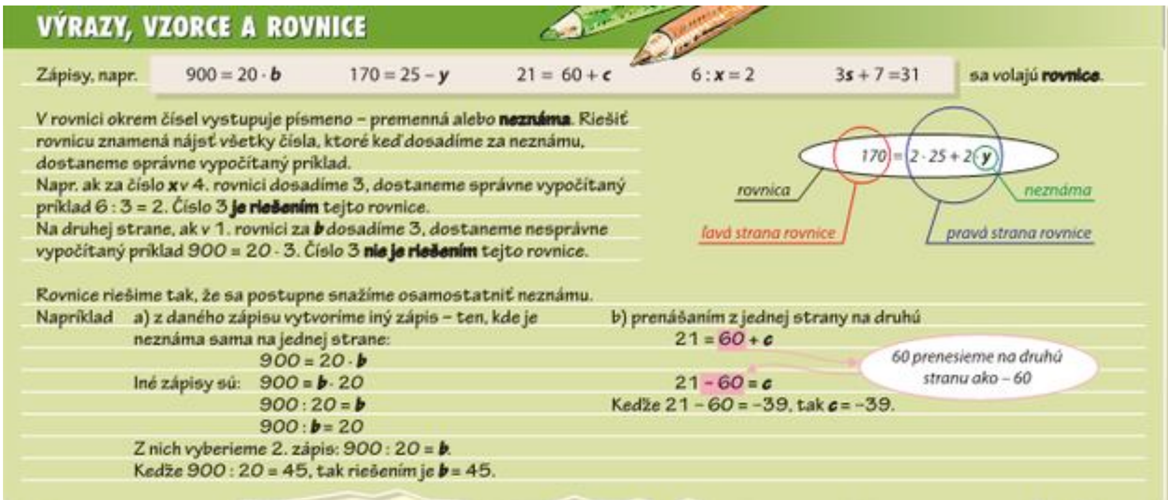
Teraz prenesiem číslo −5. Na ľavej strane sa ním násobí, na pravej sa ním bude deliť.

$t = -117 : (-5)$

$t = 23{,}4$

Kapitolu autori ukončujú slovnými úlohami na rovnice, aj s riešeniami a s návodom ako kontrolovať správnosť riešení.

Autori sa skutočne snažia, aby sa podľa ich knihy dala daná téma naštudovať, majú veľké množstvo riešených príkladov, kde upozorňujú na časté chyby. Téme sa venujú podrobne, ale je nutné si knihu naozaj študovať. Dôležité veci a definície nie sú nijako špeciálne označené, takže sa strácajú v súvislo písanom texte. Je nutné veľa čítať a čítať s porozumením. Autori sa snažia vybudovať určité pochopenie danej témy. Ale tento štýl hlbokého ponorenia sa do problematiky môže spôsobovať v dnešnej povrchnej dobe problém. Určitým spôsobom by sa dalo povedať, že kniha je protikladom učebnice od Berovcov. Berovci hneď idú na definíciu a potom ju precvičujú v praxi. Je to určitý matematický dril, ktorý je tiež potrebný. V knihe Berovcov sa autori snažili použiť čo najmenej slov a v tejto učebnici sa autori nesnažili o žiadne zjednodušenie aspoň základných pončiek a definícií. Na konci učebnice sú výsledky príkladov a zhrnutie. Pre rovnice vyzerá takto:



VÝRAZY, VZORCE A ROVNICE

Zápisy, napr. $900 = 20 \cdot b$ $170 = 25 - y$ $21 = 60 + c$ $6 : x = 2$ $3s + 7 = 31$ sa volajú **rovnice**.

V rovnici okrem čísel vystupuje písmeno – premenná alebo **neznáma**. Riešiť rovnicu znamená nájsť všetky čísla, ktoré keď dosadíme za neznámu, dostaneme správne vypočítaný príklad.

Napr. ak za číslo *x* v 4. rovnici dosadíme 3, dostaneme správne vypočítaný príklad $6 : 3 = 2$. Číslo 3 **je riešením** tejto rovnice.

Na druhej strane, ak v 1. rovnici za *b* dosadíme 3, dostaneme nesprávne vypočítaný príklad $900 = 20 \cdot 3$. Číslo 3 **nie je riešením** tejto rovnice.

Rovnice riešime tak, že postupne snažíme osamostatniť neznámu.

Napríklad a) z daného zápisu vytvoríme iný zápis – ten, kde je neznáma sama na jednej strane:

$900 = 20 \cdot b$

Iné zápisy sú: $900 = b \cdot 20$

$900 : 20 = b$

$900 : b = 20$

Z nich vyberieme 2. zápis: $900 : 20 = b$.

Keďže $900 : 20 = 45$, tak riešením je $b = 45$.

b) prenášaním z jednej strany na druhú

$21 = 60 + c$

60 prenesieme na druhú stranu ako −60

$21 - 60 = c$

Keďže $21 - 60 = -39$, tak $c = -39$.

Ako spestrenie autori uvádzajú rôzne zaujímavé príklady napr. o ponorkách a prinášajú aj hlavolam tangram, z ktorého dávajú logické úlohy na pokračovanie.

C) Matematika C od autorov Hejný a kol.

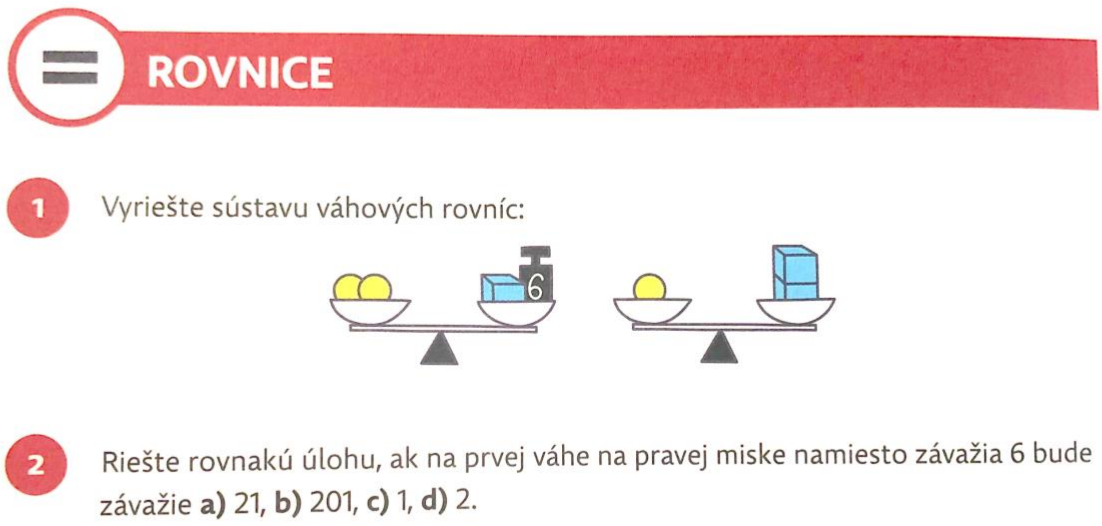
Okolo Hejného matematiky a učebníc je veľká kontroverzia v Čechách. Tieto učebnice vôbec neboli napísané podľa nášho ŠVP, ale podľa českého. Sú to preklady českých učebníc. Takže sa vôbec nedá zaradiť, ktorá učebnica je vhodná pre ktorý ročník a Ministerstvo ju šalamúnsky odporučilo pre 5.-9. ročník.

Čo sa týka témy rovníc, v Matematike C sa jej venuje kapitola s názovom **Rovnice**. Táto kapitola má rozsah 3 strany.

Je tam 11 neriešených príkladov. Žiadne definície, výklad alebo usmernenie. Žiaden z príkladov nie je vzorovo vyriešený. Je to v podstate zbierka úloh. Táto učebnica neposkytuje žiadnu pomoc pri samoštúdiu a dokonca k neriešeným príkladom nie sú uvedené ani správne výsledky.

Učebnica sa tvári, že je hravá a veselá, ale pôsobí skôr rozporuplne. Skutočne je veľký rozpor medzi náročnosťou učiva a designom učebnice. Učebnica vyzerá ako pre malé deti, ale je určená starším žiakom.

Čo sa týka obsahu, tak týchto 11 príkladov je na sústavy rovníc, ktoré v našom ŠVP nie sú pre základné školy, takže je táto kapitola v našich podmienkach nepoužiteľná.



ROVNICE

1 Vyriešte sústavu váhových rovníc:

2 Riešte rovnakú úlohu, ak na prvej váhe na pravej miske namiesto závažia 6 bude závažie **a)** 21, **b)** 201, **c)** 1, **d)** 2.

Príklady majú chyby a niektoré ani nie je možné vyriešiť.

Učebnice pre 9. ročník

Znova začnime jednoduchým porovnaním kapitol venovaných rovniciam.

9. ročník				
	Matematika 9 Berová, Bero	**Matematika 9 V. Kolbaská**		**Matematika C Hejný a kol.**
Časti		**1.časť**	**2. časť**	
Kapitola	Lineárne rovnice a nerovnice	Riešenie lineárnych rovníc a nerovníc	-	Rovnice
Počet strán	18	49	-	3

A) Matematika 9 od autorov Berová, Bero

Učebnica sa venuje problematike rovnice v tretej ucelenej kapitole s názvom **Lineárne rovnice a nerovnice**. Dĺžka tejto kapitoly je 18 strán. Kapitola začína tým, že nás oboznámi s tým, čo sa v nej naučíme. Potom nasleduje zopár príkladov na zopakovanie výrazov a vzorcov. Nové učivo začína témou rovnice a autori nám prinášajú takúto definíciu lineárnej rovnice:

Tak ako v Matematike 8, ani tu sa štýl autorov nezmenil. Znovu vidíme prílišné zjednodušovanie. Aj definícii, aj takmer minimálne vysvetlenie učiva a súvislostí. Žiadne vzorovo riešené úlohy a množstvo neriešených úloh.

Potom nasledujúcu ekvivalentné úpravy rovníc.

Tie autori demonštrujú pomocou rovnoramenných váh a myslím si, že sa im to podarilo pekne.

Autori veľmi prehľadne zadefinujú ekvivalentné úpravy.

Nasleduje samotné riešenie rovníc a veľa neriešených príkladov. Nakoniec máme 5 neriešených príkladov na vyjadrenie premennej zo vzorca.

Ďalšia zastávka sú slovné úlohy, ktoré vedú k lineárnej rovnici. Tá začína vtipným obrázkom a potom nasleduje vyriešená slovná úloha, o ktorej majú žiaci rozhodnúť, či je vyriešená správne.

Ďalej sa kapitola zaoberá nerovnicami a posledná zastávka je lineárna rovnica s neznámou v menovateli. Nie je tam žiadne vysvetlenie učiva, ani zadefinovanie, iba spôsob riešenia a zopár neriešených príkladov.

Pri riešení lineárnej rovnice s neznámou v menovateli používame tie isté ekvivalentné úpravy ako pri riešení lineárnej rovnice. Súčasťou riešenia je ***určenie podmienky*** *pre každý lomený výraz v rovnici!*

$$\begin{aligned} \frac{2x+1}{x} &= 6 && /\cdot x,\ x \neq 0 \\ 2x+1 &= 6x && /-2x \\ 1 &= 4x && /:4 \\ x &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

A sme na konci kapitoly, kde sa nachádza akési zhrnutie toho, čo sme prebrali. Ale znovu len spôsobom akéhosi odfajknutia, že áno, prebrali sme rovnice a ekvivalentné úpravy. Tak ako Matematika 8, absolútne minimalisticky štýl, kniha nie je vhodná na samoštúdium.

Učebnice sú pekné a sympatické, ale trpia tlakom na cenu.

B) Matematika 9 od autorky V. Kolbaská

Autorka sa venuje téme rovníc v 3. kapitole 1. časti učebnice pre 9. ročník s názvom **Riešenie lineárnych rovníc a nerovníc**. Dĺžka kapitoly je 49 strán. Kapitola je rozdelená na 5 podkapitol. Autorka má na začiatku knihy jasne rozdelené, ako sú značené definície, pomôcky, riešené úlohy, súhrn učiva ...

Je to veľmi koncepčné a nápomocné. Kapitola začína opakovaním čo je rovnosť. Autorka to demonštruje na riešených príkladoch. Definícia lineárnej rovnice je nasledovná:

Ak vieme rovnosť dvoch výrazov s neznámou *x* upraviť na tvar
***a* · *x* = *b*, kde *a* a *b* sú reálne čísla,**
tak túto rovnosť nazývame **lineárna rovnica s neznámou *x*.**
Riešenie lineárnej rovnice – **koreň rovnice** je číslo $x = \frac{b}{a}$, pre $a \neq 0$.

Následne formálne zavádza ekvivalentné úpravy. A vzorovo počíta rovnice aj so skúškami správnosti. Autorka rieši veľa rovníc a preberie všetky možnosti.

b)* $(x-1)\cdot(x+3) = x\cdot(2+x)$

$$\begin{aligned} x^2+3x-x-3 &= 2x+x^2 && \\ x^2+2x-3 &= 2x+x^2 && /-x^2 \\ 2x-3 &= 2x && /+3 \\ 2x &= 2x+3 && /-2x \\ \mathbf{0} &\neq \mathbf{3} \end{aligned}$$

Pri riešení rovnice vznikla **nerovnosť 0 ≠ 3**, preto rovnica **nemá riešenie – neexistuje koreň rovnice**.

Po veľkom množstve riešených príkladov ponúka autorka aj test so 14 úlohami. Správne riešenia sú uvedené na konci knihy. Učebnica obsahuje aj náročnejšie úlohy, tzv. Problémové úlohy.

Problémová úloha

a) Pre akú hodnotu p nemá lineárna rovnica
$(2p - 1) \cdot x + 4 = 12$
s neznámou x riešenie?

b) Pre akú hodnotu q má lineárna rovnica
$q \cdot x - 2q + 1 = 5q - 2$
s neznámou x nekonečne veľa riešení?

Koncepcia každej z tých piatich podkapitol je rovnaká. Vždy je tam úvodné opakovanie a naviazanie na predchádzajúce učivo. Potom veľké množstvo riešených príkladov, na ktorých autorka demonštruje nové učivo. Autorka nezabúda ani na nadaných žiakov a pre tých ma nachystané náročnejšie úlohy. Nasleduje test, ktorého správne odpovede nájdeme na konci učebnice, a akési zhrnutie toho, čo sme sa naučili. Autorka sa snaží do kapitol dávať aj zaujímavosti, napríklad o cyklistických pretekoch, ale aj tak kniha pôsobí malo atraktívne. Jej štýl je veľmi staromódny, aj keď obsahovo je to veľmi kvalitne spracovaná učebnica. Je vhodná na samoštúdium.
Učebnica ponúka slušný úvod do stredoškolskej matematiky. Je výrazne náročnejšia ako kniha od Berovcov a venuje sa každému detailu v učive.
Podkapitola 3.3 Jednoduché lineárne rovnice s neznámou v menovateli je tiež spracovaná veľmi podrobne. Na jej konci je takéto zhrnutie:

Zapamätajte si

Lineárna rovnica s neznámou x v menovateli je rovnica, ktorá obsahuje **zlomok** a dá sa upraviť na **tvar $a \cdot x = b$**, kde a a b sú reálne čísla.
Rovnica môže obsahovať rôzne neznáme, napríklad: $x, t, y, a, \dots$.
Napríklad:

$$\frac{3}{4x+1} = -6,\ x \neq -\frac{1}{4}$$

$$\frac{10}{t} = 8,\ t \neq 0$$

$$\frac{49}{2a} = 7,\ a \neq 0$$

Pri riešení rovnice používame **ekvivalentné úpravy rovníc**.
Podmienkou riešenia je, že sa **menovateľ zlomku nerovná nule**.

Nasleduje podkapitola Vyjadrenie neznámej zo vzorca. Autorka sa snaží o spestrenie a prináša príklady, ktoré riešili žiaci v roku 1935. Posledná podkapitola sa venuje riešeniu slovných úloh a aj v nej nájdeme veľa riešených úloh, ktoré pomôžu žiakovi so štúdiom vždy, keď to bude potrebné.

Autorka ponúka aj tzv. projektové úlohy, ktoré žiaci riešia tímovo a nesúvisia len s matematikou.

C) Matematika C od autorov Hejný a kol.

Platí to, čo sme povedali už v kapitole predtým. Spomíname ju tu znova preto, že v odporúčacej doložke je určená pre celý 2. stupeň.

D) Matematika 7 a 9 od Šedivého a kol.

Pozrime sa do minulosti, do roku 2000.

Staršie učebnice od autorov O. Šedivý, S. Čeretková, M. Malperová, Ľ. Bálint,				
	Matematika pre 7. ročník základných škôl		**Matematika pre 9. ročník základných škôl**	
Časti	**1.časť**	**2. časť**	**1.časť**	**2. časť**
Kapitola	-	Lineárne rovnice	Riešenie lineárnych rovníc a ich sústav	-
Počet strán	-	33	22	-

Podľa vtedajšieho ŠVP sa lineárne rovnice preberali v 7. ročníku.

Zaoberá sa nimi druhá časť Matematiky 7 a to na 33 stranách.

Na začiatku knihy sú zadefinované symboly, ktoré učebnica používa a čo znamenajú.

Máme symbol pre príklad, problém, riešenie, poučku, ... a pre rozširujúce učivo.

Kapitola **Lineárne rovnice** je rozdelená na štyri podkapitoly.

Prvá podkapitola je venovaná rovnosti a rovnici. Symboly výborné, uľahčujú orientáciu, v učebnici sú podfarbené len významné veci. Rovnica je zadefinovaná takto:


Zápis $x - 5 = 4$ je **rovnica s neznámou** x.
ľavá strana rovnice | pravá strana rovnice
Ľ P

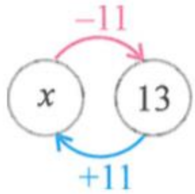
Tu vidíme aj symbol pre poučku.

Ďalšia podkapitola je venovaná úpravám lineárnych rovníc.

Tieto úpravy sú zavedené veľmi didakticky. Aj ako rovnoramenné váhy, aj pomocou „bublín“.

RIEŠENIE

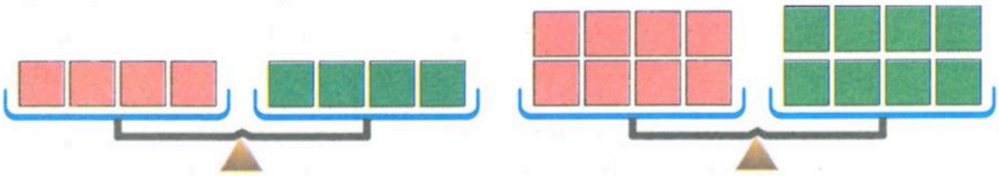
$$x - 11 = 13$$



Spracovanie ekvivalentných úprav pomocou rovnoramenných váh je vynikajúce.

POKUS 4

Martina zdvojnásobí počet kociek na ľavej miske. Aby zostala rovnováha zachovaná, musí zdvojnásobiť aj počet kociek na pravej miske. Hmotnosť na ľavej a pravej miske sa zdvojnásobí, zväčší sa dvakrát.



Ľ = P $\qquad$ n . Ľ = n . P

Riešenie rovnice sa nezmení, ak obidve strany rovnice vynásobíme tým istým číslom, rôznym od nuly.

Výklad nového učiva je dobre zvládnutý a ľahko pochopiteľný.

V učebnici je veľké množstvo riešených, aj neriešených príkladov, ktorých výsledky sú uvedené na konci učebnice.

Ďalšia podkapitola sa venuje riešeniu jednoduchých lineárnych rovníc.

V tejto kapitole sa nachádza aj definícia lineárnej rovnice. Zdôrazňujem, že táto definícia je zrozumiteľná a najkorektnejšia z matematického hľadiska zo všetkých definícií, ktoré sme v posudzovaných učebniciach našli.

Každá rovnica, ktorú sme doteraz riešili mala iba jednu neznámu, ktorú sme najčastejšie označovali x. Dokázali sme ju pomocou ekvivalentných úprav upraviť na tvar:

$$a \,.\, x = b$$

kde x je neznáma a a, b sú čísla, pričom $a \neq 0$.
Riešenie (koreň) rovnice je potom číslo:

$$x = \frac{b}{a}$$

Takúto rovnicu nazývame **lineárna rovnica** s jednou neznámou.

POZNÁMKA

Každá lineárna rovnica s jednou neznámou má vždy práve jedno riešenie (koreň) $x = \frac{b}{a}$.

Posledná podkapitola sa venuje slovným úlohám. Autori uvádzajú jednoduché zásady pri riešení slovných úloh. Táto podkapitola je tiež výborne spracovaná, plná zaujímavých riešených úloh.

Na konci kapitoly je tzv. Historické cvičenie z roku 1866. Na konci kapitoly je záverečné cvičenie s 15 príkladmi, kde si žiak precvičí, či všetkému porozumel.

Ešte sa pozrime, ako autori spracovali lineárne rovnice s neznámou v menovateli. Tato téma sa nachádza ako podkapitola kapitoly **Riešenie lineárnych rovníc a ich sústav** v prvej časti učebnice pre 9. ročník. Táto podkapitola má 5 strán.

Na začiatku kapitoly autori zapakujú potrebné učivo z lineárnych rovníc. Nasledujú riešené príklady na lineárne rovnice so zlomkami. Postupne autori prejdú k neznámej v menovateli a odvodia spôsob ich riešenia:

Riešenie rovníc s neznámou v menovateli

- Určíme podmienky riešiteľnosti: menovatele všetkých lomených výrazov musia byť rôzne od nuly.
- Rovnicu vynásobíme spoločným menovateľom všetkých lomených výrazov, odstránime tak z rovnice zlomky.
- Rovnicu riešime ekvivalentnými úpravami.
- Riešenie rovnice (koreň) porovnáme s podmienkami riešiteľnosti. Ak riešenie vyhovuje podmienkam, vykonáme skúšku správnosti. Ak riešenie nevyhovuje podmienkam, rovnica nemá riešenie.

Nasleduje veľa riešených aj neriešených príkladov.

Učebnice sú vhodné na samoštúdium. Učivo vysvetľuje veľmi pochopiteľným štýlom a autorom sa podarilo nájsť rovnováhu medzi zjednodušením definícii a úplnou matematickou korektnosťou. Je veľmi ťažké hovoriť o matematike jednoducho a pritom úplne korektne a tieto učebnice sú výnimočné v tom, že sa im to podarilo. Učebnica sa číta veľmi dobre. Výklady učiva autorov a ich didaktické prevedenie nikto neprekonal a veľmi ťažko sa hľadá zlepšenie niečoho, čo dobre funguje. Jediná súčasná učebnica, ktorá sa týmto starším učebniciam aspoň vyrovná, je učebnica od V. Kolbaskej.

5 ZÁVER

Zoznámili sme sa s problematikou rovníc na základnej škole. Zistili sme, aké sú štandardy a tiež, že na základnej škole sa riešia predovšetkým lineárne rovnice.

Taktiež sme si predstavili moderný spôsob vyučovania pomocou GeoGebry a ako táto platforma spája a motivuje učiteľov aj študentov matematiky. Pozreli sme sa, ako vyzerá veľmi pekná aplikácia v tomto programe určená na výučbu jednoduchých lineárnych rovníc.

Zmapovali sme aktuálne učebnice a situáciu ohľadom učebníc matematiky, ktoré sa venujú téme rovnice, a zistili sme, že sú medzi nimi veľké rozdiely. Nie všetky sa mi zdali použiteľné na vyučovaní. A pripomenuli sme si staršiu učebnicu od Šedivého a kol., ktorá je aj dnes neprekonaná v kvalite, prístupe k žiakom a výklade učiva.

Cieľom práce bolo oboznámiť sa s problematikou rovníc a učebníc matematiky pre základné školy, predstaviť si nové možnosti ako vyučovať a retrospektívne sa pozrieť na staršiu učebnicu matematiky. Tieto ciele sa podarilo dosiahnuť.

ZOZNAM BIBLIOGRAFICKÝCH ODKAZOV

BEROVÁ, Zuzana; BERO, Peter. *Matematika 8*, Bratislava, LiberaTerra, 2015, 72 s., ISBN 978-80-89792-13-9

BEROVÁ, Zuzana; BERO, Peter. *Matematika 9*, Bratislava, LiberaTerra, 2015, 76 s., ISBN 978-80-89792-18-4

BORCHERDS, Michael, *Adding get or post variables to a URL* [online]. [cit. 2023-02-26]. Dostupné z https://help.geogebra.org/topic/adding-get-or-post-variables-to-a-url

GeoGebra, 2023. *What is GeoGebra?* [online]. [cit. 2023-02-13]. Dostupné z: https://www.geogebra.org/about

HANZEL, Pavol, prof., *Hlavná stránka na portáli GeoGebra.org* [online]. [cit. 2023-03-04]. Dostupné z https://www.geogebra.org/u/phanzel

HEJNÝ, M., ŠALOM P., JIROTKOVÁ D., HANUŠOVÁ J., SUKNIAK A., *Matematika C*, Bratislava, Indícia s.r.o., 2019, 79 s., ISBN 978-80-89859-23-8

KOLBASKÁ, V., *Matematika pre 9. ročník ZŠ a 4. ročník gymnázia s osemročným štúdiom, 1. časť*, Bratislava, SPN – Mladé Letá, 2020, 128 s., ISBN 978-80-10-03370-6

KOLBASKÁ, V., *Matematika pre 9. ročník ZŠ a 4. ročník gymnázia s osemročným štúdiom, 2. časť*, Bratislava, SPN – Mladé Letá, 2020, 136 s., ISBN 978-80-10-03371-3

LISTE, Rafael Losada, *Hlavná stránka na portáli GeoGebra.org* [online]. [cit. 2023-03-04]. Dostupné z https://www.geogebra.org/u/rafael

MAŇÁK, Josef, KLAPKO , Dušan. Učebnice pod lupou. Brno: Paido - edice pedagogické literatury, 2006, 123 s. ISBN 8073151243

Ministerstvo školstva SR, *Vzdelávací štandard pre učebný predmet Matematika (nižšie stredné vzdelanie)* [online]. [cit. 2023-02-25]. Dostupné z https://www.minedu.sk/data/att/22649.pdf

Ministerstvo školstva SR, *Príspevok na edukačné publikácie zo štátneho rozpočtu* [online]. [cit. 2023-03-13]. Dostupné z https://www.minedu.sk/rok-2022

MOLNÁR, P., 2010, *Problémy žiakov s porozumením zadania slovných úloh : dizertačná práca.* Košice : Univerzita P.J. Šafárika, 2010. 172 s.

ŠEDIVÝ O., ČERETKOVÁ S., MALPEROVÁ M., BÁLINT Ľ., *Matematika pre 7. ročník, 1.časť*, Bratislava, SPN – Mladé Letá, 2006, 144 s., ISBN 80-10-00983-0

ŠEDIVÝ O., ČERETKOVÁ S., MALPEROVÁ M., BÁLINT Ľ., *Matematika pre 7. ročník, 2.časť*, Bratislava, SPN – Mladé Letá, 2006, 158 s., ISBN 978-80-10-00984-8

ŠEDIVÝ O., ČERETKOVÁ S., MALPEROVÁ M., BÁLINT Ľ., *Matematika pre 9. ročník, 1.časť*, Bratislava, SPN – Mladé Letá, 2008, 119 s., ISBN 978-80-10-01408-8

ŠEDIVÝ O., ČERETKOVÁ S., MALPEROVÁ M., BÁLINT Ľ., *Matematika pre 9. ročník, 2.časť*, Bratislava, SPN – Mladé Letá, 2008, 142 s., ISBN 978-80-10-01409-5

ŽABKA J., ČERNEK P., *Matematika pre 8. ročník ZŠ a 3. ročník gymnázií s osemročným štúdiom, 1. časť*, Orbis Pictus Istropolitana, Bratislava, 2018, 144 s., ISBN 978-80-8120-585-9

ŽABKA J., ČERNEK P., *Matematika pre 8. ročník ZŠ a 3. ročník gymnázií s osemročným štúdiom, 2. časť*, Orbis Pictus Istropolitana, Bratislava, 2018, 128 s., ISBN 978-80-8120-586-6