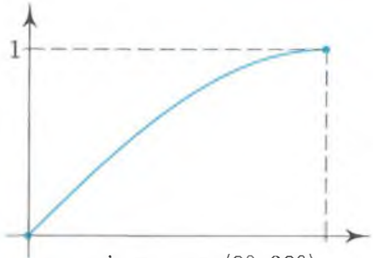
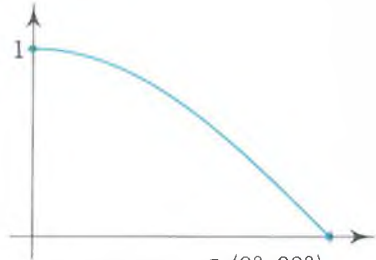
matematika 9

II · DÍL

PROMETHEUS

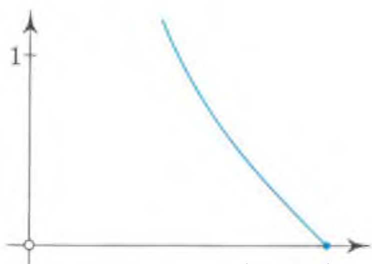


$y = \sin\alpha;\ \ \alpha \in \langle 0^\circ, 90^\circ \rangle$

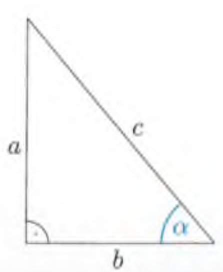


$y = \cos\alpha;\ \ \alpha \in \langle 0^\circ, 90^\circ \rangle$

$y = \operatorname{tg}\alpha;\ \ \alpha \in \langle 0^\circ, 90^\circ)$



$y = \operatorname{cotg}\alpha;\ \ \alpha \in (0^\circ, 90^\circ \rangle$



$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{b}{a} \qquad \sin\alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$$

$$(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$$

matematika 9

II. DÍL

PROMETHEUS
PRAHA

Učebnice byla zpracována ve spolupráci s JČMF.

Zpracovali: PhDr. Alena Šarounová, CSc.
PhDr. Ivan Bušek
Mgr. Jitka Růžičková
Věnceslava Väterová

Lektorovali: doc. RNDr. Štefan Schwabik, DrSc.
RNDr. Libuše Hozová
doc. RNDr. Jindřich Bečvář, CSc. (koordinátor)

Revizi výsledků provedla Mgr. Marie Knížová.

Schválilo MŠMT čj. 34326/99–22 dne 27. 12. 1999 k zařazení do seznamu učebnic pro základní školy jako součást ucelené řady učebnic pro vyučovací předmět matematika s dobou platnosti šest let.

1. vydání

ISBN 80-7196-175-2

Obsah

1 FUNKCE

1.1 Definice funkce

Pojem funkce je jedním z nejdůležitějších matematických pojmů. Vznikl při sledování změn a závislostí různých jevů, s nimiž se lidé v životě setkávali. Také my jsme v matematice, fyzice, biologii, ale i v dalších předmětech a v praxi poznali veličiny, které na sobě závisejí. Hmotnost předmětu z určitého materiálu závisí na jeho objemu, doba, za kterou ujede auto danou vzdálenost, závisí na průměrné rychlosti auta, rychlost fotosyntézy závisí na intenzitě světla, obsah čtverce závisí na délce jeho strany.
Víme, že obsah S čtverce o délce strany a vypočítáme podle vzorce $S = a^2$. Můžeme tedy snadno vypočítat obsah čtverce, je-li délka jeho strany 1 cm, 1,5 cm, 2 cm, $\sqrt{5}$ cm, 7 cm. Údaje zaznamenáme přehledně do tabulky.

$\frac{a}{\text{cm}}$	1	1,5	2	$\sqrt{5}$	7
$\frac{S}{\text{cm}^2}$	1	2,25	4	5	49

Všimněme si, že každému číslu z prvního řádku tabulky udávajícímu číselnou hodnotu délky strany čtverce je přiřazeno **právě jedno** číslo, které udává číselnou hodnotu obsahu příslušného čtverce.

Funkcí nazýváme předpis, který každému reálnému číslu z dané množiny D přiřazuje právě jedno reálné číslo. Množina D se nazývá definiční obor funkce.

Uvedenou tabulkou je tedy určena funkce, jejímž definičním oborem je množina $\{1; 1{,}5; 2; \sqrt{5}; 7\}$. Funkci f, která každému reálnému číslu x z daného definičního oboru D přiřazuje právě jedno reálné číslo y, můžeme zapsat takto:

$$y = f(x), \quad x \in \mathrm{D}$$

Zápis $y = f(x)$ bude tedy vždy označovat funkci proměnné x, tj. funkci, v níž x je prvek definičního oboru a y hodnota funkce.

1 Rozhodněte, které z uvedených tabulek zadávají nějakou funkci $y = f(x)$.

a)

x	1	2	3	4
y	3	4	5	6

b)

x	3	4	5	6
y	6	7	8	8

c)

x	-1	0	1	1
y	-3	-2	-1	0

d)

x	-2	-1	0	1
y	-5	-5	-5	-5

Řešení

a) Pokud by touto tabulkou byla zadána nějaká funkce $y = f(x)$, pak by šlo o funkci s definičním oborem $\mathsf{D} = \{1, 2, 3, 4\}$. Každému číslu x z množiny D je přiřazeno právě jedno reálné číslo y, tabulkou je tedy zadána nějaká funkce $y = f(x)$.

b) Kdyby byla touto tabulkou zadána nějaká funkce $y = f(x)$, pak by šlo o funkci s definičním oborem $\mathsf{D} = \{3, 4, 5, 6\}$. Protože každému x z množiny D je přiřazeno právě jedno reálné číslo y, je tabulkou zadána nějaká funkce $y = f(x)$.

c) Kdyby byla touto tabulkou zadána nějaká funkce $y = f(x)$, pak by jejím definičním oborem byla množina $\mathsf{D} = \{-1, 0, 1\}$. Ale číslu 1 z definičního oboru jsou přiřazena dvě reálná čísla, -1 a 0, a to je v rozporu s definicí funkce. Proto touto tabulkou není zadána žádná funkce $y = f(x)$.

d) Je-li touto tabulkou zadána nějaká funkce $y = f(x)$, pak jejím definičním oborem je množina $\mathsf{D} = \{-2, -1, 0, 1\}$. Protože každému x z množiny D je přiřazeno právě jedno reálné číslo y, je tabulkou zadána nějaká funkce $y = f(x)$.

Předpisem, kterým je funkce určena, může být tabulka, rovnice (vzorec) nebo graf. Častěji než tabulkou zadáváme funkci rovnicí. Označme písmenem f funkci, která je dána rovnicí $y = 3x + 4$ a jejímž definičním oborem je množina všech reálných čísel. Tuto funkci můžeme zapsat takto:

$$f\colon y = 3x + 4, \quad x \in \mathsf{R}$$

Rovnicí $y = 3x + 4$ je každému číslu x z definičního oboru funkce f, tj. každému reálnému číslu x, přiřazeno právě jedno reálné číslo y. Např. číslu 1 je přiřazeno číslo 7. Jinak řečeno: dosadíme-li do rovnice $y = 3x + 4$ za x číslo 1, dostaneme $y = 7$. Skutečnost, že **hodnota funkce** f přiřazená číslu 1 je 7, zapisujeme také takto:

$$f(1) = 7$$

Číslo 7 je hodnota funkce f přiřazená číslu 1 nebo hodnota funkce f v bodě 1. Množina všech reálných čísel, která jsou funkcí f přiřazena prvkům jejího definičního oboru D, se nazývá **obor hodnot** funkce f a označuje se H.

Poznámka. V matematické literatuře se můžete setkat i s dalšími způsoby zápisu funkcí. Funkci $f\colon y = 3x + 4,\ x \in \mathsf{R}$, lze zapsat ve tvaru

$$f(x) = 3x + 4, \quad x \in \mathsf{R}$$

nebo

$$x \mapsto 3x + 4, \quad x \in \mathsf{R}.$$

V zápisu rovnice funkce nemusíme používat jen písmena x, y. Máme-li např. zapsat funkci, která vyjadřuje závislost dráhy na čase, pak místo y použijeme označení s a místo x použijeme označení t. Rovněž pro označení funkcí můžeme místo písmene f používat jiná písmena, např. g, h apod.

2 Určete pět hodnot daných funkcí a výsledek sestavte do tabulky:

a) $f\colon y = 3x - 5,\ x \in \mathsf{R}$ b) $g\colon y = \dfrac{2}{x},\ x > 0$

c) $h\colon y = 1 - x^2,\ x \in \mathsf{R}$

Řešení

a) Hodnotu funkce f přiřazenou např. číslu -2 vypočteme tak, že do rovnice $y = 3x - 5$ dosadíme za x číslo -2 a vypočteme y. Tedy pro $x = -2$ je $y = -11$ (což můžeme zapsat také takto: $f(-2) = -11$). Stejně postupujeme pro další zvolené hodnoty proměnné x a sestavíme tabulku:

x	-2	-1	0	$\frac{1}{3}$	$2{,}5$
y	-11	-8	-5	-4	$2{,}5$

b)

x	$0{,}1$	$0{,}5$	1	2	10
y	20	4	2	1	$0{,}2$

c)

x	-2	-1	0	$0{,}5$	$1{,}5$
y	-3	0	1	$0{,}75$	$-1{,}25$

Mezi tabulkami v příkladu 1 a v příkladu 2 je podstatný rozdíl. Tabulky z příkladu 1a, 1b a 1d určují funkci. Protože definičním oborem funkcí v příkladu 2 byla vždy množina s nekonečným počtem prvků, mohli jsme vypsat pouze některé hodnoty proměnné x a jí přiřazené hodnoty funkce. Uvědomíme si, že je-li definičním oborem funkce nekonečná množina, nemůžeme takovou funkci vyjádřit tabulkou. Do tabulky vypíšeme pouze některé zvolené hodnoty proměnné x a jim odpovídající hodnoty funkce.

3 Zapište funkci, která každému přirozenému číslu menšímu než 6 přiřazuje číslo, které je o 3 větší, než je jeho dvojnásobek. Určete obor hodnot této funkce.

Řešení

Označme hledanou funkci písmenem f. Funkce f je dána předpisem $y = 2x + 3$, definičním oborem funkce f je množina $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. To stručně zapíšeme takto:

$$f\colon y = 2x + 3, \quad x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

Sestavíme tabulku:

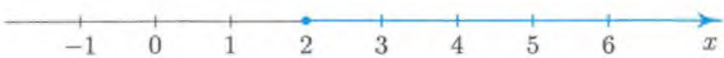
x	1	2	3	4	5
y	5	7	9	11	13

Z tabulky vidíme, že obor hodnot funkce f je $\mathsf{H} = \{5, 7, 9, 11, 13\}$.

Množinu H jsme určili tak, že jsme zapsali všechny její prvky. V takovém případě říkáme, že jsme množinu určili výčtem všech jejích prvků. Množiny však můžeme zapsat i jiným způsobem. Například množinu M všech reálných čísel x, která jsou větší nebo rovna číslu 2, můžeme zapsat takto:

$$\mathsf{M} = \{x \in \mathsf{R};\ x \geqq 2\}$$

Tento zápis čteme: „Množina všech reálných čísel x, pro něž platí x je větší nebo rovno číslu dvě.“ Obrazem této množiny je polopřímka zakreslená na obrázku.



Podmnožiny množiny všech reálných čísel, které můžeme na číselné ose zobrazit úsečkou nebo polopřímkou, přičemž krajní body úsečky či počáteční bod polopřímky k ní mohou, ale nemusí patřit, nazýváme **intervaly**. Vzhledem k tomu, že definičním oborem i oborem hodnot funkcí často bývají intervaly, uveďme si jejich přehled.

Zápis množiny	Zápis intervalu	Znázornění na číselné ose	Název intervalu, slovní vyjádření
$\{x \in \mathsf{R};\ a \leqq x \leqq b\}$	$\langle a, b \rangle$		uzavřený interval od a (včetně) do b (včetně)
$\{x \in \mathsf{R};\ a \leqq x < b\}$	$\langle a, b)$		zleva uzavřený a zprava otevřený interval zprava polootevřený interval od a (včetně) do b (mimo)
$\{x \in \mathsf{R};\ a < x \leqq b\}$	$(a, b \rangle$		zleva otevřený a zprava uzavřený interval zleva polootevřený interval od a (mimo) do b (včetně)
$\{x \in \mathsf{R};\ a < x < b\}$	(a, b)		otevřený interval od a (mimo) do b (mimo)
$\{x \in \mathsf{R};\ x \geqq a\}$	$\langle a, +\infty)$		interval neomezený zprava od a (včetně) do plus nekonečna
$\{x \in \mathsf{R};\ x > a\}$	$(a, +\infty)$		interval neomezený zprava od a (mimo) do plus nekonečna
$\{x \in \mathsf{R};\ x \leqq a\}$	$(-\infty, a \rangle$		interval neomezený zleva od minus nekonečna do a (včetně)
$\{x \in \mathsf{R};\ x < a\}$	$(-\infty, a)$		interval neomezený zleva od minus nekonečna do a (mimo)

V přehledu není zahrnut interval oboustranně neomezený, který zapisujeme $(-\infty, +\infty)$ a na číselné ose je znázorněn přímkou. Jde o množinu všech reálných čísel R, to znamená, že zápis $x \in (-\infty, +\infty)$ vyjadřuje totéž co zápis $x \in \mathrm{R}$.

Poznámka. Uvedené značení intervalů najdete ve většině dosavadních učebnic matematiky. V Evropské unii se matematické značky řídí mezinárodní normou ISO 31-11:1992 a v době tvorby této učebnice se připravuje její česká verze. V této nové normě se zavádí pro uzavřený interval od a do b značení $[a, b]$, zleva polootevřený interval od a do b se značí $(a, b]$, nebo též $]a, b]$, zprava polootevřený interval od a do b se značí $[a, b)$, nebo též $[a, b[$, otevřený interval od a do b se značí (a, b), nebo též $]a, b[$.

CVIČENÍ

1. Rozhodněte, které z uvedených tabulek zadávají nějakou funkci $y = f(x)$.

a)

x	1	2	3	4
y	2	4	8	16

b)

x	-2	-1	0	1
y	4	1	0	1

c)

x	-2	-1	1	2
y	-2	-2	2	2

d)

x	3	3	3	3
y	4	5	6	7

2. Určete pět hodnot daných funkcí a výsledky sestavte do tabulky:

a) $y = \dfrac{x}{2} - 1$, $x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ b) $y = 2x - 3$, $x \in \langle 0, 3\rangle$

c) $y = x^2 - 2$, $x \in (-\infty, 0)$

3. Je dána funkce $f\colon y = 1 - 4x^2$, $x \in \mathrm{R}$. Určete $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(0{,}5)$, $f(0{,}25)$, $f(2)$.

4. Vypočtěte hodnoty funkce $f\colon y = \dfrac{3}{x}$, $x \in (0, +\infty)$, v bodech 1; 6; 0,3; $\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{3}{2}$.

5. Zapište funkci, která každému celému číslu z intervalu $\langle -3, 2\rangle$ přiřazuje číslo, které je o 1 menší, než je jeho druhá mocnina. Určete obor hodnot této funkce.

6. Zapište jako interval množinu všech

a) kladných reálných čísel,
b) záporných reálných čísel,
c) nekladných reálných čísel,
d) reálných čísel menších než 3,
e) reálných čísel, jež jsou větší nebo rovna -1,
f) reálných čísel, jež jsou větší než -4 a menší nebo rovna $\dfrac{2}{3}$.

7. Zapište jako interval množinu všech reálných čísel, pro něž platí:

a) $x > -2$ b) $x \leqq 3$ c) $1 < x < 4$

d) $-3 < x \leqq 0$ e) $-1 \leqq x < \frac{1}{2}$ f) $-2{,}5 \leqq x \leqq -0{,}5$

8. Na číselné ose znázorněte intervaly:

a) $(-2, 3)$ b) $(-1, 4\rangle$ c) $\langle 2, 4\rangle$

d) $\langle -3, 0)$ e) $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ f) $(-\infty; -1{,}5\rangle$

9. Zapište funkce, které vyjadřují závislost

a) obvodu čtverce na délce jeho strany,
b) obsahu čtverce na délce jeho strany,
c) obsahu kruhu na jeho průměru,
d) povrchu krychle na délce její hrany.

10. Je dána funkce $f\colon y = \dfrac{x+3}{x-4}$.

a) Která reálná čísla nemohou patřit do definičního oboru funkce f?
b) Určete $f(0)$, $f(3)$, $f(-2)$.
c) Která z čísel 0, 1, 2 patří do oboru hodnot funkce f?

1.2 Graf funkce

Grafem funkce $f\colon y = f(x)$, $x \in \mathrm{D}$, je množina všech bodů $[x, y]$ roviny, kde x patří do definičního oboru D funkce f a $y = f(x)$.

1 Sestrojte grafy funkcí, které jsou určeny následujícími tabulkami:

a)

x	0	1	2	3	4	5
y	1	3	3	2	0	-2

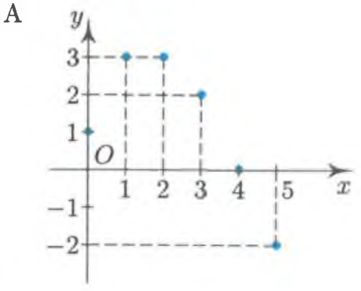
b)

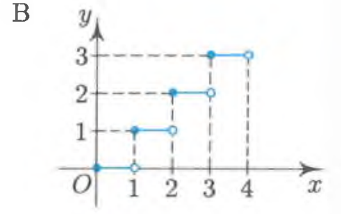
x	$\langle 0, 1)$	$\langle 1, 2)$	$\langle 2, 3)$	$\langle 3, 4)$
y	0	1	2	3

Řešení

a) Grafem funkce jsou body $[0, 1]$, $[1, 3]$, $[2, 3]$, $[3, 2]$, $[4, 0]$, $[5, -2]$. Graf je sestrojen na obrázku A.

b) Pro všechna reálná čísla $x \in \langle 0, 1)$ je hodnota funkce rovna nule. To znamená, že touto částí grafu funkce jsou všechny body, které leží na ose x mezi body $[0,0]$ a $[1,0]$ a bod $[0,0]$ (tj. úsečka bez jednoho krajního bodu). Podobně postupujeme pro další hodnoty proměnné x a sestrojíme graf funkce, který je na obrázku B.





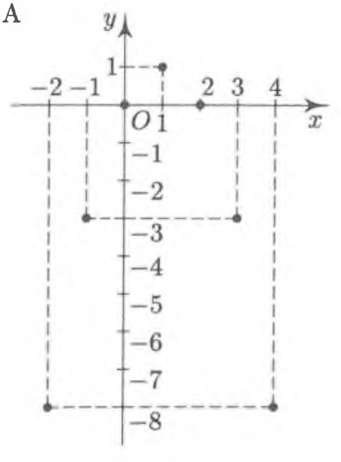
2 Sestrojte graf funkce $y = 2x - x^2$, $x \in \mathsf{R}$.

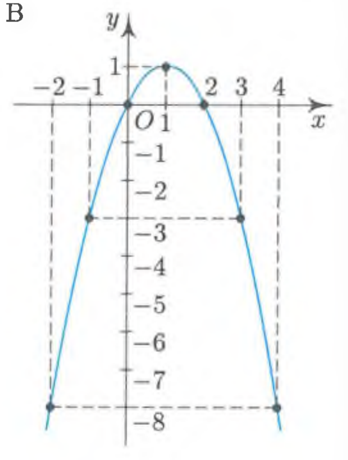
Řešení

Zvolíme několik hodnot proměnné x, vypočteme příslušné hodnoty funkce a sestavíme tabulku:

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-8	-3	0	1	0	-3	-8

Opět si připomeňme, že touto tabulkou není daná funkce určena, protože jejím definičním oborem je množina všech reálných čísel, tedy množina s nekonečným počtem prvků. Jestliže do tabulky nemůžeme vypsat všechny prvky definičního oboru, nelze takovou funkci tabulkou určit.





Na obrázku A jsou zakresleny body, jejichž souřadnice jsou uvedeny v tabulce. Na obrázku B je plynulá nepřerušovaná křivka procházející těmito body, která je grafem kvadratické funkce $y = 2x - x^2$, $x \in \mathsf{R}$. Tato křivka se nazývá **parabola**.

3 Z grafu sestrojeného na obr. B určete, pro které hodnoty proměnné x nabývá funkce $y = 2x - x^2$, $x \in \mathsf{R}$,

a) nulových hodnot, b) kladných hodnot,

c) záporných hodnot, d) nezáporných hodnot.

Řešení

a) Funkce nabývá nulových hodnot pro $x = 0$ a pro $x = 2$.

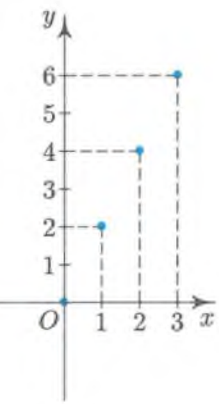
b) Funkce nabývá kladných hodnot pro $x \in (0, 2)$.

c) Funkce nabývá záporných hodnot pro $x \in (-\infty, 0)$ nebo pro $x \in (2, +\infty)$, čili pro $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.

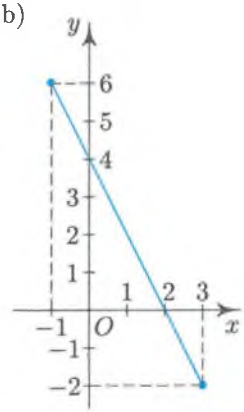
d) Funkce nabývá nezáporných hodnot pro $x \in \langle 0, 2 \rangle$.

4 Zapište definiční obory a obory hodnot funkcí, jejichž grafy jsou na následujících obrázcích:

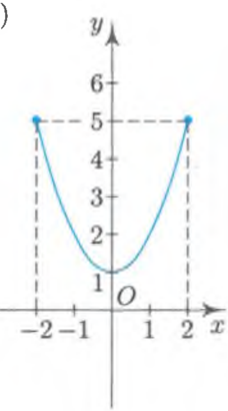
a)



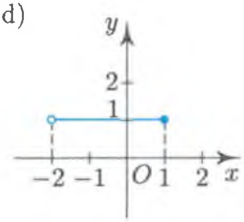
b)



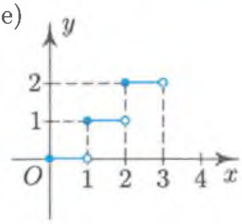
c)



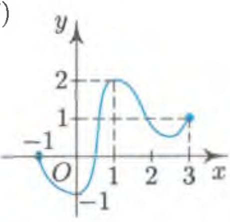
d)



e)



f)

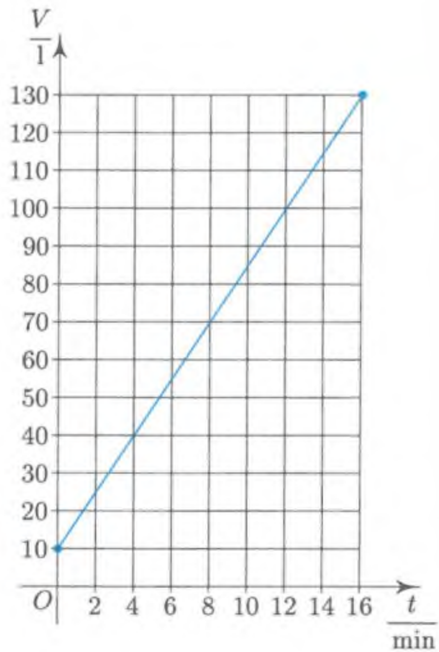


Řešení

a) $D = \{0, 1, 2, 3\}$, $H = \{0, 2, 4, 6\}$
b) $D = \langle -1, 3\rangle$, $H = \langle -2, 6\rangle$
c) $D = \langle -2, 2\rangle$, $H = \langle 1, 5\rangle$
d) $D = (-2, 1\rangle$, $H = \{1\}$
e) $D = \langle 0, 3)$, $H = \{0, 1, 2\}$
f) $D = \langle -1, 3\rangle$, $H = \langle -1, 2\rangle$

5 Sud, jehož objem je 130 litrů, se plní vodou. Na obrázku je sestrojen graf závislosti objemu V vody v sudu na době plnění.

a) Kolik litrů vody bylo v sudu na počátku plnění?
b) Za kolik minut se sud zcela naplní?
c) Kolik litrů vody bylo v sudu na konci čtvrté minuty?
d) Kolik litrů vody nateklo do sudu za 4 minuty?
e) Kdy bylo v sudu 100 litrů vody?
f) Za kolik minut nateče do sudu 60 litrů vody?
g) V sudu je již 115 litrů vody. Za kolik minut se sud naplní?



Řešení

a) V čase $t = 0$ minut je objem $V = 10$ litrů. Na počátku plnění bylo v sudu 10 litrů vody.
b) Objemu $V = 130$ litrů odpovídá čas $t = 16$ minut. Sud se zcela naplní za 16 minut.
c) Na konci čtvrté minuty bylo v sudu 40 litrů vody. (Na grafu bod $[4, 40]$.)
d) Na počátku plnění bylo v sudu 10 litrů, na konci čtvrté minuty bylo 40 litrů, to znamená, že za 4 minuty přiteklo 30 litrů vody.

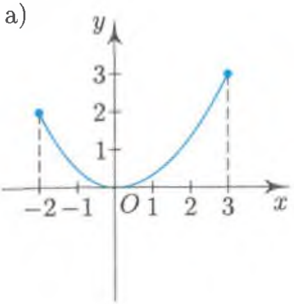
e) Objemu $V = 100$ litrů odpovídá čas $t = 12$ minut. V sudu bylo 100 litrů vody na konci dvanácté minuty.

f) V sudu bylo na počátku 10 litrů a jestliže nateče 60 litrů, pak bude v sudu celkem 70 litrů. Objemu $V = 70\,\mathrm{l}$ odpovídá čas $t = 8\,\mathrm{min}$. Do sudu nateče 60 litrů vody za 8 minut.

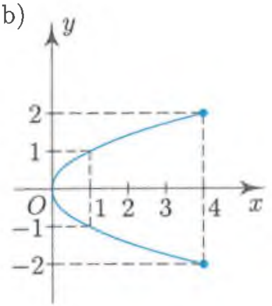
g) V sudu je 115 litrů právě na konci čtrnácté minuty. Sud se naplní za 2 minuty.

6 Rozhodněte, na kterých obrázcích je zakreslen graf nějaké funkce $y = f(x)$.

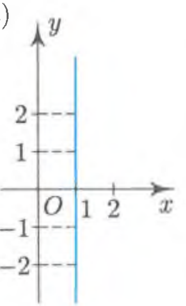
a)



b)



c)



Řešení

a) Je-li na obrázku graf nějaké funkce $y = f(x)$, pak jejím definičním oborem je množina $\mathsf{D} = \langle -2, 3\rangle$. Vidíme, že ke každému $x \in \langle -2, 3\rangle$ je přiřazeno právě jedno reálné číslo y. Na obrázku je tedy zakreslen graf nějaké funkce $y = f(x)$.

b) Je-li na obrázku graf nějaké funkce $y = f(x)$, pak jejím definičním oborem je množina $\mathsf{D} = \langle 0, 4\rangle$. Jenže např. hodnotě proměnné $x = 1$ jsou přiřazena dvě různá reálná čísla y, 1 a -1, což je v rozporu s definicí funkce. Množina bodů na obrázku proto není grafem žádné funkce $y = f(x)$.

c) Kdyby byl na obrázku zakreslen graf nějaké funkce $y = f(x)$, pak by šlo o funkci s definičním oborem $\mathsf{D} = \{1\}$. Hodnotě proměnné $x = 1$ je však přiřazeno nekonečně mnoho reálných čísel y, což je v rozporu s definicí funkce. To znamená, že na obrázku není zakreslen graf žádné funkce $y = f(x)$.

CVIČENÍ

1. Sestrojte grafy funkcí, které jsou určeny následujícími tabulkami:

a)

x	0	1	2	3	4
y	2	3	1	0	-1

b)

x	0	1	2	3	4
y	2	2	2	2	2

c)

x	-2	-1	0	1	2
y	2	1	1	-1	$-\frac{1}{2}$

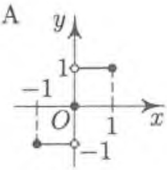
d)

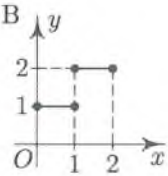
x	$\langle -1, 0)$	0	$(0, 1\rangle$
y	-1	0	1

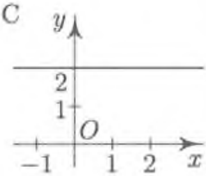
2. Sestrojte graf funkce $y = 3 - 2x$, $x \in \mathsf{R}$. Určete, pro které hodnoty proměnné x nabývá tato funkce a) nulových hodnot, b) nezáporných hodnot, c) záporných hodnot.

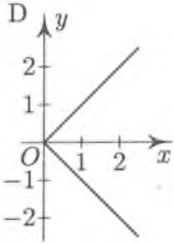
3. Určete obor hodnot funkce $y = \sqrt{x}$, $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ a sestrojte její graf.

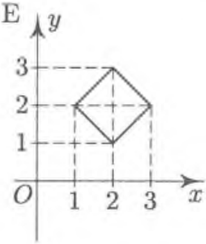
4. Rozhodněte, které z množin bodů na obrázcích A až I jsou grafem nějaké funkce $y = f(x)$. Pokud ano, určete definiční obor a obor hodnot této funkce.

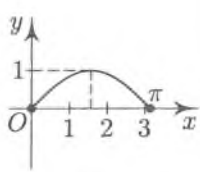
A


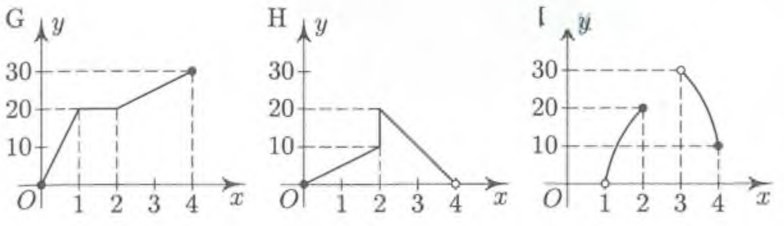
B


C


D


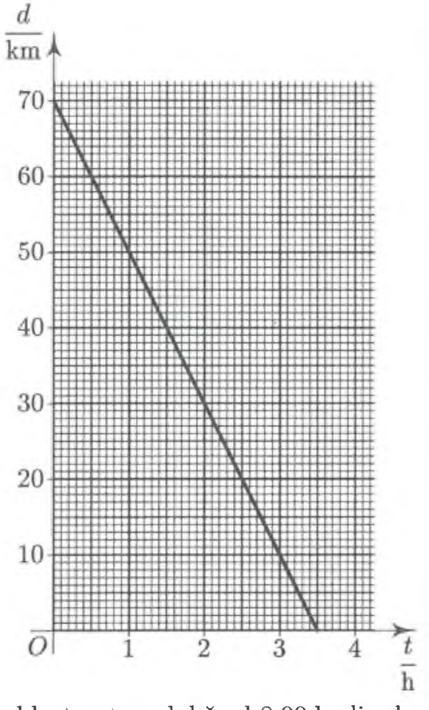
E


F




5. Na obrázku je sestrojen graf závislosti vzdálenosti d (km) cyklisty od cíle jeho cesty na době t (h) jeho jízdy. Z grafu určete

a) vzdálenost cyklisty od cíle v čase $t = 0$ h,
b) za kolik hodin přijede cyklista do cíle své cesty,
c) vzdálenost cyklisty od cíle v čase $t = 1{,}5$ h,
d) rychlost cyklisty v km/h.

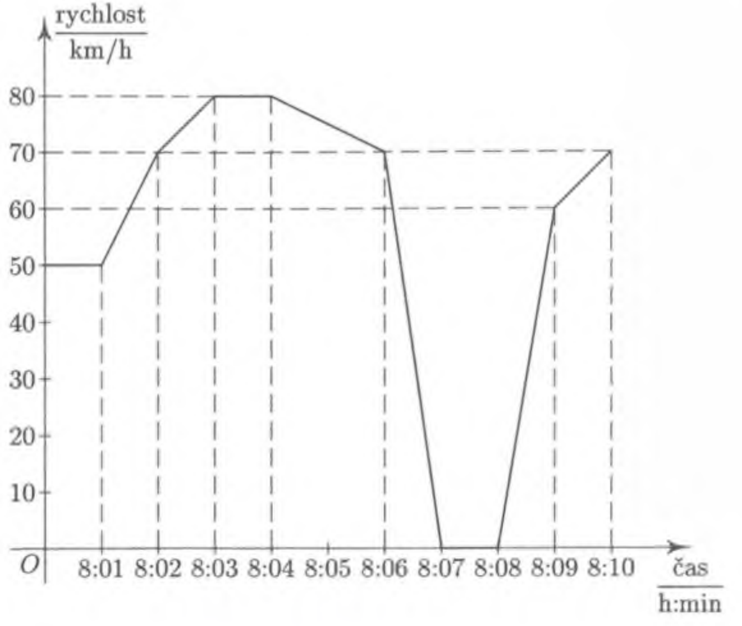


6. Na obrázku je zaznamenána rychlost auta v době od 8:00 hodin do 8:10 hodin. Vyčtěte z tohoto grafu odpovědi na následující otázky a úkoly.

a) V které době jelo auto stálou rychlostí a jaká byla jeho rychlost?
b) V které době se rychlost auta zvyšovala?
c) V které době se rychlost auta snižovala?
d) Zastavilo auto ve sledovaném čase? Pokud ano, jak dlouho stálo?
e) Za jakou dobu došlo ke zvýšení rychlosti z 50 km/h na 80 km/h?

f) Popište, jak se měnila rychlost auta v době od 8:08 hodin do 8:09 hodin.

g) Jelo auto v některém okamžiku rychlostí 75 km/h? Pokud ano, určete kolikrát a přibližně v které době.



1.3 Lineární funkce a její vlastnosti

1 Nákladní auto vyjelo z Prahy a jelo po dálnici směrem na Břeclav stálou rychlostí 80 km/h.

a) Určete funkci, která vyjadřuje závislost vzdálenosti auta od Prahy na jeho době jízdy za předpokladu, že jsme čas začali měřit v okamžiku, kdy auto bylo již 40 km od Prahy a od tohoto okamžiku jelo ještě tři hodiny.

b) Sestrojte graf této funkce.

Řešení

a) Označme písmenem d vzdálenost auta od Prahy vyjádřenou v kilometrech a písmenem t dobu jízdy auta v hodinách.

V okamžiku, kdy jsme začali měřit čas (tj. v čase 0 hodin), byla vzdálenost auta od Prahy 40 km. To znamená, že

$$d(0) = 40.$$

Auto jedoucí stálou rychlostí 80 km/h ujede za každou hodinu dráhu 80 km. Vzdálenost auta od Prahy po jedné hodině jeho jízdy tedy je

$$d(1) = 80 \cdot 1 + 40.$$

Za 2 hodiny je tato vzdálenost

$$d(2) = 80 \cdot 2 + 40$$

a za 3 hodiny

$$d(3) = 80 \cdot 3 + 40.$$

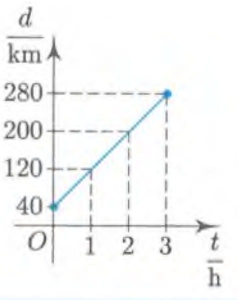
Závislost vzdálenosti d na čase t je tedy určena rovnicí

$$d = 80 \cdot t + 40, \quad \text{kde } t \in \langle 0, 3 \rangle.$$

Jistě si vzpomenete, že tuto závislost jsme poznali již v 7. ročníku a nazvali ji **lineární závislost**.

b) Vypočítané vzdálenosti auta od Prahy sestavíme přehledně do tabulky:

t (h)	0	1	2	3
d (km)	40	120	200	280



Již víme, že grafem lineární závislosti je množina bodů ležících na přímce. Protože definičním oborem této funkce je interval $\langle 0, 3 \rangle$, je grafem funkce úsečka, jejíž krajní body jsou $[0, 40]$ a $[3, 280]$.

Lineární funkce je každá funkce daná rovnicí $y = ax + b$, kde a, b jsou libovolná reálná čísla a definičním oborem je množina všech reálných čísel.

Grafem lineární funkce je přímka.

2 Sestrojte grafy funkcí:

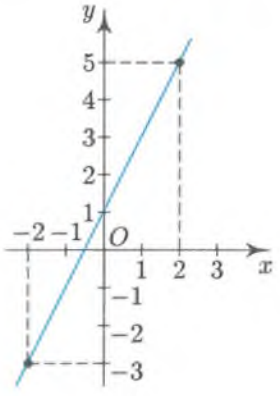
a) $f_1 \colon y = 2x + 1,\ x \in \mathrm{R}$

b) $f_2 \colon y = 2x + 1,\ x \in \langle 0, +\infty)$

c) $f_3 \colon y = 2x + 1,\ x \in \langle -2, 2 \rangle$

d) $f_4 \colon y = 2x + 1,\ x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

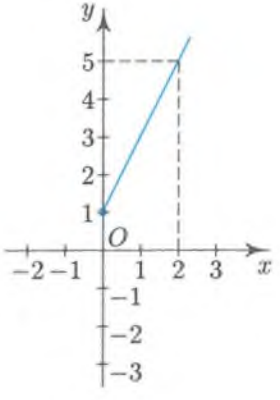
Řešení



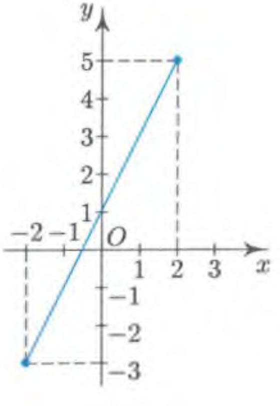
a) Funkce f_1 je lineární funkce, jejím grafem je tedy přímka. Víme, že přímka je určena dvěma body. K sestrojení grafu lineární funkce proto stačí určení souřadnic dvou různých bodů grafu funkce. Za hodnoty proměnné x zvolme např. čísla 2 a -2:

x	-2	2
y	-3	5

Grafem funkce f_1 je přímka určená body $[-2,-3]$, $[2,5]$.



b) Funkce f_2 je určena stejnou rovnicí jako funkce f_1, ale definičním oborem je v tomto případě množina všech nezáporných reálných čísel. Grafem funkce f_2 je tedy polopřímka s počátečním bodem $[0,1]$, vnitřním bodem polopřímky je např. bod $[2,5]$.

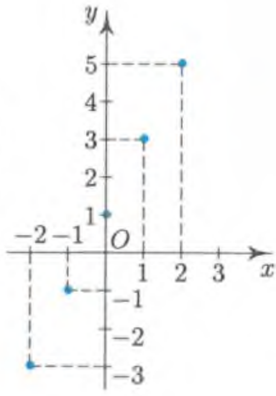


c) Funkce f_3 je určena stejnou rovnicí jako funkce f_1, ale definičním oborem je nyní interval $\langle -2,2\rangle$. Do definičního oboru tedy patří čísla -2, 2 a všechna reálná čísla, která jsou mezi těmito čísly. Grafem funkce f_3 je úsečka, jejíž krajní body jsou $[-2,-3]$ a $[2,5]$.

d) Opět jde jen o změnu definičního oboru, kterým je nyní množina $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Sestavíme tabulku:

x	-2	-1	0	1	2
y	-3	-1	1	3	5

Grafem funkce f_4 je množina bodů $\{[-2, -3], [-1, -1], [0, 1], [1, 3], [2, 5]\}$.



3 Sestrojte grafy lineárních funkcí:

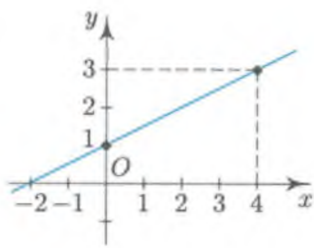
a) $f_1 \colon y = \frac{1}{2}x + 1,\ x \in \mathrm{R}$

b) $f_2 \colon y = -\frac{1}{2}x + 1,\ x \in \mathrm{R}$

Řešení

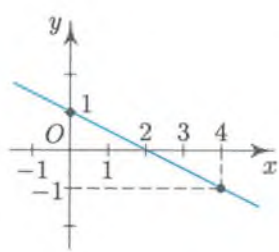
a) Grafem lineární funkce je přímka, stačí tedy určit souřadnice dvou bodů grafu funkce:

x	0	4
y	1	3



b) Opět stačí určit souřadnice dvou bodů grafu funkce:

x	0	4
y	1	-1



Porovnejme grafy funkcí f_1 a f_2.
Pro funkci f_1 platí: Rostou-li hodnoty proměnné, rostou hodnoty funkce. Funkce f_1 je příkladem rostoucí funkce.
Pro funkci f_2 platí: Rostou-li hodnoty proměnné, klesají hodnoty funkce. Funkce f_2 je příkladem klesající funkce.

Funkce f je rostoucí, právě když pro každé dvě hodnoty x_1, x_2 jejího definičního oboru D platí:

$$\text{Je-li } x_1 < x_2, \quad \text{pak } f(x_1) < f(x_2).$$

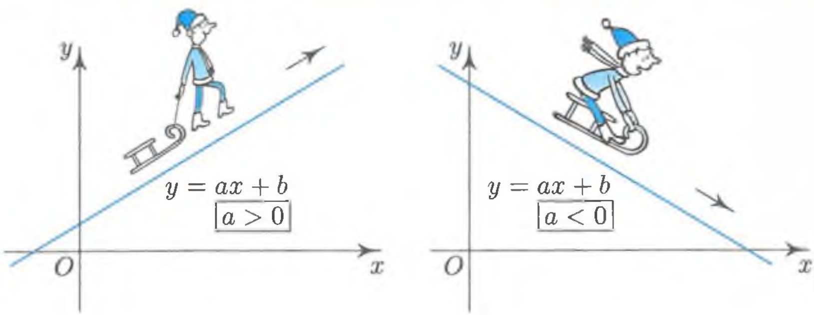
Funkce f je klesající, právě když pro každé dvě hodnoty x_1, x_2 jejího definičního oboru D platí:

$$\text{Je-li } x_1 < x_2, \quad \text{pak } f(x_1) > f(x_2).$$

Pro lineární funkci $y = ax + b$ platí:

Je-li $a > 0$, je lineární funkce rostoucí.

Je-li $a < 0$, je lineární funkce klesající.

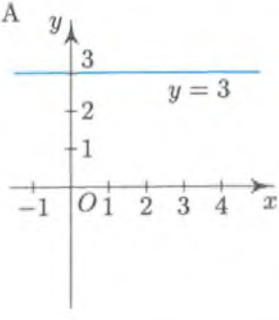


A co když $a = 0$? Pro $a = 0$ má rovnice lineární funkce tvar

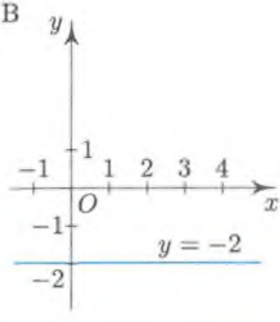
$$y = b.$$

Tento zvláštní případ lineární funkce se nazývá **konstantní funkce**. Konstantní funkce není (podle uvedené definice) ani rostoucí, ani klesající. Na obrázku A je sestrojen graf funkce $y = 3$ a na obrázku B je graf funkce $y = -2$.

A



B



Grafy obou funkcí jsou přímky rovnoběžné s osou x. Graf funkce $y = 3$ protíná osu y v bodě $[0, 3]$, graf funkce $y = -2$ protíná osu y v bodě $[0, -2]$. Uvedený poznatek můžeme zobecnit:

Grafem konstantní funkce $y = b$ je přímka rovnoběžná s osou x, která prochází bodem $[0, b]$.

Co když $b = 0$? Rovnice určující lineární funkci má pak tvar $y = ax$. Tento zvláštní případ lineární funkce jsme poznali již v 7. ročníku jako přímou úměrnost. Víme, že grafem lineární funkce je přímka. Dosazením $x = 0$ do rovnice $y = ax$ dostaneme $y = 0$. Z toho vyplývá, že **grafem přímé úměrnosti** je přímka procházející počátkem soustavy souřadnic.

4 V téže soustavě souřadnic (tj. v jednom obrázku) sestrojte grafy funkcí $f_1: y = x$, $x \in \mathsf{R}$, $f_2: y = 2x$, $x \in \mathsf{R}$, $f_3: y = -2x$, $x \in \mathsf{R}$.

Řešení

Všechny dané funkce jsou přímé úměrnosti. Grafem přímé úměrnosti je přímka procházející počátkem soustavy souřadnic, stačí tedy určit souřadnice ještě jednoho dalšího bodu grafu funkce. Tím získáme dva body, které určují přímku, jež je grafem hledané funkce.

f_1:

x	0	1
y	0	1

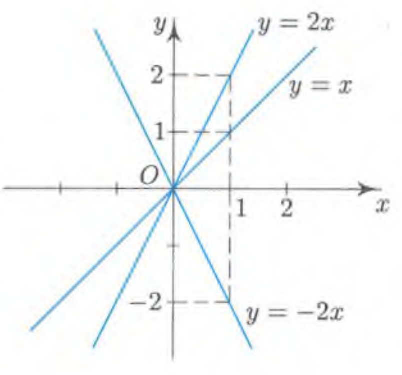
f_2:

x	0	1
y	0	2

f_3:

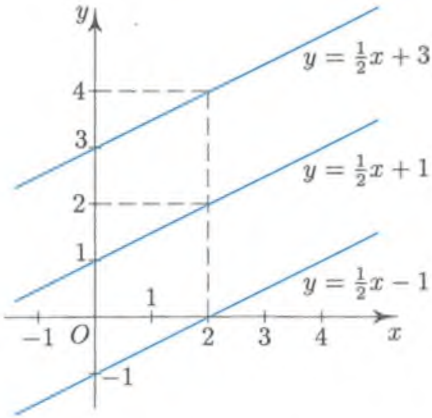
x	0	1
y	0	-2

Grafy funkcí f_1, f_2, f_3 jsou tři přímky, které procházejí počátkem soustavy souřadnic a liší se pouze svým směrem. Konstantu a v přímé úměrnosti $y = ax$ jsme nazývali koeficient přímé úměrnosti. Na obrázku vidíme, že tento koeficient určuje směr přímky. Již jsme poznali, že podle konstanty a poznáme, zda je lineární funkce (a tedy i přímá úměrnost) funkcí rostoucí či klesající.



5 V téže soustavě souřadnic sestrojte grafy funkcí $f_1: y = \frac{1}{2}x - 1$, $x \in \mathsf{R}$, $f_2: y = \frac{1}{2}x + 1$, $x \in \mathsf{R}$, $f_3: y = \frac{1}{2}x + 3$, $x \in \mathsf{R}$.

Řešení



f_1:

x	0	2
y	−1	0

f_2:

x	0	2
y	1	2

f_3:

x	0	2
y	3	4

U všech tří funkcí je $a = \dfrac{1}{2}$. Vidíme, že grafy těchto funkcí jsou navzájem rovnoběžné přímky.

Jsou-li dvě lineární funkce určeny rovnicemi

$$y = a_1x + b_1, \qquad y = a_2x + b_2$$

a $a_1 = a_2$, pak grafy těchto funkcí jsou navzájem rovnoběžné přímky.

Z obrázku můžeme určit souřadnice průsečíků jednotlivých grafů funkcí s osou y. Pro funkci f_1 je to bod $[0, -1]$, pro funkci f_2 je to bod $[0, 1]$ a pro funkci f_3 je to bod $[0, 3]$.

Je-li lineární funkce určena rovnicí $y = ax + b$, pak dosazením $x = 0$ do této rovnice dostaneme $y = b$. To znamená, že graf lineární funkce určené rovnicí $y = ax + b$ protíná osu y v bodě $[0, b]$.

Shrnutí

Lineární funkce je každá funkce, která je daná rovnicí

$$y = ax + b,$$

kde a, b jsou libovolná reálná čísla a definičním oborem je množina všech reálných čísel.

Lineární funkce vyjádřené ve tvaru $y = b$, tj. funkce dané rovnicí $y = ax + b$, v níž je $a = 0$, nazýváme **konstantní funkce**.

Pro lineární funkce vyjádřené ve tvaru

$$y = ax,$$

tj. pro funkce dané rovnicí $y = ax + b$, v níž je $b = 0$, užíváme také název **přímá úměrnost**.

Poznámka. V zápisech lineárních funkcí se často neuvádí její definiční obor; víme totiž, že definičním oborem lineární funkce je množina všech reálných čísel.

CVIČENÍ

1. Rozhodněte, které z daných rovnic určují lineární funkci. Pokud jde o zvláštní případ lineární funkce, uveďte též její název.

a) $y = 3x + 2$ b) $y = -5x + 4$ c) $y = 1 - 6x$

d) $y = 3x$ e) $y = -4$ f) $y = 2 + x^2$

g) $y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{5}$ h) $y = \frac{1}{x} - \frac{2}{5}$ i) $y = 0$

2. V téže soustavě souřadnic sestrojte grafy lineárních funkcí:

a) $f\colon y = -2x$ b) $g\colon y = -2x - 1$ c) $h\colon y = 2 - 2x$

3. Určete lineární funkci, jejímž grafem je přímka, která prochází bodem $[0, 4]$ a je rovnoběžná s přímkou, která je grafem funkce $y = -2x$.

4. Určete lineární funkci, jejímž grafem je přímka, která prochází bodem $[0, 0]$ a je rovnoběžná s přímkou, která je grafem funkce $y = 2x - 3$.

5. Je dána funkce $f\colon y = 0{,}25x + b$, $x \in \mathsf{R}$. Určete hodnotu b tak, aby přímka, která je grafem funkce f, protínala osu y v bodě:

a) $[0, 0]$ b) $[0, -3]$

6. Bez sestrojování grafu funkce rozhodněte, zda daná lineární funkce je rostoucí, nebo klesající. Své rozhodnutí zdůvodněte.

a) $y = 5x + 3$ b) $y = 5x - 3$ c) $y = -5x + 3$

d) $y = 0{,}2x - 3$ e) $y = 2 - x$ f) $y = -2$

7. V téže soustavě souřadnic sestrojte grafy lineárních funkcí:

a) $f\colon y = x + 1$ b) $g\colon y = 2x + 1$ c) $h\colon y = -2x + 1$

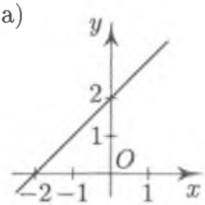
8. V téže soustavě souřadnic sestrojte grafy funkcí f, g a určete souřadnice jejich průsečíku:

a) $f\colon y = \frac{x}{2} - 2$
$g\colon y = -x + 1$

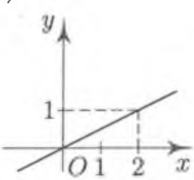
b) $f\colon y = 1{,}5x - 3$
$g\colon y = 1{,}5$

9. Rozhodněte, který z následujících grafů je grafem přímé úměrnosti:

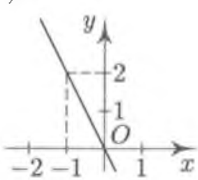
a)



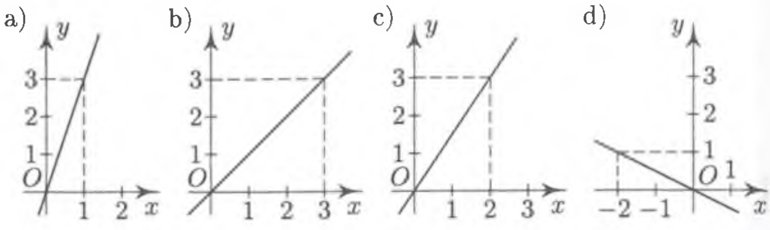
b)



c)



10. Z daného grafu přímé úměrnosti určete její rovnici:



11. V téže soustavě souřadnic sestrojte grafy přímých úměrností určených rovnicemi:

a) $y = 2x$ b) $y = -3x$ c) $y = \frac{3}{4}x$

12. Bez sestrojení grafu funkce rozhodněte, které z bodů $[1, 1]$, $[-1, 1]$, $[0, 4]$, $[-\frac{1}{3}, 5]$, $[\frac{2}{3}, 2]$ leží na grafu lineární funkce $y = -3x + 4$.

1.4 Další funkce

Další funkcí, kterou jsme poznali již v 7. ročníku, je nepřímá úměrnost. Popisovali jsme ji slovy „kolikrát se zvětší (zmenší) jedna veličina, tolikrát se zmenší (zvětší) druhá veličina".

Rovnicí

$$y = \frac{k}{x},$$

kde k je libovolné reálné číslo různé od nuly a definičním oborem je množina všech reálných čísel různých od nuly, je určena **nepřímá úměrnost**.

Poznámka. Doposud jsme řešili jen takové úlohy na nepřímou úměrnost, v nichž jsme předpokládali, že $k > 0$ a zároveň $x > 0$.

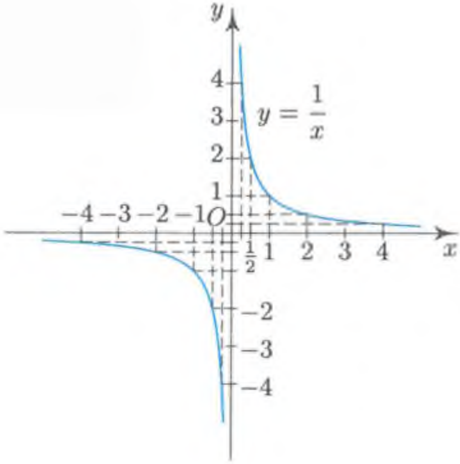
1 Sestrojte grafy funkcí:

a) $f\colon y = \frac{1}{x}$, $x \in \mathsf{R}$, $x \neq 0$ b) $g\colon y = \frac{-1}{x}$, $x \in \mathsf{R}$, $x \neq 0$

Řešení

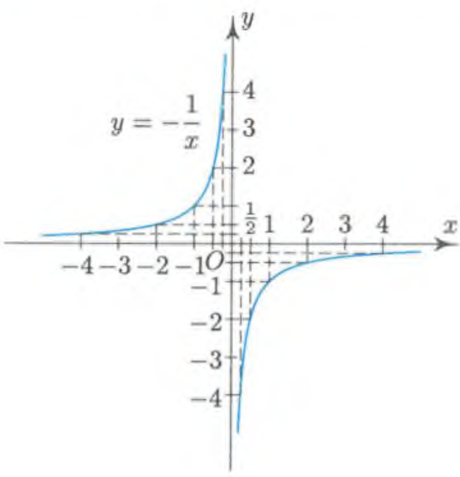
a) Sestavíme tabulku pro několik zvolených hodnot proměnné x z definičního oboru funkce f:

x	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-4	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$



b) Opět sestavíme tabulku. Využijeme toho, že hodnoty funkcí f a g se liší pouze znaménkem.

x	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$



Graf nepřímé úměrnosti je křivka, která se nazývá **hyperbola**. Skládá se ze dvou oddělených částí — větví hyperboly.

Zaměřme se na graf funkce $y = \dfrac{1}{x}$ a pokusme se najít zobrazení, v němž je jedna větev hyperboly obrazem druhé větve. Zvolíme-li například $x = 2$, dostaneme $f(2) = \dfrac{1}{2}$. Zvolíme-li $x = -2$, dostaneme $f(-2) = -\dfrac{1}{2}$. Všimněme si, že $f(-2) = -f(2)$. Body $[2, \frac{1}{2}]$ a $[-2, -\frac{1}{2}]$ jsou body souměrně sdružené podle počátku soustavy souřadnic.

Zobecněme tuto úvahu. Pro všechna x z definičního oboru funkce $y = \dfrac{1}{x}$ platí $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $f(-x) = \dfrac{1}{-x}$, to znamená, že

$$f(-x) = -f(x).$$

K libovolnému bodu $[x, f(x)]$ je bodem souměrně sdruženým podle počátku bod $[-x, -f(x)]$. Z toho vyplývá, že graf funkce $y = \dfrac{1}{x}$ je souměrný podle počátku soustavy souřadnic, čili jedna větev hyperboly je obrazem druhé větve ve středové souměrnosti se středem v počátku. Uvedenou středovou souměrnost můžeme využít nejen při sestrojování grafu funkce $y = \dfrac{1}{x}$, ale také při konstrukci grafu funkce $y = \dfrac{k}{x}$, kde k je libovolné nenulové reálné číslo.

V článku 1.3 *Lineární funkce a její vlastnosti* jsme uvedli definice rostoucí a klesající funkce. Řekneme-li, že funkce je rostoucí (klesající), rozumí se tím, že je rostoucí (klesající) v celém jejím definičním oboru. Můžeme říci, že funkce $f\colon y = \dfrac{1}{x}$ je klesající?
Definičním oborem této funkce jsou všechna reálná čísla x různá od nuly. Zvolme dvě různé hodnoty proměnné x z definičního oboru funkce, např. $x_1 = -2$, $x_2 = 1$. Příslušné hodnoty funkce f jsou $f(-2) = -0{,}5$, $f(1) = 1$. Zřejmě platí, že $x_1 < x_2$ a současně $f(x_1) < f(x_2)$, což je v rozporu s definicí klesající funkce. Nemůžeme tedy říci, že funkce $f\colon y = \dfrac{1}{x}$ je klesající. Z obrázku, na němž je sestrojen graf této funkce, ale vidíme, že pro všechna záporná čísla x je funkce f klesající a rovněž pro všechna kladná čísla x je tato funkce klesající. Je tedy užitečné definovat funkci rostoucí a funkci klesající v intervalu, který je částí jejího definičního oboru.

Funkce f je rostoucí v intervalu, který je částí jejího definičního oboru, právě když pro každé dvě hodnoty x_1, x_2 z tohoto intervalu platí:

$$\text{Je-li } x_1 < x_2, \quad \text{pak } f(x_1) < f(x_2).$$

Funkce f je klesající v intervalu, který je částí jejího definičního oboru, právě když pro každé dvě hodnoty x_1, x_2 z tohoto intervalu platí:

$$\text{Je-li } x_1 < x_2, \quad \text{pak } f(x_1) > f(x_2).$$

Můžeme tedy říci, že funkce $f\colon y = \frac{k}{x}$ je klesající v intervalu $(-\infty, 0)$ a v intervalu $(0, +\infty)$. Jak jsme si však ukázali, není klesající v celém definičním oboru, tj. v množině všech reálných čísel různých od nuly.

Pokusme se z grafů funkcí f a g vyčíst některé další vlastnosti, které mají funkce $y = \frac{k}{x}$, a to jednak pro $k > 0$, jednak pro $k < 0$.
Pro $k > 0$ leží větve hyperboly v 1. a 3. kvadrantu. Funkce je klesající v intervalech $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$. Oborem hodnot jsou všechna reálná čísla různá od nuly.
Pro $k < 0$ leží větve hyperboly ve 2. a 4. kvadrantu. Funkce je rostoucí v intervalech $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$. Oborem hodnot jsou všechna reálná čísla různá od nuly.

Z geometrie víme, že obsah S čtverce vypočteme podle vzorce

$$S = x^2,$$

kde x je délka strany čtverce. Zvětší-li se délka strany dvakrát, zvětší se obsah čtverce čtyřikrát (tj. 2^2 krát). Toto je příklad závislosti, kterou nazýváme kvadratická funkce.

Kvadratická funkce je každá funkce daná rovnicí

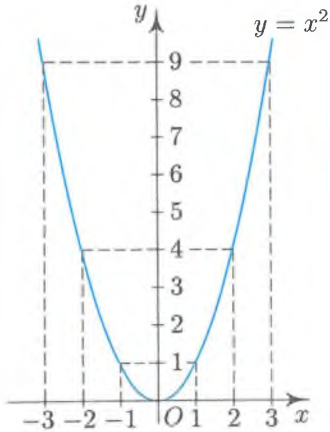
$$y = ax^2 + bx + c,$$

kde a je libovolné reálné číslo různé od nuly, b, c jsou libovolná reálná čísla a definičním oborem je množina všech reálných čísel.
V této učebnici se budeme zabývat pouze takovým případem kvadratické funkce, kdy $b = 0$ a zároveň $c = 0$. Budeme tedy zkoumat zvláštní případ kvadratické funkce, která je určena rovnicí

$$y = ax^2,$$

kde a je libovolné reálné číslo různé od nuly a definičním oborem je množina všech reálných čísel.

2 Sestrojte graf kvadratické funkce $f\colon y = x^2$.



Řešení

Sestavíme tabulku pro několik zvolených hodnot proměnné x:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

Grafem kvadratické funkce $f\colon y = x^2$ je křivka, která se nazývá **parabola**. Z tabulky i grafu funkce vidíme, že hodnota funkce f je stejná pro $x = 3$ a pro $x = -3$.

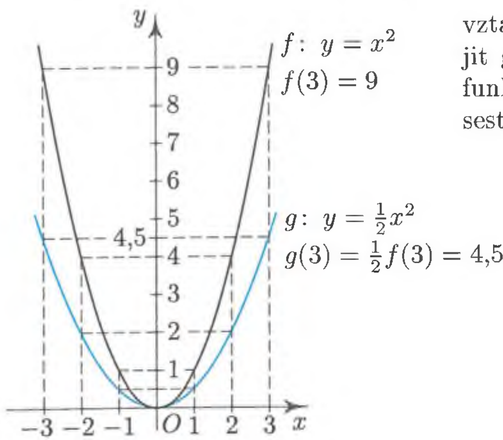
Rozhodněte, zda pro každé reálné číslo x platí $x^2 = (-x)^2$.

Uvedená rovnost platí pro každé reálné číslo. To znamená, že pro všechna $x \in \mathrm{R}$ platí $f(-x) = f(x)$ a protože body $[x, f(x)]$ a $[-x, f(x)]$ jsou body souměrně sdružené podle osy y, je graf funkce $y = x^2$ souměrný podle osy y.

3 Sestrojte graf kvadratické funkce $g\colon y = \dfrac{1}{2}x^2$.

Řešení

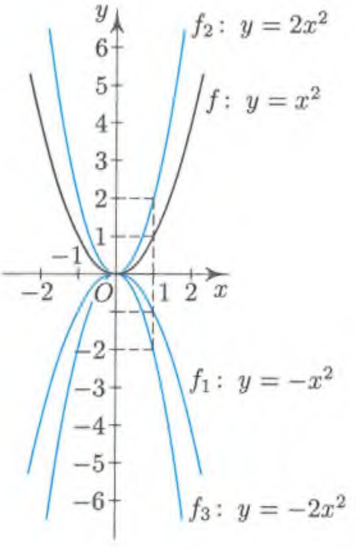
Z předcházejícího příkladu již známe graf funkce $f\colon y = x^2$. Všimněme si toho, že pro každé reálné číslo x platí $g(x) = \dfrac{1}{2}f(x)$. Užitím tohoto vztahu můžeme snadno sestrojit graf funkce g pomocí grafu funkce f, aniž bychom museli sestavovat tabulku.



4 Pomocí grafu funkce $f\colon y = x^2$ sestrojte v téže soustavě souřadnic grafy funkcí $f_1\colon y = -x^2$, $f_2\colon y = 2x^2$, $f_3\colon y = -2x^2$.

Řešení

Postupujeme podobně jako v příkladu 3. Užijeme toho, že pro každé x platí $f_1(x) = (-1)\cdot f(x)$, $f_2(x) = 2\cdot f(x)$, $f_3(x) = (-2)\cdot f(x)$.



Tento obrázek nám pomůže při určování vlastností funkce $y = ax^2$. Musíme však rozlišit případy pro $a > 0$, $a < 0$. Pokuste se vlastnosti funkce $y = ax^2$ odvodit samostatně a pak je porovnejte s učebnicí.

Vlastnosti kvadratické funkce $y = ax^2$, je-li $a > 0$:

- Oborem hodnot funkce jsou všechna nezáporná reálná čísla, tj. čísla z intervalu $\langle 0, +\infty)$.
- Funkce je pro všechna nekladná reálná čísla klesající a pro všechna nezáporná čísla rostoucí.
- Pro $x = 0$ nabývá funkce své nejmenší hodnoty, která se nazývá minimum funkce.

Vlastnosti kvadratické funkce $y = ax^2$, je-li $a < 0$:

- Oborem hodnot funkce jsou všechna nekladná reálná čísla, tj. čísla z intervalu $(-\infty, 0\rangle$.
- Funkce je pro všechna nekladná reálná čísla rostoucí a pro všechna nezáporná čísla klesající.
- Pro $x = 0$ nabývá funkce své největší hodnoty, která se nazývá maximum funkce.

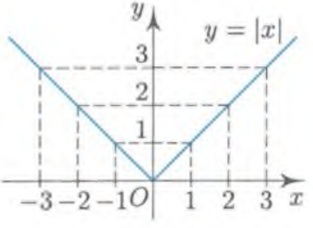
Každá z křivek, která je grafem funkce $y = ax^2$, kde a je libovolné reálné číslo různé od nuly, se nazývá **parabola**. Všimněme si, kde funkce nabývá maxima nebo minima. Tento bod grafu funkce se nazývá **vrchol paraboly**. Vrchol paraboly, která je grafem funkce $y = ax^2$, je v počátku soustavy souřadnic.

V 6. ročníku jsme se seznámili s pojmem **absolutní hodnota čísla**. Absolutní hodnotu reálného čísla jsme zavedli jako vzdálenost obrazu čísla od obrazu nuly na číselné ose. To znamená, že např. $|5| = 5$, $|-5| = 5$, $|0| = 0$. Absolutní hodnotu reálného čísla můžeme definovat takto:

$$\text{Je-li } x \geqq 0, \quad \text{pak } |x| = x,$$
$$\text{je-li } x < 0, \quad \text{pak } |x| = -x.$$

5 Sestrojte graf funkce $f\colon y = |x|$, $x \in \mathsf{R}$.

Řešení



Sestavíme tabulku pro několik zvolených hodnot proměnné x:

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	3	2	1	0	1	2	3

Z grafu funkce $y = |x|$ můžeme vyčíst některé její vlastnosti:
- Oborem hodnot funkce jsou všechna nezáporná reálná čísla, tj. čísla z intervalu $\langle 0, +\infty)$.
- Funkce je rostoucí v intervalu $\langle 0, +\infty)$ a klesající v intervalu $(-\infty, 0\rangle$.
- Funkce nabývá nejmenší hodnoty pro $x = 0$.

CVIČENÍ

1. Načrtněte grafy funkcí (využijte středovou souměrnost):

a) $y = \dfrac{3}{x}$ b) $y = -\dfrac{3}{x}$

2. V téže soustavě souřadnic načrtněte grafy funkcí:

a) $y = 1{,}5x^2$ b) $y = -1{,}5x^2$

Ve kterém shodném zobrazení jsou si uvedené grafy vzorem a obrazem?

3. Ve stejné soustavě souřadnic načrtněte grafy funkcí $f\colon y = x^2$ a $g\colon y = x^2 + 1$. Než začnete sestrojovat graf funkce g, porovnejte hodnoty funkcí f a g a odvoďte, jak lze k sestrojení grafu funkce g využít graf funkce f.

4. Načrtněte graf a určete obor hodnot funkce $y = |2x|$. Určete intervaly, ve kterých je tato funkce rostoucí a ve kterých je klesající.

5. V téže soustavě souřadnic načrtněte grafy funkcí $f\colon y = |x|$ a $g\colon y = |x| - 1$. Postupujte podobně jako ve cvičení 3. Určete obor hodnot funkce g a interval, v němž funkce g nabývá záporných hodnot.

6. Zjistěte, které z bodů $[0,-2]$, $[2,8]$, $[2,-8]$, $[-0{,}5;-1]$, $[0{,}5;-0{,}5]$ leží na grafu funkce $y = -2x^2$.

7. Zjistěte, které z bodů $[2,2]$, $[4,0]$, $[-1,-4]$, $[0{,}5;2]$, $[0{,}4;-10]$, $[0{,}4;10]$ leží na grafu funkce $y = \dfrac{4}{x}$.

8. Graf funkce $y = \dfrac{k}{x}$ prochází bodem $[6;-0{,}25]$. Vypočítejte konstantu k.

9. Zapište funkci, která udává závislost obsahu kruhu na jeho průměru, jestliže průměr kruhu je nejvýše 4 cm.

10. Vzdálenost míst A a B je 480 km. Předpokládejme, že auto pojede z A do B stálou rychlostí. Najděte funkci, která udává závislost doby jízdy auta z A do B na jeho rychlosti, jestliže nejmenší možná rychlost jízdy je 40 km/h a největší možná rychlost je 80 km/h. Načrtněte také graf této funkce.

1.5 Užití funkcí při řešení úloh z praxe

1 Petr jel na kole na chalupu ke svému kamarádovi Pavlovi. Když byl 50 km od chalupy, vyšel mu Pavel naproti. Petr jel stálou rychlostí 15 km/h, Pavel šel stálou rychlostí 5 km/h.

a) Zapište rovnici funkce, která udává, jak závisí vzdálenost Pavla od chalupy na době jeho chůze.

b) Zapište rovnici funkce, která udává, jak závisí vzdálenost Petra od chalupy na době jeho jízdy.

c) Zjistěte početně i graficky, za kolik hodin a v jaké vzdálenosti od chalupy se setkají.

Řešení

Budeme pracovat pouze s číselnými hodnotami veličin, přitom čas bude vyjádřen v hodinách, vzdálenost v kilometrech a rychlost v kilometrech za hodinu. Čas začneme měřit od okamžiku, kdy vyšel Pavel Petrovi naproti. Tento čas, který označíme t, je doba chůze Pavla i doba jízdy Petra. Vzdálenosti Petra (Pavla) od chalupy označíme d_1 (d_2).

a) V okamžiku, kdy začínáme měřit čas, Pavel vychází z chalupy, jeho vzdálenost od chalupy je 0 km. Za každou hodinu ujde 5 km. Hledaná funkce je tedy přímá úměrnost s koeficientem $a = 5$. Rovnice této funkce je

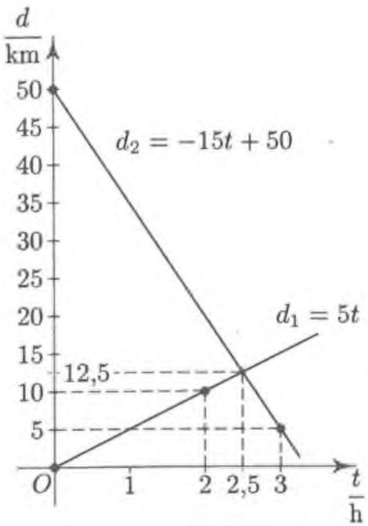
$$d_1 = 5t.$$

b) V okamžiku, kdy začínáme měřit čas, je vzdálenost Petra od chalupy 50 km. Za každou hodinu ujede 15 km a o tuto hodnotu se jeho vzdálenost od chalupy zmenší. Jedná se tedy o lineární funkci, kde $a = -15$, $b = 50$. Rovnice této funkce je

$$d_2 = -15t + 50.$$

c) *Grafické řešení*

Sestrojíme grafy obou funkcí v téže soustavě souřadnic. V obou případech stačí určit dva body grafu funkce, jelikož jde o funkce lineární.



t	0	2
d_1	0	10

t	0	3
d_2	50	5

Hodnoty obou funkcí se rovnají pro $t = 2{,}5$. Přitom platí $d_1(2{,}5) = d_2(2{,}5) = 12{,}5$.

Početní řešení

V okamžiku setkání je vzdálenost obou kamarádů od chalupy stejná, platí tedy $d_1 = d_2$. Řešíme rovnici:

$$5t = -15t + 50$$
$$20t = 50$$
$$t = 2{,}5$$

Dosadíme $t = 2{,}5$ např. do rovnice $d_1 = 5t$ (můžeme také dosadit do $d_2 = -15t + 50$) a dostaneme:

$$d_1 = 5 \cdot 2{,}5$$
$$d_1 = 12{,}5$$

Zkouška

Petr ujel za 2,5 hodiny vzdálenost $(2{,}5 \cdot 15)$ km = 37,5 km. Pavel ušel za stejnou dobu vzdálenost $(2{,}5 \cdot 5)$ km = 12,5 km. Součet těchto vzdáleností je 50 km, což odpovídá zadání úlohy.

Kamarádi se setkají za 2,5 hodiny ve vzdálenosti 12,5 km od chalupy.

2 Alena Dvořáčková ze Zlína se bude vdávat. Její otec uvažuje, zda má víno na svatbu koupit v místní prodejně, nebo pro ně zajet do vinných sklepů ve Strážnici. V místní prodejně stojí 1 litr vína 38 Kč. Ve Strážnici může 1 litr stejného druhu vína zakoupit za 29 Kč. Nakoupí-li víno ve Zlíně, zaplatí za dopravu pouze 20 Kč. Pojede-li pro víno do Strážnice, pak za dopravu zaplatí 200 Kč. Zjistěte, při jakém množství vína je pro pana Dvořáčka finančně výhodnější nákup ve Zlíně a při jakém množství je výhodnější zajet do Strážnice. Řešte graficky.

Řešení

Vyjádříme závislost finančních nákladů y (v Kč) na počtu x zakoupených litrů vína pro obě uvedené možnosti:

nákup ve Zlíně — funkce z: $y = 38x + 20$

nákup ve Strážnici — funkce s: $y = 29x + 200$

K určení grafu každé uvedené funkce stačí znát dva body.

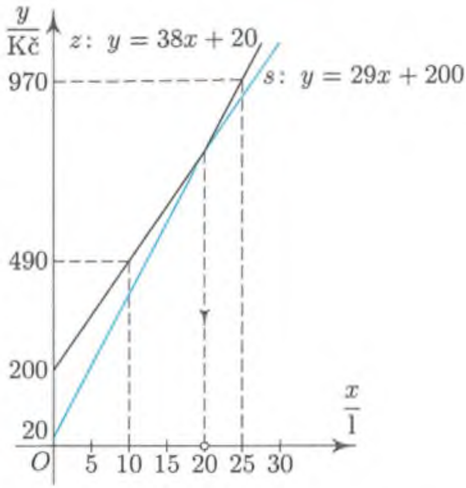
z:

x	0	25
y	20	970

s:

x	0	10
y	200	490

Grafy obou funkcí sestrojíme v téže soustavě souřadnic.



Na obrázku vidíme, že hodnoty funkce z jsou menší než hodnoty funkce s pro $x < 20$, hodnoty funkcí se navzájem rovnají pro $x = 20$ a pro $x > 20$ jsou hodnoty funkce z větší než hodnoty funkce s.
Chce-li pan Dvořáček koupit méně než 20 litrů vína, je pro něj finančně výhodnější nákup ve Zlíně. Při nákupu 20 litrů vína jsou finanční náklady v obou případech stejné. Jestliže chce koupit více než 20 litrů vína, pak je finančně výhodnější přivézt víno ze Strážnice.

CVIČENÍ

1. V dílně je 8 stejně výkonných tkalcovských stavů. Na dvou stavech by byla určitá zakázka hotova za 12 dní.
   a) Najděte funkci f, která udává, jak závisí počet dní, za které bude zakázka hotova, na počtu tkalcovských stavů.
   b) Načrtněte graf funkce f.
   c) Z grafu funkce f určete, kolik stavů je zapotřebí k tomu, aby zakázka byla hotova za 4 dny. Správnost výsledku ověřte početně.

2. Sestrojte graf závislosti elektrického příkonu P (ve wattech) na elektrickém proudu I (v miliampérech) pro spotřebič o elektrickém odporu $R = 0{,}5\,\mathrm{k}\Omega$. Spotřebičem může procházet největší proud $I_{\max} = 100\,\mathrm{mA}$. Z tohoto grafu určete:
   a) elektrický příkon, prochází-li spotřebičem proud 80 mA
   b) při jakém elektrickém proudu je příkon spotřebiče 1,8 W

3. Z podniku vyjelo nákladní auto a jelo stálou rychlostí 52 km/h. Za 45 minut bylo za ním vysláno osobní auto, které jelo stálou rychlostí 78 km/h. Za jak dlouho a v jaké vzdálenosti od podniku osobní auto dohoní nákladní auto? Řešte početně i graficky.

4. Horákovi bydlí v bytě, v němž jsou instalovány vodoměry, které měří objem spotřebované studené a teplé vody. Pan Horák odečetl stavy spotřebované vody na obou vodoměrech ve dnech 1. dubna a 12. dubna.

Datum	1. 4.	12. 4.
Studená voda	60,525 m^3	63,045 m^3
Teplá voda	46,832 m^3	48,560 m^3

Předpokládejme, že denní spotřeba studené a teplé vody je stálá.

a) Napište rovnici funkce, která udává, jak se mění stav na vodoměru pro studenou vodu v závislosti na čase.

b) Napište rovnici funkce, která udává, jak se mění stav na vodoměru pro teplou vodu v závislosti na čase.

c) Z příslušné rovnice funkce vypočtěte stav na vodoměru pro studenou vodu 30. dubna.

d) Z příslušné rovnice funkce určete, který den bude na vodoměru teplé vody hodnota 50 m^3.

5. Při výměně peněz v Portugalsku se zpravidla setkáte s tím, že zaplatíte stálý poplatek, který nezávisí na tom, jak velkou částku chcete směnit. Je zřejmé, že v takovém případě není výhodné měnit malé částky. V některých bankách místo stálého poplatku zaplatíte 3 % z té částky, kterou směňujete. Portugalské escudos (PTE) můžeme např. směnit za americké dolary (USD), přičemž směna se provádí jen za celé dolary a nejmenší směnitelná částka je 10 USD. Předpokládejme, že kurz je 1 USD = 190 PTE a stálý poplatek činí 3 USD. Určete rovnici a definiční obor funkce, která udává, kolik escudos získáme za americké dolary, zvolíme-li banku požadující

a) poplatek ve výši 3 % ze směňované částky,

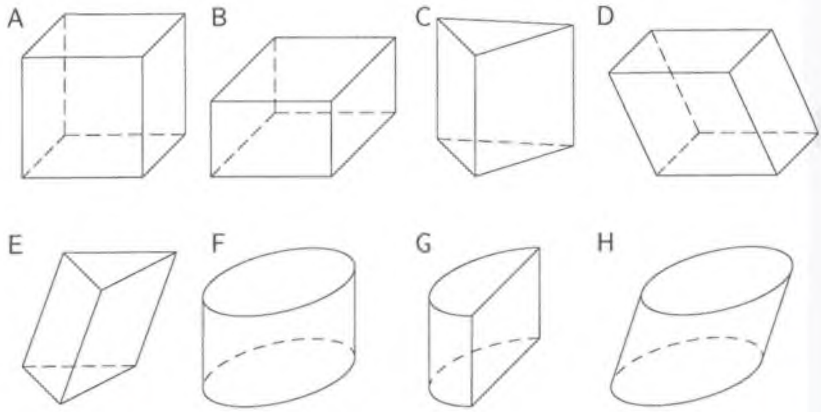
b) stálý poplatek.

c) Určete, při jakém nejmenším počtu dolarů je výhodnější směna v bance, která vyžaduje stálý poplatek.

2 POVRCHY A OBJEMY TĚLES

2.1 Opakování

1 Pojmenujte tělesa znázorněná na obrázku.



Doplňte Petrovu tabulku.

	Těleso	Objem
A		$V_A = a^3$
B	kvádr	
C		$V_C = S_p \cdot v$
D	kosý čtyřboký hranol	
E		$V_E = S_p \cdot v$
F		
G	polovina rotačního válce	$V_G = \frac{1}{2} \pi r^2 \cdot v$
H	kosý válec	

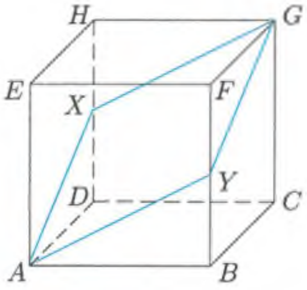
Popište tvar a vzájemnou polohu obou podstav každého ze zobrazených těles. Co je pro ně charakteristické?

Lenka po doplnění tabulky poznamenala:
„Místo všech vzorců pro výpočet objemu těchto těles si mohu pamatovat jen jeden: $V = S_p \cdot v$.“
Je to pravda?

2 Krychli K $= ABCDEFGH$ rozdělte „jedním řezem“ na dvě části téhož objemu:

a) na dva shodné kvádry

b) na dva shodné trojboké hranoly



Přesvědčte se, že rovněž tělesa $ABCDYGX$ a $GHEFXAY$, kde body X a Y půlí úsečky DH a BF, jsou shodná.

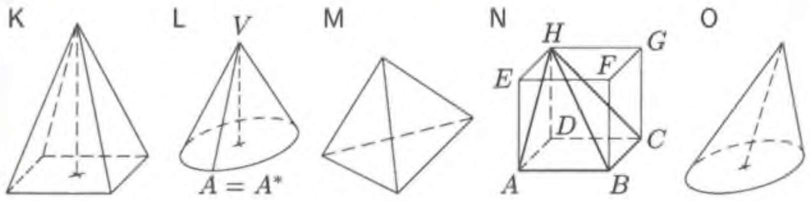
Návod k řešení

Ověřte, že střed krychle je současně středem souměrnosti dvojice těles $ABCDYGX$ a $GHEFXAY$.
Sestrojte síť a model tělesa $ABCDYGX$ pro $|AB| = 8\,\text{cm}$. Sestavte z dvojice těchto modelů různá tělesa. Jejich objemy budou rovny objemu krychle K, jejich povrchy však mohou být různé. Vyhledejte mezi nimi těleso, které není krychlí, ale jehož povrch je roven povrchu krychle K.

Je-li těleso T složeno z několika těles, je jeho objem roven součtu objemů těchto těles.

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + \ldots + V_n$$

3 Pojmenujte tělesa znázorněná na obrázku.



a) Sestrojte síť rotačního kužele L, je-li poloměr jeho podstavy $r = 2\,\text{cm}$ a výška $v = 5\,\text{cm}$.

b) Kosý jehlan N je vyříznut z krychle, jejíž hrana má délku 6 cm. Sestrojte síť tohoto jehlanu a společně se spolužáky sestavte tři jeho modely. Přesvědčte se, že z nich lze složit krychli.

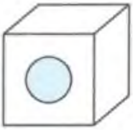
Návod k řešení

a) Síť rotačního kužele L se skládá z kruhu $P(S, 2\,\mathrm{cm})$ a kruhové výseče AVA^*. Poloměr AV výseče určete konstrukcí či výpočtem z pravoúhlého trojúhelníku s odvěsnami $r = 2\,\mathrm{cm}$, $v = 5\,\mathrm{cm}$. Délka oblouku AA^* je rovna délce kružnice $p(S, 2\,\mathrm{cm})$, tj. délce podstavné hrany kužele L.

b) Podstavou jehlanu N je čtverec $ABCD$. Trojúhelníky ADH a CDH jsou pravoúhlé s pravým úhlem při vrcholu D. Rovněž trojúhelníky BAH a BCH jsou pravoúhlé. Přímka AB (BC) je kolmá k rovině ADH (CDH), je tedy kolmá ke všem přímkám této roviny. Můžete se o tom přesvědčit výpočtem délek stran těchto trojúhelníků. Protože ze tří shodných jehlanů N lze složit krychli, je objem jehlanu N roven třetině objemu této krychle.

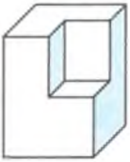
CVIČENÍ

1. Porovnejte navzájem objemy a povrchy těles A a B, která vznikla ze shodných krychlí. V případě tělesa A byl z krychle vyříznut válec s průměrem podstavy $d = \frac{a}{2}$ a výškou $v = a$, těleso B vzniklo vyříznutím „čtvrtválce" s poloměrem podstavy $r = \frac{a}{2}$, kde a je délka hrany krychlí.

A  B 

2. Z kvádru $K = ABCDEFGH$ byl vyříznut kvádr $K' = KLMNOPQR$ polovičních rozměrů dvěma způsoby (tělesa A a B). Vyjádřete

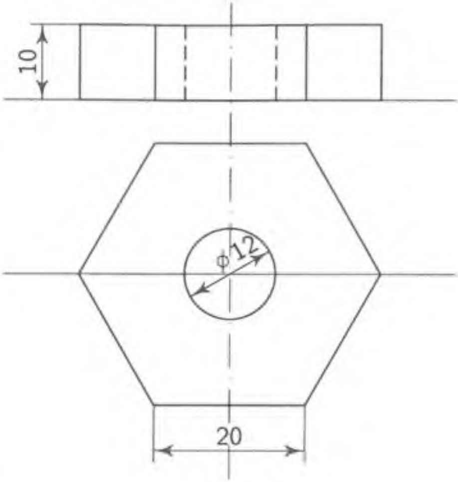
a) objem a povrch kvádrů K a K′,
b) objem a povrch tělesa A,
c) objem a povrch tělesa B,
d) poměr objemů těles A a B,
e) poměr povrchů těles A a B.

A  B 

3. Kalibrovaná nádoba tvaru válce o vnitřním průměru 5 cm je opatřena stupnicí odměřující objem tekutiny po $10\,\mathrm{cm}^3$.

a) Jak vysoko ode dna je značka pro 1 l?
b) Jaká je vzdálenost mezi sousedními značkami stupnice?

4. Vypočtěte objem a hmotnost matice, jejíž rozměry v mm jsou uvedeny na obrázku. Matice je vyrobena z mosazi.

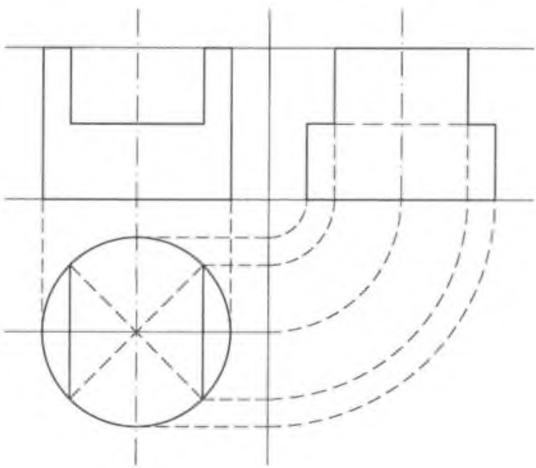


5. Určete výšku pravidelného osmibokého jehlanu, jehož stěny tvoří trojúhelníky se stranami délek 5 cm, 5 cm, 3 cm:

a) konstrukcí b) výpočtem

Jen pro odvážné!

6. Z kovového válce o průměru podstavy 5 cm a výšce 4 cm byla vyříznuta součástka, jejíž půdorys, nárys i bokorys je uveden na obrázku v měřítku 1 : 2. Vypočtěte její a) objem, b) povrch.



2.2 Jehlany a komolé jehlany

1 Krychli $\mathsf{K} = ABCDEFGH$ se středem S rozdělte na šest shodných jehlanů J, jejichž podstavami jsou jednotlivé stěny krychle a vrcholem je vždy bod S. Určete objem těchto jehlanů.

Řešení

Objem krychle K . . . . . $V_{\mathsf{K}} = a^3$.

Objem jehlanu J . . . . . $V_{\mathsf{J}} = \frac{1}{6}a^3$,

protože krychle K je ze šesti takových jehlanů složena.

Objem jehlanu závisí obdobně jako objem hranolu na obsahu jeho podstavy a na jeho výšce.
Podstavou jehlanu J je čtverec $ABCD$, její obsah $S_{\mathrm{p}} = a^2$.

Výška jehlanu J . . . . . . $v = \frac{a}{2}$.

Hranol H s podstavou $ABCD$ a výškou $v = \dfrac{a}{2}$ má objem $V_{\mathsf{H}} = \dfrac{1}{2}a^3$.

Jehlan J je částí hranolu H, objem jehlanu J je tedy zlomkem objemu hranolu H:

$$V_{\mathsf{J}} = * \cdot V_{\mathsf{H}}$$

Dosadíme:

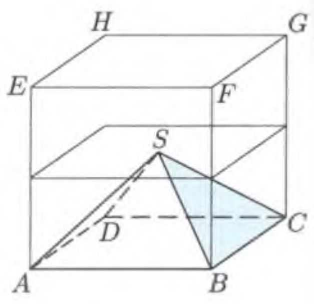
$$\frac{1}{6}a^3 = * \cdot \frac{1}{2}a^3$$

Odtud plyne:

$$* = \frac{1}{3}$$

Dostali jsme tedy vztah:

$$V_{\mathsf{J}} = \frac{1}{3}V_{\mathsf{H}} = \frac{1}{3}S_{\mathrm{p}} \cdot v$$



V příkladu 3 předchozího článku jsme si ukázali, že objem jehlanu $ABCDG$ vyříznutého z krychle je roven jedné třetině objemu této krychle. Obsah podstavy tohoto jehlanu $S_{\mathrm{p}} = a^2$, výška $v = a$. I zde platilo:

$$V_{\mathsf{J}} = \frac{1}{3}S_{\mathrm{p}} \cdot v$$

Poznámka. Vzorec pro výpočet objemu jehlanu jsme řádně nedokázali, jen jsme uvedli příklady, které k němu vedou. K důkazu platnosti tohoto a většiny dalších vzorců, s nimiž se v této kapitole seznámíme, nemáme ještě dost matematických znalostí.

Fyzikálně můžeme vzorec pro výpočet objemu jehlanu ověřit jeho ponořením do kalibrované nádoby s vodou a určením objemu vody jím vytlačené. Je-li znám materiál, z něhož je těleso tvaru jehlanu vyrobeno, lze jeho objem zjistit také výpočtem z jeho hmotnosti.

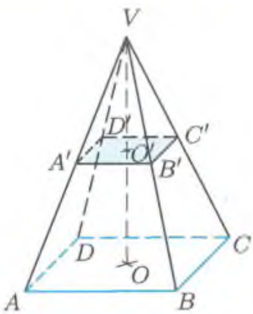
Objem jehlanu J je roven jedné třetině součinu obsahu jeho podstavy a výšky.

$$V_J = \frac{1}{3} S_p \cdot v$$

Povrch jehlanu J je roven součtu obsahů všech jeho stěn, tj. součtu obsahů jeho podstavy a pláště.

$$S_J = S_p + S_{pl}$$

2 Pravidelný čtyřboký jehlan J $= ABCDV$ ($|AB| = 4\,\text{cm}$, $v = 6\,\text{cm}$) na obrázku protíná rovina $\alpha' = A'B'C'D'$ rovnoběžná s rovinou $\alpha = ABCD$. Rovina α' dělí jehlan J na dvě tělesa: jehlan J$' = A'B'C'D'V$ podobný jehlanu $ABCDV$ a tzv. komolý jehlan K $=$ $= ABCDA'B'C'D'$. Určete délky všech hran a výšky obou těles, je-li bod A' středem úsečky AV.



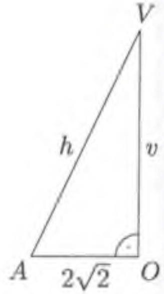
Všimněte si, že jehlany J a J$'$ jsou stejnolehlé. Středem stejnolehlosti je bod V.

Řešení

Roviny α, α' jsou rovnoběžné, $A'B' \parallel AB$, $B'C' \parallel BC$, $C'D' \parallel CD$, $D'A' \parallel DA$, podstavy $ABCD$ i $A'B'C'D'$ jsou čtverce. Úsečka $A'B'$ je střední příčkou trojúhelníku ABV, proto

$$|A'B'| = \frac{1}{2}|AB| = 2\,\text{cm}.$$

Obě tělesa mají stejnou výšku $v' = v^* = 3\,\mathrm{cm}$. Délku h hrany AV vypočteme pomocí pravoúhlého trojúhelníku AOV:



$$h^2 = v^2 + |AO|^2$$
$$h^2 = 6^2 + (2\sqrt{2})^2$$
$$h^2 = 36 + 4 \cdot 2$$
$$h = \sqrt{44}$$
$$h = \sqrt{44}\,\mathrm{cm} \doteq 6{,}6\,\mathrm{cm}$$

Odtud
$$|AA'| = |A'V| \doteq 3{,}3\,\mathrm{cm}.$$

Rozměry čtyřbokého jehlanu J':

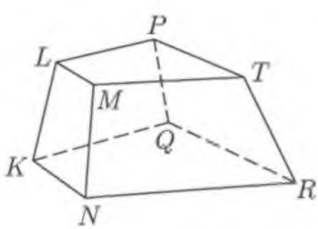
hrana čtvercové podstavy má délku 2 cm
hrany $A'V$, $B'V$, $C'V$ a $D'V$ mají délku asi 3,3 cm
výška v' jehlanu J' je rovna 3 cm

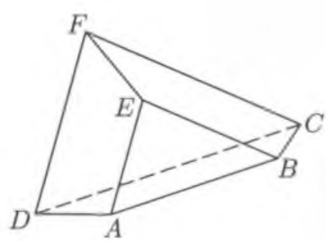
Rozměry komolého jehlanu K:

hrana podstavy $ABCD$ má délku 4 cm
hrana podstavy $A'B'C'D'$ má délku 2 cm
hrany AA', BB', CC', DD' mají délku asi 3,3 cm
výška $v^* = 3\,\mathrm{cm}$

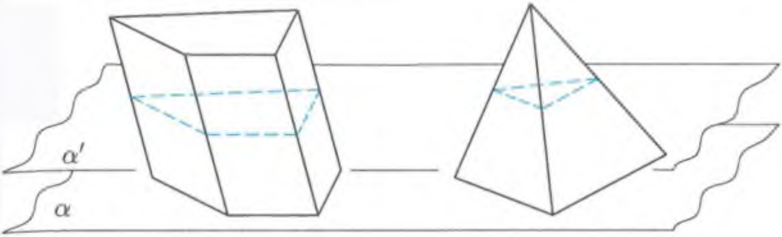
Komolý jehlan je těleso, které získáme z jehlanu, odřízneme-li jeho vrchol rovinou rovnoběžnou s rovinou podstavy.
Podstavy komolého jehlanu tvoří dvojice podobných n-úhelníků P_1 a P_2, které leží v rovnoběžných rovinách. Výška komolého jehlanu je rovna vzdálenosti rovin, v nichž podstavy leží. Plášť komolého jehlanu je tvořen n lichoběžníky.

3 Které n-úhelníky jsou podstavami zobrazených komolých jehlanů? Uveďte úplné názvy obou zobrazených těles.
Které stěny tvoří jejich pláště?





Na následujícím obrázku jsou zobrazeny dva mnohostěny: hranol H a jehlan J, jejichž podstavy leží v rovině α. Obě tělesa jsou proťata rovinou α' rovnoběžnou s rovinou α.



$\mathsf{H} = \mathsf{H}_1 \cup \mathsf{H}_2$

Hranol H je sjednocením hranolů H_1 a H_2.

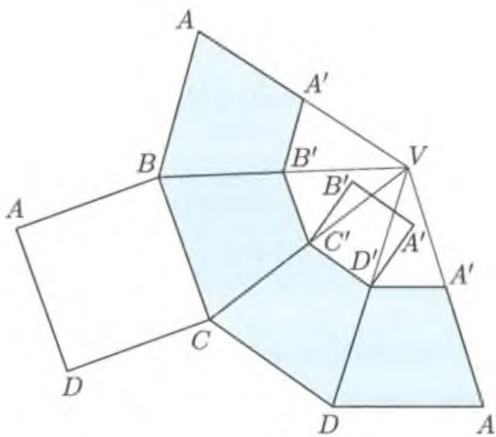
$\mathsf{J} = \mathsf{J}_1 \cup \mathsf{K}$

Jehlan J je sjednocením jehlanu J_1 a komolého jehlanu K.

4 Sestrojte síť komolého jehlanu K z příkladu 2.

Návod k řešení

Sestrojte nejprve síť jehlanu $\mathsf{J} = ABCDV$. Není to sice nutné, ale dospějete k řešení rychleji a výsledek je přesnější. Na obrázku vidíte rozvinutou síť komolého jehlanu K.



5 Vypočtěte objem komolého jehlanu K z příkladu 2.

Řešení

Jehlan K vznikl oddělením jehlanu J' od jehlanu $\mathsf{J} = ABCDV$. Jeho objem je tedy rozdílem objemů jehlanů J a J':

$$V_\mathsf{K} = V_\mathsf{J} - V_{\mathsf{J}'}$$

Objem jehlanu . . . $V = \frac{1}{3} \cdot S_\mathrm{p} \cdot v$

Jehlan J . . . . $V_\mathsf{J} = \frac{1}{3} \cdot 4^2 \cdot 6$

$V_\mathsf{J} = 32\,\mathrm{cm}^3$

Jehlan J' . . . . $V_{\mathsf{J}'} = \frac{1}{3} \cdot 2^2 \cdot 3$

$V_{\mathsf{J}'} = 4\,\mathrm{cm}^3$

Komolý jehlan K . . . $V_K = 32 - 4$

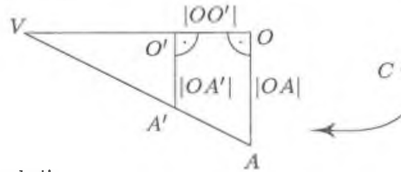
$$\underline{}$$
$$V_K = 28\,\text{cm}^3$$

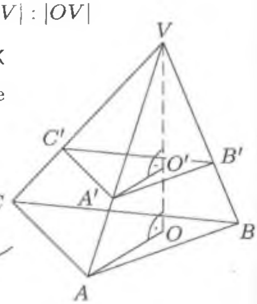
Objem komolého jehlanu K je $28\,\text{cm}^3$.

Neznáme-li výšku původního jehlanu J, z něhož byl komolý jehlan K oddělen, můžeme ji vypočítat nebo zkonstruovat. Jehlany J a J′ jsou podobné, proto pro poměr délek hran podstav i výšek platí (viz obrázek):

$$|A'B'| : |AB| = |B'C'| : |BC| = \ldots = |O'V| : |OV|$$

Je-li např. $|A'B'| = \frac{2}{3}|AB|$, je výška komolého jehlanu K jednou třetinou výšky jehlanu J. Výšku jehlanu J můžeme rychle zkonstruovat takto:





Zdůvodněte konstrukci!

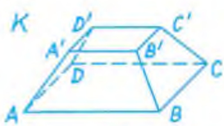
Z poměru podobnosti jehlanů J a J′ lze odvodit vzorec pro výpočet objemu komolého jehlanu.

Objem komolého jehlanu, který má výšku v a jehož podstavy mají obsahy S_1 a S_2, vypočítáme podle vzorce

$$V = \frac{1}{3}v \cdot (S_1 + \sqrt{S_1 \cdot S_2} + S_2).$$

6 Vypočtěte pomocí vzorce objem komolého jehlanu K z příkladu 2.

Lenka zapsala:



Čtverce: P_1, $a_1 = 4\,cm$

P_2, $a_2 = 2\,cm$

Výška: $v = 3\,cm$

Obsahy podstav:

$S_1 = 16\,cm^2$

$S_2 = 4\,cm^2$

Objem komolého jehlanu K:

$V = \frac{1}{3} v \cdot (S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)$

Dosadím:

$V = \frac{1}{3} \cdot 3 (16 + \sqrt{16 \cdot 4} + 4)$

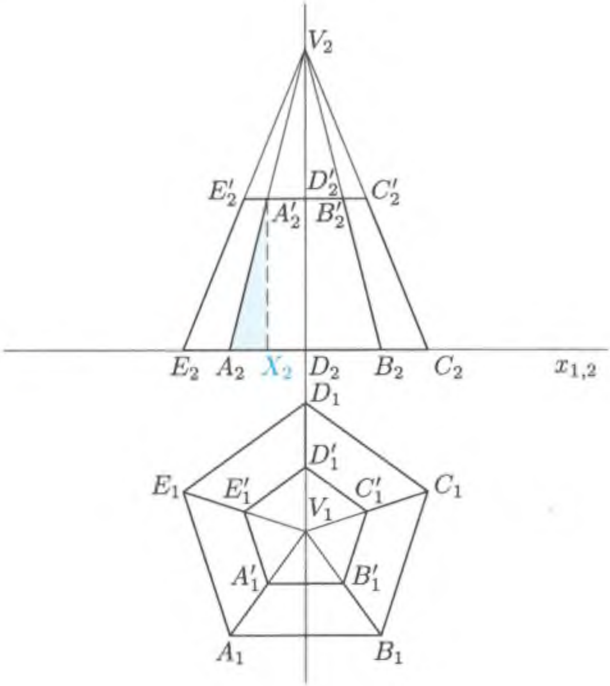
$V = 16 + 8 + 4$

$V = 28\,cm^3$

Komolý jehlan K má objem $28\,cm^3$.

Výsledek Lenky souhlasí s výsledkem příkladu 5.

7 Narýsujte síť komolého jehlanu, jehož půdorys a nárys v měřítku 1 : 2 vidíte na obrázku.



Návod k řešení

Strany pravidelných pětiúhelníků a výšku v odměřte. Hrany AA', BB', CC', DD', EE' jsou si rovny. Skutečnou velikost např. úsečky AA' sestrojte pomocí pravoúhlého trojúhelníku AXA', kde bod X je půdorysem bodu A'. Délku odvěsny AX odměřte v půdorysu, délku odvěsny XA' odměřte v nárysu.

CVIČENÍ

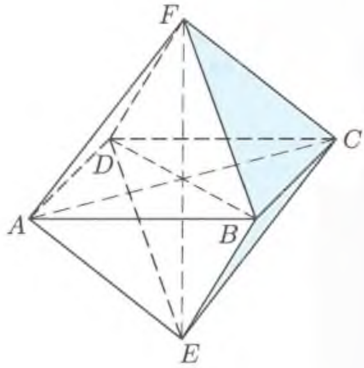
1. Z krychle K je vyříznut pravidelný čtyřboký jehlan J, jehož podstavu tvoří stěna krychle K a jehož vrchol V je středem protilehlé stěny této krychle. Vypočtěte:

   a) objem jehlanu J b) povrch jehlanu J

2. Podstavou jehlanu J je obdélník s rozměry 8 cm a 6 cm. Jeho výška je rovna délce úhlopříčky podstavy. Vypočtěte objem jehlanu J.

3. Objem pravidelného šestibokého jehlanu, jehož výška $v = 6\,\mathrm{cm}$, je $240\,\mathrm{cm}^3$. Vypočtěte a) obsah jeho podstavy, b) délku hran podstavy.

4. Všechny stěny pravidelného osmistěnu jsou shodné rovnostranné trojúhelníky. Hrany osmistěnu $ABCDEF$ mají délku $d = 6\,\mathrm{cm}$. Vypočtěte a) povrch, b) objem tohoto osmistěnu.



5. Vypočtěte objem vzduchu v m^3 uvnitř stanu typu „jehlan", který je vztyčen nad obdélníkovým půdorysem s rozměry 2 m a 2,5 m a má výšku $v = 2{,}5\,\mathrm{m}$.

6. Vypočtěte objem a povrch trojbokého jehlanu $BGEF$ odděleného z krychle $ABCDEFGH$, je-li $|AB| = 10\,\mathrm{cm}$.

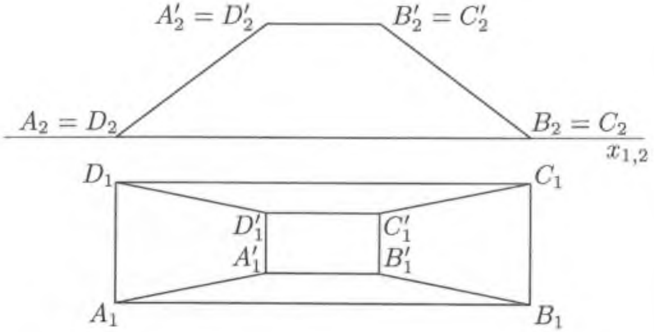
7. Určete hmotnost těžítka tvaru pravidelného čtyřbokého komolého jehlanu vysokého 9 cm, je-li obvod jeho dolní podstavy 24 cm a obvod horní podstavy 16 cm. (Hustota materiálu $\varrho = 2{,}7\,\mathrm{g/cm}^3$. Z čeho může být těžítko vyrobeno?)

8. Sklenka tvaru pravidelného šestibokého komolého jehlanu je vysoká 12 cm. Obsah její dolní podstavy je $25\,\mathrm{cm}^2$, obsah horní podstavy $36\,\mathrm{cm}^2$. (Objem „skla" zanedbáme, jde o vnitřní rozměry.)

a) Kolik cm^3 nápoje obsahuje, je-li dolita až po okraj?

b) Kolik cm^3 nápoje zůstane ve sklenici, sníží-li se jeho hladina o 6 cm?

9. Je těleso, jehož půdorys a nárys vidíte na obrázku, komolým jehlanem?

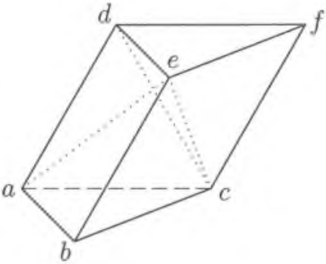


10. Rozhodněte, které dvojice n-úhelníků z tabulky mohou být podstavami n-bokých komolých jehlanů.

Dvojice n-úhelníků A, B		Délky stran n-úhelníků (cm) A			B		
1	trojúhelníky	3	4	5	6	8	10
2	trojúhelníky	7	8	9	3,5	4	4,5
3	trojúhelníky	9	11	13	10	12	14
4	čtverce	6	6		$\sqrt{7}$	$\sqrt{7}$	
5	čtverce	9,8	9,8		8,9	8,9	
6	obdélníky	4	6		5	7,5	
7	obdélníky	3,7	1		7,5	2	
8	trojúhelníky	9	12	15	6	8	10

Pohled do historie

11. V učebnici geometrie, kterou před sto lety napsal Alois Strnad, ředitel c. k. reálného gymnázia v Kutné Hoře, je uvedeno toto: „Hranol trojboký lze rozložiti ve tři jehlany obsahem stejné.
Důkaz: Hranol trojboký *abcdef* lze dvěma řezy rozložiti v jehlany $J_1 = abce$, $J_2 = cdef$, $J_3 = acde$. Jehlany $\left\{\begin{matrix} J_1 \text{ a } J_2 \\ J_2 \text{ a } J_3 \end{matrix}\right\}$ mají stejné základny $\left\{\begin{matrix} \triangle abe \cong \triangle ade \\ \triangle acd \cong \triangle cdf \end{matrix}\right\}$ v jedné rovině a společné témě $\left\{\begin{matrix} c \\ e \end{matrix}\right\}$, proto $\left\{\begin{matrix} J_1 = J_2 \\ J_2 = J_3 \end{matrix}\right\}$. Z toho patrno, že $J_1 = J_2 = J_3$. Tuto větu objevil řecký astronom Eudoxus, současník Platonův.“



Všimněte si úsporného zápisu důkazu. Které termíny jsou zde použity jinak než v naší učebnici?
Zapište větu i její důkaz jazykem, který užíváme v učebnici.

2.3 Kužele a komolé kužele

Zopakujte si!

1 Odhadněte objem kužele K, jehož podstavou je kruh s poloměrem $r = 10\,\text{cm}$ a výška $v = 9\,\text{dm}$.

Lenka si vzpomněla na odhady obsahu kruhu a uvažovala takto: „Objem kužele K bude větší než objem jehlanu V, který je kuželi vepsán, ale menší než objem jehlanu O, který je mu opsán."
Do sešitu si zapsala:

$|WS| = 9\,\text{dm} = 90\,\text{cm}$

$r = 10\,\text{cm}$

Zvolím čtyřboké jehlany V, O.

Jehlan vepsaný K … ABCDW

Jehlan opsaný K … A'B'C'D'W

Objemy: $V_V < V_K < V_O$

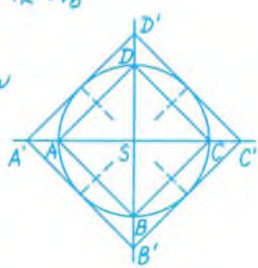
Podstavy:

$|A'B'| = 2r = 20\,\text{cm}$

$S_p' = 400\,\text{cm}^2$

$|AB| = 10\sqrt{2}\,\text{cm}$

$S_p = 200\,\text{cm}^2$



Objem jehlanu: $V = \frac{1}{3} S_p \cdot v$

$V_V = \frac{1}{3} \cdot 200 \cdot 90 = 6\,000$

$V_V = 6\,000\,\text{cm}^3 = 6\,\text{dm}^3$

$V_O = \frac{1}{3} \cdot 400 \cdot 90 = 12\,000$

$V_O = 12\,000\,\text{cm}^3 = 12\,\text{dm}^3$

Pro objem kužele K platí:

$$6\,\text{dm}^3 < V_K < 12\,\text{dm}^3$$

Odhad, který Lenka získala, je příliš hrubý. Kdyby postupně volila vepsané a opsané pravidelné jehlany se vzrůstajícím počtem stěn, objemy vepsaných jehlanů by vzrůstaly a objemy jehlanů opsaných kuželi K by klesaly. Odhad objemu kužele K by byl stále přesnější.
Kužel můžeme pro odvození dalších vzorců považovat za jehlan s nesmírně velikým počtem stěn. (Není to přesné, ale lépe si zapamatujeme vzorce, na jejichž odvození ještě nestačíme.) Objem kužele K tedy vypočteme stejně jako objem jehlanu podle vzorce

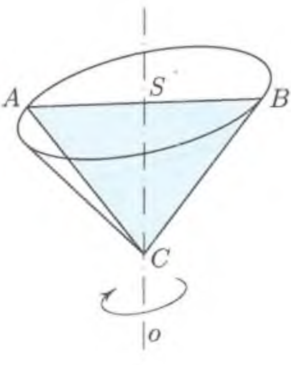
$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{\mathrm{p}} \cdot v,$$

kde S_{p} je obsah podstavy kužele K a v jeho výška. Protože obsah podstavy kužele $S_{\mathrm{p}} = \pi r^2$, můžeme vzorec upravit:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 v$$

(V tomto tvaru najdete vzorec pro výpočet objemu kužele ve většině tabulek.)

2 Vypočtěte objem kužele, který vznikne rotací rovnoramenného trojúhelníku ABC podle jeho osy souměrnosti, je-li $a = b = 5\,\mathrm{dm}$, $c = 6\,\mathrm{dm}$.



Řešení

Rotací trojúhelníku ABC kolem v_c vznikne rotační kužel R s vrcholem C.

podstava . . . . kruh $\mathrm{K}(S, 3\,\mathrm{dm})$
obsah podstavy . . . . $S_{\mathrm{p}} = 9\pi\,\mathrm{dm}^2$
strana s . . . . $s = 5\,\mathrm{dm}$
výška v . . . . $v^2 = s^2 - r^2 = 25 - 9 = 16$
$v = \sqrt{16} = 4$

$v = 4\,\mathrm{dm}$

objem kužele . . . . . $V = \frac{1}{3} \cdot S_{\mathrm{p}} \cdot v$

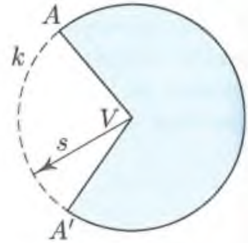
Dosadíme: $V_{\mathrm{R}} = \frac{1}{3} \cdot 9\pi \cdot 4 = 12\pi$

$V_{\mathrm{R}} = 12\pi\,\mathrm{dm}^3 \doteq 37{,}7\,\mathrm{dm}^3$

Objem rotačního kužele R je přibližně $37{,}7\,\mathrm{dm}^3$.

3 Do rotačního válce V, jehož výška se rovná poloměru podstavy, je vepsán rotační kužel R téže podstavy i výšky. Vypočtěte poměr obsahů plášťů obou těles.

Řešení



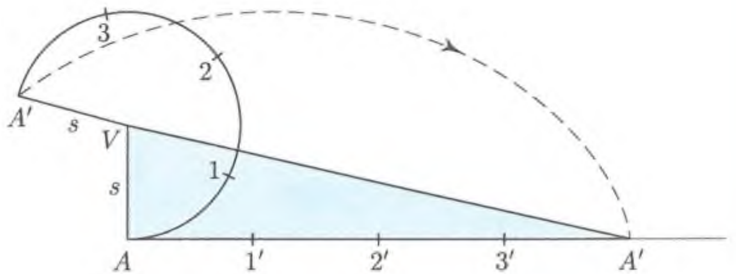
obsah pláště válce V . . . . . $S_{\text{pl}} = 2\pi r v$

protože $r = v$, je $S_{\text{pl}} = 2\pi r^2$

Plášť kužele R rozvineme do výseče kruhu K(V, s), kde s je strana kužele R. Protože $r = v$, je $s = r\sqrt{2}$. Délka většího oblouku AA' kružnice $k(V, s)$ je rovna obvodu podstavy kužele R, tedy

$$|\widehat{AA'}| = 2\pi r.$$

Obsah kruhové výseče AVA' je roven obsahu pláště kužele R. Protože obsah celého kruhu K(V, s) je roven πs^2, tj. obsahu trojúhelníku se stranou $2\pi s$ a výškou s, je obsah výseče AVA' roven obsahu trojúhelníku se stranou $2\pi r$ a výškou s (viz obrázek).



Pro výpočet obsahu pláště můžeme tedy použít vzorec

$$S_{\text{pl}} = \frac{1}{2} \cdot (2\pi r) \cdot s = \pi r s.$$

Dosadíme do vzorce hodnoty pro kužel R:

$$S_{\text{pl}} = \frac{1}{2} \cdot (2\pi r) \cdot r\sqrt{2} = \pi r^2 \sqrt{2}$$

Poměr obsahů plášťů válce V a kužele R:

$$2\pi r^2 : \pi r^2 \sqrt{2} = \sqrt{2} : 1$$

Poměr obsahů plášťů válce V a kužele R je $\sqrt{2} : 1$.

Objem kužele s výškou v je roven jedné třetině součinu obsahu jeho podstavy a výšky v:

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{\mathrm{p}} \cdot v = \frac{1}{3}\pi r^2 v$$

Obsah pláště rotačního kužele se stranou s, jehož podstavou je kruh s poloměrem r, vypočteme podle vzorce

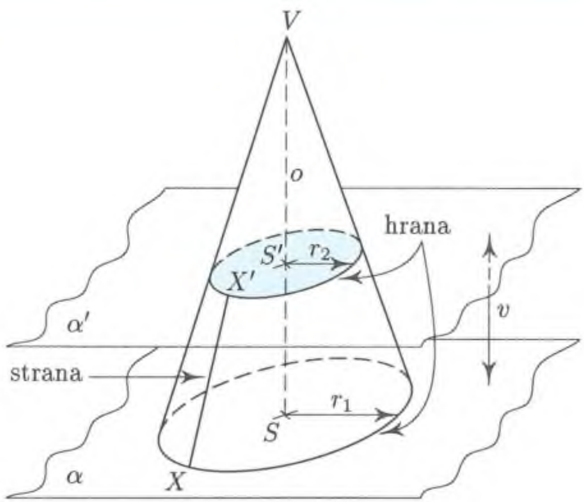
$$S_{\mathrm{pl}} = \frac{1}{2} \cdot 2\pi r \cdot s = \pi r s.$$

Povrch kužele K je roven součtu obsahu jeho podstavy a obsahu pláště.

$$S_{\mathsf{K}} = S_{\mathrm{p}} + S_{\mathrm{pl}}$$

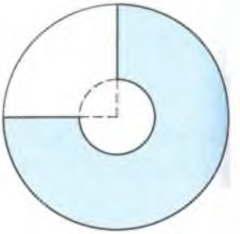
Ukázali jsme, jak z jehlanu oddělíme komolý jehlan. Obdobně získáme z kužele komolý kužel.

Protneme-li kužel rovinou rovnoběžnou s rovinou jeho podstavy, získáme dvě nová tělesa: menší kužel podobný původnímu kuželi a komolý kužel. Komolý kužel je omezen dvěma kruhovými podstavami nestejné velikosti, které leží v rovnoběžných rovinách, a pláštěm, jenž je částí pláště původního kužele.

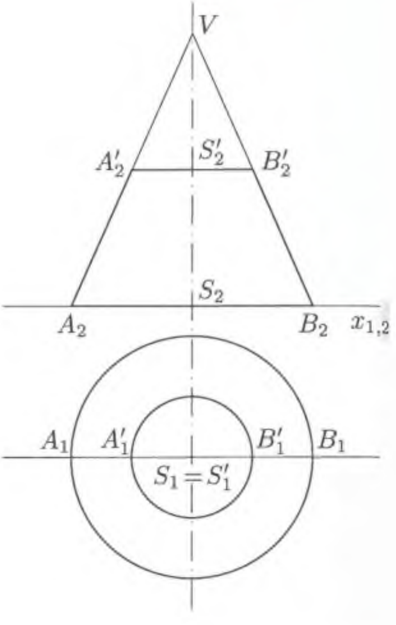


Výška komolého kužele je rovna vzdálenosti rovin, v nichž leží jeho podstavy.
Spojnice středů obou podstav komolého kužele je jeho osa.
Osa rotačního komolého kužele je kolmá k rovinám podstav.
Všechny strany rotačního komolého kužele mají stejnou délku.

4 Z papíru tvaru části mezikruží (viz obrázek) vymodelujte plášť rotačního komolého kužele.



5 Komolý kužel R, jehož půdorys a nárys v měřítku 1 : 2 vidíte na obrázku, vznikl z rotačního kužele K, který byl proťat rovinou procházející středem S' úsečky SV. Porovnejte velikosti obou jeho podstav. Sestrojte jeho síť.



Návod k řešení

Postup je obdobný ke konstrukci sítě komolého jehlanu. Rozviňte nejprve plášť rotačního kužele K. Střed menší podstavy rotačního komolého kužele R je bod S'.

Stejně jako objem komolého jehlanu můžeme vypočítat i objem komolého kužele.

Objem komolého kužele počítáme podle vzorce

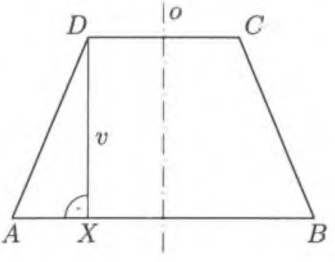
$$V = \frac{1}{3}v(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2),$$

kde v je jeho výška a S_1 a S_2 jsou obsahy jeho podstav.

Jsou-li poloměry kruhových podstav r_1 a r_2, můžeme za S_1 a S_2 dosadit obsahy kruhů. Po vytknutí π dostaneme

$$V = \frac{1}{3}\pi v(r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2).$$

6 Vypočtěte objem tělesa, které vznikne rotací rovnoramenného lichoběžníku $ABCD$ kolem jeho osy souměrnosti, je-li $|AD| = |BC| = 13\,\text{cm}$, $|AB| = 20\,\text{cm}$, $|CD| = 10\,\text{cm}$.



Řešení

Rotací lichoběžníku získáme rotační komolý kužel. Jeho objem vypočteme podle vzorce

$$V = \frac{1}{3}v(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2).$$

Výška v (pravoúhlý $\triangle AXD$ — viz obrázek): $13^2 - 5^2 = v^2$, $v = 12\,\text{cm}$
Podstavy: $\mathsf{P}_1(O_1, 10\,\text{cm})$, $S_1 = 100\pi\,\text{cm}^2$, $\mathsf{P}_2(O_2, 5\,\text{cm})$, $S_2 = 25\pi\,\text{cm}^2$
$\sqrt{S_1 S_2} = \sqrt{100\pi \cdot 25\pi}\,\text{cm}^2 = 50\pi\,\text{cm}^2$.

Vypočítané údaje dosadíme do vzorce

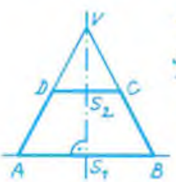
$$V = \frac{1}{3} \cdot 12 \cdot (100\pi + 50\pi + 25\pi)\,\text{cm}^3$$

a upravíme:

$$V = 4\pi \cdot 175\,\text{cm}^3 = 700\pi\,\text{cm}^3 \doteq 2\,198\,\text{cm}^3$$

Objem komolého kužele je roven $700\pi\,\text{cm}^3$, tj. přibližně $2\,198\,\text{cm}^3$.

Petr určil objem daného tělesa jako rozdíl objemů dvou kuželů K a L.



Kužel K ... výška $|S_1V|$, $\triangle AS_1V$ ... $v = 24\,\text{cm}$
Kužel L ... výška $|S_2V| = 12\,\text{cm}$

$V_K = \frac{1}{3}\pi \cdot 10^2 \cdot 24 \rightarrow V_K = 800\pi\,\text{cm}^3$

$V_L = \frac{1}{3}\pi \cdot 5^2 \cdot 12 \rightarrow V_L = 100\pi\,\text{cm}^3$

$|AB| = 20\,\text{cm} \rightarrow r_1 = 10\,\text{cm}$
$|CD| = 10\,\text{cm} \rightarrow r_2 = 5\,\text{cm}$
$r_2 : r_1 = 1:2$, proto
$|DV| : |AD| = 1:2$,
$|S_2V| : |S_1V| = 1:2$,
$|AD| = 13\,\text{cm} \rightarrow |AV| = 26\,\text{cm}$.

$V = V_K - V_L = 700\pi\,\text{cm}^3$
$V \doteq 2\,198\,\text{cm}^3$

Objem komolého kužele je přibližně $2{,}2\,\text{dm}^3$.

7 Ověřte, že vzorec pro výpočet objemu komolého kužele platí i pro objem válce.

CVIČENÍ

1. V následující tabulce doplňte chybějící údaje o kuželech.

Kužel	Poloměr podstavy	Obsah podstavy	Výška kužele	Strana kužele	Objem kužele
A	5 cm		15 cm		
B		$50\,\mathrm{cm}^2$	10 cm		
C	10 m			20 m	
D			3 m	5 m	
E		$16 \cdot \pi\,\mathrm{m}^2$			$64 \cdot \pi\,\mathrm{m}^3$

2. Z půlmetrového dřevěného válce s průměrem 30 cm byl vysoustružen kužel K maximálních rozměrů.

a) Určete rozměry tohoto kužele.

b) Vypočtěte objem kužele K.

c) Kolik procent dřeva činil odpad při opracování kužele?

3. Z igelitové fólie tvaru kruhu s průměrem 4 m si junáci vyrobili dva shodné kuželové úkryty před deštěm. Vypočtěte jejich výšku.

4. V pískovně je k přepravě připravena 5 m vysoká hromada jemného písku. Kolik nákladních aut o nosnosti 5 t ji odveze, má-li hromada písku tvar kužele s obvodem podstavy 30 m? (Počítejte s hustotou materiálu $2{,}2\,\mathrm{g/cm^3}$.)

5. Při výbuchu sopky tvaru kužele se její nadmořská výška zmenšila o 90 m, protože materiál hory byl rozmetán do jejího okolí. Kolik m^3 horniny bylo výbuchem přemístěno, jestliže kruhová planina na temeni sopky měla po výbuchu obvod 500 m?

6. Do rotačního kužele K je vepsán válec V, jehož výška je rovna polovině výšky kužele. Určete poměr objemů obou těles.

7. Závaží u kyvadlových hodin má tvar válce vysokého 10 cm. Průměr podstavy válce $2r = 4\,\mathrm{cm}$. Na obou koncích je závaží doplněno kuželi podle obrázku. Celková výška závaží je rovna 14 cm. Určete hmotnost závaží, je-li vyrobeno z litiny (hustota $7{,}25\,\mathrm{g/cm^3}$).

8. V zahradnictví připravují k prodeji 1 000 azalek. Budou je vysazovat do keramických květináčů tvaru komolých kuželů. Vnitřní průměr dna květináčů je 8 cm, výška (tedy hloubka květináčů) 9 cm a průměr vnitřní okrajové kružnice je 10 cm.

a) Vypočtěte objem zeminy ve zcela naplněném květináči.

b) Kolik m^3 rašeliny je třeba obstarat, jestliže každý květináč má být zaplněn z poloviny rašelinou a z jedné čtvrtiny zeminou? (Zbytek vyplní kořenový bal rostlin a volný prostor pro zálivku.)

9. Při opravě hradu je zapotřebí opatřit novou krytinu na horní polovinu kuželové střechy nad věží tvaru válce s průměrem 20 m. Výška střechy nad zdivem věže je 24 m.

a) Kolik m^2 krytiny je na věži?

b) Vypočtěte, kolik m^2 krytiny je třeba koupit (připočtěte 5 % rezervy) k opravě střechy.

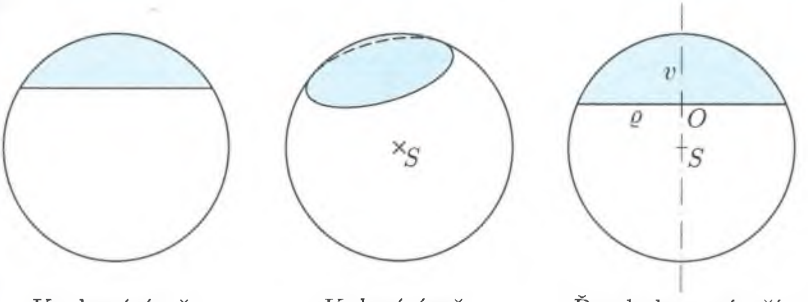
c) Kolik % krytiny na střeše bude vyměněno?

10. Ve staré učebnici prof. Strnada je psáno: „Komolý kužel rovná se obsahem součtu tří kuželů úplných, které mají s ním stejnou výšku a jichž základny jsou: větší základna kužele komolého, menší základna téhož a střední měřická úměrná obou.“ Je tato věta pravdivá?

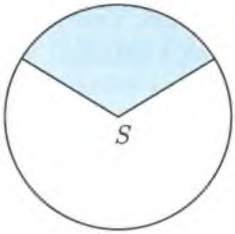
Poznámka. Střední měřickou úměrnou k veličinám A, B se rozumí $\sqrt{A \cdot B}$.

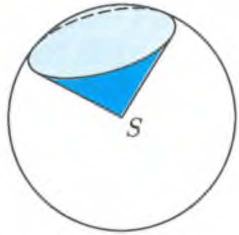
2.4 Koule a její části

Podobně, jako jsme z kruhu získali kruhovou úseč a kruhovou výseč, můžeme i z koule oddělit další užitečná tělesa.



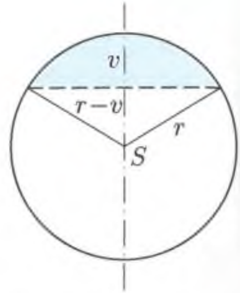
Kruhová úseč — Kulová úseč — Řez kulovou úsečí



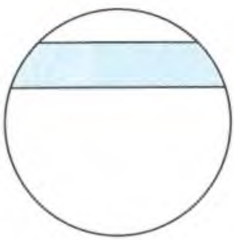


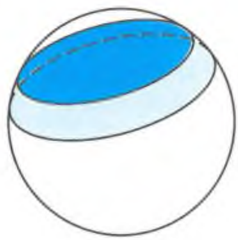
Kruhová výseč

Kulová výseč

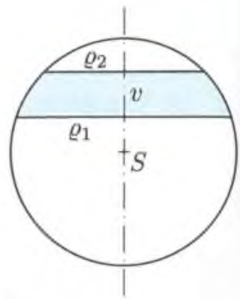


Řez kulovou výsečí





Kulová vrstva



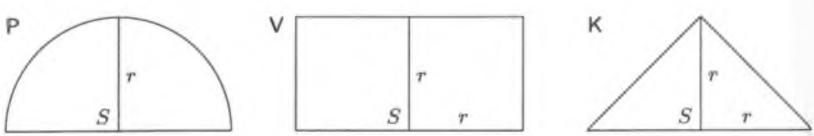
Řez kulovou vrstvou

Vzorce pro výpočty objemů těchto těles a jejich povrchů nemůžeme zatím dokázat, chybí nám potřebné matematické znalosti. Proto příslušné vzorce pouze uvedeme.

Objem koule s poloměrem r vypočteme podle vzorce

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Objem polokoule s poloměrem r je roven objemu tělesa **T**, které vznikne z rotačního válce opsaného této polokouli, z něhož odebereme kužel téže podstavy a výšky.



$$V_P \quad = \quad V_V \quad - \quad V_K$$

Vypočtěte objem tělesa **T** jako rozdíl objemu válce a objemu kužele. Výsledek porovnejte se vzorcem pro výpočet objemu koule.

1 Na mnohých hradech si můžeme prohlédnout žulové koule, které jsou památkou po jejich dobývání. Vypočtěte hmotnost žulové dělové koule, jejíž průměr je 50 cm. (Hustota žuly je 2,6 g/ cm^3.)

2 Jsou dány dvě koule K a L téže velikosti a ze stejného materiálu. Přesto pro poměr hmotností koulí K a L platí $m_K : m_L = 2 : 1$.

a) Čím může být rozdíl ve hmotnostech obou koulí způsoben?

b) V případě „duté koule" L (tj. koule s dutinou tvaru menší koule D) určete poměr poloměrů koulí L a D.

Návod k řešení

a) V kouli L jsou nějaké dutiny. Objem dutin je roven polovině objemu plné koule. (Zkuste určit např. délku hrany krychlové dutiny vyhovující velikosti.)

b) Pro objem koule D platí

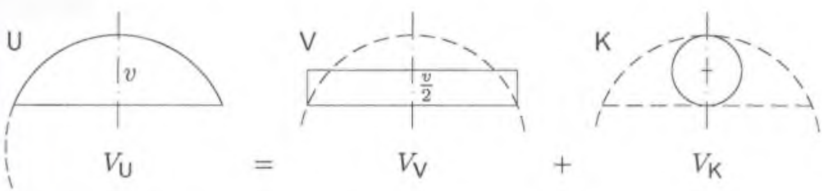
$$V_D = \frac{1}{2} \cdot V_K.$$

Objem kulové úseče U vypočteme podle vzorce

$$V_U = \frac{\pi v}{6}(3\varrho^2 + v^2),$$

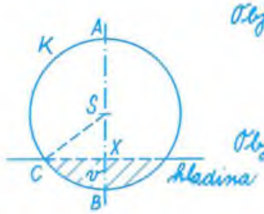
kde ϱ je poloměr podstavy úseče U a v její výška.

Objem úseče U je roven součtu objemu válce V s výškou $\frac{v}{2}$, jehož podstavou je podstava úseče U, a koule K s průměrem v.



3 Z koule K plovoucí po vodě vyčnívá nad hladinu její část vysoká 8 cm. Je možné určit hustotu látky, z níž je koule vyrobena, jestliže víme, že její poloměr je roven 5 cm?

Petr řešil úlohu takto:



Objem koule: $V_k = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4\cdot125\pi}{3}\,cm^3 = \frac{500\pi}{3}\,cm^3$

Objem úseče: $V_v = \frac{2\pi}{6}(3\cdot16+4)\,cm^3 = \frac{52}{3}\cdot\pi\,cm^3$

Koule K:

$r = 5\,cm$

$|AX| = 8\,cm$

$|XB| = 2\,cm = v$

$|CX| = 4\,cm$ (z ΔSCX)

Hmotnost koule K je rovna hmotnosti vytlačené kapaliny: $m_k = m_v$.

$$\varrho_k V_k = \varrho_v V_v$$

$$\varrho_k = \varrho_v \frac{V_v}{V_k}\ ;\ \varrho_v = 1\,g/cm^3$$

$$\varrho_k = \frac{52\pi}{3} : \frac{500\pi}{3} \doteq 0{,}1$$

$$\varrho_k \doteq 0{,}1\,g/cm^3$$

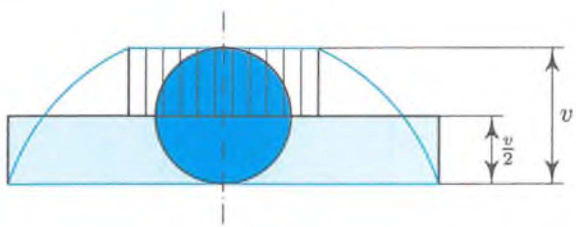
Hustota látky, z níž je koule vyrobena, je rovna přibližně $0{,}1\,g/cm^3$.

Objem kulové vrstvy vypočteme podle vzorce

$$V = \frac{\pi v}{6}(3\varrho_1^2 + 3\varrho_2^2 + v^2),$$

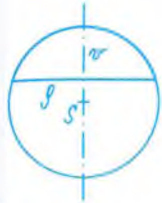
kde ϱ_1 a ϱ_2 jsou poloměry podstav vrstvy a v její výška.

Objem kulové vrstvy je roven součtu objemů tří těles znázorněných v osovém řezu na obrázku. Popište je a přesvědčte se o pravdivosti uvedeného tvrzení.



4 Ukažte, že vzorec pro výpočet objemu kulové vrstvy platí i pro výpočet objemu kulové úseče.

Vendulka uvažovala takto:



Kulová úseč U je kulová vrstva, jejíž jedna rovina řezu se koule jen dotýká. Řezem pak není kruh, $\varrho_2 = 0$.

$$V_V = \frac{\pi v}{6}\left(3\varrho_1^2 + 3\varrho_2^2 + v^2\right)$$

Pro $\varrho_2 = 0$ dostanu vzorec pro objem kulové úseče:

$$V_U = \frac{\pi v}{6}\left(3\varrho_1^2 + v^2\right).$$

Objem kulové výseče V vypočteme jako součet objemů kulové úseče U a kužele, jehož podstava je shodná s podstavou úseče a vrchol je středem příslušné koule s poloměrem r (viz obrázek).

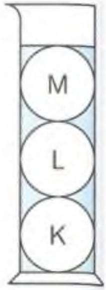
$$V_V \quad = \quad V_U \quad + \quad V_K$$

CVIČENÍ

1. Vypočtěte objem koule vepsané do krychle s hranami délky 10 cm.
2. Akvárium tvaru koule je naplněno do poloviny osmi litry vody. Vypočtěte jeho (vnitřní) průměr.
3. Jsou dány dvě shodné koule K a L s objemem 1 000 cm^3.
   a) Vypočtěte poloměr těchto koulí.
   b) Určete poloměr koule M, jejíž objem je součtem objemů koulí K a L.
4. Z dřevěné koule D s poloměrem $r = 6$ cm je rovinou, jejíž vzdálenost od středu S této koule je rovna 3 cm, oddělena kulová úseč. Vypočtěte objem úseče.

5. Z rotačního válce, jehož výška je trojnásobkem jeho poloměru, jsou odebrány dvě polokoule s poloměrem r. Sestrojte výkres tohoto tělesa a vypočtěte jeho objem.

Jen pro odvážné!



6. Do kalibrovací nádoby s vnitřním průměrem 10 cm jsou vloženy 3 skleněné koule K, L, M s poloměrem $r = 5$ cm. Hladina vody se dotýká nejvyššího bodu koule M.

a) Kolik cm^3 vody tyto koule vytlačily?

b) Kolik cm^3 vody je v nádobě?

c) O kolik cm by poklesla hladina vody po odebrání jedné koule?

Na závěr této kapitoly ještě uvedeme vzorce pro výpočty povrchu koule a jejích částí.

Povrch koule s poloměrem r vypočteme podle vzorce

$$S = 4\pi r^2.$$

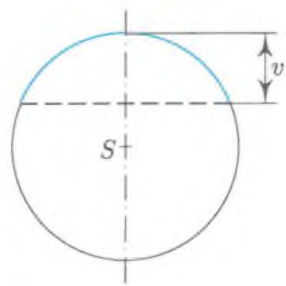
Kouli můžeme vytvořit rotací kruhu podle jeho průměru. Rotací kružnice, která tento kruh ohraničuje, dostaneme kulovou plochu. I pro obsah této kulové plochy platí

$$S = 4\pi r^2.$$

Povrch koule je roven čtyřnásobku obsahu kruhu se stejným poloměrem.

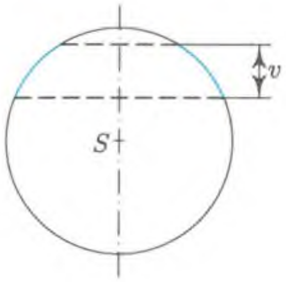
Z kulové plochy můžeme rovinami oddělit kulový vrchlík a kulový pás.

Kulový vrchlík



Osový řez kulového vrchlíku

Kulový pás



Osový řez kulového pásu

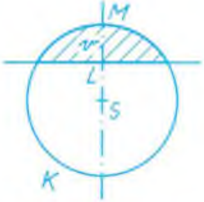
Obsah kulového vrchlíku i kulového pásu vypočteme podle vzorce

$$S = 2\pi r v,$$

kde r je poloměr kulové plochy a v výška vrchlíku či pásu.

5 Koule K je do výše poloviny svého poloměru vynořena nad vodní hladinu. Kolik procent jejího povrchu není pod vodou?

Lenka zapsala řešení takto:



$|SK| = r$

$|SL| = |LM| = \frac{r}{2}$

$v = \frac{r}{2}$

Nad vodou je část koule, povrch: vrchlík ... $v = \frac{r}{2}$

Obsah vrchlíku : $S = 2\pi r v$

$S = 2\pi r \cdot \frac{r}{2} = \pi r^2$

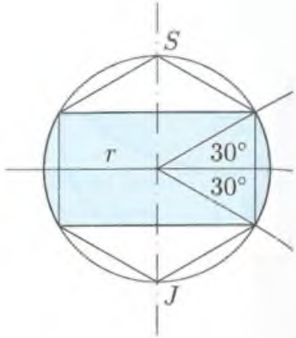
Povrch koule : $S' = 4\pi r^2$

$S' = 4S$

Nad vodou je čtvrtina, tj. 25 % povrchu koule.

Z jakého materiálu je tato koule vyrobena? (Archimedes tuto úlohu vyřešit uměl. Také si můžete říci „Heuréka!“?)

6 Kolik procent povrchu Země leží mezi rovnoběžkami 30° s. š. a 30° j. š.?

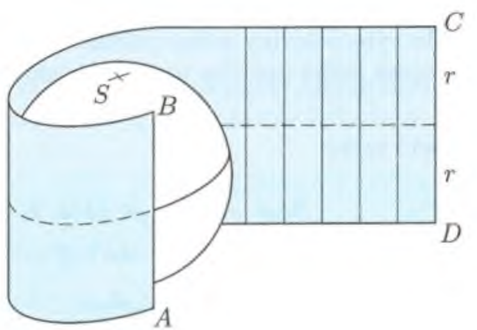


Návod k řešení

Výšku v kulového pásu určete z pravidelného šestiúhelníku. Vyhledejte na globu obratníky Raka a Kozoroha a odhadněte, jaká část povrchu Země leží mezi těmito dvěma významnými rovnoběžkami.

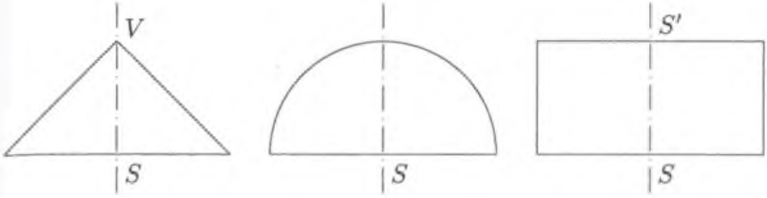
CVIČENÍ

7. Dokažte, že obsah kulové plochy s poloměrem r je roven obsahu pláště rotačního válce, jehož podstava má poloměr r a výška kužele $v = 2r$. Této rovnosti využívají některé mapy. Zobrazují povrch Země na obdélník, jehož delší střední příčka je obrazem rovníku. Zemské póly, rovnoběžky i poledníky se na této mapě zobrazí jako úsečky. Nemáte ve školním atlase také takovou mapu?



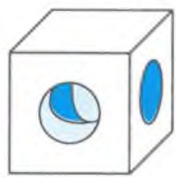
8. Cheopsova pyramida je asi 145 m vysoká a její podstavu tvoří čtverec s obvodem 932 m.
   a) Vypočtěte objem pyramidy.
   b) Jakou výšku by měl válec téhož objemu, jestliže by měly podstavy válce a pyramidy stejný obsah?
   c) Jaký poloměr by měla koule téhož objemu jako pyramida?
   d) Jaké délky by dosáhla 2 m široká a 5 m vysoká zeď postavená ze všech kamenů Cheopsovy pyramidy?

9. Podstavu kužele, polokoule i válce tvoří shodné kruhy s poloměrem r. Výška všech tří těles je také rovna r. Určete poměr objemů těchto těles. Také Archimedes vyřešil tuto úlohu. Svého objevu si velmi cenil. Na jeho náhrobku byla proto tato tři tělesa vytesána a také na mincích města Syrakusy, kde Archimedes žil, je obrazec, který tento objev připomíná.



Jen pro odvážné!

10. Dřevěnou krychli prostupují dva otvory tvaru rotačního válce, jejichž osy se protínají ve středu krychle. Průměr válců je roven polovině délky hran krychle. Zjistěte objem děravého tělesa, které z krychle zbylo.



3 GONIOMETRICKÉ FUNKCE OSTRÉHO ÚHLU

3.1 Délky stran a velikosti úhlů pravoúhlých trojúhelníků

1 Narýsujte $\triangle ABC$ se stranami $a = 3\,\mathrm{cm}$, $b = 4\,\mathrm{cm}$, $c = 5\,\mathrm{cm}$ a trojúhelník KLM tak, aby pro jeho strany platilo $k = 2a$, $l = 2b$, $m = 2c$.

a) Dokažte, že oba trojúhelníky jsou pravoúhlé.

b) Dokažte, že $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle LKM|$ a $|\sphericalangle ABC| = |KLM|$.

Návod k řešení

a) Ověřte, že pro délky stran obou trojúhelníků platí vztah

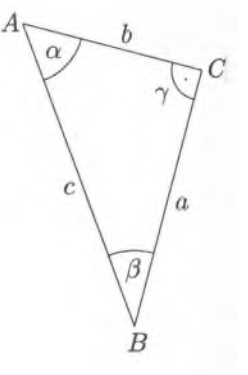
$$x^2 + y^2 = z^2.$$

b) Ukažte, že platí $\triangle ABC \sim \triangle KLM$:

$$k : a = l : b = m : c = 2 : 1$$

Jsou-li dva trojúhelníky podobné, shodují se ve všech vnitřních úhlech.

2 Víme-li, že trojúhelník ABC je pravoúhlý a c je jeho nejdelší strana, můžeme o jeho stranách a úhlech zapsat:
Strany a, b jsou odvěsny, strana c je přepona $\triangle ABC$.
Pro délky stran a, b, c platí vztah $a^2 + b^2 = c^2$.
Úhel $\gamma = \sphericalangle ACB$ je pravý.
Součet zbývajících úhlů α, β je také úhel pravý.



a) Sestrojte dva různé pravoúhlé trojúhelníky ABC, $A^*B^*C^*$ s pravými úhly při vrcholech C a C^*, pro jejichž zbývající vnitřní úhly platí $\alpha = 2\beta$, $\alpha^* = 2\beta^*$.

b) Změřte délky stran obou trojúhelníků a výsledky zapište.

c) Vypočtěte a porovnejte tyto poměry naměřených délek:

$a : b, \quad a^* : b^* \qquad a : c, \quad a^* : c^*$

$b : a, \quad b^* : a^* \qquad b : c, \quad b^* : c^*$

Návod k řešení

a) Pro vnitřní úhly trojúhelníků ABC a $A^*B^*C^*$ platí:

$$\beta = \beta^* = 30°, \quad \alpha = \alpha^* = 60°, \quad \gamma = \gamma^* = 90°$$

b) Měřením získáme jen přibližnou délku stran. Výsledky zapište v milimetrech.

c) Trojúhelníky ABC a $A^*B^*C^*$ jsou podobné podle věty *uu*. Proto jsou délky sobě odpovídajících stran těchto trojúhelníků ve stejném poměru. Např. pro jejich odvěsny platí:

$$a : a^* = b : b^*$$

Tuto rovnost lze upravit tak, že získáme vztah mezi poměry odvěsen v daných trojúhelnících:

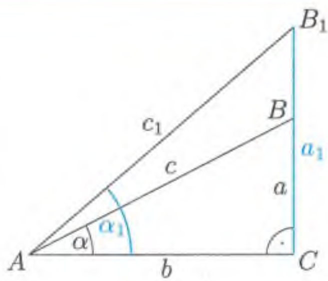
$$a : b = a^* : b^*$$

(Vaše výsledky se budou blížit v tomto případě poměru $\sqrt{3} : 1$.)
Všechny pravoúhlé trojúhelníky ABC s odvěsnami a, b, jejichž délky jsou v poměru $\sqrt{3} : 1$, mají vnitřní úhel β o velikosti 30°. Stejně bychom mohli uvažovat o dalších dvojicích stran těchto trojúhelníků.

Pomocí poměru délek stran pravoúhlých trojúhelníků můžeme rozhodnout, zda tyto trojúhelníky mají shodné vnitřní úhly.

3 Na obrázku jsou narýsovány dva pravoúhlé trojúhelníky ACB, ACB_1, se společnou odvěsnou b. Z obrázku je patrné, že úhel α_1 je větší než úhel α a odvěsna a_1 je delší než odvěsna a.

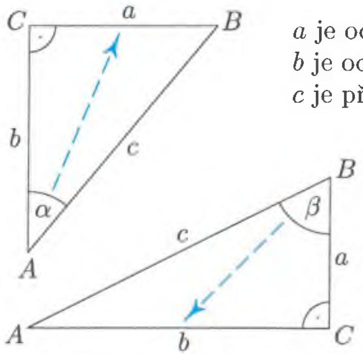
Proto také platí: $\quad \dfrac{a_1}{b} > \dfrac{a}{b}$



Každé velikosti ostrého úhlu v pravoúhlém trojúhelníku přísluší určitý poměr délek stran.
Se změnou velikosti ostrého úhlu v pravoúhlém trojúhelníku se změní poměry délek jeho stran.
Každé velikosti ostrého úhlu pravoúhlého trojúhelníku můžeme přiřadit právě jedno číslo vyjadřující poměr délek jeho dvou (vybraných) stran. Můžeme tedy hovořit o funkcích. Jejich definičním oborem je množina velikostí úhlů (ve stupních, minutách, vteřinách).

Závislost mezi velikostmi ostrých úhlů a délkami stran pravoúhlého trojúhelníku vyjadřují goniometrické funkce.

4 Pro definici goniometrických funkcí odlišujeme obě odvěsny podle polohy k příslušnému ostrému úhlu.

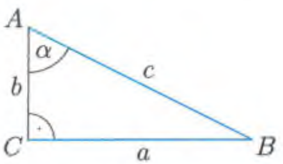


a je odvěsna **protilehlá** k úhlu α
b je odvěsna **přilehlá** k úhlu α
c je přepona

a je odvěsna **přilehlá** k úhlu β
b je odvěsna **protilehlá** k úhlu β
c je přepona

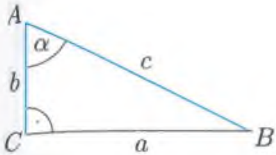
Goniometrické funkce můžeme použít jako prostředek k výpočtu
a) velikosti ostrého úhlu v pravoúhlém trojúhelníku, známe-li poměr délek dvou jeho stran,
b) délky jedné strany pravoúhlého trojúhelníku, známe-li velikost jednoho jeho ostrého úhlu a délku jedné strany trojúhelníku.

K těmto výpočtům se užívají čtyři goniometrické funkce.



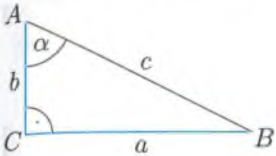
Sinus úhlu

$$\sin\alpha = \frac{\text{protilehlá odvěsna}}{\text{přepona}} = \frac{a}{c}$$



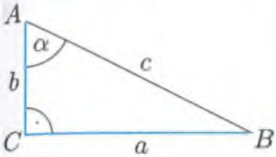
Kosinus úhlu

$$\cos\alpha = \frac{\text{přilehlá odvěsna}}{\text{přepona}} = \frac{b}{c}$$



Tangens úhlu

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{protilehlá odvěsna}}{\text{přilehlá odvěsna}} = \frac{a}{b}$$



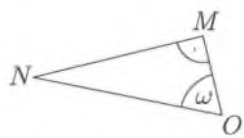
Kotangens úhlu

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\text{přilehlá odvěsna}}{\text{protilehlá odvěsna}} = \frac{b}{a}$$

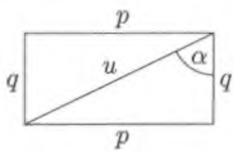
CVIČENÍ

1. Načrtněte pravoúhlý trojúhelník KLM s pravým úhlem při vrcholu L. Pojmenujte strany trojúhelníku podle polohy k oběma ostrým úhlům.

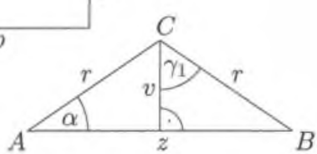
2. Zapište všechny goniometrické funkce pro úhel vyznačený na obrázku.



3. Zapište funkce $y = \cos\alpha$, $y = \operatorname{cotg}\alpha$ pro úhel α v obdélníku se stranami p, q a úhlopříčkou u.



4. Vyjádřete $\sin\alpha$, $\cos\gamma_1$, $\operatorname{tg}\gamma_1$ z trojúhelníku ABC.



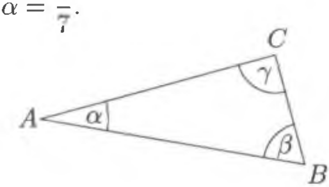
5. Sestrojte aspoň jeden pravoúhlý trojúhelník ABC, pro jehož vnitřní úhel α platí

   a) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{3}$, b) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, c) $\cos\alpha = \frac{4}{7}$.

6. Vyjádřete z pravoúhlého $\triangle ABC$ a porovnejte výsledky z A a B.

   A. $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{cotg}\alpha$.

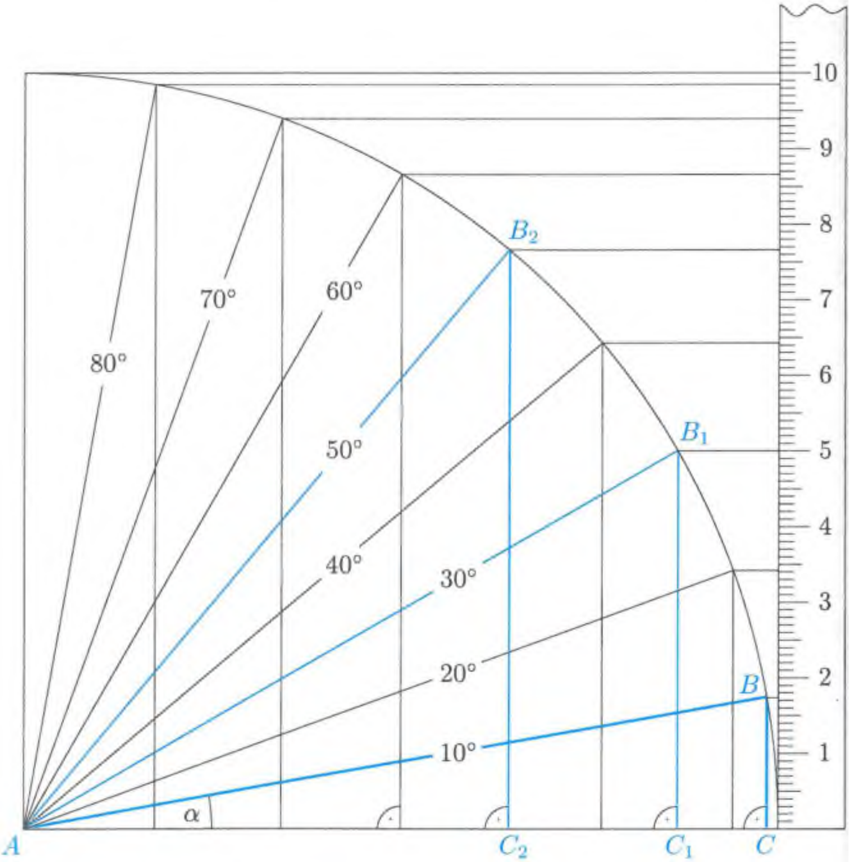
   B. $\sin\beta$, $\cos\beta$, $\operatorname{tg}\beta$, $\operatorname{cotg}\beta$.



3.2 Funkce $y = \sin\alpha$

Podívejme se, jak se poměr délky odvěsny protilehlé k danému úhlu a délky přepony pravoúhlého trojúhelníku mění se změnou velikosti úhlu α.

1 Na obrázku vidíte několik pravoúhlých trojúhelníků se stejnou délkou přepony 10 cm. Zaměřte se nyní na tři vyznačené trojúhelníky, $\triangle ACB$, $\triangle AC_1B$ a $\triangle AC_2B_2$.



V $\triangle ACB$ je $\alpha = 10°$, protilehlá odvěsna $a \doteq 1{,}7$ cm a přepona $c = 10$ cm, proto platí:

$$\sin 10° \doteq \frac{1{,}7}{10} = 0{,}17$$

V $\triangle AC_1B_1$ je $\alpha_1 = 30°$, protilehlá odvěsna $a_1 = 5\,\text{cm}$ a přepona $c_1 = 10\,\text{cm}$, proto platí:

$$\sin 30° = \frac{5}{10} = 0{,}5$$

V $\triangle AC_2B_2$ je $\alpha_2 = 50°$, protilehlá odvěsna $a_2 \doteq 7{,}7\,\text{cm}$ a přepona $c_2 = 10\,\text{cm}$, proto platí:

$$\sin 50° \doteq \frac{7{,}7}{10} = 0{,}77$$

Všimněte si!

$$\begin{array}{ccccc} 10° & < & 30° & < & 50° \\ \sin 10° & < & \sin 30° & < & \sin 50° \end{array}$$

Se zvětšujícím se úhlem α se zvětšuje také hodnota funkce $y = \sin\alpha$.

Z obrázku můžeme zjistit i další **přibližné** hodnoty funkce $y = \sin\alpha$ a sestavit tabulku.

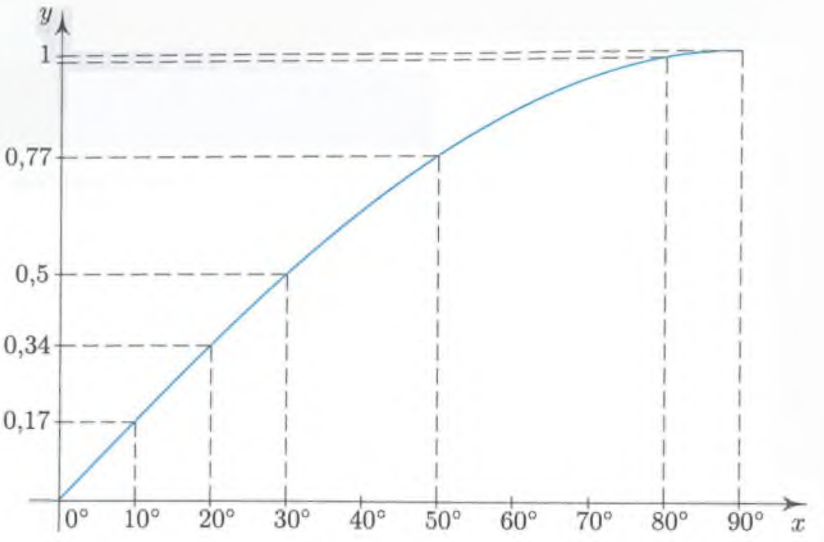
α	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
$\sin\alpha$	0,17	0,34	0,5	0,64	0,77	0,87	0,94	0,98

Funkce $y = \sin\alpha$ je rostoucí pro úhel α v intervalu $(0°, 90°)$ a nabývá hodnot z intervalu $(0, 1)$.

2 Uvedené tabulky využijeme k sestrojení grafu funkce $y = \sin\alpha$.

Nejdříve sestrojíme navzájem kolmé osy x a y. Velikosti úhlů ve stupních znázorníme na vodorovné ose x a funkční hodnoty sinu na svislé ose y.

a) Velikost 10° znázorníme úsečkou délky 1 cm na ose x.
b) Na ose y zvolíme za jednotku úsečku o délce 6 cm.
c) Postupně sestrojíme body o souřadnicích [10; 0,17], [20; 0,34] atd.
d) Funkci $y = \sin\alpha$ doplníme ještě o hodnoty 0 pro 0° a 1 pro 90° a sestrojíme tedy body o souřadnicích [0, 0] a [90, 1].
e) Sestrojenými body proložíme křivku podle obrázku.



Odhadněte z grafu hodnoty funkce $y = \sin\alpha$ pro $\alpha = 40°$ (60°, 80°) a velikost úhlu α pro funkční hodnotu 0,6 (0,1; 0,8).
Porovnejte své odhady s odhady spolužáků.
Jistě vidíte, že toto odhadování je značně nepřesné zejména tam, kde graf funkce stoupá velmi pomalu.

Sinus úhlu α je poměr délky odvěsny tomuto úhlu protilehlé a délky přepony v pravoúhlém trojúhelníku s vnitřním úhlem α.
Definičním oborem funkce $y = \sin\alpha$ je uzavřený interval $\langle 0°, 90°\rangle$ a funkční hodnoty jsou z intervalu $\langle 0, 1\rangle$.
Funkce $y = \sin\alpha$ je rostoucí.
Graf funkce $y = \sin\alpha$ nazýváme sinusoida.

Získali jsme jen malou část křivky nazývané sinusoida. Ve fyzice v nauce o střídavém proudu jste se jistě setkali s její částí podstatně delší a hovořili jste o jejích vlastnostech.

Při práci s goniometrickými funkcemi lze využívat některých kalkulaček nebo *Tabulek pro základní školu*. Poslouží vám

a) k určení hodnoty příslušné funkce pro velikost daného úhlu,

b) k určení velikosti ostrého úhlu k dané hodnotě příslušné funkce.

3 Zjistěte hodnotu funkce sinus pro úhly o velikosti:

a) 35° b) 37° c) 40°20′

Řešení

V *Tabulkách pro ZŠ* nalezneme tabulku označenou M 6A (nebo 8A). Ve sloupci označeném „° \ ′“ jsou uvedeny velikosti úhlů ve stupních, v horním řádku jsou minuty. Uvedené hodnoty funkce jsou zaokrouhleny na 4 desetinná místa. To znamená, že z tabulek získáme většinou jen **přibližné hodnoty**.

a) V prvním sloupci naleznete 35° a v témže řádku ve sloupci 0′ je uvedena hodnota 0,573 6.

Zapíšeme: $\sin 35° = 0{,}573\,6$

b) Stejně postupujeme při hledání hodnoty $\sin 37°$. Dejte si pozor, protože v tabulce se stále neopakuje 0, ...

Zapíšeme: $\sin 37° = 0{,}601\,8$.

c) V prvním sloupci vyhledáte 40° a v témže řádku ve sloupci 20′ přečtete 0,647 2.

Zapíšeme: $\sin 40°20' = 0{,}647\,2$.

sin *x*

M 6A

′ / °	**0′**	**10′**	**20′**	**30′**	**40′**	**50′**
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
35	0,573 6	576 0	578 3	580 7	583 1	585 4
36	587 8	590 1	592 5	594 8	597 2	599 5
37	601 8	604 1	606 5	608 8	611 1	613 4
38	615 7	618 0	620 2	622 5	624 8	627 1
39	629 3	631 6	633 8	636 1	638 3	640 6
40	0,642 8	645 0	647 2	649 4	651 7	653 9
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
60	0,866 0	867 5	868 9	870 4	871 8	873 2
	0′	**10′**	**20′**	**30′**	**40′**	**50′**

4 Pomocí tabulek určete velikosti úhlů α, β, γ, je-li:

a) $\sin\alpha = 0{,}645$ b) $\sin\beta = 0{,}76$ c) $\sin\gamma = 0{,}84$

Řešení

I tentokrát půjde jen o přibližné řešení. Funkce sinus je rostoucí, větším hodnotám funkce tedy odpovídá větší úhel α. Musíme vyhledat hodnoty sinu nejbližší k uvedeným hodnotám v zadání.

a) V tabulce nalezneme 0,645 0 a v témže řádku a prvním sloupci jsou uvedeny stupně. Sloupec, ve kterém jsme hodnotu 0,645 0 nalezli, uvádí v záhlaví 10′.

Zapíšeme: $\alpha = 40°10'$

b) V tabulce vyhledáme hodnotu nejbližší číslu 0,76 (asi 0,760 4) a dále postupujeme jako v předešlém případě.

Zapíšeme: $\beta = 49°30'$

c) Nejbližší uvedenou hodnotou k číslu 0,84 je číslo 0,840 3.

Zapíšeme: $\gamma = 57°10'$

CVIČENÍ

1. Jsou dány: $\sin 38° = 0{,}6157$ a $\sin\alpha = 0{,}5831$. Porovnejte velikosti úhlu α a úhlu 38° bez použití tabulek. Tvrzení zdůvodněte.

2. $\sin\alpha = 0{,}9013$ a $\sin\beta = 0{,}5854$.
   a) Porovnejte úhly α, β podle velikosti bez použití tabulek.
   b) Určete velikosti úhlů α, β.
   c) Mohou být úhly α a β vnitřními úhly téhož pravoúhlého trojúhelníku?

3. Bez použití tabulek uspořádejte úhly vzestupně podle velikosti, je-li $\sin\alpha_1 = 0{,}1822$, $\sin\alpha_2 = 0{,}0175$, $\sin\alpha_3 = 0{,}9026$, $\sin\alpha_4 = 0{,}8616$.

4. Pomocí tabulek určete velikosti úhlů a doplňte následující tabulku:

$\sin\alpha$	0,731 4	0,874 6	0,342 0	0,433 1	0,988 1	0,561 3
α						

5. Pomocí tabulek určete:

   a) $\sin 28°$ b) $\sin 12°40'$ c) $\sin 65°20'$ d) $\sin 45°10'$

6. Pomocí tabulek doplňte chybějící údaje:

α	25°	74°30′	60°	84°40′	49°	58°50′
$\sin\alpha$						

3.3 Užití funkce $y = \sin \alpha$

Ukažme si využití funkce $y = \sin \alpha$ při výpočtech délek stran a velikostí úhlů v pravoúhlém trojúhelníku.

1 Sestrojte trojúhelník ABC, pro který platí: $|AB| = 5\,\text{cm}$, $|AC| = 4\,\text{cm}$, $a = 3\,\text{cm}$. Označte ostré úhly α, β.

a) Rozhodněte, zda je trojúhelník ABC pravoúhlý.

b) Vypočtěte velikosti obou jeho ostrých úhlů.

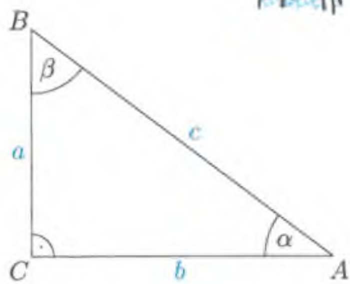
c) Svůj výpočet si ověřte měřením úhlů.

Řešení

a) Použijeme Pythagorovu větu:

$$5^2 = 3^2 + 4^2$$
$$25 = 9 + 16$$

$\triangle ABC$ je pravoúhlý.



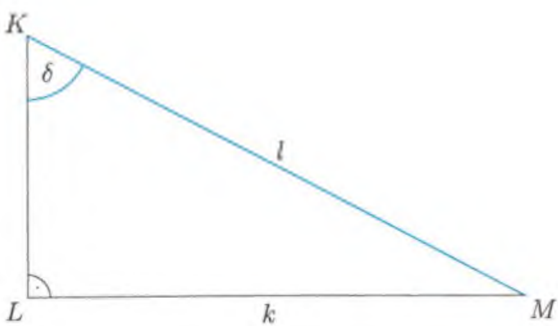
b) Pomocí poměru příslušných délek stran vyjádříme sinus úhlů:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{3}{5} = 0{,}6$$
$$\sin \beta = \frac{b}{c} = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

K určení velikosti úhlů použijeme tabulek:

$$\alpha \doteq 36°50', \qquad \beta \doteq 53°10'$$

2 V pravoúhlém trojúhelníku KLM je délka přepony $l = 15\,\text{cm}$ a úhel δ při vrcholu K má velikost $62°10'$. Vypočítejte délku odvěsny k.



Řešení

V $\triangle KLM$ známe délku přepony a velikost ostrého úhlu δ. Zjišťujeme délku odvěsny k, která leží proti úhlu δ.

Zapíšeme: $\sin\delta = \dfrac{k}{l}$

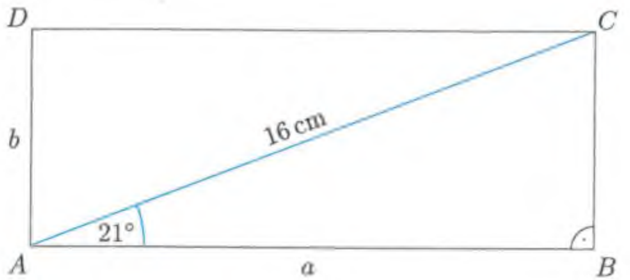
Vyjádříme k: $k = l \cdot \sin\delta$
Dosadíme zadané hodnoty: $k = 15 \cdot \sin 62°10'$
V tabulkách zjistíme: $\sin 62°10' = 0{,}884\,3$
Dosadíme a vypočteme: $k = 15 \cdot 0{,}884\,3$
$k = 13{,}264\,5 \doteq 13{,}3$ (cm)

Odvěsna k trojúhelníku KLM má délku asi 13,3 cm.

3 Vypočtěte obsah obdélníku $ABCD$, jestliže délka úhlopříčky AC je 16 cm a velikost úhlu CAB je 21°.

Řešení

Pro obsah S obdélníku $ABCD$ platí $S = a \cdot b$. Potřebujeme znát délky obou jeho stran a, b.



V obdélníku $ABCD$ je vyznačen pravoúhlý trojúhelník ABC, z něhož při výpočtu vyjdeme.

$$\sin 21° = \frac{b}{16}, \qquad \text{odtud} \quad b = 16 \cdot \sin 21°.$$

Podle tabulek je $\sin 21° = 0{,}358\,4$.
Proto $b = 16 \cdot 0{,}358\,4$
$b = 5{,}734\,4 \doteq 5{,}7$ (cm)
Vypočteme velikost úhlu BCA.
$|\sphericalangle BCA| + |\sphericalangle CAB| = 90°$, tedy $|\sphericalangle BCA| = 69°$.

$$\sin 69° = \frac{a}{16}, \qquad \text{odtud} \quad a = 16 \cdot \sin 69°.$$

Podle tabulek je $\sin 69° = 0{,}933\,6$.

Proto $a = 16 \cdot 0{,}9336$

$a = 14{,}9376 \doteq 14{,}9$ (cm)

Nyní známe (přibližně) délky obou stran obdélníku $ABCD$ a můžeme vypočítat jeho obsah: $S \doteq 14{,}9 \cdot 5{,}7 = 84{,}93 \doteq 84{,}9$ (cm^2)

Obsah obdélníku $ABCD$ je asi $84{,}9\,\text{cm}^2$.

4 V pravoúhlém trojúhelníku ABC má úhel α velikost $38°$ a odvěsna b má délku 8 cm. Určete délku přepony c. (K výpočtu užijte funkci sinus.)

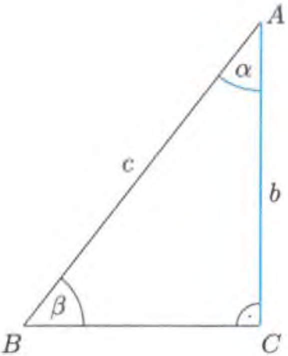
Řešení

V daném trojúhelníku známe délku odvěsny přilehlé ke známému úhlu. Velikost úhlu protilehlého k odvěsně b vypočteme: $\alpha + \beta = 90°$, tedy $\beta = 52°$.

$$\sin\beta = \frac{b}{c} \qquad / \cdot c$$

$$c \cdot \sin\beta = b \qquad / : \sin\beta \text{ (pokud } \sin\beta \neq 0!)$$

$$c = \frac{b}{\sin\beta} \qquad (*)$$



V tabulkách zjistíme, že $\sin 52° \doteq 0{,}788$.

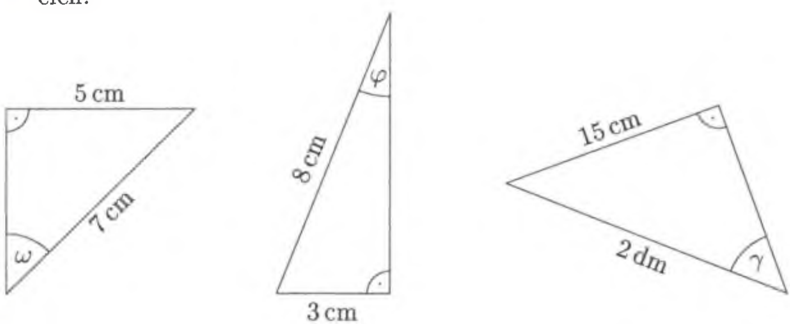
Dosadíme do vztahu $(*)$ známé údaje a vypočteme délku přepony:

$$c = 10{,}152 \doteq 10{,}2 \text{ (cm)}$$

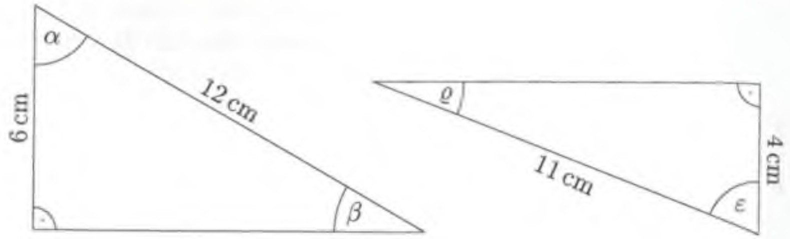
Přepona trojúhelníku ABC má délku asi 10,2 cm.

CVIČENÍ

1. Vypočtěte velikosti vyznačených úhlů v pravoúhlých trojúhelnících:



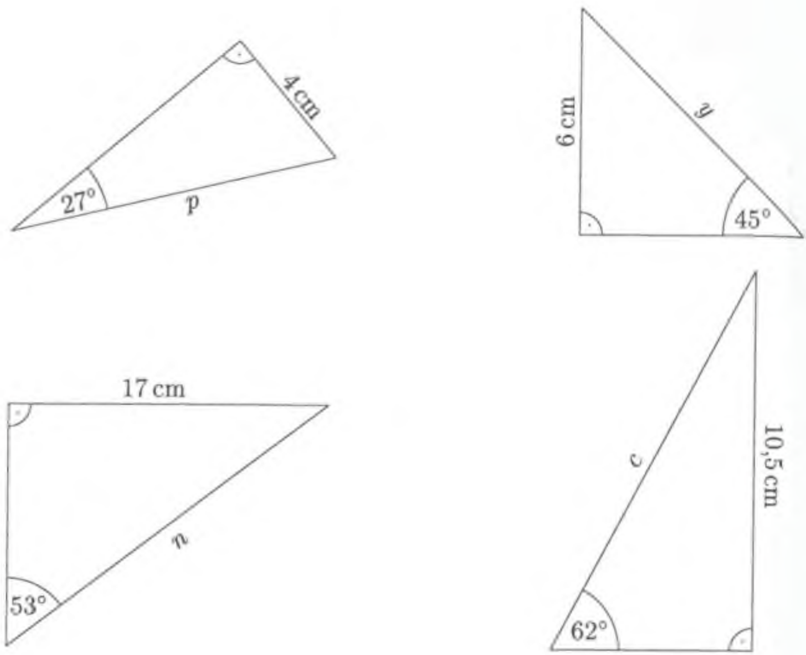
2. Vypočítejte velikosti obou ostrých úhlů v daných trojúhelnících:



3. V pravoúhlém trojúhelníku ABC platí: $\beta = 55°$ a přepona $c = 9\,\text{cm}$. Vypočítejte délku odvěsny b.

4. V pravoúhlém trojúhelníku MNO platí: přepona $n = 24\,\text{cm}$, $|\sphericalangle NMO| = 30°$. Vypočítejte délku odvěsny NO.

5. Vypočítejte délku přepony v daných trojúhelnících:



6. Jakou délku má úhlopříčka obdélníku $ABCD$, je-li $|\sphericalangle ACB| = 58°20'$ a strana AB má délku 10 cm?

7. Určete výšku rovnostranného trojúhelníku, jehož strany mají délku 6 cm
a) pomocí funkce sinus,
b) pomocí Pythagorovy věty.

8. V pravoúhlém trojúhelníku MNP platí: $|\sphericalangle MNP| = 47°$, přepona $p = 7$ cm. Vypočítejte délku strany PM.

9. Jakou délku má základna rovnoramenného trojúhelníku, jehož rameno měří 9 cm a úhel při základně má velikost 74°?

10. Vypočítejte obsah pravoúhlého trojúhelníku ABC, jehož přepona $c = 6$ cm a úhel $\beta = 41°50'$.

3.4 Funkce $y = \cos\alpha$

Poměr délky přilehlé odvěsny b k danému úhlu α a délky přepony c v pravoúhlém trojúhelníku se nazývá kosinus úhlu α.
Zapíšeme:

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

Ukážeme si, jak se tento poměr mění se změnou velikosti příslušného úhlu α.

1 Na obrázku je znázorněno několik pravoúhlých trojúhelníků s přeponami délky 10 cm. Pozorujte vyznačené trojúhelníky ACB, AC_1B_1.

V trojúhelníku ACB je $\alpha = 20°$, přilehlá odvěsna $b \doteq 9{,}4$ cm, přepona $c = 10$ cm.

$$\cos 20° \doteq \frac{9{,}4}{10} = 0{,}94$$

V $\triangle AC_1B_1$ je $\alpha_1 = 40°$, přilehlá odvěsna $b_1 \doteq 7{,}7$ cm, přepona $c =$ $= 10$ cm.

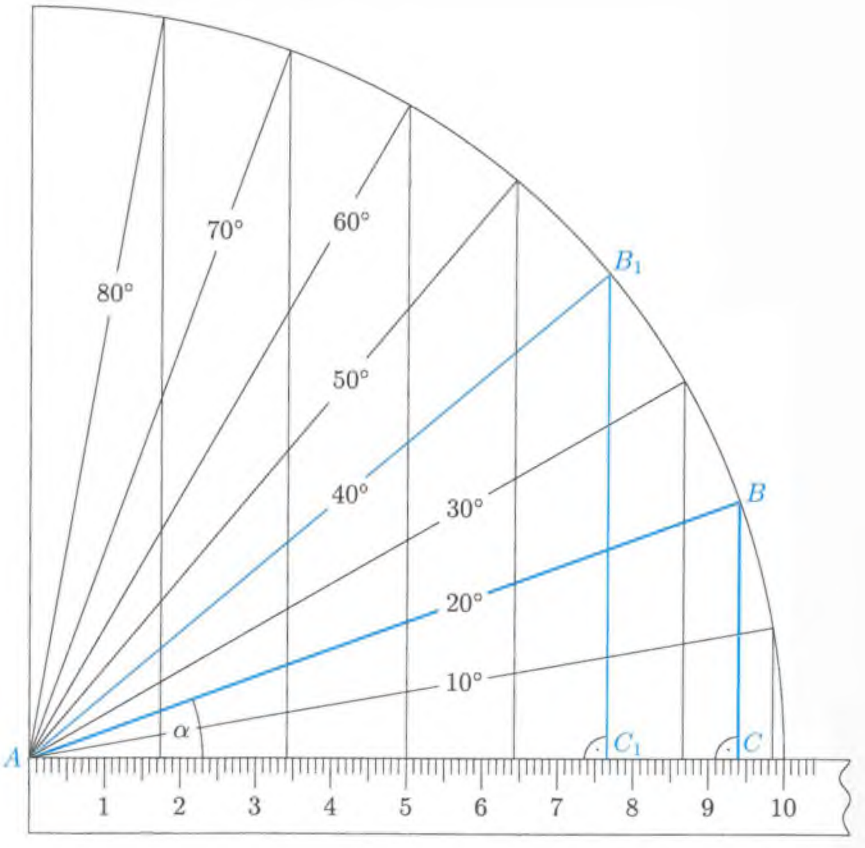
$$\cos 40° \doteq \frac{7{,}7}{10} = 0{,}77$$

Všimněte si!

$$20° < 40°$$

$$\cos 20° > \cos 40°$$

Se zvětšujícím se úhlem se hodnota funkce kosinus zmenšuje.



Údaje vyčtené z obrázku sestavíme do tabulky:

α	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
$\cos\alpha$	0,98	0,94	0,87	0,77	0,64	0,5	0,34	0,17

Funkce $y = \cos\alpha$ je klesající. Obdobně jako u funkce $y = \sin\alpha$ doplníme hodnotu 1 pro $\alpha = 0°$ a hodnotu 0 pro $\alpha = 90°$.

Definičním oborem funkce $y = \cos\alpha$ je uzavřený interval $\langle 0°, 90° \rangle$. Funkční hodnoty leží v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$.

2 Porovnejte tabulku sinu a kosinu úhlu a doplňte zápisy:

a) $\sin 20°$ ☐ $\cos 70°$ b) $\sin 10° = \cos$ ☐

Řešení

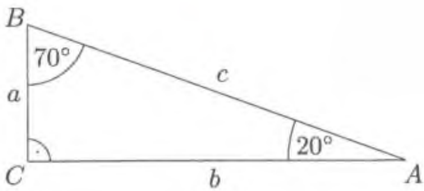
a) $\underbrace{\sin 20° = \frac{a}{c}; \quad \cos 70° = \frac{a}{c}}$

$$\sin 20° = \cos 70°,$$

protože

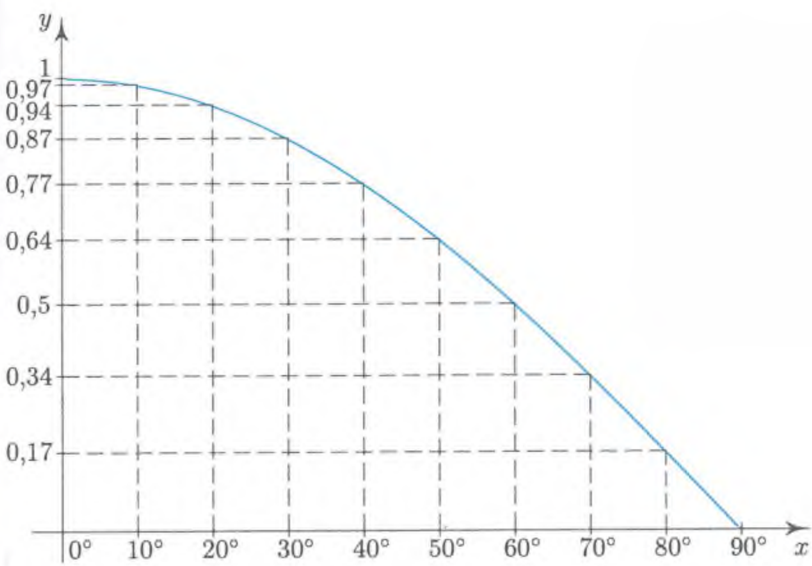
$$20° + 70° = 90°.$$

b) $\sin 10° = \cos 80°$



Všimněte si! $\sin \alpha = \cos(\mathrm{R} - \alpha)$

3 Údaje uvedené v tabulce hodnot funkce $y = \cos \alpha$ využijte k sestrojení grafu této funkce. Při jeho sestrojování postupujte obdobně, jako při rýsování sinusoidy.



V *Tabulkách pro základní školu* naleznete tabulky označené M 6B, kde jsou uvedeny hodnoty funkce kosinus. S těmito tabulkami se pracuje stejně, jako s tabulkami pro funkci $y = \sin \alpha$.

4 V tabulkách vyhledejte hodnoty funkce $y = \cos\alpha$, je-li α:

a) $14°$ b) $62°20'$ c) $77°30'$

Protože funkce $y = \cos\alpha$ je klesající s rostoucí velikostí úhlu, můžeme předem říci, že platí: $\cos 14° > \cos 62°20' > \cos 77°30'$.
V tabulkách zjistíte:

a) $\cos 14° = 0{,}970\,3$ b) $\cos 62°20' = 0{,}464\,3$

c) $\cos 77°30' = 0{,}216\,4$

5 V tabulkách zjistěte velikosti úhlů α, β, γ, pro něž platí:

a) $\cos\alpha = 0{,}703$ b) $\cos\beta = 0{,}176\,3$ c) $\cos\gamma = 0{,}777\,7$

V tabulkách zjistíte:

a) hodnota $0{,}703\,0$ je uvedena pro $\alpha = 45°20'$
b) nejbližší hodnota $0{,}176\,5$ k požadované hodnotě $0{,}176\,3$ je pro $\beta = 79°50'$
c) nejbližší hodnota uvedená v tabulkách je $0{,}777\,1$ pro $\gamma = 39°$

CVIČENÍ

1. Bez použití tabulek porovnejte velikosti úhlů α a β, pro něž platí: $\cos\alpha = 0{,}412\,0$, $\cos\beta = 0{,}996\,7$.

2. Zapište, co platí o součtu úhlů α a β, jestliže $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ a $\cos\beta = 0{,}5$. Své tvrzení ověřte pomocí tabulek.

3. Bez použití tabulek určete velikost úhlu α, jestliže platí:
   a) $\sin 62° = \cos\alpha$ b) $\sin 32° = \cos\alpha$ c) $\cos 40° = \sin\alpha$

4. Seřaďte úhly podle velikosti sestupně, aniž byste zjišťovali jejich velikost: $\cos\alpha_1 = 0{,}182\,2$, $\cos\alpha_2 = 0{,}017\,5$, $\cos\alpha_3 = 0{,}902\,6$, $\cos\alpha_4 = 0{,}861\,6$.

5. Pomocí tabulek doplňte chybějící údaje:

α	$15°$	$27°20'$	$45°$	$78°30'$	$35°$	$0°30'$
$\cos\alpha$						

6. Pomocí tabulek určete velikosti úhlů β:

$\cos\beta$	0,971 7	0,860 9	0,566 4	0,342	0,005 8	0,5
β						

3.5 Užití funkce $y = \cos\alpha$

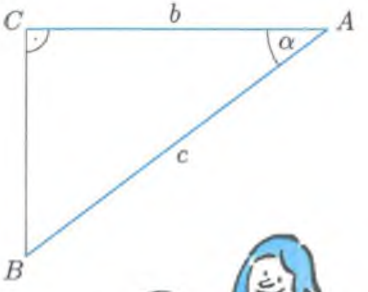
1 Pravoúhlý trojúhelník ABC má přeponu délky $c = 5\,\text{cm}$ a délka odvěsny $b = 4\,\text{cm}$.

a) Vypočítejte velikost jeho vnitřního úhlu při vrcholu A.

b) Svůj výpočet ověřte měřením.

Řešení

V $\triangle ABC$ je dána délka přepony a odvěsny přilehlé k úhlu α. K výpočtu velikosti tohoto úhlu použijeme funkci $y = \cos\alpha$.



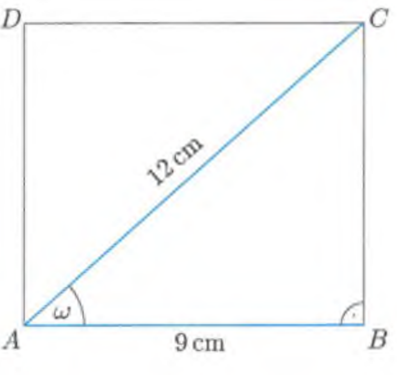
a)
$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$
$$\cos\alpha = \frac{4}{5}$$
$$\cos\alpha = 0{,}8$$
$$\alpha \doteq 36°50'$$

b) Měřením jste zjistili, že $\alpha \doteq 37°$.

2 Vypočtěte velikost úhlu ω, který svírá úhlopříčka AC obdélníku $ABCD$ se stranou AB, je-li $|AC| = 12\,\text{cm}$, $|AB| = 9\,\text{cm}$.

Řešení

V pravoúhlém trojúhelníku ABC známe délky přepony a odvěsny přilehlé k hledanému úhlu. K výpočtu tedy použijte funkce $y = \cos\omega$.



$$\cos\omega = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

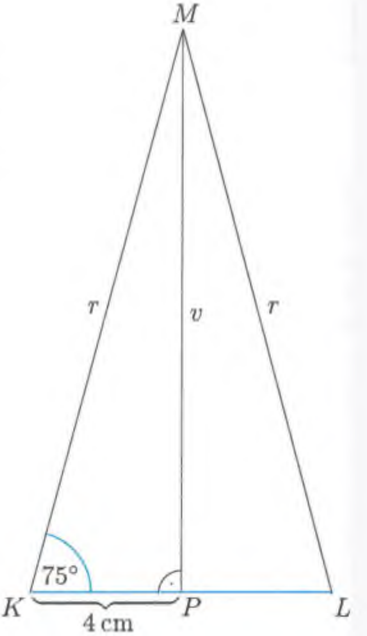
Pomocí tabulek určíme

$$\omega \doteq 41°20'.$$

Úhel CAB má velikost asi $41°20'$.

3 Rovnoramenný trojúhelník KLM má základnu délky $|KL| = 8\,\text{cm}$ a úhel při základně o velikosti $75°$. Vypočítejte obvod $\triangle KLM$.

Řešení



K výpočtu obvodu $\triangle KLM$ potřebujeme znát délku ramene r. V pravoúhlém $\triangle KPM$ známe velikost úhlu MKP a délku odvěsny k němu přilehlé. K výpočtu délky ramene r použijeme tedy funkci $y = \cos\alpha$.

$$\cos 75° = \frac{4}{r},$$

odtud

$$r = \frac{4}{\cos 75°}.$$

V tabulkách zjistíme:

$$\cos 75° = 0{,}258\,8$$

Po dosazení a výpočtu:

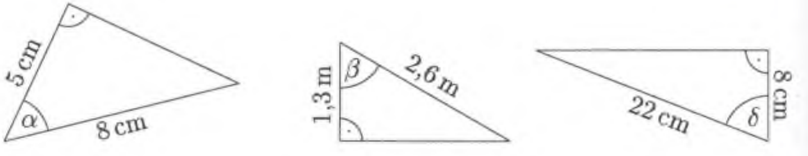
$$r \doteq 15{,}5 \text{ (cm)}$$

$$o \doteq 2 \cdot 15{,}5 + 8 = 39 \text{ (cm)}$$

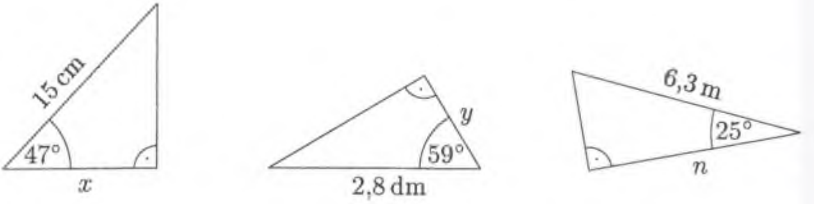
Trojúhelník KLM má obvod asi $39\,\text{cm}$.

CVIČENÍ

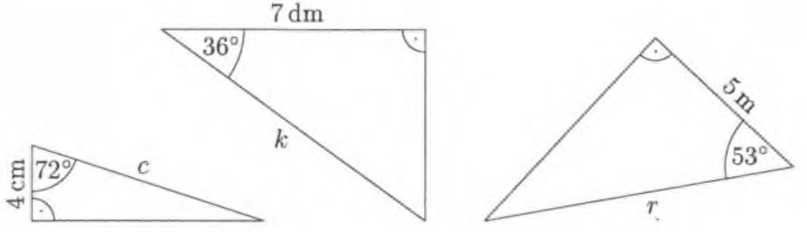
1. Vypočítejte velikosti úhlů vyznačených v pravoúhlých trojúhelnících:



2. Určete délky odvěsen trojúhelníků na obrázku:

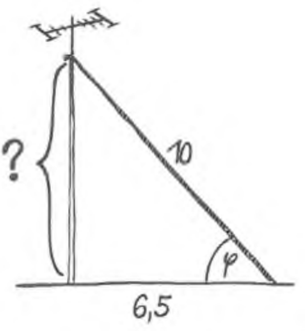


3. Vypočtěte délky přepon c, k, r pravoúhlých trojúhelníků:



4. Jakou délku má základna rovnoramenného trojúhelníku, jehož rameno má délku 9 cm a úhel při základně má velikost 45°?

5. Rovnoramenný lichoběžník $ABCD$ má základny délek $a = 12$ cm, $c = 8$ cm, vnitřní úhel při větší základně má velikost 60°. Vypočítejte obvod lichoběžníku.



6. Ramena rovnoramenného trojúhelníku PQR svírají úhel ω a mají délku 20 cm. Výška k základně $v = 16$ cm. Určete velikost úhlu ω.

7. Lano délky 10 m je napnuto od stožáru k zemi a je ukotveno 6,5 m od paty stožáru. Jakou velikost má úhel φ, který svírá lano se zemí?

8. V kružnici $k(S, 6\,\text{cm})$ je vyznačena tětiva AB, která je od bodu S vzdálena 2,5 cm. Určete velikost středového úhlu ASB.

9. Strany kosočtverce $ABCD$ mají délku $a = 17$ cm a $|\sphericalangle DAB| = 64°$.
   a) Vypočítejte délku úhlopříčky AC.
   b) Vypočítejte délku úhlopříčky BD.
   c) Kosočtverec narýsujte ve vhodném měřítku, jeho úhlopříčky změřte a výsledky měření porovnejte s výpočty.

3.6 Funkce $y = \operatorname{tg} \alpha$ a $y = \operatorname{cotg} \alpha$

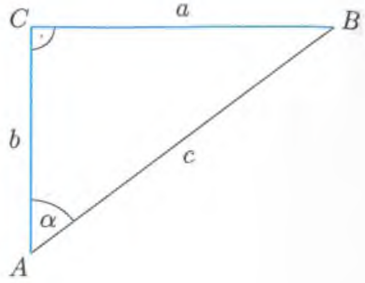
Pro výpočty velikostí ostrých úhlů nebo délek stran pravoúhlého trojúhelníku užíváme také funkce vycházející z poměru délek obou odvěsen:

- funkci $y = \operatorname{tg} \alpha$ (čteme: tangens či tangenta α)
- funkci $y = \operatorname{cotg} \alpha$ (čteme: kotangens či kotangenta úhlu α)

Stručně zapíšeme:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{protilehlá odvěsna}}{\text{přilehlá odvěsna}} = \frac{a}{b}$$

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\text{přilehlá odvěsna}}{\text{protilehlá odvěsna}} = \frac{b}{a}$$



Všimněte si, že platí:

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$$

1 Pravoúhlé trojúhelníky ACB, ACB_1 a ACB_2 mají společnou odvěsnu AC délky 10 cm. Vyjádřete pomocí nich hodnotu funkcí:

a) $\operatorname{tg} 20°$, $\operatorname{cotg} 20°$ b) $\operatorname{tg} 45°$, $\operatorname{cotg} 45°$ c) $\operatorname{tg} 50°$, $\operatorname{cotg} 50°$

d) Doplňte do rámečků znaménka nerovnosti:

$$\begin{array}{rcccc} 20° & \square & 45° & \square & 50° \\ \operatorname{tg} 20° & \square & \operatorname{tg} 45° & \square & \operatorname{tg} 50° \\ \operatorname{cotg} 20° & \square & \operatorname{cotg} 45° & \square & \operatorname{cotg} 50° \end{array}$$

Řešení

a) V $\triangle ACB$ je $\alpha = 20°$, délka protilehlé odvěsny $a \doteq 3{,}6$ cm, délka přilehlé odvěsny $b = 10$ cm.

$$\operatorname{tg} 20° \doteq \frac{3{,}6}{10} = 0{,}36 \qquad \operatorname{cotg} 20° \doteq \frac{10}{3{,}6} \doteq 2{,}78$$

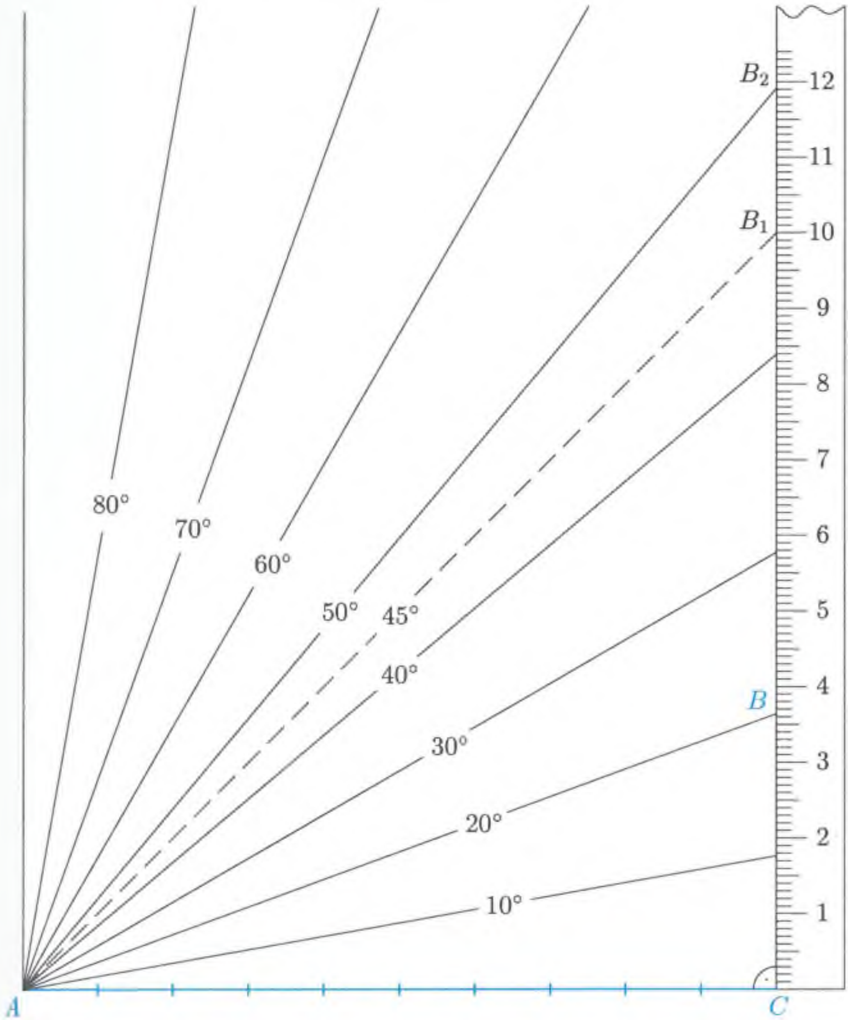
b) V $\triangle ACB_1$ je $\alpha_1 = 45°$, délka protilehlé odvěsny $a_1 = 10$ cm, délka přilehlé odvěsny $b_1 = 10$ cm.

$$\operatorname{tg} 45° = \operatorname{cotg} 45° = \frac{10}{10} = 1$$

c) V $\triangle ACB_2$ je $\alpha = 50°$, délka protilehlé odvěsny $a_2 \doteq 11{,}9$ cm, délka přilehlé odvěsny $b_2 = 10$ cm.

$$\operatorname{tg} 50° \doteq \frac{11{,}9}{10} = 1{,}19 \qquad \operatorname{cotg} 50° \doteq \frac{10}{11{,}9} \doteq 0{,}84$$

d)
$$\begin{array}{rcccc} 20° & < & 45° & < & 50° \\ \operatorname{tg} 20° & < & \operatorname{tg} 45° & < & \operatorname{tg} 50° \\ \operatorname{cotg} 20° & > & \operatorname{cotg} 45° & > & \operatorname{cotg} 50° \end{array}$$



Všimněte si!

Hodnoty funkce $y = \operatorname{tg} \alpha$ rostou s narůstající velikostí úhlu α. Hodnoty funkce $y = \operatorname{cotg} \alpha$ klesají s narůstající velikostí úhlu α.

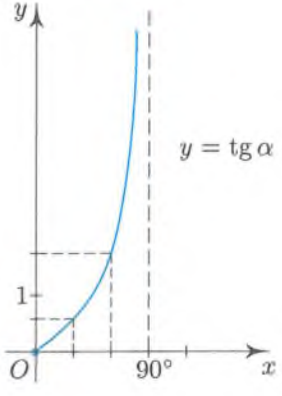
Pomocí našeho obrázku můžeme odhadnout hodnoty funkcí $y = \operatorname{tg} \alpha$ a $y = \operatorname{cotg} \alpha$ pro úhly, jejichž velikosti jsou menší nebo rovny 50°.

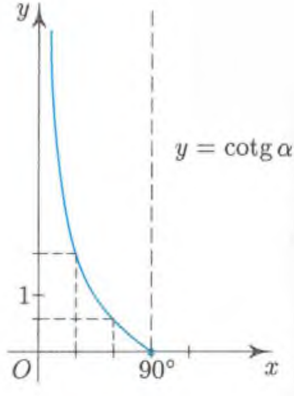
V tabulce jsou uvedeny hodnoty obou těchto funkcí pro vybrané úhly α.

α	$10°$	$20°$	$30°$	$40°$	$45°$	$50°$	$60°$	$70°$	$80°$
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0,18	0,36	0,58	0,84	1	1,19	1,73	2,75	5,67
$\mathrm{cotg}\,\alpha$	5,67	2,75	1,73	1,19	1	0,84	0,58	0,36	0,18

Funkce $y = \mathrm{tg}\,\alpha$ je definována v intervalu $\langle 0°, 90°)$. Je rostoucí v celém definičním oboru a nabývá všech kladných hodnot.
Funkce $y = \mathrm{cotg}\,\alpha$ je definována v intervalu $(0°, 90°\rangle$. Je klesající v celém definičním oboru a nabývá všech kladných hodnot.

2 Pomocí hodnot uvedených v tabulce můžeme sestrojit grafy obou funkcí.





Grafem funkce $y = \mathrm{tg}\,\alpha$ je křivka zvaná tangentoida.
Grafem funkce $y = \mathrm{cotg}\,\alpha$ je křivka zvaná kotangentoida.

3 Pomocí tabulek určete velikosti úhlů, platí-li:

a) $\mathrm{tg}\,\alpha = 9{,}788$ b) $\mathrm{cotg}\,\beta = 4{,}169$
c) $\mathrm{tg}\,\gamma = 0{,}577\,4$ d) $\mathrm{cotg}\,\delta = 0{,}24$

Řešení

Tabulky funkce tangens jsou označeny M 6C a funkce kotangens M 6D. Při vyhledávání hodnot těchto funkcí nezapomeňte, že funkce tangens je funkcí rostoucí a kotangens klesající.

V tabulkách zjistíme:

a) $\alpha = 84°10'$

b) nejbližší hodnota k číslu 4,169 je 4,165 pro $\beta = 13°30'$

c) $\gamma = 30°$

d) nejbližší je hodnota 0,240 1 pro $\delta = 76°30'$

4 Z tabulek vypište hodnoty:

a) $\operatorname{tg} 17°40'$ b) $\operatorname{tg} 59°50'$ c) $\operatorname{cotg} 2°10'$ d) $\operatorname{cotg} 44°$

Řešení

V tabulkách zjistíme:

a) $\operatorname{tg} 17°40' = 0{,}318\,5$ b) $\operatorname{tg} 59°50' = 1{,}72$

c) $\operatorname{cotg} 2°10' = 26{,}432$ d) $\operatorname{cotg} 44° = 1{,}036$

Připomínáme, že údaje v tabulkách jsou většinou zaokrouhlené. I hodnoty, které udává vaše kalkulačka, jsou zaokrouhlené. Kdykoli tedy počítáme s číselnými hodnotami goniometrických funkcí, jde zpravidla o přibližná řešení. Proto se snažíme dosazovat při řešení úloh konkrétní velikosti úhlů atp. až v závěru výpočtů.

CVIČENÍ

1. Porovnejte úhly δ, ω, β, γ podle velikosti aniž byste užili tabulek, víte-li, že:

a) $\operatorname{tg}\delta > \operatorname{tg}\omega$ b) $\operatorname{cotg}\beta < \operatorname{cotg}\gamma$

2. Seřaďte čtveřice úhlů podle velikosti vzestupně bez použití tabulek, víte-li, že

a) $\operatorname{tg}\delta = 2{,}989$, $\operatorname{tg}\delta_1 = 1{,}767$, $\operatorname{tg}\delta_2 = 13{,}727$, $\operatorname{tg}\delta_3 = 0{,}678\,7$,

b) $\operatorname{cotg}\varphi = 6{,}314$, $\operatorname{cotg}\varphi_1 = 1{,}744$, $\operatorname{cotg}\varphi_2 = 0{,}194\,4$, $\operatorname{cotg}\varphi_3 = 1$.

3. Jsou dány úhly $\alpha = 70°$, $\beta = 42°30'$, $\gamma = 86°10'$, $\delta = 23°$. Bez užití tabulek seřaďte sestupně:

a) tangenty těchto úhlů b) jejich kotangenty

4. Pomocí tabulek doplňte:

α	$17°10'$	$24°50'$	$71°$	$10°20'$	$7°40'$	$56°$	$77°$
$\operatorname{tg}\alpha$							
$\operatorname{cotg}\alpha$							

5. S využitím tabulek doplňte:

$\operatorname{tg}\alpha$	2,25	7,925	1,934 7	28,63	0,344
α					

6. Určete velikosti ostrého úhlu α a doplňte tabulku:

$\operatorname{cotg}\alpha$	0,328	7,56	2,51	6,7	1,025
α					

7. Odpovězte:

a) Co platí o součtu $\alpha + \beta$, je-li $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{cotg}\beta$?

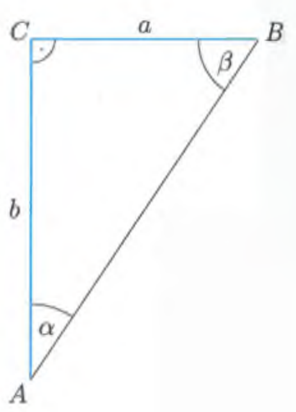
b) Jakou velikost má úhel δ, je-li $\operatorname{tg} 20°40' = \operatorname{cotg}\delta$?

3.7 Užití funkcí $y = \operatorname{tg}\alpha$ a $y = \operatorname{cotg}\alpha$

1 V pravoúhlém trojúhelníku ABC jsou délky odvěsen $a = 12\,\text{cm}$ a $b = 18\,\text{cm}$. Vypočítejte velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC.

Řešení

Načrtneme trojúhelník ABC a při výpočtu použijeme tabulky.



$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{18} \doteq 0{,}666\,7$$

$$\alpha \doteq 33°40'$$

Odtud:

$$\beta = 90^0 - \alpha$$

$$\beta \doteq 56°20'$$

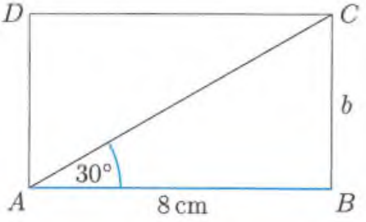
Ostré úhly pravoúhlého trojúhelníku ABC mají velikosti asi $33°40'$ a $56°20'$.

2 Vypočítejte obsah obdélníku $ABCD$, je-li dáno $|AB| = 8\,\mathrm{cm}$, $|\sphericalangle CAB| = 30°$.

Řešení

Pro obsah S obdélníku platí $S = a \cdot b$. Potřebujeme vypočítat délku strany b. V pravoúhlém $\triangle ABC$ známe úhel a přilehlou odvěsnu. K výpočtu protilehlé odvěsny použijeme funkci tangens.

$$\operatorname{tg} 30° = \frac{b}{8} \qquad / \cdot 8$$
$$b = 0{,}5774 \cdot 8$$
$$b \doteq 4{,}6 \ (\mathrm{cm})$$
$$S \doteq 8 \cdot 4{,}6 = 36{,}8 \ (\mathrm{cm}^2)$$



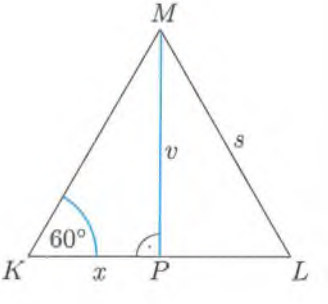
Obsah obdélníku $ABCD$ je přibližně $36{,}8\,\mathrm{cm}^2$.

3 Výška v rovnostranného trojúhelníku KLM má délku 6 cm. Vypočítejte obvod trojúhelníku KLM.

Řešení

Obvod rovnostranného trojúhelníku KLM se stranou s je $o = 3s$. Musíme vypočítat délku strany s. V pravoúhlém $\triangle KPM$ známe $|\sphericalangle MKP|$ a délku protilehlé odvěsny v. Přilehlá odvěsna x je rovna polovině strany s.

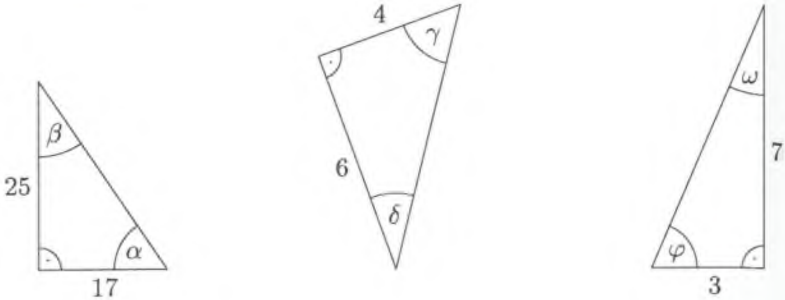
$$\operatorname{cotg} 60° = \frac{x}{v}$$
$$x = v \cdot \operatorname{cotg} 60° = 6 \cdot 0{,}5774$$
$$x \doteq 3{,}5 \ (\mathrm{cm})$$
$$s = 2x \doteq 2 \cdot 3{,}5 = 7 \ (\mathrm{cm})$$
$$o = 3 \cdot s \doteq 3 \cdot 7 = 21 \ (\mathrm{cm})$$



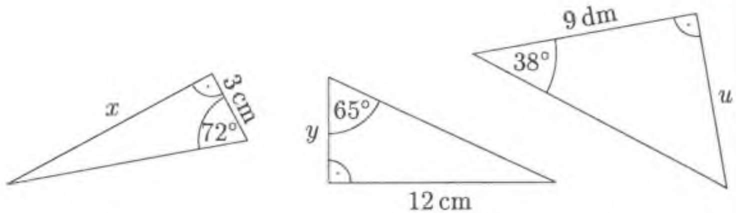
Obvod trojúhelníku KLM je přibližně 21 cm.

CVIČENÍ

1. Užitím funkcí tangens a kotangens vypočítejte velikosti ostrých úhlů těchto trojúhelníků:



2. Vypočítejte délku druhé odvěsny těchto trojúhelníků:



3. Vypočtěte výšku stromu, jehož vrchol vidíme ze země pod úhlem velikosti 56°, stojíme-li 18 m od paty tohoto stromu.

4. Určete obsah rovnostranného trojúhelníku, který má výšku 8 dm.

5. V rovnoramenném trojúhelníku PQR má základna PQ délku 9 cm a úhel proti ní ležící má velikost 80°. Vypočítejte výšku v k základně trojúhelníku PQR.

6. Výška pravoúhlého lichoběžníku $ABCD$, kde $AB \parallel CD$ a $AD \perp AB$, je rovna 5 cm. Úhlopříčka BD svírá se základnou AB úhel o velikosti 32°. Vypočítejte délku strany AB.

7. „Štafle“ mají při rozevření spodní konce od sebe vzdáleny 1,8 m. Jejich ramena svírají s vodorovnou rovinou úhel o velikosti 75°. Do jaké výšky takto postavené „štafle“ sahají?

8. Vypočítejte velikosti všech vnitřních úhlů rovnoramenného trojúhelníku, jehož základna má délku 1,2 m a výška k základně měří 2,2 m.

9. Dokažte, že platí: $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, $\operatorname{cotg} \alpha = \dfrac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$

3.8 Určování hodnot goniometrických funkcí pomocí kalkulačky

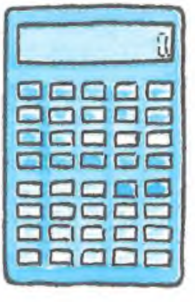
Většina kalkulaček má ve svém „repertoáru“ vestavěn výpočet řady důležitých funkcí. Jsou mezi nimi i funkce goniometrické. Máme-li takovou kalkulačku k dispozici, nepotřebujeme vyhledávat hodnoty goniometrických funkcí v tabulkách.

Ukážeme si, jak pomocí kalkulačky řešíme dvě základní úlohy:

1) k dané velikosti úhlu určit hodnotu příslušné funkce
2) k dané hodnotě funkce určit odpovídající velikost úhlu

Při práci s kalkulačkou je ovšem třeba seznámit se nejprve s návodem k použití té které kalkulačky. Na trhu je mnoho různých typů a uspořádání tlačítek může být jiné.

1 Určete hodnotu funkce $y = \sin \alpha$, jestliže
a) $\alpha = 23°$, b) $\alpha = 38°40'$.



Postup

a) $\boxed{\sin}\ 23\ \boxed{{}^\circ\ '\ ''}\ \boxed{=}\ \boxed{0{,}390731128}$

tlačítko pro stupně (minuty, vteřiny) — displej

Po zaokrouhlení na čtyři platné číslice: $\underline{\sin \alpha \doteq 0{,}3907}$

b) $\boxed{\sin}\ 38\ \boxed{{}^\circ\ '\ ''}\ 40\ \boxed{{}^\circ\ '\ ''}\ \boxed{=}\ \boxed{0{,}624788514}$

Po zaokrouhlení na čtyři platné číslice: $\underline{\sin \alpha \doteq 0{,}6248}$

2 Určete velikost úhlu β, jestliže: a) $\sin\beta = 0{,}3907$
b) $\sin\beta = 0{,}6248$

Postup

a) SHIFT $\sin^{-1}$: [ ] [sin] 0,3907 [=] → 22,99806246

značí „inverzní funkci“ k sin

SHIFT [ ] [° ′ ″] → 22°59′53,02″

Po zaokrouhlení: $\underline{\beta \doteq 23^\circ}$

b) SHIFT $\sin^{-1}$: [ ] [sin] 0,6247 [=] → 38,66017164

SHIFT [ ] [° ′ ″] → 38°39′36,62″

Po zaokrouhlení: $\underline{\beta \doteq 38^\circ 40'}$

3 Určete hodnotu funkce $y = \cos\alpha$, jestliže: a) $\alpha = 36^\circ$
b) $\alpha = 54^\circ 20'$

Postup

a) [cos] 36 [° ′ ″] [=] → 0,809016994

Po zaokrouhlení: $\underline{\cos\alpha \doteq 0{,}8090}$

b) [cos] 54 [° ′ ″] 20 [° ′ ″] [=] → 0,583068661

Po zaokrouhlení: $\underline{\cos\alpha \doteq 0{,}5831}$

4 Určete velikost úhlu β, jestliže: a) $\cos\beta = 0{,}8090$
b) $\cos\beta = 0{,}5831$

Postup

SHIFT $\cos^{-1}$

a) $\boxed{}$ $\boxed{\cos}$ 0,8090 $\boxed{=}$ $\boxed{36{,}00165653}$

SHIFT

$\boxed{}$ $\boxed{\circ\ '\ ''}$ $\boxed{36^\circ 0' 5{,}96''}$

Po zaokrouhlení: $\underline{\beta \doteq 36^\circ}$

SHIFT $\cos^{-1}$

b) $\boxed{}$ $\boxed{\cos}$ 0,5831 $\boxed{=}$ $\boxed{54{,}33112317}$

SHIFT

$\boxed{}$ $\boxed{\circ\ '\ ''}$ $\boxed{54^\circ 19' 52{,}04''}$

Po zaokrouhlení: $\underline{\beta \doteq 54^\circ 20'}$

5 Určete hodnotu funkce $y = \operatorname{tg} \alpha$, jestliže: a) $\alpha = 18^\circ$
b) $\alpha = 52^\circ 10'$

Postup

a) $\boxed{\tan}$ 18 $\boxed{\circ\ '\ ''}$ $\boxed{=}$ $\boxed{0{,}324919696}$

Po zaokrouhlení: $\underline{\operatorname{tg} \alpha \doteq 0{,}3249}$

b) $\boxed{\tan}$ 52 $\boxed{\circ\ '\ ''}$ 10 $\boxed{\circ\ '\ ''}$ $\boxed{=}$ $\boxed{1{,}287644694}$

Po zaokrouhlení: $\underline{\operatorname{tg} \alpha \doteq 1{,}288}$

Jak určíme hodnotu funkce kotangens, jestliže naše kalkulačka takové tlačítko nemá?

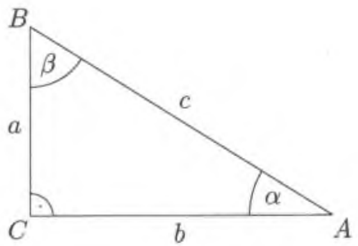
$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}, \quad \operatorname{cotg} \beta = \frac{a}{b}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{cotg} \beta$$

$$\alpha = 90^\circ - \beta$$

$$\underline{\operatorname{cotg} \beta = \operatorname{tg}(90^\circ - \beta)}$$



6 Určete hodnotu funkce $y = \operatorname{cotg}\alpha$, jestliže: a) $\alpha = 42°$
b) $\alpha = 35°40'$

Postup

a) $\operatorname{cotg} 42° = \operatorname{tg}(90° - 42°) = \operatorname{tg} 48°$

$\boxed{\tan}$ 48 $\boxed{\circ\ '\ ''}$ $\boxed{=}$ $\boxed{1{,}110612515}$

Po zaokrouhlení: $\operatorname{cotg} 42° \doteq 1{,}111$

b) $\operatorname{cotg} 35°40' = \operatorname{tg}(90° - 35°40') = \operatorname{tg} 54°20'$

$\boxed{\tan}$ 54 $\boxed{\circ\ '\ ''}$ 20 $\boxed{\circ\ '\ ''}$ $\boxed{=}$ $\boxed{1{,}393357135}$

Po zaokrouhlení: $\operatorname{cotg} 35°40' \doteq 1{,}393$

7 Určete velikost úhlu β, jestliže: a) $\operatorname{cotg}\beta = 0{,}2679$
b) $\operatorname{cotg}\beta = 0{,}8899$

Postup

$\operatorname{cotg}\beta = \operatorname{tg}(90° - \beta)$
Nejprve určíme pomocí funkce tangens velikost úhlu $\alpha = (90° - \beta)$, potom vypočítáme velikost úhlu β.

SHIFT $\tan^{-1}$
a) $\boxed{}$ $\boxed{\tan}$ 0,2679 $\boxed{=}$ $\boxed{14{,}99737025}$

SHIFT
$\boxed{}$ $\boxed{\circ\ '\ ''}$ $\boxed{14°59'50{,}53''}$

Po zaokrouhlení: $\alpha \doteq 15°$
$\beta = 90° - \alpha$
$\beta \doteq 75°$

SHIFT $\tan^{-1}$
b) $\boxed{}$ $\boxed{\tan}$ 0,8899 $\boxed{=}$ $\boxed{41{,}66588533}$

SHIFT
$\boxed{}$ $\boxed{\circ\ '\ ''}$ $\boxed{41°39'57{,}19''}$

Po zaokrouhlení: $\alpha \doteq 41°40'$
$\beta = 90° - \alpha$
$\beta \doteq 48°20'$

8 Určete hodnotu funkce $y = \sin\alpha$ pro $\alpha = 52°$ všemi způsoby, které jste poznali.

Řešení

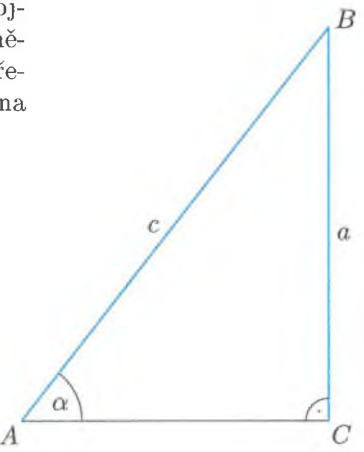
Tuto hodnotu můžeme určit

a) z grafu funkce $y = \sin\alpha$,
b) z pravoúhlého trojúhelníku s vnitřním úhlem α,
c) pomocí tabulek,
d) pomocí kalkulačky.

a) Použijeme graf funkce $y = \sin\alpha$ na str. 72.

$$\alpha = 52°$$
$$\underline{\sin\alpha \doteq 0{,}8}$$

b) Sestrojíme libovolný pravoúhlý trojúhelník ABC, $|\sphericalangle BAC| = 52°$. Změříme délku protilehlé odvěsny a přepony. Např. z trojúhelníku ABC na obrázku zjistíme:



$$a \doteq 52\,\text{mm}$$
$$\underline{c \doteq 66\,\text{mm}}$$

$$\sin 52° = \frac{a}{c}$$
$$\sin 52° \doteq \frac{52}{66}$$
$$\underline{\sin 52° \doteq 0{,}8}$$

(Výhodně zvolený trojúhelník by mohl mít přeponu délky 100 mm. Při konstrukci bychom sestrojili nejprve přeponu AB, pak Thaletovu kružnici a na závěr úhel BAC: $|\sphericalangle BAC| = 52°$.)

c) V tabulkách vyhledáme: $\underline{\sin 52° = 0{,}788\,0}$

d) Použijeme kalkulačku:

$\boxed{\sin}$ 52 $\boxed{°\ '\ ''}$ $\boxed{=}$ $\boxed{0{,}788010753}$

Po zaokrouhlení: $\underline{\sin 52° \doteq 0{,}788\,0}$

9 Určete velikost úhlu α, je-li $\sin\alpha = 0{,}711\,2$, všemi způsoby, které jste poznali.

Řešení

Opět můžeme využít graf funkce $y = \sin\alpha$, vhodný pravoúhlý trojúhelník, tabulky nebo kalkulačku.

a) Velikost úhlu vyčteme z grafu funkce $y = \sin\alpha$.

$$\sin\alpha = 0{,}711\,2 \doteq 0{,}7$$
$$\underline{\alpha \doteq 45^\circ}$$

b) Velikost úhlu α zjistíme měřením v pravoúhlém trojúhelníku ABC:
$\sin\alpha = 0{,}711\,2 \doteq 0{,}7$

$$\sin\alpha = \frac{7}{10}$$

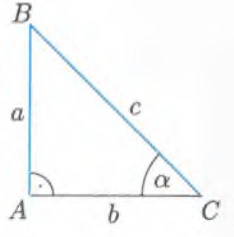
7 … délka odvěsny protilehlé k úhlu α

10 … délka přepony (ve stejných jednotkách)

Sestrojíme pravoúhlý trojúhelník s těmito rozměry a změříme velikost úhlu α.

$$\alpha \doteq 45^\circ$$

(Můžeme sestrojit kterýkoliv trojúhelník podobný trojúhelníku ABC. Podobné trojúhelníky se shodují ve všech úhlech — věta *uu*.)



c) Velikost úhlu vyhledáme v tabulkách:

$$\sin\alpha = 0{,}711\,2$$
$$\underline{\alpha = 45^\circ 20'}$$

d) Použijeme kalkulačku:

SHIFT $\sin^{-1}$

$\boxed{}$ $\boxed{\sin}$ 0,7112 $\boxed{=}$ $\boxed{45{,}33263468}$

SHIFT

$\boxed{}$ $\boxed{\circ\ '\ ''}$ $\boxed{45^\circ 19' 57{,}48''}$

Po zaokrouhlení: $\underline{\alpha \doteq 45^\circ 20'}$

Nejjednodušší je vyhledávání hodnot goniometrických funkcí v tabulkách. Tam se totiž tak snadno nedopustíte chyby. Kalkulačka je rychlejší a dává přesnější výsledky. Je však třeba pečlivě sledovat postup práce.

4 VÝPOČTY V GEOMETRII

Geometrické úlohy můžeme často řešit nejen konstrukcí, ale též výpočtem. V minulém roce jsme k výpočtům rozměrů geometrických obrazců a těles užívali řadu vzorců, Pythagorovu větu a shodnosti. Letos jsme se podrobněji seznámili s podobnostmi a nyní i s goniometrickými funkcemi. Všechny tyto poznatky budeme potřebovat při řešení následujících úloh. Naším cílem je „získat potřebné údaje“. Metody a cesty, které nás k cíli dovedou, do značné míry závisejí na našich vědomostech a nápadech.

Konstrukční řešení je velmi vhodné pro praxi. Klempíř i krejčí musí určit tvar, který z materiálu vystřihne, zedník pracuje podle geometrického plánu, soustružník obrábí součástku podle technického výkresu. Víme však, že měření není nikdy zcela přesné.

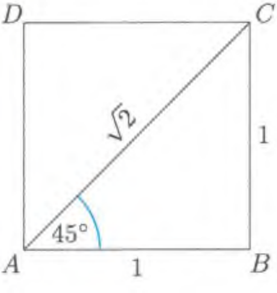
Při sestrojování map lidé kdysi také pouze měřili, ale později se ukázalo, že přesnější metodou je kombinace měření a výpočtů.

1 V technické praxi se velmi často používají pravoúhlé trojúhelníky rovnoramenné a trojúhelníky rovnostranné. Pomocí nich můžeme snadno získat hodnoty goniometrických funkcí pro úhly o velikosti 30°, 45° a 60°.

a) Určete hodnotu $\operatorname{tg}\alpha$ pro $\alpha = 45°$.

b) Určete hodnoty funkcí $\sin\alpha$ a $\cos\alpha$ pro $\alpha = 45°$.

Řešení



Nakreslíme čtverec $ABCD$ a jeho úhlopříčku AC. Předpokládejme, že $|AB| = 1$ (jednotka). Pak (podle Pythagorovy věty) je $|AC| = \sqrt{2}$. Vyznačíme úhel CAB, $|\sphericalangle CAB| = 45°$. Z trojúhelníku ABC vyčteme:

a) $\operatorname{tg} 45° = \dfrac{|BC|}{|AB|} = 1$

b) $\sin 45° = \dfrac{|BC|}{|AC|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos 45° = \dfrac{|AB|}{|AC|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

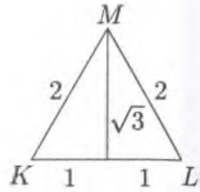
(Všimněte si, že jsme zlomek rozšířili $\sqrt{2}$ tak, aby ve jmenovateli nebyla odmocnina. Dělení iracionálním číslem se vyhýbáme. Porovnejte na kal-

kulačce podíly $1 : \sqrt{2}$ a $\sqrt{2} : 2$. Vycházejí na všech vašich kalkulačkách stejné výsledky?)
Výsledky a), b) převeďte na desetinná čísla a porovnejte s údaji v tabulkách goniometrických funkcí.

2 Určete hodnoty goniometrických funkcí $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ a $\mathrm{tg}\,\alpha$ pro úhly o velikosti 30° a 60°.

Návod k řešení

Načrtněte rovnostranný trojúhelník KLM se stranami délky 2 (jednotky).
Vypočtěte jeho výšku: $v = \sqrt{3}$.



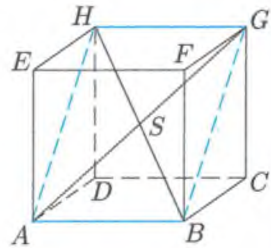
Výsledky příkladů 1 a 2 spolu se známými hodnotami pro $\alpha = 0°$ a $\alpha = 90°$ sestavíme do tabulky. Přidáme také sloupek hodnot pro funkci $y = \mathrm{cotg}\,\alpha$.

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{cotg}\,\alpha$
0°	0	1	0	—
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	1	0	—	0

3 Určete velikost úhlu, který svírají tělesové úhlopříčky AG a BH v krychli $ABCDEFGH$ a) graficky, b) výpočtem. Výsledky porovnejte.

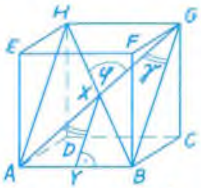
Řešení

Všechny krychle jsou podobné a proto řešení nezávisí na volbě délky hrany AB. Pro grafické řešení je však vhodný větší rozměr, pro výpočet zvolíme „vhodná“ čísla, např. $|AB| = 8\,\text{cm}$.

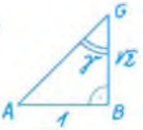


a) Načrtneme obraz krychle $ABCDEFGH$ a vyznačíme úhlopříčky AG a BH. Body A, B, G, H jsou vrcholy obdélníku, pro jehož kratší strany platí: $|AB| = |GH| = 8\,\text{cm}$. Delšími stranami BG a AH jsou úhlopříčky dvou stěn krychle. Jejich délka $d = |AH| = 8\sqrt{2}\,\text{cm}$. Obdélník $ABGH$ narýsujeme a velikost úhlu ASB změříme úhloměrem.

b) Výpočtem řešila úlohu Lenka.



Pravoúhlý $\triangle AGB$:



$|AB| = a$ (volím $a = 1$)

X - střed krychle

Y - střed AB

$\varphi = 2|\sphericalangle AXY| = 2|\sphericalangle AGB| = 2\gamma$

$\operatorname{tg}\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \doteq 0{,}7071$

$\gamma \doteq 35°16'$

$\varphi = 2\gamma \doteq 70°32'$

úhlopříčky svírají úhel $\varphi \doteq 70°32'$

4 Určete poloměr v kružnice vepsané pravidelnému pětiúhelníku $ABCDE$ a poloměr o kružnice opsané tomuto pětiúhelníku, je-li $|AB| = 6\,\text{cm}$.

Návod k řešení

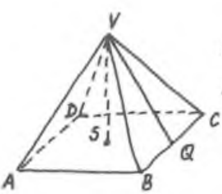
a) Grafické řešení
Narýsujte libovolný pravidelný pětiúhelník $A'B'C'D'E'$ se středem S ($|\sphericalangle A'SB'| = 72°$, použijte úhloměr) a pomocí stejnolehlosti se středem S k němu sestrojte hledaný pětiúhelník $ABCDE$. Pak můžete měřením zjistit délky poloměrů v a o.

b) Načrtněte pravidelný pětiúhelník $ABCDE$ a označte X střed úsečky AB. V pravoúhlém trojúhelníku AXS je vnitřní úhel φ při vrcholu S roven 36°. Pomocí goniometrických funkcí zjistíte:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{3}{v}, \quad \text{tedy } v = \frac{3}{\operatorname{tg} 36°}$$

$$\sin\varphi = \frac{3}{o}, \quad \text{tedy } o = \frac{3}{\sin 36°}$$

5 V poušti byla objevena nová pyramida tvaru pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$. Archeologové změřili dostupné rozměry a vrátili se s tímto náčrtkem:



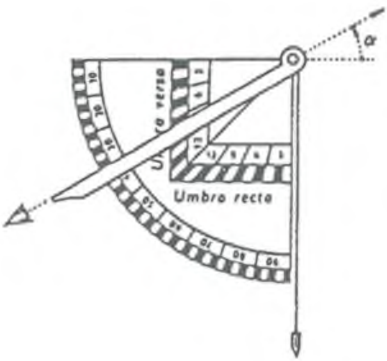
VQ ... 250 sáhů

AB ... 300 sáhů

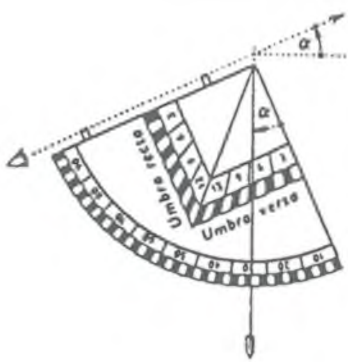
a) Narýsujte půdorys a nárys pyramidy ve vhodném měřítku.
b) Vypočtěte výšku pyramidy v sázích.
c) Vypočtěte úhel, který svírá šikmá hrana AV pyramidy s úhlopříčkou AC její podstavy.
d) Pyramida byla kryta leštěným vápencem, z něhož se u jejího vrcholu dochovala pouze desetina původního obložení. Kolik sáhů čtverečných leštěného povrchu na pyramidě ještě zůstalo?
e) Porovnejte výpočty s rozměry, které lze zjistit z technického obrázku.

Návod k řešení jistě už nepotřebujete. Základem všeho je dobrý obrázek, pečlivé značení všech daných rozměrů a úhlů a vaše znalosti vlastností trojúhelníků.

6 Nejrozšířenějším středověkým úhlojevným přístrojem užívaným v astronomii, v zeměměřictví i námořní plavbě byl kvadrant. Na obrázku máte uvedeny dva základní typy kvadrantů:
a) kvadrant s tzv. alhidádou (záměrné raménko)
b) kvadrant bez alhidády



Kvadrant s alhidádou
Čtení: $\alpha = 30°$, $\operatorname{tg}\alpha \doteq 6{,}9/12 \doteq 0{,}58$



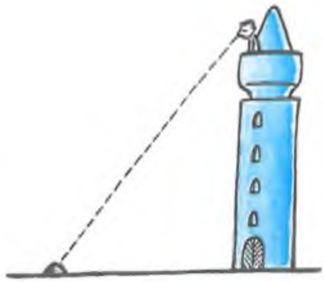
Kvadrant bez alhidády
Čtení: $\alpha = 24°$, $\operatorname{tg}\alpha \doteq 5{,}4/12 = 0{,}45$

V obou případech jde o čtvrtinu kruhu, jehož obvod je rozdělen na 360 dílků. Kvadrant umožňoval měření úhlů do velikosti 90°. Další stupnice po dvou stranách menšího čtverce v kvadrantu sloužila k přibližnému určení tangenty či kotangenty měřeného úhlu.
Sestrojte z tuhého papíru kvadrant bez alhidády a určete pomocí něho výšku vaší školní budovy od země po okap (výšku sloupu atd.).
Další informace a náměty práce se starými přístroji najdete v herně.

CVIČENÍ

1. Určete velikost vnitřních úhlů pravoúhlého trojúhelníku se stranami $a = 3\,\text{cm}$, $b = 4\,\text{cm}$, $c = 5\,\text{cm}$.

2. Vypočtěte výšku rozhledny, z jejíhož vrcholu vidíte kámen ležící 60 m od její paty pod hloubkovým úhlem 44°.



3. Tělesová úhlopříčka krychle K má délku 20 cm. Vypočtěte
a) délku hrany krychle K,
b) objem krychle K.

4. Úhlopříčky kosočtverce $ABCD$ mají délky $|AC| = 16\,\text{cm}$, $|BD| = 12\,\text{cm}$. Vypočtěte velikosti vnitřních úhlů kosočtverce a jeho obsah.

5. Pravidelný čtyřboký hranol má výšku 1 dm a obsah jeho podstavy je $4\,\text{dm}^2$. Vypočtěte délku jeho tělesových úhlopříček.

6. Pravidelný čtyřboký hranol má výšku 1 dm a jeho tělesové úhlopříčky svírají s rovinou podstavy úhel velikosti 55°. Vypočtěte délku tělesových úhlopříček, úhlopříček podstavy a délku podstavných hran hranolu.

7. Jak velký úhel svírají navzájem tečny vedené z bodu A ke kružnici $k(S, 5\,\text{cm})$, je-li $|SA| = 14\,\text{cm}$?

8. Délky stran obdélníku jsou v poměru 3 : 5. Vypočtěte velikosti úhlů, které svírají úhlopříčky se stranami tohoto obdélníku.

9. Jakou délku má tětiva v kružnici o poloměru $r = 4\,\text{cm}$, která přísluší středovému úhlu velikosti 72°?

10. Vypočtěte objem rotačního kužele s průměrem podstavy 1,8 dm, jestliže jeho strany svírají s podstavou úhel $\varphi = 58°$.

11. Základny rovnoramenného lichoběžníku $ABCD$ mají délky 9,5 cm a 5,5 cm. Jeho ramena svírají s delší základnou úhel $\alpha = 36°$. Vypočtěte
a) obvod,
b) obsah lichoběžníku $ABCD$.

12. V jaké výšce se dotýká zdi žebřík, svírá-li se svislicí úhel $\beta = 21°50'$ a o zem je opřen ve vzdálenosti 120 cm od paty zdi?

13. Pouliční lampa na vrcholu stožáru vysokého 5 m osvětluje na ulici prostor vymezený světelným kuželem, jehož světelné paprsky svírají s osou kužele úhel nejvýše 50°. Kolik m^2 ulice je touto lampou osvětleno?

14. Věž čtvercového půdorysu je zastřešena střechou tvaru jehlanu a její okap má délku 24 m. Na natření střechy (bez rezervy a ohybů) je třeba počítat se spotřebou barvy na $60\,m^2$.

a) Určete výšku střechy nad věží.

b) Určete velikost úhlu, který svírají roviny střechy s vodorovnou rovinou. (Tangentě tohoto úhlu říkáme spád roviny. Na spádu střechy velmi záleží.)

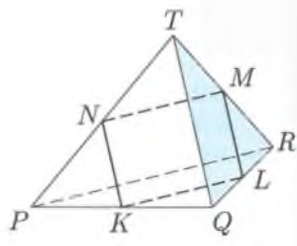
15. Lanovka vyjíždí ze stanice D v nadmořské výšce 1 200 m do stanice H, která je o 350 m výše. Přímá vzdálenost těchto dvou stanic je 1 000 m.

a) Lano nesoucí kabiny lanovky je o 22 % delší než přímá vzdálenost obou stanic. Jaká je jeho délka?

b) Na mapě nezachycujeme přímé vzdálenosti míst, ale vzdálenosti jejich průmětů do vodorovné roviny. S jakou vzdáleností obrazů stanic H a D je třeba počítat při sestrojování mapy okolí lanové dráhy?

c) V jaké vzdálenosti od sebe budou značky stanic D a H na mapě sestrojené v měřítku 1 : 2 500?

16. Na obrázku je znázorněn pravidelný čtyřstěn $PQRT$, který je rozdělen rovinou $KLMN$ na dvě shodná tělesa.



a) Sestrojte síť čtyřstěnu a vyznačte v ní úsečky KL, LM, MN, NK.

b) Dokažte, že čtyřúhelník $KLMN$ je čtverec.

c) Vypočtěte objem čtyřstěnu $PQRT$, je-li $|PQ| = 10\,\text{cm}$.

d) Sestrojte model obou těles, na které se čtyřstěn rozpadne řezem $KLMN$.

e) Vymodelujte z dvojice vzniklých těles další tělesa a určete jejich povrchy.

17. Stěny pravidelného dvanáctistěnu jsou tvořeny shodnými pravidelnými pětiúhelníky. Sestrojte ze čtvrtky síť takového dvanáctistěnu, je-li poloměr kružnice opsané pětiúhelníku stěny roven 5 cm.

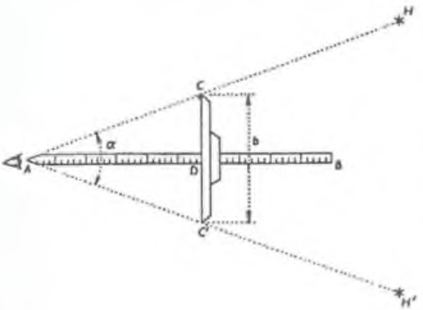
a) Sestrojte model pravidelného dvanáctistěnu.

b) Přesvědčte se, že dvojice protilehlých stěn tohoto tělesa leží v rovnoběžných rovinách.

c) Vypočtěte povrch tohoto dvanáctistěnu.

d) Určete počet vrcholů, stěn a hran tohoto tělesa.

18. Běžnou středověkou měřickou pomůckou byla tzv. Jakubova hůl (baculus geometricus nebo Jacob), kterou vidíte na obrázku.



Tyč CC' se posouvala svým středem po tyči AB, která byla opatřena měřítkem buď délkovým (vzdálenost ramene CC' od bodu A) nebo přímo udávajícím velikost úhlu α ve stupních.

a) Vyjádřete tg $\frac{\alpha}{2}$ z Jakubovy hole nastavené jako na uvedeném obrázku.

b) Zjistěte pomocí Jakubovy hole svou vzdálenost od budovy, jejíž výšku znáte.

19. Velká čínská zeď je jednou z největších známých staveb na Zemi. Její počátky sahají do 3. století před naším letopočtem, ale budovala se ještě za dynastie Ming (1368–1644). Její délka 2 414 km je úctyhodná. Zeď je většinou 9 m vysoká a přibližně 9 m široká.

a) Porovnejte objem této zdi s objemem největší egyptské pyramidy. Objem Cheopsovy pyramidy před poškozením byl odhadnut na $2\,521\,000\,\mathrm{m}^3$ a její původní výška na 146 m (včetně zlatého hrotu, který ji korunoval).

b) Současná výška pyramidy je asi 137 m a její objem je $2\,352\,000\,\mathrm{m}^3$. Určete délku hrany její čtvercové podstavy.

5 ZÁKLADY FINANČNÍ MATEMATIKY

5.1 Opakování některých základních pojmů

Finanční matematiku dnes potřebuje ve své práci i v soukromém rozhodování stále více lidí. Mají-li volné finanční prostředky, uvažují, jak je zhodnotit. Existuje celá řada produktů, které to umožňují: termínované vklady, vkladové certifikáty, podílové listy, cenné papíry, spoření (např. klasické, stavební, penzijní) a další. Potřebují-li peníze, mohou využít různých půjček, úvěrů, hypoték, nákupů na leasing apod. Znalost základů finanční matematiky proto patří ke všeobecnému vzdělání.
Zopakujeme si nejprve některé matematické pojmy a postupy, které se ve finančnictví běžně používají.

Počítání s procenty

Slovo procento (%) je latinského původu a znamená setinu nějakého celku (základu). V úlohách s procenty se objevují tyto tři údaje:

- základ (z)
- počet procent (p)
- procentová část ($č$)

Dva z těchto údajů obvykle známe, třetí máme vypočítat. Podle toho rozlišujeme tři základní typy úloh na počítání s procenty:

1. výpočet procentové části, známe-li základ a počet procent
2. výpočet základu, známe-li jeho část a odpovídající počet procent
3. výpočet počtu procent, známe-li základ a část základu

V 7. ročníku jste tyto úlohy řešili buď trojčlenkou nebo pomocí výpočtu jednoho procenta, či pomocí vzorců

$$č = z \cdot \frac{p}{100}, \quad z = č : \frac{p}{100}, \quad \frac{p}{100} = č : z.$$

Výpočet procentové části

1 Obchodník nabízí pětiprocentní slevu na pračku, jejíž maloobchodní cena je 14 500 Kč. Kolik korun sleva představuje?

Řešení

Zopakujte si postupy řešení, které jste se naučili v 7. ročníku.

Pomocí trojčlenky:

$$\begin{array}{lr} \uparrow 100\,\% \;.\;.\;.\;.\;.\; & 14\,500\,\text{Kč} \uparrow \\ 5\,\% \;.\;.\;.\;.\;.\; & x\,\text{Kč} \end{array}$$

$$x : 14\,500 = 5 : 100$$

$$100 \cdot x = 5 \cdot 14\,500$$

$$x = 5 \cdot \frac{14\,500}{100}$$

$$x = 725$$

Pomocí vzorce $č = z \cdot \dfrac{p}{100}$:

$z = 14\,500\,\text{Kč}$

$p = 5\,\%$

$$č = z \cdot \frac{p}{100}$$

$$č = 14\,500 \cdot 0{,}05$$

$$č = 725$$

Pomocí výpočtu 1 %:

$$\begin{array}{rl} 100\,\% \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; & 14\,500\,\text{Kč} \\ 1\,\% \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; & 145\,\text{Kč} \\ 5\,\% \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; & 5 \cdot 145\,\text{Kč} = 725\,\text{Kč} \end{array}$$

Použijeme-li kalkulačku:

$$\underbrace{\boxed{1}\,\boxed{4}\,\boxed{5}\,\boxed{0}\,\boxed{0}}_{\text{základ}}\quad \underset{\text{krát}}{\boxed{\times}}\quad \underset{\text{počet}}{\boxed{5}}\quad \underset{\text{procent}}{\boxed{\%}}$$

na displeji se objeví 725

Sleva představuje částku 725 Kč.

Výpočet základu

2 Sazba daně z příjmu činila 27,5 %. Z jakého hrubého příjmu byla vypočítána daň 2 750 Kč?

Řešení

$č = 2\,750\,\text{Kč}$

$p = 27{,}5\,\%$

$$z = č : \frac{p}{100}$$

$$z = 2\,750 : 0{,}275$$

$$z = 10\,000$$

$$z = 10\,000\,\text{Kč}$$

Použijeme-li kalkulačku:

$$\underbrace{\boxed{2}\,\boxed{7}\,\boxed{5}\,\boxed{0}}_{\text{část}}\quad \underset{\text{děleno}}{\boxed{\div}}\quad \underbrace{\boxed{2}\,\boxed{7}\,\boxed{.}\,\boxed{5}}_{\text{počet}}\quad \underset{\text{procent}}{\boxed{\%}}$$

na displeji se objeví 10 000

Daň 2 750 Kč byla vypočítána z částky 10 000 Kč.

Výpočet počtu procent

3 O kolik procent se zvýšila průměrná mzda v rozpočtové sféře v roce 1998 oproti roku 1997? (V rozpočtové sféře pracují zaměstnanci placení přímo ze státního rozpočtu a lidé, kteří pobírají plat od okresního úřadu nebo od obcí. Jsou to např. zaměstnanci státní správy, učitelé, pracovníci ve zdravotnictví apod.)

Řešení

Průměrná mzda v r. 1997 . . . . . 9 983 Kč,
průměrná mzda v r. 1998 . . . . . . 10 374 Kč,
nárůst . . . . 391 Kč.

100 % . . . 9 983 Kč
1 % . . . 99,83 Kč
391 : 99,83 ≐ 3,9

Použijeme-li kalkulačku:

$$\underbrace{\boxed{3}\ \boxed{9}\ \boxed{1}}_{\text{část}}\ \underbrace{\boxed{\div}}_{\text{děleno}}\ \underbrace{\boxed{9}\ \boxed{9}\ \boxed{8}\ \boxed{3}}_{\text{základem}}\ \underbrace{\boxed{\%}}_{\text{v procentech}}$$

na displeji se objeví 3,9 (zaokr.)

Nárůst hrubé průměrné mzdy v rozpočtové sféře v roce 1998 oproti roku 1997 činil asi 3,9 %.

Úrok

Ze 7. ročníku už víte, že úrok je „odměna“, kterou platí peněžní ústav občanovi za to, že si u něj uložil na nějakou dobu peníze. Občan zase platí úrok bance, pokud si od banky peníze na nějakou dobu půjčil.
Výše úroku závisí:

- na uložené nebo půjčené částce
- na době, po které jsou peníze uloženy nebo půjčeny (této době se říká úroková doba, doba splatnosti, doba existence smluvního vztahu)
- na výši úrokové sazby (úrokové míry) peněžního ústavu

Úrokové sazby termínovaných vkladů v korunách* (v % za rok)

Banka	1 týden		1 měsíc		3 měsíce		6 měsíců		1 rok	
Agrobanka GE	-	5,20	-	5,30	4,30	5,40	4,90	5,70	5,30	5,80
Česká spořitelna	4,00	5,30	4,00	5,50	4,00	5,50	4,00	5,50	4,00	5,60
ČSOB	4,25	4,95	4,30	5,00	4,35	5,05	4,40	5,10	4,55	5,25
Expandia Banka	3,70	4,50	3,70	4,70	3,90	5,00	4,10	5,40	4,30	5,50
Erste Bank	4,60	4,90	5,01	5,11	5,03	5,13	5,28	5,40	5,37	5,47
Interbanka	-	5,55	5,00	5,60	5,10	5,70	5,15	5,75	5,30	5,90
IPB	4,80	5,20	4,80	5,20	5,00	5,40	5,10	5,50	5,40	5,80
Komerční banka	4,20	5,10	4,30	5,20	4,40	5,30	4,60	5,40	4,60	5,50
Moravia Banka	6,10	6,60	6,30	6,80	6,50	7,00	5,50	6,00	5,70	6,20
[illegible]	4,85	5,25	5,05	5,40	5,15	5,45	5,20	5,50	5,25	5,45
První městská banka	5,30	5,60	5,30	5,70	5,50	5,80	5,50	6,00	5,60	5,90
Raiffeisenbank	-	-	5,00	5,20	5,10	5,30	5,30	5,50	5,45	5,65
Union banka	5,20	5,50	5,20	5,50	5,40	5,70	5,60	5,90	5,60	5,90
Volksbank	3,25	4,56	3,54	4,54	3,81	4,61	4,04	5,04	4,45	5,45
Živnobanka	-	4,84	4,44	4,84	4,77	5,17	5,10	5,50	5,21	5,81

Pozn.: * první sloupec platí pro vklady do 100 000 korun, druhý pak pro vklady do milionu korun, [illegible] Pramen: Banky

4 Pan Novák si uložil 80 000 Kč na 1 rok u peněžního ústavu, který nabízí roční úrokovou sazbu 5,6 %. Kolik korun bude činit úrok po uplynutí sjednané doby? Kolik korun bude mít pan Novák na svém účtu po uplynutí sjednané doby, je-li úrok zdaněn 15 %?

Řešení

Jde o jednoduchou úlohu na výpočet procentové části.

uložená částka . . . . $z = 80\,000$ Kč
úroková míra . . . . $p = 5{,}6\,\%$
úrok je vlastně procentová
část, odpovídající 5,6 % . . . . $č = z \cdot \dfrac{p}{100}$

$$
\begin{array}{l}
\check{c} = z \cdot \dfrac{p}{100} \\
\hline
\check{c} = 80\,000 \cdot 0{,}056 \\
\check{c} = 4\,480 \\
\hline
\check{c} = 4\,480\,\text{Kč}
\end{array}
$$

Úrok činil po uplynutí jednoho roku 4 480 Kč.

Je-li daň z úroku 15 %, připíše banka panu Novákovi jen 85 % z částky 4 480 Kč.

$$
\begin{array}{l}
z = 4\,480\,\text{Kč} \\
p = 85\,\% \\
\check{c} = z \cdot \dfrac{p}{100} \\
\hline
\check{c} = 4\,480 \cdot 0{,}85 \\
\check{c} = 3\,808 \\
\hline
\check{c} = 3\,808\,\text{Kč}
\end{array}
$$

Pan Novák bude mít v bance po připsání úroku 80 000 Kč + 3 808 Kč, tj. 83 808 Kč.

Užití funkcí

Z funkcí, které jsme dosud poznali, se v ekonomických úvahách často používají: přímá úměrnost, nepřímá úměrnost, lineární funkce.

SPTELECOM

SPT TELECOM, a.s.
oblast Praha, o.z.
Olšanská 6
130 84 Praha 3

DIČ:
Číslo účtu:

Reklamační místo:
SPT TELECOM, a.s.
oblast Praha, o.z.
oddělení reklamací VÝCHOD
Přístavní 14
170 04 Praha 74
Tel: 02/71461111

VYÚČTOVÁNÍ ZA TELEKOMUNIKAČNÍ SLUŽBY

NEPLAŤTE !

Referenční číslo	DIČ plátce	Bankovní spojení / SIPO

Sídlo

00/00VY
0509844

Pardubice 02
22.07.1999

Účtovací období	Datum vystavení dokladu	Datum uskutečnění zdanitelného plnění
06/1999	15.07.1999	30.06.1999
Variabilní symbol (poř. č.)	Konstantní symbol	Datum splatnosti

NEPLAŤTE - Částka 'Celkem k platbě' bude inkasována v běžném měsíci z Vašeho účtu nebo zahrnuta do SIPO v následujícím měsíci.

Ceny účtované za poskytnuté služby:

UTO Účastnické č. Datum odečtu	Počet tarifních impulzů: Druh spojení	Počátek	Konec	Rozdíl k platbě	Zařízení Služba	DPH %	Cena služby Kč	Celkem cena Kč
2	D	35761	35866	105	Telefonní stanice			
					Používání HTS	5	135.00	
					Pronájem stand tel př do 04/97	5	6.30	
26.06.1999					tarifní impuls za cenu 2.60 Kč	5	234.00	
					tarifní impuls za cenu 1.05 Kč	5	15.75	391.05

Cena bez DPH 5 %	372.44
DPH 5 %	18.61
Celkem cena s DPH 5 %	391.05
Celkem cena s DPH	**391.00**
Celkem k platbě Kč	**391.00**

5 Určete výši telefonního účtu za pevnou telefonní linku (bez daně z přidané hodnoty) v měsíci, ve kterém bylo zaznamenáno 115 tarifních impulsů.
Paušální platbu, nezávislou na počtu uskutečněných hovorů, tvoří částka 135 Kč za používání telefonní stanice a částka 6,30 Kč za používání telefonního přístroje. Cena za jeden impuls je 2,60 Kč.

Řešení

Výši poplatku můžeme vyjádřit pomocí lineární funkce. Její rovnice je:

$$\boxed{y} = \boxed{a} \cdot \boxed{x} + \boxed{b}$$

celková výše účtu v Kč

cena za jeden impuls
(tj. 2,60 Kč)

počet uskutečněných impulsů

paušální platba 141,30 Kč
(135 Kč + 6,30 Kč)

$$y = a \cdot x + b$$
$$y = 2{,}60 \cdot x + 141{,}30$$
$$y = 2{,}60 \cdot 115 + 141{,}30$$
$$y = 299 + 141{,}30$$
$$y = 440{,}30$$
$$y = 440{,}30\ \text{Kč}$$

Výše účtu za telefon (bez DPH) činila ve sledovaném měsíci 440,30 Kč.

Grafické řešení úlohy

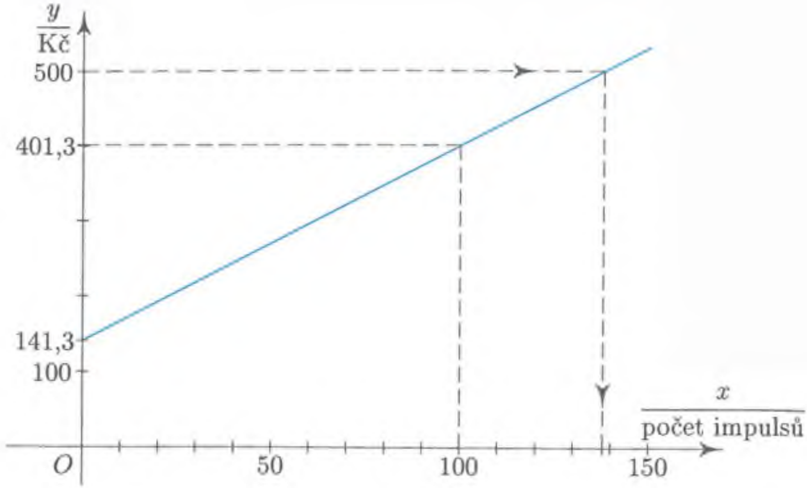
Grafem lineární funkce je množina bodů ležících na přímce. K jejímu sestrojení potřebujeme určit dva různé body grafu.

$$y = 2{,}60 \cdot x + 141{,}30$$

Např. pro $x = 0$ vypočteme $y = 141{,}30$;
pro $x = 100$ je $y = 401{,}30$.

Souřadnice bodů jsou $[0; 141{,}30]$, $[100; 401{,}30]$.

Sestrojíme graf:



Z grafu můžeme např. zjistit, při jakém počtu impulsů je výše účtu 500 Kč.

6 Podle kursovního lístku z 5. 8. 1999 stála jedna německá marka (1 DEM) 18,621 Kč. Kolik korun se zaplatilo za 100, 200, ..., 500 DEM? (Neuvažujeme poplatek za výměnu peněz.)

Řešení

Jde o přímou úměrnost. Její rovnice je:

$$\underbrace{\boxed{y}}_{\text{Kč}} = \underbrace{\boxed{k}}_{\text{kurs}} \cdot \underbrace{\boxed{x}}_{\text{DEM}}$$

$$y = 18{,}621 \cdot x$$

Pro $x = 100$ DEM:

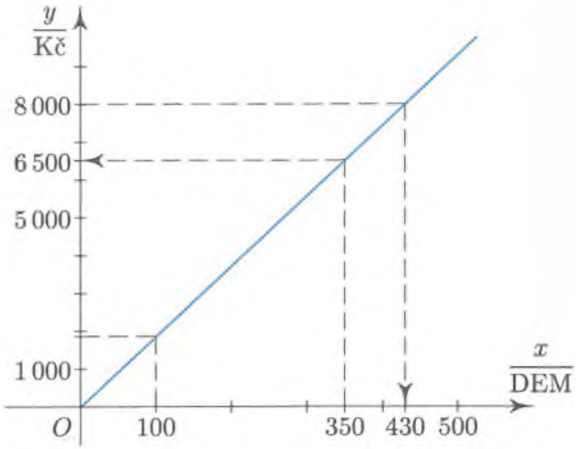
$$y = 18{,}621 \cdot 100$$
$$y = 1862{,}1$$
$$\underline{\underline{y = 1862{,}1\,\text{Kč}}}$$

Vypočtené hodnoty zapíšeme do tabulky:

x (DEM)	1	100	200	300	400	500
y (Kč)	18,621	1862,1	3724,2	5586,3	7448,4	9310,5

Grafické řešení (údaje zaokrouhlíme)

Grafem přímé úměrnosti je množina bodů, které leží na přímce procházející počátkem soustavy souřadnic.
Stačí najít souřadnice jednoho dalšího bodu: např. pro $x = 100$ je $y = 1862{,}1$.



Z grafu lze přibližně určit, kolik zaplatíme například za 350 DEM (asi 6 500 Kč), či kolik DEM dostaneme za 8 000 Kč (asi 430 DEM).

7 Petr plánuje cestu do zahraničí. V nabídce cestovní kanceláře zjistil, že by ho stála přibližně 15 000 Kč.

a) Za jak dlouho (za kolik měsíců) ji bude moci uskutečnit, jestliže je schopen uložit měsíčně 750 Kč a cena zájezdu se nezmění?

b) Kolik Kč by musel měsíčně uspořit, aby cestu mohl uskutečnit už za rok?

Řešení

a) Užijeme nepřímou úměrnost. Její rovnice je:

$$\boxed{y} = \frac{\boxed{k}}{\boxed{x}}$$

y – počet měsíců potřebných k našetření cílové částky

k – výše cílové částky (tj. 15 000 Kč)

x – měsíční úspory v Kč

$$y = \frac{15\,000}{x}$$

$$y = \frac{15\,000}{750}$$

$$y = 20$$

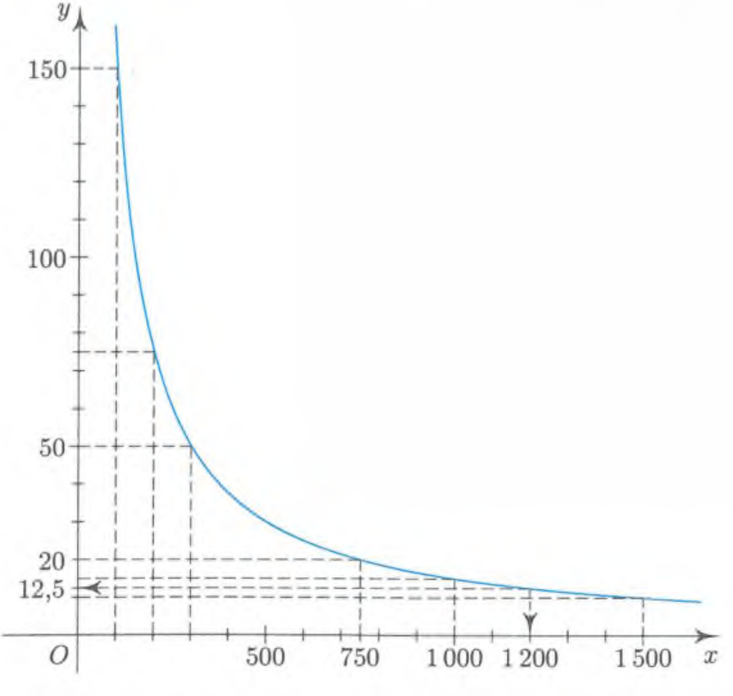
$$y = 20 \text{ měsíců}$$

Petr uspoří na plánovanou cestu za 20 měsíců.

b) Druhou část úlohy můžeme řešit graficky.
Grafem nepřímé úměrnosti je množina bodů ležících na hyperbole.
Vypočítáme souřadnice několika bodů a zapíšeme je do tabulky:

x (výše měsíčních úspor v Kč)	100	200	300	500	600	750	1000	1500
y (počet měsíců)	150	75	50	30	25	20	15	10

Sestrojíme graf:



Kolikrát se zvětší výše měsíčních úspor, tolikrát se zmenší doba potřebná k naspoření cílové částky. Kdyby Petr dokázal uspořit měsíčně 1200 Kč, dosáhl by potřebné částky přibližně za jeden rok (za 12,5 měsíce).

CVIČENÍ

1.

Přehled rodinných výdajů 9. 8.-22. 8. 1999 (Kč)

Výdaje	Královi	Sobotkovi	Jersáková	Patera
Jídlo doma	2547	1042	789	82
Jídlo mimo	56	545	312	764
Alkohol+tabák	149		170	146
Odívání				
Obuv				
Bydlení	2800		1700	
Provoz domácnosti	142	71	385	
Škola				
Kultura+sport	55	255	80	
Doprava+spoje		176	87	
Auto	72			
Léky+zdravotnictví	117		500	
Ostatní	3000	1500	2259	575
Výdaje celkem	8938	3589	6282	1567

Jídlo	Bydlení a domácnost	Ostatní
2 603 Kč	2 942 Kč	3 393 Kč

Kolik procent z celkových týdenních výdajů činily ve sledovaném týdnu náklady na jídlo u rodiny Králových? Kolik procent činily náklady na domácnost a na bydlení?

2. Plat zaměstnance se během roku zvýšil z 9 983 Kč na 10 732 Kč. Pokrylo zvýšení platu inflaci, která činila ve sledovaném roce 7 %?

3. Vypočtěte, o kolik procent byly zlevněny jednotlivé zájezdy uvedené v nabídce.

Nabídka zájezdů na poslední chvíli !!!
Paříž: 2.-7. 9., dříve ~~5990,-~~,
nyní 5490,-, 3x hotel, 3x snídaně
Maroko: 18. 9.-2. 10., dříve ~~20950,-~~,
nyní 19950,-, 12x hotel, 12x polopenze

Verona, Florencie, Řím, Benátky:
termíny: 22.-29. 8., 12.-19. 9., dříve ~~9990,-~~,
nyní 8990,-, 5x hotel, 5x polopenze
Sicílie: 2.-12. 9., dříve ~~15990,-~~, nyní 15490,-,
6x hotel, 6x polopenze, 2x trajekt
Andalusie: 5.-18. 9., dříve: ~~17250,-~~,
nyní 16550,-, 10x hotel, 9x polopenze
Klasický okruh Řeckem: 23. 9.-3. 10., dříve:
~~12690,-~~, nyní 11690,-, 6x hotel, 6x snídaně

4. Daňové příjmy do obecních rozpočtů v r. 1999 v jednom okrese ve středních Čechách jsou uvedeny v tabulce:

Daňové příjmy do obecních rozpočtů		
Název daně:	Rozdělení daně	Průměrný podíl jednotlivých daní na celkovém daňovém příjmu obce:
daň z nemovitostí	100% do rozpočtu obce	9,5%
daň z příjmu fyzických osob ze závislé činnosti a funkčních požitků	z celookresního výnosu 40% státu, 30% okresnímu úřadu, 20% všem obcím v okrese podle počtu obyvatel, 10% obcím, ve kterých má plátce daně uzavřenou pokladnu	29,3%
daň z příjmu právnických osob	z veškerých vybraných peněz zůstává 80% státu a 20% se rozděluje obcím podle počtu obyvatel	36,2%
daň z příjmu z podnikání fyzických osob	odvádí plátce v místě svého trvalého sídla	25%

Roční rozpočet jedné obce počítá s příjmy kolem 12 milionů Kč. Vypočtěte, kolik korun by podle této tabulky činily příjmy obce z daní: z nemovitostí, z příjmů fyzických osob, z příjmů právnických osob, z příjmů z podnikání.

5. Autobazar nabízí prodej ojetých aut na leasing. Kupujícímu stačí jen 30 % z ceny auta v hotovosti. Pan Novák má k dispozici v hotovosti 60 000 Kč a je ochoten platit měsíční splátky do 5 000 Kč. Chce mít auto splacené co nejdříve. Údaje o autech, která se mu líbí, jsou uvedeny v tabulce. Které z aut nejvíc splňuje požadavky kupujícího?

	Rok výroby	Cena	Měsíční splátka od
A	1995	205 000 Kč	4 800 Kč
B	1996	175 000 Kč	4 300 Kč
C	1992	169 000 Kč	3 000 Kč
D	1994	189 000 Kč	4 200 Kč
E	1994	172 000 Kč	5 200 Kč

5.2 Úročení

Existují dva základní typy úročení:

A. Jednoduché úročení — vyplácené úroky se znovu neúročí. Úroky se počítají stále z původního kapitálu.

B. Složené úročení — úroky se připisují k původní částce a dál se úročí spolu s ní.

V praxi dochází i ke kombinaci jednoduchého a složeného úročení.

A. Jednoduché úročení

1 Vypočtěte výši úroku z vkladu 65 000 Kč uloženého v bance na dobu 3 měsíce při úrokové sazbě 5,8 % p. a.

Řešení

Informace 5,8 % p. a. znamená roční úrokovou sazbu (z latinského per annum). To znamená, že z každé stokoruny dostaneme za rok 5,80 Kč navíc. V praxi se také můžeme setkat s pololetní úrokovou sazbou, která se označuje p. s. (z latinského per semestre), se čtvrtletní úrokovou sazbou p. q. (per quartale), měsíční úrokovou sazbou p. m. (per mensem) a denní úrokovou sazbou p. d. (per diem).
Pokud by byly peníze uloženy u peněžního ústavu celý rok, vypočítali bychom výši úroku známým způsobem jako procentovou část ze základu 65 000 Kč:

$$z = 65\,000\,\text{Kč}$$
$$p = 5{,}8\,\%$$
$$\overline{\check{c} = z \cdot \frac{p}{100}}$$
$$\check{c} = 65\,000 \cdot 0{,}058$$
$$\check{c} = 3\,770$$
$$\overline{\check{c} = 3\,770\,\text{Kč}}$$

Výše úroku za celý rok činí 3 770 Kč.

Peníze ale byly v bance uloženy jen 3 měsíce, tj. $\frac{1}{4}$ roku. Vkladateli tedy náleží úrok rovnající se $\frac{1}{4}$ z 3 770 Kč (nepočítáme-li s daní z úroků).

$$u = \frac{1}{4} \cdot 3\,770\,\text{Kč} = 942{,}50\,\text{Kč}$$

Výše úroku činila na konci úrokové doby 942,50 Kč.

POZOR! Rozlišujeme pojmy:

$\boxed{\text{úroková doba}}$ $\neq$ $\boxed{\text{úrokovací období}}$

Úroková doba je doba, po kterou jsou peníze uloženy nebo půjčeny. Je to doba, po kterou trvá „smluvní vztah“ mezi bankou a klientem. Říká se jí rovněž doba splatnosti.

Úrokovací období je doba, za kterou se úroky pravidelně připisují. Některé banky připisují úroky ročně, některé např. po čtvrtletí.

Označme:

úrok . . . . u
vloženou nebo půjčenou peněžní částku v Kč . . . . K
roční úrokovou sazbu v procentech zapsanou desetinným číslem . . . i
úrokovou dobu (dobu splatnosti) vyjádřenou jako zlomek roku . . . n

Úrok u z částky K Kč při úrokové sazbě i:

za 1 rok . . . . $u = K \cdot i$

za 1 měsíc . . . . $u = K \cdot i \cdot \frac{1}{12}$

za 5 měsíců . . . . $u = K \cdot i \cdot \frac{5}{12}$

za 1 den . . . . $u = K \cdot i \cdot \frac{1}{365}$

za 7 dní . . . . $u = K \cdot i \cdot \frac{7}{365}$

⋮ ⋮

za dobu n (přičemž n je zapsáno jako zlomek roku) . . $u = K \cdot i \cdot n$

Úrok z částky K Kč za dobu n let při úrokové sazbě i tedy vypočítáme podle vzorce:

$$u = K \cdot i \cdot n$$

V předešlé úloze bychom postupovali takto:

$$\begin{array}{l}
K = 65\,000\,\text{Kč} \\
i = 0{,}058 \\
n = \frac{1}{4}\ \text{roku} = 0{,}25\ \text{roku} \\
\hline
u = K \cdot i \cdot n \\
u = 65\,000 \cdot 0{,}058 \cdot 0{,}25 \\
u = 942{,}5 \\
\hline
u = 942{,}50\,\text{Kč}
\end{array}$$

Úroková doba n se ve finanční praxi určuje podle různých metod. Pro jednoduchost budeme v dalších příkladech používat při počítání úrokové doby n tzv. **obchodní metodu**, která předpokládá, že rok má 360 dnů a každý měsíc má 30 dnů.

Anglická metoda ACT/365:

$$n = \frac{\text{skutečný počet dnů úrokové doby}}{\text{skutečný počet dnů v roce}}$$

Francouzská či mezinárodní metoda ACT/360:

$$n = \frac{\text{skutečný počet dnů úrokové doby}}{360}$$

Německá či obchodní metoda 30E/360 předpokládá, že každý měsíc má 30 dnů a rok má 360 dnů:

$$n = \frac{\text{počet dnů vypočítaný podle této metody}}{360}$$

2 Vypočtěte výši úroku (úrokové náklady) z úvěru 200 000 Kč, jednorázově splatného za 8 měsíců, je-li úroková sazba 9 % p. a.

Řešení

Výši úvěru označíme K . . . . $K = 200\,000\,K$č,
úrokovou sazbu označíme i . . . . $i = 0{,}09$,
dobu splatnosti označíme n . . . . $n = \frac{8}{12}$ roku $= \frac{2}{3}$ roku.

Úrok vypočteme podle vzorce:

$$u = K \cdot i \cdot n$$
$$u = 200\,000 \cdot 0{,}09 \cdot \frac{2}{3}$$
$$u = 12\,000$$
$$u = 12\,000\,\text{Kč}$$

Z úvěru 200 000 Kč zaplatíme za daných podmínek úrok 12 000 Kč.

3 Vypočtěte úrok z vkladu 150 000 Kč uloženého při úrokové sazbě 5,6 % p. a. dne 25. ledna a vybraného 15. června téhož roku.

Řešení

Počáteční výše vkladu je . . . . $K = 150\,000$ Kč,
úroková sazba zapsaná desetinným číslem . . . $i = 0{,}056$.

Vypočteme úrokovou dobu n:

den vkladu . . . . 25. leden
den výběru . . . . 15. červen
peníze byly v bance uloženy v lednu . . . . 5 dnů
(dle úmluvy 26.–30. 1.)
v únoru, v březnu, v dubnu a v květnu . . . . . $4 \cdot 30$ dnů
v červnu . . . . 15 dnů
tj. celkem . . . . 140 dnů

(Buď den vkladu nebo den výběru se nepočítá. Nezapočítali jsme den vkladu.)

Úroková doba vyjádřená jako zlomek roku $n = \frac{140}{360}$ roku,

$n \doteq 0{,}389$ roku.

$$\frac{u = K \cdot i \cdot n}{\frac{u = 150\,000 \cdot 0{,}056 \cdot 0{,}389 \quad u = 3\,267{,}60}{u = 3\,267{,}60\,\text{Kč}}}$$

Úrok z vkladu 150 000 Kč při úrokové sazbě 5,6 % p. a. činil na konci úrokové doby 3 267,60 Kč.
Pokud by se z úroku neplatila daň, původní částka 150 000 Kč by vzrostla o 3 267,60 Kč. Vkladatel by měl na konci úrokové doby částku:

$$150\,000\,\text{Kč} + 3\,267{,}60\,\text{Kč} = 153\,267{,}60\,\text{Kč}$$

Označíme-li výši částky po skončení doby splatnosti K_n, platí:

$$K_n = K + u$$

Dosadíme $u = K \cdot i \cdot n$:

$$K_n = K + K \cdot i \cdot n$$

Jestliže vytkneme K, dostaneme vzorec:

$$K_n = K \cdot (1 + i \cdot n)$$

Výši vkladu po uplynutí doby splatnosti bychom v předešlé úloze pomocí tohoto vzorce počítali následovně:

$$\begin{array}{l} K_n = K \cdot (1 + i \cdot n) \\ \hline K_n = 150\,000 \cdot (1 + 0{,}056 \cdot 0{,}389) \\ K_n = 153\,267{,}60 \\ \hline K_n = 153\,267{,}60\,\text{Kč} \end{array}$$

4 Jak velkou sumu splatíme bance, jestliže jsme si půjčili na 3 měsíce 20 000 Kč při úrokové sazbě 12 % p. a.?

Řešení

$K = 20\,000\,\text{Kč}$

$i = 0{,}12$

$n = \dfrac{3}{12}\,\text{roku} = \dfrac{1}{4}\,\text{roku}$

Částku, kterou splatíme po uplynutí sjednané doby, vypočteme podle vzorce:

$$K_n = K \cdot (1 + i \cdot n)$$
$$K_n = 20\,000 \cdot (1 + 0{,}12 \cdot 0{,}25)$$
$$K_n = 20\,000 \cdot 1{,}03$$
$$K_n = 20\,600$$
$$K_n = 20\,600\,\text{Kč}$$

Splacený úvěr spolu s úroky činil 20 600 Kč.

5 Pan Novák si uložil dne 10. 3. do banky 120 000 Kč. Banka uváděla úrokovou míru 6 % p. a. Jakou částku měl pan Novák v bance po připsání úroků 31. 12. téhož roku, jestliže daň z úroku činila 15 %?

Řešení

$K = 120\,000\,\text{Kč}$

$i = 0{,}06$

Peníze byly v bance uloženy v březnu 20 dnů, dále pak 9 celých měsíců, tj. 270 dnů. Celkem byly v bance uloženy 290 dnů.

$$n = \frac{290}{360}\,\text{roku} \doteq 0{,}806\,\text{roku}$$

Nejprve vypočteme výši nezdaněného úroku:

$$u = K \cdot i \cdot n$$
$$u = 120\,000 \cdot 0{,}06 \cdot 0{,}806$$
$$u = 5\,803{,}2$$
$$u = 5\,803{,}20\,\text{Kč}$$

Jestliže daň z úroku činila 15 %, připsali v bance panu Novákovi pouze 85 % této částky.

85 % z úroku u . . . . $0{,}85 \cdot u$

$0{,}85 \cdot 5\,803{,}20\,\text{Kč} = 4\,932{,}72\,\text{Kč}$

K původnímu vkladu 120 000 Kč bylo připsáno 4 932,72 Kč, pan Novák měl v bance po připsání úroku částku 124 932,72 Kč.

Můžeme sestavit vzorec pro výpočet výsledné částky po připsání již zdaněného úroku.
Vloženou částku (počáteční kapitál) označíme . . . . K,
konečnou částku po připsání zdaněného úroku za dobu n označíme K_n.
Je-li daň z úroku 15 %, je k počáteční částce připsáno 85 % úroku:

$$85\,\%\ \text{z}\ u\ \text{je}\ 0{,}85 \cdot u$$

$$K_n = K + 0{,}85 \cdot u$$

Dosadíme $u = K \cdot i \cdot n$: $K_n = K + 0{,}85 \cdot K \cdot i \cdot n$

Vytkneme K: $K_n = K \cdot (1 + 0{,}85 \cdot i \cdot n)$

Porovnejte následující vzorce.

Výpočet konečné částky při nezdaněném úroku:	Výpočet konečné částky při úroku zdaněném 15 %:
$K_n = K \cdot (1 + i \cdot n)$	$K_n = K \cdot (1 + 0{,}85 \cdot i \cdot n)$

6 Upravte vzorec pro výpočet konečné výše vkladu při 20% zdanění úroku. Vypočtěte konečnou výši vkladu uloženého na půl roku při úrokové sazbě 14 % p. a., byla-li jeho původní hodnota 80 000 Kč a úrok je daněn 20 %.

Řešení

Při 20% zdanění úroku je k původnímu vkladu připsáno pouze 80 % úroku.
80 % z úroku u . . . . $0{,}80 \cdot u$

$K_n = K + 0{,}80 \cdot u$ . . . . dosadíme $u = K \cdot i \cdot n$
$K_n = K + 0{,}80 \cdot K \cdot i \cdot n$ . . . . vytkneme K
$K_n = K \cdot (1 + 0{,}80 \cdot i \cdot n)$

Vzorec pro výpočet konečné výše vkladu při dvacetiprocentním zdanění úroku je

$$K_n = K \cdot (1 + 0{,}80 \cdot i \cdot n).$$

$$K = 80\,000\,\text{Kč}$$
$$i = 0{,}14$$
$$n = \frac{1}{2}\,\text{roku} = 0{,}5\,\text{roku}$$

$$K_n = K \cdot (1 + 0{,}80 \cdot i \cdot n)$$
$$K_n = 80\,000 \cdot (1 + 0{,}80 \cdot 0{,}14 \cdot 0{,}5)$$
$$K_n = 80\,000 \cdot 1{,}056$$
$$K_n = 84\,480$$
$$K_n = 84\,480\,\text{Kč}$$

Konečná výše vkladu uloženého na půl roku při roční úrokové sazbě 14 % a dvacetiprocentním zdanění úroku činila 84 480 Kč.

CVIČENÍ

Pro výpočet doby n, po kterou je částka uložena v bance, používejte v následujících cvičeních metodu, ve které předpokládáme, že měsíc má 30 dnů a rok má 360 dnů.

1. Doplňte tabulku:

Úroková sazba	i	Den vkladu	Den výběru	Doba uložení	
				počet dní	n (jako zlomek roku)
12 %	0,12	3. 1.	14. 5.	131	$\frac{131}{360} \doteq 0{,}364$
a) 9 %		1. 4.	1. 6.		
b) 5,5 %		31. 3.	1. 6.		
c) 4,8 %		1. 4.	31. 5.		
d) 14 %		23. 1.	25. 8.		

2. Vypočítejte výši úroku:

Úroková sazba		Den vkladu	Den výběru	Výše vkladu
a)	4,00 %	1. 1.	13. 6.	50 000 Kč
b)	4,80 %	27. 3.	9. 9.	50 000 Kč
c)	4,00 %	1. 2.	1. 5.	99 000 Kč
d)	5,50 %	1. 2.	1. 5.	100 000 Kč
e)	5,20 %	31. 1.	31. 12.	200 000 Kč

3. Vypočítejte výši vkladu po připsání úroku. Počítejte s 15% zdaněním úroku.

	Výše vkladu	Úroková sazba p. a.	Den vkladu	Den výběru
a)	10 000 Kč	4,00 %	2. 1.	1. 12.
b)	8 000 Kč	4,80 %	31. 1.	1. 6.
c)	50 000 Kč	5,00 %	20. 3.	3. 10.
d)	240 000 Kč	5,20 %	4. 4.	28. 11.
e)	150 000 Kč	8,00 %	1. 6.	31. 12.

B. Složené úročení

Při složeném úročení se úroky na konci úrokovacího období připočítávají k původnímu vkladu a v následujícím úrokovacím období se jako základ pro výpočet úroku bere původní vklad zvýšený o připočítaný úrok.

7 Uložili jsme částku 50 000 Kč na 3 roky. Jaká bude výše vkladu po uplynutí této doby, jestliže po celou dobu zůstane úroková sazba 8 % p. a.? Výpočet proveďte

a) bez zdanění úroku,

b) pro úrok zdaněný 15 %.

Řešení

Počáteční výši vkladu označíme . . . . K,
výši vkladu po uplynutí jednoho roku . . . . K_1,
po uplynutí dvou let . . . . K_2,
po uplynutí tří let . . . . K_3,

úrok označíme . . . . u,
roční úrokovou sazbu zapsanou desetinným číslem . . . . . . i,
úrokovou dobu (dobu smluvního vztahu, dobu splatnosti) vyjádřenou v letech označíme . . . . n.

a) Nejprve vypočítáme výši vkladu po uplynutí jednoho roku.

$K_1 = K + u = K + K \cdot i \cdot n = K \cdot (1 + i \cdot n)$
$\underline{K_1 = K \cdot (1 + i \cdot n)}$, $K = 50\,000$ Kč, $i = 0{,}08$, $n = 1$ rok

$K_1 = 50\,000 \cdot (1 + 0{,}08 \cdot 1)$
$K_1 = 50\,000 \cdot 1{,}08$
$\underline{K_1 = 54\,000}$
$K_1 = 54\,000\,\text{Kč}$ ...... výše vkladu po uplynutí jednoho roku
V následujícím roce se bude úrok počítat už z částky 54 000 Kč.

Po uplynutí druhého roku bude výše vkladu:
$K_2 = K_1 + K_1 \cdot i \cdot n$
$\underline{K_2 = K_1 \cdot (1 + i \cdot n)}$, $K_1 = 54\,000\,\text{Kč}$, $i = 0{,}08$, $n = 1\,\text{rok}$
$K_2 = 54\,000 \cdot (1 + 0{,}08 \cdot 1)$
$K_2 = 54\,000 \cdot 1{,}08$
$\underline{K_2 = 58\,320}$
$K_2 = 58\,320\,\text{Kč}$ ...... výše vkladu po uplynutí dvou let
V dalším, třetím roce, se bude úrok počítat z částky 58 320 Kč.

Vklad dosáhne po uplynutí třetího roku výše:
$K_3 = K_2 + K_2 \cdot i \cdot n$
$\underline{K_3 = K_2 \cdot (1 + i \cdot n)}$, $K_2 = 58\,320\,\text{Kč}$, $i = 0{,}08$, $n = 1\,\text{rok}$
$K_3 = 58\,320 \cdot (1 + 0{,}08 \cdot 1)$
$K_3 = 58\,320 \cdot 1{,}08$
$\underline{K_3 = 62\,985{,}60}$
$K_3 = 62\,985{,}60\,\text{Kč}$

Pokud by úrok nebyl zdaněn, dosáhl by vklad po třech letech výše 62 985,60 Kč.

Všimněte si!
$K_1 = K \cdot (1 + i \cdot n)$ .... $n = 1\,\text{rok}$ .... $K_1 = K \cdot (1 + i)$
$K_2 = K_1 \cdot (1 + i \cdot n)$ .... $n = 1\,\text{rok}$ .... $K_2 = K_1 \cdot (1 + i)$
Jestliže dosadíme do tohoto vztahu $K_1 = K \cdot (1 + i)$, dostaneme:

$$K_2 = \underbrace{K_1}_{} \cdot (1 + i)$$
$$K_2 = \overbrace{K \cdot (1 + i)} \cdot (1 + i)$$
$$K_2 = K \cdot (1 + i)^2$$

$K_3 = K_2 \cdot (1 + i \cdot n)$, protože $n = 1\,\text{rok}$, je $K_3 = K_2 \cdot (1 + i)$. Jestliže dosadíme $K_2 = K \cdot (1 + i)^2$, dostaneme:

$$K_3 = \underbrace{K_2}_{} \cdot (1 + i)$$
$$K_3 = \overbrace{K \cdot (1 + i)^2} \cdot (1 + i)$$
$$K_3 = K \cdot (1 + i)^3$$

Pro výpočet výše vkladu po n letech platí:

$$K_n = K \cdot (1+i)^n$$

počet let úrokové doby

počáteční výše vkladu

úroková sazba zapsaná desetinným číslem

Činitel $(1+i)$ se nazývá úrokovací faktor (úročitel), $(1+i)^n$ udává, na kolik korun vzroste vklad 1 Kč za dobu n let při úrokové sazbě i.

b) V našem případě je daň z úroku 15 %, vkladateli je tedy na konci každého úrokovacího období připsáno k předchozí hodnotě kapitálu 85 % úroku.

Výše úroku . . . . $u = K \cdot i \cdot n$,
85 % z úroku . . . . $0{,}85 \cdot u = 0{,}85 \cdot K \cdot i \cdot n$.

Po uplynutí jednoho roku dosáhne vklad výše:
$K_1 = K + 0{,}85 \cdot u$
$K_1 = K + 0{,}85 \cdot K \cdot i \cdot n = K \cdot (1 + 0{,}85 \cdot i \cdot n)$
Protože $n = 1$ rok, platí: $K_1 = K \cdot (1 + 0{,}85 \cdot i)$

Po uplynutí druhého roku dosáhne vklad výše:
$K_2 = K_1 + 0{,}85 \cdot K_1 \cdot i \cdot n = K_1 \cdot (1 + 0{,}85 \cdot i \cdot n)$

Protože opět uplynul 1 rok, je $n = 1$ a platí:
$K_2 = K_1 \cdot (1 + 0{,}85 \cdot i)$
$K_2 = K \cdot (1 + 0{,}85 \cdot i)^2$

Po uplynutí třetího roku dosáhne tedy vklad výše:
$K_3 = K \cdot (1 + 0{,}85 \cdot i)^3$

Výpočet: $K_3 = K \cdot (1 + 0{,}85 \cdot i)^3$

$K_3 = 50\,000 \cdot (1 + 0{,}85 \cdot 0{,}08)^3$
$K_3 = 50\,000 \cdot 1{,}068^3$
$K_3 \doteq 50\,000 \cdot 1{,}218$
$K_3 \doteq 60\,900$

$K_3 \doteq 60\,900$ Kč

Je-li úrok na konci každého úrokovacího období daněn 15 %, dosáhne vklad po uplynutí tří let výše přibližně 60 900 Kč.

V předchozích úlohách jsme počítali s tím, že je úrokovací období 1 rok. V praxi se můžeme setkat i s případy, kdy je úrokovací období kratší než jeden rok a úroky jsou připisovány např. pololetně, čtvrtletně nebo měsíčně.

8 Částku 50 000 Kč jsme uložili na tři roky. Vypočtěte konečnou výši vkladu při úrokové míře 8 %, jestliže úrokovací období je:

a) pololetní b) čtvrtletní

Předpokládejme, že je úrok daněn 15 %.

Řešení

a) Úrokovací období je půl roku:

počáteční vklad . . . . K
výše vkladu na konci prvního úrokovacího období . . . . K_1
výše vkladu na konci druhého úrokovacího období . . . . K_2
⋮ ⋮
výše vkladu na konci n-tého úrokovacího období . . . . K_n
úroková sazba zapsaná desetinným číslem i

Vyjádříme úrok z počátečního vkladu na konci prvního úrokovacího období (tj. po uplynutí půl roku):

$$u = K \cdot i \cdot \frac{1}{2} = K \cdot \frac{i}{2}$$

Tento úrok je daněn 15 %, k počátečnímu vkladu bude připsáno jen 85 % úroku.
Výše vkladu na konci prvního úrokovacího období:

$$K_1 = K + 0{,}85 \cdot u$$

$$K_1 = K + 0{,}85 \cdot K \cdot \frac{i}{2}$$

$$K_1 = K \cdot \left(1 + 0{,}85 \cdot \frac{i}{2}\right)$$

Po uplynutí dalšího úrokovacího období, tj. po uplynutí dalšího půl roku, se úrok počítá už z této větší částky:

$$\text{úrok} = K_1 \cdot i \cdot \frac{1}{2} = K_1 \cdot \frac{i}{2}$$

Výše vkladu po připočtení 85 % úroku:

$$K_2 = K_1 + 0{,}85 \cdot K_1 \cdot \frac{i}{2}$$

$$K_2 = K_1 \cdot \left(1 + 0{,}85 \cdot \frac{i}{2}\right)$$

Dosadíme $K_1 = K \cdot \left(1 + 0{,}85 \cdot \frac{i}{2}\right)$:

$$K_2 = K \cdot \left(1 + 0{,}85 \cdot \frac{i}{2}\right) \cdot \left(1 + 0{,}85 \cdot \frac{i}{2}\right)$$

$$K_2 = K \cdot \left(1 + 0{,}85 \cdot \frac{i}{2}\right)^2$$

Podobně vypočítáme výši vkladu po uplynutí

třetího úrokovacího období . . . . . $K_3 = K \cdot \left(1 + 0{,}85 \cdot \frac{i}{2}\right)^3$,

čtvrtého úrokovacího období . . . . $K_4 = K \cdot \left(1 + 0{,}85 \cdot \frac{i}{2}\right)^4$,

n-tého úrokovacího období . . . . . $K_n = K \cdot \left(1 + 0{,}85 \cdot \frac{i}{2}\right)^n$.

V naší úloze byl počáteční vklad 50 000 Kč, úroková míra byla 8 %, úroková doba 3 roky. Protože úrokovací období bylo půl roku, byl vklad během tří let úročen šestkrát:

$$K_6 = K \cdot \left(1 + 0{,}85 \cdot \frac{i}{2}\right)^6$$

$$K_6 = 50\,000 \cdot \left(1 + 0{,}85 \cdot \frac{0{,}08}{2}\right)^6$$

$$K_6 = 50\,000 \cdot 1{,}034^6$$

$$K_6 \doteq 61\,107{,}32\,\text{Kč}$$

Konečná výše vkladu 50 000 Kč dosáhne po třech letech za daných podmínek hodnoty 61 107,32 Kč.

b) Úrokovací období je $\frac{1}{4}$ roku.

Situace na konci prvního úrokovacího období, tj. po uplynutí čtvrtiny roku:

úrok z vložené sumy K . . . . $u = K \cdot i \cdot \frac{1}{4} = K \cdot \frac{i}{4}$

výše vkladu po připsání 85 % úroku . . . . . $K_1 = K + 0{,}85 \cdot u =$

$$= K + 0{,}85 \cdot K \cdot \frac{i}{4} = K \cdot \left(1 + 0{,}85 \cdot \frac{i}{4}\right)$$

Situace na konci druhého úrokovacího období:

$$K_2 = K_1 + 0{,}85 \cdot K_1 \cdot \frac{i}{4} = K_1 \cdot \left(1 + 0{,}85 \cdot \frac{i}{4}\right)$$

Dosadíme-li $K_1 = K \cdot \left(1 + 0{,}85 \cdot \frac{i}{4}\right)$, dostaneme:

$$K_2 = K \cdot \left(1 + 0{,}85 \cdot \frac{i}{4}\right) \cdot \left(1 + 0{,}85 \cdot \frac{i}{4}\right) = K \cdot \left(1 + 0{,}85 \cdot \frac{i}{4}\right)^2$$

Obdobně určíme výši vkladu na konci

třetího úrokovacího období . . . . . $K_3 = K \cdot \left(1 + 0{,}85 \cdot \frac{i}{4}\right)^3$,

čtvrtého úrokovacího období . . . . $K_4 = K \cdot \left(1 + 0{,}85 \cdot \frac{i}{4}\right)^4$,

⋮ ⋮

n-tého úrokovacího období . . . . . $K_n = K \cdot \left(1 + 0{,}85 \cdot \frac{i}{4}\right)^n$.

V naší úloze byl vklad uložen v bance tři roky, při čtvrtletním úročení byl tedy úročen 12krát:

$$K_{12} = K \cdot \left(1 + 0{,}85 \cdot \frac{i}{4}\right)^{12}$$

$$K_{12} = 50\,000 \cdot \left(1 + 0{,}85 \cdot \frac{0{,}08}{4}\right)^{12}$$

$$K_{12} = 50\,000 \cdot 1{,}017^{12}$$

$$K_{12} = 61\,209{,}86$$

$$K_{12} = 61\,209{,}86\,\text{Kč}$$

Při čtvrtletním úročení dosáhl vklad za jinak stejných podmínek výše 61 209,86 Kč.

Porovnejme nyní, jak se liší konečná výše vkladu uloženého v bance tři roky, mění-li se za jinak stejných podmínek úrokovací období:

Původní vklad	Úroková doba	Úroková míra	Úrokovací období	Výše zhodnoceného vkladu
50 000 Kč	3 roky	8 %	1 rok	60 900 Kč
50 000 Kč	3 roky	8 %	$\frac{1}{2}$ roku	61 107,32 Kč
50 000 Kč	3 roky	8 %	$\frac{1}{4}$ roku	61 209,86 Kč

Čím častěji se připisují úroky, tím vyšší je výsledná hodnota vkladu. Častější připisování úroků je proto pro vkladatele výhodnější.

V předchozích úlohách jsme nebrali v úvahu inflaci, která znehodnocuje hodnotu peněz. Např. uložíme-li nějakou sumu peněz na jeden rok při roční úrokové míře 5 %, předpokládáme, že za rok budeme mít o 5 % více. To by nastalo v případě, kdyby inflace byla nulová. Pokud míra inflace bude 8 %, máme za rok reálně o 3 % méně. Získali jsme sice kapitál zvýšený o 5 %, ale za služby a za zboží vydáme o 8 % více než v roce předchozím.

V úlohách, které jsme dosud počítali, se výše uloženého (půjčeného) kapitálu v průběhu úrokové doby neměnila. Vypočítat konečnou hodnotu vkladu, který se v průběhu úrokové doby zvyšuje o pravidelné částky, je obtížnější. Právě tak je obtížnější řešit úlohy o úvěru, který se průběžně splácí. Na tyto úlohy zatím naše dosavadní znalosti z matematiky nestačí. Vypočítejme alespoň pro ukázku tři následující úlohy.

9 Kolik uspoříme včetně úroků za 1 rok, budeme-li počátkem každého měsíce ukládat 1 000 Kč při úrokové míře 3 % p. a.? (Pro zjednodušení neuvažujeme zdanění úroku.)

Řešení

Předpokládejme, že je úrokovací období jeden rok. První vložená částka bude v bance uložena celý 1 rok, druhá částka už jen 11 měsíců, třetí částka 10 měsíců atd. Při jednoduchém úročení vypočítáme výši úroku z jednotlivých vložených částek podle vzorce:

$$u = K \cdot i \cdot n$$

Výše úroku z jednotlivých vložených částek je zapsána v tabulce:

Měsíc	Vložená částka K (v Kč)	Úroková sazba i	Doba, po kterou je částka uložena, n (jako zlomek roku)	Úrok u (v Kč)
leden	1 000	0,03	$\frac{12}{12}$	$1\,000 \cdot 0{,}03 \cdot \frac{12}{12}$
únor	1 000	0,03	$\frac{11}{12}$	$1\,000 \cdot 0{,}03 \cdot \frac{11}{12}$
březen	1 000	0,03	$\frac{10}{12}$	$1\,000 \cdot 0{,}03 \cdot \frac{10}{12}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
listopad	1 000	0,03	$\frac{2}{12}$	$1\,000 \cdot 0{,}03 \cdot \frac{2}{12}$
prosinec	1 000	0,03	$\frac{1}{12}$	$1\,000 \cdot 0{,}03 \cdot \frac{1}{12}$

Celkem úrok:

$$1000 \cdot 0{,}03 \cdot \frac{12}{12} + 1000 \cdot 0{,}03 \cdot \frac{11}{12} + 1000 \cdot 0{,}03 \cdot \frac{10}{12} + \ldots +$$

$$+ 1000 \cdot 0{,}03 \cdot \frac{2}{12} + 1000 \cdot 0{,}03 \cdot \frac{1}{12} =$$

$$= 1000 \cdot 0{,}03 \cdot \left(\frac{12}{12} + \frac{11}{12} + \frac{10}{12} + \ldots + \frac{2}{12} + \frac{1}{12}\right) =$$

$$= 1000 \cdot 0{,}03 \cdot \frac{78}{12} = 1000 \cdot 0{,}03 \cdot 6{,}5 = 195$$

Vložená částka . . . . 12 · 1 000 Kč = 12 000 Kč,
úrok . . . . 195 Kč,
naspořená částka je . . . . 12 000 Kč + 195 Kč = 12 195 Kč.

Pokud tedy budeme měsíčně spořit 1 000 Kč, budeme mít při úrokové sazbě 3 % p. a. naspořeno za rok 12 195 Kč.

10 Banka poskytla půjčku 40 000 Kč na dobu tří let s roční úrokovou sazbou 12 %. Úrokovací období je jeden rok. Půjčka má být splacena ve třech stejných ročních splátkách. První splátka se uskuteční po jednom roce po poskytnutí úvěru. Kolik Kč činí jedna splátka? Kolik Kč klient bance celkem zaplatí?

Řešení

Výpočty se v praxi provádějí s užitím vzorců, jejichž odvození už vyžaduje hlubší znalosti z matematiky.
My budeme úlohu řešit jen na základě našich dosavadních zkušeností.

1. rok úvěru
   Výše dluhu na začátku roku . . . $K = 40\,000$ Kč,
   výši dluhu na konci roku vypočítáme podle vzorce:

$$\underline{K_1 = K \cdot (1 + i \cdot n)}, \; i = 0{,}12, \; n = 1 \text{ rok}$$

$$K_1 = 40\,000 \cdot (1 + 0{,}12 \cdot 1)$$

$$K_1 = 40\,000 \cdot 1{,}12$$

$$\underline{K_1 = 44\,800}$$

$$K_1 = 44\,800 \text{ Kč}$$

   Výši splátky označíme s.
   Po odečtení této první splátky činí dluh $(44\,800 - s)$ Kč.

2. rok úvěru

Výše dluhu na začátku roku . . . $(44\,800 - s)$ Kč,

výše dluhu na konci roku . . . . . $K_2 = (44\,800 - s) \cdot (1 + i \cdot n)$,

$i = 0{,}12$, $n = 1$ rok.

$$\underline{K_2 = (44\,800 - s) \cdot (1 + 0{,}12 \cdot 1)}$$
$$K_2 = (44\,800 - s) \cdot 1{,}12$$
$$\underline{K_2 = 50\,176 - 1{,}12s}$$
$$K_2 = (50\,176 - 1{,}12s)\,\text{Kč}$$

Po odečtení druhé splátky činí dluh: $(50\,176 - 1{,}12s - s)$ Kč, tj. $(50\,176 - 2{,}12s)$ Kč.

3. rok úvěru

Výše dluhu:

na začátku roku . . . . $(50\,176 - 2{,}12s)$ Kč

na konci roku . . . . $K_3 = (50\,176 - 2{,}12s) \cdot (1 + i \cdot n)$,

$i = 0{,}12$, $n = 1$ rok

$$\underline{K_3 = (50\,176 - 2{,}12s) \cdot (1 + 0{,}12 \cdot 1)}$$
$$K_3 = (50\,176 - 2{,}12s) \cdot 1{,}12$$
$$\underline{K_3 = 56\,197{,}12 - 2{,}374\,4s}$$
$$K_3 = (56\,197{,}12 - 2{,}374\,4s)\,\text{Kč}$$

Po odečtení třetí splátky činí dluh:
$(56\,197{,}12 - 2{,}374\,4s - s)$ Kč, tj. $(56\,197{,}12 - 3{,}374\,4s)$ Kč

Ve skutečnosti je ale po uskutečnění třetí splátky dluh splacen, platí tedy rovnice:

$$56\,197{,}12 - 3{,}374\,4s = 0$$
$$56\,197{,}12 = 3{,}374\,4s \quad / : 3{,}374\,4$$
$$s \doteq 16\,653{,}96$$

Výše jedné splátky činí 16 653,96 Kč.

Klient splatil úvěr třemi splátkami, zaplatil tedy bance celkem $3 \cdot 16\,653{,}96$ Kč, tj. 49 961,88 Kč.

11 Banka poskytla půjčku 40 000 Kč splatnou ročními splátkami ve výši 15 000 Kč vždy na konci roku. Za jak dlouho bude půjčka splacena? Kolik Kč bude tvořit poslední splátka? Úroková sazba je 14 % p. a.

Řešení

1. rok úvěru

   Výše dluhu na začátku roku je 40 000 Kč, výši dluhu K_1 na konci roku vypočítáme podle vzorce $K_1 = K \cdot (1 + i \cdot n)$, kde K je výše dluhu na začátku roku, $i = 0{,}14$, $n = 1$ rok.

   $$K_1 = 40\,000 \cdot (1 + 0{,}14 \cdot 1)\,\text{Kč}$$
   $$K_1 = 45\,600\,\text{Kč}$$

   Odečteme první splátku:

   $$45\,600\,\text{Kč} - 15\,000\,\text{Kč} = 30\,600\,\text{Kč}$$

   Výše dluhu po odečtení první splátky činí 30 600 Kč.

2. rok úvěru

   Výše dluhu na začátku roku . . . 30 600 Kč,
   výše dluhu na konci 2. roku úvěru:

   $$K_2 = 30\,600 \cdot (1 + 0{,}14 \cdot 1)\,\text{Kč}$$
   $$K_2 = 34\,884\,\text{Kč}$$

   Po odečtení druhé splátky bude výše dluhu činit 19 884 Kč.

3. rok úvěru

   Výše dluhu na začátku roku . . . 19 884 Kč,
   výše dluhu na konci 3. roku úvěru:

   $$K_3 = 19\,884 \cdot (1 + 0{,}14 \cdot 1)\,\text{Kč}$$
   $$K_3 = 22\,667{,}76\,\text{Kč}$$

   Po odečtení třetí splátky zbývá dluh 7 667,76 Kč.

4. rok úvěru

   Výše dluhu na začátku roku . . . 7 667,76 Kč,
   výše dluhu na konci 4. roku úvěru:

   $$K_4 = 7\,667{,}76 \cdot (1 + 0{,}14 \cdot 1)\,\text{Kč}$$
   $$K_4 = 8\,741{,}25\,\text{Kč}$$

   Úvěr bude splacen čtyřmi ročními splátkami. Poslední splátka bude činit 8 741,25 Kč.

CVIČENÍ

4. Klient si uložil 10 000 Kč na tři měsíce na termínovaný vklad úročený 13,0 % p. a. Po uplynutí sjednané doby je mu vyplacen vklad zvýšený o zdaněný úrok. Klient takto získaný obnos znovu uloží stejným způsobem, tj. opět na tři měsíce na termínovaný vklad úročený 13 % p. a. Totéž učiní ještě dvakrát. Kolik korun mu bude vyplaceno po roce, je-li daň z úroku 15 %?

• Výnosový termínovaný vklad

úroková sazba - červenec 1999:

na 3 měsíce............13, 0 % p.a.

na 6 měsíců............13, 2 % p.a.

na 9 měsíců............13, 4 % p.a.

na 12 měsíců..........13, 8 % p.a.

na 24 měsíců..........13, 9 % p.a.

• Vkladní knížka

úroková sazba: ....4, 5 % p.a.

5. Vypočtěte konečnou výši vkladu 10 000 Kč uloženého na termínovaný vklad na 12 měsíců s úrokovou sazbou 13,8 % p. a. (po zdanění úroku 15 %). Porovnejte s výsledkem předešlé úlohy.

6. Kolik ušetříme za rok, jestliže budeme na začátku každého měsíce ukládat 1 500 Kč na vkladní knížku s úrokovou sazbou 4,5 % p. a.? (Neuvažujte zdanění úroku.)

7. Klient dostal od banky úvěr 100 000 Kč splatný čtyřmi ročními splátkami vždy na konci roku. Úroková sazba je 14 % p. a. Kolik bude činit jedna splátka?

6 MATEMATIKA V PRAXI

6.1 Peněžní sazby

CVIČENÍ

1. Existuje několik poplatkových sazeb za odběr elektrické energie. Nejčastěji se vyskytuje sazba B a sazba BN. V roce 1999 se v sazbě B platilo 2,19 Kč za 1 kW·h a měsíční poplatek činil 58 Kč bez ohledu na spotřebu. V sazbě BN se platilo 0,91 Kč za 1 kW·h a měsíční poplatek byl 103 Kč bez ohledu na spotřebu.
Určete, při jaké měsíční spotřebě (vyjádřené s přesností na desetiny kW·h) byla finančně vhodnější sazbě B. Úlohu řešte graficky i početně.

2. Poštovní sazby za balíky závisejí na jejich hmotnosti. Příslušné sazby pro naši republiku v roce 1999 jsou uvedeny v následující tabulce:

Balíky do hmotnosti (včetně)	Poštovní sazba
5 kg	25 Kč
10 kg	38 Kč
15 kg	50 Kč

Balíky o hmotnosti větší než 15 kg pošta nepřijímá. Rozhodněte, zda je uvedenou tabulkou zadána funkce. Pokud ano, nakreslete její graf a určete obor hodnot.

6.2 Úvahy podnikatele

CVIČENÍ

1. Pan Novák chce zřídit ve svém domě prodejnu a pronajmout ji obchodníkovi. Zřízení prodejny by vyžadovalo adaptaci v hodnotě 100 000 Kč. Předběžně dojednaný nájem prodejny by činil 8 000 Kč měsíčně. Pan Novák zvažuje dvě možnosti:

   Pravidelně spořit 5 000 Kč měsíčně a adaptaci provést až po naspoření potřebné částky. Tak by se pan Novák nezadlužil, ale oddálil by se mu očekávaný příjem z pronájmu. Musí také počítat s tím, že pozdější adaptace bude dražší, protože podle informací v tisku se očekává asi pětiprocentní roční inflace.

   Druhou možnost představuje úvěr u banky, s jehož pomocí by byla adaptace prodejny uskutečněna již za dva měsíce. Příjem z pronájmu by pan Novák získal sice dříve, ale zase by musel bance splácet dluh s poměrně vysokou úrokovou mírou 14 % p. a.

a) Na kolik Kč by asi přišla s přihlédnutím k inflaci adaptace za rok? Kolik by pravděpodobně stála za dva roky?
   Za jak dlouho by mohl pan Novák naspořit tyto částky? Neuvažujte úrok z úspor.
   O jak velkou sumu za pronájem by přišel, kdyby adaptaci provedl za 2 roky?

b) Jaký příjem získá pan Novák za tři roky z pronájmu prodejny? (Daň z příjmu neuvažujte.)
   Vezme-li si půjčku 100 000 Kč s roční úrokovou sazbou 14 % a bude-li ji splácet ročními splátkami ve výši 50 000 Kč, za jak dlouho dluh splatí?
   Kolik Kč bance celkem vrátí?

Rozhodování podobného druhu ve skutečnosti ovlivňuje řada příčin: zdraví, situace v rodině, výhledy v zaměstnání, ochota přátel půjčit část peněz za výhodnějších podmínek než banka atd. O to složitější pak bývá rozhodnout se pro „nejlepší“ (optimální) řešení.

6.3 Malý ekonomický slovníček

Při studiu odborné literatury se zpravidla neobejdeme bez příručních věcných slovníků, které vysvětlují smysl abecedně řazených hesel z určité oblasti.

Jako ukázku uvádíme malý slovníček ke kapitole *Základy finanční matematiky*, protože právě v ní se nachází mnoho nematematických odborných termínů. Slovníček uvádí výběr hesel, s nimiž se setkáváme nejen v učebnici, ale také v tisku, v rozhlase i v televizi.

AKCIE — cenný papír, který dokládá vlastnictví jako podíl na kapitálu akciové společnosti. Cena, za kterou se akcie prodává, je její kurs. Svému majiteli přináší akcie výnos, kterému se říká dividenda.

ANUITA — pravidelná splátka dluhu.

CENNÉ PAPÍRY — listiny, které dokládají nárok vlastníka cenného papíru na finanční plnění. V nejširším slova smyslu jsou cennými papíry bankovky, akcie, dluhopisy, směnky, šeky atd.

DAŇ — zákonem stanovená povinná platba, kterou stát vymáhá od podniků, domácností, organizací a jednotlivců. Daně tvoří hlavní příjmovou část státního rozpočtu většiny zemí. Domácnosti platí např. daň z příjmu, daň z nemovitosti, dědickou daň, darovací daň, daň z prodeje nemovitostí atd.

DEVALVACE — snížení „ceny" měnové jednotky. V ČR je to snížení kurzu koruny vůči ostatním měnám.

DEVIZA — pohledávka znějící na cizí měnu, např. bankovní šek, cenný papír aj. Devizy jsou nástroje bezhotovostního platebního styku.

DIVIDENDA — podíl na zisku akciové společnosti připadající na jednu akcii.

DLUHOPIS — cenný papír, na jehož základě má majitel dluhopisu právo požadovat vyplacení výnosů a splacení dlužné částky k určitému datu.

DLUŽNÍK — subjekt, kterému byl poskytnut úvěr. Tím mu vznikl závazek tento úvěr splatit spolu s úroky v dohodnutém termínu a za dohodnutých podmínek.

FYZICKÁ OSOBA — jednotlivý člověk jako právní subjekt. (Právní subjekt je způsobilý právními úkony nabývat práv a brát na sebe povinnosti.) Způsobilost k právním úkonům v plném rozsahu vzniká zletilostí.

HYPOTEČNÍ ÚVĚR — úvěr zajištěný hypotékou.

HYPOTÉKA — zástavní právo na nemovitost (např. dům) při poskytnutí půjčky. V případě, že dlužník nezaplatí dluh ve stanovené době a dohodnuté výši, je jeho dluh uhrazen z prodeje této nemovitosti.

INFLACE — projev nerovnováhy v ekonomice, důsledek nadbytku peněz ve srovnání s množstvím zboží na trhu. Projevuje se všeobecným růstem cen.

KURS; *kurs cenného papíru* — cena, za kterou se cenný papír (zejména akcie a dluhopisy) prodává a kupuje; *měnový kurs* — cena měnové jednotky země vyjádřená v měnových jednotkách jiné země.

LEASING — dlouhodobý pronájem upravený smlouvou. Po skončení leasingové smlouvy se nájemce stane vlastníkem.

MZDA — odměna, která náleží pracovníkovi za práci vykonanou v pracovním poměru pro zaměstnavatele; *čistá mzda* — mzda po odečtení zdravotního a sociálního pojištění a daně z příjmu.

PRÁVNICKÁ OSOBA — skupina osob nebo majetku, kterou právo uznává jako právní subjekt. Podle práva ČR jsou právnické osoby: sdružení fyzických osob, sdružení právnických osob, účelová sdružení majetku (nadace, fondy), územní jednotky a subjekty stanovené zákonem.

RABAT — sleva z kupní ceny poskytnutá zákazníkovi.

ÚROK — částka, kterou dlužník platí věřiteli za poskytnutí úvěru.

ÚVĚR (kredit) — půjčka.

ÚVĚROVÁ KARTA (kreditní karta) — karta, která umožňuje nákupy výrobků a služeb na úvěr. Např. dnes stále častěji používané bankovní karty, kdy úhradu provádí banka z účtu klienta. Úvěrovými kartami je možné platit v některých obchodech nebo mohou sloužit k výběru hotovosti v bankovních automatech (bankomatech).

VALUTA — zahraniční peníze v hotovosti ve formě papírových peněz nebo mincí.

VĚŘITEL — subjekt, který poskytuje úvěr. Tím mu vznikne nárok na vrácení půjčené částky zvýšené o úroky.

VKLADOVÝ CERTIFIKÁT — cenný papír krátkodobého charakteru.

CVIČENÍ

1. Sestavte podobný odborný slovníček matematických termínů z kapitoly o funkcích.

2. Sestavte slovníček obsahující výklad pojmů, s nimiž jste se seznámili ve škole při studiu geometrických zobrazení.

7 SOUHRNNÁ CVIČENÍ A TESTY

Následující cvičení jsou posledními v matematice na základní škole. K vyřešení úloh budete potřebovat nejen to, čemu jste se naučili v 9. ročníku. Pokud objevíte více způsobů řešení některé úlohy, proveďte je a porovnejte jejich výhody a nevýhody.

1. Na zahradě o výměře $800\,m^2$ je vybudovaný kruhový bazén s průměrem 6 m a hloubkou 1,2 m. Vypočtěte
   a) kolik m^2 zahrady je zastavěno tímto bazénem,
   b) délku plůtku, který by vroubil bazén ze čtyř pětin jeho obvodu.

2. Kolik Kč je třeba zaplatit za vodu, která naplní bazén z pěti šestin (viz cvičení 1), když se za $1\,m^3$ vody počítá 14 Kč vodného a 6,50 Kč stočného?

3. Po vodní hladině pluje kmen tvaru válce, jehož délka je 5 m a průměr 80 cm. Kmen je ze tří čtvrtin ponořen do vody.
   a) Stanovte (bez výpočtu objemů) hustotu dřeva a pokuste se určit, o jaký druh stromu by mohlo jít.
   b) Vypočtěte objem potopené části kmene.

4. Pronájem $1\,m^2$ reklamní tabule stojí 780 Kč měsíčně. Reklamní tabule tvaru obdélníku má délku 3 m a její úhlopříčka svírá s delší stranou úhel velikosti 34°.
   a) Vypočtěte, kolik Kč zaplatíte za 4 měsíce pronájmu tabule.
   b) Narýsujte reklamní tabuli v měřítku 1 : 50.
   c) Podkladem reklamy jsou dva shodné kruhy. Každý z nich se dotýká tří stran obdélníkové desky. Určete střednou těchto dvou kruhů.
   d) Vypočítejte, kolik dm^2 plochy tabule náleží průniku těchto kruhů.

5. Hasičský vysouvací žebřík dosahuje maximální délky 24 m. Je možné pomocí něho vyprostit lidi ze čtvrtého patra hořícího domu, svírá-li žebřík v nejstrmější možné poloze se zemí úhel 75° a na jedno patro obytného domu se počítá výška 3,4 m?

6. Rozdělte trojúhelníkovou parcelu na tři menší trojúhelníkové parcely stejné výměry aspoň dvěma způsoby.

a) Z navržených způsobů vyberte ten, který bude nejvýhodnější při pořizování plotů, tj. kdy součet všech úseček ohraničujících získané parcely bude co nejkratší.

b) Ověřte „obecné řešení“ na pozemku tvaru rovnostranného trojúhelníku a pravoúhlého trojúhelníku se stranami, jejichž délky jsou v postupném poměru $3 : 4 : 5$.

7. Ozubené kolo s průměrem 120 cm má celkem 90 zubů. Vypočtěte,

a) o kolik stupňů se kolo pootočí, aby se zub kola dostal do polohy zubu sousedního,

b) přibližný průměr kola se stejnými zuby, má-li jich jen třicet.

c) Jestliže obě kola do sebe zapadají a menší kolo se otočí o plnou otáčku, o kolik se otočí větší kolo?

8. Tři shodné kružnice s poloměrem 3 cm se dotýkají navzájem a ohraničují svými oblouky „křivočarý trojúhelník“. Vypočítejte

a) délku obvodu tohoto útvaru,

b) jeho obsah.

9. Přímka p prochází body $A[0, -2]$ a $B[4, 5]$, přímka r body $U[-3, 3]$ a $V[2, 0]$.

a) Zvolte souřadnicové osy ve čtvercové síti, jednotka má délku 1 cm.

b) Zobrazte přímky p, r a změřte velikosti obou úhlů, které jsou jimi určeny.

c) Vypočtěte délky úseček AB a UV.

d) Vypočtěte obsah čtyřúhelníku $AVBU$.

10. Rozdělte kulovou plochu dvěma rovnoběžnými rovinami na dva vrchlíky a kulový pás stejných obsahů.

11. Lineární funkce f je dána rovnicí $y = 2x + 3$.

a) Sestrojte graf funkce f.

b) Narýsujte obraz f' grafu funkce f ve středové souměrnosti se středem $O[0, 0]$.

c) Zapište rovnici funkce f'.

d) Určete velikost úhlu, který svírá graf funkce f s osou x (úhloměrem, pomocí goniometrických funkcí).

12. Doplňte tabulku a potom narýsujte graf funkce $y = \sin 2\alpha$ pro $\alpha \in \langle 0°, 45° \rangle$.

α	0°	10°	20°	25°	30°	35°	40°	45°
2α	0°	20°	40°	50°				
$\sin 2\alpha$	0							1

13. Vypočítejte výšku pravidelného šestibokého jehlanu $ABCDEFV$, je-li dán poloměr $r = 4\,\text{cm}$ kružnice opsané podstavě jehlanu a velikost úhlu AVD je 90°.

14. Pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$ s podstavnou hranou délky 1 m má objem V a obsah S_{pl} pláště. Graficky vyjádřete poměr $V : S_{\text{pl}}$ při vzrůstající výšce jehlanu.

a) Doplňte tabulku:

Výška v (dm)	1	2	3	5	7	10	15	20
Objem V (dm^3)								
Obsah S_{pl} (dm^2)								
Poměr $V : S_{\text{pl}}$								

b) Sestrojte souřadnicové osy, na vodorovné ose vynášejte v, na svislé poměr $V : S_{\text{pl}}$. Uvažte, jak velké jednotky zvolit na osách.

c) Načrtněte křivku a uvažte, jde-li o závislost, kterou už umíte přesně popsat, či nikoli.

15. Jsou dány dvě lineární funkce f a f'; $f\colon y = 2x + 3$, $f'\colon y = 1 - x$.

a) Zobrazte obě funkce do jedné soustavy souřadnic.

b) Určete průsečík R obou přímek grafu.

c) Vypočtěte souřadnice bodu R.

16. Je dána funkce $f\colon y = x^2$, $x \in \langle -5, 5 \rangle$.

a) Zvolte vhodně jednotky na souřadnicových osách a sestrojte graf této funkce.

b) Graf funkce f otočte kolem počátku o 90° ve směru pohybu hodinových ručiček do polohy f^*.

c) Je f^* také grafem nějaké funkce? Svou odpověď zdůvodněte.

17. Ve školním atlase vyhledejte grafické znázornění průběhu průměrných denních teplot během roku v ČR.

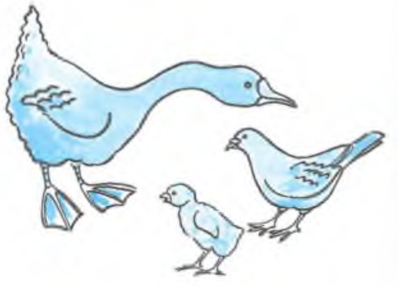
a) Zjistěte, kdy v roce jsou průměrné teploty nejvyšší, kdy nejnižší.

b) Porovnejte data dnů s nejvyšší (nejnižší) denní průměrnou teplotou s daty slunovratů. Co pozorujete?

Z učebnice Jiřího Mikuláše Brněnského z roku 1563 vybíráme:

18. Jeden najal dělníka na 30 dní takovým způsobem, když dělá, tehdy mu dává za den 7 penízů bílých, ale když zahálí, tehdy mu vyráží 5 penízů bílých. A když pomine 30 dní, tehdy jeden druhému nic dlužen není. Jest otázka, kolik dní dělal a kolik jest zahálel. (Zkuste řešit graficky, úsudkem, rovnicí.)

19. Jeden chce koupiti za 40 grošů bílých trojích živočichů, jakožto husí, kuřat a holubí, též na počtu za 40 a prodává se jemu jedna hus za dva groše, jedno kuře za jeden groš a dva holuby za jeden groš. Jest otázka, kolik každého živočichu koupiti má.



Z učebnice J. A. Kupky z roku 1932 jsou následující dvě úlohy.

20. Ovocnář koupil alej, v níž bylo 28 švestkových stromů, za 4 500 Kč. Kolik utržil, měl-li z každého stromu průměrně 2 a $\frac{1}{4}$ q švestek, kterých prodal 20 q po 1,50 Kč za kilogram, ostatní po 1,80 Kč? Napadané švestky sbíral a prodával do závodu na zpracování ovoce. Prodal jich celkem 4 q po 80 hal za kilogram. Kolik vydělal na ovoci, platil-li hlídači po tři týdny 10 Kč denně a za otrhání 10 kg ovoce 50 haléřů?

21. Václav Nováků již jako učedník si umínil, že nebude kouřiti ani píti lihovin. Denně ušetřil 50 haléřů. Kolik to bylo za tři roky? Když byl dělníkem, ušetřil denně za kuřivo 1 Kč 50 hal, za lihoviny 3 Kč 60 hal. Kolik ušetřil (za lihoviny — za kuřivo) za měsíc, rok, za šest let?
Kolik měl po třinácti letech dělnické práce, když se stal samostatným živnostníkem, jestliže mu v záložně připsali 5 198 Kč 40 hal úroků?

Test č. 1

1. Rozhodněte, které z uvedených tabulek jsou zadáním funkce. V případě, že tabulka určuje funkci, určete její definiční obor:

a)

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	2	3	4	3	2	1	0

b)

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	2	2	3	3	4	4	5

c)

x	-2	-1	0	1	2	3	3
y	2	2	3	3	4	4	5

d)

x	$\langle -2, 0\rangle$	$\langle 0, 2\rangle$	$\langle 2, 4\rangle$
y	2	3	4

e)

x	$\langle -2, 0\rangle$	$(0, 2\rangle$	$(2, 4\rangle$
y	2	3	4

2. Napište rovnici funkce, která každému reálnému číslu z intervalu $\langle 0, 4\rangle$ přiřazuje číslo, které je o 2 větší než jeho druhá odmocnina. Určete obor hodnot této funkce a rozhodněte, zda je tato funkce rostoucí nebo klesající.

3. Obvod obdélníku je 24 cm. Určete rovnici a definiční obor funkce, která udává závislost obsahu obdélníku na délce jedné jeho strany.

4. Napište rovnici lineární funkce, jejíž graf

a) protíná osu x v bodě $[3, 0]$ a osu y v bodě $[0, -3]$,

b) prochází body $[2, -4]$ a $[-2, 2]$.

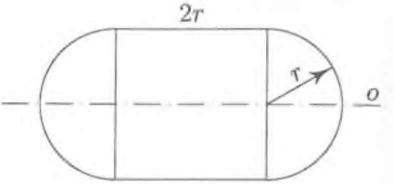
5. V téže soustavě souřadnic sestrojte grafy lineárních funkcí $f\colon y = 1{,}5x - 3$, $g\colon y = -0{,}5x + 1$ a určete souřadnice jejich průsečíku.

6. Zjistěte, které z bodů $[2, -1]$, $[-1, 2]$, $[-1, -2]$, $[0, 0]$, $[0, -2]$, $[0{,}5; -1]$, $[0{,}5; -4]$ leží na grafu funkce $y = -\dfrac{2}{x}$.

7. Sestrojte graf funkce $f\colon y = 0{,}5x^2$. Pak užitím vhodného zobrazení sestrojte v téže soustavě souřadnic grafy funkcí $g\colon y = -0{,}5x^2$ a $h\colon y = 0{,}5x^2 + 2$.

Test č. 2

1. Vypočtěte objem a povrch tělesa, které vznikne rotací čtverce a dvou polokruhů o poloměru r (viz obr.) kolem osy o.



2. Vypočtěte obsah rovnoběžníku $XBYH$, který je průnikem roviny XBY s krychlí $ABCDEFGH$, je-li bod X středem hrany AE a bod Y středem hrany CG této krychle a $|AB| = 10\,\text{cm}$.

3. Narýsujte síť čtyřbokého jehlanu $\mathsf{J} = ABCDV$ se čtvercovou podstavou $ABCD$, jsou-li o jehlanu J známy tyto údaje:
* úhlopříčky podstavy mají délku 5 cm
* hrana DV jehlanu je kolmá na rovinu jeho podstavy
* nejdelší hrana jehlanu J má délku 13 cm

(Úlohu řešte konstrukčně, výpočtem ověřte přesnost svého rýsování.)

4. Nádrž tvaru rotačního válce je položena oblinou na vodorovné podložce. Průměr obou podstav i jejich vzájemná vzdálenost jsou rovny 2 m. Nádrž načrtněte a vypočtěte

a) objem nádrže,

b) objem tekutiny v nádrži, je-li její hladina (v uvedené poloze nádrže) vzdálena ode dna 50 cm.

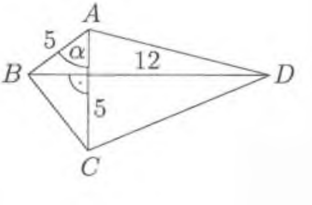
Test č. 3

1. Dokažte, že ze vztahu $a^2 + b^2 = c^2$ pro délky stran pravoúhlého trojúhelníku ABC s vnitřními úhly α, β, γ vyplývá:

$$(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$$

2. Vypočtěte délky odvěsen pravoúhlého trojúhelníku PQR s přeponou $r = 10\,\text{cm}$ a vnitřními úhly φ, 2φ a 3φ.

3. Určete obvod a rozlohu pozemku tvaru čtyřúhelníku $ABCD$, jehož náčrtek s údaji v metrech je na obrázku, je-li $\sin\alpha = 0{,}8$.



4. Pomocí grafu funkce $y = \sin x$ (viz str. 72) sestrojte graf funkce $y = \sin\dfrac{x}{2}$ pro $x \in \langle 0°, 90°\rangle$.

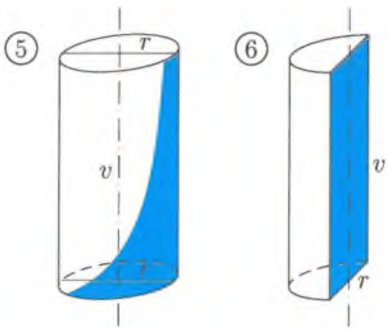
8 MATEMATICKÁ HERNA

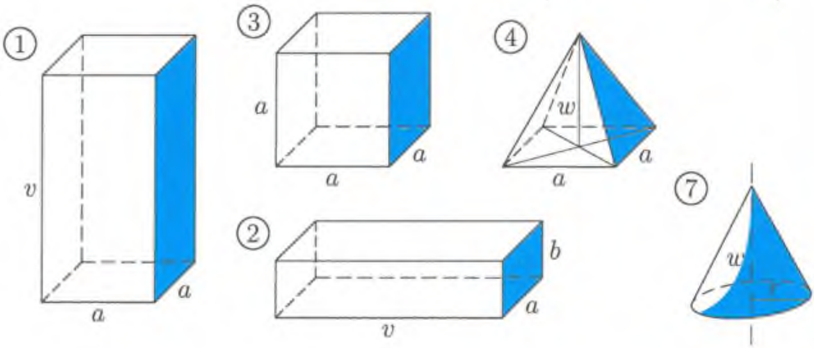
8.1 Architekt

Úkolem architekta je navrhovat stavby, které vyhovují mnoha požadavkům. Musí být účelné, pohodlné, hezké na pohled samy o sobě a přiměřené svému okolí, jejich cena nesmí být přemrštěná atd. Architekt vždy pečlivě sleduje celkové „seskupení hmot“, které určuje základní dojem z navrhované architektury.
Architektonickou tvorbu můžete zjednodušeně vyzkoušet i vy.

A. Sestrojte na rýsovací čtvrtce sítě následujících těles a sestavte jejich modely.

(1) pravidelný čtyřboký hranol
(2) kvádr
(3) krychle
(4) pravidelný čtyřboký jehlan
(5) rotační válec
(6) polovina rotačního válce
(7) rotační kužel





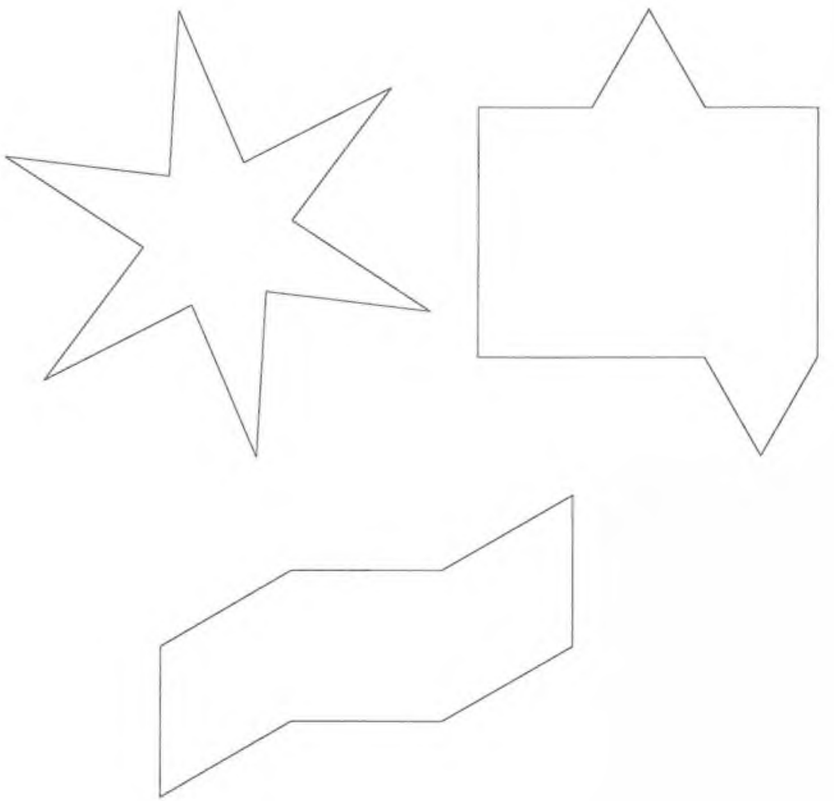
Doporučené rozměry těles vaší „stavebnice“: $a = 3\,\text{cm}$, $b = 1{,}5\,\text{cm}$, $v = 6\,\text{cm}$, $r = 1{,}5\,\text{cm}$, $w = 3\,\text{cm}$. (Všechny uvedené rozměry můžete např. pětkrát zvětšit, budete-li společně sestrojovat „architekturu“ do školní vitríny.)

Vyberte si několik těles, navrhněte „stavbu“ a vymodelujte ji. Jako řádní stavební inženýři pro svou „stavbu“ vypočítejte

a) objem („obestavěný prostor“),
b) rozlohu „zastavěného pozemku“,
c) spotřebu krytiny na střechy,
d) celkový povrch stěn stavby (plocha k omítnutí).

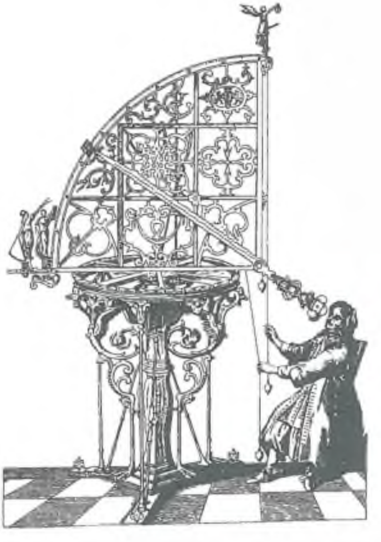
Navrženou stavbu zakreslete ve volném rovnoběžném promítání (názorný obrázek pro investora) a narýsujte její půdorys, nárys a bokorys.

B. Stavebnici můžete doplnit dalšími díly. Tentokrát jsou na obrázku v měřítku 1 : 3 narýsované pouze obvody jejich sítí. O jaká tělesa jde a kde je třeba papír přeložit, to už musíte zjistit sami.

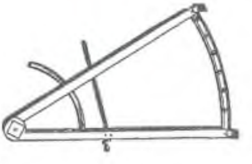


8.2 Středověké nástroje k vyměřování

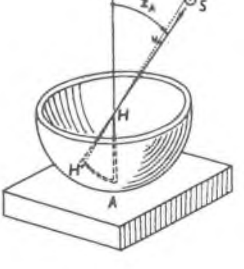
Ve 4. kapitole jsme psali o kvadrantu, s jehož pomocí je možné určit výšku nepřístupného vrcholu, vzdálenost pevnosti, šířku řeky či výšku hvězdy nad obzorem. Stejné úkoly lze řešit pomocí oktantu (osmina kruhu) či sextantu (šestina kruhu) se stupnicí. Je však třeba omezit se pouze na menší úhly (do 45° či do 60°). Protože pozorování a určování velikosti úhlů bylo tím přesnější, čím více „dílků“ (ne vždy to byly stupně a minuty) se na stupnici dalo vyznačit, dosahovaly některé přístroje ohromných rozměrů. Na obrázku vidíte velký „azimutální kvadrant“ doplněný roku 1644. Jeho poloměr je 1,39 m, je vyroben z mědi a podstavec přístroje ze železa.



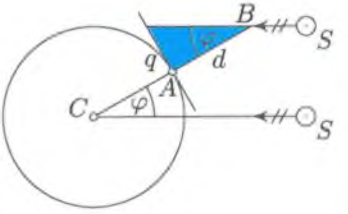
Jednoduchý sextant k měření úhlů si můžete vyrobit např. z kružítka, jestliže ho doplníte podle obrázku cestovního sextantu hvězdáře Tychona Brahe, který žil v Praze v době císaře Rudolfa a je zde také pochován. Společně tu s ním pracoval astronom Johannes Kepler, objevitel tří zákonů o oběhu planet okolo Slunce.



Řečtí myslitelé používali jednoduchý a vtipný nástroj k měření velikosti úhlu světelných paprsků, tzv. skafé (scaphium). Je to dutá polokoule se středem H, v níž je upevněna svislá tyčka AH. Miska je upevněna na vodorovné podložce. Podle polohy stínu H' bodu H na vnitřní stěně skafé lze se značnou přesností určit velikost úhlu, který svírá světelný paprsek se svislicí AH či s vodorovnou rovinou. Vyrobte si takové skafé z míče a změřte s jeho pomocí výšku „poledního Slunce“ v době letního slunovratu. (Pozor, je třeba měřit v poledne místního času. Letní čas LSEČ se o hodinu liší od běžného středoevropského času SEČ a ten se u nás shoduje se skutečným slunečním časem pouze v místech ležících na 15. poledníku východní délky.)



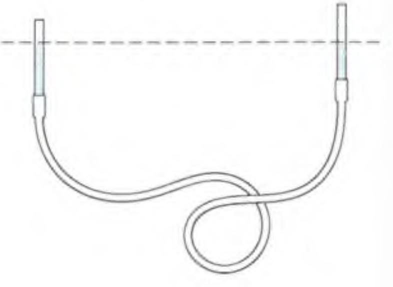
Jednodušší je měření velikosti úhlu φ pouhou tyčí známé délky, která je vztyčena svisle na vodorovné rovině. Porovnáním délky tyče s délkou jejího stínu lze určit velikost úhlu φ. Tomuto „přístroji“ se říká gnomon.



Měříme-li výšku poledního Slunce v den rovnodennosti, zjistíme zeměpisnou šířku místa, v němž měření provádíme.

Dalším přístrojem používaným k vyměřování byla jakási vodováha dlouhá až šest metrů, které se říkalo chorobates. Sloužila ke zjišťování vodorovných přímek a rovin (tedy k nivelaci).

Nyní používáme velmi podobnou vodováhu se vzduchovou bublinou ve skleněné trubce, takže není třeba dolévat vodu a sledovat její hladinu. Gumové hadice umožnily také konstrukci vodní míry (tzv. „šlaufky“, krásné slovo), která pracuje na principu spojených nádob.



Posledním přístrojem, který sloužil již Římanům při vyměřování měst, hradeb a dokonalých cest, je tzv. groma. Umožňovala vytýčení svislého směru a dvojice navzájem kolmých směrů vodorovných.

CVIČENÍ

1. Vytyčte v krajině směr severojižní a) pomocí Slunce, b) pomocí Polárky, c) pomocí kompasu.
2. Vyměřte vzdušnou vzdálenost bodů A, B v krajině, jestliže není vidět z jednoho bodu na druhý.
3. Určete pomocí gnomonu dne 21. března (kdy Slunce protne rovinu zemského rovníku) zeměpisnou šířku vaší obce.

9 VÝSLEDKY ÚLOH

1 Funkce

1.1 Definice funkce

1. a) Ano, D $= \{1, 2, 3, 4\}$; b) ano, D $= \{-2, -1, 0, 1\}$; c) ano, D $=$ $= \{-2, -1, 1, 2\}$; d) ne.

2. a)

x	1	2	3	4	5
y	−0,5	0	0,5	1	1,5

b)

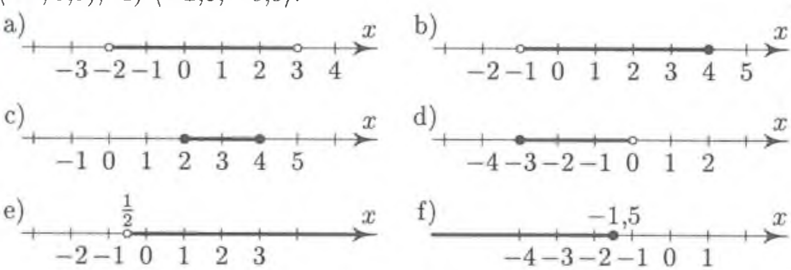
x	0,5	1	1,5	2	3
y	−2	−1	0	1	3

c)

x	−3	−2	−1	−0,5	−0,1
y	7	2	−1	−1,75	−1,99

3. $f(-2) = -15$, $f(-1) = -3$, $f(0) = 1$, $f(0{,}5) = 0$, $f(0{,}25) = 0{,}75$, $f(2) = -15$. **4.** 3; 0,5, 10; 6; 2. **5.** $y = x^2 - 1$, H $= \langle -1, 8 \rangle$. **6.** a) $(0, +\infty)$; b) $(-\infty, 0)$; c) $(-\infty, 0\rangle$; d) $(-\infty, 3)$; e) $\langle -1, +\infty)$; f) $\left(-4, \dfrac{2}{3}\right\rangle$. **7.** a) $(-2, +\infty)$; b) $(-\infty, 3\rangle$; c) $(1, 4)$; d) $(-3, 0\rangle$; e) $\langle -1; 0{,}5)$; f) $\langle -2{,}5; -0{,}5\rangle$.

8.

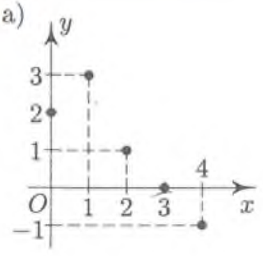


9. Uvažujeme vždy pouze číselné hodnoty veličin, které jsou vyjádřeny v odpovídajících jednotkách, tj. je-li délka strany čtverce a délka hrany krychle vyjádřena např. v metrech, pak obsah čtverce, obsah kruhu a povrch krychle jsou vyjádřeny v čtverečných metrech. Pro srozumitelnost budeme číselné hodnoty veličin označovat stejnými písmeny, která používáme pro označení veličin. a) $o = 4a$, $a \in (0, +\infty)$; b) $S = a^2$, $a \in (0, +\infty)$; c) $S = \dfrac{\pi}{4}d^2$, $d \in (0, +\infty)$; d) $S = 6a^2$, $a \in (0, +\infty)$.

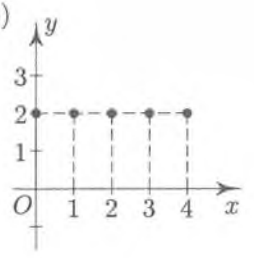
10. a) 4; b) $f(0) = -0{,}75$, $f(3) = -6$, $f(-2) = -\dfrac{1}{6}$; c) patří čísla 0 a 2.

1.2 Graf funkce

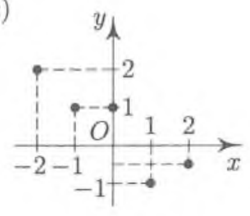
1. a)



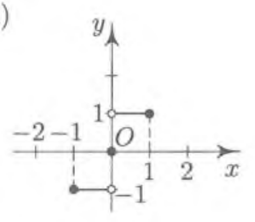
b)



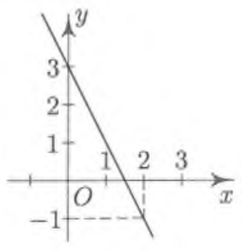
c)



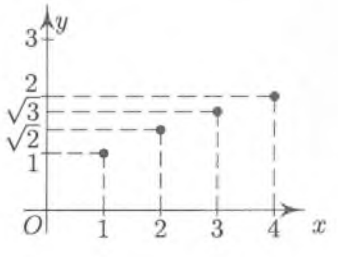
d)



2. a) $x = 1{,}5$; b) $(-\infty; 1{,}5)$; c) $(1{,}5; +\infty)$.



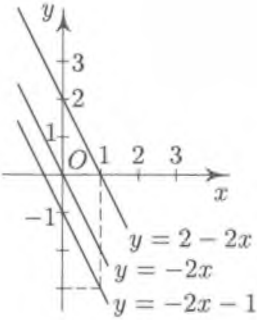
3. $\mathrm{H} = \{0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2\}$.



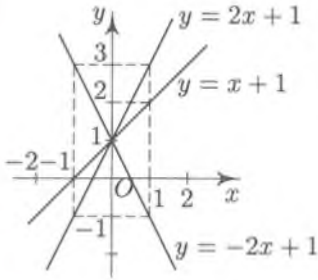
4. Obr. A: ano, $\mathrm{D} = \langle -1, 1\rangle$, $\mathrm{H} = \{-1, 0, 1\}$; obr. B: ne; obr. C: ano, $\mathrm{D} = \mathrm{R}$, $\mathrm{H} = \{2\}$; obr. D: ne; obr. E: ne; obr. F: ano, $\mathrm{D} = \langle 0, \pi\rangle$, $\mathrm{H} = \langle 0, 1\rangle$; obr. G: ano, $\mathrm{D} = \langle 0, 4\rangle$, $\mathrm{H} = \langle 0, 30\rangle$; obr. H: ne; obr. I: ano, $\mathrm{D} = (0, 2\rangle \cup (3, 4\rangle$, $\mathrm{H} = (0, 30)$. **5.** a) 70 km; b) za 3,5 h; c) 40 km; d) 20 km/h. **6.** a) V době od 8:00 h do 8:01 h jelo auto stálou rychlostí 50 km/h a v době od 8:03 h do 8:04 h jelo stálou rychlostí 80 km/h; b) v době od 8:01 h do 8:03 h a pak v době od 8:08 h do 8:10 h; c) v době od 8:04 h do 8:07 h; d) ano, stálo od 8:07 h do 8:08 h; e) za 2 minuty; f) auto, které v 8:08 h stálo, dosáhlo během minuty rychlosti 60 km/h; g) ano, dvakrát; poprvé mezi 8:02 h a 8:03 h (přesně v 8 h 2 min 30 s), podruhé v 8:05 h.

1.3 Lineární funkce a její vlastnosti

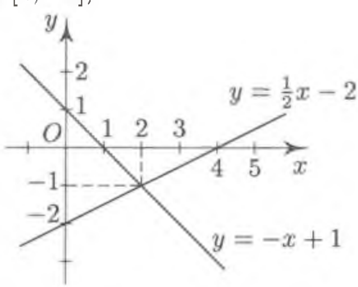
1. a) Ano; b) ano; c) ano; d) ano, přímá úměrnost; e) ano, konstantní funkce; f) ne; g) ano; h) ne; i) ano, konstantní funkce. **2.** Viz obrázek vpravo. **3.** $y = -2x + 4$. **4.** $y = 2x$. **5.** a) $b = 0$; b) $b = -3$. **6.** Funkce jsou rostoucí v případech a), b), d), protože $a > 0$; klesající funkce jsou v případech c), e), protože $a < 0$, v případě f) jde o konstantní funkci, která není ani rostoucí, ani klesající.



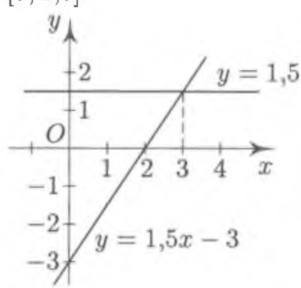
7.



8. a) $[2, -1]$;

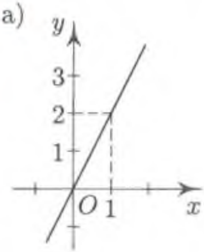


b) $[3; 1{,}5]$.

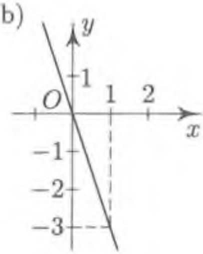


9. a) Není; b) je; c) je. **10.** a) $y = 3x$; b) $y = x$; c) $y = 1{,}5x$; d) $y = -0{,}5x$.

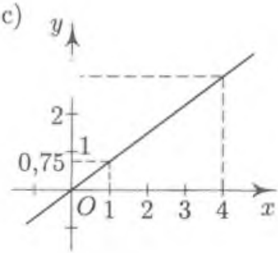
11. a)



b)



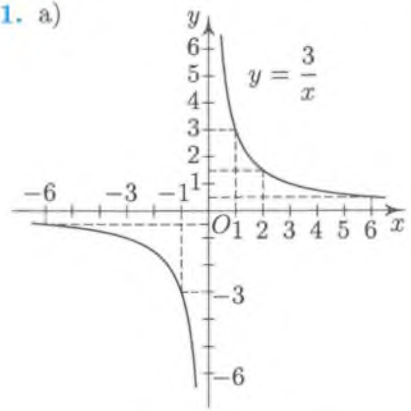
c)



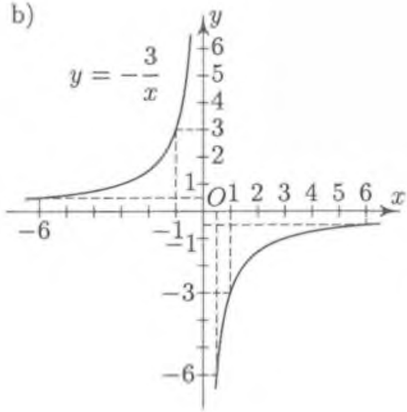
12. Všechny kromě $[-1, 1]$.

1.4 Další funkce

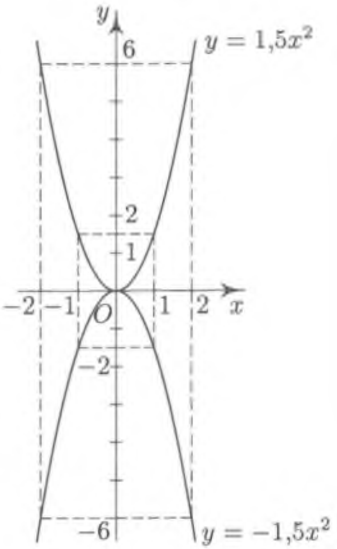
1. a)



b)

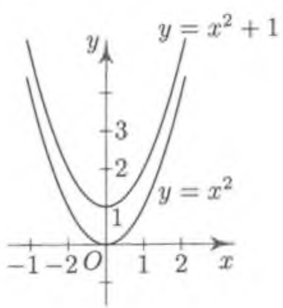


2.



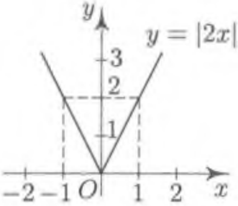
Jde o osovou souměrnost, osou souměrnosti je osa x.

3.

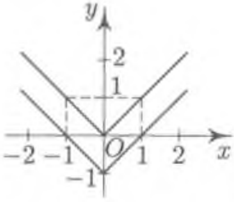


Pro každé reálné číslo x platí $g(x) = f(x) + 1$, graf funkce g získáme posunutím grafu funkce f o jednu jednotku délky ve směru kladné poloosy y.

4. $\mathrm{H} = \langle 0, +\infty)$, funkce je klesající v intervalu $(-\infty, 0\rangle$, rostoucí v intervalu $\langle 0, +\infty)$.



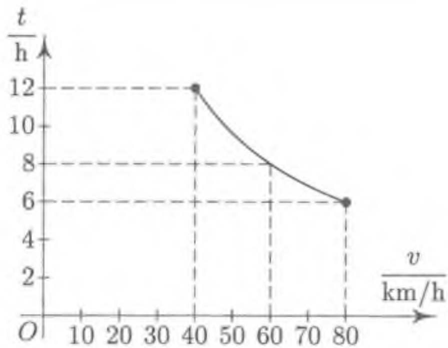
5. $\mathrm{H}_g = \langle -1, +\infty)$, funkce g nabývá záporných hodnot pro čísla $x \in (-1, 1)$.



6. $[2, -8]$ a $[0{,}5; -0{,}5]$. **7.** $[2, 2]$, $[-1, -4]$ a $[0{,}4; 10]$. **8.** $k = -1{,}5$.

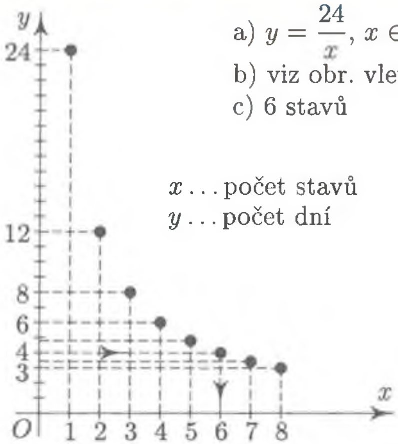
9. $S = \frac{\pi}{4} d^4$, $d \in (0, 4)$, kde S je číselná hodnota obsahu kruhu vyjádřená v cm^2 a d je číselná hodnota průměru kruhu vyjádřená v cm.

10. $t = \frac{480}{v}$, $v \in \langle 40, 80\rangle$, kde t je číselná hodnota doby jízdy auta vyjádřená v hodinách a v je číselná hodnota stálé rychlosti vyjádřená v km/h. Graf funkce je na obrázku.



1.5 Užití funkcí při řešení úloh z praxe

1.



a) $y = \frac{24}{x}$, $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

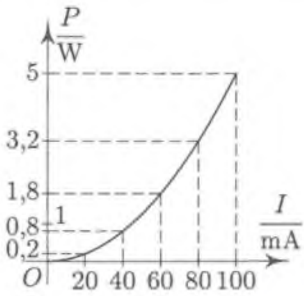
b) viz obr. vlevo

c) 6 stavů

$x \ldots$ počet stavů

$y \ldots$ počet dní

2. $P = RI^2$, $I \in \langle 0, 100\rangle$;



3. Za 1,5 hodiny, ve vzdálenosti 117 km od podniku. **4.** a) $y = 0{,}21x + 60{,}525$, $x \in (0, +\infty)$; b) $y = 0{,}144x + 46{,}832$, $x \in (0, +\infty)$; c) $66{,}825\,\mathrm{m}^3$; d) 22. dubna. **5.** a) $y = 184{,}3x$, definičním oborem je množina všech přirozených čísel větších nebo rovných 10; b) $y = 190x - 570$, definičním oborem je množina všech přirozených čísel větších než 3; c) 101 USD.

2 Povrchy a objemy těles

2.1 Opakování

1. $V_A = V_B$, $S_A > S_B$. **2.** Rozměry K označme $2a$, $2b$, $2c$, rozměry K′ označme a, b, c. a) $V_{K'} = \frac{1}{8}V_K$, $S_{K'} = \frac{1}{4}S_K$; b) $V_A = \frac{7}{8}V_K$, $S_A = S_K$; c) $V_B = \frac{7}{8}V_K$, $S_B = S_K + 2(ac + bc - ab)$; d) $V_A : V_B = 1 : 1$; e) $4(ab + bc + ac) : [6(ab + bc) + 3ac]$. **3.** a) Přibližně 50 cm; b) asi 0,5 cm. **4.** $V \doteq 9{,}3\,\mathrm{cm}^3$, $m \doteq 80\,\mathrm{g}$. **5.** $v \doteq 3{,}1\,\mathrm{cm}$. **6.** a) $V \doteq 46{,}4\,\mathrm{cm}^3$; b) $S \doteq 100{,}5\,\mathrm{cm}^2$.

2.2 Jehlany a komolé jehlany

1. a) $\frac{a^3}{3}$; b) $a^2(1 + \sqrt{5})$. **2.** $160\,\mathrm{cm}^3$. **3.** a) $120\,\mathrm{cm}^2$; b) asi 6,8 cm. **4.** a) $72\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2 \doteq 124{,}7\,\mathrm{cm}^2$; b) $72\sqrt{2}\,\mathrm{cm}^3 \doteq 101{,}8\,\mathrm{cm}^3$. **5.** $4{,}1\overline{6}\,\mathrm{m}^3$. **6.** $V \doteq 166{,}7\,\mathrm{cm}^3$, $S = 50(3 + \sqrt{3})\,\mathrm{cm}^2 \doteq 236{,}6\,\mathrm{cm}^2$. **7.** $V = 228\,\mathrm{cm}^3$, $m \doteq 615{,}6\,\mathrm{g}$, olovnaté sklo. **8.** a) $364\,\mathrm{cm}^3$ (ml); b) $165{,}5\,\mathrm{cm}^3$ (ml). **9.** Není, obdélníky $ABCD$ a $A'B'C'D'$ nejsou podobné. **10.** Dvojice 1, 2, 4, 5, 6, 8.

2.3 Kužele a komolé kužele

1.

Kužel	r	S_p	v	s	V
A	5 cm	$78{,}5\,\mathrm{cm}^2$	15 cm	15,8 cm	$392{,}7\,\mathrm{cm}^3$
B	4 cm	$50\,\mathrm{cm}^2$	10 cm	10,7 cm	$167{,}5\,\mathrm{cm}^3$
C	10 m	$314\,\mathrm{m}^2$	17 m	20 m	$1\,780\,\mathrm{m}^3$
D	4 m	$50\,\mathrm{m}^2$	3 m	5 m	$50\,\mathrm{m}^3$
E	4 m	$16 \cdot \pi\,\mathrm{m}^2$	12 m	12,6 m	$64 \cdot \pi\,\mathrm{m}^3$

(Údaje v tabulce jsou zaokrouhlené.)

2. a) $r = 15\,\text{cm}$, $v = 50\,\text{cm}$, $s \doteq 52\,\text{cm}$; b) $V_K \doteq 11{,}8\,\text{dm}^3$; c) odpad činí přibližně 66,7 %. **3.** $v = 1{,}7\,\text{m}$. **4.** 54 aut. **5.** $V = 603\,186\,\text{m}^3$. **6.** $V_V : V_K = 3 : 8$. **7.** $m = 1\,032\,\text{g} \doteq 1\,\text{kg}$. **8.** a) $V = 573\,\text{cm}^3$; b) přibližně $0{,}3\,\text{m}^3$ rašeliny. **9.** a) $S = 817\,\text{m}^2$; b) asi $214{,}4\,\text{m}^2$; c) 25 %. **10.** Ano.

2.4 Koule a její části

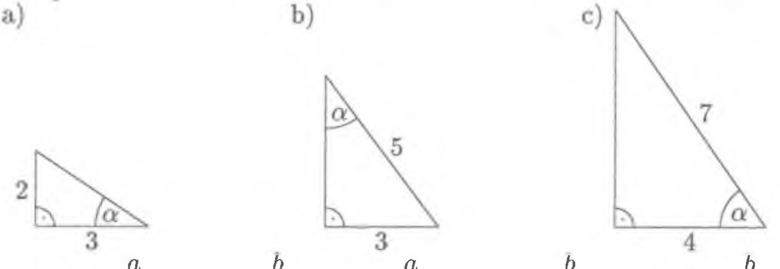
1. $V_K \doteq 523{,}6\,\text{cm}^3$. **2.** $d \doteq 31{,}3\,\text{cm}$. **3.** a) $r \doteq 6{,}2\,\text{cm}$; b) $r \doteq 7{,}8\,\text{cm}$. **4.** $V_U = 45\pi\,\text{cm}^3 \doteq 141{,}4\,\text{cm}^3$. **5.** $V = \frac{5}{3}\pi r^3$. **6.** a) Asi $1\,570{,}8\,\text{cm}^3$; b) asi $785{,}4\,\text{cm}^3$; c) pokles o přibližně 6,7 cm. **7.** Obsah kulové plochy: $4\pi r^2$, rozměry obdélníku: $2\pi r$, $2r$. **8.** a) Objem pyramidy $V \doteq 2\,623\,968\,\text{m}^3$; b) $v \doteq 48{,}3\,\text{m}$; c) $r \doteq 85{,}6\,\text{m}$; d) asi 262,4 km. **9.** 1 : 2 : 3. **10.** To ještě neumíte vypočítat. Objem lze zjistit ponořením tělesa do kapaliny v kalibrované nádobě, nebo z hmotnosti tělesa, je-li známa hustota dřeva, z něhož je těleso vyrobeno.

3 Goniometrické funkce ostrého úhlu

3.1 Délky stran a velikosti úhlů pravoúhlých trojúhelníků

2. $\sin\omega = \frac{o}{m}$, $\cos\omega = \frac{n}{m}$, $\operatorname{tg}\omega = \frac{o}{n}$, $\operatorname{cotg}\omega = \frac{n}{o}$. **3.** $\cos\alpha = \frac{q}{u}$, $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{q}{p}$. **4.** $\sin\alpha = \frac{v}{r}$, $\cos\gamma_1 = \frac{v}{r}$, $\operatorname{tg}\gamma_1 = \frac{\frac{z}{2}}{v}$.

5. a) b) c)



6. A. $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$, $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{b}{a}$. B. $\sin\beta = \frac{b}{c}$, $\cos\beta = \frac{a}{c}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a}$, $\operatorname{cotg}\beta = \frac{a}{b}$. Závěr: $\sin\alpha = \cos\beta$, $\cos\alpha = \sin\beta$, $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{cotg}\beta$, $\operatorname{cotg}\alpha = tg\beta$.

3.2 Funkce $y = \sin\alpha$

1. $\alpha < 38°$. **2.** a) $\alpha > \beta$; b) $\alpha = 64°20'$, $\beta = 35°50'$; c) nemohou. **3.** $\alpha_2 < \alpha_1 < \alpha_4 < \alpha_3$. **4.** 47°, 61°, 20°, 25°40′, 81°10′, 34°10′.

5. a) 0,469 5; b) 0,219 3; c) 0,908 8, d) 0,709 2. **6.** 0,422 6; 0,963 6; 0,866; 0,995 7; 0,754 7; 0,855 7.

3.3 Užití funkce $y = \sin\alpha$

1. $\omega \doteq 45°30'$, $\varphi = 22°$, $\gamma = 48°20'$. **2.** $\beta = 30°$, $\alpha = 60°$, $\varrho = 21°20'$, $\varepsilon = 68°40'$. **3.** $b \doteq 7{,}4\,\mathrm{cm}$. **4.** $|NO| = 12\,\mathrm{cm}$. **5.** $p \doteq 8{,}8\,\mathrm{cm}$, $y \doteq 8{,}5\,\mathrm{cm}$, $n \doteq 21{,}3\,\mathrm{cm}$, $c \doteq 11{,}9\,\mathrm{cm}$. **6.** $u \doteq 11{,}7\,\mathrm{cm}$. **7.** $v \doteq 5{,}2\,\mathrm{cm}$. **8.** $|PM| \doteq 5{,}1\,\mathrm{cm}$. **9.** $z \doteq 4{,}96\,\mathrm{cm}$. **10.** $S \doteq 9\,\mathrm{cm}^2$.

3.4 Funkce $y = \cos\alpha$

1. $\alpha > \beta$. **2.** $\alpha + \beta = 90°$. **3.** a) $\alpha = 28°$; b) $\alpha = 58°$; c) $\alpha = 50°$. **4.** $\alpha_2 > \alpha_1 > \alpha_4 > \alpha_3$. **5.** 0,965 9; 0,888 4; 0,707 1; 0,199 4; 0,819 2; 1. **6.** 13°40′, 30°40′, 55°30′, 70°, 89°40′, 60°.

3.5 Užití funkce $y = \cos\alpha$

1. $\alpha = 51°20'$, $\beta = 60°$, $\delta = 68°40'$. **2.** $x \doteq 10{,}2\,\mathrm{cm}$, $y \doteq 1{,}4\,\mathrm{dm}$, $n \doteq 5{,}7\,\mathrm{m}$. **3.** $c = 12{,}9\,\mathrm{cm}$, $k \doteq 8{,}7\,\mathrm{dm}$, $r = 8{,}3\,\mathrm{m}$. **4.** $z \doteq 12{,}8\,\mathrm{cm}$. **5.** $o = 28\,\mathrm{cm}$. **6.** $\omega = 73°40'$. **7.** $\varphi \doteq 49°30'$. **8.** $|\sphericalangle ASB| = 130°40'$. **9.** a) $|AC| \doteq 28{,}8\,\mathrm{cm}$; b) $|BD| \doteq 18\,\mathrm{cm}$.

3.6 Funkce $y = \mathrm{tg}\,\alpha$ a $y = \mathrm{cotg}\,\alpha$

1. a) $\delta > \omega$; b) $\beta > \gamma$. **2.** a) $\delta_3 < \delta_1 < \delta < \delta_2$; b) $\varphi < \varphi_1 < \varphi_3 < \varphi_2$. **3.** a) $\mathrm{tg}\,\gamma > \mathrm{tg}\,\alpha > \mathrm{tg}\,\beta > \mathrm{tg}\,\delta$; b) $\mathrm{cotg}\,\delta > \mathrm{cotg}\,\beta > \mathrm{cotg}\,\alpha > \mathrm{cotg}\,\gamma$. **4.** $\mathrm{tg}\,\alpha$: 0,308 9; 0,462 8; 2,904; 0,182 3; 0,134 6; 1,483; 4,331; $\mathrm{cotg}\,\alpha$: 3,237; 2,161; 0,344 3; 5,485; 7,429; 0,674 5; 0,230 9. **5.** α: 66°, 82°50′, 62°40′, 88°, 19°. **6.** α: 71°50′, 7°30′, 21°40′, 8°30′, 44°20′. **7.** a) $\alpha + \beta = 90°$; b) $\delta = 69°20'$.

3.7 Užití funkcí $y = \mathrm{tg}\,\alpha$ a $y = \mathrm{cotg}\,\alpha$

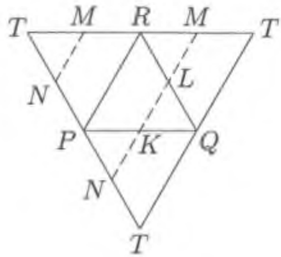
1. $\alpha = 55°50'$, $\beta = 34°10'$, $\gamma = 56°20'$, $\delta = 33°40'$, $\varphi = 66°50'$, $\omega = 23°10'$. **2.** $x \doteq 9{,}2\,\mathrm{cm}$, $y \doteq 5{,}6\,\mathrm{cm}$, $u \doteq 7\,\mathrm{dm}$. Asi 26,7 m. **4.** $S \doteq 36{,}8\,\mathrm{dm}^2$. **5.** $v = 5{,}36\,\mathrm{cm}$. **6.** $|AB| = 8\,\mathrm{cm}$. **7.** Asi 3,4 m. **8.** Při základně 74°50′, proti základně 30°20′.

4 Výpočty v geometrii

1. $\alpha \doteq 36°52'$, $\beta = 90° - \alpha \doteq 53°07'$. **2.** $v \doteq 58\,\mathrm{m}$. **3.** a) $a \doteq 11{,}55\,\mathrm{cm}$; b) $V \doteq 1{,}54\,\mathrm{dm}^3$. **4.** $\alpha \doteq 73°44'$, $\beta \doteq 106°15'$, $S = 96\,\mathrm{cm}^2$. **5.** $u = 3\,\mathrm{dm}$. **6.** Délka tělesové úhlopříčky: $u \doteq 1{,}22\,\mathrm{dm}$, délka úhlopříčky podstavy: $w \doteq 0{,}7\,\mathrm{dm}$, délka hrany podstavy: $h \doteq 0{,}49\,\mathrm{dm}$. **7.** $\varphi \doteq 41°50'$. **8.** $\alpha \doteq 30°58'$, $\beta \doteq 59°2'$. **9.** $t \doteq 4{,}7\,\mathrm{cm}$.

10. $V \doteq 1{,}22\,\mathrm{dm}^3$. **11.** a) $o \doteq 19{,}9\,\mathrm{cm}$; b) $S \doteq 10{,}9\,\mathrm{cm}^2$. **12.** $v \doteq$ $\doteq 299{,}5\,\mathrm{cm}$. **13.** $S \doteq 111{,}55\,\mathrm{m}^2$. **14.** a) $v = 4\,\mathrm{m}$; b) $\varphi \doteq 53°8'$. **15.** a) $d \doteq 1\,220\,\mathrm{m}$; b) $d \doteq 936{,}7\,\mathrm{m}$; c) $d_\mathrm{m} \doteq 37{,}5\,\mathrm{cm}$.

16. a)



b) $|KL| = |LM| = |NM| = |NK|\ldots$ střední příčky trojúhelníkových stěn. $ML \parallel QT \parallel KN$, $KL \parallel PR \parallel NM$. Hrany PR, QT pravidelného čtyřstěnu jsou navzájem kolmé. Tedy i strany rovnoběžníku řezu jsou navzájem kolmé, jde o čtverec. c) $V \doteq 117{,}85\,\mathrm{cm}^3$.

17. c) Asi $713{,}3\,\mathrm{cm}^2$; d) 20 vrcholů, 12 stěn, 30 hran. **18.** a) $\mathrm{tg}\,\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{b}{2|AD|}$. **19.** a) $V_z = 195\,534\,000\,\mathrm{m}^3$; b) $d \doteq 227\,\mathrm{m}$.

5 Základy finanční matematiky

5.1 Opakování některých základních pojmů

1. 29,1 %, 32,9 %. **2.** Ano, nárůst platu byl 7,5 %. **3.** 8,3 %, 4,8 %, 10 %, 3,1 %, 4,1 %, 7,9 %. **4.** 1 140 000 Kč, 3 516 000 Kč, 4 344 000 Kč, 3 000 000 Kč; **5.** B.

5.2 Úročení

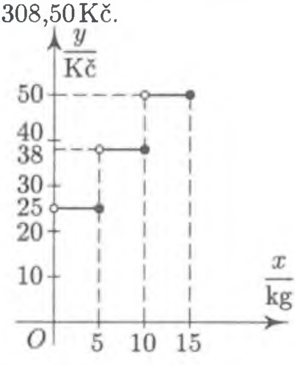
1. i: 0,09; 0,055; 0,048; 0,14; n: $\dfrac{60}{360} \doteq 0{,}167$; $\dfrac{61}{360} \doteq 0{,}169$; $\dfrac{59}{360} \doteq 0{,}164$; $\dfrac{212}{360} \doteq 0{,}589$. **2.** a) 900 Kč; b) 1 080 Kč; c) 990 Kč; d) 1 375 Kč; e) 9 533,33 Kč. **3.** a) 10 310,76 Kč; b) 8 109,67 Kč; c) 51 139 Kč; d) 246 895,20 Kč; e) 155 926,20 Kč. **4.** 11 151,64 Kč. **5.** 11 173 Kč. **6.** 18 438,75 Kč. **7.** Bez zaokrouhlování 34 308,50 Kč.

6 Matematika v praxi

6.1 Peněžní sazby

1. Sazba B: $y = 2{,}19x + 58$; sazba BN: $y = 0{,}91x + 103$. Sazba B byla finančně výhodnější, jestliže měsíční spotřeba nepřesáhla 35,1 kW·h.

2. Ano, graf této funkce je na obrázku vpravo; $\mathrm{H} = \{25, 38, 50\}$.



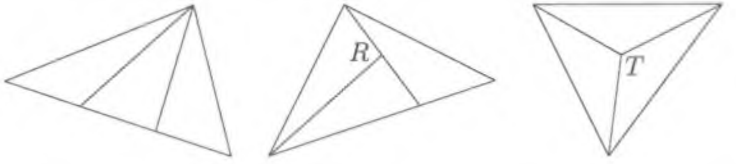
6.2 Úvahy podnikatele

a) 105 000 Kč, 110 250 Kč, necelé dva roky, asi 192 000 Kč; b) 288 000 Kč, za tři roky, 126 174,40 Kč.

7 Souhrnná cvičení a testy

1. a) $S \doteq 28{,}3\,\mathrm{m}^2$; b) asi 15,1 m. **2.** Asi 580 Kč. **3.** a) Přibližně $750\,\mathrm{kg/m}^3$; b) asi $1{,}88\,\mathrm{m}^3$. **4.** a) Asi 18 900 Kč; b) obdélník o stranách 6 cm a 4 cm; c) asi 0,98 m; d) asi $1{,}3\,\mathrm{m}^2$. **5.** Ano.

6.



7. a) 4°; b) 40 cm; c) o $\frac{1}{3}$ otáčky. **8.** a) Přibližně 9,4 cm; b) asi $1{,}44\,\mathrm{cm}^2$. **9.** b) $\varphi_1 \doteq 88°47'$, $\varphi_2 \doteq 91°13'$; c) $|AB| = \sqrt{65}\,\mathrm{cm} \doteq 8{,}06\,\mathrm{cm}$, $|UV| = \sqrt{34}\,\mathrm{cm} \doteq 5{,}83\,\mathrm{cm}$; d) $S \doteq 23{,}5\,\mathrm{cm}^2$. **10.** $V_\mathrm{V} = V_\mathrm{P} = \frac{2}{3}r$. **11.** c) $f' : y = 2x - 3$; d) $\varphi \doteq 63°26'$.

12.

α	0°	10°	20°	25°	30°	35°	40°	45°
2α	0°	20°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$\sin 2\alpha$	0	0,342	0,643	0,766	0,866	0,940	0,985	1

(Hodnoty sinu jsou zaokrouhleny.)

13. $v = 4\,\mathrm{cm}$.

14.

Výška v (dm)	1	2	3	5	7	10	15	20
Objem V (dm^3)	33	67	100	167	233	333	500	667
Obsah S_{pl} (dm^2)	102	108	117	141	172	224	316	412
Poměr $V : S_{\mathrm{pl}}$	0,33	0,62	0,85	1,18	1,36	1,49	1,58	1,62

(Údaje v tabulce jsou zaokrouhleny.)

15. c) $R = \left[-\frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right]$. **16.** f^* není grafem funkce $f(x)$, jedné hodnotě x není přiřazena jediná hodnota y. **18.** Dělník pracoval 12 a půl dne a zahálel 17 a půl dne. **19.** Např. 10 hus, 10 kuřat a 20 holubů. **20.** Čistý výdělek činí 6 035 Kč. **21.** Za 13 let dostal 29 397,90 Kč.

Výsledky a hodnocení testů

Pokud jste vyřešili jen polovinu úloh daného testu, nemůžete být s výsledkem spokojeni. Při dalším studiu by vám chybějící znalosti velmi znesnadnily učení. Máte-li dobře přes 70 % odpovědí, můžete své znalosti ohodnotit jako „dobré“. Kdo se spletl jen v jediné odpovědi či vše vyřešil správně, zasluhuje známku „výborně“.

Test č. 1

1. a) Ano, $\mathsf{D} = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$; b) ano, $\mathsf{D} = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$; c) ne; d) ne; e) ano, $\mathsf{D} = \langle -2, 4 \rangle$. **2.** $y = \sqrt{x} + 2$, $\mathsf{H} = \langle 2, 4 \rangle$, funkce je rostoucí. **3.** $S = 12a - a^2$, $a \in (0, 12)$. **4.** a) $y = x - 3$; b) $y = -1{,}5x - 1$. **5.** $[2, 0]$. **6.** Leží body $[2, -1]$, $[-1, 2]$ a $[0{,}5; -4]$. **7.** Graf funkce g je obrazem grafu funkce f v osové souměrnosti, osou souměrnosti je osa y. Graf funkce h získáme posunutím grafu funkce f o 2 jednotky ve směru kladné poloosy y.

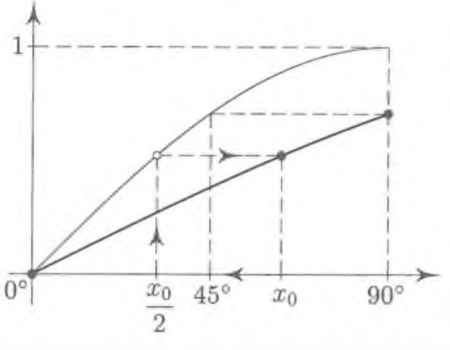
Test č. 2

1. $V = \frac{10}{3} \cdot \pi r^3 \doteq 10{,}5 r^3$, $S = 8\pi r^2 \doteq 25 r^2$. **2.** $S = 50\sqrt{5}\,\mathrm{cm}^2 \doteq 112\,\mathrm{cm}^2$. **3.** Pro kontrolu: $|VB| = 13\,\mathrm{cm}$, $|VD| = 12\,\mathrm{cm}$, $|\sphericalangle ADV| = |\sphericalangle CDV| = 90°$, $\triangle AVD \cong \triangle CVD$. **4.** a) $V = 2\pi r^3 \doteq 6{,}3\,\mathrm{m}^3$; b) $V \doteq 1{,}23\,\mathrm{m}^3$.

Test č. 3

1. Dělte obě strany rovnosti výrazem c^2 a upravte. **2.** Délky odvěsen: 5 cm, přibližně 8,7 cm. **3.** $o \doteq 36{,}8\,\mathrm{m}$, $S = 64\,\mathrm{m}^2$.

4.



PhDr. Alena Šarounová, CSc., PhDr. Ivan Bušek,
Mgr. Jitka Růžičková, Věnceslava Väterová

Matematika 9, II. díl

Obálku navrhla Miroslava Jakešová
Ilustroval Martin Mašek
Vydalo nakladatelství Prometheus, spol. s r. o.,
Žitná 25, 117 01 Praha 1, v roce 2000
Edice Učebnice pro základní školy
Odpovědná redaktorka Mgr. Vladimíra Šilhánková
Sazbu a technické kresby programy TEX a METAFONT
připravil Jiří Rákosník
Vytiskly Tiskárny Havlíčkův Brod, a. s.,
Husova 1881, 580 01 Havlíčkův Brod

1. vydání

9711280

ISBN 80-7196-175-2

Jehlany, kužele:

$$V = \frac{1}{3} v \cdot S_{\mathrm{p}}$$

$$S = S_{\mathrm{p}} + S_{\mathrm{pl}}$$

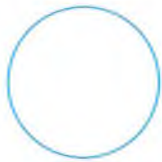
Rotační kužel: $S_{\mathrm{pl}} = \pi r s$

Komolé jehlany, kužele:

$$V = \frac{1}{3} v (S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_3)$$

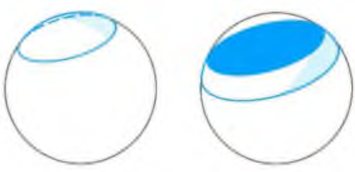
Koule

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

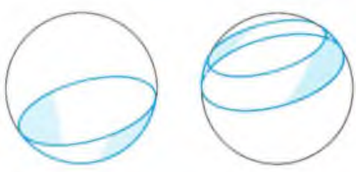


Kulová plocha

$$S = 4 \pi r^2$$



Kulová úseč, vrstva



Kulový vrchlík, pás

Kulová výseč

$$\pi \doteq 3{,}141\,59$$

$$\pi^2 \doteq 9{,}869\,59$$

PROMETHEUS

9711280

http://www.prometheus-nakl.cz

ISBN 80-7196-175-2