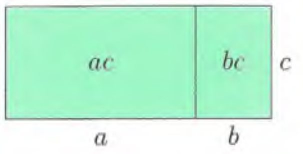
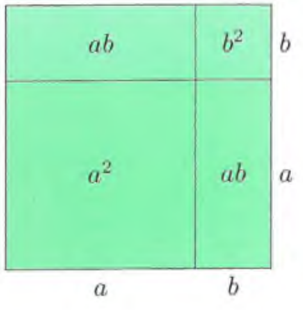
matematika 8

II·DÍL

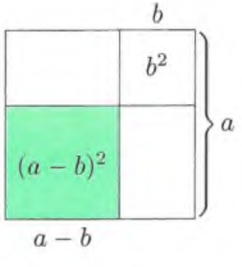
PROMETHEUS



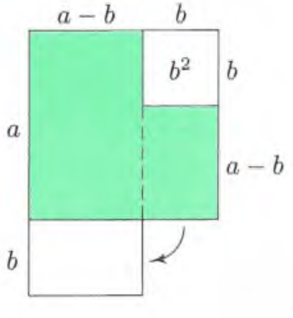
$$(a+b)c = ac + bc$$



$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$



$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$



$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

matematika 8

II. DÍL

PROMETHEUS
PRAHA

Učebnice byla zpracována ve spolupráci s JČMF.

Zpracovali: PhDr. Alena Šarounová, CSc.
PhDr. Ivan Bušek
Mgr. Jitka Růžičková
Věnceslava Väterová

Lektorovali: doc. RNDr. Štefan Schwabik, DrSc.
RNDr. Libuše Hozová
doc. RNDr. Jindřich Bečvář, CSc. (koordinátor)

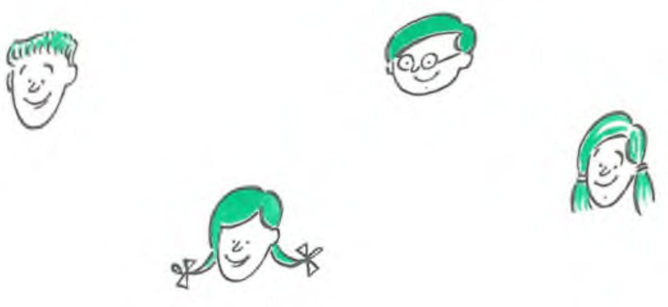
Revizi výsledků provedla Andrea Václavová.

Schválilo MŠMT ČR čj. 30042/98–22 dne 9. 11. 1998
k zařazení do seznamu učebnic pro základní školy.

Dotisk 1. vydání

ISBN 80–7196–127–2

Obsah



1 ČÍSELNÉ OBORY

Ve škole jste se už seznámili s různými druhy čísel. Nejprve jste poznali **přirozená čísla**. Jejich součet a součin je zase přirozené číslo.
Např.:

$$3 + 9 = 12$$
$$3 \cdot 9 = 27$$

Při odčítání přirozených čísel vznikla potřeba tento číselný obor rozšířit.
Např. rozdíl $9 - 3$ je přirozené číslo 6,
ale rozdíl $3 - 9$ v oboru přirozených čísel nenajdeme.
Zavedli jsme **čísla celá**.
K celým číslům patří čísla přirozená, nula a čísla opačná k přirozeným.
Potom $3 - 9 = -6$.
Součet, součin a rozdíl celých čísel je opět celé číslo.

Podíl celých čísel není vždy celé číslo.
Např. podíl $(-15) : 3$ je celé číslo -5,
ale podíl $3 : (-15)$ není celé číslo.
Obvykle tento podíl zapisujeme

jako zlomek: $\dfrac{3}{-15} = -\dfrac{3}{15}$

nebo jako desetinné číslo: $\dfrac{3}{-15} = -0{,}2$.

Zavedli jsme **racionální čísla**.
Racionální čísla jsou všechna čísla, která lze napsat ve tvaru $\dfrac{p}{q}$, kde p, q jsou celá čísla a q je různé od nuly. Mezi racionální čísla patří všechna celá čísla,

např. $4 = \dfrac{4}{1}$, $-8 = -\dfrac{8}{1}$, $0 = \dfrac{0}{10}$,

zlomky a smíšená čísla,

např. $\dfrac{3}{4}$, $-\dfrac{2}{5}$, $-3\dfrac{7}{11} = -\dfrac{40}{11}$,

desetinná čísla s ukončeným desetinným rozvojem,

např. $0{,}15 = \dfrac{15}{100}$, $-3{,}5 = -\dfrac{35}{10}$.

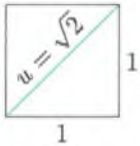
Mezi racionální čísla patří i čísla, jejichž desetinný rozvoj je periodický,

např. $\dfrac{5}{11} = 0{,}454\,5\ldots = 0{,}\overline{45}$,

$-\dfrac{7}{12} = -0{,}583\,333\ldots = -0{,}58\overline{3}$.

Racionální čísla nestačí k popisu některých jednoduchých, pro praxi důležitých skutečností.

Máme např. určit délku úhlopříčky čtverce, jehož strana má délku 1 (libovolná délková jednotka).



K výpočtu použijeme Pythagorovu větu:

$$u^2 = 1^2 + 1^2$$
$$u^2 = 2$$
$$u = \sqrt{2}$$

Druhou odmocninu ze dvou přibližně určíme

buď pomocí tabulek: $\sqrt{2} = 1{,}41$

nebo pomocí kalkulačky: $\sqrt{2} = 1{,}414\,213\,5$.

Je zřejmé, že

$$1 < \sqrt{2} < 2,$$

protože

$$1 < 2 < 4.$$

Podívejme se, jak můžeme odhad čísla $\sqrt{2}$ zjistit sami.
Hledáme takové číslo x, jehož druhá mocnina je rovna dvěma:

$$x^2 = 2$$

Protože číslo $\sqrt{2}$ je desetinné, ale jeho desetinný rozvoj neznáme, musíme nalézt dvojici racionálních čísel a, b, pro která platí:

$$a < \sqrt{2} < b$$

a která „jsou velmi blízká“ číslu $\sqrt{2}$. Např.:

$$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$$

Umocněním na druhou ověříme, že jsme čísla a, b volili vhodně:

$$1{,}4^2 < (\sqrt{2})^2 < 1{,}5^2$$
$$1{,}96 < 2 < 2{,}25$$

Pro přesnější odhad můžeme zkusit novou dvojici čísel a', b' s delším desetinným rozvojem, pro která platí:

$$a < a' < \sqrt{2} < b' < b$$

$$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$$
$$1{,}41^2 < 2 < 1{,}42^2$$
$$1{,}988\,1 < 2 < 2{,}016\,4$$

a dále

$$
\begin{aligned}
1{,}414 &< \sqrt{2} < 1{,}415\\
1{,}414^2 &< \ \ 2 \ \ < 1{,}415^2\\
1{,}999\,396 &< \ \ 2 \ \ < 2{,}002\,225
\end{aligned}
$$

Tak bychom mohli pokračovat. Pokaždé bychom našli taková dvě racionální čísla u_1, u_2, pro která platí

$$u_1 < \sqrt{2} < u_2$$

a jejichž desetinný rozvoj se od čísla $\sqrt{2}$ liší jen počínaje námi zvoleným desetinným místem. Číslo $\sqrt{2}$ můžeme tedy určit s libovolnou přesností, ale nikdy se nám nepodaří najít takové racionální číslo u, aby pro ně platilo

$$\sqrt{2} = u, \qquad u^2 = 2.$$

Číslo $\sqrt{2}$ není číslo racionální. Číslo $\sqrt{2}$ je číslo **iracionální**.
Číslo $\sqrt{2}$ můžeme zapsat jako číslo s desetinným neukončeným neperiodickým rozvojem:

$$\sqrt{2} = 1{,}414\,213\,5\ldots$$

Iracionální čísla můžeme při výpočtech nahrazovat racionálními čísly s takovou přesností, jakou si předem stanovíme.
Z těch čísel, která znáte, patří mezi iracionální čísla některé odmocniny, např. $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, číslo π aj.
Odmocnina přirozeného čísla je buď číslo přirozené, např. $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{225} = 15$, nebo číslo iracionální, např. $\sqrt{7}$, $\sqrt{117}$.

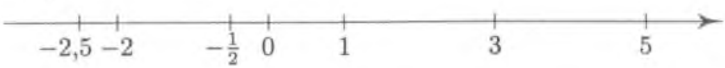
Čísla racionální a čísla iracionální tvoří množinu čísel, kterým říkáme **reálná čísla**.

1 Znázorněte na číselné ose tato reálná čísla:

- přirozená čísla 1, 3, 5,
- celá čísla -2, 0,
- racionální čísla $-\frac{1}{2}$, $-2{,}5$,
- iracionální čísla $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$.

Řešení

Zvolíme číselnou osu s jednotkovou úsečkou, např. 1 cm. Čísla 1, 3, 5, -2, 0, $-\frac{1}{2}$ a $-2{,}5$ umíme na číselné ose znázornit.



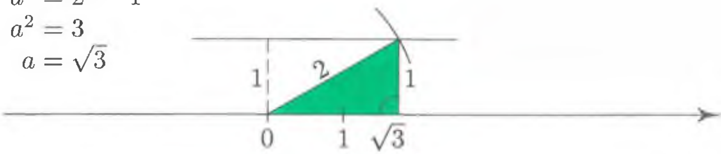
Hodnotu $\sqrt{2}$ určíme jako délku úhlopříčky čtverce, jehož strana má délku 1 (délka jednotkové úsečky na číselné ose).

$$u = \sqrt{1^2 + 1^2}$$
$$u = \sqrt{2}$$

Číslo $\sqrt{3}$ určíme např. jako délku odvěsny pravoúhlého trojúhelníku, jehož přepona má délku 2 jednotkové úsečky a zbývající odvěsna má délku 1 jednotkové úsečky.

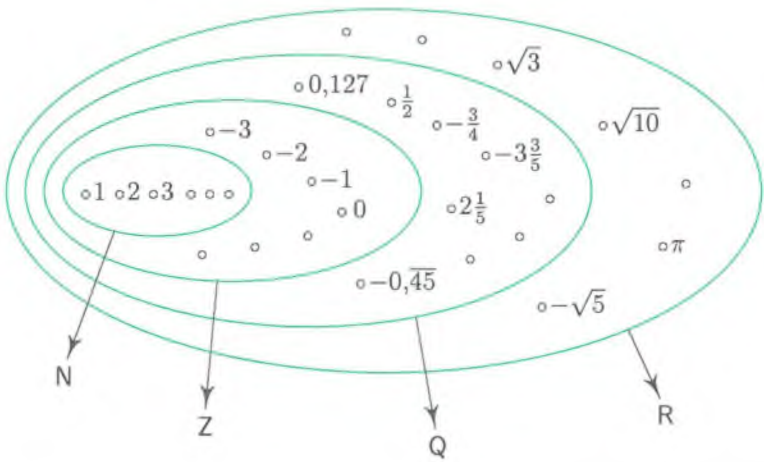
Podle Pythagorovy věty platí:

$$a^2 = 2^2 - 1^2$$
$$a^2 = 3$$
$$a = \sqrt{3}$$



Každému reálnému číslu můžeme na číselné ose přiřadit právě jeden bod. Každý bod číselné osy je obrazem právě jednoho reálného čísla.

Vztahy mezi množinami čísel přirozených, celých, racionálních a reálných můžeme znázornit obrázkem:



N ... množina všech přirozených čísel
Z ... množina všech celých čísel
Q ... množina všech racionálních čísel
R ... množina všech reálných čísel

Každé přirozené číslo je zároveň číslem celým, racionálním i reálným.
Každé celé číslo je i číslem racionálním a reálným.
Každé racionální číslo je i číslem reálným.

Ale pozor! Obrácená tvrzení neplatí.

Např. celé číslo 121 je i číslem přirozeným, ale
celé číslo -35 není přirozeným číslem.
Racionální číslo 27 je i číslem celým,
racionální číslo $\frac{1}{3}$ není číslem celým.
Reálné číslo 125 je číslem přirozeným (i celým nebo racionálním).
Reálné číslo -35 je číslem celým (také racionálním),
ale není číslem přirozeným.
Reálné číslo $\sqrt{5}$ není ani přirozené, ani celé, ani racionální.
Je iracionální.

CVIČENÍ

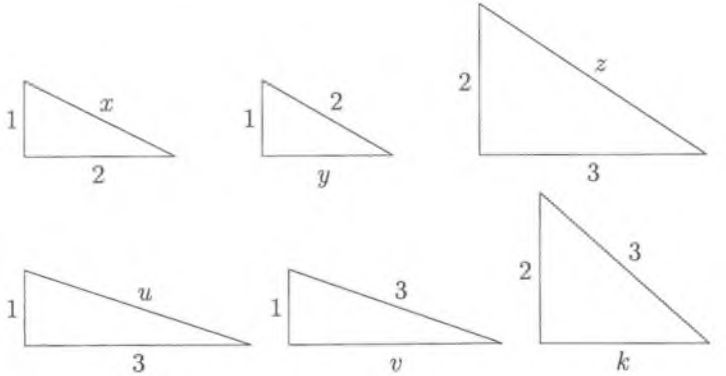
1. Znázorněte na číselné ose tato reálná čísla: $-3, 0, 1, \frac{2}{5}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}$.

Při konstrukci $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$ využijte zajímavou spirálu z kapitoly 9.2 prvního dílu učebnice M8.

2. Napište aspoň jedno číslo, které:

a) je racionální, ale není přirozené;
b) je racionální a je celé;
c) je reálné, ale není racionální;
d) je reálné a je racionální;
e) je celé, ale není přirozené.

3. Vyjádřete délku vyznačené strany pravoúhlého trojúhelníku jako druhou odmocninu přirozeného čísla.



2 VÝRAZY

2.1 Číselné výrazy a algebraické výrazy — opakování

V předcházejících ročnících jste se naučili sestavovat číselné výrazy a výrazy s proměnnou, zjednodušovat je a určovat jejich hodnotu.

Zopakujme si:

Výrazy, v nichž se vyskytují pouze reálná čísla, jsou **číselné výrazy**. Např. výraz $-7 + 1{,}2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$ je číselný výraz.

Výrazy obsahující aspoň jednu proměnnou jsou **algebraické výrazy**. Např. výraz $2x - 3$ je algebraický výraz.

Číselný výraz i výraz s proměnnou pojmenujeme podle početního výkonu, který při zjednodušování výrazu provádíme jako poslední.

Např.

$4 + \frac{1}{2} \cdot 3$	$2x + 3$	$\sqrt{36} + 64$	součet
$8{,}7 - 1{,}4 : 7$	$9 - \frac{z}{4}$	$(2z + 3) - z$	rozdíl
$2 \cdot (x + 3)$	$6x$	$(x + 2)(x - 7)$	součin
$(8{,}7 - 1{,}4) : 7$	$\frac{9 - z}{4}$	$(9 - z) : 4$	podíl
$\left(\frac{2}{5}\right)^3$	$(x - 1)^2$	$\left(\frac{a}{7}\right)^3$	mocnina
$\sqrt{36 + 64}$	$\sqrt{27 \cdot 5}$	$\sqrt{64 - 34}$	odmocnina

1 Vypočítejte hodnotu číselného výrazu:

a) $-2{,}5 : 5 + 3 \cdot 0{,}5 + \sqrt{0{,}04} \cdot 0{,}2^2$

b) $\frac{1}{2} \cdot \{[4 \cdot (3 - 11) + 2] : 5 + 8\}$

Řešení

a) Ve výrazu nejsou závorky. Početní výkony provádíme v následujícím pořadí: umocníme a odmocníme, násobíme a dělíme, sčítáme a odčítáme.

$$-2{,}5 : 5 + 3 \cdot 0{,}5 + \sqrt{0{,}04} \cdot 0{,}2^2 = -2{,}5 : 5 + 3 \cdot 0{,}5 + 0{,}2 \cdot 0{,}04 = \\ = -0{,}5 + 1{,}5 + 0{,}008 = 1{,}008$$

Hodnota daného číselného výrazu je 1,008.

b) Jsou-li ve výrazu závorky, provádíme nejprve početní výkony uvedené v závorkách. Říkáme, že odstraňujeme závorky.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \cdot \{[4 \cdot (3 - 11) + 2] : 5 + 8\} &= \frac{1}{2} \cdot \{[4 \cdot (-8) + 2] : 5 + 8\} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \{[-32 + 2] : 5 + 8\} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \{-30 : 5 + 8\} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \{-6 + 8\} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 = \\ &= 1\end{aligned}$$

Hodnota daného číselného výrazu je 1.

2 Určete hodnotu výrazu $\frac{(a+c)v}{2}$ pro $a = 7{,}6$, $c = 2{,}4$, $v = 1{,}6$.

Řešení

Za proměnné a, c, v dosadíme daná čísla. Získáme číselný výraz a vypočítáme jeho hodnotu:

$$\frac{(a+c)v}{2} = \frac{(7{,}6 + 2{,}4) \cdot 1{,}6}{2} = \frac{10 \cdot 1{,}6}{2} = 8$$

Pro $a = 7{,}6$, $c = 2{,}4$, $v = 1{,}6$ nabývá výraz $\frac{(a+c)v}{2}$ hodnoty 8.

3 Zapište jako výraz:

a) dvojnásobek čísla y zvětšený o 3;
b) dvojnásobek čísla y zvětšeného o 3;
c) polovinu čísla z zmenšenou o 5;
d) polovinu čísla z zmenšeného o 5.

Řešení

a) Dvojnásobek čísla y . . . . $2y$,
dvojnásobek čísla y zvětšený o 3 . . . $2y + 3$.

b) Číslo y zvětšené o 3 . . . . $y + 3$,
dvojnásobek zvětšeného čísla . . . . . $2 \cdot (y + 3)$.

c) Polovina čísla z . . . . $\frac{z}{2}$,
polovina čísla z zmenšená o 5 . . . . . $\frac{z}{2} - 5$.

d) Číslo z zmenšené o 5 . . . . $z - 5$,
polovina zmenšeného čísla . . . . $\frac{(z-5)}{2}$.

4 Při cyklistickém výletě jel Petr dopoledne 2 hodiny průměrnou rychlostí v km/h a odpoledne jel t hodin průměrnou rychlostí 14 km/h. Kolik kilometrů ujel za celý den?

Řešení

Dopoledne: za 1 hodinu . . . . v km,
za 2 hodiny . . . . $2 \cdot v$ km.
Odpoledne: za 1 hodinu . . . . 14 km,
za t hodin . . . . $14 \cdot t$ km.
Za celý den: . . . . $(2v + 14t)$ km.

Petr ujel za celý den $(2v + 14t)$ km.

5 Do dvěstělitrové nádrže přitéká x litrů vody za minutu. Odpovědi na otázky zapište jako výrazy.

a) Kolik litrů vody přiteče do nádrže za 7 minut?
b) Kolik litrů vody bude v nádrži za 7 minut, jestliže při otevření přívodu už byla nádrž do poloviny napuštěna?
c) Za jak dlouho se naplní nádrž, jestliže při otevření přívodu byla prázdná?

Řešení

a) Za 1 minutu přiteče . . . . x l vody,
za 7 minut přiteče . . . . $7x$ l vody.

Za 7 minut přiteče do nádrže $7x$ l vody.

b) Při otevření přívodu bylo v nádrži . . . $\frac{1}{2} \cdot 200\,\mathrm{l} = 100\,\mathrm{l}$ vody,
za 7 minut přiteklo . . . . $7x$ l vody,
v nádrži pak bylo celkem . . . . $(100 + 7x)$ l vody.

Pokud byla nádrž při otevření přívodu do poloviny napuštěna, bylo v ní po 7 minutách napouštění celkem $(100 + 7x)$ l vody.

c) Za 1 minutu přiteče do nádrže . . . . x l vody,
do nádrže se vejde . . . . 200 l vody,
nádrž se naplní za . . . . $(200 : x)\,\mathrm{min} = \frac{200}{x}\,\mathrm{min}$.

Jestliže byla nádrž při otevření přívodu vody prázdná, naplní se za $\frac{200}{x}$ min.

Úlohu má smysl řešit pouze v případě, že do nádrže opravdu nějaká voda přitéká, tj. jestliže je x různé od nuly.

Výrazy s proměnnou ve jmenovateli, např. $\frac{200}{x}$, se nazývají **lomené výrazy**. Mají smysl tehdy, jestliže se jmenovatel nerovná nule. O lomených výrazech se budeme učit v 9. ročníku.

CVIČENÍ

1. Rozhodněte, které z daných výrazů jsou číselné a které algebraické:

a) $4x^3 - 2x$ b) $4^3 - 2$
c) $\pi \cdot 3^2$ d) $a \cdot b \cdot c$

2. Vypočtěte hodnotu číselného výrazu:

a) $-\frac{9}{-2 \cdot (-3)} + \frac{5 - 15}{(-2)^3}$

b) $\left(-\frac{5}{9} + \frac{2}{3}\right) : \left(1\frac{2}{3} - 2\frac{1}{3}\right)$

c) $0{,}8 \cdot \{0{,}4 + 0{,}5 \cdot [(5{,}6 + 4) : 3]\}$

d) $\frac{5}{6} \cdot \sqrt{144} - \frac{1}{2} \cdot 1{,}2^2$

3. Pojmenujte výrazy:

a) $x + 2y$ b) $(x + 2) \cdot y$

c) $7a - 5b$ d) $7 \cdot (a - 5b)$

e) $\dfrac{m-3}{5}$ f) $\dfrac{m}{5} - 3$

g) $(2x + 3)^2$ h) $2x + 3^2$

4. Určete hodnotu výrazu pro $a = 6{,}3$, $b = 2$.

a) $3a - 4b$ b) $3 \cdot (a - 4) \cdot b$

c) $3 \cdot (a - 4b)$ d) $(3a - 4) \cdot b$

e) $\dfrac{3 \cdot (a-4)}{b}$ f) $3a - \dfrac{4}{b}$

5. Zapište jako výrazy. Výpočty neprovádějte.

a) Součet čísla 12 a dvojnásobku čísla 7.

b) Dvojnásobek součtu čísel 12 a 7.

c) Rozdíl čtyřnásobku čísla 15 a poloviny čísla 8.

d) Čtyřnásobek rozdílu čísla 15 a poloviny čísla 8.

e) Součet čísla 7 a druhé mocniny čísla 5.

f) Druhá mocnina součtu čísel 7 a 5.

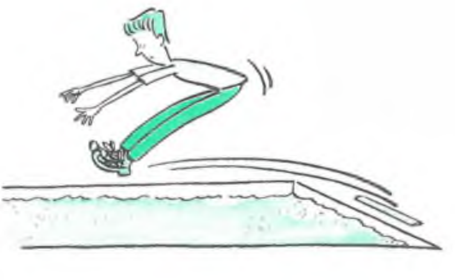
6. Zapište jako výraz s proměnnou:

a) počet osob ve třídě při hodině matematiky, je-li kromě paní učitelky přítomen i pan ředitel a z celkového počtu x chlapců a y dívek právě 3 žáci chybí;

b) celkovou cenu nákupu, obsahuje-li nákup 2 kg brambor, jejichž cena je y Kč za 1 kg a 1,5 kg pomerančů, u kterých je cena za 1 kg o x Kč větší než u brambor;

c) obsah obdélníku, je-li jeden jeho rozměr x cm a druhý rozměr je o 10 cm větší.

7. Petr skočil do dálky x cm, Honza skočil o 4 cm méně než Petr. Délka Vendulčina skoku se rovnala polovině toho, co skočili Honza a Petr dohromady. Zapište jako výraz s proměnnou x, kolik cm skočila do dálky Vendulka.



8. Je dán čtverec, jehož strana měří a cm. Zapište výrazem s proměnnou a obsah čtverce, jehož strana je:

a) o 2 cm delší než strana daného čtverce;

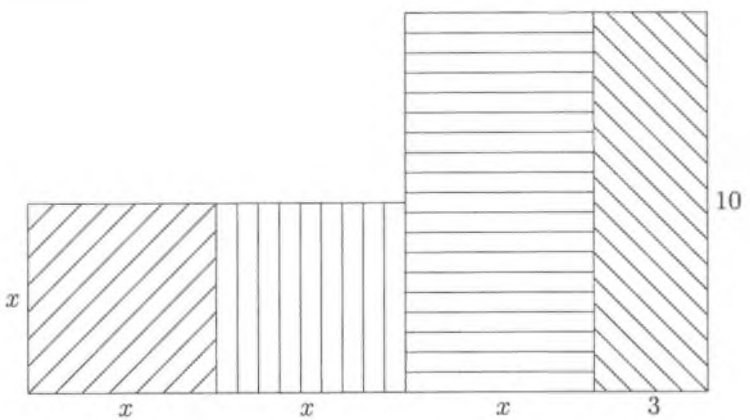
b) o 1 cm kratší než strana daného čtverce;
c) 2krát větší než strana daného čtverce;
d) polovinou strany daného čtverce.

9. Je dána krychle o hraně délky a cm. Zapište výrazem s proměnnou a objem krychle, jejíž hrana je:
a) o 5 cm delší než hrana dané krychle;
b) o 1 cm kratší než hrana dané krychle;
c) 5krát delší než hrana dané krychle;
d) polovinou hrany dané krychle.

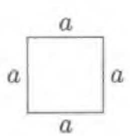
10. Určete hodnotu mnohočlenů na proužku 1, 2, je-li hodnota proměnné −1, 0, 1 atd.

2.2 Jednočleny a mnohočleny

1 Zapište jako výraz:
a) obvod čtverce, jehož strana má délku a centimetrů;
b) celkový počet žáků 8. třídy, v které je y chlapců a z dívek;
c) obsah útvaru, jehož rozměry v centimetrech jsou uvedeny na obrázku.



Řešení

a)


Obvod čtverce je $4a$ centimetrů.

b) V osmé třídě je celkem $(y + z)$ žáků.

c) Útvar je tvořen dvěma shodnými čtverci a dvěma obdélníky.
Obsah jednoho čtverce . . . . $x^2\,\mathrm{cm}^2$,
obsah obou čtverců . . . . $2x^2\,\mathrm{cm}^2$,
obsah většího obdélníku . . . . $10x\,\mathrm{cm}^2$,
obsah menšího obdélníku . . . . $30\,\mathrm{cm}^2$.

Obsah celého útvaru je $(2x^2 + 10x + 30)\,\mathrm{cm}^2$.

Výraz $4a$ obsahuje jednu proměnnou, která je označena a. Také výraz $2x^2 + 10x + 30$ obsahuje jednu proměnnou, je označena x. Výraz $y + z$ obsahuje dvě proměnné.

Výrazy $4a$, $y + z$, $2x^2 + 10x + 30$ se rovněž liší počtem členů. Výraz $4a$, ale také výrazy $-5b$, $\frac{1}{2}c$, $-5x^2y^3$ apod. nazýváme **jednočleny**. Rovněž čísla, např. 2; $\frac{7}{5}$; $-0{,}4$; 3^2 atd. **nazýváme jednočleny**.

Součet několika jednočlenů je **mnohočlen**. Např. výrazy $2x^2 + 10x + 30$, $y + z$ jsou **mnohočleny**.
Mnohočlen $y + z$ má 2 členy, je to dvojčlen.
Mnohočlen $2x^2 + 10x + 30$ má 3 členy, je to trojčlen.

Pozor!
$3x$ je jednočlen;
$3 + x$ je mnohočlen (je součtem jednočlenů 3, x);
$3 - x$ je mnohočlen (je součtem jednočlenů 3, $-x$).

Čísla, která se vyskytují v jednotlivých členech, nazýváme **koeficienty mnohočlenu**. Např. mnohočlen $2x^2 + 10x + 30$ má členy $2x^2$, $10x$, 30 a koeficienty 2, 10, 30. Člen mnohočlenu, ve kterém se nevyskytuje proměnná, je **prostý** neboli **absolutní** člen. V trojčlenu $2x^2 + 10x + 30$ je absolutní člen 30.

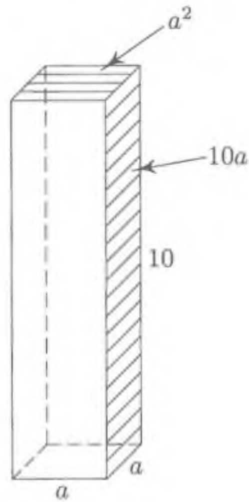
S algebraickými výrazy se setkáváme například:
- při řešení slovních úloh pomocí rovnic (vyjadřujeme vztahy mezi údaji v úloze);
- při výpočtech obvodů a obsahů rovinných útvarů, objemů a povrchů těles;
- při výpočtech hodnot fyzikálních veličin pomocí vzorců.

Algebraické výrazy umíme podle daných vztahů sestavit a umíme vypočítat jejich hodnotu, známe-li hodnoty proměnných. Je-li to možné, algebraické výrazy co nejvíce zjednodušujeme.

2 Pravidelný čtyřboký hranol má podstavnou hranu délky a centimetrů a výšku 10 cm.

a) Zapište povrch tohoto hranolu jako algebraický výraz s proměnnou a. Kolik členů má sestavený výraz?

b) Určete hodnotu tohoto výrazu pro $a = 2{,}5$ cm.



Řešení

a) Povrch hranolu tvoří dvě shodné podstavy tvaru čtverce a 4 shodné stěny tvaru obdélníku.

Obsah jedné podstavy . . . . $a^2\,\mathrm{cm}^2$,
obsah obou podstav . . . . $2a^2\,\mathrm{cm}^2$,
obsah jedné stěny . . . . $10a\,\mathrm{cm}^2$,
obsah všech stěn, tj. obsah pláště hranolu . . . $4 \cdot 10a\,\mathrm{cm}^2$.

Povrch hranolu je $(2a^2 + 40a)\,\mathrm{cm}^2$.

Výraz $2a^2 + 40a$ je dvojčlen s jednou proměnnou. Jeho koeficienty jsou 2 a 40. Nemá prostý člen.

b) Pro $a = 2{,}5$ cm je hodnota výrazu:
$2 \cdot 2{,}5^2 + 40 \cdot 2{,}5 = 2 \cdot 6{,}25 + 40 \cdot 2{,}5 = 12{,}50 + 100 = 112{,}50$

Povrch hranolu je $112{,}50\,\mathrm{cm}^2$.

3 Zapište jako výraz obvod obdélníku, je-li jeden jeho rozměr x cm a druhý rozměr je o 1 cm delší.

Řešení

Obvod obdélníku můžeme zapsat buď jako mnohočlen se šesti členy:

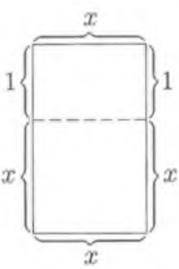
$$x + x + 1 + x + x + 1,$$

nebo jako dvojčlen:

$$4x + 2.$$

Oba výrazy znamenají totéž, rovnají se:

$$x + x + 1 + x + x + 1 = 4x + 2$$



Výrazy zapisujeme v nejjednodušším tvaru (s nejmenším možným počtem členů). Říkáme, že **výrazy zjednodušujeme**.

4 Zjednodušte mnohočleny:

a) $4a + 2 - a - 1$

b) $5a - 3b + \frac{1}{2} - a + 4b - \frac{1}{2}$

c) $3x^2 + 2x - 1 - x^2 - 5x - 7$

d) $3x^2 - 7x + 1 - 9x^2 + 7x$

e) $4ab + a^2 - b^2 + 2ab + 3a^2 + b^2$

Řešení

Mnohočlen je součtem několika jednočlenů. Při zjednodušování mnohočlenů využijeme vlastnosti sčítání:

a) $4a + 2 - a - 1 = (4a - a) + (2 - 1) = 3a + 1$

b) $5a - 3b + \frac{1}{2} - a + 4b - \frac{1}{2} =$

$$= (5a - a) + (-3b + 4b) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = 4a + b$$

Sečteme pouze členy výrazu se stejnou proměnnou.

Součet opačných čísel je nula. Říkáme, že se členy mnohočlenu ruší.

c) Sečteme mocniny se stejným základem a se stejným mocnitelem:

$3x^2 + 2x - 1 - x^2 - 5x - 7 =$

$= (3x^2 - x^2) + (2x - 5x) + (-1 - 7) =$

$= 2x^2 + (-3x) + (-8) = 2x^2 - 3x - 8$

Prohlédněte si, jak mnohočleny zjednodušili Petr a Honza.

d) Petrovo řešení

$3x^2 - 7x + 1 - 9x^2 + 7x =$

$= -6x^2 + 1$

e) Honzovo řešení

$4ab + a^2 - \cancel{b^2} + 2ab + 3a^2 + \cancel{b^2} =$

$= 6ab + 4a^2$

5 Daný mnohočlen zjednodušte. Správnost výsledku ověřte dosazením libovolného čísla za proměnnou.

a) $a^2 - 5a - 2a^2 + 4a + a$

b) $2rs + 4r + rs - 3r - s - 3rs$

Řešení

a) Nejprve daný mnohočlen zjednodušíme:

$$a^2 - 5a - 2a^2 + 4a + a = -a^2$$

Správnost zjednodušení ověříme dosazením libovolného reálného čísla za proměnnou do daného i do zjednodušeného výrazu. Oba výsledky porovnáme. Pokud nám nevyjdou stejná čísla, hledáme chybu. Mohli jsme ji udělat při zjednodušování mnohočlenu nebo také při počítání hodnoty výrazu.

Dosadíme např. $a = 1$.
Nejprve dosadíme do daného výrazu:

$$a^2 - 5a - 2a^2 + 4a + a = 1 - 5 - 2 + 4 + 1 = -1$$

Nyní dosadíme stejné číslo i do zjednodušeného výrazu:

$$-a^2 = -1^2 = -1$$

Hodnota obou výrazů je pro zvolené reálné číslo stejná.

b) Vendulčino řešení:

$$2rs + 4r + rs - 3r - s - 3rs = \underline{\underline{r - s}}$$

Kontrola pro $r = 2$, $s = -2$:

1. $2 \cdot 2 \cdot (-2) + 4 \cdot 2 + 2 \cdot (-2) - 3 \cdot 2 - (-2) - 3 \cdot 2 \cdot (-2) =$
$= \cancel{-8} \cancel{+8} - 4 - 6 + 2 + 12 = \underline{\underline{4}}$

2. $2 - (-2) = 2 + 2 = \underline{\underline{4}}$

CVIČENÍ

1. U každého mnohočlenu určete počet členů, počet proměnných, přečtěte koeficienty a absolutní člen:

a) $9a^2 + 6ab + b^2$ b) $25x^2 - 10x + 1$
c) $y^2 - 9$ d) $4a^2b$
e) $5b^4 - 2b^3 + 3b^2 - 10b + 4$ f) $-\left(\frac{1}{2}\right)z$

2. Napište libovolný
a) dvojčlen s jednou proměnnou;
b) jednočlen se dvěma proměnnými;
c) trojčlen s jednou proměnnou a s absolutním členem -4.

1

$x + 4$
$x - 7$
$x - 2$
$x + 6$

$2x + 1$
$2x - 3$
$2x + 5$
$2x - 7$

$a + 2$
$2a - \frac{1}{2}$
$a^2 - 1$
$3a^2 - a$

$a^3 - 2$
$2a^4 - a$
$a^2 - \frac{1}{3}a$
$0{,}5a^2 - 1$

3. Vypočtěte hodnotu daného mnohočlenu:
a) $2av + 2cv + a^2 + c^2$ pro $a = 4$, $c = 2$, $v = 2{,}5$
b) $2ab + 2ac + 2bc$ pro $a = 3{,}5$, $b = 2$, $c = 10$

4. Vypočtěte hodnotu dvojčlenu $3{,}14r^2 + 3{,}14rs$ pro:
a) $r = 4$, $s = 10$
b) $r = 1{,}2$, $s = 4{,}8$

5. Zjednodušte:
a) $2a^2 - 14a + a - 7$
b) $3x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 2x^3 - 2x^2 + 2x - x^2 + x - 1$
c) $4x^2 + 6x - 6x - 9$
d) $2b^3 - 2b^2 - b^2 + b + b - 1$
e) $2u^3 + u^2 + 4u^2 + 2u - 2u - 1$
f) $c^2 + 1 - 3c + 4c^3 - 4c^2 + 3c - 4$

6. Zjednodušte:
A. a) $4x - 2y + x - 3y$
b) $2m^2 - 3m + 2m - m^2$
c) $-u + 7v + 4u - 7v$
d) $-3a^2 + 5a - 1 - 6a + 4a^2 + 2$
e) $3r^2 + 6rs + 4r^2s - 2r^2 - 6rs - r^2 - 3rs^2$
B. a) $3a - 4b + a - 3b$
b) $3x^2 - 2x + x - 2x^2$
c) $-m + 4n + 6m - 4n$
d) $-5b^2 + 3b - 3 - 4b + 6b^2 + 4$
e) $5u^2 + 3uv + u^2v - 3u^2 - 3uv - 2u^2 - uv^2$

7. Zjednodušte. O správnosti výsledku se přesvědčte dosazením $a = 2$, $b = -2$.
a) $2a^2 - 2a + 3a - 3 + 3a^2 - a - 6a + 4$
b) $3a^2 - a + ab - b + 2b^2 - ab + 3a + b$
c) $b^3 + 2b^2 - b^2 - 2b + b + 3$
d) $2a^2b^2 + a^2b - ab^2 - 2a^2b + ab^2$

2.3 Sčítání a odčítání mnohočlenů

1 Rozcestí s kapličkou je po silnici vzdáleno od nádraží x km. Chata Petrových rodičů je od rozcestí o 1 km dál než dvojnásobek této vzdálenosti. Chata Honzových rodičů je od rozcestí vzdálena o 2 km méně než trojnásobek vzdálenosti rozcestí od nádraží (viz obr.). Jak daleko jsou od sebe vzdáleny obě

chaty, měříme-li jejich vzdálenost po silnici? Vyjádřete tuto vzdálenost výrazem s proměnnou x a vypočtěte ji pro $x = 0{,}8\,\text{km}$.

Řešení

Vzdálenost chaty Petrových rodičů od rozcestí je . . . $(2x + 1)\,\text{km}$.
Vzdálenost chaty Honzových rodičů od rozcestí je . . . $(3x - 2)\,\text{km}$.
Vzájemná vzdálenost obou chat
je součet těchto vzdáleností . . . $(2x + 1)\,\text{km} + (3x - 2)\,\text{km}$.

Máme určit **součet mnohočlenů** $(2x + 1) + (3x - 2)$.
Sčítání reálných čísel je komutativní a asociativní. Součet se nezmění, jestliže pořadí sčítanců zaměníme nebo sčítance libovolně sdružíme do skupin a pak sečteme. Mnohočlen je také součet, součet jednočlenů. Při sčítání mnohočlenů sdružíme jejich jednotlivé členy vhodně do skupin a sečteme.

$$(2x + 1) + (3x - 2) = (2x + 3x) + (1 - 2) = 5x - 1$$

Vzdálenost obou chat je rovna $(5x - 1)\,\text{km}$.

Vypočítáme tuto vzdálenost pro $x = 0{,}8\,\text{km}$:

$$(5x - 1) = (5 \cdot 0{,}8 - 1) = (4 - 1) = 3$$

Pro $x = 0{,}8\,\text{km}$ je vzdálenost obou chat $3\,\text{km}$.

Pro kontrolu můžeme zjistit vzdálenost jednotlivých chat od rozcestí a tyto vzdálenosti sečíst:

$$(2x + 1) = (2 \cdot 0{,}8 + 1) = 2{,}6$$

Vzdálenost chaty Petrových rodičů od rozcestí je $2{,}6\,\text{km}$.

$$(3x - 2) = (3 \cdot 0{,}8 - 2) = 0{,}4$$

Vzdálenost chaty Honzových rodičů od rozcestí je $0{,}4\,\text{km}$.
Vzdálenost obou chat je $2{,}6\,\text{km} + 0{,}4\,\text{km} = 3\,\text{km}$.

2 Sečtěte mnohočleny. Správnost součtu ověřte dosazením daného čísla za proměnnou do daného výrazu a do výsledku.

a) $(3x^2 - 2x + 1) + (5x^2 - 7x - 6)$; $x = 1$
b) $(2a^2 - 3a + b) + (-5a^2 + 4a + 2b)$; $a = -0{,}1$, $b = 0{,}1$
c) $(4u^2 - 2u + 3) + (-4u^2 + 2u - 3)$; $u = \dfrac{1}{2}$

Řešení

a) Uplatníme komutativnost a asociativnost sčítání. Členy obou mnohočlenů sdružíme do skupin tak, aby v každé skupině byly členy se stejnou proměnnou a se stejným mocnitelem. V každé skupině členy sečteme.

$(3x^2 - 2x + 1) + (5x^2 - 7x - 6) =$
$= (3x^2 + 5x^2) + (-2x - 7x) + (1 - 6) =$
$= 8x^2 + (-9x) + (-5) =$
$= 8x^2 - 9x - 5$

Pro $x = 1$:

$(3x^2 - 2x + 1) + (5x^2 - 7x - 6) =$
$= (3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + 1) + (5 \cdot 1^2 - 7 \cdot 1 - 6) =$
$= (3 - 2 + 1) + (5 - 7 - 6) = 2 + (-8) = \underline{-6}$

$8x^2 - 9x - 5 = 8 \cdot 1^2 - 9 \cdot 1 - 5 = 8 - 9 - 5 = \underline{-6}$

b) Zápis sčítání mnohočlenů můžeme zjednodušit. Vynecháme závorky, sečteme členy se stejnou proměnnou a se stejným mocnitelem a rovnou píšeme součet:

$(2a^2 - 3a + b) + (-5a^2 + 4a + 2b) =$
$= 2a^2 - 3a + b - 5a^2 + 4a + 2b =$
$= -3a^2 + a + 3b$

Ověření správnosti součtu pro $a = -0{,}1$, $b = 0{,}1$:

$(2a^2 - 3a + b) + (-5a^2 + 4a + 2b) =$
$= (0{,}02 + 0{,}3 + 0{,}1) + (-0{,}05 - 0{,}4 + 0{,}2) =$
$= 0{,}42 + (-0{,}25) =$
$= \underline{0{,}17}$

$-3a^2 + a + 3b =$
$= -0{,}03 + (-0{,}1) + 0{,}3 =$
$= \underline{0{,}17}$

c) Lenka postupovala takto:

$(4u^2 - 2u + 3) + (-4u^2 + 2u - 3) = \cancel{4u^2} - 2u + \cancel{3} - \cancel{4u^2} + 2u - \cancel{3} = 0$

Pro $u = \frac{1}{2}$:

1) $\left[4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} + 3\right] + \left[-4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} - 3\right] =$
$= \left[4 \cdot \frac{1}{4} - 1 + 3\right] + \left[-4 \cdot \frac{1}{4} + 1 - 3\right] = [1 - 1 + 3] + [-1 + 1 - 3] =$
$= 3 + (-3) = \underline{\underline{0}}$

2) $\underline{\underline{0}}$

Čísla 3, -3 jsou **opačná čísla**. Jejich součet je roven nule.
Jednočleny $4u^2$, $-4u^2$ jsou **opačné jednočleny**. Liší se pouze znaménkem. Součet opačných jednočlenů je rovněž roven nule.
Mnohočleny $4u^2 - 2u - 3$, $-4u^2 + 2u + 3$ se liší pouze znaménkem u svých jednotlivých členů. Jsou to **opačné mnohočleny**. Součet opačných mnohočlenů je roven nule.

3 Utvořte opačné mnohočleny k mnohočlenům:
a) $2x + 1$ b) $5x^2 - 3$ c) $-4x^3 + 2x - 1$

Řešení

a) $-(2x + 1) = -2x - 1$
b) $-(5x^2 - 3) = -5x^2 + 3$
c) $-(-4x^3 + 2x - 1) = 4x^3 - 2x + 1$

K danému mnohočlenu utvoříme mnohočlen opačný, změníme-li znaménka všech jeho členů.

4 Proveďte:
a) $4{,}8 - (-2{,}1)$ b) $7x^2 - 3x^2$ c) $(8x + 3) - (3x - 2)$

Řešení

a) Odečíst číslo znamená přičíst číslo k němu opačné:
$4{,}8 - (-2{,}1) = 4{,}8 + (+2{,}1) = 6{,}9$

b) S mocninami jsme také počítali:
$7x^2 - 3x^2 = 7x^2 + (-3x^2) = 4x^2$

Odečíst jednočlen znamená přičíst jednočlen k němu opačný.

c) Také pro odčítání mnohočlenů platí:

Odečíst mnohočlen znamená přičíst mnohočlen k němu opačný.

$(8x + 3) - (3x - 2) = (8x + 3) + (-3x + 2) = 5x + 5$

5 Odečtěte mnohočleny: $(5y^2 - 3y + 2) - (y^2 - 3y + 6)$. Po výpočtu rozdílu dosaďte do původního výrazu i do vypočteného rozdílu např. $y = 5$ a ověřte, že se takto získané číselné výrazy rovnají.

Řešení

$(5y^2 - 3y + 2) - (y^2 - 3y + 6) =$

Odečtení mnohočlenu změníme na přičtení opačného mnohočlenu.

$= (5y^2 - 3y + 2) + (-y^2 + 3y - 6) =$

Mnohočleny sečteme.

$= 4y^2 - 4$

Dosazení:

$(5y^2 - 3y + 2) - (y^2 - 3y + 6) =$
$= (5 \cdot 5^2 - 3 \cdot 5 + 2) - (5^2 - 3 \cdot 5 + 6) = 112 - 16 = \underline{96}$

$4y^2 - 4 = 4 \cdot 5^2 - 4 = \underline{96}$

6 Odečtěte:

a) $(4x + 7) - (2x + 1) + (7x - 3)$ b) $2a - [4 - (a - 3) + 5a]$

Řešení

Prohlédněte si ukázky žákovských prací:

Dobře:

a) $(4x+7)-(2x+1)+(7x-3)=$
$=(4x+7)+(-2x-1)+(7x-3)=$
$=\underline{9x+3}$

b) $2a-[4-(a-3)+5a]=$
$=2a-[4+(-a+3)+5a]=$
$=2a-[4a+7]=$
$=2a+[-4a-7]=$
$=\underline{-2a-7}$

Závorky odstraňujeme postupně, počínaje vnitřními závorkami.

Chybně:

a) $(4x+7)-(2x+1)+(7x-3)=$
$=(4x+7)+(-2x-1)+(-7x+3)=$
$=\underline{-5x+9}$

b) $2a-[4-(a-3)+5a]=$
$=2a+[-4+(-a+3)-5a]=$
$=2a+[-6a-1]=$
$=\underline{-4a-1}$

Najdete chybu v řešení?

CVIČENÍ

1. Čtěte a říkejte rovnou výsledky:

a) $3a + 2a$	b) $7a^2 + 3a^2$	c) $6ab - 9ab$
d) $-a^3 + a^3$	e) $4a^2b + a^2b$	f) $cd^2 + cd^2$
g) $-4u^3 - 5u^3$	h) $7y^2 - 9y^2$	i) $2x + 3x - x$
j) $-3a + 4a - a$	k) $4a^5 - 2a^5 + a^5$	l) $-2x^3 - 4x^3 - x^3$

2. Čtěte a říkejte (pište) rovnou výsledky:

a) $2a + b - a + 4b$ b) $a^2 + 3b^2 + 2a^2$
c) $2a^3 + 4a^2 + a^3$ d) $4a^2 - 3 + 2a^2$
e) $2x + 3x^2 + 5x$ f) $4x + 2 - x - 2$
g) $2x^3 + 4x^2 + 2x$ h) $2x^2 - 3 + x^2 - 8$

3. Sečtěte:

a) $(3m - 1) + (5 - m)$
b) $(4a + 3) + (-2a - 5)$
c) $(12b + 3c) + (6b - 3c)$
d) $(4ax - 3) + (2 - 8ax)$
e) $(2x^2 - 3x + 1) + (x^2 - 6)$
f) $(5ab - 3b^2 + 6) + (b^2 - ab - 6)$
g) $(7x^3 - 2x^2 - 3x) + (6x^3 + 2x^2 - 5x)$
h) $(4a^2b + 3ab^2 - ab) + (-5a^2b - 3ab^2 - 2ab)$

4. Proveďte:

a) $(4a - 3) + (a - 9) + (2a - 8)$
b) $2x + (x - y) + (3y - 8)$
c) $2a^2 + (9 - 2a - 5a^2)$
d) $(4c^3 + 2) + (5c^2 - 8) + (c^3 - c^2)$
e) $(4x^3 - 2x + 3) + (x^3 - 9x - 8)$
f) $(4a^2 - 5ab + b^2) + (a^2 - ab - b^2)$
g) $(-4a^2x + ax^2 - 3a^2x^2) + (-ax^2 + 5a^2x - 2a^2x^2)$

5. Utvořte mnohočleny opačné k daným mnohočlenům:

a) $2x + 1$ b) $3y - 3$
c) $-4a + 5b$ d) $-a - 1$
e) $a^2 - 1$ f) $m^2 + 1$
g) $a^2 + 2ab + b^2$ h) $m^2 - 4m + 4$

6. Proveďte:

a) $8a - (+3a)$ b) $2ax - (-3ax)$
c) $-4a^2 - (+5a^2)$ d) $-6y - (-3y)$
e) $-4a^2 - (-4a^2)$ f) $2z - (-2z)$
g) $-7a^2x^3 - (-8a^2x^3)$ h) $-5c^4d - (+5c^4d)$

7. Proveďte:

a) $4a - (a + 9)$ b) $5x^2 - (x^2 - 1)$
c) $-6ay - (-ay + 2)$ d) $-c^3 - (-c^3 - 6)$
e) $(5ax + 9) - (5ax + 9)$ f) $(5ax + 9) - (5ax - 9)$
g) $(5ax + 9) - (-5ax + 9)$ h) $(5ax + 9) - (-5ax - 9)$

2

$x + 1$
$x - 3$
$x + 5$
$x - 7$
$3x - 1$
$4x - 7$
$5x + 1$
$6x + 1$
$a - 2$
$2a + \frac{1}{2}$
$a^2 + 1$
$3a^2 + a$
$2 - a^3$
$a^4 + 2a$
$a^2 + \frac{1}{3}a$
$0{,}5a^2 + 1$

8. Proveďte:

a) $(4a - 5b + c) - (4a - 8b - c)$
b) $(7x^2 - 4x + 1) - (x^2 - 4x - 5)$
c) $(2ab + 4) - (ab - 3) - (3ab + 1)$
d) $(7x^3 + 3) - (2x^3 - 1) + (x^3 - 6)$
e) $(10a^2b + 4ab - 5a^2) - (3ab^2 + 4ab + 5a^2b)$
f) $6a^2 - (5a^2 - 2a + 3) + 3$

9. Proveďte:

a) $3a - [5a - (2a - 1)]$
b) $-7x - [3x - (6x - 2) + (3 - 5x)]$
c) $(19m^2 + 3m) - [5m - (2m^2 - m) + m^2]$
d) $-[4a - (7b - a - 2c) + (-3b + 10c)]$

10. Který mnohočlen je o $a + 2b$ větší než

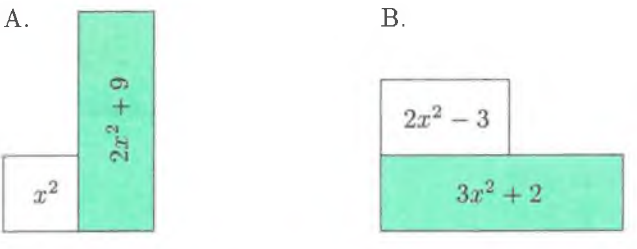
a) $2a + 3b$; b) $5b - 7a$; c) $-2a - b$; d) $-a - 2b$?

11. Který mnohočlen je o $4x + 3y - 2$ menší než

a) $5x + 4y - 3$; b) $4x - y - 2$; c) $9x - 2y - 2$?

12. Vypočtěte součet a rozdíl mnohočlenů $x^2 - 3x + 2$ a $3x^2 + x - 2$.

13. Výměry sousedících pozemků jsou vyjádřeny algebraickým výrazem s proměnnou x (viz obrázek).



a) Vyjádřete obsah celé znázorněné plochy algebraickým výrazem s proměnnou x.
b) Vyjádřete algebraickým výrazem, oč je větší barevně vyznačený pozemek než pozemek sousední.

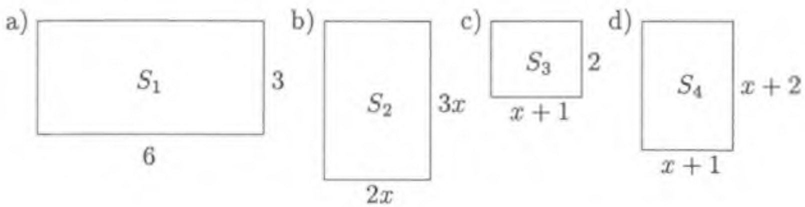
14. Utvořte opačné mnohočleny k mnohočlenům na proužcích (1), (2).

15. Sečtěte výraz na proužku (1) s výrazem na proužku (2).
Obměna: první mnohočlen na proužku (1) sečtěte postupně s každým mnohočlenem na proužku (2).

16. Utvořte rozdíl mnohočlenů z proužků (1) a (2).
Obměna: od prvního mnohočlenu na proužku (1) odečtěte postupně mnohočleny na proužku (2).

2.4 Násobení mnohočlenů

1 Rozměry obdélníků na obrázku jsou vyjádřeny v centimetrech číselnými výrazy nebo výrazy s proměnnou. Zapište obsahy těchto obdélníků.



Řešení

Obsah obdélníku určíme jako součin jeho rozměrů.

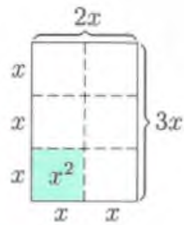
$S_1 = \underbrace{6 \cdot 3}_{\text{součin reálných čísel}}$ $\quad S_2 = \underbrace{3x \cdot 2x}_{\text{součin jednočlenů}}$ $\quad S_3 = \underbrace{(x+1) \cdot 2}_{\text{součin mnohočlenu a jednočlenu}}$ $\quad S_4 = \underbrace{(x+2) \cdot (x+1)}_{\text{součin dvou mnohočlenů}}$

a) $S_1 = 6 \cdot 3$ Násobit reálná čísla už umíme.
$S_1 = 18$

$S_1 = 18\,\text{cm}^2$

b) $S_2 = 3x \cdot 2x$
$S_2 = 6x^2$

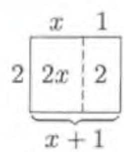
$S_2 = 6x^2\,\text{cm}^2$



Při násobení jednočlenů uplatňujeme komutativnost násobení:
$3x \cdot 2x = 3 \cdot x \cdot 2 \cdot x = (3 \cdot 2) \cdot (x \cdot x) = 6x^2$

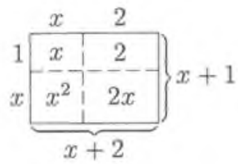
c) $S_3 = (x+1) \cdot 2$
$S_3 = 2x + 2$

$S_3 = (2x+2)\,\text{cm}^2$



Při násobení mnohočlenu jednočlenem uplatňujeme distributivnost násobení. Každý člen mnohočlenu násobíme jednočlenem (všimněte si geometrického znázornění součinu).

d) $S_4 = (x+2)\cdot(x+1)$



Z náčrtku je zřejmé, že obdélník je tvořen čtyřmi útvary, jejichž obsahy jsou: x^2, $2x$, x, 2.

Platí tedy:

$$(x+2)\cdot(x+1) = x^2 + 2x + x + 2 = x^2 + 3x + 2$$

Všimněte si:

$$(x+2)\cdot(\boxed{x}+1) = \boxed{x}\cdot x + \boxed{x}\cdot 2 + 1\cdot x + 1\cdot 2 =$$
$$= x^2 + 2x + x + 2 =$$
$$= x^2 + 3x + 2$$

Součin dvou mnohočlenů je zase mnohočlen. Jeho členy získáme, jestliže každý člen jednoho mnohočlenu vynásobíme každým členem druhého mnohočlenu. Výsledek upravíme na co nejjednodušší tvar.

Připomeňme si:

Součin $2\cdot(x+1)$ lze psát jako $2(x+1)$,
součin $(x+2)\cdot(x+1)$ lze psát jako $(x+2)(x+1)$.

Všimněte si!

$(x+2)\cdot(x+1) =$	Mnohočlen $(x+1)$ nahradíme M.
$= (x+2)\cdot M =$	
$= x\cdot M + 2\cdot M =$	Provedeme naznačené násobení.
$= x\cdot(x+1) + 2\cdot(x+1) =$	Místo M dosadíme původní mnohočlen.
$= x^2 + x + 2x + 2 =$	Provedeme násobení.
$= x^2 + 3x + 2$	Zjednodušíme.

2 Vynásobte:

a) $(4x^2 - 3x + 5)\cdot(2x-1)$ b) $(3x+1)\cdot(2x-1)\cdot(x+3)$

Řešení

a) $(4x^2 - 3x + 5)\cdot(2x-1) =$
$= 8x^3 - 6x^2 + 10x - 4x^2 + 3x - 5 =$
$= 8x^3 - 10x^2 + 13x - 5$

Každý člen jednoho mnohočlenu násobíme každým členem druhého mnohočlenu a pak zjednodušíme.

Petr násobil druhý mnohočlen postupně každým členem prvního mnohočlenu:

$$(4x^2-3x+5)\cdot(2x-1) = 8x^3-4x^2-6x^2+3x+10x-5 =$$
$$= \underline{\underline{8x^3-10x^2+13x-5}}$$

Honza násobil první mnohočlen každým členem druhého mnohočlenu. Zapisoval pod sebe členy součinu se stejným základem a stejným exponentem:

$$\begin{array}{rl} (4x^2-3x+5)\cdot(2x-1) = & 8x^3-6x^2+10x \\ & \quad\;\; -4x^2+3x-5 \\ \hline & \underline{\underline{8x^3-10x^2+13x-5}} \end{array}$$

Lenka postupovala jako Honza, zvolila jiné pořadí násobení:

$$\begin{array}{rl} (4x^2-3x+5)\cdot(2x-1) = & -5+3x-4x^2 \\ & \quad +10x-6x^2+8x^3 \\ \hline & \underline{\underline{-5+13x-10x^2+8x^3}} \end{array}$$

b) $(3x+1)\cdot(2x-1)\cdot(x+3) =$ Vypočítáme nejprve součin
$= [(3x+1)\cdot(2x-1)]\cdot(x+3) =$ prvních dvou mnohočlenů,
$= [6x^2-3x+2x-1]\cdot(x+3) =$
$= [6x^2-x-1]\cdot(x+3) =$ tento součin vynásobíme
$= 6x^3-x^2-x+18x^2-3x-3 =$ třetím mnohočlenem
$= 6x^3+17x^2-4x-3$ a výraz zjednodušíme.

Ověřte sami, že se součin nezmění, budete-li mnohočleny násobit v jiném pořadí.

CVIČENÍ

1. Čtěte a řekněte rovnou výsledek:

a) $7x\cdot 5$ b) $-4\cdot 2y$
c) $-6\cdot(-0{,}01a)$ d) $5x\cdot 3x$
e) $-4x^2\cdot 2x$ f) $-8y^2\cdot(-3y^3)$
g) $2ab\cdot(-3a)$ h) $-4a^2b\cdot\left(-\frac{1}{2}ab^2\right)$
i) $-3x^3y\cdot 2x^2y^3$ j) $(-2c)\cdot 4c^2\cdot 5c^3$
k) $2u^2\cdot 5u^3\cdot 7u^4$ l) $(-a^2)\cdot 3b^3\cdot(-6ab)$

2. Násobte:

a) $(a-4)\cdot 5$ b) $6\cdot(2b-3)$
c) $-7\cdot(3a^2-1)$ d) $-1\cdot(2a^2-3b)$
e) $4a\cdot(a-9)$ f) $-5x^2\cdot(7-x)$
g) $2y^3\cdot(3y^2-y)$ h) $-10a^2\cdot(-5a^3-2a^4)$
i) $(2b+4c-8d)\cdot\frac{1}{2}$ j) $-3x\cdot(-2x+4y-5)$
k) $-4a^4b^4\cdot(-5a^3+2b^3+ab)$ l) $-2x\cdot(x^2-2x+1)$

3. Vypočtěte:

a) $a\cdot(a+b)-b\cdot(a-b)$
b) $6\cdot(3x+4y)-8\cdot(5x-y)+x-y$
c) $a\cdot(a+b-c)-b\cdot(a+b-c)+c\cdot(a-b+c)$
d) $(a+b)\cdot 4-(a-b)\cdot 3$
e) $4+3\cdot(u-1)-3u$
f) $2d\cdot(d^2+3{,}5d-1)-7d^2$

4. Vypočtěte:

a) $2\cdot(7x+8)-2\cdot[x-3\cdot(4-2x)]$
b) $10x-[2\cdot(x+1)-3\cdot(x-1)]+5$
c) $3x-3\cdot[y+2\cdot(x-y)-x]$
d) $5a-4\cdot[3a-a\cdot(2+a)+a^2]$

5. Násobte:

a) $(m+3)\cdot(m+5)$ b) $(7-c)\cdot(c+4)$
c) $(2d+1)\cdot(3d-2)$ d) $(4-5x)\cdot(x-3)$
e) $(2a+b)\cdot(a+2b)$ f) $(4r-3s)\cdot(-2s+r)$
g) $(2a^2+1)\cdot(3a-4)$ h) $(-2+a^2)\cdot(a^2-4)$

6. Vypočtěte. Všimněte si, jak se mění umístěním závorek pořadí početních výkonů a výsledek.

a) $(2x+3)\cdot(4x-5)$ b) $2x+3\cdot(4x-5)$
c) $(2x+3)\cdot 4x-5$ d) $2x+3\cdot 4x-5$
e) $(a+2)\cdot(a-2)$ f) $a+2\cdot(a-2)$
g) $(a+2)\cdot a-2$ h) $a+2\cdot a-2$

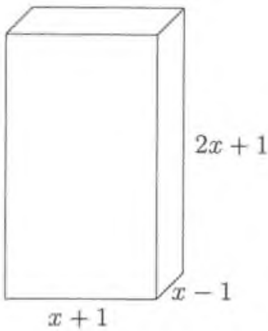
7. Vynásobte:

a) $(4y^2-7y+3)\cdot(5y+2)$
b) $(a-b)\cdot(a^2+ab+b^2)$
c) $(5x^2-4x+3)\cdot(-1+2x)$
d) $(a-3)\cdot(a+2)\cdot(a+1)$
e) $(1-2b)\cdot(1-3b)\cdot(1-4b)$
f) $(a^2+1)\cdot(2a-3)\cdot(3a^2-a)$

8. Proveďte:

a) $(3x+1)\cdot(4x-5)+(6x-11)\cdot(2x+7)$
b) $(4a+3)\cdot(a-1)-(2a+1)\cdot(a+1)$
c) $4\cdot(a+2)\cdot(2a-1)-3\cdot(a-1)\cdot(2a+1)$
d) $(y-1)\cdot(y-2)\cdot(y+3)-(y^2-7)\cdot y$

9. Na obrázku jsou rozměry kvádru vyjádřeny algebraickými výrazy. Zapište co nejjednodušším výrazem s proměnnou x
a) objem kvádru,
b) povrch kvádru.



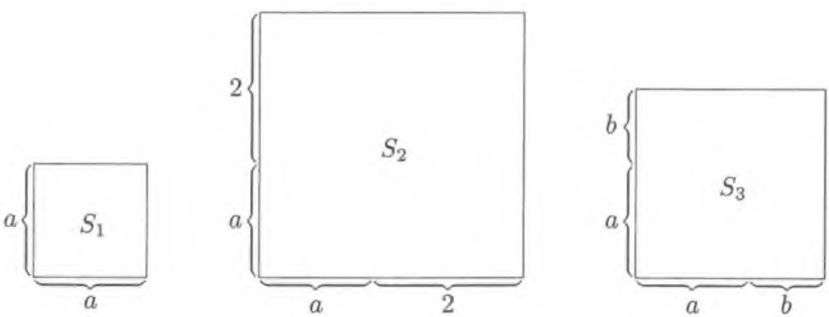
10. Mnohočleny na proužku (1) a (2) násobte čísly 2, −3, −1, atd.

11. Mnohočleny na proužku (1), (2), násobte jednočleny x, $2x$, $-3x^2$, a, $-5a^3$ atd.

12. Vypočtěte součin výrazu z proužku (1) a výrazu z proužku (2). Úlohu obměňujte: prvním mnohočlenem na proužku (1) vynásobte postupně každý mnohočlen na proužku (2) atd.

2.5 Druhá mocnina dvojčlenu Rozdíl mocnin

1 Zapište co nejjednodušším algebraickým výrazem s proměnnými a, b obsahy čtverců vyznačených na obrázku:



Řešení

Obsah čtverce vypočítáme jako druhou mocninu délky jeho strany:

$$S_1 = a^2 \qquad S_2 = (a+2)^2 \qquad S_3 = (a+b)^2$$

Druhá mocnina je součin dvou stejných činitelů:

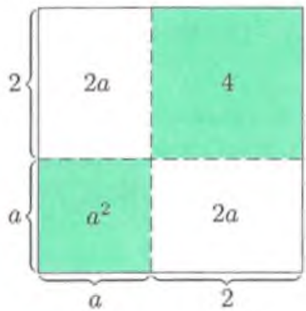
$$a^2 = a \cdot a$$

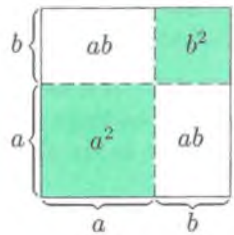
$$(a+2)^2 = (a+2) \cdot (a+2)$$

$$(a+b)^2 = (a+b) \cdot (a+b)$$

$$(a+2) \cdot (a+2) = \underbrace{a \cdot a}_{a^2} + \underbrace{2a + 2a}_{2 \cdot 2a} + \underbrace{2 \cdot 2}_{2^2} = a^2 + 4a + 4$$

$$(a+b) \cdot (a+b) = a^2 + \underbrace{ab + ba}_{2 \cdot ab} + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$





Všimněte si!

Po zjednodušení druhé mocniny dvojčlenu dostaneme následující trojčlen:

$$a^2 \qquad + \qquad 2ab \qquad + \qquad b^2$$

a^2	$2ab$	b^2
↓	↓	↓
druhá mocnina prvního členu dvojčlenu	dvojnásobek součinu obou členů dvojčlenu	druhá mocnina druhého členu dvojčlenu

Druhou mocninu dvojčlenu určujeme podle vzorce:

$$\boxed{(A+B)^2 = A^2 + 2 \cdot A \cdot B + B^2}$$

2 Určete druhou mocninu dvojčlenů:

a) $x + 7$ b) $2x + 1$ c) $3x + 4y$ d) $x^3 + 2x^2$

Řešení

Počítáme zpaměti a píšeme rovnou výsledek:

	druhá mocnina prvního členu		dvojnásobek součinu obou členů		druhá mocnina druhého členu	
a) $\boxed{(x+7)^2}$ =	x^2	+	$2\cdot 7\cdot x$	+	7^2	= $\boxed{x^2+14x+49}$
b) $\boxed{(2x+1)^2}$ =	$(2x)^2$	+	$2\cdot 2x\cdot 1$	+	1^2	= $\boxed{4x^2+4x+1}$
c) $\boxed{(3x+4y)^2}$ =	$(3x)^2$	+	$2\cdot 3x\cdot 4y$	+	$(4y)^2$	= $\boxed{9x^2+24xy+16y^2}$
d) $\boxed{(x^3+2x^2)^2}$ =	$(x^3)^2$	+	$2\cdot x^3\cdot 2x^2$	+	$(2x^2)^2$	= $\boxed{x^6+4x^5+4x^4}$

3 Určete druhou mocninu dvojčlenů:

a) $a-b$ b) $-a+b$ c) $-a-b$

Řešení

a) $\boxed{(a-b)^2} = a^2 + 2\cdot a\cdot(-b) + (-b)^2 = \boxed{a^2-2ab+b^2}$

b) $\boxed{(-a+b)^2} = (-a)^2 + 2\cdot(-a)\cdot b + b^2 = \boxed{a^2-2ab+b^2}$

c) $\boxed{(-a-b)^2} = (-a)^2 + 2\cdot(-a)\cdot(-b) + (-b)^2 = \boxed{a^2+2ab+b^2}$

Zapamatujte si:

$$(A-B)^2 = (-A+B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$$
$$(A+B)^2 = (-A-B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

(Znaménko minus je u členu $2AB$ tehdy, jde-li se o druhou mocninu rozdílu.)

4 Určete druhou mocninu dvojčlenů:

a) $y-1$ b) $-4y+5$ c) $-3y^4-y^3$

Řešení

a) $(y-1)^2 = y^2 - 2y + 1$

b) $(-4y+5)^2 = 16y^2 - 40y + 25$

c) $(-3y^4-y^3)^2 = 9y^8 + 6y^7 + y^6$

5 Vyjádřete co nejjednodušším algebraickým výrazem s proměnnou x celkový počet sedadel v kině, které má

a) $(x + 4)$ řad a v každé řadě je $(x - 4)$ sedadel,
b) $(x - 6)$ řad a v každé řadě je $(x + 6)$ sedadel,
c) $(x + y)$ řad a v každé řadě je $(x - y)$ sedadel.

Řešení

Celkový počet sedadel v kině určíme jako součin počtu řad a počtu sedadel v jedné řadě.

a) $(x + 4) \cdot (x - 4) = x^2 - 4x + 4x - 16 = x^2 - 16$
b) $(x - 6) \cdot (x + 6) = x^2 + 6x - 6x - 36 = x^2 - 36$
c) $(x + y) \cdot (x - y) = x^2 - xy + xy - y^2 = x^2 - y^2$

V kině je celkem a) $(x^2 - 16)$ sedadel,
b) $(x^2 - 36)$ sedadel,
c) $(x^2 - y^2)$ sedadel.

Všimněte si!
Vynásobíme-li součet dvou výrazů jejich rozdílem, dostaneme dvojčlen

$$\begin{aligned}
(x + 4) \cdot (x - 4) &= x^2 - 16\\
(x - 6) \cdot (x + 6) &= x^2 - 36\\
(x + y) \cdot (x - y) &= \underbrace{x^2 - y^2}_{\text{rozdíl druhých mocnin obou členů}}
\end{aligned}$$

Součet dvou výrazů násobený jejich rozdílem se rovná rozdílu jejich druhých mocnin:

$$(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - B^2$$

6 Vypočtěte: a) $(2a - 3)(2a + 3)$
b) $(x^2 + 1)(x^2 - 1)$
c) $(-5x + 3y)(5x + 3y)$

Řešení

a) $(2a + 3)(2a - 3) = (2a)^2 - 3^2 = 4a^2 - 9$
b) $(x^2 + 1)(x^2 - 1) = (x^2)^2 - 1^2 = x^4 - 1$
c) $(-5x + 3y)(5x + 3y) = (3y - 5x)(3y + 5x) = 9y^2 - 25x^2$

CVIČENÍ

1. Umocněte:

a) $(u+4)^2$ b) $(u-4)^2$ c) $(-u-4)^2$
d) $(-u+4)^2$ e) $(5a+2)^2$ f) $(3-2b)^2$
g) $(6xy-1)^2$ h) $(-x-9)^2$ i) $(x^2y-2)^2$
j) $(r^3-s^2)^2$ k) $\left(a+\frac{1}{2}\right)^2$ l) $(0{,}5b+2)^2$

2. Doplňte následující výraz na druhou mocninu dvojčlenu:

a) $a^2-2ab+?$ b) $?+12xy+9y^2$
c) $25u^2+?+49$ d) $1-2z+?$
e) $1+?+25a^2b^2$ f) $4a^2-36ab^2+?$

3. Které z následujících trojčlenů jsou druhou mocninou dvojčlenu?

a) a^2+ab+b^2 b) $-a^2+2ab+b^2$
c) $a^2-2ab+b^2$ d) $a^2+2ab-b^2$
e) $16x^2+40xy+25y^2$ f) $1-4x+4x^2$
g) p^4+2p^2+1 h) a^2-9

4. Proveďte:

a) $(p+r)^2+(p-r)^2$
b) $(2a-1)^2-(a-2)^2$
c) $4\cdot(b-1)^2+(b+4)^2$
d) $4\cdot[(b-1)^2+(b+4)^2]$
e) $(a-1)^2+(a+2)(a+3)$
f) $\left(\frac{1}{2}c-\frac{1}{3}d\right)\cdot 6c-\left(\frac{1}{2}c+\frac{1}{3}d\right)\cdot 12d$

5. Oč větší je obsah čtverce o straně $(a+1)$ než obsah čtverce o straně a?

6. Čtěte a řekněte přímo výsledky:

a) $(x+y)(x-y)$
$(b+a)(b-a)$
$(p+5)(p-5)$
$(9-c)(9+c)$

b) $(a+1)(a-1)$
$(1-d)(1+d)$
$(3x-4)(3x+4)$
$(y-2z)(y+2z)$

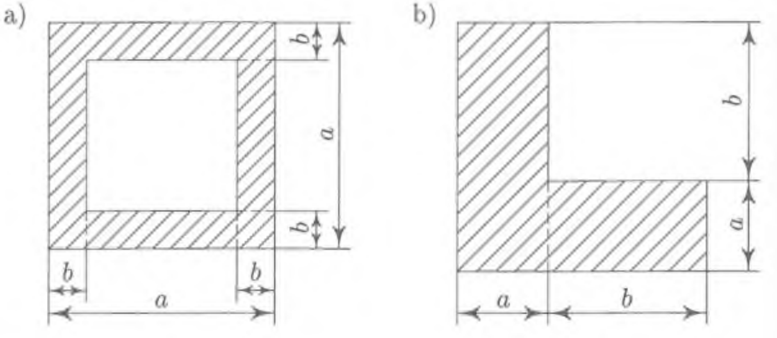
c) $\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$
$(x+0{,}1)(x-0{,}1)$
$(x^2+1)(x^2-1)$
$(2x^3+3)(2x^3-3)$

d) $(0{,}2a+0{,}3)(0{,}2a-0{,}3)$
$(1{,}2x+0{,}8)(1{,}2x-0{,}8)$
$\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{3}\right)\left(\frac{a}{2}-\frac{b}{3}\right)$
$(z^4-0{,}1)(z^4+0{,}1)$

7. Proveďte:

a) $(a+3)(a-3)+(3+a)(3-a)$
b) $4(2a+1)(2a-1)-(a+2)(a-2)$
c) $(x^2+10)[15+(x+5)(x-5)]$
d) $(2x-3)(2x+3)-[(3x+2)(3x-2)-5x^2]$
e) $\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$
f) $(0{,}1+10x)^2+(0{,}1+10x)(0{,}1-10x)$
g) $(a+3)(a-3)(a^2+9)$
h) $9(3-2a)^2-4(3a+5)(3a-5)$

8. Vyjádřete co nejjednodušším výrazem obsah vyšrafované plochy. Vypočtěte pro $a = 10\,\text{cm}$, $b = 1\,\text{cm}$.



9. Určete druhou mocninu dvojčlenu na proužku ①, ②.

2.6 Dělení mnohočlenu jednočlenem

1 Zopakujme si:

a) $14x^5 : 2$
b) $14x^5 : x^3$
c) $14x^5 : 7x^2$
d) $14x^5 : (-2x^4)$
e) $(-14x^5) : (-7x^5)$
f) $-14x^5 : 14$

Řešení

V kapitole o mocninách jste se naučili dělit mocniny se stejným základem:

$$a^m : a^n = a^{m-n}, \quad a \neq 0$$

I ve všech dalších úlohách budeme předpokládat, že dělitel je různý od nuly.

a) $14x^5 : 2 = 7x^5$
b) $14x^5 : x^3 = 14x^2$
c) $14x^5 : 7x^2 = 2x^3$
d) $14x^5 : (-2x^4) = -7x$
e) $(-14x^5) : (-7x^5) = 2$
f) $-14x^5 : 14 = -x^5$

2 Na misce zbyly 3 plné a jedna načatá krabička pralinek. Petr, Honza a Vendulka se mají o cukroví spravedlivě rozdělit. Kolik pralinek připadne na každého z nich, je-li v každé plné krabičce p kusů pralinek a v načaté krabičce zbylo 6 kusů pralinek?

Řešení

počet pralinek v jedné krabičce . . . . . p kusů
počet pralinek ve třech krabičkách . . . $3p$ kusů
celkový počet pralinek na misce . . . . . $3p + 6$ kusů

na jednoho připadne . . . . $(3p + 6) : 3$ kusů pralinek
$(3p + 6) : 3 = ?$

Už podle obrázku soudíme, že na každé ze tří dětí připadne jedna krabička, ve které je p pralinek a ještě 2 kusy pralinek.
Děti se nejprve rozdělí o krabičky s pralinkami:

$$3p : 3 = p$$

Potom o zbylé bonbóny:

$$6 : 3 = 2$$

$$(3p + 6) : 3 = p + 2$$

$6 : 3$

$3p : 3$

Mnohočlen dělíme jednočlenem různým od nuly, dělíme-li jím postupně každý člen mnohočlenu a vzniklé podíly sečteme.

$(3p + 6)$	:	3	=	$p + 2$
↓		↓		↓
dělenec		dělitel		podíl

Výsledek dělení je opět mnohočlen.

3 Vypočtěte (předpokládáme, že ve všech případech je dělitel různý od nuly):

a) $(4x^2 + 8x - 16) : 4$
b) $(6a^2 - 5ab) : a$
c) $(12x^2y + 6xy^2) : 6xy$
d) $(10x^3 - 15x^2 + 5x) : (-5x)$
e) $(4a + 1) : (-1)$

Řešení

a) $(4x^2 + 8x - 16) : 4 = (4x^2 : 4) + (8x : 4) + (-16 : 4) =$
$= x^2 + 2x + (-4) = x^2 + 2x - 4$
b) $(6a^2 - 5ab) : a = (6a^2 : a) + (-5ab : a) = 6a - 5b$
c) $(12x^2y + 6xy^2) : 6xy = 2x + y$
d) $(10x^3 - 15x^2 + 5x) : (-5x) = -2x^2 + 3x - 1$
e) $(4a + 1) : (-1) = -4a - 1$

4 Vypočtěte a proveďte zkoušku násobením:

a) $(2a + 2) : 2$
b) $(8a^3 + 3a) : a$
c) $(4a^3 - 6a^2) : 2a^2$

Řešení

	Výpočet:	Zkouška:
a)	$(2a + 2) : 2 = a + 1,$	$(a + 1) \cdot 2 = 2a + 2$
b)	$(8a^3 + 3a) : a = 8a^2 + 3,$	$(8a^2 + 3) \cdot a = 8a^3 + 3a$
c)	$(4a^3 - 6a^2) : 2a^2 = 2a - 3,$	$(2a - 3) \cdot 2a^2 = 4a^3 - 6a^2$

Napíšeme-li výraz $2a + 2$ ve tvaru $2 \cdot (a + 1)$, říkáme, že jsme číslo 2 **vytkli před závorku**.

Z výrazu $8a^3 + 3a$ můžeme vytknout a:
$8a^3 + 3a = a \cdot (8a^2 + 3)$

Z výrazu $4a^3 - 6a^2$ můžeme vytknout $2a^2$:
$4a^3 - 6a^2 = 2a^2 \cdot (2a - 3)$

5 Vytkněte před závorku:

a) z dvojčlenu $6a^2 + 8b$ číslo 2;
b) z trojčlenu $4a^2b + 7ab^2 - a$ výraz $-a$;
c) z dvojčlenu $25x^2 - 10x$ výraz $5x$;
d) z trojčlenu $8u^3 + 5u^2 - 3$ číslo -1.

Řešení

a) Dvojčlen $6a^2 + 8b$ dělíme jednočlenem 2.
$(6a^2 + 8b) : 2 = 3a^2 + 4b$
Výraz $6a^2 + 8b$ zapíšeme ve tvaru $2 \cdot (3a^2 + 4b)$.
$6a^2 + 8b = 2 \cdot (3a^2 + 4b)$
Zkouška: $2 \cdot (3a^2 + 4b) = 2 \cdot 3a^2 + 2 \cdot 4b = 6a^2 + 8b$

b) Trojčlen $4a^2b + 7ab^2 - a$ dělíme jednočlenem $-a$.
Dělení $4a^2b : (-a)$, $7ab^2 : (-a)$, $(-a) : (-a)$ provádíme zpaměti a rovnou zapisujeme:
$(4a^2b + 7ab^2 - a) = (-a) \cdot (-4ab - 7b^2 + 1)$

c) Dvojčlen $25x^2 - 10x$ dělíme jednočlenem $5x$.
Zapisujeme: $25x^2 - 10x = 5x \cdot (5x - 2)$

d) $8u^3 + 5u^2 - 3 = (-1) \cdot (-8u^3 - 5u^2 + 3)$

Vytkneme-li z daného mnohočlenu číslo -1, bude v závorce mnohočlen opačný k danému mnohočlenu.

CVIČENÍ

1. Čtěte a řekněte přímo podíl:
a) $5a : a$; $5a : 5$; $5a : 5a$
b) $8a^3 : 4a$; $8a^3 : (-2a^2)$; $8a^3 : (-8)$; $8a^3 : (-8a^3)$
c) $12a^2b : 6a$; $-12a^2b : (-6b)$; $12a^2b : a^2$; $-12a^2b : 12ab$

2. Dělte:
a) $(6x + 8y) : 2$
b) $(35x^2 + 14x) : (-7)$
c) $(4cd - 8c^2) : 4c$
d) $(25x^3 - 10x^2) : (-5x^2)$
e) $(-12m^2n - 18mn^2) : (-6mn)$
f) $(-16x^3 + 4x^2) : 4x^2$
g) $(6a^2b + 9ab - 12ab^2) : 3a$
h) $(21z^4 - 14z^3 + 7z^2) : (-7z^2)$
i) $(-a^2 - 2ab - b^2) : (-1)$

3. Proveďte:
a) $(15a - 10) : 5 - (8a + 12) : 4$
b) $(10b - 5) : 5 - 2 \cdot (b + 1)$
c) $(2c - 1) \cdot 2 - (9c - 6) : 3$
d) $d(d - 3) - (6d^3 - 12d^2) : 6d$
e) $(4e^2 - 2e) \cdot \frac{1}{2} + (2e - 4e^2) : 2$

4. Z daných mnohočlenů vytkněte výraz uvedený v závorce:

a) $5a + 5b$, (5) b) $2ax - 2ay$, $(2a)$
c) $x^2 - x$, (x) d) $2z + 8$, (-2)
e) $u^2 + uv$, (u) f) $-12x^5 - 16x^3 - 20x^2$, $(-4x^2)$

5. Z daných mnohočlenů vytkněte před závorku -1:

a) $-a - b$ b) $3a + 2$
c) $4b^2 - 1$ d) $-5c + 7$
e) $d^3 + 2d^2$ f) $4rs - 3r + 2s$
g) $-a^2 + 2ab - b^2$ h) $1 - m^2$

2.7 Rozklad mnohočlenů na součin

1 Zopakujte si:

a) Které číslo nazýváme dělitelem daného čísla?
b) Vyjmenujte několik dělitelů čísla 24.
c) Které číslo nazýváme prvočíslem? Uveďte několik prvočísel.
d) Která z čísel 24, 25, 36, 396, 630 jsou dělitelná dvěma (třemi, čtyřmi, pěti, šesti, devíti, deseti)?
e) Který z jednočlenů $4x^2y$, $7y^3$, $3ab$, $8xy$ je dělitelný výrazem $2x$?
f) Je dán výraz $24a^3b^2$. Z následujících jednočlenů vyberte jeho dělitele: $12a^2$, $24b$, $5x$, $-8a^3$, 24, a^3b, -1.

Řešení

Pokud jste si sami nevzpomněli na správné řešení, prohlédněte si ukázky žákovských odpovědí:

a) Dělitel daného čísla je takové číslo, kterým lze dané číslo dělit beze zbytku.

b) Číslo 24 má např. tyto dělitele: 1, 2, 3, 6, 12, 24.
Má i další dělitele: 4, 8.

c) Prvočíslo je číslo, které má právě dva dělitele, číslo jedna a samo sebe.
Např. 2, 3, 5, 7, 11, 31, 47 atd.

d) Čísla dělitelná
dvěma: 24, 36, 396, 630;
třemi: 24, 36, 396, 630;
čtyřmi: 24, 36, 396;
pěti: 25, 630;
šesti: 24, 36, 396, 630;
devíti: 36, 396, 630;
deseti: 630.

e) Výrazem $2x$ jsou dělitelné jednočleny $4x^2y$, $8xy$.

f) $12a^2$, $24b$, $-8a^3$, 24, a^3b, -1.

V minulé kapitole jsme vytýkali z mnohočlenu dané výrazy.
Vytkneme-li např. z mnohočlenu $4a^3 - 6a^2 + 2a$ výraz $2a$, dostaneme součin:

$$4a^3 - 6a^2 + 2a = \underbrace{2a}_{\text{činitel}} \cdot \underbrace{(2a^2 - 3a + 1)}_{\text{činitel}}$$

Říkáme, že jsme mnohočlen **rozložili na součin**.

2 Rozložte na součin tyto mnohočleny:
a) $5x + 15y$ b) $3x^2 - 5x$ c) $3xy^2 - 6x^2y + 9x^2y^2$

Řešení

a) $5x \quad + \quad 15y$

$\boxed{5} \cdot x \quad \boxed{5} \cdot 3y$

Každý člen mnohočlenu $5x + 15y$ je dělitelný číslem 5. Toto číslo vytkneme před závorku.

$$5x + 15y = 5(x + 3y)$$

b) $3x^2 \quad - \quad 5x$

$\boxed{x} \cdot 3x \quad \boxed{x} \cdot 5$

Každý člen výrazu $3x^2 - 5x$ je dělitelný jednočlenem x. Tento jednočlen vytkneme před závorku.

$$3x^2 - 5x = x(3x - 5)$$

c) $3xy^2 \quad - \quad 6x^2y \quad + \quad 9x^2y^2$

$\boxed{3xy} \cdot y \quad \boxed{3xy} \cdot 2x \quad \boxed{3xy} \cdot 3xy$

Každý člen trojčlenu $3xy^2 - 6x^2y + 9x^2y^2$ je dělitelný výrazem $3xy$. Vytkneme výraz $3xy$:

$$3xy^2 - 6x^2y + 9x^2y^2 = 3xy(y - 2x + 3xy)$$

3 Rozložte na součin výrazy:
a) $3(a - b) + c(a - b)$ b) $2x(x - y) - y(y - x)$

Řešení

a) Výraz $\underbrace{3(a - b)} + \underbrace{c(a - b)}$ je dvojčlen.

Každý jeho člen je dělitelný výrazem $(a-b)$. Tento výraz vytkneme před závorku.

$$\underbrace{3(a-b)+c(a-b)}_{\text{součet}} = \underbrace{(a-b)\cdot(3+c)}_{\text{součin}}$$

Výraz $3(a-b)+c(a-b)$ jsme rozložili na součin vytýkáním dvojčlenu $(a-b)$.

b) $2x\,(x-y) - y\,(y-x)$

Výrazy $x-y$ a $y-x$ jsou navzájem opačné. Proto nejprve z jednoho z nich, např. z výrazu $y-x$, vytkneme před závorku číslo -1:

$2x(x-y) - y(y-x) =$
$= 2x(x-y) \underbrace{- y\cdot(-1)}\cdot(-y+x) =$
$= 2x(x-y) \;\; +y\;\; (x-y) =$ Nyní lze vytknout výraz $x-y$.
$= (x-y)(2x+y)$

4 Rozložte na součin výrazy:

a) $ax+bx+ay+by$ b) a^4-a^3-a+1

Řešení

a) Z prvních dvou členů výrazu $ax+bx+ay+by$ lze vytknout výraz x, z druhých dvou členů výraz y.

$ax+bx+ay+by =$
$= x(a+b)+y(a+b) =$ Nyní lze vytknout před závorku dvojčlen $(a+b)$.
$= (a+b)(x+y)$

Prováděli jsme **postupné vytýkání**.

b) $a^4-a^3-a+1 =$
$= a^3(a-1) - a + 1 =$
opačné výrazy, z jednoho vytkneme číslo -1, např.
$= a^3(a-1) - 1(a-1) =$
$= (a-1)(a^3-1)$

Při rozkladu výrazů na součin nevystačíme pouze s vytýkáním. Budeme rovněž používat vzorce pro druhou mocninu dvojčlenu a pro rozdíl druhých mocnin. Zopakujme si je:

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + 2AB + B^2$$
$$(A-B)^2 = (A-B)(A-B) = A^2 - 2AB + B^2$$
$$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$$

5 Napište jako druhou mocninu dvojčlenu výrazy:

a) $a^2 + 6a + 9$ b) $4x^2 - 4x + 1$

Řešení

a)
$$\begin{array}{ccccccc} a^2 & + & 6a & + & 9 & = & (a+3)^2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ a^2 & & 2\cdot a\cdot 3 & & 3^2 & & \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{ccccccc} 4x^2 & - & 4x & + & 1 & = & (2x-1)^2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ (2x)^2 & & 2\cdot 2x\cdot(-1) & & (-1)^2 & & \end{array}$$

Trojčleny $a^2 + 6a + 9$, $4x^2 - 4x + 1$ jsme zapsali jako druhou mocninu dvojčlenu, tj. jako součin:

$$a^2 + 6a + 9 = (a+3)^2 = (a+3)(a+3)$$
$$4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)^2 = (2x-1)(2x-1)$$

Mnohočleny jsme rozložili na součin pomocí vzorce $A^2 + 2AB + B^2 = (A+B)^2$ nebo $A^2 - 2AB + B^2 = (A-B)^2$. Podle znaménka členu $2AB$ posoudíme, zda se jedná o druhou mocninu součtu nebo rozdílu.

6 Rozložte na součin trojčleny:

a) $9a^2 + 24ab + 16b^2$ b) $9a^2 - 24ab + 16b^2$

c) $-9a^2 + 24ab - 16b^2$ d) $9a^2 + 12ab + 16b^2$

e) $18a^2 + 48ab + 32b^2$

Řešení

a) Nejprve ověříme, zda jsou dva z členů trojčlenu druhými mocninami nějakého výrazu:

$$\begin{array}{ccc} 9a^2 & + 24ab + & 16b^2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ (3a)^2 & & (4b)^2 \end{array}$$

$-\sqrt{16}$ 2π 6 $0{,}3$ $\frac{1}{3}$ $\frac{8}{3}$ $\sqrt{81}$ $-\frac{8}{13}$ $|-8|$ -8 $2{,}\overline{8}$ $-2{,}8$ $2{,}88$ $-2{,}8^2$ $2\cdot 8^2$ $1{,}41$ $-\pi$ $|-5|$ 30^2 $-\sqrt{10}$

V takovém případě by mohlo jít o druhou mocninu dvojčlenu, v našem případě o druhou mocninu součtu $(3a+4b)^2$.

Zkontrolujeme, zda je zbývající člen trojčlenu dvojnásobkem součinu výrazů $3a$, $4b$:

$$2 \cdot 3a \cdot 4b = 24ab$$

Platí: $9a^2 + 24ab + 16b^2 = (3a+4b)^2$.

b) V trojčlenu $9a^2 - 24ab + 16b^2$ jsou rovněž dva členy druhými mocninami:

$$9a^2 = (3a)^2$$
$$16b^2 = (4b)^2$$

Znaménko minus u členu $-24ab$ napovídá, že jde o druhou mocninu rozdílu. Pro zbývající člen trojčlenu platí:

$$-24ab = 2 \cdot (-3a) \cdot 4b \quad \text{ale také} \quad 2 \cdot 3a \cdot (-4b)$$

Trojčlen $9a^2 - 24ab + b^2$ můžeme rozložit jako $(-3a+4b)^2$ i jako $(3a-4b)^2$.

c) Trojčlen $-9a^2 + 24ab - 16b^2$ nejprve upravíme:

$$\begin{aligned} -9a^2 + 24ab - 16b^2 &= -1 \cdot (9a^2 - 24ab + 16b^2) = \\ &= -1 \cdot (3a-4b)^2 = \\ &= -(3a-4b)^2, \quad \text{ale také} \quad -(-3a+4b)^2 \end{aligned}$$

d) Také v trojčlenu $9a^2 + 12ab + 16b^2$ jsou dva členy druhými mocninami: $9a^2 = (3a)^2$, $16b^2 = (4b)^2$.
Zbývající člen však není roven dvojnásobku součinu $3a$ a $4b$:

$$12ab \neq 2 \cdot 3a \cdot 4b$$

Trojčlen $9a^2 + 12ab + 16b^2$ není druhou mocninou dvojčlenu.

e) Z trojčlenu $18a^2 + 48ab + 32b^2$ nejprve vytkneme číslo 2:

$$18a^2 + 48ab + 32b^2 = 2(9a^2 + 24ab + 16b^2) = 2(3a+4b)^2$$

7 Rozložte na součin dvojčleny:

a) $4a^2 - 9$ b) $12a^2 - 27$

Řešení

a) Výraz rozložíme podle vzorce $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$.
Oba členy výrazu $4a^2 - 9$ jsou druhými mocninami:
$4a^2 = (2a)^2$, $9 = 3^2$
$4a^2 - 9 = (2a+3)(2a-3)$

b) Z výrazu $12a^2 - 27$ nejprve vytkneme číslo 3:
$12a^2 - 27 = 3(4a^2 - 9) = 3(2a + 3)(2a - 3)$

Máme-li daný mnohočlen rozložit na součin, pak
1. vytkneme před závorku číselný nebo algebraický výraz,
2. mnohočlen rozložíme pomocí vzorce pro druhou mocninu dvojčlenu nebo vzorce pro rozdíl druhých mocnin.

Na závěr zkuste vypočítat obtížnější příklady:

8 Rozložte na součin mnohočleny:
a) $a^3 + 3a^2 - a - 3$ b) $a^2 + 4a + 4 - b^2$

Řešení

a) Nejprve zvolíme postupné vytýkání:

$$a^3 + 3a^2 - a - 3 = a^2(a + 3) - 1(a + 3) =$$
$$= (a + 3)\underbrace{(a^2 - 1)}_{\substack{\text{rozložíme pomocí vzorce} \\ A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)}} =$$
$$= (a + 3)(a + 1)(a - 1)$$

b) První tři členy daného výrazu upravíme podle vzorce $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$. Dostaneme rozdíl mocnin. Ten rozložíme podle vzorce $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$.

$$a^2 + 4a + 4 - b^2 = \underbrace{(a + 2)^2 - b^2}_{\substack{\text{rozdíl} \\ \text{druhých mocnin}}} = (a + 2 + b)(a + 2 - b)$$

CVIČENÍ

1. Rozložte daná čísla různými způsoby na součin dvou činitelů: 18, 25, 31, 38, 100.

2. Rozložte na prvočinitele:
a) 24, 36, 60 b) 32, 70, 126

3. Dané jednočleny rozložte na součin dvou činitelů tak, aby jedním činitelem byl výraz napsaný v závorce:
a) $4cd$, $(2c)$ b) n^5, (n^3)
c) $15r^2s$, $(3rs)$ d) $15r^2s$, $(5s)$
e) $15r^2s$, $(5r^2)$ f) $15r^2s$, $(-3r^2)$
g) $2a^2b$, (-1) h) $-9a^3$, $(3a)$

4. Rozložte na součin vytýkáním:

a) $6x + 6y$ b) $5a - 10b$ c) $3u - 3$
d) $2c + 2cd$ e) $5ax - 5ay$ f) $k^3 - k^2$
g) $2m^3 + 6m^2$ h) $m^2n - mn^2$ i) $24u^4v^3 + 36uv^4$
j) $3a + 3b - 3c$ k) $5x^3 + 10x^2 - 15x$ l) $7ab - 14a^2b - 21ab^2$

5. Z daných mnohočlenů vyberte druhé mocniny dvojčlenu:

a) $m^2 + 2mn + n^2$ b) $x^2 - 6x + 9$
c) $a^2 + 5a + 25$ d) $y^2 - 2y + 1$
e) $x^2 - 1$ f) $4a^2 + 4a + 1$
g) $9x^2 - 24x - 16$ h) $c^2 + 14c + 7$

6. Rozložte na součin:

a) $16s^2 + 8s + 1$ b) $4a^2 + b^2 - 4ab$
c) $2xy + x^2 + y^2$ d) $-16 - 8x - x^2$
e) $c^2 - 20c + 100$ f) $3a^2 + 6a + 3$
g) $m^2 - 2m + 1$ h) $2m^2n + 20mn + 50n$

7. Čtěte a zpaměti rozkládejte na součin:

a) $a^2 - 9$ b) $16 - b^2$ c) $c^2 - 1$
d) $1 - d^2$ e) $4e^2 - 25$ f) $m^2 - n^2$
g) $m^2 - \frac{1}{4}$ h) $0{,}64 - x^2$ i) $a^2b^2 - 1$
j) $144 - x^2$ k) $1 - a^2$ l) $x^2 - y^2$

8. Rozložte na součin:

a) $16a^2 - 25$ b) $4x^2 - 9y^2$ c) $9x^4 - 1$
d) $p^2q^2 - 4$ e) $50c^2 - 2$ f) $9mn^2 - 4m$
g) $z^5 - z^3$ h) $2a^2 - 162$ i) $-100x + x^5$
j) $-5y^2 + 45$ k) $0{,}64 - 0{,}81x^2$ l) $\frac{4}{9}x^2 - \frac{9}{25}y^2$

9. Rozložte na součin (použijte vzorec $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$):

a) $(a + 3)^2 - b^2$ b) $25^2 - (b + 1)^2$
c) $(x + y)^2 - 1$ d) $(x + 2)^2 - (x - 1)^2$
e) $(u - 2)^2 - 1$ f) $(3x - y)^2 - y^2$

10. Rozložte na součin podle vzoru: $a^2 + 2ab + b^2 - c^2 =$
$= (a^2 + 2ab + b^2) - c^2 = (a + b)^2 - c^2 = (a + b + c)(a + b - c)$.

a) $x^2 - 2xy + y^2 - 1$ b) $a^2 + 4a + 4 - b^2$
c) $b^2 - 6b + 9 - 9c^2$ d) $3m^2 + 6mn + 3n^2 - 12$

3 ROVNICE

3.1 Opakování

Připomeňme si, co jste se již o rovnicích naučili.

1. Vyberte z následujících zápisů rovnice:

a) $7 + 19 = 2 \cdot 13$

b) $a^2 = a \cdot a$

c) $2x + 10 = 3x - 3$

d) $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

e) $2(t - 3) + 7 = 2t + 1$

f) $6 \cdot 6 - 16 = 4 \cdot 5$

g) $4{,}9 - s = 3$

h) $\dfrac{3m + 7}{2} = 8$

2. Dosazováním do rovnice zjistěte, která z čísel uvedených v závorce jsou kořeny této rovnice:

a) $10y + 12 = -8 + 6y \qquad (2,\ 5,\ -5,\ 8)$

b) $(b + 1)(1 - b) = \dfrac{1}{4} + b \qquad \left(\dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{2}\right)$

3. Vysvětlete, proč mají rovnice $2x - 16 = 26$ a $2x - 11 = 31$ stejné kořeny.

4. Co můžete říci o kořenech následujících rovnic, aniž byste je řešili? Svá tvrzení zdůvodněte.

$x + 5 = 9, \qquad \dfrac{y}{3} + \dfrac{5}{3} = 3, \qquad 2a + 10 = 18$

5. Napište tři různé lineární rovnice, které mají stejné řešení jako rovnice $p + 1 = \dfrac{p}{2} - 3$.

6. Řešte rovnice:

A. a) $15a + 12 = 6a - 15$

b) $\dfrac{x}{5} - 3 = \dfrac{2x}{5}$

c) $4 - 0{,}3y = 1{,}3y + 3 - 0{,}6y$

B. a) $4y + 7 = 4 + 11y$

b) $2m - \dfrac{3m}{5} = \dfrac{3m}{5}$

c) $0{,}9a - 0{,}7 = 0{,}1a + 0{,}7 - 0{,}6a$

7. Pro která čísla k je hodnota výrazu

a) $3k + 12$ rovna nule,

b) $5k - 9$ rovna hodnotě výrazu $7k - 13$,

c) $\frac{1}{3} + k$ rovna $\frac{7}{9}$?

8. Součet tří po sobě jdoucích přirozených čísel je 75. Která čísla to jsou?

9. Hmotnost kovového odlitku je 14 kg. Součástka z něj vyrobená je třikrát těžší než odpad při jeho zpracování. Jaká je hmotnost součástky?

10. Lucie si uspořila o 20 % více než její sestra Zuzka. Obě dohromady uspořily 2 134 Kč. Kolik Kč uspořila Lucie?

11. Jedna strana obdélníku je čtyřikrát kratší než druhá. Vypočtěte rozměry tohoto obdélníku, je-li jeho obvod 45 cm.

12. Řešte rovnice a proveďte zkoušky:

A. a) $\frac{y}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5y}{4} - \frac{y}{3} - 3$

b) $3a - 2(a - 1) = 1{,}5a + 0{,}5(4 - a)$

c) $\frac{1}{2}(2x + 6) = 8$

d) $7 + \frac{2}{3} - k = -\left(3 + \frac{5}{6}\right)$

B. a) $\frac{5z}{8} - \frac{z}{2} = \frac{3z}{8} + 2$

b) $c - 0{,}2(2c - 3) = 0{,}5(5c + 2) - 8$

c) $9 = \frac{1}{3}(3x + 9)$

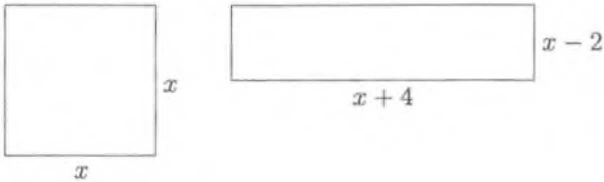
d) $2 + \frac{5}{6} + m = 6 + \frac{13}{18}$

3.2 Řešení složitějších lineárních rovnic

1 Vypočtěte délku strany čtverce, jehož obsah je roven obsahu obdélníku, který má jednu stranu o 4 cm delší a druhou o 2 cm kratší než je strana tohoto čtverce.

Řešení

Nejprve načrtneme obrázek vystihující zadání úlohy. Neznámou délku strany čtverce označíme x a vyjádříme obsahy obou čtyřúhelníků:



$$S_{\mathrm{C}} = x^2 \qquad\qquad S_{\mathrm{O}} = (x+4)(x-2)$$

Sestavíme rovnici: $x^2 = (x+4)(x-2)$

Rovnici řešíme:

$$\begin{aligned} x^2 &= x^2 + 4x - 2x - 8 && / - x^2 \\ 0 &= 2x - 8 && / + 8 \\ 8 &= 2x && / : 2 \\ \underline{x} &\underline{= 4} \\ x &= 4\,\mathrm{cm} \end{aligned}$$

Zkoušku u slovní úlohy provádíme ověřením, zda získané výsledky vyhovují podmínkám textu. (Kořen rovnice nemusí být řešením slovní úlohy. Rovnice možná nemusí být dobře sestavena nebo její řešení nemá v reálné situaci smysl.)

Zkouška:
$S_{\mathrm{C}} = (4\,\mathrm{cm})^2 = 16\,\mathrm{cm}^2 \qquad S_{\mathrm{O}} = 8\,\mathrm{cm} \cdot 2\,\mathrm{cm} = 16\,\mathrm{cm}^2$

Strana čtverce má délku 4 cm.

2 Řešte rovnici a proveďte zkoušku: $(a-1)^2 = a(a+2)$

Řešení

Upravíme obě strany rovnice a řešíme ji známým způsobem

$$\begin{aligned} a^2 - 2a + 1 &= a^2 + 2a && / - a^2 \\ -2a + 1 &= 2a && / + 2a \\ 1 &= 4a && / : 4 \\ \underline{a} &\underline{= \tfrac{1}{4}} \end{aligned}$$

Zkouška:

$$L = \left(\frac{1}{4} - 1\right)^2 = \left(-\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

$$P = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4} + 2\right) = \frac{1}{16} + \frac{2}{4} = \frac{9}{16} \qquad L = P$$

3 Řešte rovnici a proveďte zkoušku: $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{x+4}{4}$

Řešení

Nejprve odstraníme zlomky,

obě strany rovnice vynásobíme $n(3,4) = 12$.

Pak počítáme obvyklým způsobem.

$$\begin{aligned} \frac{x-2}{3} &= \frac{x+4}{4} \qquad / \cdot 1 \\ 4(x-2) &= 3(x+4) \\ 4x - 8 &= 3x + 12 \\ 4x - 3x &= 12 + 8 \\ \underline{x} &\underline{= 20} \end{aligned}$$

Zkouška:

$$L = \frac{20-2}{3} = \frac{18}{3} = 6$$

$$P = \frac{20+4}{4} = \frac{24}{4} = 6 \qquad L = P$$

CVIČENÍ

1. Řešte rovnice a proveďte zkoušky:

a) $(x-3)(x+2) = (x+2)(x-4) + 7$

b) $y(3y+2) = 3(y-1)^2$

c) $(r-5)^2 - 5 = (r-3)^2 - 3$

d) $\dfrac{(a-3)}{2} + a = \dfrac{3a}{2}$

2. Řešte rovnice a ověřte správnost řešení:

A. a) $(y-4)(y-3) = (y+5)(y-5)$

b) $(x-3)^2 - (x-7) = (x-7)^2 - (x-3)$

c) $(3x-1)(4x+6) = (2x-3)(6x-5)$

B. a) $(p+3)(p-3) = (p-9)^2$

b) $(y+3)(y-3) - (y-1)^2 = y^2 - 1 - (y-3)^2$

c) $(4a-3)(a+2) = (2a-1)^2 + a - 31$

3. Doplňte tabulku:

	Rovnice	Kořen rovnice	L	P
a)	$\frac{3}{4}(x-1)-\frac{2}{3}(2x-1)=2-\frac{5}{6}(x+1)$	$x=$		
b)	$\frac{5-m}{3}+11=4(2m-1)$	$m=$		
c)	$\frac{y+4}{5}=\frac{y-2}{3}$	$y=$		
d)	$\frac{16a+1}{7}=\frac{5a-4}{2}$	$a=$		
e)	$\frac{k-6}{5}-\frac{k-4}{7}=0$	$k=$		

4. Řešte rovnice:

a) $(a+1)^2=a^2+10$
b) $(y-2)(y-1)=(y+1)(y+2)$
c) $9(m+6)+9(m-5)=0$
d) $(u-1)^2-(u+1)^2=28$
e) $\frac{d-2}{3}-\frac{d+4}{5}=-1$
f) $\frac{2r-7}{2}-\frac{3r+1}{5}+r=5-\frac{r+6}{2}$

5. Obsah kosočtverce je $112\,\mathrm{cm}^2$ a délka jeho strany je dána výrazem $(x+5)$ cm. Vypočtěte tuto délku, je-li výška kosočtverce $v=7$ cm.

6. Obdélník má rozměry $(x+5)$ cm a $(x-3)$ cm a obsah $(x^2-1)\,\mathrm{cm}^2$. Určete jeho rozměry v centimetrech.

7. Součin dvou po sobě následujících přirozených čísel a, b je roven druhé mocnině menšího čísla zvětšené o 8. Vypočtěte je.

8. Z papíru tvaru čtverce byl vystřižen obdélník, který má jednu stranu o 2 cm a druhou o 3 cm kratší než je strana čtverce. Obsah tohoto obdélníku je o $94\,\mathrm{cm}^2$ menší než obsah původního čtverce. Vypočtěte stranu čtverce.

9. Řešte dané rovnice:

a) $(a-6)^2 - (a+5)^2 + 2(a+7)^2 = 2a^2 - 2(3a - 72{,}5)$

b) $1 - \dfrac{(b-1)^2}{6} = 1 - \dfrac{b^2}{6}$

c) $(5c+2)^2 - (4c-1)^2 = (3c+1)^2$

d) $(x+1)^2 - 1 = x(x+2) + 3$

3.3 Rovnice s neznámou ve jmenovateli

Při řešení rovnic s neznámou ve jmenovateli postupujeme podle stejných pravidel, jaká jsme užívali při řešení rovnic dosud. Musíme však ještě stanovit podmínky, za nichž mají výrazy na obou stranách takové rovnice smysl. To znamená, že je nutné vyloučit takové hodnoty proměnné, pro něž je jmenovatel některého ze zlomků v dané rovnici roven nule.

1 Řešte rovnice s neznámou ve jmenovateli:

a) $\dfrac{24}{x} = -8$ b) $\dfrac{3}{y} = 2 - \dfrac{1}{y}$ c) $\dfrac{1}{r} + \dfrac{2}{3} = 5$

Vendulka, Petr a Honza řešili úlohu takto:

$\frac{24}{x} = -8 \;/\cdot x$ Podmínka: $x \neq 0$

$24 = -8x \;/:(-8)$

$-\frac{24}{8} = x$

$\underline{\underline{x = -3}}$ ... vyhovuje podmínce

Zkouška:

$L = \frac{24}{-3} = -8$

$P = -8$

$\frac{3}{y} = 2 - \frac{1}{y} \;/\cdot y$ $y \neq 0$!

$3 = 2y - 1$

$4 = 2y$

$\underline{y = 2}$ $2 \neq 0$

$L = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$

$P = 2 - \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$

Řešením je $y = 2$.

$\frac{1}{x} + \frac{2}{3} = 5$ Podmínka: $x \neq 0$

Rovnici násobím $n(x, 3) = 3x$

$3\cancel{x}\cdot\frac{1}{\cancel{x}} + \cancel{3}x\cdot\frac{2}{\cancel{3}} = 3x\cdot 5$ Krátím.

$3 + 2x = 15x \;/-2x$

$3 = 13x \;/:13$

$x = \frac{3}{13}$

$\frac{3}{13} \neq 0$ ... vyhovuje podmínce

$L = 5$, $P = 5$

Tedy: $\underline{\underline{x = \frac{3}{13}}}$

2 Řešte rovnici $\frac{2}{r} = \frac{6}{r-4}$.

Je-li v rovnici více zlomků s neznámou ve jmenovateli, bývá i podmínek řešitelnosti rovnice několik.

Lenka zapsala řešení takto:

$\frac{2}{r} = \frac{6}{r-4}$ Podmínky: $\left.\begin{matrix} r \neq 0 \\ r \neq 4 \end{matrix}\right\}$

$n(r, r-4) = r(r-4)$

$\frac{2}{\cancel{r}} \cdot \cancel{r}(r-4) = \frac{6}{\cancel{r-4}} \cdot r\cancel{(r-4)}$

$2(r-4) = 6r$

$2r - 8 = 6r$

$-8 = 4r$

$\underline{r = -2}$

$L = \frac{2}{-2} = \underline{-1}$ $P = \frac{6}{-6} = \underline{-1}$

Číslo -2 vyhovuje podmínkám.

Řešení: $\underline{\underline{r = -2}}$

CVIČENÍ

1. Zapište podmínky řešitelnosti, řešte rovnice a proveďte zkoušky:

a) $\frac{27}{k} = -3$ b) $\frac{2}{c} = -\frac{1}{c} - 3$

c) $\frac{2}{q} - \frac{6}{q} = -4$ d) $\frac{14}{2x} - \frac{7}{x} = 0$

e) $\frac{y+1}{y} + \frac{1}{y^2} = 1$ f) $\frac{4}{a} + \frac{4}{3} = \frac{2}{a} + 2$

2. Řešte rovnice:

A. a) $\frac{3}{x} + \frac{1}{x} + \frac{2}{x} = 1$ b) $\frac{1}{a} + 2 + \frac{1}{4} = 4 - \frac{3}{4a}$

c) $\frac{1}{3u} - \frac{4}{2u} = 5$ d) $\frac{20}{5x} - \frac{80}{10x} = -1$

B. a) $\frac{16}{4y} + \frac{20}{2y} = 2$ b) $\frac{1}{b} - \frac{2}{3b} = \frac{1}{2}$

c) $\frac{4}{n} - 7 = \frac{5}{3n}$ d) $\frac{2}{a} - \frac{4}{a} = 1{,}5$

3. Sestavte rovnice a vyřešte je.

a) Dělíte-li neznámé číslo devíti, dostanete podíl 13,5. Které číslo jste dělili? (Vypočtěte dělence.)

b) Dělíte-li číslo devět neznámým číslem, dostanete podíl 6. Kterým číslem jste dělili?

c) Neznámé číslo x dělte čtyřmi a k podílu přičtěte číslo 16. Tak dostanete polovinu čísla x.

d) Číslo 4 dělte neznámým číslem y a k podílu přičtěte 16. Tak dostanete podíl čísla 2 a neznámého čísla y.

4. Řešte rovnice s neznámou ve jmenovateli:

a) $\dfrac{3}{m} + \dfrac{4}{m} - 12 = \dfrac{5}{m}$ b) $-\dfrac{5}{8} - \dfrac{1}{a} = -\dfrac{6}{a}$

c) $\dfrac{1}{4y} + \dfrac{1}{6y} - \dfrac{3}{8y} = 2$ d) $\dfrac{x+3}{x} - 1 = \dfrac{3}{x}$

5. Určete podmínky, řešte rovnice a proveďte zkoušky:

a) $\dfrac{3}{x+2} = 1$ b) $\dfrac{2a+1}{a-1} - 3 = 0$

c) $6 = \dfrac{45}{m+1}$ d) $\dfrac{15}{y-3} = 3$

e) $x + \dfrac{x+1}{x-2} = \dfrac{(x-1)^2}{x-2}$ f) $\dfrac{5+2k}{k-4} = 2 + \dfrac{13}{k-4}$

g) $\dfrac{3-r}{r-2} - 3 = \dfrac{1}{r-2}$

3.4 Výpočet neznámé ze vzorce

Nejen v matematice, ale i ve fyzice, chemii a v technické praxi užíváme vzorce, které vyjadřují vztah mezi různými veličinami. Chceme-li vyjádřit některou veličinu ze vzorce, volíme stejný postup jako při řešení rovnice.

1 Lenka s Honzou počítali poloměr r kružnice k, která má délku $o = 31{,}4\,\mathrm{dm}$. Popište postupy, které při řešení zvolili. Který postup se vám zdá výhodnější?

Lenka postupovala takto:

$k(S, r)$: $o = 2\pi r = 31{,}4\,\mathrm{dm}$

$31{,}4 \doteq 2 \cdot 3{,}14 \cdot r$

$31{,}4 \doteq 6{,}28\,r$

$r \doteq \dfrac{31{,}4}{6{,}28}$

$r \doteq 5\,\mathrm{dm}$

Poloměr kružnice k je asi 5 dm.

Honzův postup:

Kružnice $k(S, r)$ ... $o = 31{,}4\,\mathrm{dm}$

$o = 2\pi r \quad / : 2\pi \qquad (\mathrm{dm})$

$r = \dfrac{o}{2\pi}$

$r \doteq \dfrac{31{,}4}{2 \cdot 3{,}14}$

$r \doteq 5\,\mathrm{dm}$

Poloměr kružnice k měří přibližně 5 dm.

2 Ze vzorce pro výpočet obvodu obdélníku vyjádřete jednu stranu obdélníku.

Řešení

Zapíšeme vzorec pro výpočet obvodu obdélníku. Za neznámou budeme považovat např. stranu a. (Při řešení můžeme postupovat dvěma způsoby.)

$$o = 2(a + b)$$

$$o = 2a + 2b \quad / - 2b$$
$$o - 2b = 2a \quad / : 2$$
$$\underline{a = \frac{o - 2b}{2}}$$

$$\frac{o}{2} = a + b \quad / - b$$
$$\underline{\frac{o}{2} - b = a}$$

Vyjadřujeme-li nějakou veličinu ze vzorce, musíme si vždy ujasnit, o jaké veličiny jde a jakých mohou v praxi nabývat hodnot. To je důležité zejména tehdy, je-li ve vzorci zlomek, v jehož jmenovateli se některá z veličin vyskytuje.

CVIČENÍ

1. Určete význam daného vzorce a vyjádřete z něj postupně všechny veličiny:

   a) $S = a^2$ b) $o = 2r + z$ c) $c^2 = a^2 + b^2$

   d) $\varrho = \dfrac{m}{V}$ e) $S = a \cdot v_a$ f) $S = \pi \cdot r^2$

   g) $S = \dfrac{a \cdot v_a}{2}$ h) $S = \dfrac{(a + c) \cdot v}{2}$

2. Základna AB rovnoramenného trojúhelníku ABC má délku 18 cm a jeho obsah je $S = 0{,}54\,\mathrm{dm}^2$. Vypočtěte výšku v_c.

3. Výška v pravidelného čtyřbokého hranolu H je 8 cm, jeho objem $V = 392\,\mathrm{cm}^3$. Vypočtěte obvod podstavy hranolu H.

4. Za kolik minut projede auto jedoucí průměrnou rychlostí 75 km/hod úsek cesty o délce 45 km?

5. Zjistěte výšku kosočtverce, jehož obvod $o = 34\,\mathrm{m}$ a obsah $S = 51\,\mathrm{m}^2$.

6. Obsah lichoběžníku L je $110{,}5\,\mathrm{cm}^2$, jedna jeho základna má délku $1{,}6\,\mathrm{dm}$ a výška v je $8{,}5\,\mathrm{cm}$. Vypočtěte délku druhé základny lichoběžníku L.

7. Určete hmotnost betonového sloupku tvaru kvádru s rozměry $2{,}5\,\mathrm{m}$, $2\,\mathrm{dm}$, $15\,\mathrm{cm}$. Hustota betonu $\varrho = 2{,}1\,\mathrm{g/cm}^3$.

3.5 Slovní úlohy

Pro řešení složitějších slovních úloh nelze udat jednotný návod, který by byl použitelný ve všech případech. Můžeme však vyslovit několik obecných rad, jimiž bychom se měli řídit.
Slovní úlohy jste již řešili úsudkem i pomocí vhodného znázornění obrázkem, tj. graficky. Chceme-li slovní úlohu vyřešit pomocí rovnice, postupujeme takto:

1. Nejprve si pozorně přečteme text úlohy, abychom dobře porozuměli situaci, která je v ní popsána. Zjistíme, co budeme počítat a jaké jsou pro výpočet dány podmínky.
2. Určíme, která veličina bude ve výpočtu *neznámou*, označíme ji a rozhodneme, s jakými jednotkami budeme pracovat.
3. Pomocí neznámé vyjádříme podmínky úlohy.
4. Sestavíme rovnici a vyřešíme ji.
5. Provedeme zkoušku dosazením řešení rovnice do podmínek daných textem úlohy.
6. Zapíšeme slovní odpověď.

Zápisy podmínek pomocí neznámé mají být stručné a přehledné. Hodně záleží i na úpravě, protože z nepořádného zápisu pramení mnoho chyb, jichž se řešitelé dopouštějí. I při řešení slovních úloh pomocí rovnice nám prospěje vhodný obrázek.

1 Děti z turistického oddílu putovaly tři dny krajem a ušly celkem 53 km. V sobotu zdolaly dvakrát více kilometrů než v pátek. V neděli je zmohla únava a tak ušly o tři kilometry méně než v pátek. Kolik km ušly děti v neděli?

Řešení

Honza si připravil tabulku, která zpřehlednila podmínky úlohy i zkoušku.

Dny	Kilometry	Zkouška
Pá	x	14 km
So	$2x$	$2 \cdot 14$ ... 28 km
Ne	$x-3$	$14-3$ ... 11 km
Celkem	53	53 km

Výpočet:

$$x + 2x + x - 3 = 53$$
$$4x - 3 = 53$$
$$4x = 56$$
$$\underline{x = 14}$$

$\underline{14 - 3 = 11}$

V neděli děti ušly 11 km.

2 Z lyžařského výcviku posílali žáci dopisy a pohledy. Koupili 70 známek za 292 Kč. Známka na dopis je za 4,60 Kč, známka na pohlednici za 4 Kč. Kolik koupili známek na dopisy a kolik na pohlednice?

Řešení

Můžeme použít Honzův postup, protože je velmi přehledný.

Známky	Počet	Cena (Kč)	Zkouška
Na dopis Na pohled	x $70 - x$	$4{,}6x$ $4(70 - x)$	20 ks $20 \cdot 4{,}6 = 92$ (Kč) 50 ks $50 \cdot 4 = 200$ (Kč)
Celkem	70	292	70 ks 292 (Kč)

$$4{,}6x + 4(70 - x) = 292$$
$$4{,}6x + 280 - 4x = 292$$
$$0{,}6x = 292 - 280$$
$$0{,}6x = 12$$
$$\underline{x = 20}$$

Žáci si koupili 20 známek na dopisy a 50 známek na pohledy.

Levá strana tabulky nám „pomohla“ sestavit rovnici, pravou jsme doplnili po výpočtu neznámé. Zjistili jsme, že $x = 20$ vyhovuje podmínkám úlohy.

Sestavování podobných tabulek není nutné, ale pokud je používáme, vyvarujeme se mnohých chyb. Až budete v řešení slovních úloh zběhlejší, obejdete se bez nich. Ušetříte tím však jen několik čar, nikoli výpočty.

3 Na dvoře pobíhali psi, slepice a dvě kočky, celkem 14 zvířat. Všechna zvířata ze dvora měla dohromady 36 noh. Kolik bylo na dvoře psů a kolik slepic?

Vendulka počítala takto:

Slepice	x	2 nohy
psi a kočky	$14 - x$	4 nohy

$$\begin{aligned} 2x + 4(14 - x) &= 36 \\ 2x + 56 - 4x &= 36 \\ -2x &= -20 \\ x &= 10 \end{aligned}$$

Zkouška:

10 slepic	20 noh
2 kočky	8 noh
2 psi	8 noh
14 zvířat	36 noh

Na dvoře bylo deset slepic, dva psi a dvě kočky.

Lenka se rozhodla pro řešení pomocí obrázku. Vyznáte se v jejím zápise?

Nohy - 36:

Jen slepice - 14 8 noh přebývá

Když nahradím jednu slepici kočkou nebo psem, bude na dvoře o dvě nohy více.
8 noh ... musím vyměnit 4 zvířata, nechat 10 slepic.
Jsou tam 2 kočky, budou ještě 2 psi.

Na dvoře jsou 2 kočky, 2 psi a 10 slepic.

CVIČENÍ

1. Zjistěte, kolik dětí se zúčastnilo Dne sportu, jestliže polovina z nich soutěžila v atletických disciplínách, pětina dětí závodila na horských kolech a 15 dětí závodilo v plavání. Každý účastník si mohl vybrat jen jednu sportovní disciplínu.
2. Na škole v přírodě bylo 71 žáků ubytováno ve dvaceti pokojích, které byly třílůžkové a čtyřlůžkové. Kolik dětí bydlelo ve čtyřlůžkových pokojích, jestliže byly všechny pokoje plně obsazeny?

3. Dřevěná lávka přes říčku stojí na kůlech. Každý z kůlů je z jedné třetiny délky zapuštěn do dna říčky, o 20 cm kratší část kůlu je ve vodě a nad hladinu vyčnívá ještě 120 cm dlouhý díl kůlu. Jak dlouhé kůly lávku podpírají?

4. Marek jel z domova na nádraží, odkud cestoval vlakem k babičce. Jeho jízda tramvají byla dvakrát delší než cesta z domova na tramvajovou zastávku. Měl štěstí, protože na svou tramvaj čekat nemusel. Zato na metro čekal o pět minut déle než trvala cesta na tramvaj. Jel jím pouze pět minut. Celá cesta na nádraží trvala 26 minut. Jak dlouho čekal Marek na metro?

5. V soutěži o nejlepší filmový plakát byly uděleny tři ceny v celkové hodnotě 17 100 Kč. Druhá cena činila dvě třetiny první ceny a třetí cena dvě třetiny druhé ceny. Jakou odměnu dostal soutěžící, který se umístil na třetím místě?

6. Žáci řešili slovní úlohy. Za každou správně vyřešenou úlohu dostali 3 body. Za úlohu neřešenou nebo vyřešenou chybně jim byly čtyři body strženy. Tomáš řešil celkem 15 úloh a získal 24 bodů. Kolik úloh vyřešil správně? Kolikaprocentní měl úspěšnost?

7. Dvě třetiny dětí z vodáckého tábora šly na výlet a sedmina dětí se koupala. Ostatní děti, celkem 32 chlapců a dívek, měly službu v táboře. Kolik dětí bylo na tomto táboře celkem?

8. Obvod trojúhelníku ABC je 14,1 cm. Strana b je o 3,5 cm delší než strana a. Strana c je 1,2krát delší než strana b. Vypočtěte délky jednotlivých stran trojúhelníku ABC.

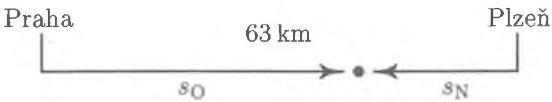
3.5.1 Úlohy o pohybu

Říká se, že „čas jsou peníze". Lidé podle toho často jednají. Neustále někam spěchají, cestují z místa na místo a vyhledávají ty nejrychlejší dopravní prostředky. Cestováním, pohybem dopravních prostředků, se zabývají slovní úlohy, kterým říkáme *úlohy o pohybu.*

Vyskytují se v nich tři fyzikální veličiny: dráha s, rychlost v, čas t. Při řešení těchto úloh vycházíme ze vzorce pro výpočet dráhy s rovnoměrného přímočarého pohybu $s = v \cdot t$ a dbáme na to, abychom u všech tří veličin pracovali s odpovídajícími jednotkami.

1 Cesta z Prahy do Plzně měří asi 63 km. V 8 hodin ráno vyjela z obou měst proti sobě dvě auta. Osobní auto z Prahy jelo průměrnou rychlostí 120 km/h a nákladní auto z Plzně průměrnou rychlostí 60 km/h. V kolik hodin se na cestě potkají? Jak daleko od Prahy je místo jejich setkání?

Řešení



$$\boxed{s_O + s_N = 63\,\text{km}}$$

Auto	s (km)	t (h)	v (km/h)	Zkouška
Osobní	$120x$	x	120	$120 \cdot \frac{21}{60} = 42$ (km)
Nákladní	$60x$	x	60	$60 \cdot \frac{21}{60} = 21$ (km)
Praha–Plzeň	63			63 (km)

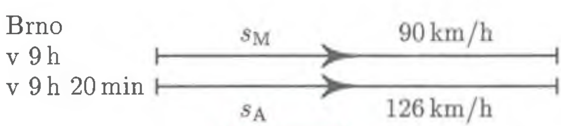
$$\begin{aligned} 120x + 60x &= 63 \\ 180x &= 63 \quad /:3 \\ 60x &= 21 \quad /:60 \\ x &= \frac{21}{60} \end{aligned}$$

$$\frac{21}{60}\ \text{hodiny} = 21\ \text{minut}$$

Auta se potkají po 21 minutách jízdy, tj. v 8 h 21 min, 42 km od Prahy.

2 Motocykl jedoucí průměrnou rychlostí 90 km/h vyjel z Brna po dálnici v 9 hodin. O 20 minut později za ním vyjelo osobní auto, jehož průměrná rychlost byla 126 km/h. Kdy dohoní auto motocykl? Po kolika kilometrech jízdy to bude?

Řešení



$$\boxed{s_M = s_A}$$

	s (km)	t (h)	v (km/h)	Zkouška
Motocykl	$90x$	x	90	$90 \cdot \frac{7}{6} = 105$ (km)
Auto	$126\left(x - \frac{1}{3}\right)$	$x - \frac{1}{3}$	126	$126\left(\frac{7}{6} - \frac{1}{3}\right) = 105$ (km)

$$\begin{aligned} 90x &= 126\left(x - \frac{1}{3}\right) \\ 90x &= 126x - 42 \\ -36x &= -42 \\ \underline{x} &\underline{= \frac{7}{6}} \end{aligned}$$

$$\frac{7}{6}\,\text{h} = 1\,\text{h}\ 10\,\text{min}$$

Auto dohoní motocykl v 10 h 10 min. Bude to po 105 km jízdy.

CVIČENÍ

1. Čas uvedený v minutách vyjádřete v hodinách:
   a) 20 min   b) 45 min   c) 40 min
   d) 10 min   e) 12 min   f) 15 min
2. Časové údaje převeďte na minuty:
   a) $\frac{1}{6}$ h   b) $\frac{3}{10}$ h   c) $\frac{13}{60}$ h   d) $\frac{3}{20}$ h   e) $\frac{5}{12}$ h
3. Jakou průměrnou rychlostí běžel italský sprinter Ménea trať dlouhou 200 m, jestliže vytvořil světový rekord časem 19,72 s?
4. Vzdálenost mezi městy H a K činí 110 km. Z města H do K vyjelo v 11 h auto a jelo průměrnou rychlostí 80 km/h. Proti němu z města K vyjelo v 11 h 30 min auto, jehož průměrná cestovní rychlost byla 60 km/h. V kolik hodin se tato auta setkají? Jak daleko budou v okamžiku setkání od města H?
5. Ze skladu zeleniny vyjelo v 6 h 15 min naložené nákladní auto a pohybovalo se průměrnou rychlostí 55 km/h. Po půl hodině za ním vyjelo osobní auto se vzkazem pro řidiče, že má ve třičtvrtě na osm telefonovat do nemocnice. Dozvěděl se to řidič včas, jestliže průměrná rychlost osobního auta byla 88 km/h?
6. Z města B do města O vede trať dlouhá 186 km. Z obou měst proti sobě vyjely současně dva vlaky. Nákladní vlak jel průměrnou

rychlostí 45 km/h a stejně jako protijedoucí rychlík nikde nestavěl. Jaká byla průměrná rychlost rychlíku, jestliže se vlaky na trati potkaly po hodině a dvanácti minutách jízdy?

7. Cyklista jel z Příbrami do Pardubic průměrnou rychlostí 36 km/h. Současně s ním vyjelo z Pardubic do Příbrami nákladní auto jedoucí průměrnou rychlostí 52 km/h. Po devadesáti minutách jízdy dělilo oba jezdce ještě 30 km. Jak daleko je Příbram od Pardubic?

8. Za parníkem, který pluje průměrnou rychlostí 12 km/h, vyplul o 3,5 h později motorový člun. Jakou průměrnou rychlostí se musí pohybovat, aby se s parníkem setkal po 45 min jízdy?

9. Ze Zlína vyjela současně, ale opačnými směry, dvě vozidla. Jela průměrnými rychlostmi 84 km/h a 96 km/h. Jaká vzdálenost dělila vozidla po dvaceti minutách jízdy?

10. Z Liberce do Znojma je přibližně 257 km. Ve 13 hod vyjela proti sobě z těchto měst dvě auta. Průměrná rychlost auta z Liberce byla o 800 m/h menší než průměrná rychlost auta ze Znojma. Určete průměrné rychlosti obou aut, jestliže se setkala v 17 h 30 min.

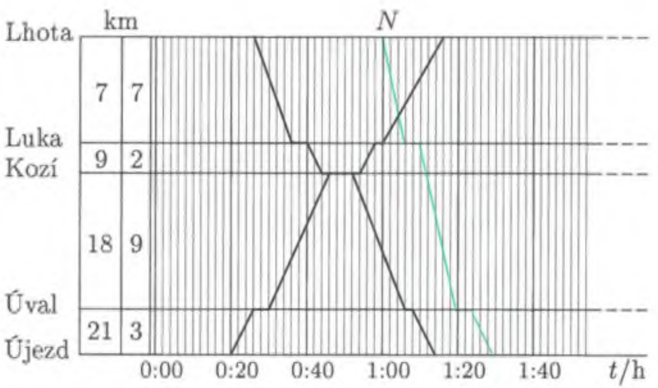
11. Lukáš šel za kamarádem do vesnice vzdálené 6,5 km. Patnáct minut šel průměrnou rychlostí 4 km/h a zbytek cesty ho svezl traktor jedoucí průměrnou rychlostí 33 km/h. Jak dlouho trvala Lukášovi celá cesta?

12. Ze dvou obcí vzdálených 24 km vyrazili současně proti sobě chodec a cyklista. Chodec kráčel průměrnou rychlostí 4 km/h a potkal cyklistu po devadesáti minutách chůze. Jakou průměrnou rychlostí jel cyklista?

13. Z města A do města B jel tahač průměrnou rychlostí 30 km/h. Současně s ním po stejné trase vyjelo nákladní auto a pohybovalo se průměrnou rychlostí 40 km/h. Auto dojelo do města B o 45 min dříve než tahač. Jak jsou od sebe města A a B vzdálena?

14. Osobní vlak ujede 186 km za tři hodiny. Za dvě hodiny po jeho odjezdu vyjíždí z téže stanice A rychlík a dostihne ho ve stanici vzdálené 248 km od stanice A. Jakou průměrnou rychlostí jezdí tento rychlík? (Zastávky ve stanicích zanedbejte.)

15. Výpravčí v železničních stanicích používají speciální grafy (tzv. grafikony), z nichž je možné vyčíst, kdy který vlak po příslušné trati jezdí, ve kterých zastávkách a jak dlouho stojí a jakou průměrnou rychlostí musí jet, aby vyhověl jízdnímu řádu. Dále nás informují o tom, kde se vlaky křižují atd. Jeden takový zjednodušený dopravní grafikon je uveden na obrázku. Odpovězte na tyto otázky:
   a) Kde se křižují první ranní vlaky?
   b) Jde o trať jednokolejnou či dvojkolejnou?
   c) Jaká je průměrná rychlost spoje N?



3.5.2 Úlohy o společné práci

Další významnou skupinou slovních úloh jsou *úlohy o společné práci.* Zabývají se například vztahem mezi počtem pracovníků a množstvím vykonané práce.

1 Zahradník vypleje záhon jahod za dvě hodiny. Jakou část záhonu vypleje (jakou část práce vykoná) při stejném pracovním výkonu
   a) za 1 hodinu, b) za půl hodiny, c) za 15 minut?

Řešení

a) Jedna hodina je polovina celkové doby potřebné k vypletí celého záhonu. Proto zahradník vypleje půl záhonu.

b) Půl hodiny je čtvrtina potřebné doby, vypleje čtvrt záhonu.

c) Vypleje jednu osminu záhonu.

2 Zemědělec má dva různě výkonné traktory. Menším z nich zorá pole za 30 hodin, výkonnějším za 24 hodin. Za jak dlouho bude pole zoráno, budou-li pracovat oba traktory současně?

Řešení

Traktor	Počet hodin	Práce za 1 h	Práce za x h	Zkouška
Malý	30	$\frac{1}{30}$	$\frac{x}{30}$	$\frac{40}{3} : 30 = \frac{4}{9}$ (pole)
Velký	24	$\frac{1}{24}$	$\frac{x}{24}$	$\frac{40}{3} : 24 = \frac{5}{9}$ (pole)
Oba	x		1	$\frac{4}{9} + \frac{5}{9} = 1$ (pole)

$$\frac{x}{30} + \frac{x}{24} = 1 \qquad / \cdot 120$$
$$4x + 5x = 120$$
$$9x = 120$$
$$x = \frac{40}{3}$$
$$\underline{x = 13\frac{1}{3}}$$

$$13\frac{1}{3}\,\mathrm{h} = 13\,\mathrm{h}\ 20\,\mathrm{min}$$

Oba traktory společně zorají pole za 13 h 20 min.

3 První ze tří mlýnských strojů semele za dvě hodiny 300 kg obilí, druhý za tři hodiny 400 kg a třetí za pět hodin 800 kg obilí. Za jak dlouho tyto stroje semelou 13,3 t obilí, budou-li pracovat společně?

Řešení

Stroj číslo	Mletí (kg) za 1 h	Mletí (kg) za x h	Zkouška
1	$\frac{300}{2}$	$150x$	$30 \cdot 150 = 4\,500$ (kg)
2	$\frac{400}{3}$	$\frac{400x}{3}$	$30 \cdot \frac{400}{3} = 4\,000$ (kg)
3	$\frac{800}{5}$	$160x$	$30 \cdot 160 = 4\,800$ (kg)
Celkem		13 300	13 300 (kg)

$$\begin{aligned} 150x + \frac{400x}{3} + 160x &= 13\,300 \quad / \cdot 3 \\ 450x + 400x + 480x &= 39\,900 \quad / : 10 \\ 45x + 40x + 48x &= 3\,990 \\ 133x &= 3\,990 \\ \underline{x} &\underline{= 30} \end{aligned}$$

Společně pracující stroje semelou 13,3 t obilí za 30 h.

CVIČENÍ

1. Dětské brouzdaliště se naplní jedním přívodem vody za pět hodin a druhým za sedm hodin. Za jak dlouho se naplní, budeme-li vodu napouštět oběma přívody současně?
2. Jeden bagr by vyhloubil příkop pro položení kabelu za 21 h, druhý za 28 h. O kolik hodin se práce urychlí ve srovnání s výkonnějším bagrem, budou-li oba bagry pracovat současně?
3. Nádrž se jedním přítokem naplní za 8 min, druhým za 12 min. Stačí pustit oba přítoky na 5 min, aby se nádrž naplnila?

4. Vodní nádrž se vyprázdní malým čerpadlem za 12 h, středním za 9 h a nejvýkonnějším čerpadlem za 4 h. Za jak dlouho vyčerpají vodu z nádrže všechna čerpadla současně?
5. Do nádrže přitéká trubkou voda a naplní ji za 36 min. Odpadem se tato nádrž vyprázdní za 40 min. Může se nádrž naplnit, otevřeme-li přítok i odtok současně? Pokud ano, za jak dlouho?
6. Zedníci měli omítnout zeď domku. Mistr by práci zvládl sám za 6 h, jeho učeň za 9 h. Protože k vykonání práce bylo málo času, přibrali ještě jednoho pracovníka a společně omítli zeď za 2 h. Za jak dlouho by práci provedl přizvaný pracovník sám?
7. Tři zahradnice v zámecké zahradě mají osázet květinami 6 stejných záhonů. První z nich může osázet 3 záhony za 12 h, druhá 2 záhony za 6 h a třetí 4 záhony za 24 h. Kolik času potřebují k osázení 6 záhonů, budou-li pracovat společně?

8. Fajtovi měli při povodni zaplavený sklep. Začali čerpat vodu malým čerpadlem, kterému by vyčerpání trvalo 7 h. Po hodině práce jim sousedé přinesli silnější čerpadlo, které by tutéž práci zvládlo za 5 h. Jak dlouho čerpali Fajtovi vodu ze sklepa, jestliže dále pracovala obě čerpadla současně?

9. Dva sekáči mají pokosit louku u lesa. Starší by tuto práci zvládl za 6 h, mladší by byl hotov o 1 h dříve. Jak dlouho budou kosit louku společně?

4 SOUHRNNÁ CVIČENÍ I

1. Jsou dána čísla:

$6, \quad -94, \quad \sqrt{36}, \quad 0, \quad -\pi, \quad 29, \quad -\sqrt{10}, \quad 13, \quad \frac{1}{3}, \quad -2.$

Vyberte z nich

a) všechna čísla přirozená,

b) všechna čísla nezáporná,

c) všechna čísla iracionální,

d) největší prvočíslo,

e) nejmenší reálné číslo,

f) celé číslo s nejmenší absolutní hodnotou.

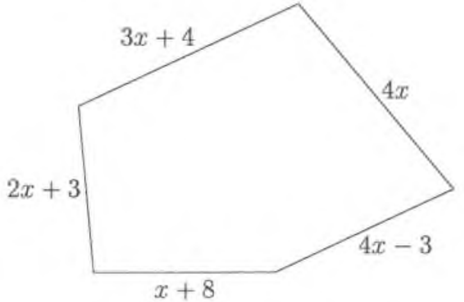
2. Uspořádejte vzestupně podle velikosti tato čísla:

$\sqrt{49}; \quad -2; \quad (-2)^2; \quad 0^2; \quad 1{,}\overline{3}; \quad \pi; \quad \sqrt{100}; \quad 1{,}3$

Znázorněte je na číselné ose.

3. Vypočtěte výšku v rovnostranného trojúhelníku ABC, $|AB| = 2\,\text{cm}$, úhlopříčku u čtverce $PQRT$, $|PQ| = 1\,\text{cm}$, a přeponu z pravoúhlého trojúhelníku XYZ, jehož odvěsny mají délky $1\,\text{cm}$ a $2\,\text{cm}$. Čísla v, u, z znázorněte na číselné ose s jednotkou $j = |01| = 5\,\text{cm}$.

4. Zapište pomocí proměnné x obvod vyznačeného pětiúhelníku. Výraz zjednodušte.



5. Prostřední z pěti po sobě následujících přirozených čísel je rovno $2n$.

a) Zapište tato čísla.

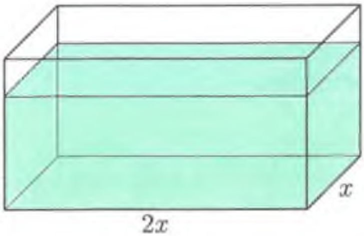
b) Určete součet těchto čísel.

c) Určete rozdíl největšího a nejmenšího čísla.

d) Určete rozdíl součtu posledních dvou čísel a součtu prvních dvou čísel.

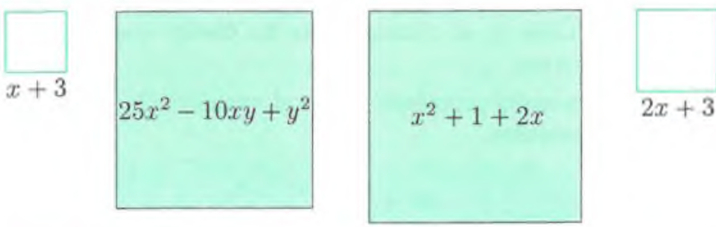
e) Určete součin prvních tří čísel.
f) Určete součin prvního a posledního čísla.
g) Vypočtěte aritmetický průměr všech pěti čísel.

6. Vyjádřete výrazem s proměnnou x tlak vody na dno akvária, ve kterém je 50 l vody. Dno má tvar obdélníku, jeho rozměry v metrech jsou uvedeny na obrázku.

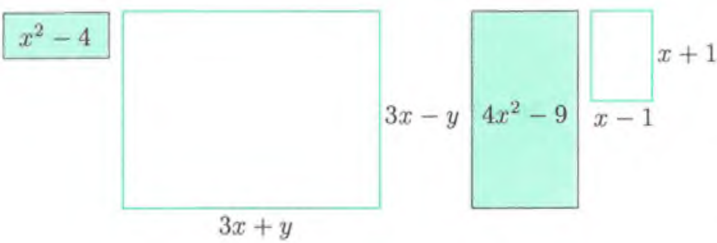


7. Parcely na obrázcích mají tvar a) čtverce, b) obdélníku a jejich rozměry lze vyjádřit jako mnohočleny s celočíselnými koeficienty. Doplňte chybějící rozměry a výměry.

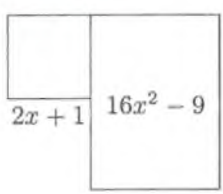
a)



b)



8. Čtvercová zahrada o straně délky $(2x+1)$ m sousedí s obdélníkovou zahradou o výměře $(16x^2 - 9)$ m^2. Obě zahrady byly spojeny do jednoho celku podle obrázku.
a) Vypočtěte obvod nové zahrady.
b) Vypočtěte výměru nové zahrady.



9. Zapište druhé mocniny dvojčlenů:

a) $3a + b$ b) $x - \frac{1}{2}$

c) $-2c - 1$ d) $0{,}5 + 2u$

e) $-4v + 3z$ f) $\frac{1}{4}a + 4$

g) $a^2 + 2$ h) $3 - u^3$

i) $1{,}2 - z$

10. Vypočtěte:

a) $(3 + a)(3 - a)$ b) $(2b - 3)(2b + 3)$

c) $(8y - x)(x + 8y)$ d) $(-1 + 2m)(2m + 1)$

e) $\left(\frac{1}{2}m - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}m + \frac{1}{3}\right)$ f) $(m^2 + n)(m^2 - n)$

g) $(0{,}2x + 1)(0{,}2x - 1)$ h) $(rs + t)(-rs + t)$

i) $(x^3 - x^2)(x^3 + x^2)$ j) $(5u - 0{,}5)(5u + 0{,}5)$

11. Vypočtěte:

a) $(a + 3)^2(a - 1) + (a - 4)(a + 4)$

b) $(2b - 1)(2b + 1) - 2[(b + 1)^2 - 2b]$

c) $(c + 2)^2[(c + 1)(c - 1) - (2 + c)(c - 2)]$

d) $[(d + 1)(d - 2) - (d + 3)(d - 4)](2d + 1)^2$

e) $[(e - 1)^2(e^2 - 1) - (e^2 + 1)^2] : 2$

12. Řešte rovnice a proveďte zkoušky:

a) $10t - (3t - 2) - 7(4 + 5t) = -12$

b) $(y + 4)(y - 3) = (y + 5)(y - 5)$

c) $4\left(u - \frac{u}{2}\right) + 3 = \frac{u}{2}$

d) $(2y + 3)^2 = (2y - 1)^2$

e) $(a - 2)^2 = (a + 1)(a - 4) - \frac{3a - 6}{2}$

13. Doplňte tabulku:

	s (km)	t (min)	v (km/h)
Auto	$141\frac{2}{3}$		85
Vlak	135	135	
Letadlo		35	600

148
150
152
154
156
158
160
162
164
166
168
170
172
174
176
178
180
182
184
186

14. Vypočtěte obsah kruhu, jehož obvod $o = 15,7\,\text{dm}$.

15. Tři spolužáci získali za sběr celkem 925 Kč. Rozdělili se takto: druhý dostal dvakrát víc než první a třetí dostal o 35 Kč víc než druhý. Kolik Kč dostal každý z nich?

16. Pro vnitřní úhly trojúhelníku ABC platí: první úhel je dvakrát větší než druhý a třetí je pětinou součtu všech vnitřních úhlů v trojúhelníku. Rozhodněte, zda je trojúhelník ABC ostroúhlý, pravoúhlý či tupoúhlý.

17. Ve stejnou dobu startují proti sobě ze dvou letišť dvě letadla. První z nich letí průměrnou rychlostí 960 km/h, druhé průměrnou rychlostí 420 km/h. V jaké vzdálenosti od sebe se nacházejí obě letiště, jestliže letadla letí po přímé letové trase a míjejí se za 1 h 20 min po startu?

18. Řešte rovnice a proveďte zkoušky:

a) $\dfrac{1}{2a} + \dfrac{2}{3a} - \dfrac{3}{4a} = \dfrac{5}{24}$

b) $\dfrac{3}{s} - 1 = \dfrac{6}{s} - 10$

c) $\dfrac{x}{2} - \dfrac{x-1}{x} = \dfrac{x}{2}$

d) $\dfrac{36}{y} + \dfrac{12}{y} - 5 = \dfrac{18}{y}$

e) $\dfrac{8-m}{m} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{6}{m} - \dfrac{1}{3}$

19. Dětský bazének se naplní přítokem za 10 min a vyprázdní odtokem za 16 min. Při jeho plnění zůstal omylem otevřený i odtok. Naplnil se bazének vodou? Pokud ano, jak dlouho bylo třeba vodu napouštět?

20. Pan Ryšánek šel na výletě průměrnou rychlostí 5 km/h. Za půl hodiny po jeho odchodu ho následoval jeho syn na kole. Jel průměrnou rychlostí 20 km/h. Jak daleko od domova syn otce dohonil?

21. Šest pracovníků by opravilo střechu činžovního domu za pět dní. Po dvou dnech byli dva pracovníci odvoláni na jinou práci. Za jak dlouho dokončí zbývající pracovníci opravu střechy, nezmění-li tempo práce?

22. Rozhodněte, která z čísel na proužku (3) jsou
a) celá,
b) záporná racionální.

23. Vyhledejte v každé pětici čísel na proužku (3) číslo a) největší, b) nejmenší.

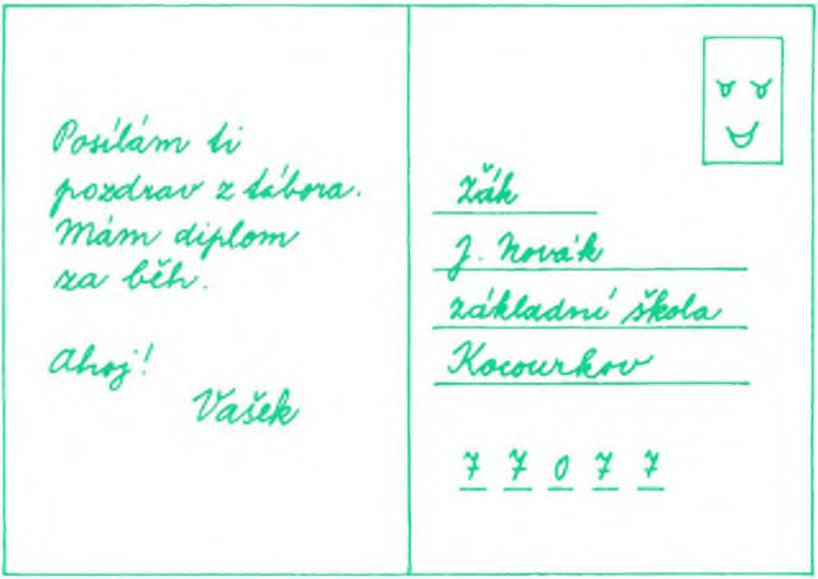
24. Vypočtěte aritmetický průměr každé pětice čísel na proužku (4). Rozhodněte, je-li tímto průměrem číslo celé, racionální či iracionální.

25. Přiložte k sobě proužky (3) a (4). Určete znaménko rovnosti nebo nerovnosti mezi dvojicí čísel, z nichž první je z proužku (3) a druhé z proužku (4) z téhož řádku.

5 KONSTRUKČNÍ ÚLOHY

5.1 Množiny prvků daných vlastností

1 Do kocourkovské školy přišel tento lístek:



Ve škole je však sedm žáků s příjmením Novák: Petr, Luděk, Jan, Jakub, Jiří, Víťa a Josef. Kolik dětí může být adresátem tohoto lístku?

Řešení

Lístek je poslán některému z Nováků, jehož jméno začíná hláskou J. Množina D žáků, kterým mohl být lístek zaslán, má čtyři prvky. Zapíšeme ji takto:

$$\underset{\substack{\downarrow\\ \text{označení}\\ \text{množiny}}}{\mathrm{D}} = \{\underbrace{\text{Jan, Jakub, Jiří, Josef}}_{\substack{\text{prvky}\\ \text{množiny}}}\}$$

2 Děti z přírodovědeckého kroužku sušily lipový květ. Na nástěnku vyvěsily tento přehled:

Sušíme léčivé rostliny Kolik máme sušeného lipového květu?	
Jméno	Lipový květ (kg)
Anča	0,35
Bára	1,20
Mirek	2,35
Honza	0,15
Věrka	1,10
Petr	0,73
Ivan	0,58
Lenka	0,83
Celkem	7,29

Vypočtěte, kolik kg květu průměrně nasušil jeden člen kroužku. Zapište množinu dětí, které nasušily lipového květu více, než průměrně nasušil jeden člen.

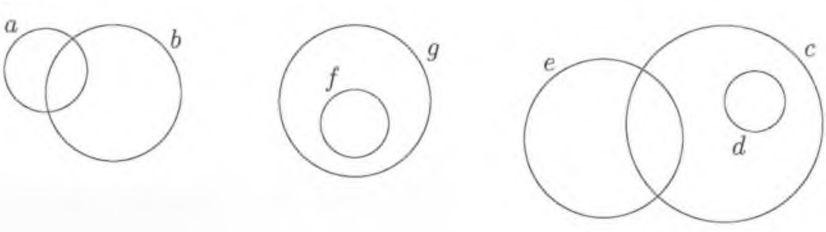
Řešení

Jeden člen kroužku nasušil průměrně . . . . $7{,}29\,\text{kg} : 8 \doteq 0{,}91\,\text{kg}$.
Jeden člen kroužku nasušil průměrně asi 0,91 kg lipového květu.
Víc než 0,91 kg květu nasušili Mirek, Bára a Věrka. Tuto množinu dětí z vyvěšeného přehledu označíme L a zapíšeme:

$$\mathsf{L} = \{\text{Bára, Mirek, Věrka}\}$$

Množina L má tři prvky, je **tříprvková**.

3 Na obrázku je nakresleno celkem sedm kružnic.



a) Zapište, které kružnice z obrázku neprotínají žádnou z nakreslených kružnic. Množinu takových kružnic označte K.
b) Zapište množinu D kružnic z obrázku, které se navzájem dotýkají.

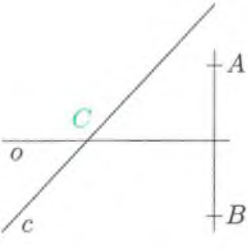
Řešení

a) K $= \{d, f, g\}$
Prvky množiny K jsou kružnice. Množina K má tři prvky.
b) Žádné dvě z nakreslených kružnic se nedotýkají.
Množina D nemá žádný prvek. Takové množině říkáme **prázdná množina**.
Množina D je prázdná množina.
Zapíšeme: D $= \emptyset$

4 Určete množinu M bodů přímky c, které mají stejnou vzdálenost od bodů A a B (viz obrázek).

Řešení

Všechny body roviny, které mají stejnou vzdálenost od dvou různých bodů A, B této roviny, leží na ose o úsečky AB. Přímka c protíná osu o v bodě C. Bod C je tedy bodem přímky c a je zároveň stejně vzdálen od bodů A i B. Bod C je prvkem množiny M.
Přímky c a o jsou různoběžné a mají společný pouze bod C. Proto více bodů požadovaných vlastností v dané rovině není.

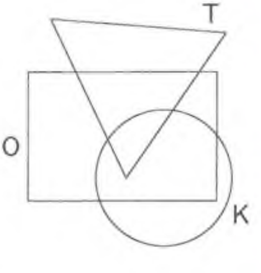


Zapíšeme: M $= \{C\}$

Množina M je **jednoprvková**.

CVIČENÍ

1. Narýsujte do sešitu obdélník O, kruh K a trojúhelník T podle obrázku.
a) Barevně vyznačte množinu V všech bodů X, které jsou body kruhu K i trojúhelníku T. Zapište tuto množinu pomocí symbolu $\cap$.
b) Vyznačte šrafováním množinu W bodů X, pro něž platí:
$X \in$ O a současně $X \in$ K.
Zapište vlastnost bodů X množiny W výhodněji.



c) Vyznačte barevně množinu Q bodů Y, které jsou body obdélníku O a současně body kruhu K, ale nejsou body trojúhelníku T.

2. Je dána množina A $= \{-7, 4, \pi, 2\sqrt{3}, \sqrt{36}, 0, -\sqrt{5}\}$. Z prvků množiny A vyberte a zapište množinu

a) P přirozených čísel,

b) I iracionálních čísel,

c) L lichých čísel,

d) B záporných čísel,

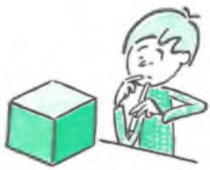
e) O nezáporných čísel.

3. Je dána krychle K $= ABCDEFGH$. Zapište množinu

a) H všech bodů X krychle K, které leží současně ve třech různých stěnách krychle K,

b) J všech bodů Y krychle K, které leží současně pouze ve stěnách ABF a BCG a mají od bodů B a F stejnou vzdálenost,

c) M všech bodů K krychle K, které mají od všech stěn krychle K stejnou vzdálenost.



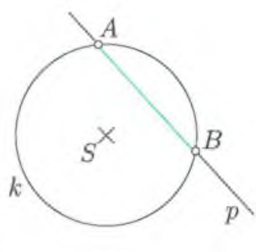
4. Zapište množinu C všech čísel, jejichž obrazy leží na číselné ose ve vzdálenosti čtyř jednotek od obrazu čísla tři.

5. Narýsujte pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$. Zapište množinu U všech úhlopříček tohoto šestiúhelníku. Z prvků množiny U vyberte všechny úhlopříčky procházející bodem A. Množinu V těchto úhlopříček zapište.

5.2 Množiny bodů daných vlastností

Pokud nepoznamenáme něco jiného, budeme v této kapitole nadále pracovat pouze s body jedné roviny (naší nákresny).

1 Mějme kružnici $k(S, r)$ a přímku p, která ji protíná v bodech A, B. Zapište množinu W všech bodů X, které leží na přímce p a mají od bodu S vzdálenost menší než r.



Řešení

Všechny body vnitřní oblasti kružnice $k(S, r)$ mají od jejího středu vzdálenost menší než r. Ve vnitřní oblasti kružnice k a zároveň na přímce p leží všechny vnitřní body úsečky AB. Abychom v obrázku zakreslili, že body A a B už dané podmínky nesplňují, vyznačíme je prázdnými kroužky.

Všechny vnitřní body úsečky AB vyjmenovat nelze. Proto množinu W zapíšeme takto:

$$\mathsf{W} = \{X;\ X \text{ je vnitřním bodem } AB\}$$

Čteme: Množinu W tvoří všechny body X, které jsou vnitřními body úsečky AB.

V tomto případě jsme tedy do závorek poznamenali, že prvky množiny W jsou body X, které mají určitou vlastnost. Tuto vlastnost se snažíme zapsat co nejjednodušším způsobem.

2 V šestém ročníku jsme si ukázali, že osa úsečky AB je množinou všech bodů, které mají od bodů A a B stejnou vzdálenost.

Zapišme podrobněji, co znamená toto tvrzení:

Je dána úsečka AB a přímka o, která prochází středem S úsečky AB a je k ní kolmá.

A) Každý bod X přímky o je od bodu A vzdálen stejně jako od bodu B.
(Jestliže $X \in o \Rightarrow |AX| = |BX|$.)

B) Jestliže bod X neleží na přímce o, jeho vzdálenost od bodu A se nerovná jeho vzdálenosti od bodu B.
(Jestliže $X \notin o \Rightarrow |AX| \neq |BX|$.)

Stručně: Každý bod přímky o má požadovanou vlastnost, žádný z bodů mimo přímku o tuto vlastnost nemá.

Neboli: Přímka o je množinou všech bodů, které mají požadovanou vlastnost V.

3 Kružnice $k(S, r)$ je množinou všech bodů X, které mají od bodu S vzdálenost r.

Petr i Lenka zapsali pomocí matematických symbolů, co to znamená.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Jestliže } X \in k, \text{ pak } |XS| = r.\\ \text{Jestliže } X \notin k, \text{ pak } |XS| \neq r.\end{array}\right\}$$

Kružnice $k(S,r)$ je množinou všech bodů, které mají od bodu S vzdálenost r.

Je dána kružnice $k(S,r)$.

$$\left\{\begin{array}{l} X \in k \Rightarrow |XS| = r\\ |XS| = r \Rightarrow X \in k\end{array}\right.$$

Kružnice $k(S,r)$ je množinou všech bodů roviny, pro které $|XS| = r$.

Obě tvrzení v zápisu Petra i Lenky platí současně. To obě děti vyznačily svorkou.

Oba zápisy jsou správné.

Přečtěte ještě jednou zápis Lenky:

A) Jestliže bod X leží na kružnici $k(S, r)$, pak má úsečka XS délku r.

B) Jestliže má úsečka XS délku r, pak leží bod X na kružnici $k(S, r)$.

Lenčin zápis můžeme přepsat takto:

$$\left.\begin{array}{l} X \in k(S,r) \Rightarrow |XS| = r \\ X \in k(S,r) \Leftarrow |XS| = r \end{array}\right\}$$

a ještě zjednodušit:

$$X \in k(S,r) \Leftrightarrow |XS| = r$$

Znak $\Leftrightarrow$ je *ekvivalence*, obě jeho strany jsou „stejně cenné“, říkají totéž.

Zápis

$$A \Leftrightarrow B$$

čteme:

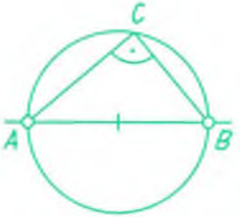
A je ekvivalentní B

To znamená: Jestliže je splněno A, pak platí i B.
A současně: Jestliže je splněno B, pak platí i A.

4 Je dána úsečka AB. Narýsujte množinu všech takových bodů C, aby trojúhelník ABC byl pravoúhlý s přeponou AB.

Honza napsal:
„Množinou vrcholů C pravoúhlého trojúhelníku ABC s přeponou AB je Thaletova kružnice s průměrem AB.“

Vendulka však vyřešila úlohu takto:



Všechny vrcholy C pravoúhlých $\triangle ABC$ s přeponou AB leží na kružnici s průměrem AB.
Ale body A, B nemohou být i vrcholem C v $\triangle ABC$. $C \neq A, C \neq B$

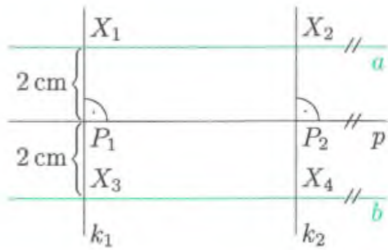
Množinou M všech bodů C je Thaletova kružnice, $\varnothing AB$ - bez A, B.

Má Vendulka pravdu?

5 Narýsujte množinu B bodů X, které jsou vzdáleny 2 cm od dané přímky p.

Řešení

Vzdálenost bodu X od přímky p zjistíme takto:
Bodem X vedeme kolmici k k přímce p, průsečík přímek p a k označíme např. P. Vzdálenost bodu X od přímky p je rovna délce úsečky XP.
Při hledání bodů X můžeme postupovat obráceně:
Zvolíme na přímce p bod P, bodem P vedeme kolmici k k přímce p, na přímce k najdeme body X, pro které platí $|XP| = 2\,\text{cm}$. Takto získané body X leží na dvojici přímek a, b, které jsou rovnoběžné s přímkou p. Každý bod přímky a i přímky b je od přímky p vzdálen 2 cm. Je-li bod X od přímky p vzdálen 2 cm, leží buď na přímce a nebo na přímce b.



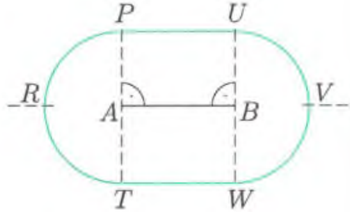
Dvojice přímek a, b je množinou B bodů, které mají od přímky p vzdálenost 2 cm.

Množina M všech bodů roviny ϱ, které mají danou vlastnost V, je množinou bodů této roviny, pro kterou platí současně:
1. Každý bod množiny M má vlastnost V.
2. Každý bod roviny ϱ, který má vlastnost V, je bodem množiny M.

6 Narýsujte množinu O bodů Q, které mají od úsečky AB vzdálenost 2 cm.

Řešení

Množinou bodů, které mají od přímky AB vzdálenost 2 cm, je dvojice rovnoběžek a, b, vzdálených od přímky AB 2 cm. Množinou bodů, které jsou od bodu A (resp. B) vzdáleny 2 cm, je kružnice $k(A, 2\,\text{cm})$ (resp. $l(B, 2\,\text{cm})$). Množinu O tvoří dvě polokružnice a dvojice úseček (viz obrázek). Množina O je sjednocením polokružnic PRT a UVW a úseček PU a TW.



Při řešení konstrukčních úloh pracujeme často s údaji o vzdálenosti hledaného bodu X od daných útvarů U, V (přímek, bodů, kružnic atd.). Jak určíme vzdálenost bodu X od daného geometrického útvaru U?

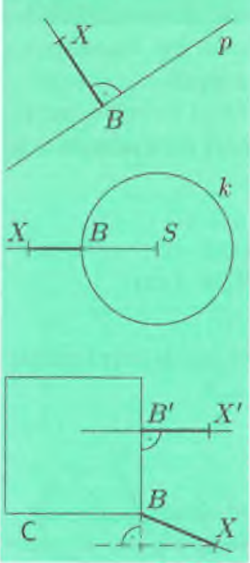
1. Vyhledáme bod B útvaru U, který „je nejblíže“ bodu X.
2. Určíme (změříme nebo vypočítáme) délku úsečky XB.
3. Vzdálenost bodu X od útvaru U je rovna délce úsečky XB.

Zapíšeme: $|X, \mathsf{U}| = |XB|$

Určování vzdálenosti daného bodu od útvaru U může být velmi složité, protože nelze vždy najít vhodný bod B útvaru U. Na základní škole nám však tento postup stačí.

Poznámka. Vhodných bodů B může být víc než jeden. Bod S je od všech bodů kružnice $k(S, r)$ vzdálen o r; $|S, k(S, r)| = r$. Bod O, který je středem čtverce $ABCD$, jehož strany mají délku a, má od lomené čáry $ABCDA$ vzdálenost $\frac{a}{2}$; $|O, ABCDA| = \frac{a}{2}$.

Pozorujte!



Vzdálenost bodu X od přímky p je rovna délce úsečky XB, kde bod B je patou kolmice spuštěné z bodu X k přímce p.

Vzdálenost bodu X od kružnice $k(S, r)$ je rovna délce úsečky XB, kde bod B je průsečíkem polopřímky SX s kružnicí $k(S, r)$.

Vzdálenost bodu X od čtverce C je rovna délce úsečky XB.
Vzdálenost bodu X' od čtverce C je rovna délce úsečky $X'B'$.

Zapíšeme:

$|X, p| = |XB|$

$\left.\begin{array}{l} \leftrightarrow XB \perp p \\ B = p \cap \leftrightarrow XB \end{array}\right\}$

$|X, k| = |XB|$

$B = k \cap \mapsto SX$

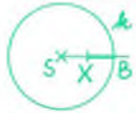
$|X, \mathsf{C}| = |XB|$

$|X', \mathsf{C}| = |X'B'|$

Všimněte si, že vzdálenost bodu X od čtverce hledáme dvěma různými způsoby. Záleží zde na poloze paty kolmice vedené bodem X k přímkám, v nichž leží strany čtverce.

7 Lenka s Honzou určovali vzdálenost bodu X od kružnice $k(S, r)$ a od kruhu $\mathsf{K}(S, r)$, přičemž $|XS| = \frac{r}{2}$.

? $|X, k(S, r)|$; $|XS| = \frac{r}{2}$
X leží uvnitř k.



$\mapsto SX \cap K = B$
$|XB| = \frac{r}{2}$
Vzdálenost bodu X od kružnice je $\frac{r}{2}$.

Dáno: kruh $K(S, r)$
bod X; $|SX| = \frac{r}{2}$

Bod X je bodem kruhu K.
Proto $|X, K| = 0$.

Vzdálenost libovolného bodu X od geometrického útvaru U je rovna délce nejkratší ze všech úseček XB, kde bod B je bodem útvaru U. Je-li bod X bodem útvaru U, je tato vzdálenost rovna nule.

Zapíšeme: $|X, \mathsf{U}| = |XB|$
$X \in \mathsf{U} \Leftrightarrow |X, \mathsf{U}| = 0$

8 Narýsujte kružnici $k(S, 3\,\text{cm})$ a bod R, $|SR| = 4\,\text{cm}$.

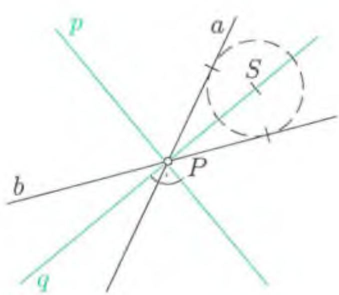
a) Zjistěte vzdálenost bodu R od kružnice k.
b) Určete množinu všech bodů Q, jejichž vzdálenost od kružnice k je rovna vzdálenosti bodu R od této kružnice.

Návod:

a) Sestrojte bod B: $B = \mapsto SR \cap k$, $|BR| = 1\,\text{cm}$.
b) Sestrojte na polopřímce SB ještě bod R': $|BR'| = 1\,\text{cm}$.

9 Sestrojte množinu M všech bodů S roviny, které jsou středy kružnic $k(S, r)$ dotýkajících se dvou různoběžných přímek a, b.

Petr narýsoval hledanou množinu M takto:

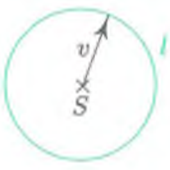


Popište Petrův obrázek slovy.

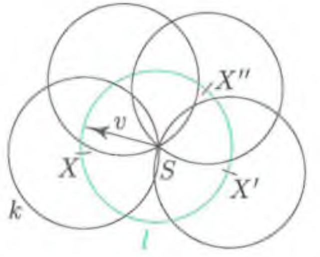
Přehled nejdůležitějších množin bodů definovaných pomocí vzdáleností vám pomůže při řešení konstrukčních úloh.

Množiny bodů definované pomocí vzdálenosti od daného útvaru U

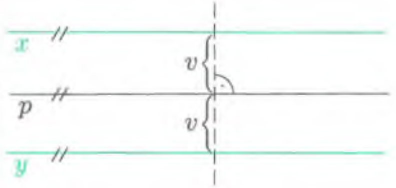
Množina všech bodů X, jejichž vzdálenost od daného bodu S je rovna v, je kružnice $l(S, v)$.



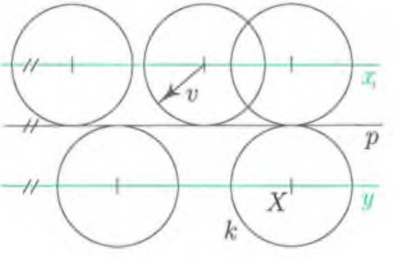
Množina všech středů kružnic $k(X, v)$ procházejících bodem S je kružnice $l(S, v)$.



Množina všech bodů X, jejichž vzdálenost od dané přímky p je rovna v, je dvojice přímek x, y rovnoběžných s přímkou p:
$|p, x| = |p, y| = v$



Množina středů všech kružnic $k(X, v)$ dotýkajících se přímky p je dvojice přímek x, y rovnoběžných s přímkou p:
$|p, x| = |p, y| = v$



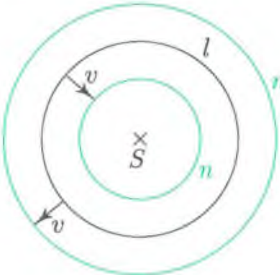
Množinou všech bodů X, jejichž vzdálenost od dané kružnice $l(S, r)$ je rovna v, je:

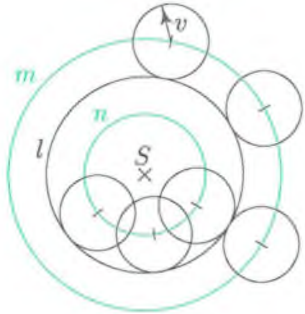
Množinou středů všech kružnic $k(X, v)$, které se dotýkají dané kružnice $l(S, r)$, je:

(a) pro $r > v$

dvojice soustředných kružnic $m(S, r + v)$, $n(S, r - v)$

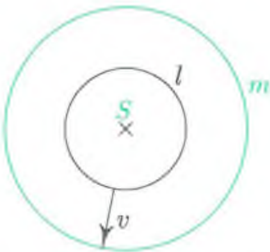
dvojice soustředných kružnic $m(S, r + v)$, $n(S, r - v)$



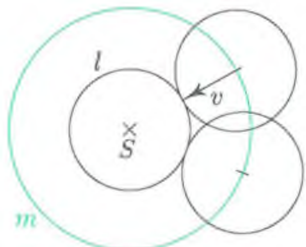


(b) pro $r = v$

kružnice $m(S, r + v)$ a bod S

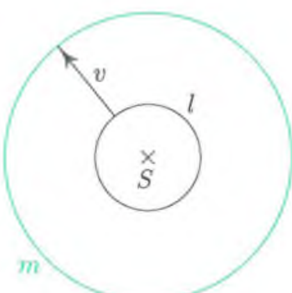


kružnice $m(S, r + v)$

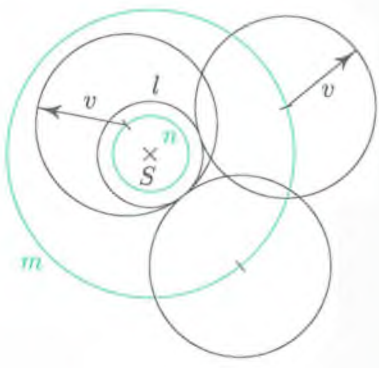


(c) pro $r < v$

kružnice $m(S, r + v)$

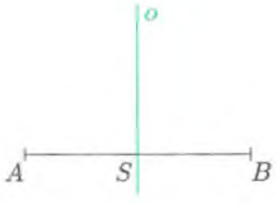


kružnice $m(S, r+v)$ (vnější dotyky) a kružnice $n(S, v-r)$ (vnitřní dotyky)

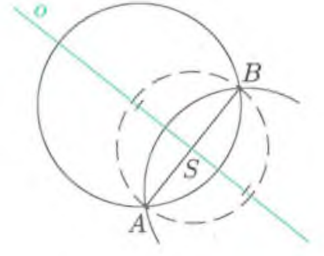


Množiny bodů definované pomocí vzdáleností od dvou geometrických útvarů U, V

Množina všech bodů X, které mají od dvou různých bodů A a B stejnou vzdálenost, je osa o úsečky AB.

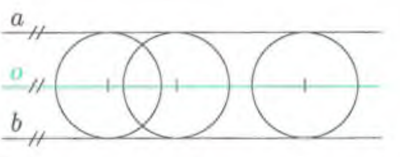


Množina všech středů kružnic $k(X, r)$, které procházejí dvěma různými body A, B, je osa o úsečky AB.

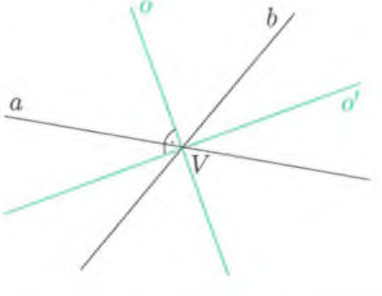


Množina všech bodů X, které mají od dvou rovnoběžných přímek a, b stejnou vzdálenost, je osa o rovinného pásu s hraničními přímkami a, b.

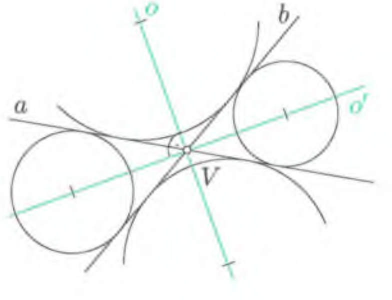
Množina středů všech kružnic $k(X, r)$, které se dotýkají dvou rovnoběžných přímek a, b, je osa o rovinného pásu s hraničními přímkami a, b.



Množina všech bodů X, které mají od dvou různoběžných přímek a, b stejnou vzdálenost, je dvojice navzájem kolmých přímek o, o', které půlí úhly vyťaté přímkami a, b.

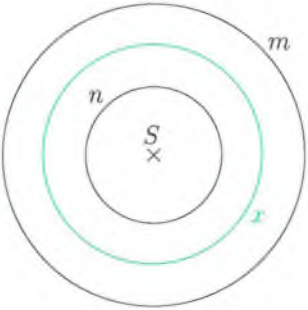


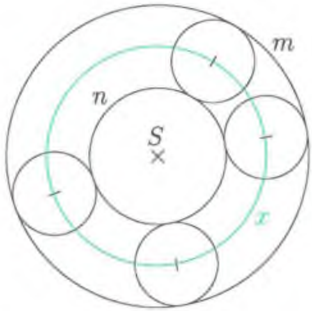
Množina středů všech kružnic $k(X, r)$, které se dotýkají dvou různoběžných přímek, je dvojice navzájem kolmých přímek o, o', které půlí úhly vyťaté přímkami a, b, bez průsečíku přímek a, b.



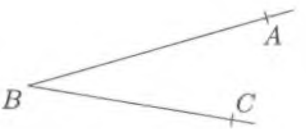
Množina všech bodů X, které mají od dvou soustředných kružnic $m(S, r_1)$, $n(S, r_2)$ stejnou vzdálenost, je kružnice $x(S, \frac{r_1 + r_2}{2})$.

Množina středů všech kružnic $k(S, r)$, které se dotýkají dvou soustředných kružnic $m(S, r_1)$, $n(S, r_2)$ a s menší z nich mají vnější dotyk, je kružnice $x(S, \frac{r_1 + r_2}{2})$.





CVIČENÍ



1. Narýsujte množinu všech bodů X, jejichž vzdálenost od dvojice úseček AB, BC (viz obr.) je 1 cm.
2. Různoběžky a, b se protínají v bodě V.
   Určete množinu M všech bodů X, pro které platí současně: $|X, a| = 1\,\text{cm}$, $|X, b| = 2\,\text{cm}$. Kolik prvků má množina M?
3. Mějme kružnice $k(S, 3\,\text{cm})$ a $l(S, 1\,\text{cm})$. Zapište bez rýsování množinu M všech bodů X, které jsou od obou kružnic stejně vzdáleny.
4. Narýsujte kružnice k, l ze cvičení 3.
   a) Sestrojte aspoň jednu kružnici $m(X, 1\,\text{cm})$, která se dotýká kružnice k i l.
   b) Sestrojte aspoň jednu kružnici $n(Y, 2\,\text{cm})$, která se dotýká kružnice k i l.
   c) Popište množinu M všech středů Y kružnic n, které se dotýkají kružnice k a s kružnicí l mají vnitřní dotyk.

5. Je dána úsečka AB, $|AB| = 6\,\text{cm}$. Narýsujte množinu T těžišť všech pravoúhlých trojúhelníků s přeponou AB. (Návod: sestrojte těžnice t_c.)

6. Dvojice navzájem kolmých přímek x, y se protíná v bodě P.
   a) Sestrojte množinu H všech bodů roviny, jejichž vzdálenost od přímky y je dvojnásobkem jejich vzdálenosti od přímky x.
   b) Jsou-li přímky x, y číselné osy se stejnými jednotkami, zapište souřadnice několika bodů množiny H.
   c) Popište vztah mezi souřadnicemi x a y bodů množiny H.

5.3 Konstrukce trojúhelníků a čtyřúhelníků

Při řešení konstrukčních úloh hledáme geometrické útvary, které mají dané vlastnosti. Mnohé konstrukční úlohy jsme již v hodinách matematiky vyřešili. Nyní naše dřívější poznatky uspořádáme.

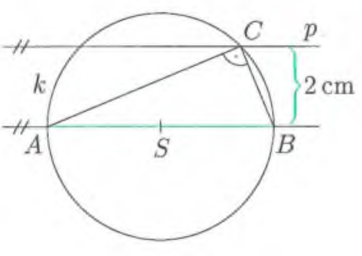
1 Je dána úsečka AB, $|AB| = 6\,\text{cm}$. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB a výškou $v_c = 2\,\text{cm}$.

Řešení

Nejprve provedeme **rozbor** úlohy.
Načrtneme pravoúhlý trojúhelník ABC a vyznačíme známé údaje.
Úsečka AB je dána, musíme sestrojit bod C. Co o něm víme?

(1) Bod C je vrcholem pravoúhlého trojúhelníku s přeponou AB, leží tedy na Thaletově kružnici k s průměrem AB.

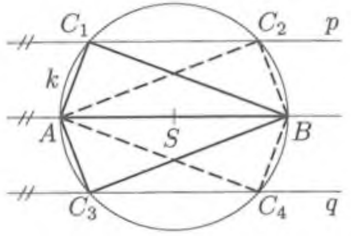
(2) $v_c = 2\,\text{cm}$, bod C je od přímky AB vzdálen $2\,\text{cm}$, leží tedy na jedné ze dvou přímek p, q, které jsou od přímky AB vzdáleny $2\,\text{cm}$.



Protože bod C musí vyhovovat oběma podmínkám současně, je společným bodem kružnice k a jedné z přímek p, q.

Nyní už víme, jak bod C sestrojíme. Můžeme provést **konstrukci**. Narýsujeme obrázek a současně zapíšeme postup tak, aby podle zápisu mohl kdokoli stejný obrázek narýsovat také.

Konstrukce $\triangle ABC$:



1. AB	$\lvert AB\rvert = 6\,\mathrm{cm}$
2. S	S ... střed AB
3. k	$k(S, \lvert SA\rvert)$
4. p, q	$p \parallel q \parallel AB$,
	$\lvert p, AB\rvert = \lvert q, AB\rvert = 2\,\mathrm{cm}$
5. C	$C = k \cap p$ nebo $C = k \cap q$
	$\triangle ABC$

Při rýsování jsme sestrojili celkem čtyři vyhovující body C a tedy čtyři trojúhelníky: $\triangle ABC_1$, $\triangle ABC_2$, $\triangle ABC_3$ a $\triangle ABC_4$.

Dále provedeme **zkoušku správnosti** konstrukce.
Ověříme, zda trojúhelníky ABC_1, ABC_2, ABC_3 a ABC_4 mají všechny požadované vlastnosti.
Jsou pravoúhlé, protože jejich vrcholy C leží na Thaletově kružnici k.
Výšky v_c jsou rovny $2\,\mathrm{cm}$, protože body C leží na přímkách vzdálených od přímky AB právě $2\,\mathrm{cm}$.
Všechny čtyři sestrojené trojúhelníky jsou řešením úlohy.

Naše konstrukční úloha má čtyři řešení.

Naše úloha je úloha **polohová**, protože v podmínkách úlohy byla zadána nejen délka, ale i poloha úsečky AB („je dána úsečka AB“). Všechny podmínky úlohy byly zadány konkrétně (bez proměnných – parametrů).

Ukažme si obměnu této úlohy:

2 Je dána úsečka AB, $|AB| = 6\,\mathrm{cm}$. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB a výškou $v_c = x\,\mathrm{cm}$.

Řešení

Rozbor úlohy se neliší od rozboru z příkladu 1.
Konstrukce se liší od předchozí jen v bodě 4.
Konstrukce $\triangle ABC$:

1. AB	$\lvert AB\rvert = 6\,\mathrm{cm}$
2. S	S ... střed AB
3. k	$k(S, \lvert SA\rvert)$
4. p, q	$p \parallel q \parallel AB$, $\lvert p, AB\rvert = \lvert q, AB\rvert = x\,\mathrm{cm}$
5. C	$C = k \cap p$ nebo $C = k \cap q$
	$\triangle ABC$

Narýsujte si příslušný obrázek sami. Za x při rýsování volte různé hodnoty (např. 1, 3, 4).

Vidíte, že pro některé hodnoty x přímky p, q kružnici k neprotnou nebo jsou jejími tečnami. Musíme uvážit, jak se změní počet řešení při změně proměnné (parametru) x.

Po rozboru, konstrukci a zkoušce následuje u konstrukčních úloh s parametrem ještě **diskuse o počtu řešení** v závislosti na volbě parametru x. Aby úloha měla vůbec smysl, je x číslo kladné (velikost úsečky).

Dále probereme jednotlivé kroky konstrukce a zjistíme, zda jsou jednoznačné nebo mohou vést k několika „dílčím výsledkům“.

1. Úsečka AB je dána; narýsujeme tedy jedinou úsečku AB.
2. Střed S úsečky AB je určen jednoznačně.
3. Kružnice s daným středem S a daným poloměrem SA je také jediná.
4. Dvojice přímek p, q je pro každé kladné x určena jednoznačně.
5. Počet společných bodů kružnice $k(S, |SA|)$ s přímkou p a q závisí na vzdálenosti přímek p a q od středu S kružnice k a na jejím poloměru $r = 3\,\mathrm{cm}$.

Pro $x > 3$ nemají přímky p a q s kružnicí k žádný společný bod,
pro $x = 3$ má každá z nich s kružnicí k jeden společný bod,
pro $x < 3$ je přímka p i přímka q sečnou kružnice k.

Úloha může mít tedy čtyři, dvě nebo žádné řešení.

Tento výsledek úvah o počtu řešení můžeme shrnout do přehledné tabulky:

$\triangle ABC$	
Počet řešení	Hodnoty parametru x
4	$0 < x < 3$
2	$x = 3$
0	$x \leq 0$ nebo $x > 3$

Tato konstrukční úloha je **parametrická**, v jejím zadání se vyskytují proměnné. Při řešení takových úloh je třeba provést diskusi o počtu řešení.

Zapamatujte si!
Při řešení konstrukční úlohy zadané obecně (tj. s proměnnými) provedeme 1. rozbor úlohy,
2. konstrukci,
3. zkoušku,
4. diskusi o počtu řešení (vzhledem ke změnám proměnných).

Je-li konstrukční úloha zadaná bez proměnných, diskusi neprovádíme. Pouze po zkoušce zapíšeme počet řešení.

CVIČENÍ

1. Je dána úsečka SA, $|SA| = 2\,\text{cm}$. Sestrojte čtverec $ABCD$ se středem S.

2. Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC, jehož výškou je daná úsečka AR, $|AR| = 3\,\text{cm}$.

3. Je dána úsečka PQ, $|PQ| = 4\,\text{cm}$. Sestrojte obdélník $PQRT$, jehož úhlopříčky svírají úhel $\varphi = 60°$. (Pozor! Sestrojte všechny čtyři vyhovující obdélníky.)

4. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník XYZ s přeponou XZ, je-li dána jeho odvěsna XY o délce 5 cm a poloměr $\varrho = 1{,}5\,\text{cm}$ kružnice trojúhelníku XYZ vepsané.

5. Je dána úsečka EF o délce 5 cm. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník EFG se základnou EF a vnitřním úhlem GEF, $|\sphericalangle GEF| = x°$. Nezapomeňte na diskusi.

6. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno: úsečka AB o délce 6 cm, výška $v_a = 3\,\text{cm}$, těžnice $t_a = x\,\text{cm}$. Proveďte diskusi.

7. Sestrojte trojúhelník KLM, je-li dána úsečka KL o délce 5 cm, $|\sphericalangle MKL| = 60°$ a těžnice $t_m = 3\,\text{cm}$.

8. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno:
a) úsečka AB o délce 4 cm, $\beta = 45°$, $v_c = 3\,\text{cm}$
b) úsečka AB o délce 4 cm, $\beta = 45°$, $v_c = x\,\text{cm}$

9. Sestrojte trojúhelník XYZ, je-li dána úsečka XY o délce 5 cm, $|\sphericalangle XYZ| = 90°$ a těžnice $t_z = m\,\text{cm}$.

10. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dána úsečka AB o délce 4 cm, $|\sphericalangle CAB| = 60°$, $|BC| = x$ cm. (Nezapomeňte, že rameno úhlu je polopřímka.) Proveďte diskusi.
Zjistěte, pro jakou hodnotu x má úloha jediné řešení a příslušný trojúhelník narýsujte.

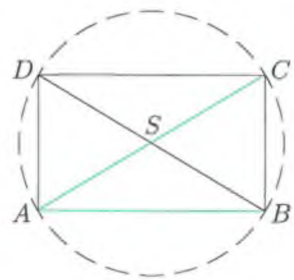
11. Je dána úsečka MN o délce 4 cm. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník MNO se základnou MN, pro který platí: $(m + n)$ cm $= y$ cm. Jaké vztahy musí čísla m, n, y splňovat, aby trojúhelník MNO existoval?

3 Sestrojte obdélník $ABCD$, pro který platí: $|AB| = 6$ cm, $|AC| = 7$ cm.

Řešení

Rozbor

Načrtneme obdélník $ABCD$, jeho střed označíme S a vyznačíme úsečky AB a AC, jejichž délky jsou zadané.
Víme, že bod S je středem souměrnosti obdélníku $ABCD$ i středem kružnice, která je mu opsána. Záleží na nás, který z těchto poznatků při konstrukci využijeme.



Petr sestrojil nejprve trojúhelník ABS:

Konstrukce ▭ ABCD:

1. AB; $|AB| = 6$ cm
2. m; $m(A; 3{,}5$ cm$)$
3. n; $n(B; 3{,}5$ cm$)$
4. S; $S = m \cap n$
5. C; $A \xrightarrow{S} C$
6. D; $B \xrightarrow{S} D$

Obdélník ABCD.

Honza využil kružnici opsanou obdélníku $ABCD$:

1. k	$k(S; 3{,}5$ cm$)$
2. AC	AC ... průměr k
3. l	$l(A, 6$ cm$)$
4. B	$B = k \cap l$
5. D	$D = \mapsto BS \cap k$

Obdélník ABCD.

Rýsujte podle zápisu Petra i Honzy a oba obrázky porovnejte navzájem. V obou případech narýsujete dva obdélníky $ABCD$, budou se však lišit vzájemnou polohou.

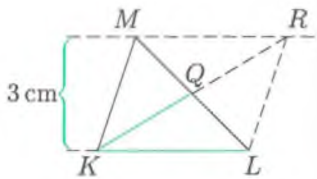
Tato konstrukční úloha je **nepolohová**. V zadání není určena poloha žádné části hledaného geometrického útvaru. Volbou prvku, který umístíme při řešení jako první, můžeme ovlivnit počet narýsovaných útvarů žádaných vlastností nebo jejich vzájemnou polohu. Proto v těchto úlohách považujeme všechna navzájem shodná řešení za řešení jediné.

Naše úloha má tedy jediné řešení — obdélník $ABCD$.

4 Sestrojte trojúhelník KLM, pro který platí: $m = 4\,\text{cm}$, $v_m = 3\,\text{cm}$, $t_k = 2\,\text{cm}$.

Řešení

Rozbor



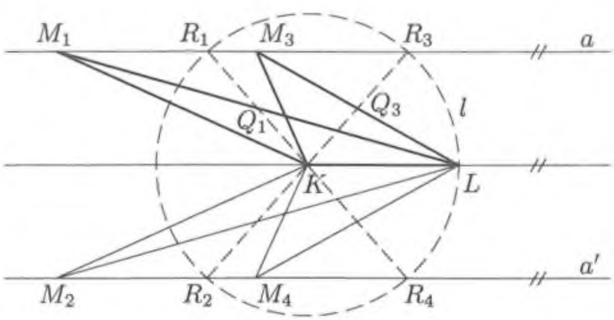
$m = |KL| = 4\,\text{cm}$
$v_m = 3\,\text{cm} \Rightarrow |M, \leftrightarrow KL| = 3\,\text{cm}$
$t_k = KQ$, $|KQ| = 2\,\text{cm}$
Trojúhelník KLM můžeme doplnit na rovnoběžník $KLRM$ se středem Q. Pak $|KR| = 2 \cdot t_k$.

Konstrukce

$\triangle KLM$: $m = 4\,\text{cm}$, $v_m = 3\,\text{cm}$, $t_k = 2\,\text{cm}$

1. úsečka KL	$\|KL\| = 4\,\text{cm}$
2. přímka a	$a \parallel \leftrightarrow KL$, $\|a, \leftrightarrow KL\| = 3\,\text{cm}$
3. kružnice l	$l(K, 4\,\text{cm})$
4. bod R	$R = l \cap a$
5. bod Q	$Q \ldots$ střed KR
6. bod M	$M = a \cap \leftrightarrow LQ$

$\triangle KLM$



Zkouška

Strana $m = KL$, $|KL| = 4\,\mathrm{cm}$ podle 1. bodu konstrukce.
Výška $v_m = 3\,\mathrm{cm}$, protože bod M leží na přímce a, která je od přímky KL vzdálená 3 cm podle bodů 3 a 6 konstrukce.
Těžnice $t_k = 2\,\mathrm{cm}$, protože je polovinou úhlopříčky rovnoběžníku $KLRM$, $|KR| = 4\,\mathrm{cm}$, podle 3. a 5. bodu konstrukce.
Trojúhelník KLM splňuje všechny podmínky úlohy.

Diskuse

Úsečku KL narýsujeme jedinou.
Přímky a můžeme sestrojit dvě, leží v opačných polorovinách určených přímkou KL. Označme je a, a'.
Kružnice l je jediná.
Průsečíky kružnice l s přímkami a, a' jsou čtyři. Označme je R_1, R_2, R_3 a R_4.
Body Q jsou tedy také čtyři a stejně tak hledané vrcholy M trojúhelníku KLM.

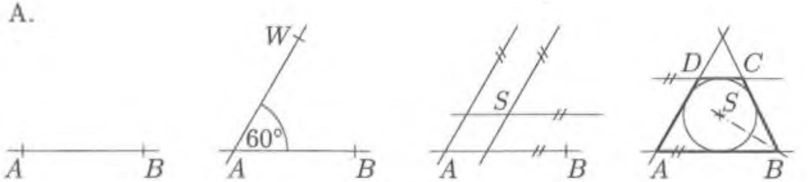
Trojúhelníky KLM_1 a KLM_2 jsou shodné.
Rovněž trojúhelníky KLM_3 a KLM_4 jsou shodné.
Protože naše úloha byla nepolohová, nepočítáme všechny čtyři narýsované trojúhelníky.
Řešením jsou dva různé trojúhelníky KLM, např. $\triangle KLM_1$ a $\triangle KLM_3$, které leží v jedné polorovině určené přímkou KL.

Je-li mezi podmínkami pro hledaný trojúhelník délka některé z těžnic, bývá doplnění trojúhelníku na rovnoběžník často velmi výhodné.

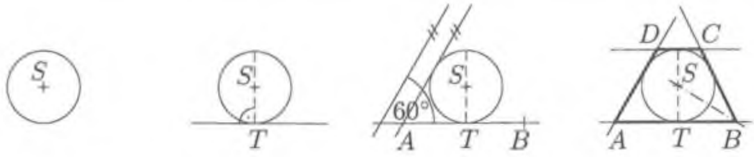
5 Sestrojte lichoběžník $ABCD$ se základnami AB, CD, kterému lze vepsat kružnici $v(S; 1{,}5\,\mathrm{cm})$, je-li dáno: $|AB| = 5\,\mathrm{cm}$, $|\sphericalangle DAB| = 60°$.

Návod k řešení: Úloha je nepolohová, můžete začít umístěním úsečky AB nebo kružnice v. Pracujte podle jednoho z uvedených obrázkových návodů a zapište postup vaší konstrukce.

A.



B.



Ověřte přesnost rýsování: porovnejte součet úseček $|AB| + |DC|$ se součtem úseček $|AD| + |BC|$. Víte, proč jsou tyto součty zajímavé?

6 Sestrojte čtyřúhelník $KLMN$, který je vepsán do dané kružnice $k(S, 3\,\mathrm{cm})$ a pro který platí: $|KL| = 5{,}5\,\mathrm{cm}$, $|\sphericalangle KLM| = 60°$, $|KN| =$ $= |MN|$.

Návod k řešení: Všechny vrcholy čtyřúhelníku $KLMN$ leží na kružnici k. Sestrojte nejprve trojúhelník KLM. Bod N hledejte na ose úsečky KM.

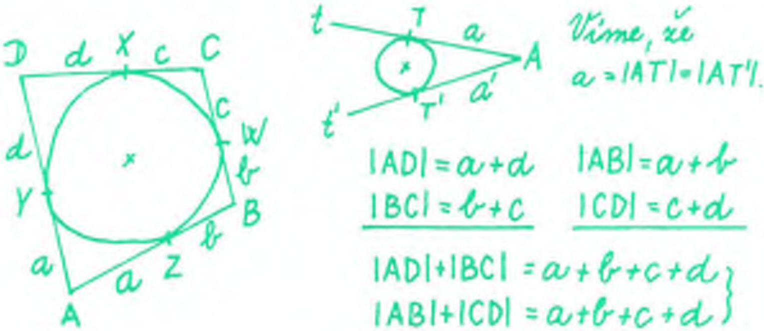
Po narýsování čtyřúhelníku $KLMN$ graficky sečtěte dvojice protilehlých vnitřních úhlů.

Čtyřúhelník, kterému lze opsat kružnici, se nazývá tětivový čtyřúhelník. Všechny jeho strany jsou tětivami této kružnice. Součet protilehlých vnitřních úhlů v tětivovém čtyřúhelníku je roven 180°.

Čtyřúhelník, kterému lze vepsat kružnici, se nazývá tečnový čtyřúhelník. Všechny jeho strany leží na tečnách této kružnice. Součty délek protilehlých stran se sobě rovnají.

7 Dokažte, že pro každý tečnový čtyřúhelník $ABCD$ platí:
$|AB| + |CD| = |AD| + |BC|$.

Lenka vycházela při důkazu z následujícího náčrtku. Pomůže i vám?



CVIČENÍ

12. Sestrojte kosočtverec $ABCD$, je-li $|AB| = 3\,\text{cm}$ a $|AC| = 2 \cdot |BD|$. (Vzpomeňte si na zmenšování a zvětšování plánků.)

13. Sestrojte pětiúhelník $KLMNO$ vepsaný do kružnice $o(S, 3\,\text{cm})$ tak, aby: $|LM| = 4\,\text{cm}$, $LN \cap KM = X$, $|\sphericalangle LXM| = 90°$, $|LX| = 2\,\text{cm}$, $|KO| = |NO|$.
(Čím víc vrcholů hledaný n-úhelník má, tím víc podmínek je v jeho zadání. Při rozboru zjistíte, že úloha není obtížná, jen konstrukce je trochu delší.)

14. Sestrojte deltoid $ABCD$ souměrný podle osy BD, jsou-li dány délky jeho úhlopříček, $|AC| = 4\,\text{cm}$, $|BD| = 6\,\text{cm}$, a $|\sphericalangle ABC| = \beta = 45°$.

5.4 Konstrukce kružnic s požadovanými vlastnostmi

Prohlédněte si znovu přehled množin středů kružnic, které se dotýkají daných geometrických útvarů (str. 81–84).

1 Body A, B, C jsou vrcholy rovnostranného trojúhelníku se stranou $a = 3\,\text{cm}$. Sestrojte všechny kružnice $k(S; 1{,}5\,\text{cm})$, které se dotýkají přímky AB a procházejí bodem C.

Řešení

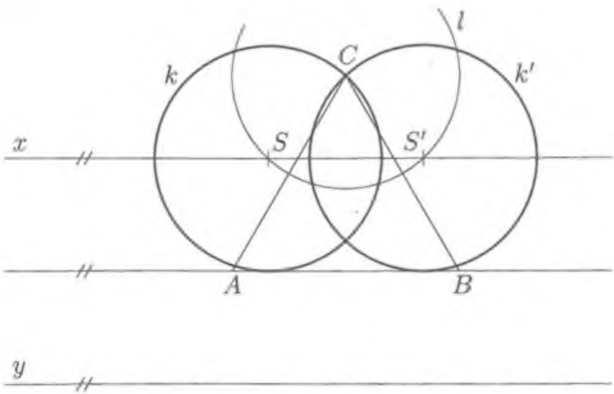
Rozbor

Hledáme podmínky pro střed S kružnice k.
Střed kružnice $k(S; 1{,}5\,\text{cm})$ musí být vzdálen 1,5 cm od přímky AB. Bod S tedy leží na jedné z přímek x, y rovnoběžných s přímkou AB a vzdálených od ní 1,5 cm.
Střed S kružnice musí být také od bodu C vzdálen 1,5 cm. Proto leží na kružnici $l(C; 1{,}5\,\text{cm})$.
Bod S náleží průniku kružnice $l(C; 1{,}5\,\text{cm})$ s dvojicí přímek x, y.

Konstrukce

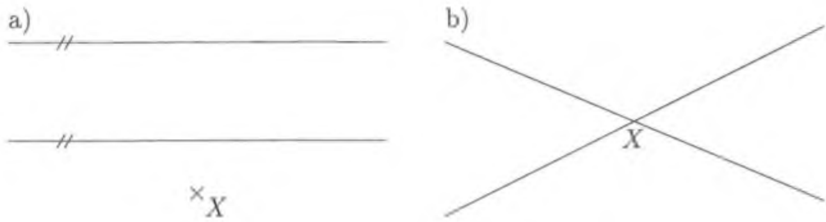
Kružnice $k(S; 1{,}5\,\text{cm})$, $C \in k$, AB je tečna k:

1. $\triangle ABC$	$\lvert AB\rvert = \lvert BC\rvert = \lvert CA\rvert = 3\,\text{cm}$
2. přímky x, y	$x \parallel y \parallel \leftrightarrow AB$
	$\lvert x, \leftrightarrow AB\rvert = \lvert y, \leftrightarrow AB\rvert = 1{,}5\,\text{cm}$
3. kružnice l	$l(C; 1{,}5\,\text{cm})$
4. bod S	$S = l \cap x$ nebo $l \cap y$
	$k(S; 1{,}5\,\text{cm})$



Jedna z přímek x, y s kružnicí l nemá společné body, druhá je její sečnou. Sestrojili jsme dvě kružnice vyhovující úloze: $k(S; 1{,}5\,\mathrm{cm})$ a $k'(S'; 1{,}5\,\mathrm{cm})$.

2 Zdůvodněte, proč není možné sestrojit kružnici dotýkající se dané dvojice přímek a procházející daným bodem X při těchto zadáních:



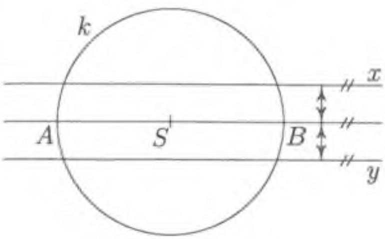
3 Je dána kružnice $k(S, r)$ s průměrem AB, $|AB| = 6\,\mathrm{cm}$. Sestrojte všechny kružnice $h(H, 1\,\mathrm{cm})$, které se dotýkají kružnice k a přímky AB.

Řešení

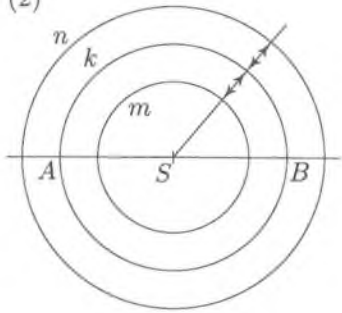
Rozbor

(1) Středy kružnic h musí být od přímky AB vzdáleny 1 cm.
Množinou bodů vzdálených od přímky AB 1 cm je dvojice přímek x, y rovnoběžných s přímkou AB.

(1)



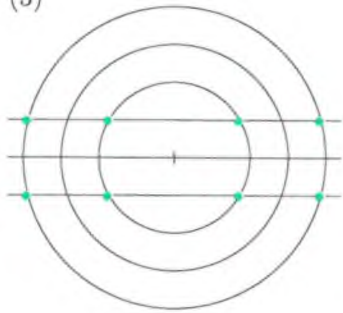
(2)



(2) Středy kružnic h musí být i od kružnice k vzdáleny 1 cm. Množinou bodů vzdálených 1 cm od kružnice k je dvojice soustředných kružnic $m(S, 2\,\text{cm})$ a $n(S, 4\,\text{cm})$.

(3) Středy hledaných kružnic h jsou tedy body průniku obou množin bodů.

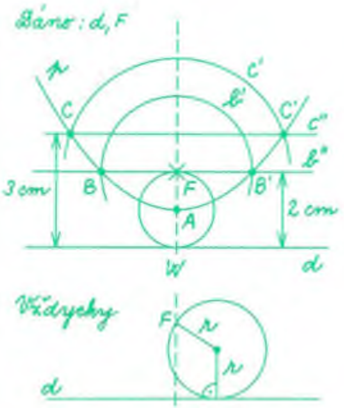
(3)



Konstrukci a zkoušku proveďte sami. Počet řešení: osm kružnic; čtyři uvnitř kružnice k, další čtyři vně kružnice k.

4 Je dána přímka d a bod F, $|F, d| = 2\,\text{cm}$. Sestrojte kružnice $a(A, 1\,\text{cm})$, $b(B, 2\,\text{cm})$, $c(C, 3\,\text{cm})$ a $d(D, 4\,\text{cm})$, které se dotýkají přímky d a procházejí bodem F.

Petr uvažoval při rozboru takto:



1) kružnice a(A, 1 cm)
... její průměr je FW
2) kružnice b(B, 2 cm) - střed
na kružnici b'(F, 2 cm)
a na přímce b''∥d
3) kružnice c(C, 3 cm) - střed
na kružnici c'(F, 3 cm)
a na přímce c''∥d
4) ... stejně

Proveďte konstrukci podle Petrova rozboru. Odhadněte, jaké vlastnosti má křivka p, na níž leží středy kružnic $x(X, r)$, které se dotýkají přímky d a procházejí bodem F?

Množina bodů X z této úlohy se nazývá parabola. Získáte ji také např. jako graf funkce $y = x^2$ a setkáte se s ní ve fyzice. Má mnoho zajímavých vlastností, kterých se využívá ve stavebnictví i jinde. Na střední škole se o ní i o dalších kuželosečkách dozvíte více.

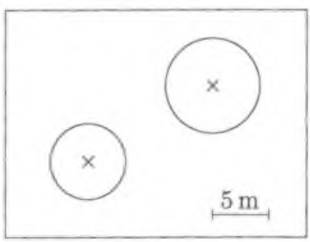
CVIČENÍ

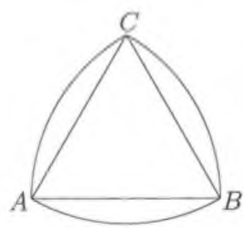
1. Sestrojte všechny kružnice, které procházejí body A, B ($|AB| = 3\,\text{cm}$) a mají poloměr r. Proveďte diskusi počtu řešení.

2. Jsou dány tři shodné dotýkající se kružnice k, l, m, jejichž středy tvoří vrcholy rovnostranného trojúhelníku KLM. Sestrojte kružnici $h(H, r)$, která se těchto tří kružnic dotýká. Vypočtěte její poloměr, je-li $|LK| = 4\,\text{cm}$. Kolik je takových kružnic?

3. Jeden ze starých orientálních znaků má tuto podobu. Popište jeho konstrukci.

4. Na zahradě jsou dva kruhové květinové záhony (viz obr.). Vyznačte na náčrtku, kam je možné umístit kolík, k němuž hospodář přiváže kozu šňůrou dlouhou 5 m, aniž by koza poničila květiny na záhonech.





5. Sestrojte jeden z výtvarných prvků gotického okna. Narýsujte rovnostranný trojúhelník ABC a opište oblouky $a(A, |AB|)$, $b(B, |AB|)$ a $c(C, |AB|)$ podle obrázku. Získáte tak „křivočarý trojúhelník“ hojně využívaný staviteli doby gotické v žebroví oken i v plastické výzdobě zdí. Doplňte tento „trojúhelník“ ještě kružnicí, která je mu „vepsána“, tj. která se dotýká všech jeho oblouků. (Sestrojení kružnice, která se dotýká tří daných kružnic, je úloha většinou velmi obtížná. Jen při speciální volbě zadaných kružnic nám stačí znalosti ze základní školy.) Najdete na stavebních památkách podobné výtvarné prvky tvořené oblouky vhodně zvolených kružnic?

6 STATISTIKA

S pojmem statistika jste se jistě již mnohokrát setkali. Např. v jedné písni se zpívá: „Statistika nuda je, má však cenné údaje.“ Budeme se snažit, aby té nudy bylo co nejméně a pokusíme se objasnit metody a užitečnost statistiky na příkladech vycházejících ze situací, které jsou vám blízké a známé. Statistika má velký a stále rostoucí význam zejména v lékařském, biologickém a zemědělském pokusnictví, v průzkumech veřejného mínění, trhu a dopravy, při kontrole jakékoliv hromadné výroby, ve fyzice, astronomii, meteorologii, sociologii a postupně proniká do dalších oborů.
Doporučujeme vám, abyste si aktuální informace z oblastí, které vás nejvíce zajímají, sami vyhledali a pak je řešili podobně, jako je tomu v příkladech této kapitoly. Provádějte statistická šetření ve třídě, mezi svými kamarády, v místě bydliště apod. Předtím je však zapotřebí, abychom si objasnili základní pojmy a metody práce ve statistice.

6.1 Statistické šetření, statistická jednotka, statistický soubor

Statistika se zabývá získáváním, zpracováním a vyhodnocováním hromadných údajů o nejrůznějších jevech a veličinách.

Nejprve tedy musíme získat příslušné statistické údaje, které pak budeme dále zpracovávat a vyhodnocovat. Získávání statistických údajů se nazývá **statistické šetření**. Statistické údaje můžeme získat různými způsoby, např. pozorováním, měřením, vážením, dotazováním. Každé statistické šetření je třeba přesně vymezit:

- věcně,
- prostorově,
- časově.

Věcné (obsahové) vymezení je určení shodných znaků, které musí mít všechny sledované **statistické jednotky** (osoby, zvířata, rostliny, věci, instituce, události apod.).
Prostorovým vymezením rozumíme jednoznačné vymezení prostoru (nejčastěji území), ve kterém se má statistické zjišťování provádět.
Časové vymezení znamená stanovení časového intervalu, během něhož probíhá statistické šetření.

Věcné, časové a prostorové vymezení musí jednoznačně určit soubor všech statistických jednotek, u nichž máme provést statistické šetření. Tento soubor se nazývá **statistický soubor**, počet jeho prvků (statistických jednotek) je **rozsah souboru**.

1 Statistický soubor mohou tvořit např.:
- žáci vaší třídy, kteří jsou právě teď přítomni na výuce,
- všechna mláďata narozená v liberecké zoologické zahradě v březnu 1999,
- ceny 1 kg melounů ve vybraných obchodech v Brně v daný den,
- letadla, která v daný den v době od 12:00 h do 16:00 h přistanou na Ruzyňském letišti v Praze,
- kurzy německé marky ve vybraných bankách a směnárnách v určitém dni,
- výsledky opakovaného laboratorního měření.

Při statistickém šetření sledujeme u statistických jednotek daného souboru tzv. **statistické znaky**.

2 U letadel, která v daný den v době od 12:00 h do 16:00 h přistanou na Ruzyňském letišti v Praze, můžeme sledovat např. tyto statistické znaky:
- typ letadla,
- z kterého letiště letadlo přiletělo,
- společnost, které letadlo patří,
- zpoždění (v minutách) proti plánovanému příletu,
- počet cestujících v letadle.

Jestliže statistický znak nabývá:
- číselných hodnot, hovoříme o **kvantitativním znaku**,
- hodnot, které jsou vyjádřeny slovně, mluvíme o **kvalitativním znaku**.

3 Ze statistických znaků uvedených v příkladu 2 patří mezi kvantitativní znaky *zpoždění (v minutách) proti plánovanému příletu* a *počet cestujících v letadle*. Znaky *typ letadla*, *z kterého letiště letadlo přiletělo* a *společnost, které letadlo patří* jsou kvalitativní znaky.

4 Statistickým šetřením bylo zjištěno, že z 29 žáků třídy 8. A nemá žádného sourozence 5 žáků, jednoho sourozence má 12 žáků, dva sourozence 9 žáků, tři sourozence 2 žáci a čtyři sourozence 1 žák.

Statistický soubor v tomto případě tvoří všichni žáci třídy 8. A. Statistickým znakem je počet sourozenců. Jedná se o kvantitativní znak, který nabývá hodnot 0, 1, 2, 3, 4. Číslo, které určuje, kolikrát se hodnota znaku v souboru vyskytuje, se nazývá četnost této hodnoty. Četnosti hodnot znaku můžeme přehledně zaznamenat do tabulky:

Hodnota znaku (počet sourozenců)	0	1	2	3	4
Četnost hodnoty znaku (počet žáků 8. A)	5	12	9	2	1

Rozsah souboru je počet žáků třídy 8. A, tj. 29. Součet četností hodnot znaku v souboru je

$$5 + 12 + 9 + 2 + 1 = 29.$$

Vidíme, že sečteme-li četnosti všech hodnot znaku v souboru, dostaneme rozsah souboru.
V průběhu statistického šetření je třeba postupně zaznamenávat četnosti hodnot znaku. K tomu zpravidla používáme tzv. „čárkovací metodu“. Jestliže například při statistickém šetření v příkladu 4 zjistíme, že dotazovaný žák má jednoho sourozence (hodnota znaku je 1), uděláme v políčku, v němž zaznamenáváme četnost znaku 1, čárku. Po skončení statistického šetření bude v tomto případě v uvedeném políčku celkem 12 čárek. Podívejme se, jak toto políčko „vyčárkovali“ tři z našich přátel.

<table>
<tr><td>Petr:</td><td>Lenka:</td><td>Honza:</td></tr>
<tr><td>||||||||||||</td><td>||||| ||||| ||</td><td>~~||||~~ ~~||||~~ ||</td></tr>
</table>

Vidíme, že Petrův záznam je pro větší počet čárek (pro vyšší četnosti) nepřehledný. Lenka zapisovala čárky tak, že vždy po páté čárce udělala větší mezeru. Snadno se pak zjistí, že jsou zde dvě skupiny po pěti čárkách a ještě další dvě čárky, tj. celkem 12 čárek. Honza Lenčin způsob zápisu „vylepšil“ tím, že každou pátou čárkou přeškrtnul předcházející čtyři čárky. Tabulka četností pak podle Honzy vypadá takto:

<table>
<tr><th>Hodnota znaku (počet sourozenců)</th><th>0</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th></tr>
<tr><td>Četnost hodnoty znaku (počet žáků 8. A)</td><td>~~||||~~</td><td>~~||||~~ ~~||||~~ ||</td><td>~~||||~~ ||||</td><td>||</td><td>|</td></tr>
</table>

CVIČENÍ

1. Uveďte aspoň 5 příkladů různých statistických souborů.
2. Uveďte aspoň 5 statistických jednotek a u každé aspoň 4 možné statistické znaky.
3. Roztřiďte uvedené statistické znaky na kvantitativní a kvalitativní:
   - hmotnost,
   - výška,
   - barva očí,
   - pohlaví,
   - místo narození.
4. Účastníci konkurzního řízení měli v přihlášce mimo jiné uvést tyto údaje: věk, vzdělání, rodinný stav, národnost, délka praxe v oboru, znalost cizích jazyků, znalost práce na počítači, zdravotní stav. Které z těchto údajů patří mezi kvantitativní znaky?
5. Předpokládejme, že máte podat inzerát, v němž nabízíte prodej bytu. Jaké statistické znaky by v něm měly být uvedeny?
6. Předpokládejme, že se budeme zabývat statistickým souborem dopravních nehod na silnicích v ČR v 1. čtvrtletí roku 1999. Zapište statistické znaky, které mohou být zjišťovány u každé nehody. Uveďte aspoň tři kvalitativní znaky a aspoň tři kvantitativní znaky.
7. Pacientům v nemocnici se dvakrát denně měří teplota. U pacienta, který strávil v nemocnici 12 dní, byly naměřeny tyto teploty ve °C:
   36,6; 36,7; 36,6; 37,5; 37,2; 37,3; 37,0; 37,1; 36,9; 37,0; 36,7; 36,8; 36,6; 36,7; 36,6; 36,8; 36,5; 36,8; 36,5; 36,7; 36,6; 36,7; 36,5; 35,7.
   Sestavte tabulku četností teplot pacienta.

8. U všech svých spolužáků zjistěte,
   a) v kterém měsíci se narodili,
   b) který druh sportu mají nejraději,
   c) kterou rozhlasovou stanici poslouchají nejčastěji,
   d) kolik zemí světa již navštívili.

   Sestavte tabulky četností jednotlivých statistických znaků.
9. Možná jste si všimli, že se v textu nevyskytují všechna písmena stejně často. Na této skutečnosti je založeno dešifrování zašifrovaného textu nebo rozluštění textů napsaných neznámým písmem v dávno mrtvých jazycích. Vysoké četnosti některých písmen v textu využívají i soutěžící v televizním *Kolotoči*. Vyberte nějaký český

text v rozsahu např. jedné strany, sestavte tabulku četností výskytu jednotlivých písmen a všimněte si, která písmena mají vysokou četnost.

10. Vytvořte nebo vyhledejte statistický soubor, proveďte statistické šetření zvoleného znaku a sestavte tabulku četností hodnot znaku.

6.2 Aritmetický průměr, modus, medián

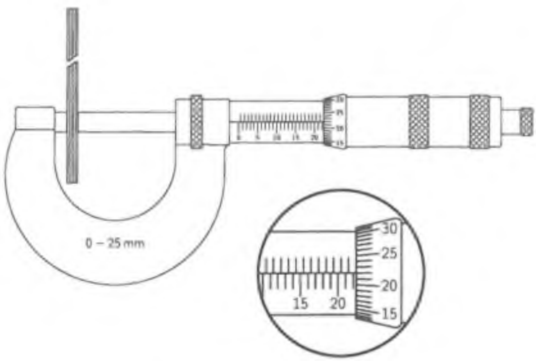
Jedním z nejznámějších statistických pojmů je **aritmetický průměr**. Pomocí něho můžeme vypočítat průměrný prospěch žáka, průměrnou denní nebo měsíční teplotu, průměrnou výšku žáků ve třídě, průměrný počet obyvatel připadajících na jednoho lékaře, průměrnou délku života občana České republiky, průměrnou hodnotu výsledku opakovaného fyzikálního měření, průměrnou mzdu zaměstnance v určitém odvětví apod. Již víme, že aritmetický průměr daných čísel vypočteme tak, že je sečteme a dělíme jejich počtem. Tedy aritmetický průměr $\overline{x}$ z n hodnot $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kvantitativního znaku x je

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

1 Žáci měli ve fyzice změřit mikrometrem tloušťku jednoho listu papíru s přesností na setiny milimetru. Honza přišel na nápad, že změří tloušťku 25 listů papíru a z toho vypočte tloušťku jednoho papíru. Toto jsou výsledky jeho měření v milimetrech:

3,51; 3,50; 3,49; 3,54; 3,51; 3,50; 3,47; 3,50; 3,48

Z naměřených hodnot vypočítejte průměrnou tloušťku 25 listů papíru a pak průměrnou tloušťku jednoho papíru.



1. způsob řešení

Průměrná tloušťka 25 listů papíru je:

$$\overline{x} = \frac{3{,}51 + 3{,}50 + 3{,}49 + 3{,}54 + 3{,}51 + 3{,}50 + 3{,}47 + 3{,}50 + 3{,}48}{9}\,\mathrm{mm} =$$

$$= \frac{31{,}5}{9}\,\mathrm{mm} = 3{,}5\,\mathrm{mm}$$

Průměrná tloušťka 1 listu papíru je $d = (3{,}5 : 25)\,\mathrm{mm} = 0{,}14\,\mathrm{mm}$.

2. způsob řešení

Z výsledků měření tloušťky 25 listů papíru nejprve sestavíme tabulku rozdělení četností:

Tloušťka 25 listů (v mm)	3,47	3,48	3,49	3,50	3,51	3,54
Četnost	1	1	1	3	2	1

S využitím četností jednotlivých hodnot znaku lze průměrnou tloušťku 25 listů papíru vypočítat takto:

$$\overline{x} = \frac{1 \cdot 3{,}47 + 1 \cdot 3{,}48 + 1 \cdot 3{,}49 + 3 \cdot 3{,}50 + 2 \cdot 3{,}51 + 1 \cdot 3{,}54}{1 + 1 + 1 + 3 + 2 + 1}\,\mathrm{mm} =$$

$$= \frac{31{,}5}{9}\,\mathrm{mm} = 3{,}5\,\mathrm{mm}$$

Odtud podobně jako v prvním způsobu řešení vypočítáme d:

$$d = (3{,}5 : 25)\,\mathrm{mm} = 0{,}14\,\mathrm{mm}$$

V případech, v nichž se většina znaků vyskytuje vícekrát, bývá výhodnější druhý způsob řešení.

Hodnota x statistického znaku s největší četností se nazývá **modus znaku** x a značí se $\mathrm{Mod}(x)$. V příkladu 1 je modus 3,50 a shoduje se s aritmetickým průměrem. To však obecně neplatí.

2 Žáci v hodině tělesné výchovy trénovali proměňování trestných hodů v košíkové. Každý z 19 žáků házel šestkrát. Výsledky jsou zaznamenány v tabulce:

Počet úspěšných hodů	0	1	2	3	4	5	6
Počet žáků	11	2	3	2	0	1	0

Z uvedených údajů vypočítejte aritmetický průměr a modus.

Řešení

Aritmetický průměr:

$$\overline{x} = \frac{11 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 5 + 0 \cdot 6}{11 + 2 + 3 + 2 + 0 + 1 + 2} =$$

$$= \frac{2 + 6 + 6 + 5}{19} = \frac{19}{19} = 1$$

Největší počet žáků nemá žádný úspěšný hod. To znamená, že modus je 0, tedy $\mathrm{Mod}(x) = 0$.

Můžeme konstatovat, že průměrný počet úspěšných hodů připadajících na jednoho žáka se rovná 1. Situaci však lépe vystihuje vyjádření, že největší počet žáků, v tomto případě více než polovina, nemá žádný úspěšný hod.

Jaký praktický význam má modus? Sledujeme-li např. počet automobilů, které projedou daným místem v různých hodinách dne, představuje modus hodinu nejživějšího provozu. Modus v tomto případě signalizuje, kdy je třeba věnovat zvýšenou pozornost řízení dopravy, kdy je nebezpečí zvýšeného počtu dopravních nehod atd. Jistě sami odvodíte, jaký význam má při statistickém šetření zjištění, v kterou hodinu (v kterém časovém rozmezí) jezdí metrem nejvíce cestujících, jaká velikost boty se nejčastěji vyskytuje u mužů a jaká u žen, o jaké hmotnostní balení pracího prášku je největší zájem apod.

Co když v souboru existují dvě nebo více hodnot s největší četností? Budeme-li u sta dospělých mužů zjišťovat, jakou mají velikost košile, můžeme například dojít ke zjištění, že velikost 39 (tzn., že obvod krku je 39 cm) má 20 mužů, stejný počet má velikost 40 a jiné velikosti se vyskytují méně často. Jistě se shodneme na tom, že se nejčastěji vyskytuje velikost 39 a 40, tedy $\mathrm{Mod}(x) = 39$ a 40.
Existují-li v souboru dvě nebo více hodnot s největší četností, pak modus tvoří všechny tyto hodnoty.

Statistický soubor rovněž charakterizuje prostřední hodnota znaku. Jsou-li hodnoty $x_1, x_2, \ldots, x_n$ znaku statistické jednotky uspořádány podle velikosti, pak prostřední hodnota se nazývá **medián** a značí se $\mathrm{Med}(x)$.

3 V tabulce je uveden přehled měsíčních příjmů patnácti zaměstnanců jedné akciové společnosti:

Měsíční příjem (v Kč)	10 000	12 000	14 000	16 000	80 000
Počet zaměstnanců	1	6	5	2	1

Z uvedených údajů vypočítejte průměrný měsíční příjem, medián a modus.

Řešení

Aritmetický průměr:

$$\overline{x} = \frac{1 \cdot 10\,000 + 6 \cdot 12\,000 + 5 \cdot 14\,000 + 2 \cdot 16\,000 + 1 \cdot 80\,000}{1 + 6 + 5 + 2 + 1}\,\text{Kč} =$$

$$= \frac{264\,000}{15}\,\text{Kč} = 17\,600\,\text{Kč}$$

Průměrný měsíční příjem jednoho zaměstnance je 17 600 Kč.

Seřaďme zaměstnance vzestupně podle výše příjmu.

Na 1. místě je zaměstnanec s příjmem 10 000 Kč,
na 2. až 7. místě jsou zaměstnanci s příjmem 12 000 Kč,
na 8. až 12. místě jsou zaměstnanci s příjmem 14 000 Kč,
na 13. a 14. místě jsou zaměstnanci s příjmem 16 000 Kč
a na 15. místě je zaměstnanec s příjmem 80 000 Kč.

Právě uprostřed souboru, tj. na 8. místě, je zaměstnanec s měsíčním příjmem 14 000 Kč. Zjistili jsme, že medián $\text{Med}(x) = 14\,000$ Kč.
Z tabulky je zřejmé, že modus $\text{Mod}(x) = 12\,000$ Kč, tedy největší počet zaměstnanců má měsíční příjem 12 000 Kč.

Porovnejme, jaký význam v tomto souboru mají aritmetický průměr, medián a modus. Průměrný měsíční příjem je 17 600 Kč. Avšak všichni zaměstnanci, s výjimkou jediného, mají nižší příjem. Vhodnější charakteristikou souboru je v tomto případě medián, tj. příjem zaměstnance, který je v žebříčku platů právě uprostřed, nebo modus, tj. měsíční příjem, který má největší počet zaměstnanců.

Má-li soubor lichý počet statistických jednotek, určíme snadno prostřední prvek souboru. Např. pro 15 prvků jsme dostali $(1 + 15) : 2 = 8$, tedy prostřední prvek je osmý.
Jak ale budeme postupovat, je-li rozsahem souboru sudé číslo? Například pro 16 prvků uvedeným postupem dostaneme $(1 + 16) : 2 = 8{,}5$. Takový prvek však neexistuje. V tomto případě najdeme k číslu 8,5 dvě

nejbližší přirozená čísla. Jsou to čísla 8 a 9. Medián pak vypočteme jako aritmetický průměr osmého a devátého prvku.

4 Předpokládejte, že ze společnosti z příkladu 3 odešel 1 zaměstnanec s příjmem 16 000 Kč. Vypočítejte, jaký je pak aritmetický průměr, medián a modus tohoto souboru.

Řešení

Aritmetický průměr:

$$\bar{x} = \frac{1 \cdot 10\,000 + 6 \cdot 12\,000 + 5 \cdot 14\,000 + 1 \cdot 16\,000 + 1 \cdot 80\,000}{1 + 6 + 5 + 1 + 1}\ \text{Kč} =$$

$$= \frac{248\,000}{14}\ \text{Kč} \doteq 17\,714\ \text{Kč}$$

Seřadíme-li nyní zaměstnance vzestupně podle výše příjmu, je proti předcházejícímu příkladu změna jen v tom, že na 13. místě je zaměstnanec s příjmem 16 000 Kč a na 14. místě zaměstnanec s příjmem 80 000 Kč. Protože $(1 + 14) : 2 = 7{,}5$, vypočteme medián jako aritmetický průměr příjmů těch dvou zaměstnanců, kteří jsou v uspořádaném souboru na 7. a 8. místě. Zaměstnanec na 7. místě má příjem 12 000 Kč, na 8. místě 14 000 Kč, tedy

$$\text{Med}(x) = \frac{12\,000 + 14\,000}{2}\ \text{Kč} = 13\,000\ \text{Kč}.$$

Modus se nezměnil, $\text{Mod}(x) = 12\,000$ Kč.
Průměrný měsíční příjem je přibližně 17 714 Kč, medián je 13 000 Kč a modus je 12 000 Kč. Tento soubor opět výstižněji charakterizuje medián nebo modus.

Medián charakterizuje soubor výstižněji než aritmetický průměr zejména v těch případech, kde hodnoty znaku u některých statistických jednotek značně vybočují z řady ostatních hodnot.

Představme si, že měříme výšku postavy u většího počtu osob s přesností na centimetry. V takovém případě je účelné sdružit naměřené výšky (hodnoty kvantitativního znaku) do vhodných intervalů, např. po 5 cm. Zjistíme-li například, že nejmenší osoba má výšku 158 cm, dvě osoby měří 160 cm, jedna osoba 161 cm a jedna osoba 162 cm, pak výšky všech pěti osob sdružíme do intervalu 158 cm až 162 cm. Podobně postupuje-

me v dalších intervalech (163 cm až 167 cm, 168 cm až 172 cm, atd.). V tabulce pak uvedeme příslušné intervaly a počty osob, jejichž výšky jsou z uvedeného intervalu, čili četnosti hodnoty znaku.
Tímto způsobem je v následující tabulce zaznamenán výsledek měření výšky postavy u 100 branců; hodnota znaku *výška postavy v cm* je označena písmenem x a četnost hodnoty znaku písmenem n:

x	158–162	163–167	168–172	173–177	178–182	183–187
n	5	12	25	23	21	14

Sdružíme-li hodnoty znaků do intervalů, pak všem prvkům z daného intervalu přiřadíme tutéž hodnotu, která se rovná středu intervalu. Například střed prvního intervalu z uvedené tabulky je $\frac{158+162}{2}\,\text{cm} = 160\,\text{cm}$. Tabulku tedy můžeme zapsat takto:

x	160	165	170	175	180	185
n	5	12	25	23	21	14

Vypočítejme aritmetický průměr, modus a medián.

Aritmetický průměr:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{5\cdot 160 + 12\cdot 165 + 25\cdot 170 + 23\cdot 175 + 21\cdot 180 + 14\cdot 185}{5+12+25+23+21+14}\,\text{cm} = \\ &= \frac{800 + 1\,980 + 4\,250 + 4\,025 + 3\,780 + 2\,590}{100}\,\text{cm} \\ &= \frac{17\,425}{100}\,\text{cm} = 174{,}25\,\text{cm}\end{aligned}$$

Hodnota s největší četností je 170 cm, tedy $\text{Mod}(x) = 170\,\text{cm}$.

Seřaďme brance vzestupně podle výšky postavy. Výšku menší než 175 cm má celkem $(5+12+25)$ branců, tj. 42 branců. Na 43. až 65. místě jsou osoby s výškou 175 cm. Protože rozsah souboru je 100, vypočteme medián jako aritmetický průměr výšek branců, kteří jsou na 50. a 51. místě.

$$\text{Med}(x) = \frac{175+175}{2}\,\text{cm} = 175\,\text{cm}$$

Zjistili jsme, že aritmetický průměr je 174 cm, modus je 170 cm a medián je 175 cm. Tedy průměrná výška brance je 174 cm, nejčastěji se vyskytující výška je 170 cm a prostřední hodnota výšky je 175 cm.

CVIČENÍ

1. V meteorologické stanici naměřili v jednotlivých dnech měsíce července tato množství srážek (zaokrouhleno na mm):
0; 0; 1; 0; 2; 1; 0; 6; 5; 4; 3; 10; 9; 5; 0; 0;
7; 1; 1; 4; 5; 0; 0; 1; 2; 4; 5; 6; 6; 5; 0

Sestavte z těchto údajů tabulku rozdělení četností, vypočítejte aritmetický průměr, modus, medián a objasněte jejich význam v daném souboru.

2. Lenka házela šesti kostkami a sledovala, kolik při každém hodu padne šestek. Házela celkem 20krát a výsledky zaznamenala do tabulky:

Počet šestek	0	1	2	3	4	5	6
Počet hodů	2	9	4	1	1	2	1

Vypočítejte z těchto údajů aritmetický průměr, modus a medián.

3. Viděli jste film Starci na chmelu? V té době se česal chmel většinou ručně. Objemovou jednotkou načesaného množství chmelových šišek je věrtel (1 věrtel je přibližně 23,25 litru). Rozdělení četností počtu načesaných věrtelů studenty jedné třídy je v následující tabulce:

Počet věrtelů	7	8	9	10	11	12	13	14	16	18
Počet studentů	1	2	5	4	4	3	2	1	1	1

Vypočítejte z těchto údajů aritmetický průměr, modus a medián.

4. Zjistěte u všech spolužáků třídy, jakou velikost bot mají chlapci a jakou dívky. Vypočítejte průměrnou velikost bot u chlapců a u dívek. Zaokrouhlete ji na nejbližší číslo bot, které existuje. Které číslo bot má nejvíce chlapců a které nejvíce dívek?

5. Zjistěte v libovolném souboru četnosti hodnot kvantitativního znaku, který vás zajímá. Sestavte tabulku četností, vypočítejte aritmetický průměr, modus, medián a objasněte jejich význam v souboru.
6. Hoďte 30krát dvěma hracími kostkami a zaznamenejte součet ok. Sestavte tabulku rozdělení četností a vypočítejte aritmetický průměr, modus a medián. Porovnejte své výsledky s výsledky, ke kterým dospěli spolužáci.
7. Ve třech stejně početných skupinách dívek se zjišťovala jejich výška. Naměřené výšky byly sdruženy do intervalů po 5 cm a jsou uvedeny v následující tabulce:

Výška (v cm)	140	145	150	155	160	165	170	175
Četnost 1. skupina	1	2	3	1	0	3	1	4
Četnost 2. skupina	1	2	4	2	3	1	2	0
Četnost 3. skupina	1	0	1	3	5	2	2	1

Vypočítejte pro každou skupinu aritmetický průměr, medián a modus.

6.3 Grafy, diagramy

Výsledky statistického šetření je třeba uspořádat a vhodně zpřehlednit. Zatím jsme se seznámili s uspořádáním výsledků statistického šetření do tabulek, v nichž bylo uvedeno rozdělení četností hodnoty statistického znaku. Kromě tabulek se ve statistice často používají **grafy**. Jejich předností je zejména názornost a přehlednost, nevýhodou je menší přesnost. Grafy a tabulky se zpravidla vzájemně doplňují.
Při grafickém znázorňování se nejčastěji používají:

- **bodové diagramy**,
- **spojnicové diagramy**,
- **sloupkové diagramy**,
- **kruhové diagramy**.

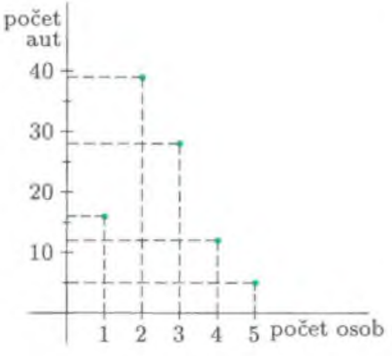
Bodový diagram je znázornění statistických údajů v soustavě souřadnic pomocí bodů.
Spojnicový diagram vzniká z bodového diagramu spojením jednotlivých bodů úsečkami.

1 U statistického souboru osobních aut, která projedou v danou hodinu sledovaným místem, zjišťovala Lenka počet cestujících v autě. Výsledek šetření je zaznamenán v tabulce:

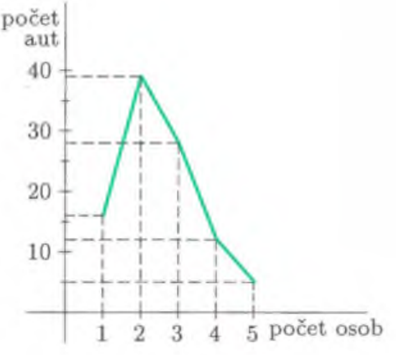
Počet osob	1	2	3	4	5
Počet aut	16	39	28	12	5

Znázorněte zjištěné údaje bodovým a spojnicovým diagramem.

Řešení



Bodový diagram

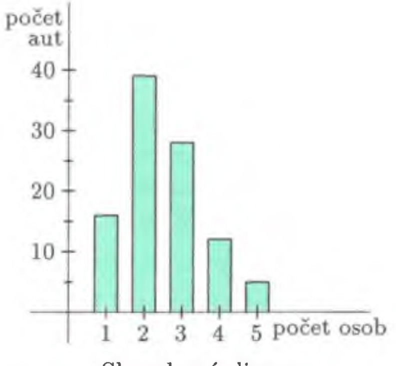


Spojnicový diagram

Jestliže znázorníme rozdělení hodnot statistického znaku pomocí sloupků, které mají stejnou šířku a výška je přímo úměrná hodnotám znaku, získáme **sloupkový diagram**.

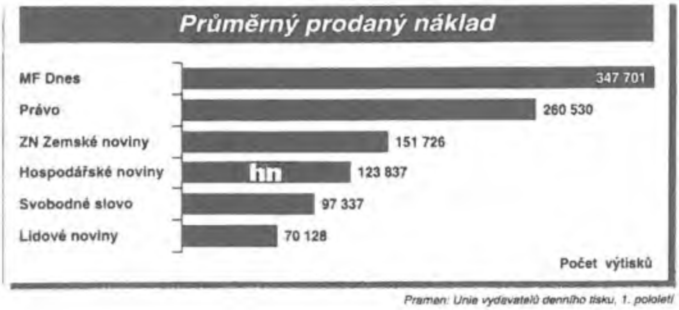
2 Znázorněte statistické údaje z příkladu 1 sloupkovým diagramem.

Řešení

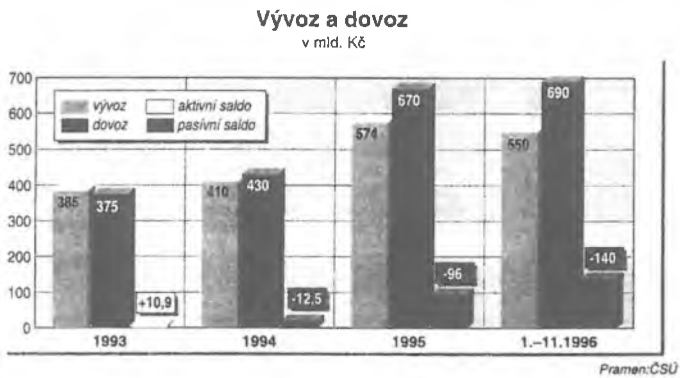


Sloupkový diagram

Obdélníky nemusí být vždy ve svislé poloze. Ukázka takového diagramu, který znázorňuje průměrný prodaný náklad některých deníků v 1. pololetí 1996, je na obrázku.



Ve sloupkových diagramech bývají někdy místo obdélníků znázorněny hranoly nebo válce. V následujícím diagramu jsou pomocí hranolů znázorněny současně dva statistické znaky. Je to vývoz a dovoz (v miliardách Kč) v České republice v letech 1993 až 1996.



Často se používají diagramy, v nichž jsou statistické údaje uvedeny v procentech. V příkladu 1 je rozsah souboru 100, proto se četnost každého znaku shoduje s jeho procentuálním vyjádřením. Ve sloupkovém diagramu stačí tedy změnit popis svislé osy tak, že místo počtu aut uvedeme počet procent.

Rozdělení četností znaku se znázorňuje i **kruhovým diagramem**, kde různým hodnotám znaku odpovídají kruhové výseče, jejichž obsahy jsou úměrné četnostem. Pro velikost středového úhlu kruhové výseče platí:

Poměr velikosti středového úhlu této výseče k velikosti plného úhlu je stejný jako poměr četnosti hodnoty uvažovaného znaku k rozsahu souboru.

3 Znázorněte statistické údaje zadané v příkladu 1 kruhovým diagramem.

Řešení

Znak *počet cestujících v autě* nabývá pěti různých hodnot. Kruh tedy rozdělíme na pět výsečí. Znak nabývá hodnoty 1 v šestnácti případech. Rozsah souboru je 100. Pro velikost α_1 středového úhlu kruhové výseče odpovídajícího hodnotě 1 tedy platí

$$\frac{\alpha_1}{360°} = \frac{16}{100}.$$

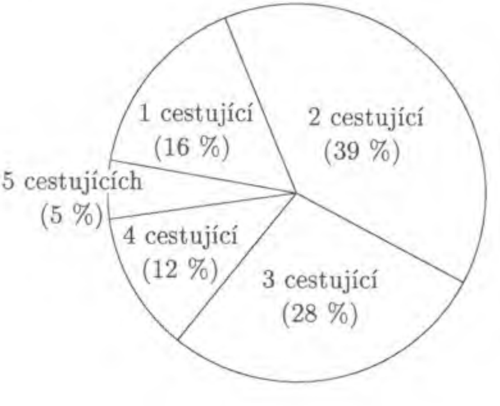
Odtud

$$\alpha_1 = \frac{16}{100} \cdot 360° = 57{,}6° = 57°36'.$$

Podobně vypočítáme velikosti středových úhlů ostatních výsečí:

$$\alpha_2 = \frac{39}{100} \cdot 360° = 140{,}4° = 140°24'$$
$$\alpha_3 = \frac{28}{100} \cdot 360° = 100{,}8° = 100°48'$$
$$\alpha_4 = \frac{12}{100} \cdot 360° = 43{,}2° = 43°12'$$
$$\alpha_5 = \frac{5}{100} \cdot 360° = 18°$$

Můžeme ověřit, že součet velikostí všech středových úhlů je 360°. Nyní již můžeme pomocí úhloměru kruhový diagram sestrojit:



CVIČENÍ

1. Sestrojte bodový a spojnicový diagram znázorňující četnosti hodnoty znaku „kolik padne šestek“ podle tabulky ze cvičení 2 na str. 107.

2. Znázorněte sloupkovým diagramem emise SO_2 do ovzduší podle údajů z následující tabulky. Emise jsou uvedeny v tisících tun.

Rok	Emise tuhé	SO_2	NO_x	CO	C_xH_x
1990	631	1 876	742	891	225
1992	501	1 538	698	1 045	205
1995	201	1 090	390	800	160

3. V parlamentních volbách v České republice konaných ve dnech 19. a 20. června 1998 získala ČSSD 32,31 %, ODS 27,74 %, KSČM 11,03 %, KDU-ČSL 9,00 %, US 8,60 %, SPR-RSČ 3,90 % a DŽJ 3,06 %. Znázorněte sloupkovým diagramem výsledky těchto voleb.

4. Mnoho plátců se snaží vyhnout daňovým povinnostem. Neplatit daně nebo neplatit je ve správné výši se však nevyplácí. Údaje o daňových kontrolách v letech 1994 až 1997 uvádí následující tabulka:

Rok	1994	1995	1996	1997
Počet daňových kontrol	203 940	198 084	207 177	212 403
Počet subjektů daně (v tisících)	5 716	6 138	6 177	6 731
Výše doměrků pokut a penále (v miliónech Kč)	13 179	15 894	16 950	14 797

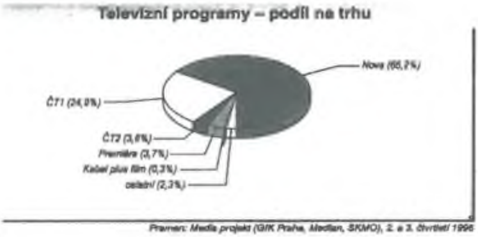
Znázorněte sloupkovým diagramem počet subjektů daně a výše doměrků, pokut a penále v letech 1994 až 1997.

5. V následující tabulce je porovnána účast voličů ve volbách do parlamentu v roce 1996 a 1998 podle jednotlivých regionů. Údaje jsou uvedeny v procentech.

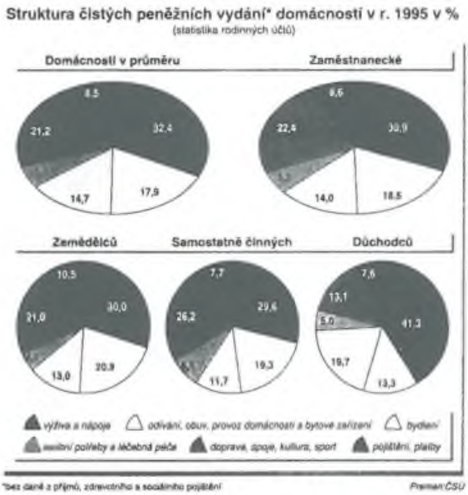
Volby	Praha	Střední Čechy	Jižní Čechy	Západní Čechy	Severní Čechy	Východní Čechy	Jižní Morava	Severní Morava	Celkem
1996	67,7	78,4	77,7	74,6	72,8	80,4	79,3	76,8	76,4
1998	71,6	76,4	75,2	72,2	69,9	77,6	76,1	72,7	74,0

Znázorněte toto porovnání sloupkovým diagramem.

6. Na obrázku je kruhový diagram znázorňující podíl jednotlivých televizních programů na trhu. Vypočítejte velikosti středových úhlů jednotlivých výsečí.



7. Na obrázku je pomocí kruhových diagramů znázorněna struktura čistých peněžních vydání domácností v roce 1995 v procentech. Zjistěte strukturu vašich rodinných účtů a znázorněte ji kruhovým diagramem.



8. Zjistěte v libovolném souboru četnosti hodnot zvoleného statistického znaku. Zjištěné údaje znázorněte vhodným diagramem.

9
$|AB|$
$|BC|$
$|CD|$
$|DA|$
$|AC|$
$|AB|$
$|AD|$
α
$|BC|$
$|DC|$
$|AB|$
α
$|\sphericalangle ABD|$
$|CD|$
$|AC|$
$|AB|$
$|BC|$
$|AC|$
α
γ

7 MATEMATIKA V PRAXI

7.1 Statistika a společnost

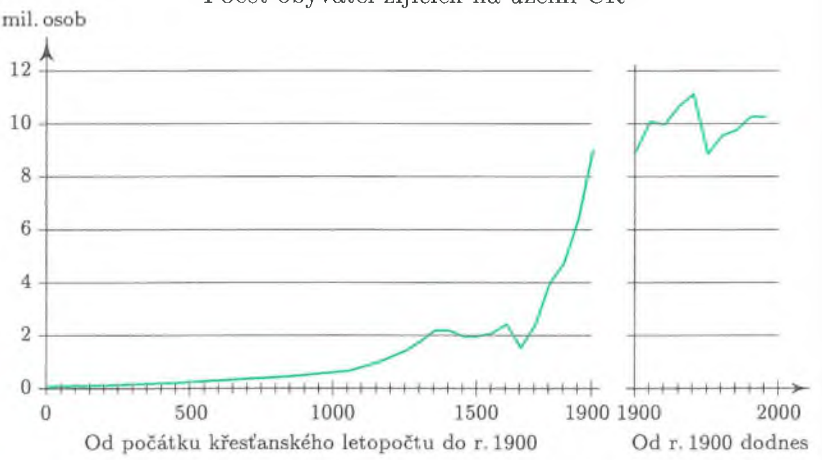
Statistické údaje odborně interpretované mohou významně rozšířit naše znalosti o přírodních jevech, o příčinách chorob, o vývoji počasí, o naší historii atd.

Statistika je velmi důležitá pro vědce, kteří zkoumají vývoj naší společnosti, historii národů, změny způsobu života na jistých územích, vliv civilizací na krajinu atd. Bez zpracování statistických dat by se neobešla věda, která se zabývá vývojem lidských společenství a nazývá se **demografie**.

Jestliže jste v dějepise slyšeli zejména o významných událostech či panovnících, pak si z knih věnovaných demografii můžete utvořit představy o tom, jak vypadal běžný život obyvatelstva, jak velká byla sídliště, čím se lidé živili i jak dlouhý či krátký byl jejich život.

Z následujícího grafu je dobře vidět, jak se postupně zalidňovalo území naší republiky.

Počet obyvatel žijících na území ČR

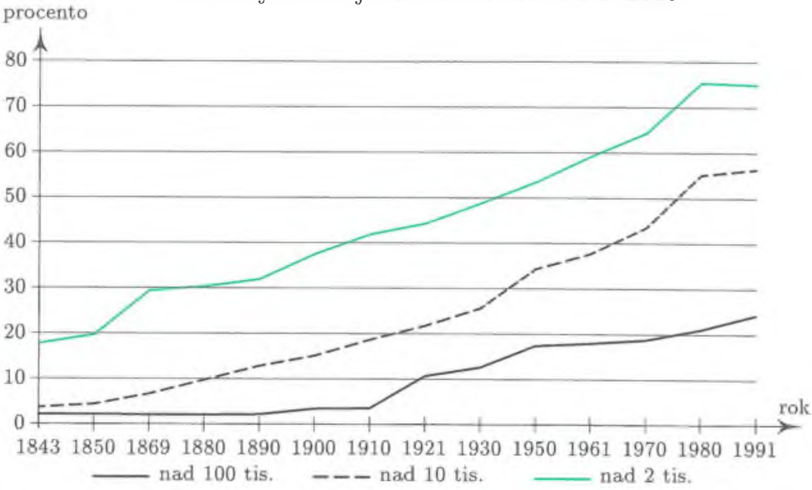


CVIČENÍ

1. Porovnejte křivku růstu populace s historickými událostmi, které mohly ovlivnit její průběh (války, technické objevy atd.).
2. Porovnejte přibližné přírůstky počtu obyvatelstva po každých pěti stech letech (roky 1, 500, 1 000, 1 500).

Ve středověku žila převážná většina obyvatelstva na venkově. S rozvojem řemesel a později průmyslu se lidé stěhovali do měst.

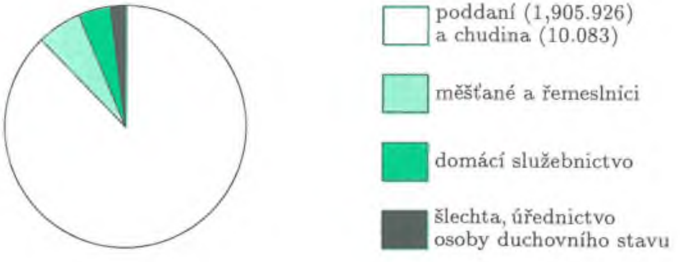
Podíl obyvatel žijících ve městech od r. 1843



CVIČENÍ

3. Sestrojte kruhové diagramy znázorňující podíl obyvatel žijících ve městech pro roky: 1850, 1950 a 1991.
4. Znázorněte sloupkovými diagramy údaje ze cvičení 3. Porovnejte názornost obou typů diagramů s grafem uvedeným v učebnici.

Při sčítání obyvatelstva se zpravidla zjišťuje mnoho údajů. Kromě věku, bydliště, majetku, rodinného stavu atd. se ve sčítacích dotaznících uvádí také vzdělání a povolání. Tyto údaje zajímaly samozřejmě již panovníky habsburské monarchie. Např. sčítání obyvatelstva v roce 1762 bylo doplněno „popisem duší dle povolání“. Na základě dat z tohoto sčítání byl sestaven následující kruhový diagram:

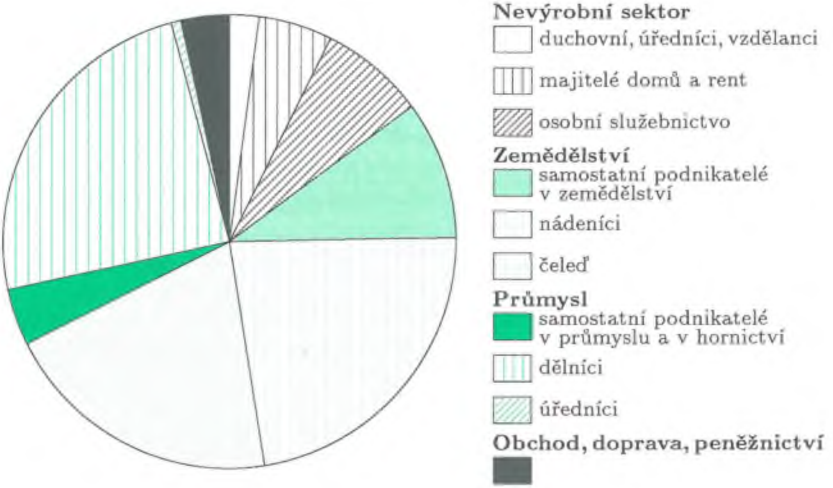


CVIČENÍ

5. Určete přibližné procento poddaných v našich zemích z celkového počtu obyvatel v r. 1762.
6. Lze z tabulek a grafů uvedených v tomto odstavci přibližně určit počet měšťanů a řemeslníků v našich zemích v roce 1762?

S rozvojem techniky a obchodu se velmi změnila skladba obyvatelstva podle povolání.

Povolání obyvatelstva českých zemí v roce 1869



CVIČENÍ

7. Porovnejte procenta
   a) pracujících v zemědělství a pracujících v průmyslu, b) nádeníků a dělníků.
8. V poslední Statistické ročence České republiky vyhledejte údaje o zaměstnání obyvatelstva a porovnejte je s předchozím diagramem.
9. Zjistěte potřebná data a vhodně graficky znázorněte prospěch třídy v matematice a češtině. (Vycházejte např. ze známek na konci minulého školního roku.)
   a) Porovnejte známky chlapců a dívek.
   b) Určete aritmetický průměr a medián.
   c) Porovnejte výsledky v obou předmětech u každého žáka.

Z dlouhodobého sledování a vyhodnocování statistických údajů je možné předvídat i budoucí vývoj. Také touto problematikou se zabývá část matematiky věnovaná pravděpodobnosti. (Patří sem např. pojistná matematika.) Podobně jako meteorologové předpovídají počasí, lze odhadnout i pravděpodobnou průměrnou délku života.

Jednu takovou pravděpodobnostní tabulku uvádíme na závěr našeho výletu do světa statistického vyhodnocování dat. Najdete tam odhad i pro váš ročník?

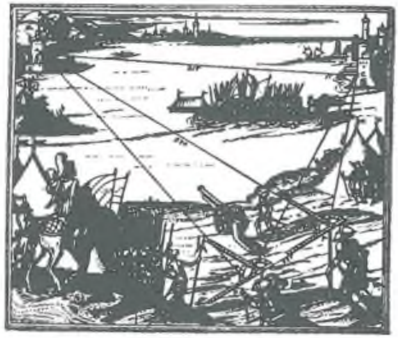
Nezapomeňte, že tabulka uvádí pouze průměry. Je směrodatná pro celek, ale jednotlivci mohou žít ve skutečnosti mnohem déle či naopak zemřít velmi mladí.

Naděje dožití obyvatelstva českých zemí

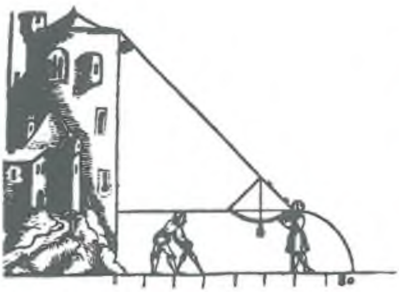
Období, rok	Průměrný počet let dalšího života									
	0	1	5	10	20	40	50	60	70	80
Muži										
1869–70	34,50	46,40	50,00	46,70	38,60	24,90	18,30	12,20	7,2	4,00
1890–91	33,80	46,20	50,20	47,20	39,30	25,60	18,90	12,80	7,7	4,20
1909–12	42,83	53,10	53,19	49,20	40,83	26,03	19,11	12,88	7,76	4,26
1929–32	53,68	60,61	58,42	54,23	45,39	28,94	21,23	14,37	8,71	4,77
1949–51	62,13	65,75	62,46	57,74	48,43	30,58	22,13	14,96	9,28	5,76
1970	66,12	66,65	62,87	58,01	48,46	30,09	21,52	14,09	8,57	4,97
1994	69,53	69,11	65,25	60,33	50,64	31,89	23,27	15,86	9,91	5,64
Ženy										
1869–70	37,80	48,00	51,40	48,10	40,00	25,70	18,50	11,90	7,0	3,80
1890–91	36,50	47,30	51,10	48,20	40,70	27,10	19,90	13,20	7,9	4,40
1909–12	45,90	54,65	54,81	50,91	42,88	28,48	20,96	13,94	8,31	4,62
1929–32	57,52	63,37	61,03	56,85	47,99	31,35	23,13	15,58	9,36	5,14
1949–51	66,97	69,88	66,54	61,76	52,24	33,87	25,03	16,87	10,02	5,72
1970	73,01	73,30	69,49	64,59	54,83	35,57	26,40	17,95	10,73	5,67
1994	76,55	76,05	72,17	67,25	57,40	37,93	28,63	19,90	12,27	6,34
Rozdíl v naději dožití mezi roky 1869–1870 a 1994										
muži	35,0	22,7	15,2	13,6	12,0	7,0	5,0	3,7	2,7	1,6
ženy	38,8	28,0	20,8	19,1	17,4	12,2	10,1	8,0	5,3	2,5
Rozdíl v naději dožití mužů a žen										
1869–70	3,3	1,6	1,4	1,4	1,4	0,8	0,2	−0,3	−0,2	−0,2
1929–32	3,8	2,8	2,6	2,6	2,6	2,4	1,9	1,2	0,7	0,4
1994	7,0	6,9	6,9	6,9	6,8	6,0	5,4	4,0	2,4	0,7

7.2 Vyměřování v přírodě

Již v minulém roce jsme věnovali pozornost základům vyměřování v přírodě. Stačilo nám měření vzdáleností a úhlů, rýsování ve vhodném měřítku a základní poznatky o trojúhelnících.
Prohlédněte si následující rytiny ze 16. století. Jsou to ilustrace z učebnic zeměměřictví ze 16. století. Rozumíte jim?



Vojenští měřiči zjišťují vzdálenost nepřátelské pevnosti na protějším břehu (podle rytiny z r. 1645)



Stanovení výšky věže, k níž je přístup, z rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníku. Výška věže je jednou z odvěsen tohoto trojúhelníku a rovná se druhé odvěsně, kterou měřič vytyčuje na zemi kvadrantem, zaměřeným pod úhlem 45° na vrchol věže, a kterou druhý měřič odměřuje velkým odpichovacím měřítkem.

Rytina z knihy L. Hulsia z r. 1594. Hulsius provádí nivelaci, potřebnou pro návrh vodovodu, obvykle kvadrantem nebo svým univerzálním přístrojem zvaným „planimetra“. Měřič se dívá s vyššího místa směrem k prameni a pak k místu, kam má vést vodovod. Podle velikosti úhlů, které svírá záměrný paprsek kvadrantu s vodorovnou rovinou usuzuje na výškové rozdíly obou míst a možnost zřízení vodovodu. Je zajímavé, že ze změřených úhlů a odpočítaných kroků Hulsius kreslí podélný řez území.

CVIČENÍ

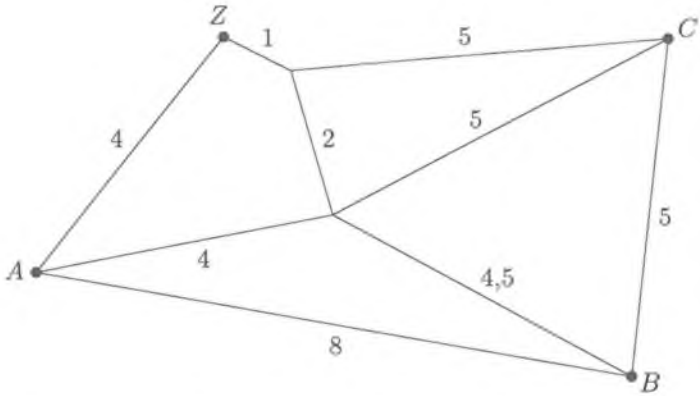
1. Vysvětlete postup měření znázorněný na rytinách.
2. Jaké geometrické poznatky jsou nutné pro zeměměřické práce znázorněné na rytinách?

3. Určete pomocí pravoúhlých trojúhelníků výšku vaší radnice či jiné vysoké stavby ve vašem okolí.

V příštím roce se naučíte využívat údaje o velikostech vnitřních úhlů k výpočtu délek stran trojúhelníků. Pak byste již mohli s vhodnými přístroji vyměřovat celkem přesně a jednoduše.

7.3 Výroba a plánování

1. Prodavačka ve stánku dává zákazníkům zakoupené ovoce do igelitové tašky.
   1 kg jablek a taška stojí 18 Kč,
   3 kg jablek a taška stojí 46 Kč.
   a) Vypočtěte cenu tašky a cenu 1 kg jablek.
   b) Znázorněte grafem, kolik Kč má zákazník zaplatit za x kg jablek s taškou ($0 < x \leqq 7$).
2. Mlékárna rozváží krabice mléka v kontejnerech tvaru kvádru. Dno kontejneru má rozměry 10 dm a 15 dm, jeho výška je 7,5 dm.
   a) Vypočtěte objem kontejneru.
   b) Navrhněte nejvhodnější tvar krabice na 1 l mléka tak, aby byl při přepravě maximálně využit prostor v kontejneru. (Tloušťku obalu zanedbejte.)
   c) Narýsujte vhodnou síť navržené krabice včetně záhybů k přelepení.
   d) Krabice jsou vyřezávané laserem z voskovaných papírů tvaru obdélníku, který má rozměry 220 cm a 150 cm. Navrhněte, jak rozložit po tomto obdélníku sítě krabic, aby bylo odpadu co nejméně.
3. Do prodejny zeleniny v místě Z se dováží zelenina ze tří zahradnictví označených v náčrtku A, B a C. U náčrtku cest jsou připsány vzdálenosti v km mezi jednotlivými místy.
   a) Navrhněte nejvýhodnější trasu auta vyjíždějícího od prodejny, které denně zeleninu z míst A, B a C přiváží.
   b) Cena benzinu je 20 Kč/l, dodávkové auto spotřebuje 8 l benzinu na 100 km jízdy a obchodník hodlá koupit 55 q brambor. O kolik Kč na 1 kg by měl mít nejvzdálenější dodavatel brambory lacinější, aby se vyplatilo nakoupit právě u něho?
   c) Jestliže dodávkové auto jelo od obchodu po trase Z–A–B–C–Z průměrnou rychlostí 50 km/h a v každém zahradnictví trvalo vyřízení objednávky 20 minut, vrátilo se k obchodu v 9 hodin. V kolik hodin započalo svou jízdu?



4. Obchodník měl na skladě 100 kg rajských jablek. První den jich prodal 25 kg, druhý den 20 kg, třetí den 10 kg.
   a) Kolik kg rajských jablek mu zbude k prodeji na další den, jestliže se denně 5 % celkového množství této zeleniny zkazí?
   b) Kolik Kč utrží za rajská jablka během prvních tří dnů, jestliže z počáteční ceny 20 Kč/kg denně 3 Kč sleví?

5. Sklizně rybízu se účastnili brigádníci. Na pozemku, kde pracovali, bylo celkem 900 keřů rybízu. Otrhání jednoho keře vyžaduje průměrně 45 minut práce.
   a) Kolik brigádníků přijelo, jestliže všichni pracovali denně 9 hodin a rybíz byl očesán za tři dny?
   b) Jestliže nejrychlejší česáč otrhá rybíz z jednoho keře zpravidla o 15 minut dříve než česáč průměrný a dvakrát rychleji než ten nejpomalejší, za jak dlouho očeše 20 keřů česáč nejrychlejší s nejpomalejším?
   c) Po dvou dnech práce přišel vytrvalý déšť a jeden den se do zahrady nemohlo. Deset brigádníků proto už odjelo domů. Na kolik dní se protáhla sklizeň rybízu, jestliže zbylí česáči pracovali po přestávce stejně výkonně?

8 SOUHRNNÁ CVIČENÍ II A TESTY

1. Z Prahy do Chebu je 192 km. Z obou měst vyjely současně proti sobě dva vlaky. Průměrná rychlost osobního vlaku jedoucího z Prahy byla o 12 km/h větší než průměrná rychlost nákladního vlaku jedoucího z Chebu. Jakými průměrnými rychlostmi oba vlaky jely, jestliže se míjely po dvou hodinách jízdy?

2. Z Bořan do Adamovic je to po okresní silnici 80 km. V 6 hodin vyjelo po této cestě auto z Adamovic do Bořan. O půl hodiny později proti němu vyjelo auto z Bořan do Adamovic. V kolik hodin a kolik km od Bořan se budou tato auta míjet, jestliže průměrná rychlost auta vyjíždějícího z Bořan je 60 km/h a průměrná rychlost druhého auta je 50 km/h?

3. Za jak dlouho dojede cyklista do města vzdáleného 42 km, jede-li průměrnou rychlostí 18 km/h?

4. V zahradnictví mají nádrž na 12 hl vody. Přítokovou rourou do ní přiteče za 2 min 80 l vody, odtokovou rourou vyteče za 5 min 150 l vody. Odtok byl otevřen o čtvrt hodiny později než přítok. Za jak dlouho od počátku napouštění se nádrž naplnila?

5. Maminka nalila do vaničky 10 l vody o teplotě 50 °C. Pak přilila ještě 2 l vody o teplotě 10 °C z vodovodu. Mohla ve vaničce vykoupat své dítě? (Kojence koupeme ve vodě o teplotě 33 °C–38 °C.)

6. Určete množinu těžišť všech trojúhelníků ABC, kde AB je daná úsečka a bod C leží na dané přímce p rovnoběžné s přímkou AB.

7. Sestrojte lichoběžník $ABCD$ s rameny AD a BC, je-li narýsována úsečka AC o délce 5 cm, a jsou zadány tyto údaje: $|BC| = 3\,\text{cm}$, $|\sphericalangle ABC| = \text{R}$, $|\sphericalangle ADC| = 100°$.

8. Narýsujte tětivový čtyřúhelník $ABCD$, je-li dán průměr AC kružnice čtyřúhelníku $ABCD$ opsané, $|AC| = 6\,\text{cm}$ a víme, že $|\sphericalangle CAB| = 30°$, $|\sphericalangle BCD| = \text{R}$.

9. Narýsujte libovolný lichoběžník $PQRT$, $PQ \parallel RT$. Průsečík jeho úhlopříček označte X. Dokažte, že obsahy trojúhelníků PXT a QXR jsou si rovny.

10. Následující tabulka uvádí průměrnou roční spotřebu vybraných potravin na jednoho obyvatele v roce 1997.

Spotřeba potravin v kilogramech ročně							
Státy	Tuky	Maso	Vejce	Mléko	Sýry	Ovoce	Zelenina
ČR	26	81,2	17,1	66	6,4	56,7	75,2
SRN	22,6	88,7	17,1	92,3	19,1	66,6	80
Francie	22,4	97,8	15	94	22,8	—*	124
Itálie	31,9	90	11	74	16,9	75,5	175,4
Řecko	33,7	77,6	11	31	19,4	84,2	246,9
Španělsko	33	107	15	126	8,5	56	156

* neuvedeno

a) Znázorněte spotřebu mléka v těchto státech sloupkovým diagramem.
b) Určete průměrnou roční spotřebu každé potraviny (bez ohledu na státní příslušnost).
c) Určete pro každý sloupec medián.

11. V roce 1921 proběhlo v tehdejším Československu (Čechy, Morava, Slezsko, Slovensko a Zakarpatská Ukrajina) sčítání obyvatelstva. Podle tohoto sčítání bylo národnostní složení obyvatelstva následující:

Češi a Slováci	65,5 %	Ukrajinci	3,4 %
Němci	23,4 %	Poláci	0,6 %
Maďaři	5,6 %	ostatní	1,5 %

Sestrojte kruhový diagram.

12. První poválečné sčítání obyvatelstva československého státu v roce 1921 zachytilo následující situaci v gramotnosti obyvatelstva (procento gramotných z celkového počtu obyvatel starších šesti let):

	Uměli číst a psát	Uměli pouze číst	Neuměli ani číst, ani psát
Čechy	97,11	0,37	2,52
Morava	96,34	0,47	3,19
Slezsko	95,49	0,79	3,72
České země	96,72	0,50	2,78
Slovensko	82,14	2,76	15,10
Zakarpatská Ukrajina	48,21	1,57	50,22
Československo	91,51	1,04	7,45

Znázorněte kruhovými diagramy situaci v Čechách, na Slovensku a v Zakarpatské Ukrajině.

13. Je dána úsečka AB, $|AB| = 4\,\text{cm}$. Sestrojte lichoběžník $ABCD$ se základnou AB, vnitřním úhlem $\alpha = 90°$, výškou $v = 3\,\text{cm}$ a úhlopříčkou AC, která lichoběžník dělí na dva trojúhelníky, pro jejichž obsahy platí: $S_{ACD} : S_{ABC} = 1 : 2$. Zjistěte délku úsečky CD.

14. Pro každou pětici čísel z proužku (5) vypočtěte její aritmetický průměr a medián.

15. Vypočtěte aritmetický průměr a medián souboru udaného všemi čísly proužku (6).

16. Přiložte k sobě proužky (5) a (6). Každé číslo proužku (5) udává četnost hodnoty kvantitativního znaku uvedeného na témž řádku proužku (6). Každou pětici těchto údajů považujte za výsledek jednoho statistického šetření. Určete pro ni rozsah souboru, aritmetický průměr, modus a medián.

17. Proveďte rozbor úloh z proužku (7): Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno – – – .

18. Sestrojte trojúhelníky z proužku (7) pro velikosti zadané na proužku (8).

19. Na proužku (9) jsou zadané čtyři konvexní čtyřúhelníky. Proveďte rozbor a zapište konstrukci těchto čtyřúhelníků.

20. Sestrojte čtyřúhelníky z proužku (9) pro hodnoty uvedené na proužku (10). Určete počty řešení.

Test č. 1 — Výrazy

1. Určete hodnotu výrazů pro $x = -1$:

a) $4x^2 + 3 \cdot 2x - 7$ b) $(4x^2 + 3)(2x - 7)$

2. Sečtěte: $(2x^3 + 3x^2 + 1) + (2x^2 - 2x - 1) + (x^3 + 2x + 5)$

3. Odečtěte: $(3a^2 - 4ab + 2b^2) - (7a^2 - 5ab + 2b^2)$

4. Proveďte: $7x^2 - [3x^2 - (6x - 2) + (5x - 2)]$

5. Vypočtěte: $2a(a + 3b - 2c) - 3b(2a - b - 4c) + 4c(a - 3b + c)$

6. Vynásobte:

a) $(2a + 3)(3a - 2)$ b) $(2b - 1)(b^2 + 2b + 1)$

c) $(c + 5)(c - 4)(c - 1)$

7. Umocněte:

a) $(2a + 3)^2$ b) $(b - 5)^2$

c) $(c^4 - 1)^2$ d) $\left(\frac{1}{2} - 2d\right)^2$

(10)
6
5
3
3
5
7
2
80°
6
3
7
80°
40°
4
6
5
5
5
90°
75°

8. Proveďte:

a) $(x+2y)(x-2y)$ b) $(z-1)(1+z)$

c) $(3p^2+1)(3p^2-1)$ d) $(0{,}4a+0{,}8b)(-0{,}4a+0{,}8b)$

9. Proveďte:

a) $24x^2y^3 : 6x$ b) $25x^2y^3 : (-8y^2)$

c) $-24x^2y^3 : (-12xy)$ d) $-24x^2y^3 : 24x^2y^3$

10. Proveďte:

a) $(6x^3-12x^2+18x) : (-6x)$ b) $(5a^2-10) : (-1)$

11. Z daných výrazů vytkněte $2x$:

a) $12x^2+2x$ b) $-4x^3+2xy$

12. Dané mnohočleny rozložte na součin:

a) $3x^3+6x^2-3x$ b) $25x^2+20x+4$

c) $16a^2-1$ d) $5x^2+10xy+5y^2$

Test č. 2 — Konstrukční úlohy

1. Je dán pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$ se středem S. Zapište množinu všech rovnostranných trojúhelníků, jejichž všechny vrcholy jsou prvky množiny $Q = \{A, B, C, D, E, F, S\}$.

2. Určete množinu všech pravoúhlých rovnoramenných trojúhelníků XYZ s odvěsnou XY, je-li dána úsečka XY, $|XY| = 3\,\text{cm}$.

3. Je dána kružnice $k(S, 3\,\text{cm})$. Sestrojte množinu všech bodů X roviny, které mají tuto vlastnost: Kružnice k leží v ostrém úhlu α, který svírají tečny vedené z bodu X ke kružnici k, $\alpha = 60°$.

4. Sestrojte trojúhelník ABC s vnitřními úhly α, β, γ, pro jejichž velikosti platí $\alpha : \beta : \gamma = 1 : 3 : 8$, je-li dána úsečka AB, $|AB| = 5\,\text{cm}$.

5. Sestrojte rovnoramenný lichoběžník $KLMN$ se základnami KL a MN, pro který platí: $|KL| = 5\,\text{cm}$, $|LM| = 3\,\text{cm}$, $|KM| = 4\,\text{cm}$. Zjistěte poloměr kružnice opsané tomuto lichoběžníku.

6. Sestrojte trojúhelník EFG, je-li dáno: body E, F leží na dané přímce p, $v_g = 3\,\text{cm}$, $t_g = 3{,}5\,\text{cm}$, $|\sphericalangle GEF| = 45°$.

a) Kolik vyhovujících trojúhelníků jste narýsovali?

b) Pro jaký vztah mezi délkami t_g a v_g nemá úloha řešení?

Test č. 3 — Rovnice

1. Řešte rovnice a proveďte zkoušky:
   a) $3 \cdot (2x + 1) + 2 = 3 \cdot (5 + x) + x$
   b) $\frac{y}{2} - \frac{1}{3} = \frac{5y}{4} - \frac{y}{3} + 3$
   c) $(a - 1)^2 = a \cdot (a + 2)$
   d) $(y - 4) \cdot (y + 3) = (y - 5) \cdot (y + 5)$
2. Zapište podmínky řešitelnosti, řešte rovnice a proveďte zkoušky:
   a) $\frac{1}{r} + \frac{2}{3} = 1$
   b) $\frac{3}{x} - \frac{1}{x} - \frac{2}{x} = 1$
   c) $\frac{3}{m} + \frac{4}{m} - 12 = \frac{5}{m}$
   d) $\frac{5}{8} - \frac{1}{a} = -\frac{6}{a}$
3. Ze vzorce pro obsah geometrického útvaru vyjádřete a) výšku v, b) stranu a:

   $S_1 = a \cdot v \qquad S_2 = \frac{a \cdot v}{2} \qquad S_3 = \frac{(a + c) \cdot v}{2}$

Test č. 4 — Slovní úlohy

1. Z archu papíru tvaru obdélníku byl vystřižen čtverec, jehož obsah je o 486 cm^2 menší než obsah obdélníku. Jak velká je strana čtverce a jaké rozměry má obdélník, je-li jeden jeho rozměr o 9 cm větší než strana čtverce a druhý rozměr o 18 cm větší než strana čtverce?
2. Petr, Honza, Vendulka a Lenka natrhali dohromady 50 kg rybízu. Kolik kg rybízu načesal každý z nich, jestliže Honza načesal o 2 kg rybízu méně než Petr, Vendulka načesala 1,5 krát více než Honza a Lenka o 2 kg méně než Vendulka?
3. Petr nakupoval pro spolužáky vstupenky na školní divadelní představení. Třetina vstupenek byla po dvaceti korunách, ostatní po dvaceti pěti korunách. Kolik kterých vstupenek Petr nakoupil, jestliže celkem zaplatil 560 Kč?
4. Chata Lenčiných rodičů je vzdálena od chaty Vendulčiných rodičů 7 km. Řešte následující úlohy:
   a) Lenka se vydala v 9:00 h na návštěvu k Vendulce. Šla průměrnou rychlostí 4 km/h. Vendulka jí vyšla naproti v 9:45 h stejnou rychlostí. V kolik hodin a v jaké vzdálenosti od chaty Vendulčiných rodičů se děvčata potkala?
   b) Lenka se vydala na zpáteční cestu v 17:00 h a šla průměrnou rychlostí 4 km/h. Po chvíli si Vendulka všimla, že Lenka zapomněla klíče, a v 17:10 h se za ní rozjela na kole průměrnou rychlostí 14 km/h. Za jakou dobu Lenku dohonila?

9 MATEMATICKÁ HERNA

9.1 Výpočty bez kalkulačky

1. Při výpočtu druhé mocniny daného čísla nemusíme nutně hned sahat po kalkulačce. Např. druhé mocniny dvojciferných přirozených čísel dokážeme vypočítat pomocí vzorců $(A+B)^2 = A^2+2AB+B^2$, $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$.

$21^2 = (20+1)^2 = 20^2 + 2 \cdot 20 \cdot 1 + 1^2 = 441$
$38^2 = (40-2)^2 = 40^2 - 2 \cdot 40 \cdot 2 + 2^2 = 1\,600 - 160 + 4 = 1\,444$
$38^2 = (30+8)^2 = 30^2 + 2 \cdot 30 \cdot 8 + 8^2 = 900 + 480 + 64 = 1\,444$

Zápis výpočtu lze zjednodušit:

$\boxed{38^2 =}$

Počítáme zpaměti: *Píšeme:*

$8^2 = 64$

6 desítek si budeme pamatovat — 4 jednotky napíšeme . . . 4

$(3 \cdot 8) \cdot 2 = 48$
+6 desítek
54 desítek

5 stovek si budeme pamatovat — 4 desítky napíšeme . . 4 4

$3^2 = 9$
+5 stovek
14 stovek napíšeme 1 4 4 4

Zkuste sami tímto způsobem vypočítat druhé mocniny některých dvojciferných čísel. Kontrolu proveďte pomocí kalkulačky. Po troše cviku zjistíte, že to vůbec není těžké.

2. S užitím vzorce $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ dokážeme vypočítat některé součiny. Např.

$21 \cdot 19 = (20+1)(20-1) = 20^2 - 1^2 = 400 - 1 = 399$

$62 \cdot 58 = (60+2)(60-2) = 60^2 - 2^2 = 3\,600 - 4 = 3\,596$

$5\frac{3}{4} \cdot 6\frac{1}{4} = \left(6 - \frac{1}{4}\right)\left(6 + \frac{1}{4}\right) = 36 - \frac{1}{16} = 35\frac{15}{16}$

$3{,}1 \cdot 2{,}9 = (3+0{,}1)(3-0{,}1) = 9 - 0{,}01 = 8{,}99.$

Vypočtěte tímto způsobem součiny:

a) $23 \cdot 37$ b) $4\frac{1}{2} \cdot 5\frac{1}{2}$ c) $4{,}2 \cdot 3{,}8$

Vymyslete sami podobné příklady pro své spolužáky.

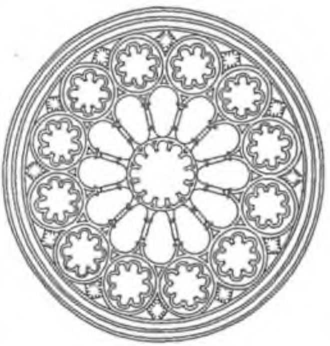
9.2 Kružnice a architektura

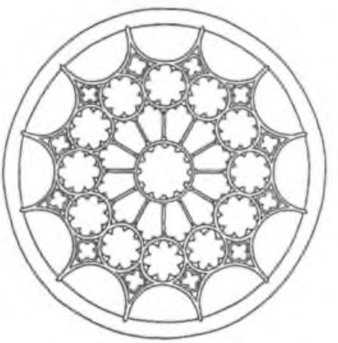
Gotický sloh je charakteristický výhodným převáděním tlaků stavby do základů, což stavitelům umožnilo prolomit stěny ve velkých plochách a budovat překrásná okna. Nových statických řešení architektury, která gotika přináší, si laici většinou nepovšimnou, avšak jejich důsledky — krásné žebroví kleneb a kroužená okna na významných stavbách — přehlédnout nemohou.

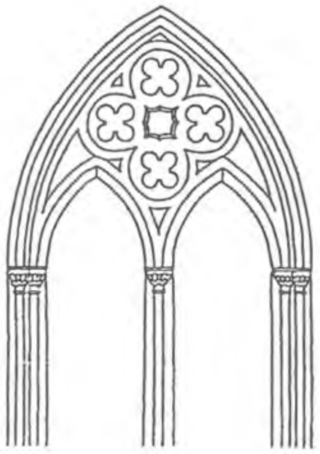
Gotika využívá křivek složených zejména z kružnicových oblouků. Povšimněme si gotických oken. Dva základní typy těchto oken jsou:

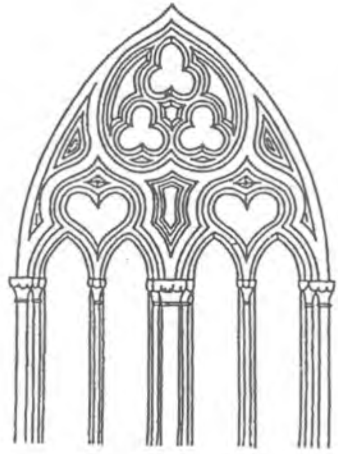
– obdélníkové okno zakončené nahoře lomeným obloukem,
– kruhové okno (tzv. rozetové okno) středově souměrné, zpravidla velmi honosné.

Na obrázku jsou dvě rozetová okna z katedrály v Chartres (12. a 13. století) a dvojice oken zakončených lomenými oblouky z katedrály v Naumburgu (13. století).





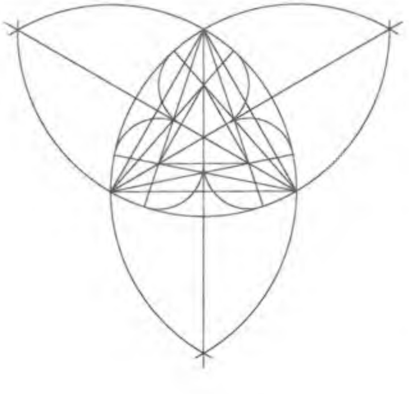


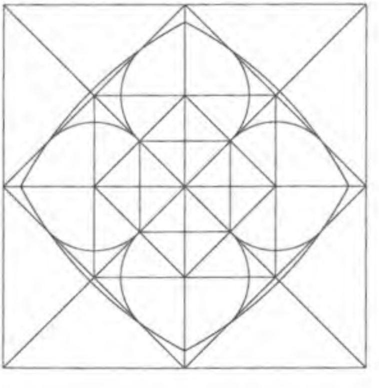


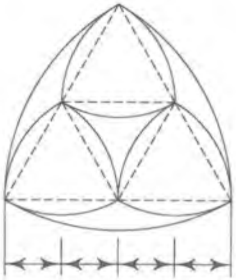
Všimněte si, že většina žeber v těchto oknech je zkonstruována pomocí úseček a oblouků kružnic s různými poloměry.

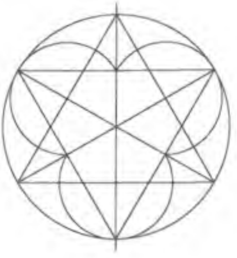
Na následujících obrázcích je naznačena konstrukce několika často se opakujících motivů, které vycházejí buď z rovnostranného trojúhelníku nebo ze čtverce. Vidíte, že středověcí stavitelé řešili podobné úlohy jako vy při konstrukci kružnic daných vlastností:

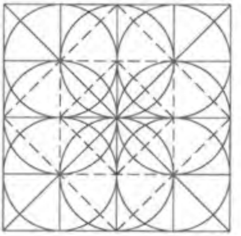
- konstrukce kružnice procházející danými body,
- konstrukce kružnic dotýkajících se daných přímek či kružnic,
- konstrukce dvojice či trojice kružnic, které jsou jako celek vepsány danému čtverci, trojúhelníku či „křivočarému trojúhelníku“, který architekti označují chybně jako sférický (sférický trojúhelník leží na kulové ploše, nikoli v rovině).

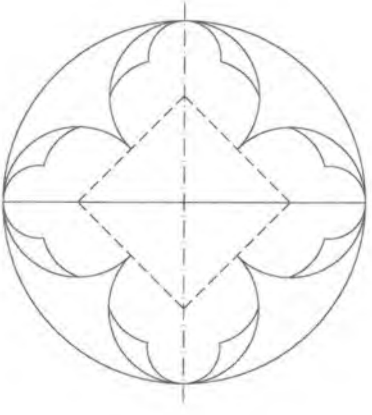


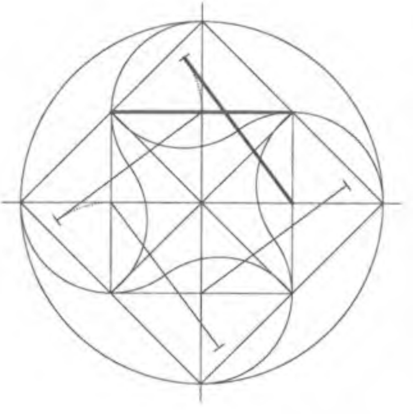


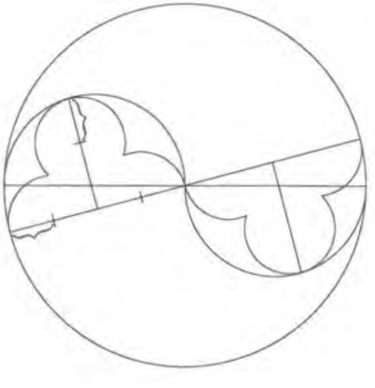


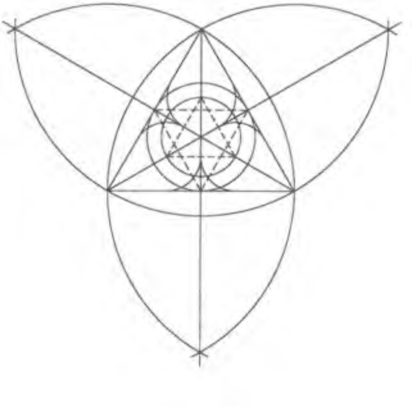




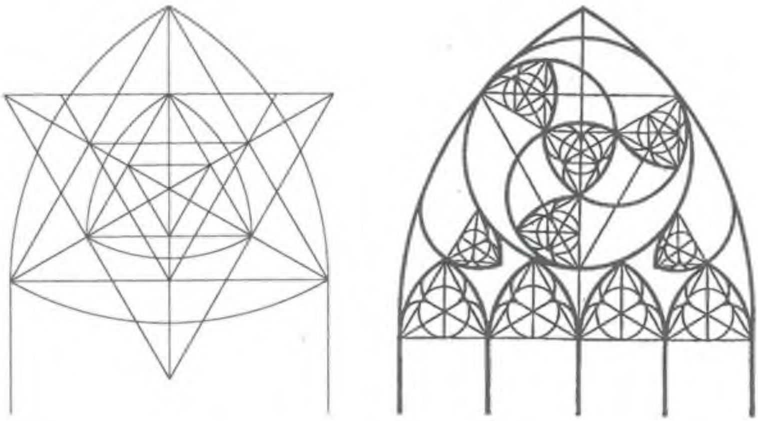








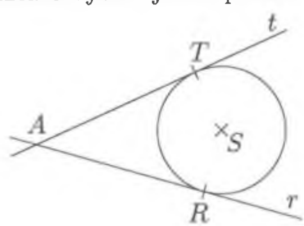
Do jedné sítě pomocných čar je možné zakreslit několik výsledných řešení gotického okna. Na následujícím obrázku vidíte základní geometrický rozvrh a dále okno, které z tohoto rozvržení čar vychází.



Zkuste si sami navrhnout gotické okno na základě zvoleného geometrického rozvrhu.

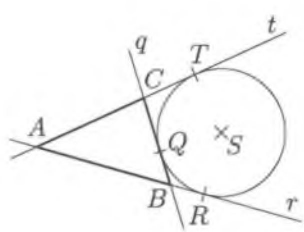
9.3 Jak tvořit zajímavé úlohy

Představte si, že máte vytvořit několik zajímavých konstrukčních úloh pro matematickou soutěž. Ukažme si, jak můžeme využít jeden poznatek z geometrie k tvorbě úloh na sestrojení trojúhelníků daných vlastností.



Připomeňme si známý poznatek:
Je dána kružnice $k(S, r)$ a bod A. Tečny t a r kružnice k se jí dotýkají v bodech T a R a protínají se v bodě A. Víme, že $|AT| = |AR|$.

Veďme další tečnu q kružnice $k(S, r)$ tak, aby bod A ležel v polorovině opačné k polorovině qS. Bod dotyku tečny q s kružnicí k označte Q. Průsečíky tečny q s tečnami t a r označte B, C.
Dokažte, že obvod trojúhelníku ABC je roven součtu délek úseček AT, AR.



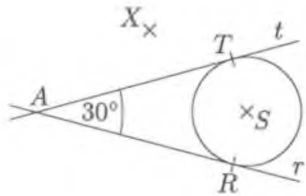
Návod k řešení:

Pro úseky na tečnách vedených bodem B ke kružnici k platí: $|BQ| = |BR|$. Obdobně $|CQ| = |CT|$.

Nyní již můžeme vyřešit tuto úlohu:

Sestrojte trojúhelník ABC, je-li jeho obvod $o = 8\,\mathrm{cm}$, $|\sphericalangle TAR| = 30°$ a přímka BC prochází vhodně zvoleným bodem X (viz obrázek).

Návod k řešení:



Sestrojte ramena t, r úhlu TAR.
Sestrojte body T a R: $|AT| = |AR| = 4\,\mathrm{cm}$.
Sestrojte kružnici $k(S, r)$ dotýkající se přímek t, r v bodech T a R.
Bodem X veďte tečny ke kružnici $k(S, r)$.
Úsek BC na „vhodné tečně" je stranou hledaného trojúhelníku ABC.
(Která tečna je „vhodná"? Jak je třeba volit při zadání polohu bodu X, aby trojúhelník ABC existoval?)

Obdobně můžete vyřešit tyto úlohy:
Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno: α, $a + b + c$ a jeden z následujících údajů:

- trojúhelník ABC je rovnoramenný se základnou BC,
- $|AC|$,
- poměr $|AC| : |AB|$,
- β,
- v_b,
- přímka BC se dotýká dané kružnice $l(L, r)$,
- poloměr kružnice vepsané trojúhelníku ABC.

Pozor! Uvažte, kdy mají tyto úlohy řešení.

Jedna z těchto úloh byla před lety v matematické olympiádě pro žáky osmých tříd. Vidíte, že při řešení konstrukčních úloh je nejdůležitější „nápad". A „nápady" přicházejí spolu s praxí. Proto si uvedené úlohy vyřešte (vhodná čísla si zvolte sami, i zde máte možnost ovlivnit řešení). Zkuste doplnit uvedený soubor úloh!

10 VÝSLEDKY ÚLOH

1 Číselné obory

3. $x = \sqrt{5}$, $y = \sqrt{3}$, $z = \sqrt{13}$, $u = \sqrt{10}$, $v = \sqrt{8}$, $k = \sqrt{5}$.

2 Výrazy

2.1 Číselné výrazy a algebraické výrazy — opakování

1. Číselné: b); c). **2.** a) $-\frac{1}{4}$; b) $-\frac{1}{6}$; c) 1,6; d) 9,28. **3.** a) Součet; b) součin; c) rozdíl; d) součin; e) podíl; f) rozdíl; g) mocnina; h) součet. **4.** a) 10,9; b) 13,8; c) -5,1; d) 29,8; e) 3,45; f) 16,9. **5.** a) $12 + 2 \cdot 7$; b) $2 \cdot (12 + 7)$; c) $4 \cdot 15 - \frac{8}{2}$; d) $4 \cdot \left(15 - \frac{8}{2}\right)$; e) $7 + 5^2$; f) $(7 + 5)^2$. **6.** a) $(x + y - 1)$ osob; b) $[2y + 1{,}5 \cdot (y + x)]$ Kč; c) $[x \cdot (x + 10)]\,\mathrm{cm}^2$. **7.** $[(x + x - 4) : 2]$ cm. **8.** a) $(a+2)^2\,\mathrm{cm}^2$; b) $(a-1)^2\,\mathrm{cm}^2$; c) $(2a)^2\,\mathrm{cm}^2$; d) $\left(\frac{a}{2}\right)^2\,\mathrm{cm}^2$. **9.** a) $(a + 5)^3\,\mathrm{cm}^3$; b) $(a - 1)^3\,\mathrm{cm}^3$; c) $(5a)^3\,\mathrm{cm}^3$; d) $\left(\frac{a}{2}\right)^3\,\mathrm{cm}^3$.

2.2 Jednočleny a mnohočleny

3. a) 50; b) 124. **4.** a) 175,84; b) 22,608. **5.** a) $2a^2 - 13a - 7$; b) $3x^4 - x^3 + 3x - 1$; c) $4x^2 - 9$; d) $2b^3 - 3b^2 + 2b - 1$; e) $2u^3 + 5u^2 - 1$; f) $4c^3 - 3c^2 - 3$. **6.** A. a) $5x - 5y$; b) $m^2 - m$; c) $3u$; d) $a^2 - a + 1$; e) $4r^2s - 3rs^2$. B. a) $4a - 7b$; b) $x^2 - x$; c) $5m$; d) $b^2 - b + 1$; e) $u^2v - uv^2$. **7.** a) $5a^2 - 6a + 1$, 9; b) $3a^2 + 2b^2 + 2a$, 24; c) $b^3 + b^2 - b + 3$, 1; d) $2a^2b^2 - a^2b$, 40.

2.3 Sčítání a odčítání mnohočlenů

1. a) $5a$; b) $10a^2$; c) $-3ab$; d) 0; e) $5a^2b$; f) $2cd^2$; g) $-9u^3$; h) $-2y^2$; i) $4x$; j) 0; k) $3a^5$; l) $-7x^3$. **2.** a) $a + 5b$; b) $3a^2 + 3b^2$; c) $3a^3 + 4a^2$; d) $6a^2 - 3$; e) $7x + 3x^2$; f) $3x$; g) nelze zjednodušit; h) $3x^2 - 11$. **3.** a) $2m + 4$; b) $2a - 2$; c) $18b$; d) $-4ax - 1$; e) $3x^2 - 3x - 5$; f) $4ab - 2b^2$; g) $13x^3 - 8x$; h) $-a^2b - 3ab$. **4.** a) $7a - 20$; b) $3x + 2y - 8$; c) $9 - 2a - 3a^2$; d) $5c^3 + 4c^2 - 6$; e) $5x^3 - 11x - 5$; f) $5a^2 - 6ab$; g) $a^2x - 5a^2x^2$. **5.** a) $-2x - 1$; b) $-3y + 3$; c) $4a - 5b$;

d) $a+1$; e) $-a^2+1$; f) $-m^2-1$; g) $-a^2-2ab-b^2$; h) $-m^2+4m-4$. **6.** a) $5a$; b) $5ax$; c) $-9a^2$; d) $-3y$; e) 0; f) $4z$; g) a^2x^3; h) $-10c^4d$. **7.** a) $3a-9$; b) $4x^2+1$; c) $-5ay-2$; d) 6; e) 0; f) 18; g) $10ax$; h) $10ax+18$. **8.** a) $3b+2c$; b) $6x^2+6$; c) $-2ab+6$; d) $6x^3-2$; e) $5a^2b-5a^2-3ab^2$; f) a^2+2a. **9.** a) -1; b) $x-5$; c) $20m^2-3m$; d) $-5a+10b-12c$. **10.** a) $3a+5b$; b) $7b-6a$; c) $-a+b$; d) 0. **11.** a) $x+y-1$; b) $-4y$; c) $5x-5y$. **12.** $(x^2-3x+2)+(3x^2+x-2)=4x^2-2x$; $(x^2-3x+2)-(3x^2+x-2)=-2x^2-4x+4$. **13.** a) A. $3x^2+9$; B. $5x^2-1$; b) A. x^2+9; B. x^2+5.

2.4 Násobení mnohočlenů

1. a) $35x$; b) $-8y$; c) $0{,}06a$; d) $15x^2$; e) $-8x^3$; f) $24y^5$; g) $-6a^2b$; h) $2a^3b^3$; i) $-6x^5y^4$; j) $-40c^6$; k) $70u^9$; l) $18a^3b^4$. **2.** a) $5a-20$; b) $12b-18$; c) $-21a^2+7$; d) $-2a^2+3b$; e) $4a^2-36a$; f) $-35x^2+5x^3$; g) $6y^5-2y^4$; h) $50a^5+20a^6$; i) $b+2c-4d$; j) $6x^2-12xy+15x$; k) $20a^7b^4-8a^4b^7-4a^5b^5$; l) $-2x^3+4x^2-2x$. **3.** a) a^2+b^2; b) $-21x+31y$; c) $a^2-b^2+c^2$; d) $a+7b$; e) 1; f) $2d^3-2d$. **4.** a) 40; b) $11x$; c) $3y$; d) a. **5.** a) $m^2+8m+15$; b) $-c^2+3c+28$; c) $6d^2-d-2$; d) $-5x^2+19x-12$; e) $2a^2+5ab+2b^2$; f) $4r^2-11rs+6s^2$; g) $6a^3-8a^2+3a+4$; h) a^4-6a^2+8. **6.** a) $8x^2+2x-15$; b) $14x-15$; c) $8x^2+12x-5$; d) $14x-5$; e) a^2-4; f) $3a-4$; g) a^2+2a-2; h) $3a-2$. **7.** a) $20y^3-27y^2+y+6$; b) a^3-b^3; c) $10x^3-13x^2+10x-3$; d) a^3-7a-6; e) $1-9b+26b^2-24b^3$; f) $6a^5-11a^4+9a^3-11a^2+3a$. **8.** a) $24x^2+9x-82$; b) $2a^2-4a-4$; c) $2a^2+15a-5$; d) 6. **9.** a) $2x^3+x^2-2x-1$; b) $10x^2+4x-2$.

2.5 Druhá mocnina dvojčlenu. Rozdíl mocnin

1. a) $u^2+8u+16$; b) $u^2-8u+16$; c) $u^2+8u+16$; d) $u^2-8u+16$; e) $25a^2+20a+4$; f) $9-12b+4b^2$; g) $36x^2y^2-12xy+1$; h) $x^2+18x+81$; i) $x^4y^2-4x^2y+4$; j) $r^6-2r^3s^2+s^4$; k) $a^2+a+\frac{1}{4}$; l) $0{,}25b^2+2b+4$. **2.** a) $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$; b) $4x^2+12xy+9y^2=(2x+3y)^2$; c) $25u^2+70u+49=(5u+7)^2$; d) $1-2z+z^2=(1-z)^2$; e) $1+10ab+25a^2b^2=(1+5ab)^2$; f) $4a^2-36ab^2+81b^4=(2a-9b^2)^2$. **3.** Druhé mocniny dvojčlenu: c), e), f), g). **4.** a) $2p^2+2r^2$; b) $3a^2-3$; c) $5b^2+20$; d) $8b^2+24b+68$; e) $2a^2+3a+7$; f) $3c^2-8cd-4d^2$. **5.** O $2a+1$. **6.** a) x^2-y^2, b^2-a^2, p^2-25, $81-c^2$; b) a^2-1, $1-d^2$, $9x^2-16$, y^2-4z^2;

c) $x^2 - \frac{1}{4}$, $x^2 - 0{,}01$, $x^4 - 1$, $4x^6 - 9$; d) $0{,}04a^2 - 0{,}09$, $1{,}44x^2 - 0{,}64$, $\frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{9}$, $z^8 - 0{,}01$. **7.** a) 0; b) $15a^2$; c) $x^4 - 100$; d) -5; e) $2x^2 + x$; f) $2x + 0{,}02$; g) $a^4 - 81$; h) $181 - 108a$. **8.** a) $4ab - 4b^2$, $36\,\mathrm{cm}^2$; b) $a^2 + 2ab$, $120\,\mathrm{cm}^2$.

2.6 Dělení mnohočlenu jednočlenem

2. a) $3x + 4y$; b) $-5x^2 - 2x$; c) $d - 2c$; d) $-5x + 2$; e) $2m + 3n$; f) $-4x + 1$; g) $2ab + 3b - 4b^2$; h) $-3z^2 + 2z - 1$; i) $a^2 + 2ab + b^2$. **3.** a) $a - 5$; b) -3; c) c; d) $-d$; e) 0. **4.** a) $5 \cdot (a + b)$; b) $2a \cdot (x - y)$; c) $x \cdot (x - 1)$; d) $(-2) \cdot (-z - 4)$; e) $u \cdot (u + v)$; f) $(-4x^2) \cdot (3x^3 + 4x + 5)$. **5.** a) $(-1) \cdot (a + b)$; b) $(-1) \cdot (-3a - 2)$; c) $(-1) \cdot (-4b^2 + 1)$; d) $(-1) \cdot (5c - 7)$; e) $(-1) \cdot (-d^3 - 2d^2)$; f) $(-1) \cdot (-4rs + 3r - 2s)$; g) $(-1) \cdot (a^2 - 2ab + b^2)$; h) $(-1) \cdot (-1 + m^2)$.

2.7 Rozklad mnohočlenů na součin

2. a) $2^3 \cdot 3$, $2^2 \cdot 3^2$, $2^2 \cdot 3 \cdot 5$; b) 2^5, $2 \cdot 5 \cdot 7$, $2 \cdot 3^2 \cdot 7$. **3.** a) $2c \cdot 2d$; b) $n^3 \cdot n^2$; c) $3rs \cdot 5r$; d) $5s \cdot 3r^2$; e) $5r^2 \cdot 3s$; f) $-3r^2 \cdot (-5s)$; g) $-1 \cdot (-2a^2b)$; h) $3a \cdot (-3a^2)$. **4.** a) $6(x + y)$; b) $5(a - 2b)$; c) $3(u - 1)$; d) $2c(1 + d)$; e) $5a(x - y)$; f) $k^2(k - 1)$; g) $2m^2(m + 3)$; h) $mn(m - n)$; i) $12uv^3(2u^3 + 3v)$; j) $3(a + b - c)$; k) $5x(x^2 + 2x - 3)$; l) $7ab(1 - 2a - 3b)$. **5.** a) $(m + n)^2$; b) $(x - 3)^2$; d) $(y - 1)^2$; f) $(2a + 1)^2$. **6.** a) $(4s + 1)^2$; b) $(2a - b)^2$; c) $(x + y)^2$; d) $-(4 + x)^2$; e) $(c - 10)^2$; f) $3(a + 1)^2$; g) $(m - 1)^2$; h) $2n(m + 5)^2$. **8.** a) $(4a + 5)(4a - 5)$; b) $(2x + 3y)(2x - 3y)$; c) $(3x^2 + 1)(3x^2 - 1)$; d) $(pq + 2)(pq - 2)$; e) $2(5c + 1)(5c - 1)$; f) $m(3n + 2)(3n - 2)$; g) $z^3(z + 1)(z - 1)$; h) $2(a + 9)(a - 9)$; i) $x(x^2 + 10)(x^2 - 10)$; j) $5(3 + y)(3 - y)$; k) $(0{,}8 + 0{,}9x)(0{,}8 - 0{,}9x)$; l) $\left(\frac{2}{3}x + \frac{3}{5}y\right)\left(\frac{2}{3}x - \frac{3}{5}y\right)$. **9.** a) $(a + 3 + b)(a + 3 - b)$; b) $(6 + b)(4 - b)$; c) $(x + y + 1)(x + y - 1)$; d) $3(2x + 1)$; e) $(u - 1)(u - 3)$; f) $3x(3x - 2y)$. **10.** a) $(x - y + 1)(x - y - 1)$; b) $(a + 2 + b)(a + 2 - b)$; c) $(b - 3 + 3c)(b - 3 - 3c)$; d) $3(m + n + 2)(m + n - 2)$.

3 Rovnice

3.1 Opakování

1. c), e), g), h). **2.** a) -5; b) $\frac{1}{2}$. **4.** Mají stejné kořeny. **5.** Např. $2p + 2 = p - 6$. **6.** A. a) -3; b) -15; c) 1. B. a) $\frac{3}{7}$; b) 0; c) 1.

7. a) $k = -4$; b) $k = 2$; c) $k = \frac{4}{9}$. 8. 24, 25, 26. 9. 10,5 kg. 10. 1 164 Kč. 11. 18 cm, 4,5 cm. 12. A. a) 8; b) každé reálné číslo; c) 5; d) $11\frac{1}{2}$. B. a) -8; b) 4; c) 6; d) $3\frac{8}{9}$.

3.2 Řešení složitějších lineárních rovnic

1. a) 5; b) $\frac{3}{8}$; c) $\frac{7}{2}$; d) nemá řešení. 2. A. a) $\frac{37}{7}$; b) $\frac{9}{2} = 4\frac{1}{2} = 4{,}5$; c) $\frac{1}{2}$. B. a) 5; b) 0; c) -3. 3. a) $x = 5$, $L = P = -3$; b) $m = 2$, $L = P = 12$; c) $y = 11$, $L = P = 3$; d) $a = 10$, $L = P = 23$; e) $k = 11$, $L = P = 0$. 4. a) $\frac{9}{2}$; b) 0; c) $-\frac{1}{2}$; d) -7; e) $\frac{7}{2}$; f) 3. 5. 16 cm. 6. 12 cm, 4 cm. 7. 8 a 9. 8. 20 cm. 9. a) 3; b) $\frac{1}{2}$; c) $-\frac{1}{11}$; d) nemá řešení.

3.3 Rovnice s neznámou ve jmenovateli

1. a) $k \neq 0$, $k = -9$; b) $c \neq 0$, $c = -1$; c) $q \neq 0$, $q = 1$; d) každé reálné číslo $x \neq 0$; e) $y \neq 0$, $y = -1$; f) $a \neq 0$, $a = 3$. 2. A. a) 6; b) 1; c) $-\frac{1}{3}$; d) 4. B. a) 7; b) $\frac{2}{3}$; c) $\frac{1}{3}$; d) $-\frac{4}{3}$. 3. a) 121,5; b) 1,5; c) 64; d) $-\frac{1}{8}$. 4. a) $\frac{1}{6}$; b) 8; c) $\frac{1}{48}$; d) každé reálné číslo $x \neq 0$. 5. a) $x \neq -2$, $x = 1$; b) $a \neq 1$, $a = 4$; c) $m \neq -1$, $m = \frac{13}{2}$; d) $y \neq 3$, $y = 8$; e) $x \neq 2$, $x = 0$; f) každé reálné číslo $k \neq 4$; g) nemá řešení.

3.4 Výpočet neznámé ze vzorce

1. a) Obsah čtverce, $a = \sqrt{S}$; b) obvod rovnoramenného trojúhelníku, $z = o - 2r$, $r = \frac{o - z}{2}$; c) $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, $a = \sqrt{c^2 - b^2}$, $b = \sqrt{c^2 - a^2}$; d) výpočet hustoty, $m = V \cdot \varrho$, $V = \frac{m}{\varrho}$; e) obsah rovnoběžníku, $a = \frac{S}{v_a}$, $v_a = \frac{S}{a}$; f) obsah kruhu, $r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$; g) obsah trojúhelníku, $a = \frac{2S}{v_a}$, $v_a = \frac{2S}{a}$; h) obsah lichoběžníku, $v = \frac{2S}{a + c}$, $a = \frac{2S - c_v}{v}$, $c = \frac{2S - a_v}{v}$. 2. $v_c = 6$ cm. 3. $o = 28$ cm. 4. $t = 36$ min. 5. $v_a = 6$ cm. 6. 10 cm. 7. 157,5 kg.

3.5 Slovní úlohy

1. 50 dětí. **2.** 44 dětí. **3.** 300 cm. **4.** 9 min. **5.** 3 600 Kč. **6.** 12 úloh, 80 %. **7.** 168 dětí. **8.** $a = 2\,\mathrm{cm}$, $b = 5{,}5\,\mathrm{cm}$, $c = 6{,}6\,\mathrm{cm}$.

3.5.1 Úlohy o pohybu

1. a) $\frac{1}{3}$ h; b) $\frac{3}{4}$ h; c) $\frac{2}{3}$ h; d) $\frac{1}{6}$ h; e) $\frac{1}{5}$ h; f) $\frac{1}{4}$ h. **2.** a) 10 min; b) 18 min; c) 13 min; d) 9 min; e) 25 min. **3.** Asi 36,5 km/h. **4.** Ve 12 hodin, 80 km. **5.** Ano. Osobní auto dostihlo řidiče v 7:35 h. **6.** 110 km/h. **7.** 162 km. **8.** 68 km/h. **9.** 60 km. **10.** Přibližně 29 km/h a 28,2 km/h. **11.** 25 min. **12.** 12 km/h. **13.** 90 km. **14.** 124 km/h. **15.** a) V Kozí; b) dvojkolejnou (křižování vlaků mezi stanicemi); c) 42 km/h.

3.5.2 Úlohy o společné práci

1. 2 h 55 min. **2.** O 9 h. **3.** Ano, stačí; 4,8 min = 4 min 48 s. **4.** $2\frac{1}{4}$ h. **5.** Ano; za 6 h. **6.** 4,5 h. **7.** 8 h. **8.** (1 + 2,5) h. **9.** $2\frac{8}{11}$ h.

4 Souhrnná cvičení I

3. $v = \sqrt{3}\,\mathrm{cm}$, $u = \sqrt{2}\,\mathrm{cm}$, $z = \sqrt{5}\,\mathrm{cm}$. **4.** $14x + 12$. **5.** a) $2n - 2$, $2n - 1$, $2n$, $2n + 1$, $2n + 2$; b) $10n$; c) 4; d) 6; e) $8n^3 - 12n^2 + 4n$; f) $4n^2 - 4$; g) $2n$. **6.** $p = \frac{F}{S} = \frac{500\,\mathrm{N}}{(2x^2)\,\mathrm{m}^2} = \frac{250}{x^2}\,\mathrm{Pa}$. **7.** a) $x^2 + 6x + 9$, $5x - y$, $x + 1$, $4x^2 + 12x + 9$; b) $x + 2$ a $x - 2$, $9x^2 - y^2$, $2x - 3$ a $2x + 3$, $x^2 - 1$. **8.** a) $(20x + 2)\,\mathrm{m}$; b) $(20x^2 + 4x - 8)\,\mathrm{m}^2$. **9.** a) $9a^2 + 6ab + b^2$; b) $x^2 - x + \frac{1}{4}$; c) $4c^2 + 4c + 1$; d) $0{,}25 + 2u + 4u^2$; e) $16v^2 - 24vz + 9z^2$; f) $\frac{1}{16}a^2 + 2a + 16$; g) $a^4 + 4a^2 + 4$; h) $9 - 6u^3 + u^6$; i) $1{,}44 - 2{,}4z + z^2$. **10.** a) $9 - a^2$; b) $4b^2 - 9$; c) $64y^2 - x^2$; d) $4m^2 - 1$; e) $\frac{1}{4}m^2 - \frac{1}{9}$; f) $m^4 - n^2$; g) $0{,}04x^2 - 1$; h) $t^2 - r^2s^2$; i) $x^6 - x^4$; j) $25u^2 - 0{,}25$. **11.** a) $a^3 + 6a^2 + 3a - 25$; b) $2b^2 - 3$; c) $3c^2 + 12c + 12$; d) $40d^2 + 40d + 10$; e) $-e^3 - e^2 + e - 1$. **12.** a) $-\frac{1}{2}$; b) -13; c) -2; d) $-\frac{1}{2}$; e) -10. **13.** $t = 1\,\mathrm{h}\ 40\,\mathrm{min} = 100\,\mathrm{min}$, $v = 60\,\mathrm{km/h}$, $s = 350\,\mathrm{km}$. **14.** Přibližně $19{,}625\,\mathrm{dm}^2$. **15.** 178 Kč, 356 Kč, 391 Kč. **16.** Tupoúhlý. **17.** 1 840 km. **18.** a) 2; b) $\frac{1}{3}$; c) 1; d) 6; e) 6. **19.** Ano, 26 min 40 s. **20.** $3\frac{1}{3}$ km. **21.** 4,5 dne.

5 Konstrukční úlohy

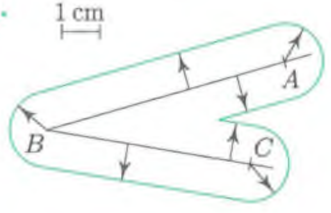
5.1 Množiny prvků daných vlastností

1. a) V = K ∩ T; b) W = O ∩ K; c)

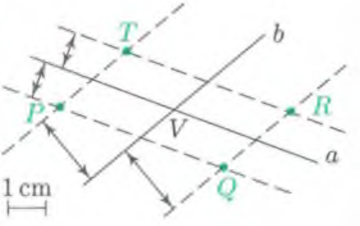
2. a) P = $\{4, \sqrt{36}\}$; b) I = $\{\pi, 2\sqrt{3}, -\sqrt{5}\}$; c) L = $\emptyset$; d) B = $\{-7, -\sqrt{5}\}$; e) O = $\{4, \pi, 2\sqrt{3}, \sqrt{36}, 0\}$. **3.** a) H = $\{A, B, C, D, E, F, G, H\}$; b) J = $\{Y; Y$ je střed $BF\}$; c) M = $\{K; K$ je střed $AG\}$. **4.** C = $\{-1, 7\}$. **5.** V = $\{AC, AD, AE\}$.

5.2 Množiny bodů daných vlastností

1.



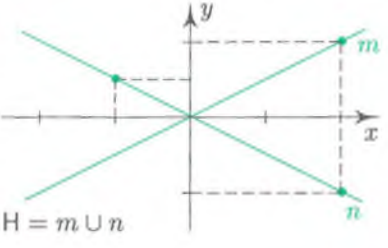
2.



M = $\{P, Q, R, T\}$
Množina M má 4 prvky.

3. M = $\{X; X \in m(S, 2\,\text{cm})\}$. **4.** c) M = $\{Y; Y \in l(S, 1\,\text{cm})\}$. **5.** Kružnice $r(R, 1\,\text{cm})$ bez průsečíků s přímkou AB, kde R je střed AB.

6. a)



b) $A = [2, 1]$, $B = [-1, -\frac{1}{2}]$, $C = [2, -1]$ atd.; c) $|x| = 2|y|$.

5.3 Konstrukce trojúhelníků a čtyřúhelníků

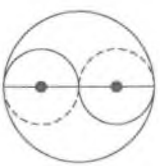
2. Přímka BC prochází bodem R, $BC \perp AR$; $|\sphericalangle RAB| = |\sphericalangle RAC| = 30°$. **3.** Je-li S průsečík úhlopříček PR a QT, pak buď $|\sphericalangle PSQ| = 60°$ nebo $|\sphericalangle PSQ| = 120°$. **4.** Přímka YZ je kolmá k odvěsně XY;

body Y a Z jsou průsečíky přímky YZ a tečen vedených z bodu X ke kružnici trojúhelníku XYZ vepsané. **5.** Pro $0° < x < 90°$ jsou dvě řešení, v ostatních případech řešení není. **6.** Pro $x < 3\,\text{cm}$ není žádné řešení, pro $x = 3\,\text{cm}$ je jedno, pro $x > 3\,\text{cm}$ čtyři řešení. **7.** Je-li R střed KL, $|\sphericalangle LKX| = 60°$, pak $M = \mapsto KX \cap k(R, 3\,\text{cm})$. Dvě řešení. **8.** b) Pro $x > 0$ vždy dvě řešení. **9.** Je-li R střed XY, je t_z přeponou v pravoúhlém $\triangle RYZ$. Pro $m > 2{,}5\,\text{cm}$ dvě řešení. **10.** Jedno řešení pro $x_0 = |B, AC|$; pro $x_0 < x < 4\,\text{cm}$ dvě řešení; pro $4\,\text{cm} \leq x$ jedno řešení. **11.** $m = n$; $m + n > 4\,\text{cm}$, tedy $y > 4\,\text{cm}$. **12.** Je-li $AC \cap BD = S$, pak v pravoúhlém trojúhelníku ABS je $|AS| = 2|BS|$. Narýsujte libovolný takový trojúhelník $A'B'S'$ a pak ho příslušně „zmenšete". **13.** Sestrojte $o(S, 3\,\text{cm})$ a LM, pak pravoúhlý $\triangle LMX$: bod X leží na Thaletově kružnici s průměrem LM, bod D leží na ose úsečky KN. **14.** Sestrojte $\sphericalangle XBY$: $|XBY| = 45°$. Úsečka BD leží na jeho ose.

5.4 Konstrukce kružnic s požadovanými vlastnostmi

1. Středy kružnic leží na ose úsečky AB. Pro $r < 1{,}5\,\text{cm}$ není řešení, pro $r = 1{,}5\,\text{cm}$ jedno řešení, pro $r > 1{,}5\,\text{cm}$ dvě řešení. **2.** Dvě kružnice, jejichž středem je těžiště T trojúhelníku KLM. $|TK| = \frac{2}{3}t = \frac{4}{3}\sqrt{3}$. Hledané kružnice: $a\left(T, (\frac{4}{3}\sqrt{3} + 2)\,\text{cm}\right)$, $b\left(T, (\frac{4}{3}\sqrt{3} - 2)\,\text{cm}\right)$.

3.



4. Kolík musí být současně ve vnějších oblastech obou kružnic, jejichž středy jsou středy kruhových záhonků a mají poloměry o 5 m větší než poloměry záhonků. **5.** Střed kružnice vepsané „křivočarému trojúhelníku" je v těžišti $\triangle ABC$.

6 Statistika

6.1 Statistické šetření, statistická jednotka, statistický soubor

3. Mezi kvantitativní znaky patří hmotnost a výška, ostatní znaky jsou kvalitativní. **4.** Věk a délka praxe v oboru. **5.** Např. místo, kde se byt nachází (obec, městský obvod, ulice apod.), podlaží, celková užitná plocha bytu, počet pokojů, kategorie bytu, cena bytu. **6.** Příklady kvalitativních znaků: příčina nehody, došlo ke zranění osob, překročila hmotná škoda 1 000 Kč; příklady kvantitativních znaků: vzniklá hmotná škoda, počet zraněných osob, věk řidiče. **7.** Tabulka četností teplot pacienta:

Teplota (°C)	35,7	36,5	36,6	36,7	36,8	36,9	37,0	37,1	37,2	37,3	37,5
Četnost	1	3	5	5	3	1	2	1	1	1	1

6.2 Aritmetický průměr, modus, medián

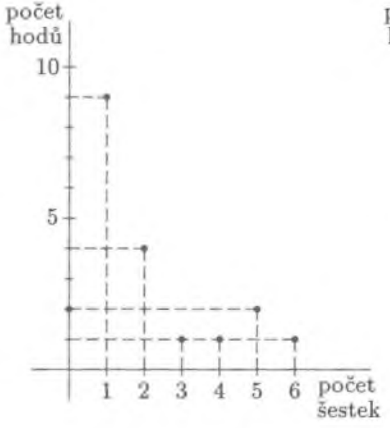
1. Tabulka četnosti srážek:

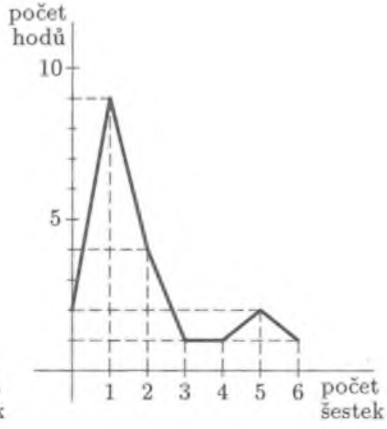
Množství srážek v mm	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Četnost	9	5	2	1	3	5	3	1	0	1	1

$\overline{x} = 3\,\text{mm}$, $\text{Mod}(x) = 0\,\text{mm}$, $\text{Med}(x) = 2\,\text{mm}$. **2.** $\overline{x} = 2$, $\text{Mod}(x) = 1$, $\text{Med}(x) = 1$. **3.** $\overline{x} = 10{,}9$, $\text{Mod}(x) = 9$, $\text{Med}(x) = 10{,}5$. **7.** 1. skupina: $\overline{x} = 160\,\text{cm}$, $\text{Med}(x) = 165\,\text{cm}$, $\text{Mod}(x) = 175\,\text{cm}$; 2. skupina: $\overline{x} = 155\,\text{cm}$, $\text{Med}(x) = 155\,\text{cm}$, $\text{Mod}(x) = 150\,\text{cm}$; 3. skupina: $\overline{x} = 160\,\text{cm}$, $\text{Med}(x) = 160\,\text{cm}$, $\text{Mod}(x) = 160\,\text{cm}$.

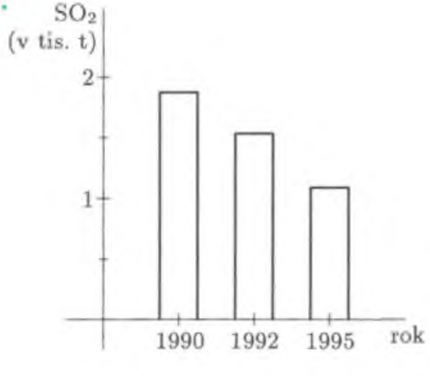
6.3 Grafy, diagramy

1.

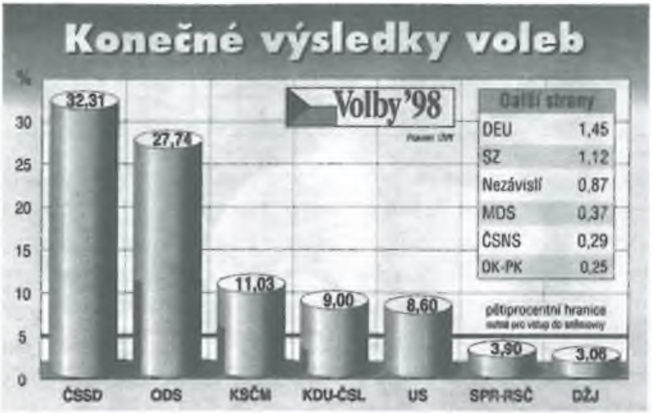




2.

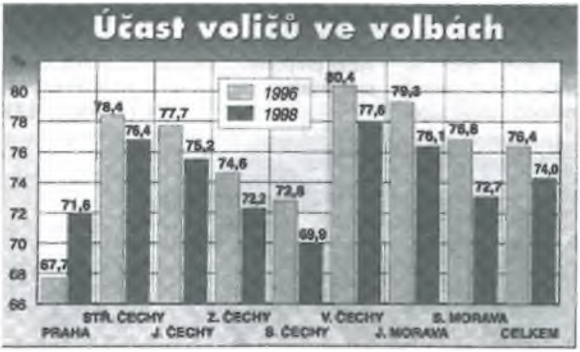


3.



4.

5.



6. Nova 234°43′; ČT 1 89°38′; ČT 2 12°58′; Premiéra 13°19′; Kabel plus film 1°05′; ostatní 8°17′.

7 Matematika v praxi

7.3 Výroba a plánování

1. a) Taška 4 Kč, 1 kg jablek 14 Kč; b) $(14x+4)$ Kč. **2.** a) $1\,125\,\mathrm{dm}^3 = 1\,125\,l$. **3.** a) $Z - A - B - C - Z$. b) Cesta Z–B a zpět je o 7 km delší než cesta Z–A a zpět, auto spotřebuje o 0,56 l benzínu více. Cesta je přibližně o 11 Kč nákladnější. 1 q brambor by měl být o 20 haléřů levnější, než u dodavatele A. c) Cesta je dlouhá 23 km. Auto ji projede přibližně za půl hodiny, objednávku vyřídí řidič za jednu hodinu. Celkem potřebuje 90 minut. Vyjel asi o půl osmé. **4.** a) Přibližně 36,8 kg; b) 980 Kč. **5.** a) 25 dětí. b) Za 6 h 40 min. c) Zbývalo ještě 300 keřů na 15 česáčů, tj. 20 keřů na jednoho. Česali dalších 15 hodin. Celá sklizeň se protáhla na 4 dny a 6 hodin.

8 Souhrnná cvičení II

1. 42 km/h, 54 km/h. **2.** V 7 h, 30 km. **3.** 2 h 20 min. **4.** 1 h 15 min. **5.** Ne, přibližně 43,3 °C. **6.** Přímka t rovnoběžná s přímkou AB, $|t,p| = 2|t,AB|$. **7.** Vrchol B leží na kružnici $k(C, 3\,\mathrm{cm})$ a na Thaletově kružnici s průměrem AC, $|\sphericalangle BAD| = 80°$. **8.** Vrcholy A, B, C, D leží na kružnici s průměrem AC. **9.** Obsahy trojúhelníků PQT a PQR jsou si rovny, od obou je „oddělen" trojúhelník PQX. **13.** Úhlopříčka AC dělí lichoběžník na dva trojúhelníky s výškou $v = 3$ cm. Má-li být obsah trojúhelníku ACD roven polovině obsahu trojúhelníku ABC, musí $|AB| = 2|CD|$. Základna CD lichoběžníku $ABCD$ má délku 2 cm.

Výsledky a hodnocení testů

Za každou správně vyřešenou úlohu získáte v testu:

č. 1 — 1 bod
č. 2 — 2 body
č. 3 — 4 body
č. 4 — 3 body

Pokud se nodopustíte žádné chyby, můžete za řešení každého testu získat celkem 12 bodů. A jak ohodnotíte svůj výkon?
Zisk 0–4 bodů je ještě nedostačující, musíte se ještě hodně učit! Přejeme vám dostatek vytrvalosti.
Zisk 5–6 bodů je již dostatečný, ale neměli byste se s ním spokojit.
Zisk 7–8 bodů je skutečně dobrý, ale možná by se dal ještě vylepšit.
Zisk 9–10 bodů je velmi dobrý.
Zisk 11-12 bodů svědčí o tom, že se v matematické látce dobře vyznáte. Blahopřejeme.

Test č. 1

1. a) -9; b) -63. **2.** $3x^3 + 5x^2 + 5$. **3.** $-4a^2 + ab$. **4.** $4x^2 + x$. **5.** $2a^2 + 3b^2 + 4c^2$. **6.** a) $6a^2 + 5a - 6$; b) $2b^3 + 3b^2 - 1$; c) $c^3 - 21c + 20$. **7.** a) $4a^2 + 12a + 9$; b) $b^2 - 10b + 25$; c) $c^8 - 2c^4 + 1$; d) $\frac{1}{4} - 2d + 4d^2$. **8.** a) $x^2 - 4y^2$; b) $z^2 - 1$; c) $9p^4 - 1$; d) $0{,}64b^2 - 0{,}16a^2$. **9.** a) $4xy^3$, $x \neq 0$; b) $-3x^2y$, $y \neq 0$; c) $2xy^2$, $x \neq 0$, $y \neq 0$; d) -1, $x \neq 0$, $y \neq$ $\neq 0$. **10.** a) $-x^2 + 2x - 3$, $x \neq 0$; b) $-5a^2 + 10$. **11.** a) $2x(6x + 1)$; b) $2x(-2x^2 + y)$. **12.** a) $3x(x^2 + 2x - 1)$; b) $(5x + 2)^2$; c) $(4a - 1)(4a + 1)$; d) $5(x + y)^2$.

Test č. 2

1. $\mathsf{T} = \{\triangle ABS, \triangle BCS, \triangle CDS, \triangle DES, \triangle EFS, \triangle FAS, \triangle ACE, \triangle BDF\}$ **2.** $\mathsf{T} = \{\triangle XYZ_1, \triangle XYZ_2, \triangle XYZ_3, \triangle XYZ_4\}$; body Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 jsou vrcholy obdélníku složeného ze dvou čtverců se společnou stranou XY.

3. Konstrukce

1. T	libovolný bod $T \in k(S, 3\,\mathrm{cm})$
2. t	$t \perp ST$ a $T \in t$
3. m	$S \in m$ a $\lvert\sphericalangle(ST, m)\rvert = 60°$
4. X	$X = t \cap m$
5. d	$d = \lvert XS\rvert$
6. m	$m = l(S, d)$

4. $\alpha + \beta + \gamma = 180°$; $\alpha = 15°$, $\beta = 45°$, $\gamma = 120°$. **5.** $\triangle KLM$ je pravoúhlý, $\triangle KLM \cong \triangle LKN$; body M, N leží na Thaletově kružnici s průměrem KL. Proto poloměr $r = 2{,}5\,\mathrm{cm}$.

6. Konstrukce

1. V	$V \in p$
2. G	$\lvert VG\rvert = 3\,\mathrm{cm}$ a $VG \perp p$
3. T	$T \in p$ a $\lvert GT\rvert = 3{,}5\,\mathrm{cm}$
4. f	$G \in f$ a $\lvert\sphericalangle(GV, p)\rvert = 45°$
5. E	$E = f \cap p$
6. F	T je střed EF

a) Dva trojúhelníky v polorovině pG, dva v polorovině opačné k pG. b) $t_g < v_g$.

Test č. 3

1. a) $x = 5$; b) $y = -8$; c) $a = \frac{1}{4}$; d) $y = 13$. **2.** a) $r \neq 0$, $r = 3$; b) $x \neq 0$, rovnice nemá řešení; c) $m \neq 0$, $m = \frac{1}{6}$; d) $a \neq 0$, $a = -8$. **3.** a) $v = \frac{S_1}{a}$, $v = \frac{2S_2}{a}$, $v = \frac{2S_3}{a+c}$; b) $a = \frac{S_1}{v}$, $a = \frac{2S_2}{v}$, $a = \frac{2S_3 - c \cdot v}{v}$.

Test č. 4

1. $x = 12\,\mathrm{cm}$, $a = 21\,\mathrm{cm}$, $b = 30\,\mathrm{cm}$. **2.** P 12 kg, H 10 kg, V 15 kg, L 13 kg. **3.** 8 levnějších, 16 dražších. **4.** a) 10:15 h, 2 km; b) 4 min.

PhDr. Alena Šarounová, CSc., PhDr. Ivan Bušek,
Mgr. Jitka Růžičková, Venceslava Väterová

Matematika 8, II. díl

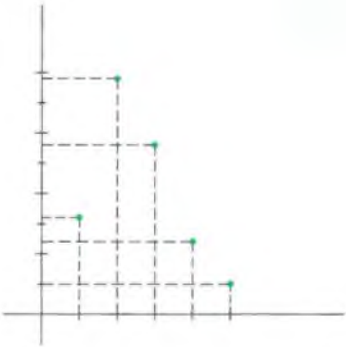
Obálku navrhla Miroslava Jakešová
Ilustroval Martin Mašek
Vydalo nakladatelství Prometheus, spol. s r. o.,
Žitná 25, 117 01 Praha 1, v roce 1999
http://www.prometheus-nakl.cz
Edice Učebnice pro základní školy
Odpovědná redaktorka Mgr. Vladimíra Šilhánková
Sazbu a technické kresby programy TEX a METAFONT
připravil Jiří Rákosník
Vytiskly Tiskárny Havlíčkův Brod, a. s.,
Husova 1881, 580 01 Havlíčkův Brod

Dotisk 1. vydání

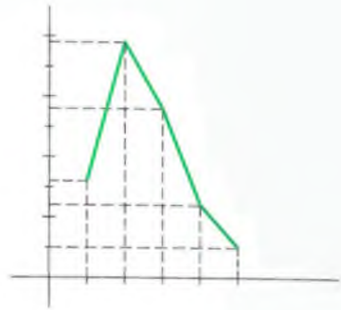
97 11 278

ISBN 80–7196–127–2

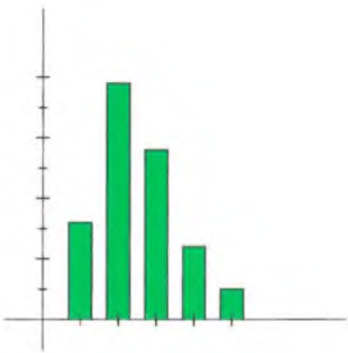
DIAGRAMY



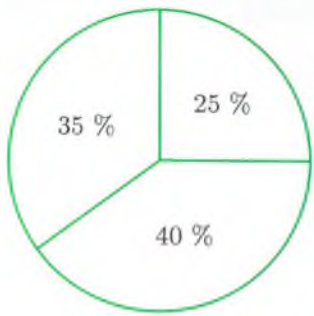
bodový



spojnicový

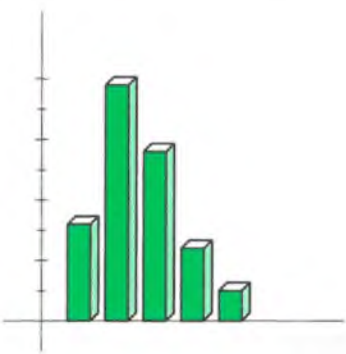


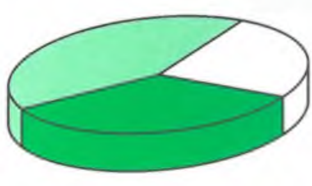
sloupkový



kruhový

Graficky upravené diagramy pro tisk a reklamu





PROMETHEUS
97 11 278

ISBN 80-7196-127-2