UNIVERZITA MATEJA BELA V BANSKEJ BYSTRICI

KONŠTRUKČNÉ ÚLOHY V ROVINE V PROSTREDÍ GEOGEBRA

ZÁVEREČNÁ PRÁCA

2020 Mgr. MIROSLAVA GAJDOŠOVÁ

UNIVERZITA MATEJA BELA V BANSKEJ BYSTRICI

KONŠTRUKČNÉ ÚLOHY V ROVINE V PROSTREDÍ GEOGEBRA

Záverečná práca

Vedúci záverečnej práce: prof. RNDr. Pavol Hanzel, CSc.

BANSKÁ BYSTRICA 2020 **Mgr. MIROSLAVA GAJDOŠOVÁ**

ABSTRAKT

Záverečná práca sa zaoberá využitím interaktívneho matematického programu GeoGebra pri riešení konštrukčných úloh v rovine. Cieľom je predstaviť použitie programu GeoGebra vo vyučovaní geometrie žiakov na základných školách. Výhodou geometrického softvéru je, že umožňuje žiakom rozvíjať vlastnú predstavivosť dynamickou manipuláciou s geometrickými objektami, rozvíja ich tvorivosť a predstavivosť. Zároveň im umožňuje zisťovať podmienky riešiteľnosti a počet vyhovujúcich riešení. Takto sa stáva vyučovanie geometrie pre žiakov zaujímavejšie.

Kľúčové slová: Geometria. Konštrukčné úlohy. GeoGebra.

ABSTRACT

The thesis deals with the use of the interactive mathematical program GeoGebra in solving plain geometric construction problems. The aim is to introduce the use of the GeoGebra program in teaching geometry to students in primary schools. The advantage of geometric software is that it allows students to develop their own imagination by dynamic manipulation of geometric objects, developing their creativity and imagination. At the same time, it allows them to determine the conditions of solvability and the number of suitable solutions. This makes teaching geometry more interesting for students.

Keywords: Geometry. Geometric construction tasks. GeoGebra**.**

OBSAH

ZOZNAM TABULIEK A ILUSTRÁCI

ÚVOD

Matematika je súčasťou nášho každodenného života a našej kultúry. Úlohou školskej matematiky je rozvíjať schopnosti žiakov tak, aby dokázali používať matematiku vo svojom budúcom živote. Významné miesto v rámci matematiky má nesporne aj výučba geometrie. Geometria rozvíja priestorovú predstavivosť a logické myslenie. Pri riešení geometrických úloh sa žiaci zdokonaľujú v problémových riešeniach úloh. Jej význam spočíva aj v tom, že je základom pre ďalšie štúdium matematiky.

Konštrukčné úlohy z geometrie patria k učivu matematiky, ktoré je pomerne náročné a jeho zvládnutie spôsobuje žiakom značné problémy. Úlohou učiteľa je vzbudiť záujem u žiakov a motivovať ich k učivu , čo môže dosiahnuť tak, že podá učivo zaujímavým spôsobom. Silný motivačný charakter má použitie informačno-komunikačných technológií (IKT). Vo výučbe geometrie ide hlavne o použitie dynamických geometrických systémov používaných pri príprave učebných materiálov učiteľom alebo samostatnej práci žiaka s programom.

Konštrukčné úlohy sú jednou z cieľových požiadaviek na vedomosti a zručnosti z matematiky na základných a stredných školách. Preto cieľom tejto práce bolo vytvorenie súboru učebných materiálov v dynamickom geometrickom programe GeoGebra a ich použitie v rámci výučby geometrie v. 8. ročníku ZŠ. Prostredníctvom vytvorených učebných materiálov sme chceli zvýšiť záujem žiakov o geometriu a zároveň rozvíjať ich priestorovú predstavivosť, tvorivosť, samostatné myslenie a aktívne učenie sa.

Záverečná práca je rozdelená do troch kapitol. V prvej kapitole sme poukázali na význam geometrie v školskej matematike, uviedli sme vymedzenie pojmu konštrukčná úloha. V druhej kapitole sme v krátkosti pripomenuli význam IKT v edukácii a stručne opísali základné funkcionality matematického softvéru GeoGebra. Tretia kapitola obsahuje celkom tri scenáre vyučovacích hodín, ktoré využívajú učebné materiály vytvorené v programe GeoGebra.

1. GEOMETRIA

Geometria patrí medzi najstaršie matematické a vedné odbory. Už v mladšej dobe kamennej boli pri výzdobe nádob používané rôzne geometrické útvary. Ďalší rozvoj geometrických predstáv nastal v staroveku (8. – 5. tisícročie pred n.l.). Geometrické poznatky najstarších civilizácií umožňovali meranie pôdy, realizáciu zložitých stavieb alebo jednoduché astronomické výpočty.

Názov geometria vznikol v staroveku zložením gréckych slov gé, čo znamená zem a metria = meranie. V starovekom Grécku počas 8. – 6. storočia pred n.l. dochádza k vzniku novej teoretickej matematiky. V rovnakom období sa od praktickej geometrie oddeľuje teoretická geometria. Významnými predstaviteľmi boli grécky matematik a filozof Thales z Miletu (7. – 6. storočie pred n.l.), ktorý usporiadal a formuloval niektoré jednoduché poučky o kružniciach a trojuholníkoch. Jeho žiak Pythagoras zo Samu sa stal známym predovšetkým v spojení Pythagorovou vetou pre pravouhlý trojuholník. O ďalší rozvoj geometrie sa pričinil grécky filozof Platon (5. – 4. storočie pred n.l.), ktorý založil aténsku Akademiu, v ktorej sa venovala veľká pozornosť riešeniu konštrukčných úloh pomocou pravítka a kružidla. V starovekom Grécku bolo vzdelanie v oblasti geometrie považované za nutnú predprípravu pre štúdium filozofie.

Axiomatické základy geometrie položil Euklides asi v roku 330 pr. n. l. v diele Stoicheia (Základy), ktoré tvorí 13 kníh. Tieto popisujú základné geometrické vlastnosti a vzťahy elementárnych útvarov, ktorými sú bezrozmerné body, jednorozmerné priamky a dvojrozmerné roviny euklidovského priestoru.

V priebehu storočí sa geometria rozvinula na bohatú vedeckú disciplínu pozostávajúcu z mnohých odvetví. Každá sa zaoberá štúdiom iných vlastností geometrických útvarov a používa iné metódy a reprezentácie.

Geometria má aj v súčasnom vzdelávaní nezastupiteľnú úlohu, kde v rámci vyučovania matematiky utvára a rozvíja logické myslene. Podľa Hejného (2004) geometria ponúka dieťaťu väčší priestor na rozvoj jeho intelektu, hlavne tvorivosti. Školská geometria predstavuje prostredie pre rôznorodú činnosť žiaka, oblasť podnecujúcu rozvoj myslenia žiaka a prelína sa v nej výtvarná krása a logika. Geometria vďaka vizuálnej informácii prispieva k rozvoju aj iných ako geometrických predstáv. Príkladom sú vizualizácie niektorých aritmetických a algebraických pojmov. Geometria viac než akákoľvek iná oblasť matematiky spája životné skúsenosti žiaka a jeho teoretické poznanie.

1.1. Geometria v nižšom strednom vzdelávaní

Výučba geometrie v nižšom strednom vzdelávaní je prioritne zameraná na získanie úvodných informácií z oblasti geometrie. Geometria sa delí na dve časti: planimetriu – geometriu v rovine a stereometriu – geometriu v priestore. Ako uvádza Polák (2014), žiaci na základnej škole získavajú:

- prvotné geometrické predstavy a poznatky,
- zoznamujú sa so základnou geometrickou terminológiou,
- učia sa používať rysovacie prostriedky pri riešení jednoduchých konštrukčných úloh,
- spoznávajú súvislosti medzi geometriou, aritmetikou a algebrou pri riešení výpočtových geometrických úloh.

Obsahom výučby planimetrie na ZŠ sú rovinné útvary, zhodné a podobné zobrazenia, konštrukčné úlohy. S pojmom konštrukčná úloha a jej riešením sa žiaci základnej školy prvý krát stretávajú v 6. ročníku. Obsahom výučby stereometrie sú jednoduché telesá.

1.1.1. Planimetria a konštrukcie 5. a 6. ročník ZŠ

V 5. a 6. ročníku sa žiaci na ZŠ podľa ISCED 2 v planimetrii zoznamujú najmä s jednoduchými konštrukciami:

- narysovanie úsečky danej dĺžky,
- zostrojenie kružnice s daným polomerom,
- narysovanie rovnobežných a kolmých priamok,
- zostrojenie rovinného geometrického útvaru v osovej a stredovej súmernosti,
- zostrojiť os úsečky,
- zostrojiť os uhla,

a konštrukciami trojuholníkov podľa viet sss, sus, usu.

1.1.2. Planimetria a konštrukcie 8. ročník ZŠ

V 8. ročníku na ZŠ sa žiaci podľa ISCED 2 venujú v rámci planimetrie dvom tematickým celkom – Rovnobežník a lichobežník, Kruh a kružnica. Tematické celky sú rozdelené do nasledovných tém: „

- rovnobežnosť, rovnobežné priamky (rovnobežky), rôznobežky, priečka, rovnobežky preťaté priečkou,
- súhlasné a striedavé uhly a ich vlastnosti,
- štvoruholníky, rovnobežníky, štvorec, kosoštvorec, obdĺžnik, kosodĺžnik, lichobežník a ich základné vlastnosti (o stranách, vnútorných uhloch, uhlopriečkach a ich priesečníku),
- strany, veľkosti strán, vnútorné uhly rovnobežníka (štvoruholníka), dve výšky rovnobežníka, uhlopriečky, priesečník uhlopriečok rovnobežníka, vlastnosti rovnobežníka,
- súčet vnútorných uhlov štvoruholníka ($\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^{o}$) ,
- základňa lichobežníka, rameno lichobežníka, výška lichobežníka, všeobecný lichobežník, pravouhlý lichobežník, rovnoramenný lichobežník,
- kružnica, kruh, medzikružie,
- stred kruhu (kružnice),
- polomer a priemer kružnice,
- vzájomná poloha kružnice a priamky,
- sečnica, nesečnica, dotyčnica ku kružnici, tetiva, ich vlastnosti,
- vzdialenosť stredu kružnice od tetivy
- Tálesova kružnica
- kružnicový oblúk, stredový uhol, kruhový výsek, kruhový odsek
- Ludolfovo číslo a jeho približné hodnoty $\pi \doteq 3{,}14$
- obsah a obvod kruhu, dĺžka kružnice, $S = \pi \cdot r \cdot r$; $o = 2\pi r = \pi d$.“
  (<https://www.statpedu.sk/files/articles/dokumenty/inovovany-statny-vzdelavaci-program/matematika_nsv_2014.pdf >, cit 2020-06-05)

Výkonový štandard k uvedeným témam týkajúci sa konštrukčných úloh je nasledovný: „

- zostrojiť ľubovoľný lichobežník (všeobecný, pravouhlý, rovnoramenný) podľa daných prvkov a na základe daného konštrukčného postupu,
- vyriešiť primerané konštrukčné úlohy pre štvoruholníky s využitím vlastností konštrukcie trojuholníka a s využitím poznatkov o rovnobežníkoch a lichobežníkoch,
- zostrojiť dotyčnicu ku kružnici v určenom bode ležiacom na tejto kružnici,
- zostrojiť dotyčnicu ku kružnici z daného bodu, ktorý leží mimo tejto kružnice,
- slovne opísať postup konštrukcie dotyčnice ku kružnici približnou metódou aj pomocou Tálesovej kružnice.“

(<https://www.statpedu.sk/files/articles/dokumenty/inovovany-statny-vzdelavaci-program/matematika_nsv_2014.pdf >, cit 2020-06-05)

1.1.3. Planimetria a konštrukcie 9. ročník ZŠ

V 9. ročníku na ZŠ podľa ISCED 2 žiaci rozširujú svoje vedomosti v oblasti konštrukčných úloh v rámci tematického celku Podobnosť trojuholníkov. Tematický celok pozostáva z nasledujúcich tém: „

- geometrické útvary v rovine,
- zhodnosť geometrických útvarov,
- podobnosť geometrických útvarov, podstata podobnosti,
- pomer podobnosti dvoch geometrických útvarov,
- podobnosť trojuholníkov,
- vety o podobnosti trojuholníkov (sss, sus, uu),
- podobnosť trojuholníkov v praxi.“
  (<https://www.statpedu.sk/files/articles/dokumenty/inovovany-statny-vzdelavaci-program/matematika_nsv_2014.pdf >, cit 2020-06-05)

Na základe získaných vedomostí majú žiaci vedieť:

- vyriešiť primerané konštrukčné úlohy s využitím viet o podobnosti trojuholníkov.

1.2. Konštrukčné úlohy

Konštrukčné úlohy oddávna zastávali významné miesto vo vyučovaní matematiky. Hejný (1989) ako dôvody, pre ktoré je potrebné a prospešné venovať priestor vo vyučovaní konštrukčným úlohám, uvádza:

- poskytujú krásne motivačné úlohy, ktoré podnecujú zvedavosť a vedú k samostatnému objavovaniu zákonitostí,
- sú mostom, po ktorom môžu manuálne zručnosti a skúsenosti žiaka prejsť do jeho geometrickej poznatkovej štruktúry,
- ukazujú žiakovi jasný cieľ – treba zostrojiť! – na rozdiel od viet a dôkazov, ktorých význam a zmysel môže byť žiakovi nejasný,
- ukazujú, ako možno teoretické poznatky zužitkovať v praxi;
- prispievajú k interiorizácií pojmov a viet,

- sú vhodným testovacím prostriedkom, pomocou ktorého môže učiteľ diagnostikovať kvalitu neformálnych poznatkov žiaka.

Konštrukčné úlohy sú také geometrické úlohy, kde sa požaduje zostrojenie geometrického útvaru, resp. útvarov daných vlastností. Podstata riešenia konštrukčnej úlohy spočíva v nájdení a postupnej realizácií elementárnych konštrukcií, ktoré vedú k zostrojeniu hľadaného objektu. Pri konštrukcii geometrického objektu vychádzame z určitej skupiny daných bodov, ďalšie body sa zostrojujú ako spoločné body narysovaných priamok a kružníc.

Podľa Šedivého (2013, s. 8) „naučiť sa riešiť konštrukčnú úlohu znamená:

• Prv ako začneme konštruovať, musíme si ujasniť situáciu.

• Nakreslíme si obrázok, na ktorom je hľadaný útvar, vyznačíme dané prvky a začneme obrázok skúmať.

• Hľadáme cestu, ktorá vedie od daných prvkov k zostrojeniu celého útvaru.

• Z toho vyplynie postup konštrukcie a jeho grafické prevedenie.

• Každý riešiteľ konštrukčnej úlohy sa musí presvedčiť, či zostrojený útvar je ten, ktorý bolo treba zostrojiť.

• Každý riešiteľ musí si uvedomiť, či hľadaný útvar možno zostrojiť a nájsť podmienky riešiteľnosti.“

Konštrukčné úlohy riešené výlučne použitím pravítka a kružidla nazývame euklidovské konštrukcie. Euklidovské konštrukcie patria k najvýznamnejším konštrukciám a práve preto sa používajú pri riešení planimetrických konštrukčných úloh na základnej a strednej škole. Každá euklidovská konštrukcia sa skladá z konečného počtu opakovaní základných konštrukčných výkonov. Štalmášek (1959, s. 9) považuje za základné nasledovné konštrukčné výkony: „

1. narysovať priamku prechádzajúcu dvomi rozličnými známymi bodmi,
2. určiť priesečník dvoch rôznobežných priamok, z ktorých každá prechádza dvojicou známych bodov,
3. narysovať kružnicu, ktorá má stred v známom bode a prechádza iným známym bodom,
4. určiť priesečníky dvoch kružníc, z ktorých každá má stred v známom bode a prechádza iným známym bodom,
5. určiť priesečníky priamky prechádzajúcej dvoma známymi bodmi a kružnice, ktorá má stred v známom bode a prechádza iným známym bodom.“

1.2.1. Fázy riešenia konštrukčných úloh

Riešenie konštrukčných úloh sa obyčajne rozdeľuje do štyroch častí, takzvaných fáz riešenia konštrukčnej úlohy.

Rozbor (analýza) je prvá fáza riešenia konštrukčnej úlohy a je zameraná na nájdenie vzťahov medzi zadanými a hľadanými prvkami zostrojovaného geometrického útvaru. Obvykle sa realizuje pomocou náčrtu, kde sa zaznačia a popíšu všetky prvky zo zadania a zakreslia sa pomocné geometrické útvary, potrebné pri riešení úlohy. Následne sa hľadajú vzťahy medzi danými a hľadanými prvkami. Cesta, ktorou je možné úlohu vyriešiť. K rozboru je potrebné pristupovať zodpovedne, aby v prípade jeho nedokonalej realizácie, nedošlo k strate niektorých riešení.

Konštrukcia je druhá časť postupu riešenia konštrukčnej úlohy. Na základe vykonaného rozboru sa formuluje stručný zápis konštrukcie, ako je z daných prvkov možné vytvoriť euklidovskými konštrukciami hľadaný útvar. Následne sa realizuje grafická konštrukcia, teda narysovanie hľadaného geometrického útvaru. Stručný zápis konštrukcie sa nazýva postup konštrukcie. Každý hľadaný bod sa spravidla v postupe konštrukcie uvádza ako prienik dvoch množín bodov, ktorým tento bod patrí. V zápise sa vždy najprv uvádza, aký útvar sa zostrojuje a následne na základe akej vlastnosti.

Skúška alebo dôkaz konštrukcie je zameraná na overenie toho, či zostrojený geometrický útvar spĺňa všetky požadované vlastnosti. Môže sa totiž stať, že niektoré alebo všetky útvary zostrojené podľa konštrukčného postupu nevyhovujú podmienkam úlohy, a preto nie sú riešením úlohy. Je preto potrebné ukázať, že všetky vytvorené útvary majú požadované vlastnosti. Skúška sa obyčajne realizuje tak, že sa obráti postup, ktorý bol použitý pri konštrukcii.

Diskusia sa pripája v prípade, že zadanie konštrukčnej úlohy obsahuje premenné prvky – parametre. Konštrukčná úloha s parametrami predstavuje množinu konštrukčných úloh, ktoré zodpovedajú všetkým možným hodnotám parametrov. Tak môžu vzniknúť prípady, keď úloha nemá žiadne riešenie, jedno riešenie alebo viacej riešení. Je preto potrebné zistiť, za akých podmienok je úloha riešiteľná a určiť príslušný počet riešení. V prípade úloh bez parametrov sa určuje len počet riešení.

1.2.2. Rozdelenie konštrukčných úloh

Pre správnu realizáciu rozboru konštrukčnej úlohy a následného nájdenia konštrukčného postupu je potrebné poznať typ konštrukčnej úlohy. Konštrukčné úlohy sa rozlišujú na základe niekoľkých aspektov, Polák (2014) uvádza:

a) konštrukčné úlohy bez parametrov, resp. a jedným alebo viacerými parametrami,
b) konštrukčné úlohy s jedným alebo viacerými neznámymi bodmi,
c) konštrukčné úlohy polohové a konštrukčné úlohy nepolohové.

Konštrukčná úloha s parametrami predstavuje množinu úloh, ktoré sú riešené naraz a záverečnej fáze konštrukcie dôjde k rozdeleniu pre konkrétne hodnoty parametrov a realizuje sa diskusia o riešeniach konštrukčnej úlohy.

Konštrukčné úlohy s jedným alebo viacerým neznámymi bodmi sú úlohy, kde je potrebné nájsť konečnú množinu bodov, ktorá hľadaný útvar jednoznačne určuje. Pokiaľ je v úlohe viacero neznámych bodov, riešenie konštrukčnej úlohy sa prevádza na postupné riešenie konštrukčných úloh s jedným neznámym bodom.

Polohové konštrukčné úlohy sú úlohy, kde je daná poloha aspoň jedného zo zadaných prvkov. Tým je zároveň jednoznačne určená poloha hľadaného útvaru. Riešenie polohovej konštrukčnej úlohy spočíva v hľadaní jedného alebo viacerých neznámych bodov zostrojovaného geometrického útvaru.

Nepolohové konštrukčné úlohy sú úlohy, kde nie je daná poloha žiadneho zo základných prvkov, len ich tvar a veľkosť. Pri nepolohových konštrukčných úlohách je potrebné najprv uskutočniť lokalizáciu niektorého z daných prvkov, a tak previesť riešenie úlohy na polohovú úlohu. Počet riešení je závislý na počiatočnom umiestnení prvkov. Na určenie najvhodnejšieho spôsobu riešenia, je vhodné vyskúšať rôzne spôsoby umiestnenia prvkov.

1.2.3. Metódy riešenia konštrukčných úloh v rovine

Pri riešení konštrukčných planimetrických úloh sa obyčajne využívajú nasledovné metódy:

a) metóda množiny všetkých bodov danej vlastnosti,
b) metóda geometrických zobrazení v rovine,
c) metóda konštrukcie na základe výpočtu (algebraická metóda),
d) metóda súradníc (analytická geometria) (Polak 2014).

Uvedenými metódami je väčšinou možné riešiť len jednoduchšie konštrukčné úlohy. Pri zložitejších úlohách je potrebné tieto metódy kombinovať.

Metóda množiny všetkých bodov danej vlastnosti sa používa v prípade, že pri riešení konštrukčnej úlohy je potrebné vyhľadať body, ktoré majú dané vlastnosti. Metóda množiny všetkých bodov danej vlastnosti spočíva v tom, že pre každý z hľadaných bodov sú stanovené dve nutné podmienky, ktoré musia spĺňať Následne sa určia množiny bodov spĺňajúcich prvú a druhú podmienku. Hľadaný bod je prienikom týchto množín.

Metóda geometrických zobrazení v rovine vychádza pri riešení konštrukčných úloh z použitia jednotlivých druhov zhodných a podobných zobrazení. V prípade zhodných zobrazení umožní nahradiť niektoré dané body ich obrazmi. Týmto sa stanú vzťahy medzi obrazmi bodov, hľadanými a zostávajúcimi danými bodmi jednoduchšie, teda úloha alebo jej časť prechádza na jednoduchšiu. Pri podobných zobrazenia sa najprv zostrojí útvar podobný hľadanému útvaru a potom sa podľa ďalších podmienok úlohy zväčší alebo zmenší v žiadanom pomere.

Metóda konštrukcie na základe výpočtu spočíva vo vyjadrení vzťahov medzi danými a hľadaným bodmi pomocou rovníc. Potom sa zostroja výrazy, ktoré vznikli ako riešenie týchto rovníc.

Metóda súradníc je obdobou metódy na základe výpočtu, kde vhodne zvolený počiatok a súradnicové osi pravouhlej sústavy súradníc zjednodušia rovnice vyjadrujúce vzťahy medzi danými a hľadanými bodmi.

2. INFORMAČNO-KOMUNIKAČNÉ TECHNOLÓGIE VO VYUČOVANÍ

V súčasnosti sa s výpočtovou technikou stretávame takmer vo všetkých oblastiach života, je preto prirodzené, že v posledných rokoch sa IKT stali aj súčasťou vzdelávania. Petlák (2016) uvádza, že výpočtovú techniku je možné použiť vo viacerých oblastiach vzdelávacieho procesu:

- **precvičovanie učiva** – program môže byť vytvorený tak, aby upevňoval a prehlboval osvojené, ale aj osvojované učivo,
- **prezentácia učiva** – program, prezentuje učiacemu učivo v istej postupnosti, učivo je doplnené obrázkami, znakmi alebo inými efektmi,

- **precvičovanie a kontrola učiva** – program môže obsahovať kontrolnú funkcionalitu, a tak zhodnotiť odpovede žiaka,
- **simulácia** – program umožňuje prezentovať javy, ktoré nie je možné bežne pozorovať,
- **didaktické hry pomocou počítača –** žiak si formou hry môže opakovať alebo fixovať učivo.

Matematika na 2. stupni ZŠ je okrem budovania základov matematickej gramotnosti zameraná aj na rozvoj digitálnej gramotnosti žiakov, teda ich schopnosti používať prostriedky IKT. Podľa monografie *Využitie informačných a komunikačných technológií v predmete matematika pre základné školy* (2010). Môžeme rozvoj digitálnej gramotnosti chápať v štyroch hlavných rovinách:

- **Objavovať a skúmať svet okolo nás pomocou IKT** – čo znamená, že žiak by mal vedieť využívať informačné zdroje, vyhľadávať a selektovať v informáciách.
- **Tvoriť a rozvíjať nové myšlienky pre porozumenie sveta okolo nás pomocou IKT** – teda žiak by mal vedieť analyzovať a interpretovať informácie, využiť ich na porozumenie javov.
- **Vymienať a zdieľať informácie s ostatnými pomocou IKT** – žiak by mal vedieť pomocou vhodnej výpočtovej techniky spracovať informácie a svoje myšlienky, finalizovať a prezentovať ich.
- **Kriticky myslieť, hodnotiť, rozhodovať sa v akejkoľvek fáze práce** – žiak by mal vedieť kriticky hodnotiť, myslieť a rozhodovať sa v každej fáze práce s IKT.

Z vyššie uvedených štyroch oblastí rozvoja digitálnej gramotnosti uvádza monografia *Využitie informačných a komunikačných technológií v predmete matematika pre základné školy* (2010) ako vhodné sa na hodinách matematiky koncentrovať hlavne na tieto štyri IKT kompetencie:

- využívanie informácií a informačných zdrojov,
- organizovanie a skúmanie,
- analyzovanie a automatizovanie procesov,
- chápanie modelov a modelovanie.

Existuje množstvo rôznorodých prostriedkov IKT, ktoré je možné použiť pri výučbe matematiky. IKT umožňujú zefektívnenie a skvalitnenie procesu učenia a napĺňanie vzdelávacích cieľov vyučovania matematiky. Pri výučbe geometrie môžeme siahnuť dynamických geometrických systémoch (DGC – Dynamic Geometric Systems), ktoré boli vytvorené za účelom simulácie konštrukčných úloh, pričom dôraz sa kladie na interaktivitu a dynamiku systému. DGS umožňujú jednoduchým spôsobom zostrojiť geometrické konštrukcie, manipulovať s ich prvkami, zmenou parametrov objavovať vzťahy medzi objektami. Ich použitie pri výučbe geometrie rozvíja schopnosť skúmať vlastnosti objektov, analyzovať vzťahy medzi nimi a formulovať hypotézy. Medzi často využívane DGS vo vyučovacom procese patrí matematický softvér GeoGebra.

2.1. GeoGebra

GeoGebra je dynamický matematický softvér určený pre všetky úrovne vzdelávania od základných škôl až po vysoké školy. V jednej aplikácii je spojené vyučovanie geometrie, algebry, analýzy, štatistiky, znázornenia grafov ale aj diferenciálneho a integrálneho počtu. Autorom programu je profesor Markus Hohenwarter, ktorý s jeho vývojom začal v roku 2001 na univerzite v Salzburgu a s pomocou medzinárodného tímu programátorov a prekladateľov na ňom pracuje dodnes. V súčasnosti je voľne dostupný v mnohých jazykových verziách. Pre komerčné účely ho však nie je možné využívať bez príslušnej licencie. Je to multiplatformový softvér s desktopovými aplikáciami pre Windows, MacOS, Linux, s tabletovými aplikáciami pre Android a iPad a taktiež webovou aplikáciou založenou na technológii HTML5.

Softvér GeoGebra je určený predovšetkým pre učiteľov a študentov. Pomocou jeho nástrojov je možné vytvárať učebné materiály, riešiť konštrukčné úlohy a objavovať vzťahy medzi konštruovanými objektmi. Vytváranie základných geometrických objektov, ich úprava alebo odstránenie je veľmi jednoduché. Program umožňuje pohybovať s vytvorenými konštrukciami, jednotlivé kroky konštrukcie zaznamenávať a následne ich prehrávať.

Materiály vytvorené programom môžu byť exportované do rôznych formátov ako sú:

- statické obrázky,
- animované GIF obrázky,
- vektorové obrázky.

Vektorové obrázky môžu byť následne upravované pomocou ďalších aplikácií. GeoGebra dokáže tiež vytvoriť kód, ktorý sa dá použiť v súboroch LaTeX. Ďalšou možnosťou sú dynamické applety, ktoré môžu byť spúšťané z iného programu napr. webového prehliadača. Applety môžu byť nahraté priamo na platformu GeoGebra Materials, čo je oficiálna cloudová služba a úložisko pre interaktívne učebné GeoGebra materiály alebo lokálne na počítač používateľa.

2.1.1. Reprezentácia matematických objektov v aplikácii GeoGebra

GeoGebra ponúka rôzne spôsoby reprezentácie matematických objektov prostredníctvom rôznych pohľadov:

- grafického pohľadu,
- algebraického pohľadu,
- tabuľkového pohľadu,
- CAS pohľadu.

Reprezentácie objektu sú vo všetkých pohľadoch dynamické a zmeny objektu vykonané v jednom pohľade sa automaticky prenášajú do aj pohľadov, v ktorých majú dané objekty matematickú reprezentáciu.

Grafický pohľad je dostupný v troch rôznych oknách (Nákresňa, Geometrické okno 2, Geometrický vzhľad 3D). Je v ňom možné realizovať geometrické konštrukcie prostredníctvom konštrukčných tlačidiel z menu nástrojov. Obsahuje os a rôzne typy mriežok. Každý objekt vytvorený v grafickom pohľade má reprezentáciu aj v algebraickom pohľade.

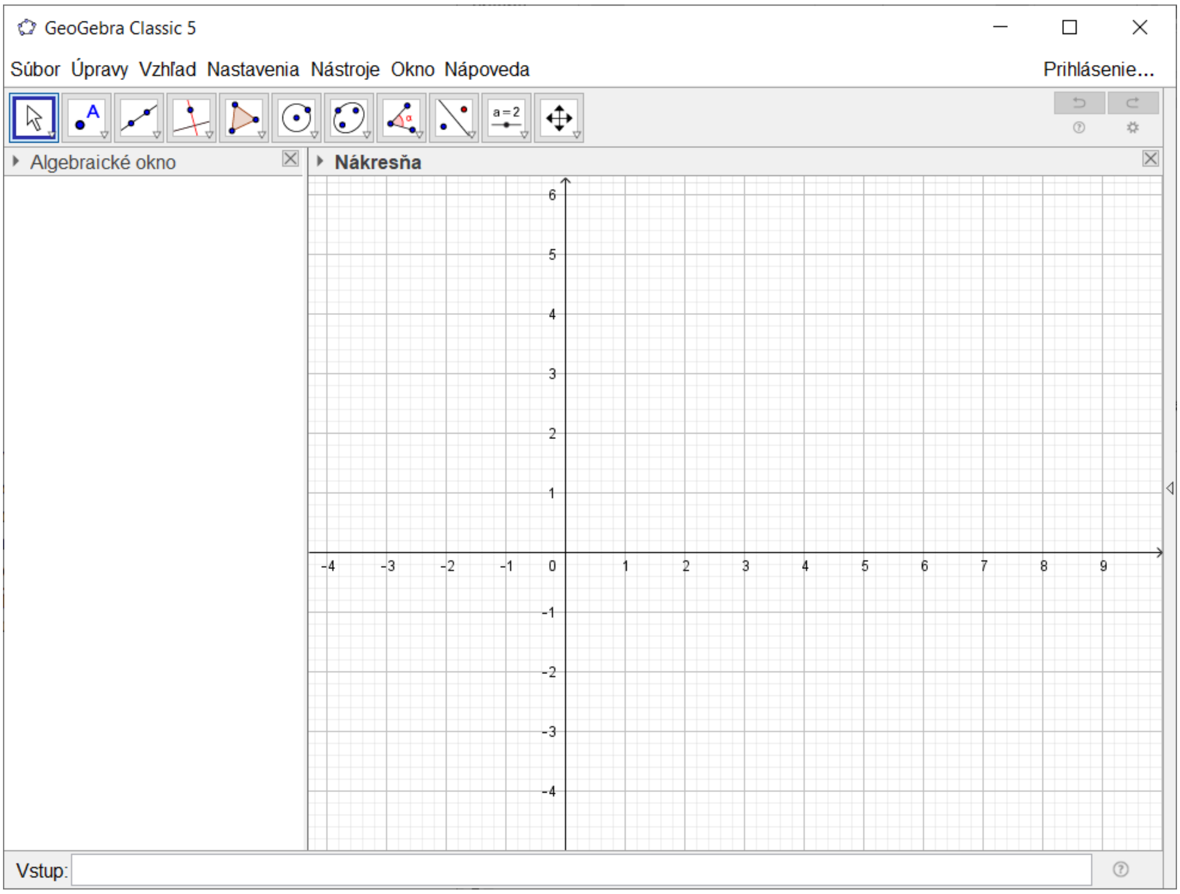
Algebraický pohľad zobrazuje matematické objekty ako algebraické výrazy, ktoré je možné do aplikácie zadať prostredníctvom vstupného riadku (Vstup:) Pre každý zadaný algebraický výraz sa automaticky vytvorí jeho grafická reprezentácia grafickom pohľade.

Tabuľkový pohľad umožňuje pracovať s dátami a skúmať štatistické pojmy.

CAS pohľad umožňuje využívať CAS (Computer Algebra System) Geogebry pre symbolické výpočty.

2.1.2. Nástroje aplikácie GeoGebra

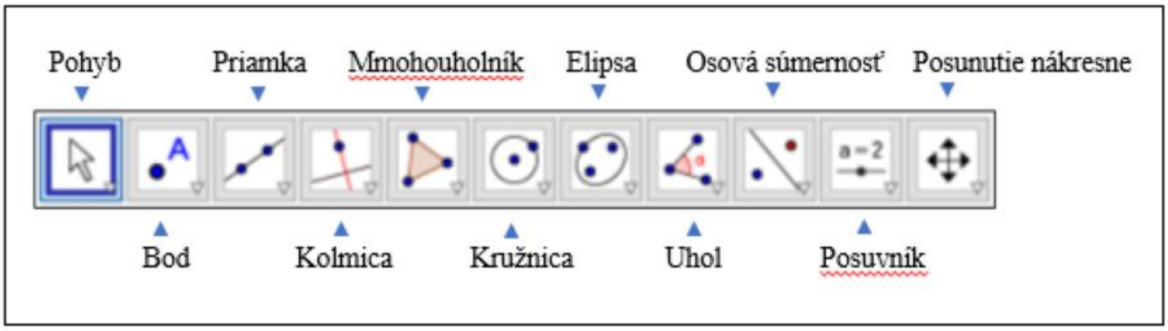
Po spustení aplikácie GeoGebra Classic 5 z desktopu počítača sa aplikácia inicializuje a otvorí sa úvodná obrazovka zobrazená na Obrázku 1.



Obrázok 1: Úvodná obrazovka aplikácie GeoGeobra Classic 5

Úvodná obrazovka zobrazujúce vľavo algebraický pohľad – Algebraické okno a vpravo grafický pohľad – Nákresňu. V spodnej časti pod pohľadmi sa nachádza vstupný riadok pre zadávanie algebraických výrazov.

Menu nástrojov sa nachádza v hornej časti nad pohľadmi, kde každá ikona reprezentuje súbor podobných nástrojov. Stlačením šípky smerujúcej nadol, umiestnenej v pravom dolnom rohu každého konštrukčného tlačidla, sa príslušný súbor nástrojov zobrazí. GeoGebra má tri menu nástrojov a zobrazuje ich v závislosti na aktivovanom pohľade. Pri riešení konštrukčných úloh v prostredí GeoGebra sa využíva hlavne grafický pohľad a jeho menu nástrojov. Menu nástrojov má spoločné s algebraickým pohľadom. Obrázok 2 zobrazuje menu nástrojov pre algebraický a grafický pohľad.



Obrázok 2: Menu nástrojov pre algebraický a geometrický pohľad.

Možnosti jednotlivých nástrojov algebraickeho a geometrického pohľadu sú nasledovné:

Pohyb umožňuje vybrať nakreslený objekt, posúvať ho alebo otáčať okolo zvoleného bodu. Nakresliť funkciu alebo geometrický objekt. Písať do nákresne.

Bod umožňuje konštruovať rôzne typy bodov, pripojiť bod na objekt, skonštruovať priesečník dvoch objektov alebo stred úsečky.

Priamka umožňuje konštruovať rôzne typy čiar a polygónov ako sú priamky, polpriamky, úsečky, lomené čiary a vektory.

Kolmica umožňuje konštruovanie špeciálnych typov čiar ako sú kolmica na danú priamku, rovnobežka s danou priamkou, os úsečky, os uhla, polára bodu, lineárnu regresiu, množinu bodov.

Mnohouholník umožňuje konštruovať mnohouholník, pravidelný n-uholník, pevný mnohouholník, vektorový mnohouholník

Kružnica daná stredom a bodom umožňuje konštruovať kružnice, polkružnice, kružnicový oblúk, kruhový výsek.

Elipsa umožňuje konštruovať elipsy, hyperboly, paraboly, a kužeľosečky dané piatimi bodmi.

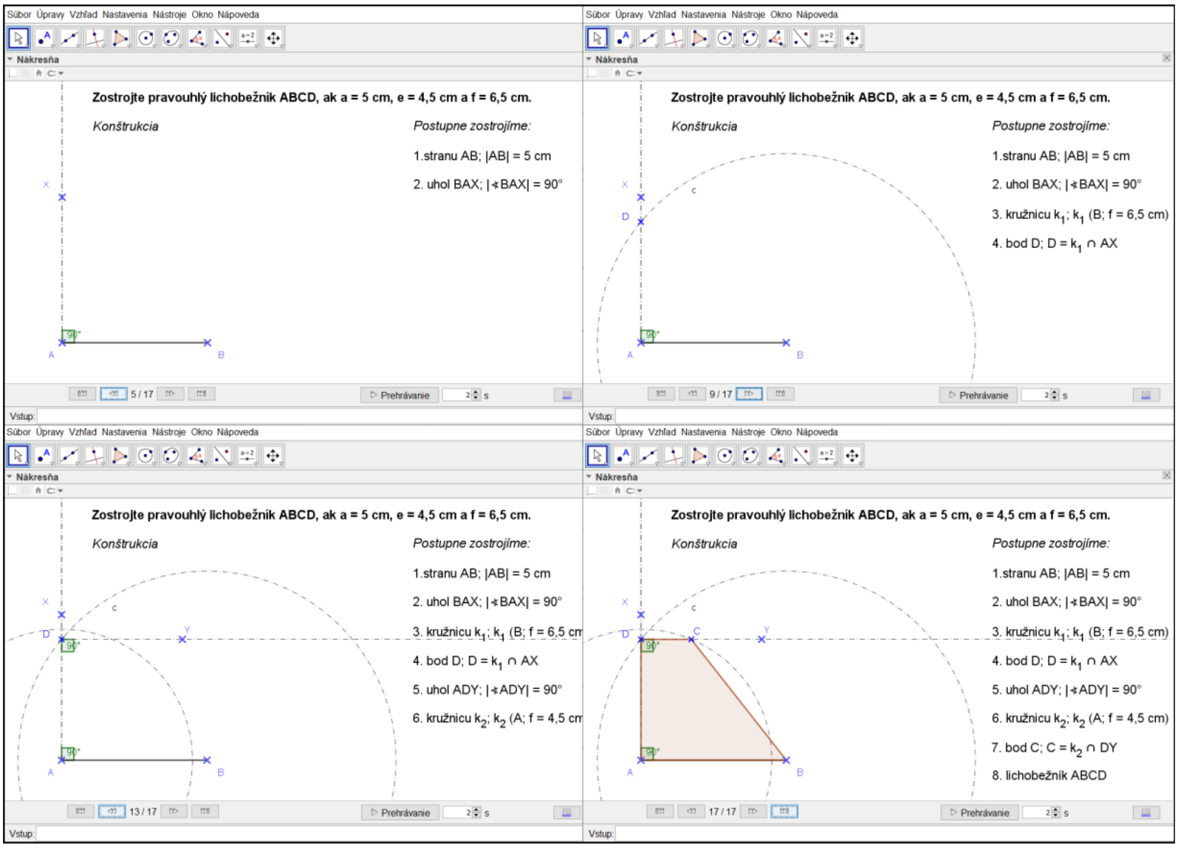
Uhol umožňuje najmä konštruovať a merať uhly. Určovať vzdialenosť dvoch daných bodov. Merať dĺžku úsečky. Vypočítať obsah mnohouholníkovej oblasti, kruhu alebo oblasti ohraničenej kužeľosečkou. Vypočítať spád zvolenej priamky.

Osová súmernosť sa využíva pri konštrukciách súvisiacich s geometrickými transformáciami. Umožňuje zostrojiť obraz zvoleného objektu v osovej súmernosti, stredovej súmernosti alebo kružnicovej inverzie. Otáčať objekt okolo bodu o daný uhol. Posunúť objekt v smere vektora.

Posuvník umožňuje vytvoriť posuvné tlačidlo, ktorým sa dynamicky mení hodnota premennej. Vložiť text alebo obrázok na kresliacu plochu. Vložiť tlačidlo s popisom a skriptom, ktorý sa po kliknutí na tlačidlo spustí. Vložiť začiarkovacie políčko, ktoré umožňuje voliť medzi zobrazením a skrytím jedného alebo viacerých objektov. Zadať popis zvolenému objektu.

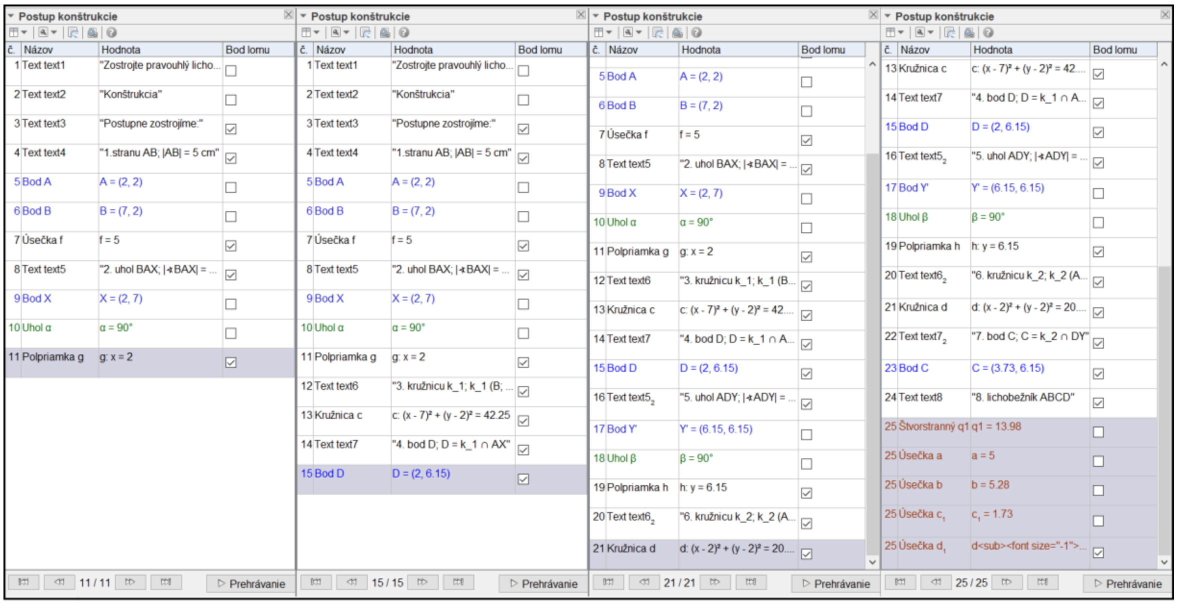
Posunutie nákresne umožňuje ľubovoľne posúvať kresliace pole, zväčšovať alebo zmenšovať ho. Skryť alebo zobraziť zvolený objekt. Kopírovať štýl daného objektu. Vymazať objekt.

Obrázok 3 zachytáva niektoré kroky konštrukcie lichobežníka realizované v prostredí GeoGebra použitím nástrojov geometrického pohľadu. V nákresni je okrem samotnej konštrukcie zapísaný aj postup konštrukcie.



Obrázok 3: Príklad konštrukcie v Nákresni GeoGebra

GeoGebra zaznamenáva všetky konštrukčné kroky a sú dostupné v okne Postup konštrukcie. Jednotlivé kroky zobrazuje v prehľadnej tabuľke. Okno Postup konštrukcie umožňuje opätovnú realizáciu konštrukcie krok po kroku pomocou navigačného panelu v spodnej časti okna. Obrázok 4 zobrazuje postup konštrukcie zaznamenaný aplikáciou GeoGegbra zodpovedjúci konštrukcii z Obrázku 3.



Obrázok 4: Príklad konštrukčného postupu zaznamenávaného aplikáciu GeoGebra

2.1.3. Vytvorenie dynamického appletu v aplikácii GeoGebra

GeoGebra ponúka možnosť vytvorené materiály exportovať do takzvaných dynamických appletov. Applety sú jednoduché aplikácie, ktoré sa spúšťajú z iného programu, napr. webového prehliadača. Applety vytvorené v programe GeoGebra môžu byť prehliadané pomocou akéhokoľvek internetového prehliadača (napr. Mozilla, Internet Explorer, Chrome). Vytvoriť applet je možné nasledovným postupom. V menu *Súbor* treba zvoliť položku *Export* a potom kliknúť na *Dynamická konštrukcia ako webová stránka (html)*. Otvorí sa dialógové okno, kde

- GeoGebra Classic 5 umiestni vytvorený applet na platformu GeoGebra Materials, pričom používateľ musí mať vytvorené konto na tejto platforme.
- GeoGebra Classic 6 vytvára applet lokálne, teda na počítači používateľa.

3. SCENÁRE VYUČOVACÍCH HODÍN VYUŽÍVAJÚCE APPLETY VYTVORENÉ V APLIKÁCII GEOGEBRA

V tejto kapitole uvádzame tri scenáre vyučovacích hodín využívajúce applety vytvorené v programe GeoGebra. Scenáre sú zamerané na riešenie geometrických konštrukčných úloh v 8. ročníku ZŠ. Počas vyučovacích hodín budú applety po krokoch premietané na plátno, žiaci budú pracovať v zošitoch. V programe GeoGebra sme vytvorili päť appletov - rovnobežník.html (scenár 1.), lichobeznik.html a stvruholnik.html (scenár 2.), trojuholnik_TK.html a trojuholnik_V.html (scenár 3.). Vytvorené applety sú priložené k tejto záverečnej práci. Vzhľadom na opatrenia súvisiace so šírením koronavírusu SARS-CoV-2 nebolo možné uvedené scenáre vyučovacích hodín realizovať v praxi.

.

3.1. Téma: Konštrukčné úlohy

Cieľ hodiny: Žiak pozná pojem konštrukčnej úlohy, pozná jednotlivé fázy riešenia konštrukčnej úlohy.

Obsah hodiny:

- Zopakovanie jednoduchých konštrukcii.
- Postup riešenia konštrukčných úloh.
- Riešenie konštrukčných úlohy s využitím aplikácie GeoGebra.
- Zadanie DÚ.
- Zhrnutie.

Úvod hodiny

Na úvod si zopakujeme jednoduché konštrukcie a pojem konštrukčná úloha.

Jednoduché konštrukcie využívame pri riešení zložitejších konštrukčných úloh. Oboznámili sme sa s nimi v predchádzajúcich ročníkoch a patria sem narysovanie úsečky danej dĺžky, zostrojenie osi úsečky, zostrojenie osi uhla, zostrojenie kružnice s daným polomerom, narysovanie rovnobežných a kolmých priamok.

Konštrukčná úloha je úloha, kde treba nájsť geometrický útvar zložený z bodov. Preto sa konštrukčná úloha rozpadne na hľadanie neznámych bodov, pomocou ktorých vieme hľadaný útvar zostrojiť. Konštrukčná úloha je rozčlenená na niekoľko častí – rozbor, konštrukcia, skúška, diskusia.

V **rozbore** hľadáme podmienky pre neznáme body geometrického útvaru, pričom vychádzame zo zadaných podmienok. Súčasťou rozboru je náčrt, do ktorého si farebne značíme známe prvky hľadaného útvaru.

Pri **konštrukcii** zostrojíme hľadaný geometrický objekt a v skrátenej forme zapíšeme postup konštrukcie.

Pri **skúške** sa presvedčíme, či zostrojený geometrický útvar vyhovuje zadaniu konštrukčnej úlohy, najčastejšie meraním.

V **diskusii** zisťujeme koľko má úloha riešení, prípadne za akých podmienok.

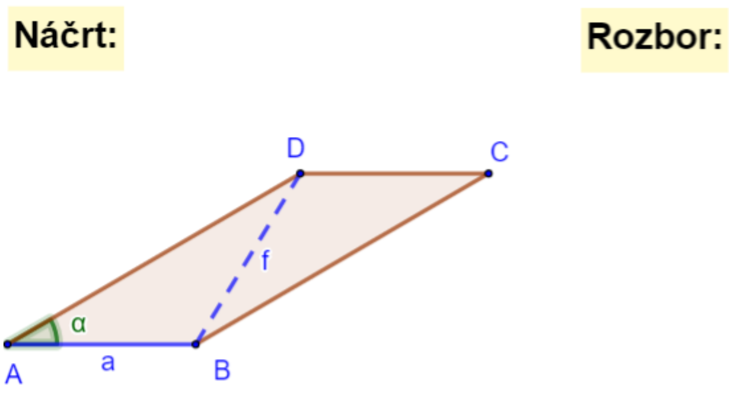
Na hodine vyriešime tri príklady s využitím pripraveného appletu rovnobeznik.html. Príklady sme spracovali podľa učebnice *Matematika pre 8. ročník ZŠ a 3. ročník gymnázií s osemročným štúdiom 2. časť* (2018).

Príklad 1.1:

Narysujte rovnobežník ABCD, ak je dané |AB| = 8 cm, |BD| = 8,5 cm, | ∢DAB| = 30°.

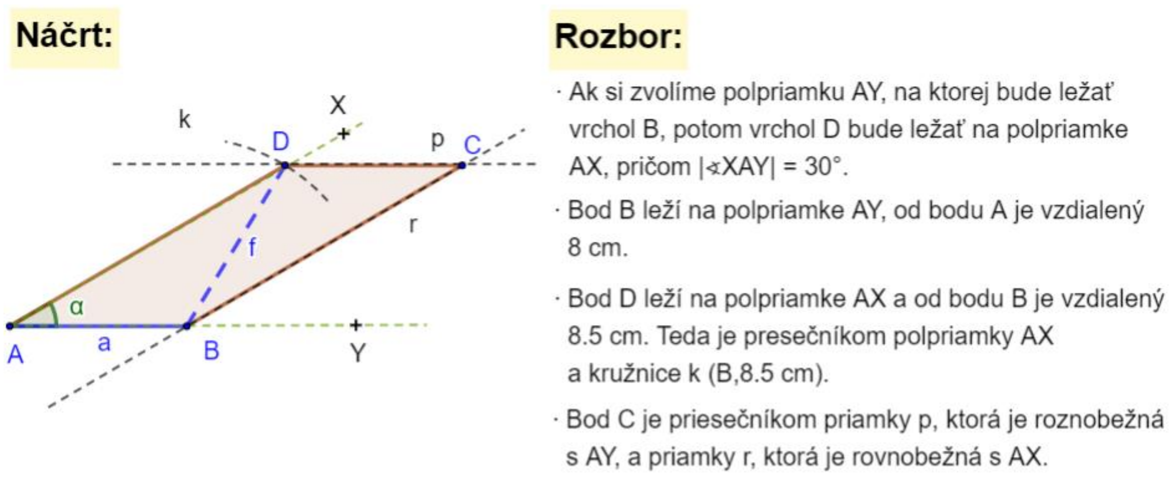
Riešenie

V pripravenom applete zobrazíme náčrt, v ktorom sú farebne zvýraznené známe prvky rovnobežníka – strana **a**, uhlopriečka **f** a uhol **DAB** (Obrázok 5).



Obrázok 5: Náčrt k príkladu 1.1

V štyroch krokoch postupne realizujeme rozbor úlohy. Podmienky pre neznáme body geometrického útvaru zakresľujeme aj do náčrtu (Obrázok 6).

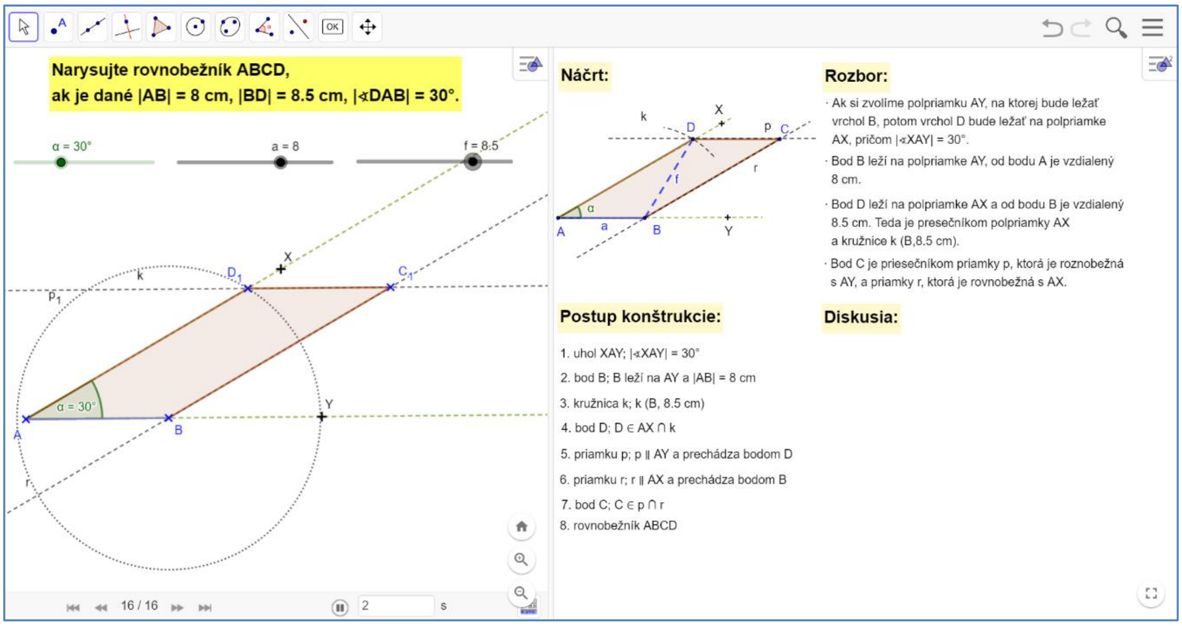


Obrázok 6: Rozbor k príkladu 1.1

Hľadaný objekt zostrojíme podľa nasledovného postupu:

1. uhol XAY s veľkosťou 30°
2. bod B, ktorý leží na polpriamke AY vo vzdialenosti 7 cm od bodu A
3. kružnica k so stredom v bode B a polomerom 8,5 cm
4. bod D, ktorý je priesečníkom kružnice k a polpriamky AX
5. priamku p, ktorá je rovnobežná s polpriamkou AY
6. bod C, ktorý je priesečníkom priamok p a r
7. rovnobežník ABCD

Výsledok konštrukcie v applete je zobrazený na Obrázku 7. Úloha má jedno riešenie.



Obrázok 7: Riešenie príkladu 1.1 v applete rovnobeznik.html

Príklad 1.2:

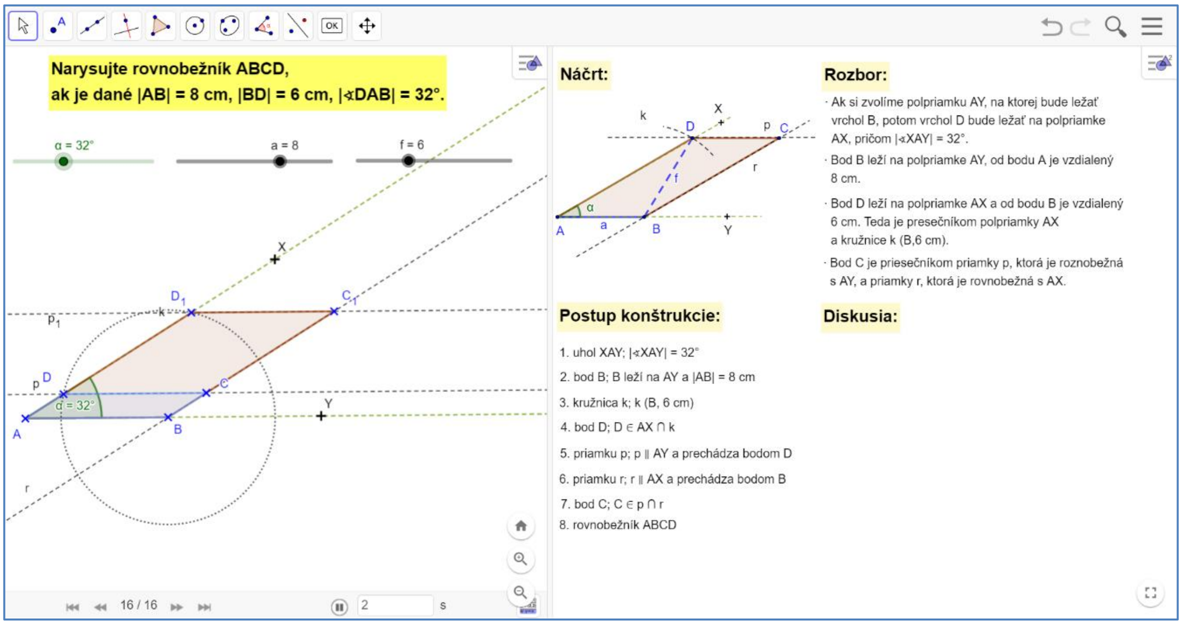
Narysujte rovnobežník ABCD, ak je dané |AB| = 8 cm, |BD| = 6 cm, | ∢DAB| = 32°.

Príklad 1.3:

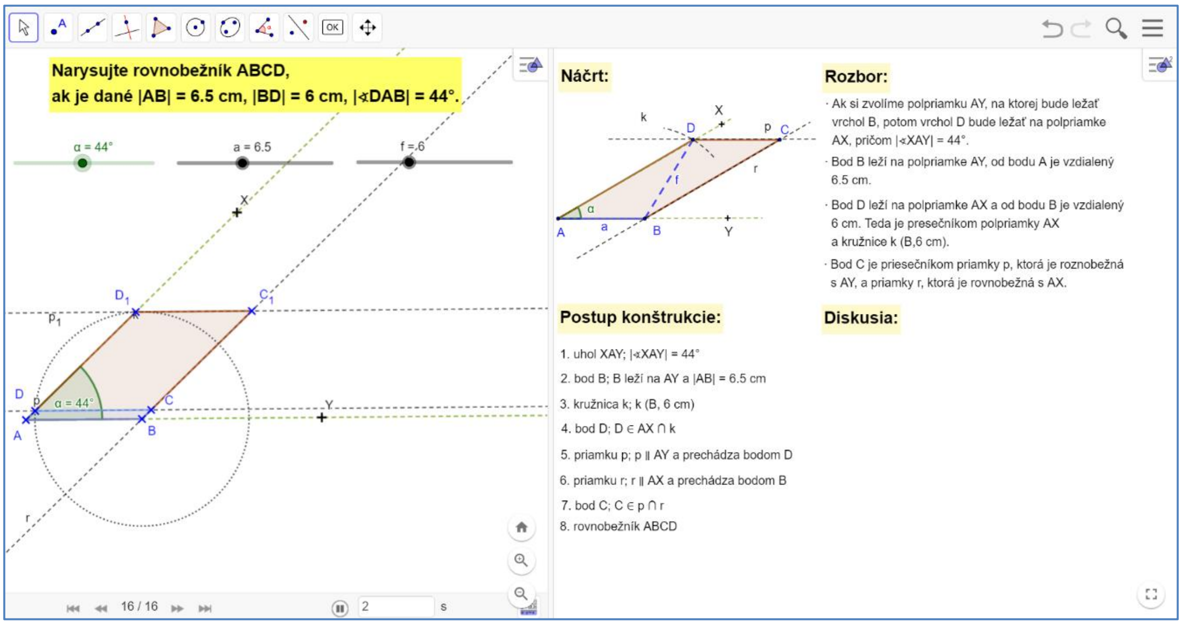
Narysujte rovnobežník ABCD, ak je dané |AB| = 6,5 cm, |BD| = 6 cm, | ∢DAB| = 44°.

Riešenie

Je zrejmé, že príklady 1.2 a 1.3 sú podobné ako príklad 1.1. Rozdiel je iba v dĺžkach strán a veľkostiach uhlov. To znamená, že postup konštrukcie je pre všetky tri príklady rovnaký. Narysované objekty by sa však mali od seba líšiť. Na určenie riešení príkladov 1.2 a 1.3 môžeme využiť applet z príkladu 1.1, kde prostredníctvom posúvnikov jednoducho zmeníme nastavenie pre známe prvky rovnobežníka podľa zadania príkladov 1.2 a 1.3 a vidíme, že nastala zmena výsledku. Príklady 1.2 a 1.3 majú dve riešenia. Hoci je postup konštrukcie pre všetky tri príklady rovnaký, počet riešení úloh je závislí na zadaných dĺžkach strán a veľkosti uhla hľadaného objektu. Obrázky 8 a 9 zobrazujú riešenia príkladov 1.2 a 1.3 v applete.



Obrázok 8: Riešenie príkladu 1.2 v applete rovnobeznik.html



Obrázok 9: Riešenie príkladu 1.3 v applete rovnobeznik.html

Zadanie DÚ

Zostroj kosoštvorec KLMN, ak |KL| = 6 cm a | ∢KLM| = 105°.

Záver hodiny

Riešiť konštrukčnú úlohu znamená zostrojiť útvar určitých požadovaných vlastností. Riešenie konštrukčnej úlohy je rozčlenene na rozbor, konštrukciu, skúšku a diskusiu. Na nasledujúcej hodine sa budeme zaoberať zložitejšími konštrukčnými úlohami, kde budeme konštrukciu deliť na viac častí.

3.2. Téma: Konštrukčné úlohy, štvoruholníky

Cieľ hodiny: Žiak vie vyriešiť primerané konštrukčné úlohy pre štvoruholníky s využitím vlastností konštrukcie trojuholníka a s využitím poznatkov o rovnobežníkoch a lichobežníkoch.

Obsah hodiny:

- Kontrola DÚ.
- Zopakovanie viet o konštrukcii trojuholníka, vety sss, sus, usu.
- Riešenie zložitejších konštrukčných úlohy s využitím aplikácie GeoGebra.
- Zadanie DÚ.
- Zhrnutie.

Úvod hodiny

Po kontrole domácej úlohy z predchádzajúcej hodiny, si zopakujeme vety o konštrukcii trojuholníka - sss, sus, usu. Trojuholník môže byť jednoznačne určený:

- dĺžkou všetkých troch strán (sss); musí byť splnená podmienka $a + b > c$, $a + c > b$, $b + c > a$,
- dvoma stranami a uhlom nimi zovretým (sus); musí byť splnená podmienka $0° < \alpha < 180°$,
- stranou a dvoma uhlami k nej priľahlými (usu); musí byť splnená podmienka $0° < \alpha + \beta < 180°$.

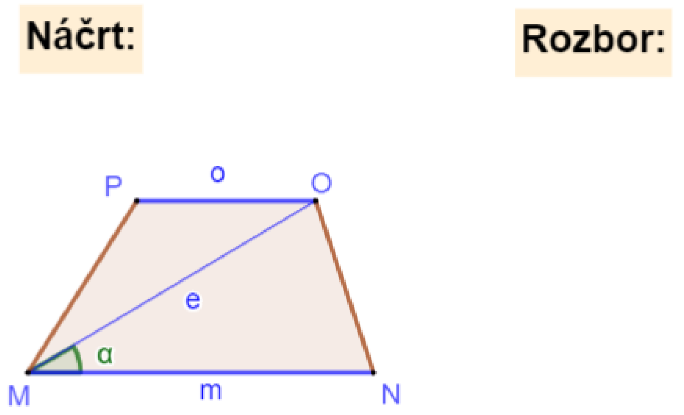
Povieme si ako postupovať pri rysovaní zložitejších geometrických útvarov, kde si konštrukciu rozdelíme na viac častí. Potom, po krokoch, narysujeme najprv jednu časť obrázka, potom ďalšiu, až kým nenarysujeme celý útvar.

Príklad 2.1:

Zostrojte lichobežník MNOP so základňami MN a OP, ak je dané: $|MN| = 8$ cm, $|OP| = 4$ cm, $|MO| = 7$ cm a $|OMN| = 30°$.

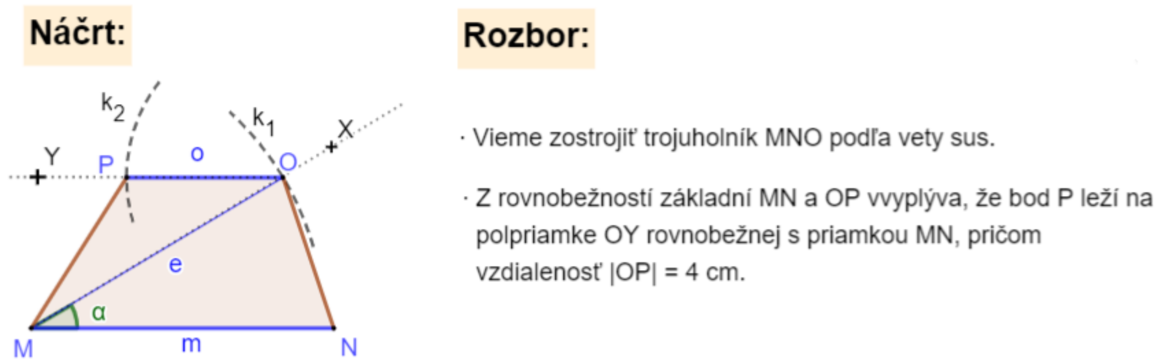
Riešenie

V pripravenom applete lichobeznik.html zobrazíme náčrt, v ktorom sú farebne zvýraznené známe prvky lichobežníka – strany **m** a **o**, uhlopriečka **e** a uhol **OMN** (Obrázok 10).



Obrázok 10: Náčrt k príkladu 2.1

Z rozboru (Obrázok 11) vidíme, že riešenie konštrukčnej úlohy môžeme rozdeliť na dve časti. Najprv narysujeme trojuholník MNO podľa vety sus, potom podľa stanovených podmienok nájdeme pod P.

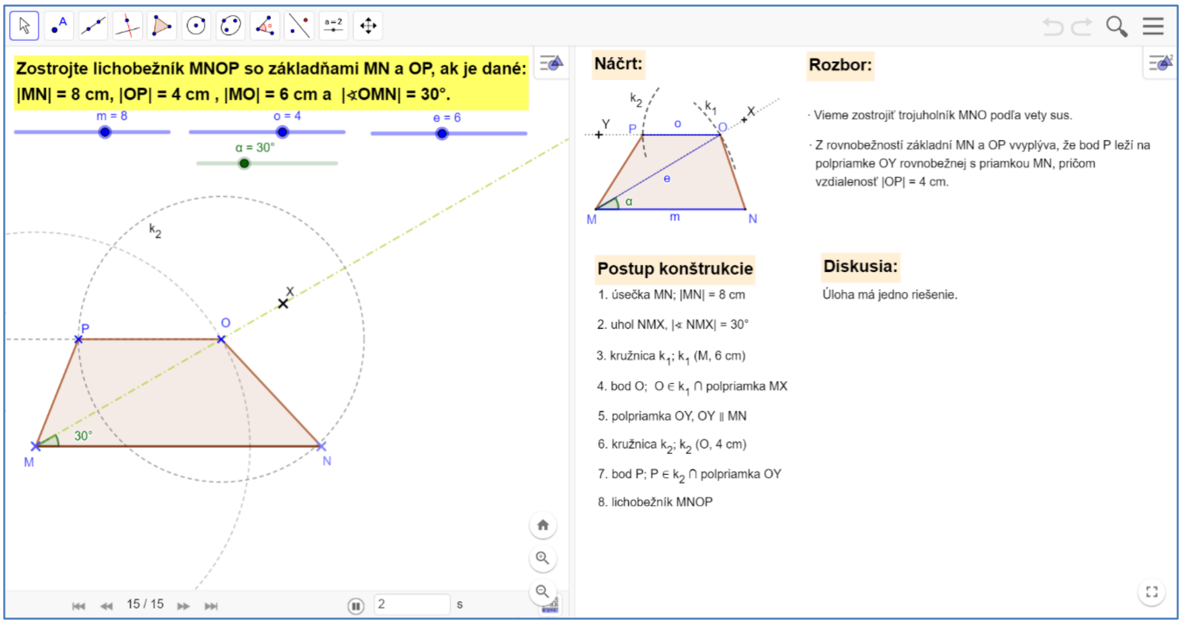


Obrázok 11: Rozbor k príkladu 2.1

Hľadaný lichobežník zostrojíme podľa nasledovného postupu:

1. úsečka MN s dĺžkou 8 cm
2. uhol NMX s veľkosťou 30°
3. kružnica k_1 so stredom v bode M a polomerom 6 cm
4. bod O, ktorý je priesečníkom kružnice k_1 a polpriamky MX
5. polpriamka OY, ktorá je rovnobežná s úsečkou MN
6. kružnica k_2 so stredom v bode O a polomerom 4 cm
7. bod P, ktorý je priesečníkom kružnice k_2 a polpriamky OY
8. lichobežník MNOP

Výsledok konštrukcie v applete je zobrazený na Obrázku 12. Úloha má jedno riešenie.



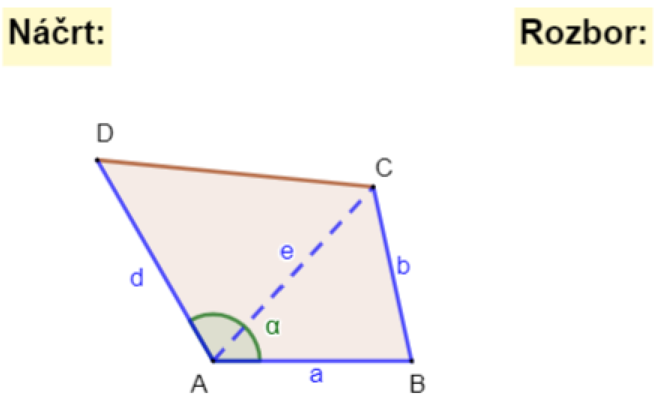
Obrázok 12: Riešenie príkladu 2.1 v applete lichobeznik.html

Príklad 2.2:

Zostrojte štvoruholník ABCD, keď je dané: a = 5 cm, b = 5 cm, d = 7 cm, e = 4 cm, DAB = 120. Rysuj v jednej polrovine.

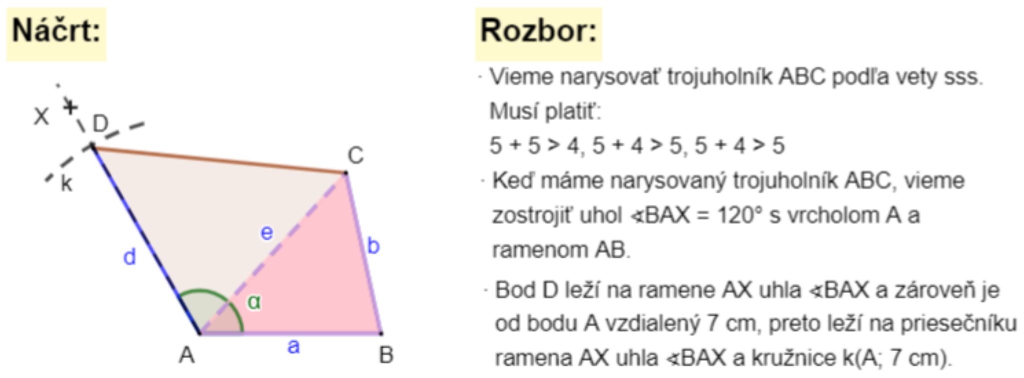
Riešenie

V pripravenom applete stvoruholnik.html zobrazíme náčrt, v ktorom sú farebne zvýraznené známe prvky štvoruholníka – strany **a, b** a **c**, uhlopriečka **e** a uhol **DAB** (Obrázok 13).



Obrázok 13: Náčrt k príkladu 2.2

Rovnako ako v prechádzajúcom príklade aj tu môžeme konštrukciu rozdeliť na dve časti. Najprv narysujeme trojuholník ABC podľa vety sss, následne nájdeme bod D. Podrobné podmienky konštrukcie sú uvedené v rozbore (Obrázok 14).

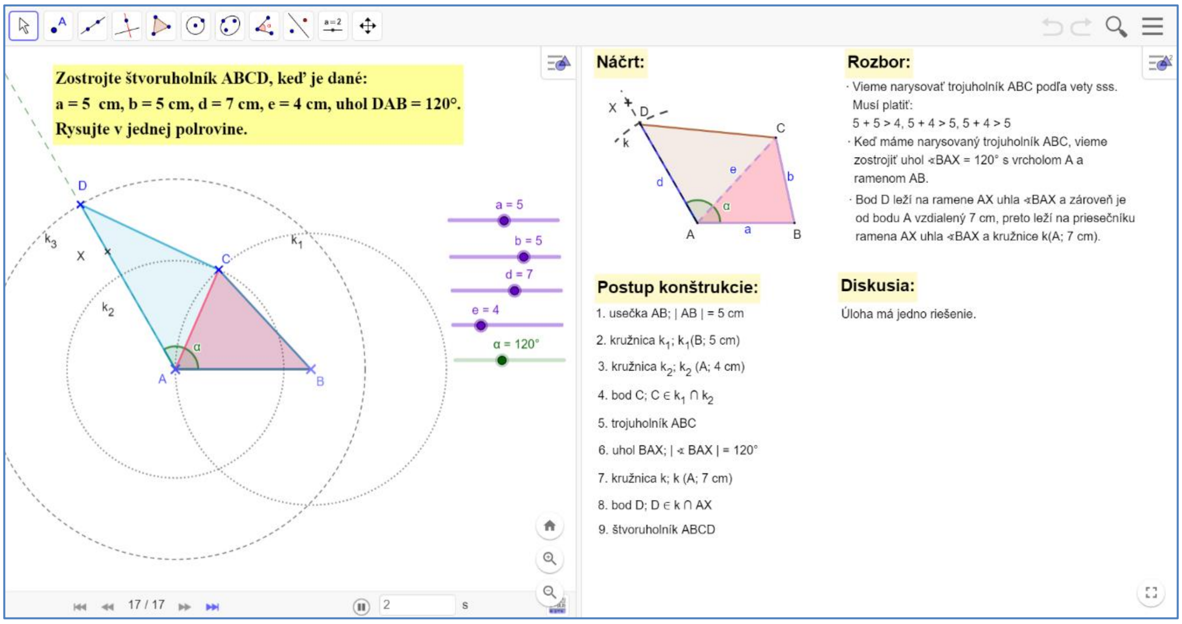


Obrázok 14: Rozbor k príkladu 2.2

Hľadaný štvoruholník zostrojíme podľa nasledovného postupu:

1. úsečka AB s dĺžkou 5 cm
2. kružnica k_1 so stredom v bode B a polomerom 5 cm
3. kružnica k_2 so stredom v bode A a polomerom 4 cm
4. bod C, ktorý je priesečníkom kružníc k_1 a k_2
5. trojuholník ABC
6. uhol BAX s veľkosťou 120°
7. kružnica k so stredom v bode A a polomerom 7 cm
8. bod D, ktorý je priesečníkom kružnice k a polpriamky AX
9. štvoruholník ABCD

Výsledok konštrukcie v applete je zobrazený na Obrázku 15. Úloha má v jednej polrovine jedno riešenie.



Obrázok 15: Riešenie príkladu 2.2 v applete stvoruholnik.html

Zadanie DÚ

Zostroj štvoruholník MNOP, ak |OP| = 5 cm, ak |MP| = 7 cm, |MO| = 6 cm, | ∢OMN| = 20° a | ∢NOM| = 30°.

Záver hodiny

Pri riešení zložitejších konštrukčných úloh postupujeme tak, že si konštrukciu rozdelíme na viac častí, ktoré potom postupne rysujeme. Pri rysovaní jednotlivých častí často využívame vety o konštrukcii trojuholníka sss, sus, usu.

3.3. Téma: Tálesova kružnica

Cieľ hodiny: Žiak vie vyriešiť primerané konštrukčné úlohy s využitím vlastností Tálesovej kružnice.

Obsah hodiny:

- Zopakovanie Tálesovej vety.
- Riešenie konštrukčných úlohy s využitím aplikácie GeoGebra.
- Zadanie DÚ.
- Zhrnutie.

Úvod hodiny

Zopakujeme si Tálesovu vetu, s ktorou sme sa oboznámili na predchádzajúcej hodine:

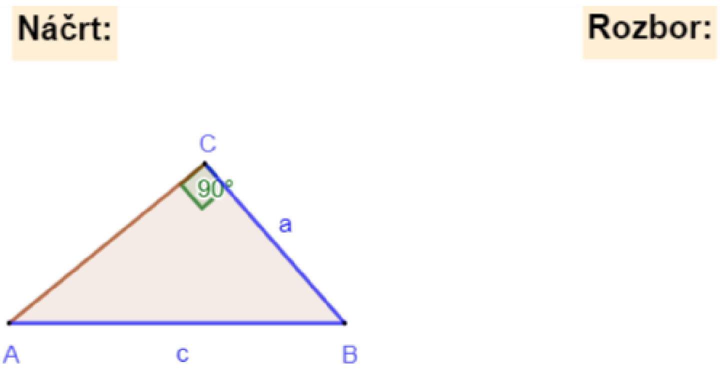
- Ak body A, B, X patria kružnici k_r, kde AB je priemer kružnice, potom uhol AXB je pravý.
- Kružnica k_r sa nazýva Tálesova kružnica nad priemerom AB.

Príklad 3.1:

Zostroj pravouhlý trojuholník ABC s pravým vrcholom pri bode C, ak a = 7 cm, c = 9 cm. Rysuj v jednej polrovine.

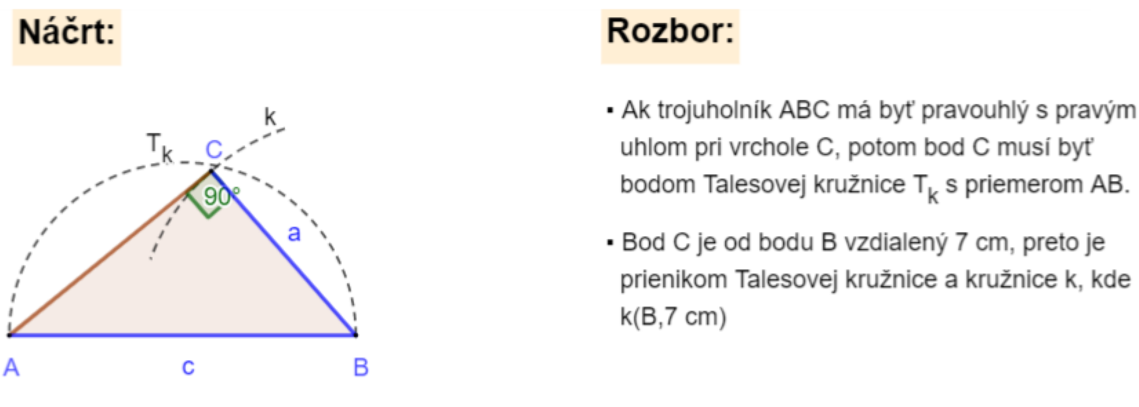
Riešenie

Príklad budeme riešiť v pripravenom applete trojuholnik_TK.html, v ktorom najprv zobrazíme náčrt s farebne zvýraznenými známymi prvkami trojuholníka – strany **a**, **c** a uhol **ACB** (Obrázok 16).



Obrázok 16: Náčrt k príkladu 3.1

Podmienky pre existenciu trojuholníka zapíšeme do rozboru a zaznačíme do náčrtu (Obrázok 17).

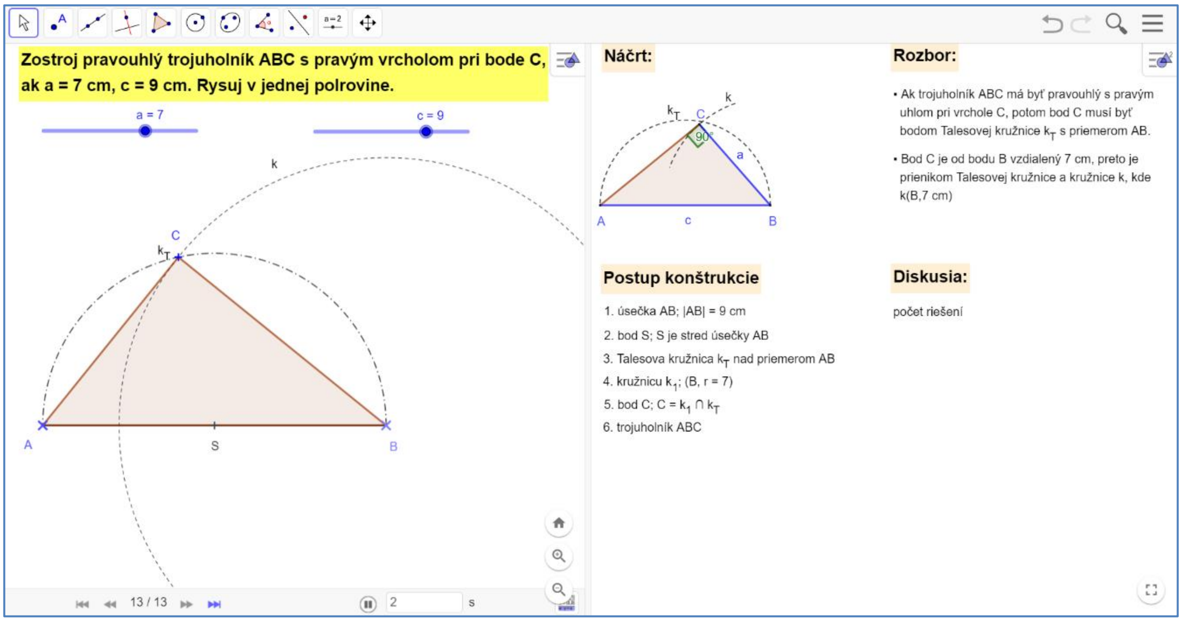


Obrázok 17: Rozbor k príkladu 3.1

Hľadaný trojuholník zostrojíme podľa nasledovného postupu:

1. úsečka AB s dĺžkou 9 cm
2. bod S, ktorý je stredom úsečky AB
3. Tálesova kružnica k_T nad priemerom AB
4. kružnica k_1 so stredom v bode B a polomerom 7 cm
5. bod C, ktorý je priesečníkom kružnice k_1 a Tálesovej kružnice
6. trojuholník ABC

Výsledok konštrukcie v applete je zobrazený na Obrázku 18. Úloha má v jednej polrovine jedno riešenie.



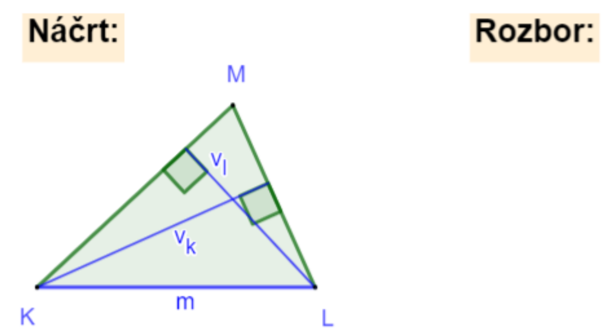
Obrázok 18: Riešenie príkladu 3.1 v applete trojuholnik_TK.html

Príklad 3.2:

Zostroj trojuholník KLM, kde m = 7 cm, v_k = 6 cm, v_l = 5 cm. Rysuj v jednej polrovine.

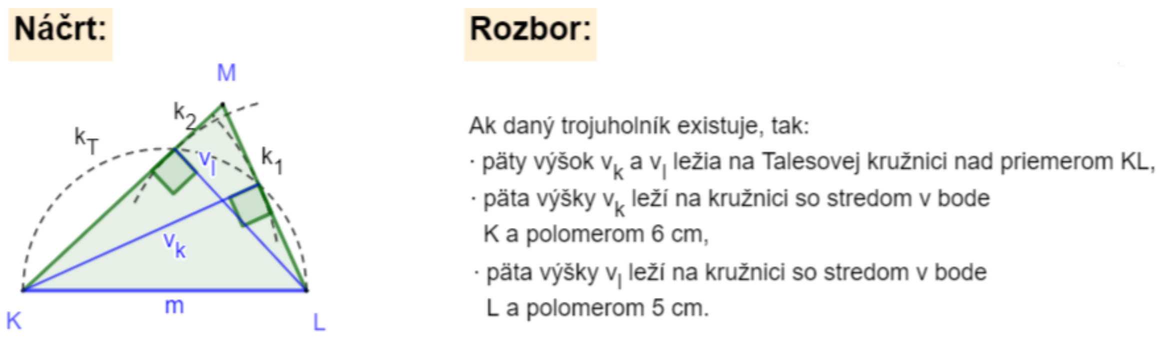
Riešenie

Príklad budeme riešiť v pripravenom applete trojuholnik_V.html. Zobrazíme náčrt s farebne zvýraznenými známymi prvkami trojuholníka – strana **m** a výšky $\mathbf{v_k}$ a $\mathbf{v_l}$ (Obrázok 19).



Obrázok 19: Náčrt k príkladu 3.2

Rozbor príkladu urobíme v troch krokoch, podmienky zaznačíme aj do náčrtu (Obrázok 20).

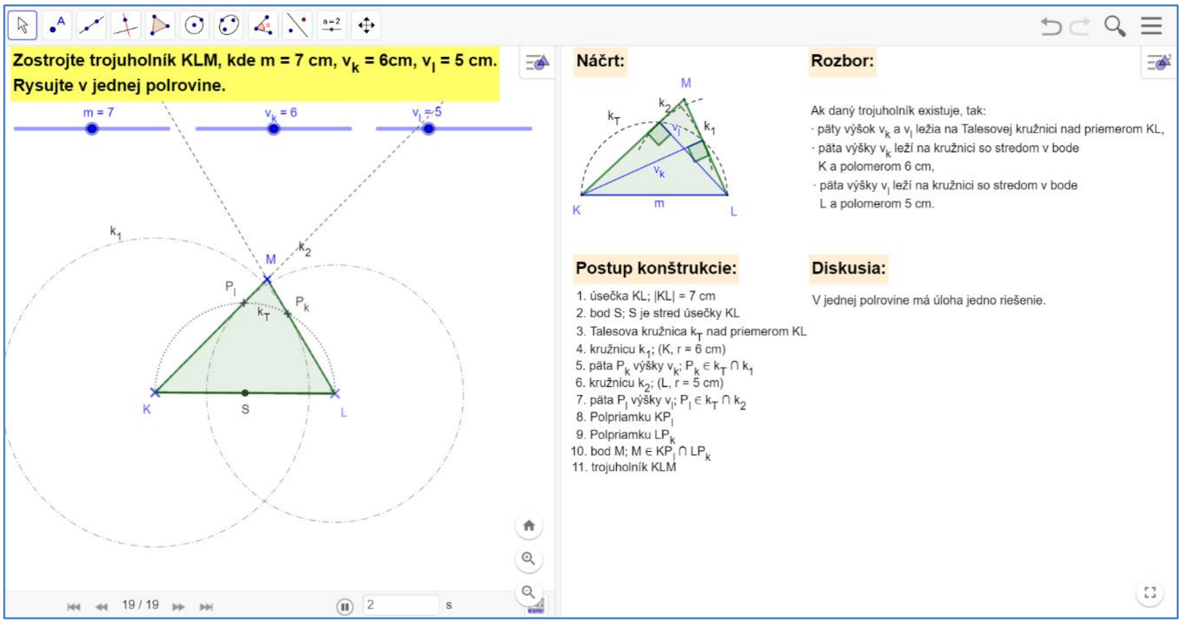


Obrázok 20: Rozbor k príkladu 3.2

Hľadaný trojuholník zostrojíme podľa nasledovného postupu:

1. úsečka KL s dĺžkou 7 cm
2. bod S, ktorý je stredom úsečky KL
3. Tálesova kružnica k_T nad priemerom KL
4. kružnica k_1 so stredom v bode K a polomerom 6 cm
5. výška P_k výšky v_k, ktorá je priesečníkom Tálesovej kružnice a kružnice k_1
6. kružnica k_2 so stredom v bode L a polomerom 5 cm
7. výška P_l výšky v_l, ktorá je priesečníkom Tálesovej kružnice a kružnice k_2
8. polpriamku KP_l
9. polpriamku LP_k
10. bod M, ktorý je priesečníkom polpriamok KP_l a LP_k
11. trojuholník KLM

Výsledok konštrukcie v applete je zobrazený na Obrázku 21. Úloha má v jednej polrovine jedno riešenie.



Obrázok 21: Riešenie príkladu 3.2 v applete trojuholnik_V.html

Zadanie DÚ

Zostroj kosoštvorec MOP, ak je dané p = 6 cm, v_p = 2,5 cm a | ∢MPO| = 90°.

Zhrnutie

Tálesovu kružnicu využívame pri riešení konštrukčných úloh zameraných na konštrukciu trojuholníka, ktorý je buď pravouhlý alebo máme zadanú jeho výšku.

ZÁVER

Cieľom záverečnej práce bolo vytvorenie súboru učebných materiálov v dynamickom geometrickom programe GeoGebra a ich použitie v rámci výučby geometrie v 8. ročníku ZŠ. Použitím appletov vytvorených v programe GeoGeora sa učivo konštrukčných geometrických úloh stáva príťažlivejším a ľahšie zvládnuteľným aj pre žiakov s nižšou úrovňou geometrickej predstavivosti.

GeoGebra, ako voľné dostupný program, vnáša do vyučovacieho procesu nové možnosti. Pre učiteľov je to ďalšia alternatíva pri príprave hodín geometrie, písomných prác alebo výkladu látky. Jeho veľkou výhodou je, že je vhodný na demonštráciu a objavovanie rôznych geometrických vlastností a vzťahov. Žiakom umožňuje samostatné štúdium, pričom rozvíja ich priestorovú predstavivosť, tvorivosť, logické myslenie a v neposlednom rade digitálnu gramotnosť.

Limitujúcim faktorom využitia programu GeoGera je však materiálno-technické vybavenie väčšiny škôl, ktoré v súčasnosti neumožňuje každému žiakovi na hodinách geometrie pracovať samostatne na počítači. Pre učiteľa je preto najdostupnejšou alternatívou vytvorenie učebného materiálu – appletu, ktorý žiakom po krokoch prehráva. Žiaci sledujú konštrukciu premietanú na plátno a súčasne rysujú do zošitov. Napriek tomu, že sme nemohli vytvorené učebné materiály použiť v praxi, sme presvedčení, že moderné informačne-komunikačné technológie nepochybne prispievajú ku skvalitneniu a zefektívneniu vzdelávania.

SUMMARY

The aim of the thesis was to create a set of teaching materials in the dynamic geometric software GeoGebra and their use in the teaching of geometry in the 8th grade of elementary school. By using applets created in GeoGeora, the curriculum of geometric constructions becomes more attractive and easier to master even for students with a lower level of geometric imagination.

GeoGebra, as a freely available software, brings new possibilities to the teaching process. For teachers, this is another alternative when preparing geometry lessons. The great advantage of GeoGebra software is that it is suitable for demonstrating and discovering various geometric properties and relationships. It enables students to study independently, developing their spatial imagination, creativity, logical thinking and, last but not least, digital literacy.

However, the limiting factor in the use of the GeoGera program is the material and technical equipment of most schools, which currently does not allow every student to work independently on a computer in geometry lessons. Therefore, the most affordable alternative for a teacher is to create teaching material - an applet that plays to students step by step. Students watch the construction projected on a screen and at the same time draw in their notebooks. Despite these limitations, modern information and communication technologies undoubtedly contribute to the quality and efficiency of education.

ZOZNAM POUŽITEJ LITERATÚRY

1. *GeoGebra Classic Manual*. [online]. Dostupné na internete: <https://wiki.geogebra.org/en/Manual>
2. HEJNÝ, M. a i. 1989. *Teória vyučovania matematiky 2.* Bratislava: SPN, 1989. 560 s. ISBN 80-08-00014-7
3. HEJNÝ, M., NOVOTNÁ, J., STEHLÍKOVÁ, N. 2004. *Dvadcet pět kapitol z didaktiky matematiky*. Praha: Karlova Univerzita, 2004. 244 s. ISBN 80-7290-189-3
4. PETLÁK, E. 2016. *Všeobecná didaktika.* 3. vyd. Bratislava: IRIS, 2016. 322 s. ISBN 978-80-8153-064-7
5. POLÁK, J. 2014. *Didaktika matematiky. Jak učit matematiku zajímavě a užitečně.* Plzeň: Fraus, 2014. 431 s. ISBN 978-80-7238-449-5
6. SEMANIŠINOVÁ, J. a i. 2010 *Využitie informačných a komunikačných technológií v predmete matematika pre základné školy.* Košice: elfa, s.r.o., 2010. 282 s. ISBN 978-80-8086-158-2
7. ŠEDIVÝ, O. a i. 2001. *Matematika pre 8. ročník základných škôl 2. časť.* Bratislava: SPN, 2001. 159 s. ISBN 80–08–03032–1
8. ŠEDIVÝ, O., VALLO, D. 2013. *Prečo vyučovať slovné a konštrukčné úlohy.* in Šedivý, O. a i. 2013. *Slovné a konštrukčné úlohy ako prostriedok k rozvoju logického myslenia.* Nitra: UKF, 2013. 8 s. ISBN 978-80-558-0238-1
9. ŠTALMAŠEK, J. 1959. *Geometrické konštrukcie.* Bratislava: Slovenské vydavateľstvo technickej literatúry, 1959. 137 s.
10. Štátny pedagogický ústav: Štátny vzdelávací program. [Online] Dostupné na: <https://www.statpedu.sk/files/articles/dokumenty/inovovany-statny-vzdelavaci-program/matematika_nsv_2014.pdf >
11. ŽABKA, J., ČERNEK, P. 2018. *Matematika pre 8. ročník ZŠ a 3. ročník gymnázií s osemročným štúdiom 2.časť.* Bratislava: Orbis Pictus Istropolitana, 2018. 127 s. ISBN 978-80-8120-586-6