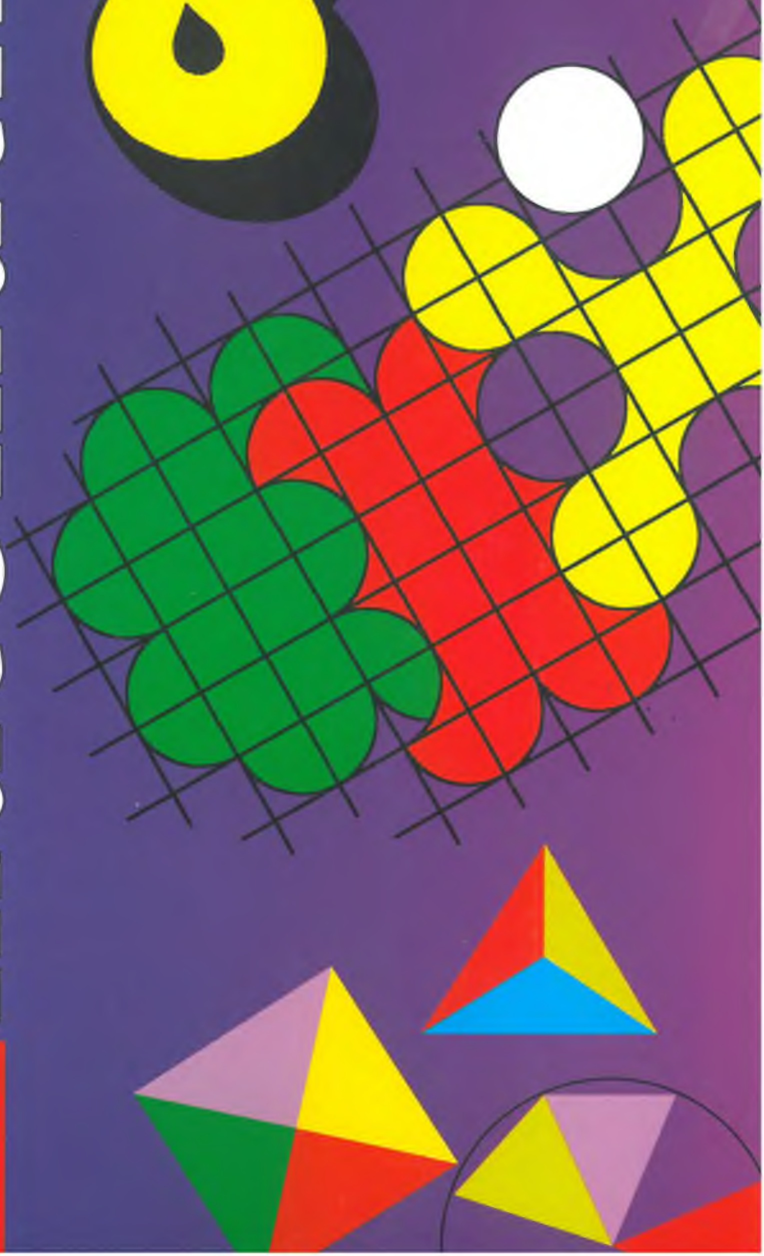
matematika 8

I·DÍL



PROMETHEUS

MOCNINY S PŘIROZENÝM MOCNITELEM

$5^2, \quad 7^3, \quad (-3)^4$	Mocnina	a^n; a je reálné číslo, n je přirozené číslo
$5^2 = 5 \cdot 5 = 25$ $0^3 = 0$		$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ \dots \ \cdot a}_{n \text{ činitelů}}$
$2^3 + 2 \cdot 2^3 = 3 \cdot 2^3$	Sčítání mocnin	$ka^n + la^n = (k+l)a^n$
$6^2 \cdot 6^3 = 6^5$	Násobení mocnin	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
$3^5 : 3^2 = \frac{3^5}{3^2} = 3^3$	Dělení mocnin	$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $m > n$
$(3^2)^3 = 3^6$	Umocňování mocnin	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
$(2 \cdot 3)^4 = 2^4 \cdot 3^4$	Mocnina součinu	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2}$	Mocnina podílu	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \ b \neq 0$

DRUHÁ A TŘETÍ ODMOCNINA

$\sqrt{4} = 2 \Rightarrow 2^2 = 4$	Odmocnina	$\sqrt{a} = x \Rightarrow x^2 = a, \ a \geqq 0$
$\sqrt[3]{8} = 2 \Rightarrow 2^3 = 8$		$\sqrt[3]{b} = y \Rightarrow y^3 = b, \ b \geqq 0$
$\sqrt{5} + 3 \cdot \sqrt{5} = 4 \cdot \sqrt{5}$	Sčítání odmocnin	$k\sqrt{a} + l\sqrt{a} = (k+l)\sqrt{a}$
$\sqrt{5} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{5 \cdot 3}$	Násobení odmocnin	$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$
$\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{8 \cdot 27}$	Násobení odmocnin	$\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a \cdot b}$

matematika

8

I. DÍL

PROMETHEUS
PRAHA

Učebnice byla zpracována ve spolupráci s JČMF.

Zpracovali: PhDr. Alena Šarounová, CSc.
PhDr. Ivan Bušek
Mgr. Jitka Růžičková
Věnceslava Väterová

Lektorovali: doc. RNDr. Štefan Schwabik, DrSc.
RNDr. Libuše Hozová
doc. RNDr. Jindřich Bečvář, CSc. (koordinátor)

Revizi výsledků provedla Ing. Iva Šilhánková.

Schválilo MŠMT ČR čj. 16669/98–22 dne 18. 6. 1998
k zařazení do seznamu učebnic pro základní školy.

Dotisk 1. vydání

ISBN 80–7196–124–8

Obsah

Milí přátelé,

již tři roky se společně s vámi učíme v hodinách matematiky. Naučili jsme se počítat s čísly přirozenými, celými i desetinnými a pracovat s proměnnými. Sestrojovali jsme grafy a zjišťovali, co z nich můžeme vyčíst. Poznali jsme řadu geometrických útvarů a jejich vlastností. Ukázali jsme si, že matematika je vhodným nástrojem k řešení úloh z praktického života. V Matematické herně jsme mohli bystřit svůj vtip, sami objevovat nové poznatky a tvořit zajímavé úlohy k procvičování i zábavě.

Za dva roky se rozloučíme se základní školou a budeme se věnovat přípravě na budoucí povolání. Každý z nás v něm bude potřebovat něco z matematiky. Proto se jí nevyhýbejte. Nenechte se odradit případným nezdarem, nikomu se nepovede všechno „na první pokus“. Sami víte, kolikrát jste spadli, než jste se naučili jezdit na kole. A teď se vám zdá taková jízda snadná a krásná. S poznáváním je to podobné, přináší nejen užitek, ale i radost.

Ať se nám společné dílo daří!

Petr, Vendulka, Lenka, Honza

1 DRUHÁ MOCNINA A ODMOCNINA

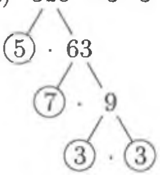
1.1 Druhá mocnina racionálních čísel

Zopakujme si nejprve dvě úlohy ze 7. ročníku.

1 Rozložte na prvočinitele čísla a) 315, b) 750.

Řešení

a) $315 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$



Součin $3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$
můžeme zapsat: $3^2 \cdot 5 \cdot 7$.

b) $750 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$

Součin $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$
můžeme zapsat: $2 \cdot 3 \cdot 5^3$.

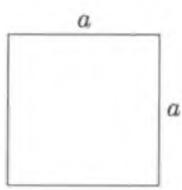
Zápis 3^2 znamená totéž jako součin $3 \cdot 3$.
Čteme: tři na druhou.

Zápis 5^3 znamená totéž jako součin $5 \cdot 5 \cdot 5$.
Čteme: pět na třetí.

2 Zahrada má tvar čtverce se stranou délky 20 m. Jaká je výměra zahrady?

Řešení

Vypočítáme výměru zahrady, tj. obsah čtverce o straně dlouhé 20 m.



$$\underline{S = a \cdot a}$$
$$S = 20 \cdot 20$$
$$\underline{S = 400}$$
$$S = 400\,\mathrm{m}^2$$

Výměra zahrady je $400\,\mathrm{m}^2$.

Součin $20 \cdot 20$ můžeme zapsat jako 20^2.
Čteme: dvacet na druhou.

Také součin $a \cdot a$ můžeme zapsat jako a^2.
Čteme: a na druhou.

Součin sobě rovných činitelů se nazývá **mocnina**.
Součin dvou sobě rovných činitelů je **druhá mocnina**.
Součin tří sobě rovných činitelů je **třetí mocnina**.

Např. $3 \cdot 3 = 3^2$ $\qquad 20 \cdot 20 = 20^2$ $\qquad 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3$

$$3 \cdot 3 = 3^2$$

činitel činitel **druhá mocnina**

oba činitelé se sobě rovnají

$\boxed{3^2}$

mocnitel (exponent) znamená počet sobě rovných činitelů

základ mocniny udává, čemu se rovná každý činitel

3 Přečtěte mocniny:

2^2; $\quad 2^3$; $\quad 3^2$; $\quad 4^2$; $\quad 10^2$; $\quad 1^3$; $\quad 12^2$; $\quad 12{,}5^2$; $\quad \left(\frac{3}{4}\right)^3$; $\quad (-13)^2$

U každé mocniny určete základ mocniny a mocnitele.
Každou mocninu zapište jako součin sobě rovných činitelů.

4 Zapište druhé mocniny jako součiny sobě rovných činitelů a vypočtěte je: $\quad 7^2$; $\quad 24^2$; $\quad 3{,}5^2$; $\quad \left(\frac{2}{5}\right)^2$; $\quad (-8)^2$.

Řešení

$$7^2 = 7 \cdot 7 = 49$$
$$24^2 = 24 \cdot 24 = 576$$
$$3{,}5^2 = 3{,}5 \cdot 3{,}5 = 12{,}25$$
$$\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$$
$$(-8)^2 = (-8) \cdot (-8) = 64$$

Pozor na zápis závorek:

$$\frac{2^2}{5} = \frac{2 \cdot 2}{5} = \frac{4}{5} \qquad \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$$

$$-8^2 = -(8 \cdot 8) = -64 \qquad (-8)^2 = (-8) \cdot (-8) = 64$$

Druhé mocniny některých čísel dokážeme vypočítat zpaměti. V ostatních případech provedeme písemné násobení nebo použijeme kalkulačku. Druhé mocniny celých nezáporných čísel do 1 000 jsou rovněž uvedeny v *Tabulkách pro ZŠ*.

5 Doplňte zpaměti tabulku druhých mocnin přirozených čísel:

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a^2															

6 Vypočtěte a porovnejte výsledky:

a) $2^2 \cdot 3^2$; $(2 \cdot 3)^2$ b) $7^2 \cdot 10^2$; $(7 \cdot 10)^2$ c) $5^2 \cdot 0{,}1^2$; $(5 \cdot 0{,}1)^2$

Řešení

a) $2^2 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9 = \underline{36}$

$(2 \cdot 3)^2 = 6^2 = \underline{36}$ $\qquad (2 \cdot 3)^2 = 2^2 \cdot 3^2$

b) $7^2 \cdot 10^2 = 49 \cdot 100 = \underline{4\,900}$

$(7 \cdot 10)^2 = 70^2 = 70 \cdot 70 = \underline{4\,900}$ $\qquad (7 \cdot 10)^2 = 7^2 \cdot 10^2$

c) $5^2 \cdot 0{,}1^2 = 25 \cdot 0{,}01 = \underline{0{,}25}$

$(5 \cdot 0{,}1)^2 = 0{,}5^2 = 0{,}5 \cdot 0{,}5 = \underline{0{,}25}$ $\qquad (5 \cdot 0{,}1)^2 = 5^2 \cdot 0{,}1^2$

Ve všech případech se druhá mocnina součinu čísel rovnala součinu druhých mocnin jednotlivých činitelů.
Obecně platí:

$$(a \cdot b)^2 = (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) = (a \cdot a) \cdot (b \cdot b) = a^2 \cdot b^2$$

Pro všechna čísla a, b platí:

$$(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$$

7 Vypočtěte druhé mocniny čísel:

a) 10
100
1000

b) 0,1
0,01
0,001

Porovnejte v úloze a) počet nul, v úloze b) počet desetinných míst u základu mocniny a u výsledku.

Řešení

a)

$$\begin{aligned} 10^2 &= 10 \cdot 10 &&= 100 \\ 100^2 &= 100 \cdot 100 &&= 10\,000 \\ 1\,000^2 &= 1\,000 \cdot 1\,000 &&= 1\,000\,000 \end{aligned}$$

Výsledek je zakončen dvojnásobným počtem nul než základ mocniny.

b)

$$\begin{aligned} 0{,}1^2 &= 0{,}1 \cdot 0{,}1 &&= 0{,}01 \\ 0{,}01^2 &= 0{,}01 \cdot 0{,}01 &&= 0{,}000\,1 \\ 0{,}001^2 &= 0{,}001 \cdot 0{,}001 &&= 0{,}000\,001 \end{aligned}$$

Výsledek má dvojnásobný počet desetinných míst než základ mocniny.

8 Bez tabulek a kalkulačky vypočtěte:

a) 70^2	b) $0{,}5^2$	c) 300^2
900^2	$0{,}12^2$	$1{,}4^2$
$13\,000^2$	$0{,}015^2$	

Řešení

Použijeme větu o umocňování součinu: $(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$.

a) Základ mocniny napíšeme jako součin, ve kterém je jeden činitel 10 nebo 100 nebo 1 000. Tento součin umocníme tak, že nejprve umocníme každého činitele a pak mocniny činitelů vynásobíme.

$$\begin{aligned} 70^2 &= (7 \cdot 10)^2 = 7^2 \cdot 10^2 = 49 \cdot 100 = 4\,900 \\ 900^2 &= (9 \cdot 100)^2 = 81 \cdot 10\,000 = 810\,000 \\ 13\,000^2 &= (13 \cdot 1\,000)^2 = 169 \cdot 1\,000\,000 = 169\,000\,000 \end{aligned}$$

b) Základ mocniny nejprve napíšeme jako součin, ve kterém je jeden činitel 0,1 nebo 0,01 nebo 0,001. Součin umocníme tak, že umocníme zvlášť každého činitele a pak mocniny činitelů vynásobíme.

$$\begin{aligned} 0{,}5^2 &= (5 \cdot 0{,}1)^2 = 5^2 \cdot 0{,}1^2 = 25 \cdot 0{,}01 = 0{,}25 \\ 0{,}12^2 &= (12 \cdot 0{,}01)^2 = 144 \cdot 0{,}000\,1 = 0{,}014\,4 \\ 0{,}015^2 &= (15 \cdot 0{,}001)^2 = 225 \cdot 0{,}000\,001 = 0{,}000\,225 \end{aligned}$$

c) $300^2 = 90\,000$

$1{,}4^2 = 1{,}96$

9 Určete zpaměti druhé mocniny čísel:

$4;\quad (-4);\quad 0{,}08;\quad (-0{,}08);\quad 30\quad (-30);\quad \frac{2}{5};\quad \left(-\frac{2}{5}\right)$

Druhá mocnina libovolného čísla je nezáporné číslo.

10 Vypočtěte:

a) $-4^2 + 2 \cdot 3^2$ b) $(-4)^2 + (2 \cdot 3)^2$

c) $\dfrac{-5^2 + 15^2}{(2 \cdot 5)^2}$ d) $\dfrac{(-5)^2 + 15^2}{2 \cdot 5^2}$

Řešení

Než začneme počítat, ujasníme si, co je základem mocniny.

a) $-4^2 + 2 \cdot 3^2 = -16 + 2 \cdot 9 = -16 + 18 = 2$

základem mocniny je číslo 3

základem mocniny je číslo 4

b) $(-4)^2 + (2 \cdot 3)^2 = 16 + 36 = 52$

základem mocniny je součin $2 \cdot 3 = 6$

základem mocniny je číslo -4

c) $\dfrac{-5^2 + 15^2}{(2 \cdot 5)^2} = \dfrac{-25 + 225}{10^2} = \dfrac{200}{100} = 2$

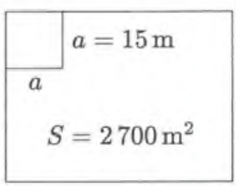
d) $\dfrac{(-5)^2 + 15^2}{2 \cdot 5^2} = \dfrac{25 + 225}{2 \cdot 25} = \dfrac{250}{50} = 5$

11 Pozemek pro zahrádkářskou kolonii má celkovou výměru $2\,700\,\mathrm{m}^2$ a lze ho rozdělit na zahrádky tvaru čtverce o stranách dlouhých 15 m. Na kolik takových zahrádek může být pozemek rozdělen?

Řešení

Výměra jedné zahrádky:

$$S = a \cdot a = a^2$$
$$S = 15^2$$
$$S = 225$$
$$S = 225\,\mathrm{m}^2$$



Počet zahrádek: $2\,700\,\mathrm{m}^2 : 225\,\mathrm{m}^2 = 12$

Pozemek by mohl být rozdělen na 12 čtvercových zahrádek.

Zápis a^2 znamená obsah čtverce o straně a. Proto se také někdy říká druhé mocnině čísla a „čtverec čísla a“. Např. číslo 225 je „čtverec čísla 15“.

1

5
50
500
0,5
0,05
0,7
0,3
40
1,2
600
0,1
80
1,3
0,4
0,11
0,2
90
1,4
0,15
0,6

CVIČENÍ

1. Rozložte čísla 350, 360, 375, 480, 567, 735 na prvočinitele. Rozklad zapište pomocí mocnin.

2. Vypočtěte:

a) $1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2$	b) $9^2 + 12^2 - 15^2$
c) $(4^2 + 2^2) \cdot 5^2$	d) $(14^2 - 13^2) : 9$
e) $(6^2 + 8^2) \cdot 10^2$	f) $(11^2 + 7^2) : 10$
g) $(15^2 - 9^2) : 12^2$	h) $2^2 \cdot 5^2 + 3^2 \cdot 10^2$

3. Zapište druhé mocniny daných čísel jako součin sobě rovných činitelů a vypočtěte je bez použití tabulek a kalkulačky.

A.	B.
a) 16^2	a) 17^2
b) $1{,}5^2$	b) $1{,}4^2$
c) $0{,}83^2$	c) $0{,}61^2$
d) $\left(\frac{5}{7}\right)^2$	d) $\left(\frac{4}{9}\right)^2$
e) $(-11)^2$	e) $(-12)^2$

4. Vypočtěte bez použití tabulek i kalkulačky:

a) 20^2; 500^2; $6\,000^2$; 110^2; $1\,200^2$

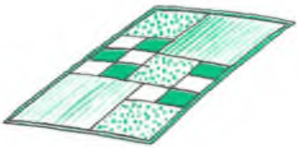
b) $0{,}3^2$; $0{,}4^2$; $0{,}07^2$; $1{,}3^2$; $0{,}014^2$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^2$; $\left(-\frac{1}{2}\right)^2$; $\left(\frac{3}{4}\right)^2$; $\frac{3^2}{4}$; $\frac{3}{4^2}$

5. Vypočtěte (bez tabulek a kalkulačky):

A.	B.
a) $50^2 + 5^2 + 0{,}5^2$	a) $40^2 + 4^2 + 0{,}4^2$
b) $(600^2 + 200^2) : 100^2$	b) $(1\,200^2 + 800^2) : 100^2$
c) $1{,}5^2 + 0{,}15^2$	c) $1{,}4^2 + 0{,}14^2$
d) $0{,}13^2 - 0{,}013^2$	d) $0{,}11^2 - 0{,}011^2$

6. Maminka ušila přehoz na postel ze zbytků různých látek způsobem, kterému se říká PATCHWORK. Jak můžeme vidět na obrázku, je přehoz sestaven ze čtverců. Délka strany malých čtverců je 300 mm.



Vypočítejte, kolik cm^2 látky bylo zapotřebí

a) na všechny malé světlé čtverce,
b) na všechny malé tmavé čtverce,
c) na všechny puntíkované čtverce,
d) na všechny pruhované čtverce.

7. Přirozená čísla od jedné do deseti zapište jen pomocí čísla 2, závorek a znamének početních operací.
Vzor: $1 = 2 : 2$
$2 = 2^2 : 2$
$3 = 2^2 - 2 : 2$ atd.

8. Vypočtěte:

A.
a) $3 \cdot 5^2 - 4^2$
b) $(3 \cdot 5)^2 - 4^2$
c) $3 \cdot (5^2 - 4^2)$
d) $3 \cdot (5 - 4)^2$

B.
a) $-2^2 \cdot 6 + 7^2$
b) $(-2)^2 \cdot 6 + 7^2$
c) $(-2)^2 \cdot (6 + 7)^2$
d) $(-2 \cdot 6)^2 + 7^2$

9. Vypočtěte:

a) $\dfrac{(-8)^2 + (2 \cdot 3)^2}{(2 \cdot 5)^2}$
b) $\dfrac{-8^2 + (2 \cdot 3)^2}{2 + 5}$
c) $\dfrac{-12^2 + (3 \cdot 5)^2}{(4 + 5)^2}$
d) $\dfrac{(-12)^2 + 3 \cdot 5^2}{4 \cdot 5^2}$

10. Doplňte tabulku a porovnejte hodnoty výrazů $2x$ a x^2.

x	-2	-1	0	0,5	1	1,5	2	10	30
$2x$									
x^2									

11. Určete zpaměti druhé mocniny čísel na proužku 1, 2.

1.2 Určování druhé mocniny pomocí tabulek a kalkulačky

1 Určete pomocí tabulek druhou mocninu čísla 324.

Řešení

Prohlédněte si tabulku M1 v *Tabulkách pro základní školu.*
V prvním sloupci, nadepsaném n, jsou pod sebou seřazena celá čísla od 0 do 1 000.

Ve sloupci nadepsaném n^2 jsou uvedeny jejich druhé mocniny.

n	n^2	$\sqrt{n}$	n^3	$\sqrt[3]{n}$
320	102 400	17,89	32 768 000	6,84
321	103 041	92	33 076 161	85
322	103 684	94	33 386 248	85
323	104 329	97	33 698 267	86
324	104 976	18,00	34 012 224	87
325	105 625	18,03	34 328 125	6,88
326	106 276	06	34 645 976	88
327	106 929	08	34 965 783	89
328	107 584	11	35 287 552	90
329	108 241	14	35 611 289	90

Máme určit 324^2:
Ve sloupci nadepsaném n vyhledáme číslo 324 a v sousedním sloupci, nadepsaném n^2, čteme v témže řádku jeho druhou mocninu.

n	n^2	$\sqrt{n}$	n^3	$\sqrt[3]{n}$
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
324	104 976			
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.

$324^2 = 104\,976$

Takto můžeme v tabulce M1 vyhledat druhou mocninu libovolného nezáporného celého čísla od nuly do 1 000.

Pomocí tabulky M1 a vztahu

$$(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$$

dokážeme určit i druhé mocniny některých čísel, která nejsou v tabulce přímo uvedena.
V takovém případě nejprve napíšeme základ mocniny jako součin dvou činitelů, z nichž jeden je celé číslo uvedené v tabulkách a druhý činitel je buď 10, 100, 1 000,..., nebo 0,1; 0,01; 0,001;... atd. Součin umocníme tak, že umocníme každého činitele a pak tyto druhé mocniny mezi sebou vynásobíme.

2 Určete pomocí tabulek druhé mocniny čísel 3 260; 32 700; 32,8; 3,21.

Řešení

Máme určit $3\,260^2$:
$3\,260^2 = (326 \cdot 10)^2 = 326^2 \cdot 10^2 = 106\,276 \cdot 100 = 10\,627\,600$

Druhou mocninu čísla 10 určíme zpaměti.

Druhou mocninu čísla 326 vyhledáme v tabulkách.

Máme určit $32\,700^2$:
$32\,700^2 = (327 \cdot 100)^2 = 327^2 \cdot 100^2 = 106\,929 \cdot 10\,000 = 1\,069\,290\,000$

Máme určit $32{,}8^2$:
$32{,}8^2 = (328 \cdot 0{,}1)^2 = 328^2 \cdot 0{,}1^2 = 107\,584 \cdot 0{,}01 = 1\,075{,}84$

Máme určit $3{,}21^2$:
$3{,}21^2 = (321 \cdot 0{,}01)^2 = 321^2 \cdot 0{,}01^2 = 103\,041 \cdot 0{,}000\,1 = 10{,}304\,1$

Pomocí tabulky M1 můžeme zjistit i přibližnou hodnotu druhé mocniny čísla, které má více než tři platné číslice. Dané číslo nejprve zaokrouhlíme tak, abychom mohli druhou mocninu zaokrouhleného čísla přímo vyhledat v tabulkách.

3 Určete pomocí tabulek druhé mocniny čísel 3 286; 32,25.

Řešení

Při hledání přibližné hodnoty čísla $3\,286^2$ postupuje takto:

$$3\,286^2 \doteq 3\,290^2 = (329 \cdot 10)^2 = 108\,241 \cdot 100 = 10\,824\,100$$

Podobně zjistíme přibližnou hodnotu čísla $32{,}25^2$:

$$32{,}25^2 \doteq 32{,}3^2 = (323 \cdot 0{,}1)^2 = 104\,329 \cdot 0{,}01 = 1\,043{,}29$$

4 Určete druhé mocniny čísel 169; 3 248; 1,69; 75,321 pomocí kalkulačky.

Řešení

Nejprve si prohlédněte kalkulačku, se kterou pracujete. Většina kalkulaček je opatřena tlačítkem označeným x^2.

Máme určit 169^2.

Stiskněte tlačítka v následujícím pořadí:

$\boxed{1}\ \boxed{6}\ \boxed{9}\ \boxed{x^2}$, na displeji se objeví výsledek 28 561.

Máme určit $3\,248^2$:

$\boxed{3}\ \boxed{2}\ \boxed{4}\ \boxed{8}\ \boxed{x^2} = 10\,549\,504$

Máme určit $1{,}69^2$:

$\boxed{1}\ \boxed{\cdot}\ \boxed{6}\ \boxed{9}\ \boxed{x^2} = 2{,}856\,1$

2

0,8

$-0{,}8$

0,08

80

90

-900

0,09

$\frac{1}{9}$

$\frac{2}{5}$

$\frac{3}{7}$

$-\frac{1}{5}$

$-0{,}5$

1,2

120

0,12

$-\frac{1}{2}$

Druhou mocninu daného čísla můžeme určit také násobením.

Např. 169^2:

$\boxed{1}\ \boxed{6}\ \boxed{9}\ \boxed{\times}\ \boxed{1}\ \boxed{6}\ \boxed{9}\ \boxed{=}$, na displeji se objeví 28 561.

Máme určit $75{,}321^2$:

$\boxed{7}\ \boxed{5}\ \boxed{\cdot}\ \boxed{3}\ \boxed{2}\ \boxed{1}\ \boxed{x^2}$ $= 5\,673{,}253\,041$

Pozor! Některé kalkulačky mají na displeji pouze 8 míst a zobrazí číslo 5 673,253 041 jako 5 673,253 0. Některé kalkulačky zbytek desetinných míst prostě „useknou“, jiné je zaokrouhlí.

5 Druhé mocniny čísel 65; 328; 4 561; 2,37; 75,18; 0,824 5 určete nejprve pomocí tabulek a potom pomocí kalkulačky. Výsledky zapište do tabulky a porovnejte je. Na kolik platných číslic je třeba druhé mocniny zaokrouhlit, aby se nelišily výsledky získané pomocí kalkulačky od výsledků vyčtených z tabulek?

Řešení

x	x^2 pomocí tabulek	x^2 pomocí kalkulačky
65	4 225	4 225
328	107 584	107 584
4 561	20 793 600	20 802 721
2,37	5,616 9	5,616 9
75,18	5 655,04	5 652,032 4
0,824 5	0,680 625	0,679 800 25

$20\,793\,600 \doteq 20\,800\,000$
$20\,802\,721 \doteq 20\,800\,000$

Druhé mocniny jsme zaokrouhlili na tři platné číslice.

$5\,655{,}04 \doteq 5\,700$
$5\,652{,}032\,4 \doteq 5\,700$

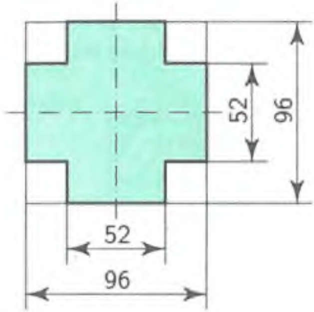
Druhé mocniny jsme zaokrouhlili na dvě platné číslice.

$0{,}680\,625 \doteq 0{,}68$
$0{,}679\,800\,25 \doteq 0{,}68$

Druhé mocniny jsme zaokrouhlili na dvě platné číslice.

6 Vypočtěte obsah barevně vyznačené plochy. Pracujte s pamětí kalkulačky. Rozměry v obrázku jsou v milimetrech.

Řešení



Obsah barevně vyznačené plochy vypočítáme jako rozdíl obsahu čtverce o straně délky 96 mm a čtyř malých čtverců, z nichž každý má stranu dlouhou (96 mm − 52 mm) : 2 = 22 mm.

$S = (96^2 - 4 \cdot 22^2)\,\mathrm{mm}^2$

Před začátkem výpočtu se musíme přesvědčit, že v paměti kalkulačky je 0.

$\boxed{9}\ \boxed{6}\ \boxed{x^2}\ \boxed{\mathrm{M+}}\ \boxed{2}\ \boxed{2}\ \boxed{x^2}\ \boxed{\times}\ \boxed{4}\ \boxed{=}\ \boxed{\mathrm{M-}}\ \boxed{\mathrm{MR}} = 7\,280$

Nebo:

$\boxed{2}\ \boxed{2}\ \boxed{x^2}\ \boxed{\times}\ \boxed{4}\ \boxed{=}\ \boxed{\mathrm{M+}}\ \boxed{9}\ \boxed{6}\ \boxed{x^2}\ \boxed{-}\ \boxed{\mathrm{MR}}\ \boxed{=}$

$S = 7\,280\,\mathrm{mm}^2 = 72{,}80\,\mathrm{cm}^2$

Obsah barevně vyznačené plochy je $72{,}8\,\mathrm{cm}^2$.

CVIČENÍ

1. Určete z tabulek druhé mocniny čísel nebo jejich přibližné hodnoty.

A.	B.
a) 146; 749	a) 215; 819
b) 2 900; 8 410	b) 7 200; 9 230
c) 5,6; 6,24	c) 7,8; 6,73
d) 3 546; 5 123	d) 4 376; 5 674
e) 7,159; 86,15	e) 7,947; 89,65

2. Odhadněte druhé mocniny čísel:
65; 178; 5 342; 7,6; 4,561; 45,61; 0,456 1

3. Pomocí kalkulačky zjistěte druhé mocniny čísel:

A.	B.
a) 46; 456	a) 67; 654
b) 3 521; 9874	b) 5 612; 9876
c) 7,8; 12,4	c) 5,6; 21,5
d) 0,48; 6,58	d) 0,74; 2,38
e) 8,352; 42,73	e) 6,253; 24,37

4. Druhé mocniny daných čísel určete a) pomocí tabulek, b) pomocí kalkulačky. V obou případech zaokrouhlete výsledky na 2 platné

číslice.
a) 473; b) 5 624; c) 0,875; d) 3,678; e) 24,93.

5. Zjistěte pomocí kalkulačky druhé mocniny daných čísel. Výsledky zaokrouhlete na 2 platné číslice.

A.	B.
a) 6,754	a) 7,654
b) 2 875	b) 2 782
c) 0,384	c) 0,493
d) 43,71	d) 34,63

6. Odhadem zjistěte, zda může platit:

a) $3{,}741^2 = 14$	b) $37{,}41^2 = 140$
c) $374{,}1^2 = 140\,000$	d) $3\,7412 = 14\,000\,000$
e) $1{,}6^2 = 2{,}56$	f) $0{,}16^2 = 0{,}256$
g) $160^2 = 2\,560$	h) $15{,}9^2 = 256$

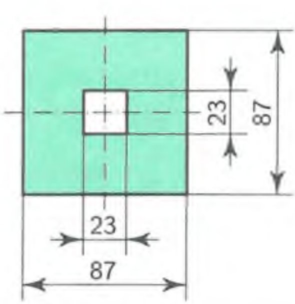
7. Doplňte tabulku a porovnejte hodnoty výrazů x^2 a $2x$.

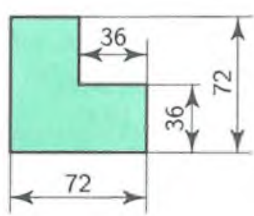
x	0,73	1,24	7,5	80	80,3	672
x^2						
$2x$						

8. Délka strany čtverce je 13,5 cm. Určete jeho obvod a obsah. Kolikrát se zvětší a) obvod čtverce, b) obsah čtverce, zvětší-li se délka jeho strany třikrát?

9. Určete obsah čtverce, jehož obvod měří 130,8 cm.

10. Vypočítejte obsah barevně vyznačené plochy (rozměry jsou v milimetrech).





11. Ozdobný dřevěný truhlík na květiny má tvar krychle s hranou délky 35 cm. Kolik m^2 dřevěných desek je třeba na jeho zhotovení?

12. Na územním plánu jsou vyznačeny čtvercové parcely č. 372, 373 a 374. Vypočtěte výměru jednotlivých parcel.

13. Obdélníkový koberec má rozměry 150 cm a 90 cm. Do světlého podkladu je vetkáno 6 stejných barevných čtverců. Kolik procent z celkové plochy koberce tvoří barevné čtverce, má-li strana každého z nich délku 21 cm? Je to alespoň $\frac{1}{4}$ plochy koberce? Pracujte s kalkulačkou.

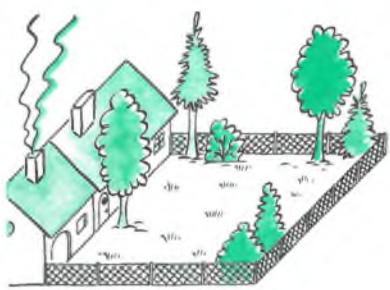
14. Čtverec o straně délky 7,8 m má stejný obsah jako obdélník, jehož délka je 26m. Určete šířku obdélníku.

1.3 Druhá odmocnina

1 Zahradu tvaru čtverce o výměře 900 m^2 je třeba ze tří stran oplotit. Nejméně kolik metrů pletiva je zapotřebí?

Řešení

Výměra zahrady, tj. obsah čtverce, je 900 m^2. Ke zjištění délky pletiva musíme znát délku strany tohoto čtverce.



Pro obsah čtverce platí:

$$S = a \cdot a = a^2$$
$$900 = a^2$$
$$900 = 30 \cdot 30$$
$$a = 30$$
$$a = 30\,\text{m}$$

Zahrada se má oplotit ze tří stran: $3 \cdot 30 = 90$.

Na oplocení zahrady je zapotřebí nejméně 90 m pletiva.

Jestliže platí $a^2 = 900$,

je $a = 30$ nebo $a = -30$,

protože také $(-30) \cdot (-30) = 900$.

(V této kapitole však budeme pracovat pouze s nezápornými čísly.)

Číslu 30 říkáme **druhá odmocnina** z čísla 900.

Zapisujeme:

$\sqrt{900} = 30$

Čteme:

Druhá odmocnina z 900 je 30.

odmocnítko

$\sqrt{900} = 30$, protože $30 \cdot 30 = 900$

druhá odmocnina

odmocněnec

Protože druhá mocnina, tj. součin dvou sobě rovných činitelů, je vždy nezáporná, můžeme druhou odmocninu určovat pouze z nezáporných čísel.

Druhá odmocnina z nezáporného čísla b je takové číslo a, pro které platí $a^2 = b$.

Zapisujeme:

$a = \sqrt{b}$

Čteme:

Druhá odmocnina z čísla b je číslo a.

Druhé odmocniny některých čísel umíme vypočítat zpaměti. V ostatních případech určujeme druhou odmocninu pomocí tabulek nebo kalkulačky. Postup, kterým druhou odmocninu určujeme, nazýváme odmocňování.

2 Doplňte tabulku. Svůj výpočet zdůvodněte.

Např. $\sqrt{25} = 5$, protože $5 \cdot 5 = 25$.

a)

x	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
$\sqrt{x}$											

b)

x	121	144	169	196	225
$\sqrt{x}$					

3 Určete zpaměti druhou odmocninu z čísel 100; 10 000; 1 000 000; 0,01; 0,000 1; 0,000 001. Dokážete určit zpaměti také druhou odmocninu z čísel 10; 1 000; 0,1; 0,001 ?

Řešení

$$\begin{aligned} \sqrt{100} &= 10, && \text{protože } 10^2 = 10 \cdot 10 = 100;\\ \sqrt{10\,000} &= 100, && \text{protože } 100^2 = 100 \cdot 100 = 10\,000;\\ \sqrt{1\,000\,000} &= 1\,000, && \text{protože } 1\,000^2 = 1\,000\,000. \end{aligned}$$

Ve výsledku je poloviční počet nul než v odmocněnci.

$$\begin{aligned} \sqrt{0{,}01} &= 0{,}1, && \text{protože } 0{,}1^2 = 0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}01;\\ \sqrt{0{,}000\,1} &= 0{,}01, && \text{protože } 0{,}01^2 = 0{,}01 \cdot 0{,}01 = 0{,}000\,1;\\ \sqrt{0{,}000\,001} &= 0{,}001, && \text{protože } 0{,}001^2 = 0{,}000\,001. \end{aligned}$$

Ve výsledku je poloviční počet desetinných míst než v odmocněnci.

Druhou odmocninu čísel 10; 1 000; 0,1; 0,001 neumíme určit zpaměti. Dokážeme je odhadnout pomocí tabulek či kalkulačky.

4 Vypočtěte a porovnejte výsledky:

a) $\sqrt{4 \cdot 16}$; $\sqrt{4} \cdot \sqrt{16}$

b) $\sqrt{9 \cdot 100}$; $\sqrt{9} \cdot \sqrt{100}$

c) $\sqrt{25 \cdot 0{,}01}$; $\sqrt{25} \cdot \sqrt{0{,}01}$

Řešení

a) $\sqrt{4 \cdot 16} = \sqrt{64} = 8$

$\sqrt{4} \cdot \sqrt{16} = 2 \cdot 4 = 8$ $\qquad \sqrt{4 \cdot 16} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{16}$

b) $\sqrt{9 \cdot 100} = \sqrt{900} = 30$

$\sqrt{9} \cdot \sqrt{100} = 3 \cdot 10 = 30$ $\qquad \sqrt{9 \cdot 100} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{100}$

c) $\sqrt{25 \cdot 0{,}01} = \sqrt{0{,}25} = 0{,}5$

$\sqrt{25} \cdot \sqrt{0{,}01} = 5 \cdot 0{,}1 = 0{,}5$ $\qquad \sqrt{25 \cdot 0{,}01} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{0{,}01}$

Pro všechna nezáporná čísla a, b platí:

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

5 Vypočtěte bez tabulek a kalkulačky:

a) $\sqrt{14\,400}$

$\sqrt{90\,000}$

$\sqrt{90}$

b) $\sqrt{1{,}69}$

$\sqrt{0{,}002\,5}$

$\sqrt{2{,}5}$

Řešení

a) Odmocněnce nejprve zapíšeme jako součin dvou čísel, která dokážeme odmocnit zpaměti:

$$\sqrt{14\,400} = \sqrt{144 \cdot 100} = \sqrt{144} \cdot \sqrt{100} = 12 \cdot 10 = 120$$
$$\sqrt{90\,000} = \sqrt{9 \cdot 10\,000} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{10\,000} = 3 \cdot 100 = 300$$

$\sqrt{90}$ nedokážeme určit bez tabulek nebo kalkulačky, neboť číslo 90 nelze rozložit na součin dvou čísel, která umíme odmocnit zpaměti.

b) Odmocněnce opět nejprve rozložíme na součin dvou racionálních čísel, která umíme odmocnit zpaměti:

$$\sqrt{1{,}69} = \sqrt{169 \cdot 0{,}01} = \sqrt{169} \cdot \sqrt{0{,}01} = 13 \cdot 0{,}1 = 1{,}3$$
$$\sqrt{0{,}002\,5} = \sqrt{25 \cdot 0{,}000\,1} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{0{,}000\,1} = 5 \cdot 0{,}01 = 0{,}05$$
$$\sqrt{2{,}5} = \sqrt{25 \cdot 0{,}1}$$

Číslo 0,1 neumíme odmocnit zpaměti.
Číslo 2,5 nedokážeme rozložit ani jiným způsobem na součin dvou čísel, která umíme odmocnit zpaměti.
$\sqrt{2{,}5}$ nedokážeme určit bez tabulek nebo kalkulačky.

6 Odhadněte druhé odmocniny čísel a) 18; b) 27; c) 113. (Použijte vyplněnou tabulku z příkladu 2.)

Řešení

a) Platí:

$$16 < 18 < 25$$

nejbližší

menší druhá mocnina — větší druhá mocnina

přirozeného čísla

Proto také platí:

$$\sqrt{16} < \sqrt{18} < \sqrt{25}$$
$$4 < \sqrt{18} < 5$$

b)
$$25 < 27 < 36$$
$$\sqrt{25} < \sqrt{27} < \sqrt{36}$$
$$5 < \sqrt{27} < 6$$

c)
$$100 < 113 < 121$$
$$\sqrt{100} < \sqrt{113} < \sqrt{121}$$
$$10 < \sqrt{113} < 11$$

7 Vypočtěte a porovnejte výsledky:

a) $\sqrt{36+64}$; $\qquad \sqrt{36}+\sqrt{64}$

b) $\sqrt{\dfrac{100}{25}}$; $\qquad \dfrac{\sqrt{100}}{\sqrt{25}}$

c) $\sqrt{225-81}$; $\qquad \sqrt{225}-\sqrt{81}$

d) $\dfrac{\sqrt{4}}{9}$; $\qquad \sqrt{\dfrac{4}{9}}$

e) $\sqrt{9}+16$; $\qquad \sqrt{9+16}$

Řešení

a) $\sqrt{36+64}=\sqrt{100}=10$

$\sqrt{36}+\sqrt{64}=6+8=14 \qquad \sqrt{36+64}\neq\sqrt{36}+\sqrt{64}$

b) $\sqrt{\dfrac{100}{25}}=\sqrt{4}=2$

$\dfrac{\sqrt{100}}{\sqrt{25}}=\dfrac{10}{5}=2 \qquad \sqrt{\dfrac{100}{25}}=\dfrac{\sqrt{100}}{\sqrt{25}}$

c) $\sqrt{225-81}=\sqrt{144}=12$

$\sqrt{225}-\sqrt{81}=15-9=6 \qquad \sqrt{225-81}\neq\sqrt{225}-\sqrt{81}$

d) $\dfrac{\sqrt{4}}{9}=\dfrac{2}{9}$

$\sqrt{\dfrac{4}{9}}=\dfrac{2}{3} \qquad \dfrac{\sqrt{4}}{9}\neq\sqrt{\dfrac{4}{9}}$

e) $\sqrt{9}+16=3+16=19$

$\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5 \qquad \sqrt{9}+16\neq\sqrt{9+16}$

Při výpočtech s odmocninami musíme velmi pozorně zapisovat odmocnítko a dodržovat správné pořadí početních výkonů.

CVIČENÍ

1. Vypočtěte druhou odmocninu čísel:

a) 16	b) 36	c) 49	d) 121	e) 225
1 600	360 000	4 900	1,21	22 500
0,16	0,36	0,004 9	12 100	0,022 5

2. Najděte chybu:

a) $\sqrt{900}=90$	b) $\sqrt{2\,500}=50$	c) $\sqrt{2{,}5}=0{,}5$
d) $\sqrt{0{,}016\,9}=0{,}13$	e) $\sqrt{400}=20$	f) $\sqrt{36\,000}=600$
g) $\sqrt{1{,}44}=1{,}2$	h) $\sqrt{0{,}1}=1$	i) $\sqrt{250}=50$
j) $\sqrt{810\,000}=900$	k) $\sqrt{0{,}144}=0{,}12$	l) $\sqrt{0{,}000\,1}=0{,}01$

3. Vypočtěte druhé odmocniny a výsledky z a) až e) sečtěte.

A.

a) $\sqrt{0{,}0004}$

b) $\sqrt{250\,000}$

c) $\sqrt{0{,}49}$

d) $\sqrt{8\,100}$

e) $\sqrt{1{,}21}$

B.

a) $\sqrt{0{,}0009}$

b) $\sqrt{360\,000}$

c) $\sqrt{0{,}64}$

d) $\sqrt{4\,900}$

e) $\sqrt{1{,}69}$

4. Vypočtěte:

a) $\sqrt{64} + 17$

b) $\sqrt{64 + 17}$

c) $\dfrac{\sqrt{81}}{\sqrt{9}}$

d) $\dfrac{\sqrt{81}}{9}$

e) $\sqrt{9} \cdot \sqrt{16} + \sqrt{144}$

f) $\sqrt{9} \cdot \left(\sqrt{16} + \sqrt{144}\right)$

g) $2 \cdot \sqrt{2{,}25} - \sqrt{9}$

h) $5 \cdot \left(\sqrt{2{,}25} - \sqrt{0{,}81}\right)$

i) $5 \cdot \sqrt{2{,}25 - 0{,}81}$

j) $5 \cdot \sqrt{2{,}25} - 0{,}81$

k) $\sqrt{\dfrac{1}{9}} + \dfrac{\sqrt{4}}{3}$

l) $\sqrt{25} \cdot \dfrac{\sqrt{196}}{\sqrt{49}} - \sqrt{100} \cdot \sqrt{1{,}69}$

5. Odhadněte druhou odmocninu každého z prvočísel větších než 10 a menších než 50.

6. Odhadněte druhé odmocniny čísel z proužku (3). (Můžete použít vyplněnou tabulku druhých odmocnin z příkladu 2.)

7. Určete bez použití tabulek a kalkulačky druhé odmocniny čísel z proužku (4).

8.

$$\begin{tikzcd}
\boxed{A} \arrow[r, "A^2"] & \boxed{B} \arrow[r, "\cdot 10^2"] & \boxed{C} \arrow[r, "\cdot 2^2"] & \boxed{D} \arrow[r, "\sqrt{D}"] & \boxed{E} \arrow[d, ": 2^2"] \\
\boxed{J} \arrow[u, ": \sqrt{100}"] & \boxed{I} \arrow[l, ": \sqrt{25}"'] & \boxed{H} \arrow[l, "\sqrt{H}"'] & \boxed{G} \arrow[l, "\cdot 10^2"'] & \boxed{F} \arrow[l, "F^2"']
\end{tikzcd}$$

Do políčka A dosazujte postupně čísla 0,2; 0,3; 0,4 a provádějte naznačené početní výkony. Při správném postupu dostanete opět výchozí číslo.

1.4 Určování druhé odmocniny pomocí tabulek a kalkulačky

1 Určete pomocí tabulek druhé odmocniny čísel: 324, 326.

Řešení

K určování druhých odmocnin použijeme tabulku, jejíž uspořádání jsme poznali při určování druhých mocnin.

V prvním sloupci, nadepsaném n, vyhledáváme čísla, jejichž druhou odmocninu máme určit.

Druhou odmocninu daného čísla přečteme ve stejném řádku ve sloupci nadepsaném $\sqrt{n}$.

n	n^2	$\sqrt{n}$	n^3	$\sqrt[3]{n}$
320	102 400	17,89	32 768 000	6,84
321	103 041	92	33 076 161	85
322	103 684	94	33 386 248	85
323	104 329	97	33 698 267	86
324	104 976	18,00	34 012 224	87
325	105 625	18,03	34 328 125	6,88
326	106 276	06	34 645 976	88
327	106 929	08	34 965 783	89
328	107 584	11	35 287 552	90
329	108 241	14	35 611 289	90

V této tabulce můžeme najít druhou odmocninu kteréhokoli celého čísla od nuly do 1 000.

Máme určit $\sqrt{324}$:
Ve sloupci nadepsaném n najdeme dané číslo a ve stejném řádku ve sloupci nadepsaném $\sqrt{n}$ přečteme jeho druhou odmocninu.

$\sqrt{324} = 18{,}00$

Máme určit $\sqrt{326}$:
V tabulkách vyhledáme: $\sqrt{326} = 18{,}06$.
Ale $18{,}06^2 = 18{,}06 \cdot 18{,}06 = 326{,}163\,6$.
Druhé odmocniny jsou v tabulkách uvedeny pouze přibližně, s přesností na setiny.
Proto píšeme: $\sqrt{326} \doteq 18{,}06$.

Pomocí tabulek a vztahu $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ dokážeme určit i druhé odmocniny některých čísel, která nejsou uvedena v tabulkách.

2 Pomocí tabulek zjistěte druhé odmocniny čísel:

a) 32 700; 3 280 000
b) 3,21; 0,032 2
c) 3 210; 0,321
d) 3 238; 3,219

Řešení

a) Máme určit $\sqrt{32\,700}$ a $\sqrt{3\,280\,000}$:
Odmocněnce napíšeme jako součin dvou činitelů, z nichž jeden je číslo uvedené v tabulkách a druhý činitel je 100, 10 000 (tj. takový násobek 10, jehož druhou odmocninu umíme určit zpaměti).

$$\sqrt{32\,700} = \sqrt{327 \cdot 100} = \sqrt{327} \cdot \sqrt{100} \doteq 18{,}08 \cdot 10 = 180{,}8$$

Druhou odmocninu čísla 100 umíme určit zpaměti.

Druhou odmocninu čísla 327 vyhledáme v tabulkách.

$$\sqrt{3\,280\,000} = \sqrt{328 \cdot 10\,000} = \sqrt{328} \cdot \sqrt{10\,000} \doteq 18{,}11 \cdot 100 = 1\,811$$

b) Máme zjistit $\sqrt{3{,}21}$ a $\sqrt{0{,}032\,2}$:
Odmocněnce opět napíšeme jako součin dvou činitelů, z nichž jeden je číslo uvedené v tabulkách a druhý činitel je číslo 0,01; 0,000 1 (tj. takové racionální číslo, jehož druhou odmocninu umíme určit zpaměti).

$$\sqrt{3{,}21} = \sqrt{321 \cdot 0{,}01} = \sqrt{321} \cdot \sqrt{0{,}01} \doteq 17{,}92 \cdot 0{,}1 = 1{,}792$$

$\sqrt{0{,}01}$ umíme určit zpaměti.

$\sqrt{321}$ vyhledáme v tabulkách.

$$\sqrt{0{,}032\,2} = \sqrt{322 \cdot 0{,}000\,1} = \sqrt{322} \cdot \sqrt{0{,}000\,1} \doteq$$
$$\doteq 17{,}94 \cdot 0{,}01 = 0{,}179\,4.$$

c) Máme přibližně určit $\sqrt{3\,210}$ a $\sqrt{0{,}321}$:
Pokud bychom odmocněnce rozložili na součin $321 \cdot 10$, příliš si nepomůžeme:

$$\sqrt{3\,210} = \sqrt{321 \cdot 10} = \sqrt{321} \cdot \sqrt{10} \doteq 17{,}92 \cdot 3{,}16 = \ldots$$

$\sqrt{10}$ musíme vyhledat v tabulkách, další počítání by bylo zdlouhavé.

Odmocněnce proto zaokrouhlíme tak, aby jej bylo možné rozložit na součin dvou činitelů, z nichž jeden je číslo nejvýš trojciferné (jeho druhou odmocninu vyhledáme v tabulkách) a druhý činitel je takový násobek deseti, který umíme odmocnit zpaměti.

$$\sqrt{3\,210} \doteq \sqrt{3\,200} = \sqrt{32 \cdot 100} = \sqrt{32} \cdot \sqrt{100} \doteq 5{,}66 \cdot 10 = 56{,}6$$

Odmocněnec má sudý počet nul.

$$\sqrt{0{,}321} \doteq \sqrt{0{,}32} = \sqrt{32 \cdot 0{,}01} \doteq 5{,}66 \cdot 0{,}1 = 0{,}566$$

Odmocněnec má sudý počet desetinných míst.

d) Máme přibližně určit $\sqrt{3\,238}$ a $\sqrt{3{,}219}$:
Odmocněnce nejprve zaokrouhlíme tak, aby
1. měl nejvýš tři platné číslice,
2. byl zakončen sudým počtem nul nebo měl sudý počet desetinných míst.

$3\,238 \doteq 3\,200$
$3{,}219 \doteq 3{,}22$

$$\sqrt{3\,238} \doteq \sqrt{3\,200} = \sqrt{32} \cdot \sqrt{100} \doteq 5{,}66 \cdot 10 = 56{,}6$$
$$\sqrt{3{,}219} \doteq \sqrt{3{,}22} = \sqrt{322} \cdot \sqrt{0{,}01} \doteq 17{,}94 \cdot 0{,}1 = 1{,}794$$

3 Pomocí tabulek určete druhé odmocniny čísel:
a) 4 356 b) 16 731 c) 734 562 d) 23,736 e) 2,7

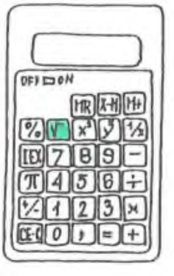
Řešení

a) $\sqrt{4\,356} \doteq \sqrt{4\,400} = \sqrt{44} \cdot \sqrt{100} \doteq 6{,}63 \cdot 10 = 66{,}3$
b) $\sqrt{16\,731} \doteq \sqrt{16\,700} = \sqrt{167} \cdot \sqrt{100} \doteq 12{,}92 \cdot 10 = 129{,}2$
c) $\sqrt{734\,562} \doteq \sqrt{730\,000} = \sqrt{73} \cdot \sqrt{10\,000} \doteq 8{,}54 \cdot 100 = 854$
d) $\sqrt{23{,}736} \doteq \sqrt{24} \doteq 4{,}90$
e) $\sqrt{2{,}7} = \sqrt{2{,}70} = \sqrt{270 \cdot 0{,}01} \doteq 16{,}43 \cdot 0{,}1 = 1{,}643$

4 Druhé odmocniny čísel a) 324, b) 3 238, c) 3,219 vypočtěte na kalkulačce.

Řešení

Většina kalkulaček má tlačítko označené $\sqrt{\ }$. Jeho užití se může u různých typů kalkulaček lišit. Přečtěte si proto návod k použití a vyzkoušejte si, jakým způsobem vaše kalkulačka pracuje.



a) Máme určit $\sqrt{324}$:

U některých typů kalkulaček postupně tiskneme tato tlačítka:

$\boxed{3}\ \boxed{2}\ \boxed{4}\ \boxed{\sqrt{\ }}\quad = 18$

U jiných typů kalkulaček musíme volit jiné pořadí tlačítek:

$\boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{3}\ \boxed{2}\ \boxed{4}\ \boxed{=}\quad = 18$

b) Máme určit $\sqrt{3\,238}$:

$\boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{3}\ \boxed{2}\ \boxed{2}\ \boxed{8}\ \boxed{=}\quad \doteq 56{,}903\,426\,96$

c) Máme určit $\sqrt{3{,}219}$:

$\boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{3}\ \boxed{\cdot}\ \boxed{2}\ \boxed{1}\ \boxed{9}\ \boxed{=}\quad \doteq 1{,}794\,157\,184$

Kalkulačka určuje druhou odmocninu s větší přesností než tabulky. V tabulkách jsou druhé odmocniny uvedeny jen s přesností na dvě desetinná místa. Ve škole obvykle i druhé odmocniny získané pomocí kalkulačky takto zaokrouhlujeme.

5 Druhé odmocniny čísel a) 432, b) 3 261, c) 14,73 určete nejprve pomocí tabulek a potom pomocí kalkulačky. Druhé odmocniny získané na kalkulačce zaokrouhlete na tolik platných cifer, kolik měla druhá odmocnina určená pomocí tabulek.

Řešení

a) Pomocí tabulek:

$\sqrt{432} \doteq 20{,}78$

S užitím kalkulačky:

$\sqrt{432} = 20{,}784\,609\,69 \doteq 20{,}78$

b) Pomocí tabulek:

$\sqrt{3\,261} \doteq \sqrt{3\,300} = \sqrt{33} \cdot \sqrt{100} \doteq 5{,}74 \cdot 10 = 57{,}4$

S užitím kalkulačky:

$\sqrt{3\,261} \doteq 57{,}105\,166\,14 \doteq 57{,}1$

c) Pomocí tabulek:

$\sqrt{14{,}73} \doteq \sqrt{15} \doteq 3{,}87$

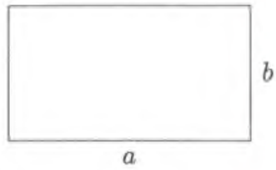
S užitím kalkulačky:

$\sqrt{14{,}73} \doteq 3{,}837\,968\,212 \doteq 3{,}84$

6 Zahrada tvaru čtverce má stejnou výměru jako zahrada, která má tvar obdélníku s rozměry 32 m a 18 m. Obě zahrady jsou celé oplocené. Která ze zahrad má delší plot? O kolik metrů?

Řešení

Zahrada tvaru obdélníku:



$a = 32\,\mathrm{m}$
$b = 18\,\mathrm{m}$

$S = ?\,\mathrm{m}^2$
$o = ?\,\mathrm{m}$

$S = a \cdot b$

$S = 32 \cdot 18$
$S = 576$

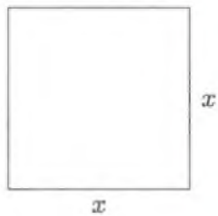
$S = 576\,\mathrm{m}^2$

$o = 2 \cdot (a + b)$

$o = 2 \cdot (32 + 18)$
$o = 100$

$o = 100\,\mathrm{m}$

Zahrada tvaru čtverce:



$S = 576\,\mathrm{m}^2$

$x = ?\,\mathrm{m}^2$
$o = ?\,\mathrm{m}$

$S = x^2$

$576 = x^2$
$\sqrt{576} = x$
$24 = x$

$x = 24\,\mathrm{m}$

$o = 4 \cdot x$

$o = 4 \cdot 24$
$o = 96$

$o = 96\,\mathrm{m}$

Plot zahrady tvaru obdélníku je o čtyři metry delší.

CVIČENÍ

1. Najděte v tabulkách druhé odmocniny všech lichých čísel větších než 560 a menších než 570.

2. Určete pomocí tabulek druhé odmocniny čísel:

a) 47 200	b) 5 300	c) 10 500
d) 0,34	e) 0,83	f) 0,97
g) 5,64	h) 4,54	i) 6,87

3. Určete druhé odmocniny daných čísel. Odmocněnce nejprve vhodně zaokrouhlete a potom pomocí tabulek přibližně určete jeho druhou odmocninu.

a) 7 346	b) 2 831	c) 8 636
d) 53 761	e) 71 654	f) 63 573
g) 835 421	h) 536 435	i) 728 413

4. Pomocí tabulek určete druhou odmocninu daných čísel. Odmocněnce nejdříve vhodně zaokrouhlete.

a) 3,4	b) 7,5	c) 5,1
d) 63,1	e) 43,9	f) 68,3
g) 0,427	h) 0,675	i) 0,856
j) 174,35	k) 128,32	l) 203,42

5. Určete pomocí kalkulačky druhé odmocniny čísel ze cvičení 3. Výsledky zaokrouhlete na 1 desetinné místo.

6. Určete pomocí kalkulačky druhé odmocniny čísel ze cvičení 4. Výsledky zaokrouhlete na 2 desetinná místa.

7. Určete s přesností na milimetry délku a strany čtverce a jeho obvod o, znáte-li jeho obsah S.

$\frac{S}{\mathrm{cm}^2}$	10,24	18,49	21,5	37	185,7	14 568
$\frac{a}{\mathrm{cm}}$						
$\frac{o}{\mathrm{cm}}$						

2 PYTHAGOROVA VĚTA

2.1 Pythagorova věta

V této kapitole budeme hovořit o trojúhelníku, s kterým se v praxi setkáváme velice často a který má díky svým vlastnostem výjimečné postavení mezi trojúhelníky.

Některé vlastnosti tohoto trojúhelníku již znáte:

- dvě jeho strany jsou současně výškami
- výšky se protínají v jednom jeho vrcholu
- střed kružnice opsané tomuto trojúhelníku je středem jeho nejdelší strany

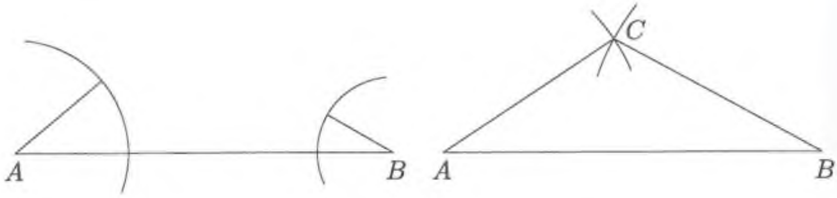
O jaký trojúhelník jde?
Které další vlastnosti tohoto trojúhelníku znáte?

Pravoúhlý trojúhelník zaměstnával mysl celé řady matematiků již v dobách dávno minulých.
Jedním z nich byl řecký matematik Pythagoras ze Samu, který žil snad v letech 580–500 př.n.l. Studoval matematiku a astronomii a založil v jižní Itálii školu, která významně přispěla k rozvoji matematiky jako vědy. Pythagora proslavila věta, která nese jeho jméno — Pythagorova věta. Objev této věty však přísluší neznámým matematikům v Babylonu. Pravděpodobně ji (ve speciálních případech) užívali stavitelé či zeměměřiči, kteří ji „objevili“ nezávisle na sobě.
Nyní se s touto poučkou seznámíme i my.

1 a) Jsou dány libovolné tři úsečky. Můžete z nich vždy sestrojit trojúhelník? Své tvrzení zdůvodněte.
b) Jsou dány délky tří úseček, z kterých lze sestrojit trojúhelník. Bude sestrojený trojúhelník vždy pravoúhlý?

Řešení

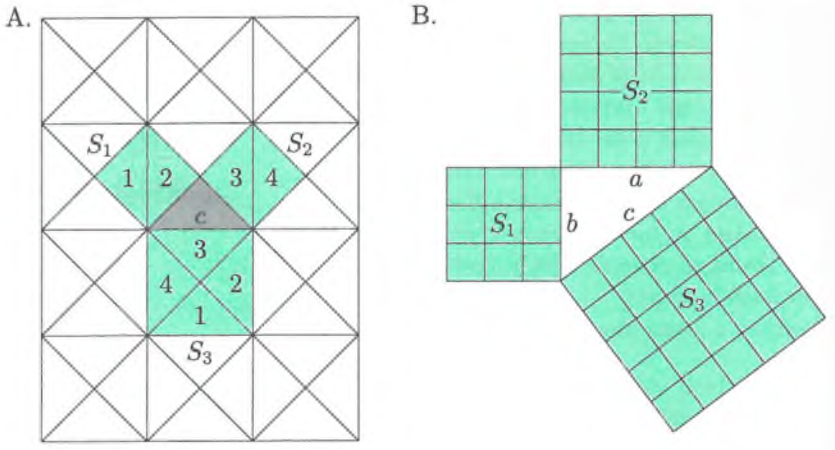
a) Ze tří libovolných úseček nelze vždy sestrojit trojúhelník. Pro délky stran trojúhelníku platí trojúhelníková nerovnost. (Součet délek dvou libovolných stran každého trojúhelníku je větší než délka jeho třetí strany. Vzpomínáte?)



b) Vždycky ne. Např.: zvolíte-li délky odvěsen, nemůžete libovolně volit délku přepony.

Při řešení úloh o trojúhelníku jste si už jistě všimli, že např. trojúhelník se stranami $a = 3\,\text{cm}$, $b = 4\,\text{cm}$, $c = 5\,\text{cm}$ pravoúhlý je.
Mezi délkami odvěsen a délkou přepony každého pravoúhlého trojúhelníku platí vztah, který vyjadřuje **Pythagorova věta**.

2 Honzu s Petrem zaujal počítačový matematický program, který nabízel tyto obrázky:



a úkol: na obrázcích jsou nad stranami pravoúhlých trojúhelníků sestrojeny čtverce. Podle obrázků rozhodněte, který z uvedených zápisů je pravdivý, a vyjádřete ho slovy.

a) $S_1 = S_2 + S_3$ b) $S_2 = S_1 + S_3$ c) $S_3 = S_1 + S_2$

Petr si vybral obrázek A:

Obsahy čtverců: $S_1 = S_{\triangle_1} + S_{\triangle_2}$; $S_2 = S_{\triangle_3} + S_{\triangle_4}$

$S_1 + S_2 = S_{\triangle_1} + S_{\triangle_2} + S_{\triangle_3} + S_{\triangle_4}$

$S_3 = S_{\triangle_1} + S_{\triangle_2} + S_{\triangle_3} + S_{\triangle_4}$; tedy $S_3 = S_1 + S_2$

Obsah S_3 čtverce nad přeponou trojúhelníka je roven součtu obsahů S_1 a S_2.

Honza vycházel z obrázku B:

$S_1 = 9$ čtverečků
$S_2 = 16$ čtverečků
$S_3 = 25$ čtverečků

$9 + 16 = 25$
Platí vztah:
$S_1 + S_2 = S_3$

Oba chlapci vyřešili úkol dobře. Jejich závěry jsou v souladu s tvrzením Pythagorovy věty.

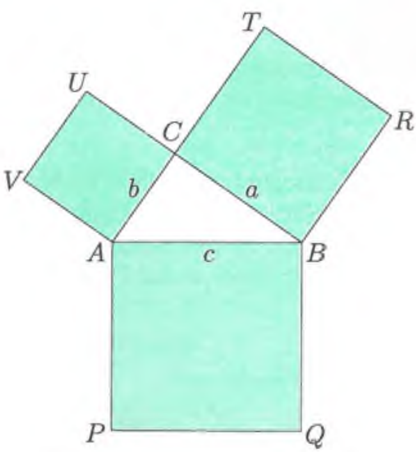
Pythagorova věta:
Obsah čtverce sestrojeného nad přeponou pravoúhlého trojúhelníku je roven součtu obsahů čtverců sestrojených nad oběma jeho odvěsnami.

Pythagorovu větu můžeme vyslovit i takto:
Je-li trojúhelník ABC pravoúhlý s přeponou c a odvěsnami a a b, pak

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Řecký matematik Euklides, který žil ve 4. století před naším letopočtem, zapsal Pythagorovu větu ve svých spisech takto:

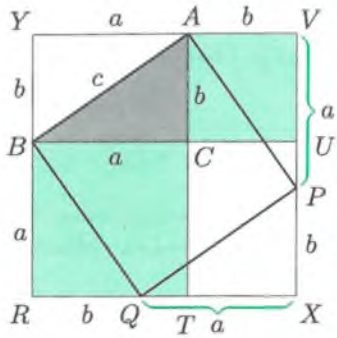
V pravoúhlých trojúhelnících čtverec na straně proti úhlu pravému ležící rovná se čtvercům na stranách pravý úhel svírajících.



Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou c. Důkaz Pythagorovy věty provedeme porovnáním obsahu čtverce $PQBA$ se součtem obsahů čtverců $ACUV$ a $CBRT$. Čtverec $PQBA$ je však v následujícím obrázku výhodněji položen.

Strany čtverce $RXVY$ mají délku $a+b$. Trojúhelníky ABC, BAY, QBR, PQX a APV jsou shodné (věta sss).
Rovněž obdélníky $BCAY$ a $CTXU$ jsou shodné.
Čtverec $PQBA$ dostaneme ze čtverce $RXVY$ „odstřižením“ čtyř trojúhelníků:

$$AYB,\ BRQ,\ QXP \text{ a } PVA$$



Dvojici čtverců $BCTR$ a $CUVA$ získáme z téhož čtverce $RXVY$ oddělením obdélníků $BCAY$ a $CTXU$. Každý z těchto obdélníků se skládá ze dvou trojúhelníků shodných s trojúhelníkem ABC.
Obsah čtverce $PQBA$ je tedy roven rozdílu obsahu čtverce $RXVY$ a čtyřnásobku obsahu trojúhelníku ABC:

$$c^2 = S_{RXVY} - 4 \cdot S_{ABC}$$

Rovněž součet obsahů čtverců $BCTR$ a $CUVA$ je roven rozdílu obsahu čtverce $RXVY$ a čtyřnásobku obsahu trojúhelníku ABC:

$$a^2 + b^2 = S_{RXVY} - 4 \cdot S_{ABC}$$

Proto

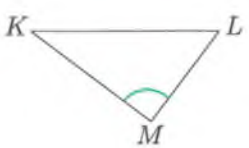
$$c^2 = a^2 + b^2$$

(V Matematické herně najdete několik skládaček, pomocí nichž můžete Pythagorovu větu dokázat také.)

3 Sestrojte trojúhelník KLM: $m = 5\,\text{cm}$, $k = 3\,\text{cm}$, $l = 4\,\text{cm}$.

a) Změřte velikost vnitřního úhlu KML trojúhelníku KLM.
b) Ověřte, že pro délku přepony a odvěsen trojúhelníku KLM platí vztah, který uvádí Pythagorova věta.

Řešení



a) Trojúhelník KLM je pravoúhlý ($|\sphericalangle KML| = 90°$). Jeho přeponou je strana KL, odvěsnami strany LM a KM.

b) Jsou-li S_1 a S_2 obsahy čtverců nad odvěsnami a S_3 obsah čtverce nad přeponou, pak platí:

$$S_3 = S_1 + S_2$$

Obsahy čtverců vyjádříme pomocí délek jejich stran:

$$m^2 = k^2 + l^2$$

Délky k, l, m jsou dány ve stejných jednotkách, proto stačí zjistit, zda platí:

$$5^2 \stackrel{?}{=} 3^2 + 4^2$$

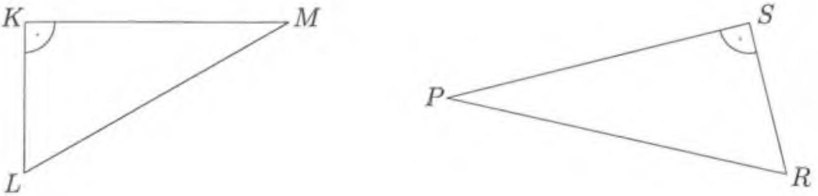
$$25 \stackrel{?}{=} 9 + 16$$

$$25 = 25$$

Levá strana zápisu je rovna straně pravé.
Pro délky stran k, l, m trojúhelníku KLM platí: $m^2 = k^2 + l^2$

Zápis $c^2 = a^2 + b^2$ je stručným záznamem Pythagorovy věty pro pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou c.

4 Zapište vztah mezi stranami pro pravoúhlé trojúhelníky na obrázku.



Řešení

V $\triangle KLM$ je přepona k, odvěsny jsou l, m, proto platí

$$k^2 = l^2 + m^2.$$

V $\triangle PRS$ je přepona s, odvěsny jsou p, r, proto platí

$$s^2 = p^2 + r^2.$$

Pythagorovu větu užíváme k výpočtu délky třetí strany pravoúhlého trojúhelníku, jsou-li dány délky dvou jeho stran.

5 V pravoúhlém trojúhelníku DEF jsou dány délky odvěsen: $d = 5\,\text{cm}$, $f = 12\,\text{cm}$. Vypočtěte délku přepony e.

Řešení

Pro délky stran $\triangle DEF$ platí $e^2 = d^2 + f^2$. Do této rovnice dosadíme číselné hodnoty délek odvěsen d, f a vyřešíme ji.

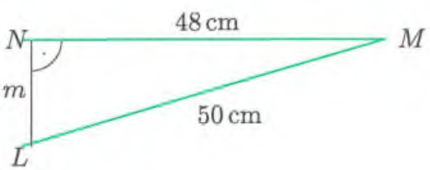
$$\begin{aligned} e^2 &= d^2 + f^2 \\ \hline e^2 &= 5^2 + 12^2 \\ e^2 &= 25 + 144 \\ e^2 &= 169 \\ e &= \sqrt{169} \\ \hline e &= 13\,\text{cm} \end{aligned}$$

Přepona e trojúhelníku DEF má délku 13 cm.

6 V pravoúhlém trojúhelníku LMN má přepona LM délku 50 cm a odvěsna MN má délku 48 cm. Vypočtěte délku druhé odvěsny.

Řešení

Pro délky stran $\triangle LMN$ platí $n^2 = m^2 + l^2$. Dosadíme číselné hodnoty délek stran n a l a získanou rovnici vyřešíme.



$$\begin{aligned} n^2 &= m^2 + l^2 \\ \hline 50^2 &= m^2 + 48^2 \\ 50^2 - 48^2 &= m^2 \\ m^2 &= 2500 - 2304 \\ m^2 &= 196 \\ m &= \sqrt{196} \\ m &= 14 \\ \hline m &= 14\,\text{cm} \end{aligned}$$

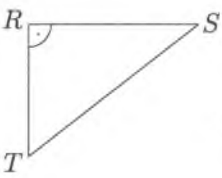
Délka odvěsny m trojúhelníku LMN je 14 cm.

Délku odvěsny pravoúhlého trojúhelníku vypočteme pomocí rozdílu druhých mocnin délek přepony a druhé odvěsny tohoto trojúhelníku.

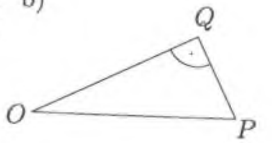
CVIČENÍ

1. Na obrázku vyhledejte pravoúhlé trojúhelníky. Pro každý z nich nejdříve určete odvěsny a přeponu, pak zapište vzorec pro výpočet délky přepony.

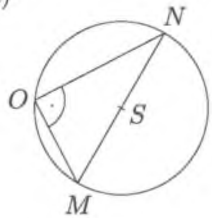
a)



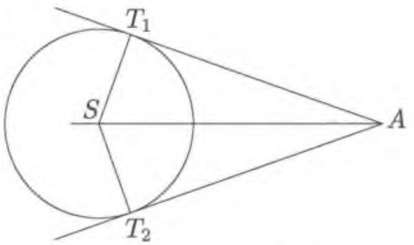
b)



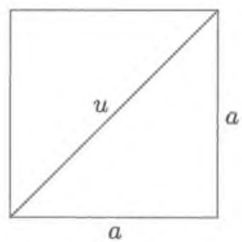
c)



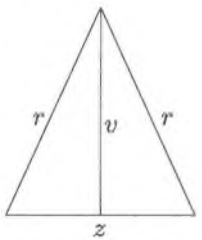
d)



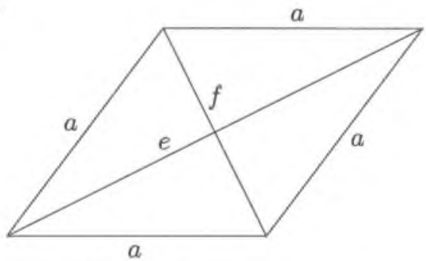
e)



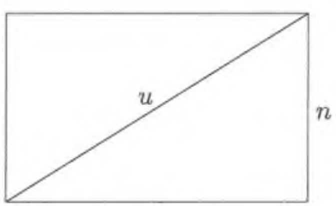
f)



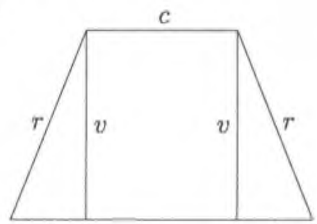
g)



h)



i)



2. Rozhodněte, které ze stran pravoúhlých trojúhelníků ABC, KLM, XYZ a TUV jsou přeponami.
Porovnejte obsah čtverce sestrojeného nad přeponou se součtem obsahů čtverců sestrojených nad odvěsnami.
a) $a = 10\,\text{cm}$, $b = 8\,\text{cm}$, $c = 6\,\text{cm}$
b) $k = 1{,}2\,\text{dm}$, $l = 9\,\text{cm}$, $m = 1{,}5\,\text{dm}$
c) $x = 15\,\text{cm}$, $y = 17\,\text{cm}$, $z = 8\,\text{cm}$
d) $t = 2{,}5\,\text{dm}$, $u = 7\,\text{cm}$, $v = 0{,}24\,\text{m}$

3. Pravoúhlý trojúhelník RST má délky odvěsen $r = 15\,\mathrm{cm}$, $t = 36\,\mathrm{cm}$. Vypočítejte délku přepony s.

4. Určete délky přepon pravoúhlých trojúhelníků, jsou-li dány délky jejich odvěsen:

A.

a) $\triangle PQR$: $r = 12\,\mathrm{cm}$, $q = 16\,\mathrm{cm}$

b) $\triangle HIJ$: $h = 1{,}2\,\mathrm{dm}$, $j = 35\,\mathrm{cm}$

c) $\triangle BDC$: $b = 150\,\mathrm{mm}$, $c = 2\,\mathrm{dm}$

B.

a) $\triangle NOP$: $n = 30\,\mathrm{cm}$, $o = 16\,\mathrm{cm}$

b) $\triangle EFG$: $f = 2{,}4\,\mathrm{dm}$, $g = 18\,\mathrm{cm}$

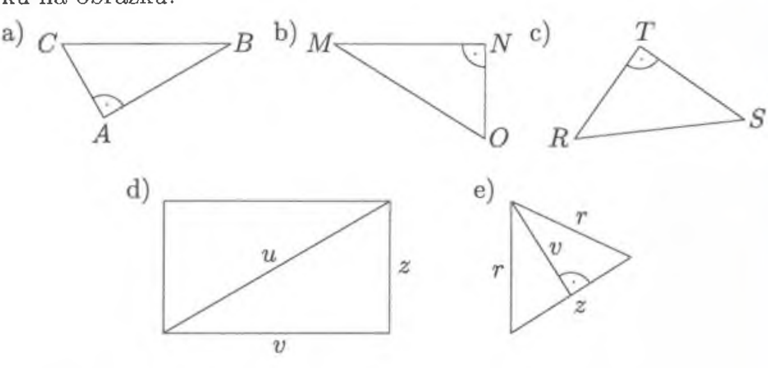
c) $\triangle QRS$: $q = 4\,\mathrm{dm}$, $r = 30\,\mathrm{cm}$.

5. Jak dlouhá je přepona c pravoúhlého trojúhelníku ABC, mají-li jeho odvěsny délky: $a = 0{,}9\,\mathrm{dm}$, $b = 1{,}4\,\mathrm{dm}$?

6. Doplňte tabulku:

Trojúhelník	Odvěsna	Odvěsna	Přepona
TUV	$u = 2{,}9\,\mathrm{dm}$	$v = 16\,\mathrm{cm}$	$t =$
STU	$t = 22\,\mathrm{cm}$	$u = 2{,}2\,\mathrm{dm}$	$s =$
MNO	$m = 215\,\mathrm{mm}$	$n = 32\,\mathrm{cm}$	$o =$
KLM	$k = 3{,}1\,\mathrm{m}$	$l = 17\,\mathrm{dm}$	$m =$
JKL	$j = 18\,\mathrm{cm}$	$k = 1{,}8\,\mathrm{dm}$	$l =$
XYZ	$x = 125\,\mathrm{mm}$	$y = 27\,\mathrm{cm}$	$z =$

7. Napište vzorec pro výpočet délek odvěsen pravoúhlých trojúhelníků na obrázku.



8. Vypočítejte délku odvěsny pravoúhlého trojúhelníku RTS, je-li délka přepony $t = 40\,\text{cm}$ a odvěsna $s = 32\,\text{cm}$.

9. Trojúhelník DEF má pravý úhel při vrcholu D. Vypočítejte délku strany e, mají-li zbývající strany trojúhelníku DEF délky $f = 21\,\text{cm}$, $d = 3{,}5\,\text{dm}$.

10. Vypočítejte délky odvěsen pravoúhlých trojúhelníků, jsou-li dány délky přepon a druhých odvěsen:

A.

a) $\triangle ABC$: $b = 6\,\text{dm}$, $c = 36\,\text{cm}$

b) $\triangle LMO$: $m = 6\,\text{m}$, $l = 68\,\text{dm}$

c) $\triangle RST$: $r = 27\,\text{cm}$, $t = 450\,\text{mm}$

B.

a) $\triangle PTU$: $u = 56\,\text{dm}$, $t = 7\,\text{m}$

b) $\triangle BCD$: $c = 51\,\text{mm}$, $d = 4{,}5\,\text{cm}$

c) $\triangle JKL$: $l = 72\,\text{dm}$, $k = 900\,\text{cm}$

11. Doplňte tabulku:

Trojúhelník		Odvěsna	Odvěsna	Přepona
A.	ABC	$a =$	$b = 24\,\text{cm}$	$c = 4\,\text{dm}$
	KLM	$k = 0{,}6\,\text{dm}$	$l = 80\,\text{mm}$	$m =$
	RST	$r = 0{,}8\,\text{dm}$	$s =$	$t = 13\,\text{cm}$
B.	CDE	$c = 24\,\text{cm}$	$d =$	$e = 3\,\text{dm}$
	MNO	$m = 1{,}2\,\text{m}$	$n = 9\,\text{dm}$	$o =$
	TUV	$t = 0{,}9\,\text{dm}$	$u =$	$v = 14\,\text{cm}$

2.2 Užití Pythagorovy věty v planimetrických úlohách

1 Trojúhelníky ABC a KLM mají délky stran $a = 6\,\text{cm}$, $b = 5\,\text{cm}$, $c = 4\,\text{cm}$, $k = 6\,\text{cm}$, $l = 8\,\text{cm}$, $m = 10\,\text{cm}$.

a) Zjistěte, zda platí $a^2 = b^2 + c^2$, $m^2 = k^2 + l^2$.

b) Sestrojte trojúhelníky ABC, KLM a měřením ověřte, zda jsou pravoúhlé.

Řešení

Lenčino řešení pro trojúhelník ABC:

a) $a^2 \overset{?}{=} b^2 + c^2$

$6^2 \overset{?}{=} 5^2 + 4^2$

$36 \overset{?}{=} 25 + 16$

$36 \neq 41$

Pro trojúhelník ABC vztah $a^2 = b^2 + c^2$ neplatí.

b)

Vendulka zapsala pro trojúhelník KLM:

a) $m^2 \overset{?}{=} k^2 + l^2$

$10^2 = 100$

$k^2 + l^2 = 36 + 64 = 100$

Pro △ KLM platí:
$m^2 = k^2 + l^2$

b)

Děvčata nejprve ověřila, zda pro strany trojúhelníků ABC a KLM platí vztah uvedený v Pythagorově větě.
Lenka zjistila, že tento vztah neplatí pro trojúhelník ABC. Také po narýsování tohoto trojúhelníku a změření jeho největšího vnitřního úhlu se přesvědčila, že trojúhelník ABC není pravoúhlý. Délky stran trojúhelníku KLM vyhovují vztahu $m^2 = k^2 + l^2$ a také trojúhelník KLM, který Vendulka narýsovala, je pravoúhlý.

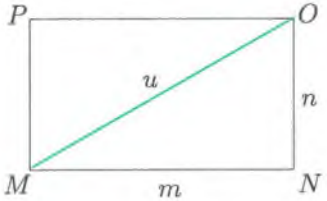
(∗) Jestliže v trojúhelníku platí, že součet druhých mocnin délek kratších stran se rovná druhé mocnině délky nejdelší strany, pak je to trojúhelník pravoúhlý.

Porovnejte větu (∗) s větou Pythagorovou.
Pythagorova věta: Je-li trojúhelník XYZ pravoúhlý s přeponou x, pak $x^2 = y^2 + z^2$.
Věta (∗): Je-li $x^2 = y^2 + z^2$, pak trojúhelník se stranami x, y, z je pravoúhlý s přeponou x.
Ve větě (∗) jsou zaměněny předpoklady a tvrzení Pythagorovy věty. V tomto případě jsou obě tvrzení pravdivá, ale často takto „obrácená“ věta neplatí.

2 Vypočtěte délku úhlopříčky MO obdélníku $MNOP$, jestliže $m =$ $= 9\,\text{cm}$, $n = 5\,\text{cm}$.

Řešení

Úhlopříčka dělí obdélník na dva pravoúhlé trojúhelníky a je jejich přeponou. K výpočtu její délky můžeme užít Pythagorovu větu.



$$u^2 = m^2 + n^2$$
$$u^2 = 9^2 + 5^2$$
$$u^2 = 81 + 25$$
$$u = \sqrt{106}$$
$$u \doteq 10{,}3$$
$$u \doteq 10{,}3\,\text{cm}$$

Úhlopříčka obdélníku $MNOP$ má délku asi $10{,}3\,\text{cm}$.

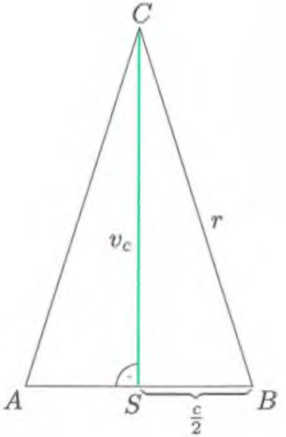
3 V rovnoramenném trojúhelníku ABC má základna AB délku $6\,\text{cm}$ a rameno r délku $10\,\text{cm}$. Vypočítejte výšku v_c.

Řešení

Výška k základně rovnoramenného trojúhelníku dělí trojúhelník na dva pravoúhlé trojúhelníky.

$\triangle CSB$ je pravoúhlý s přeponou r a odvěsnami v_c, $\frac{c}{2}$.

$$v_c^2 = r^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2$$
$$v_c^2 = 10^2 - 3^2$$
$$v_c^2 = 100 - 9$$
$$v_c = \sqrt{91}$$
$$v_c \doteq 9{,}5$$
$$v_c \doteq 9{,}5\,\text{cm}$$



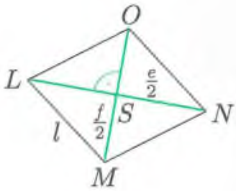
Výška k základně rovnoramenného trojúhelníku ABC má délku asi $9{,}5\,\text{cm}$.

4 V kosočtverci $LMNO$ je $|LN| = e = 24\,\text{cm}$, $|MO| = f = 18\,\text{cm}$. Vypočítejte délku strany kosočtverce.

Řešení

Úhlopříčky kosočtverce jsou k sobě kolmé a navzájem se půlí. Je-li bod S průsečík úhlopříček, pak $\triangle LMS$ je pravoúhlý a jeho odvěsny mají poloviční délku než úhlopříčky. Podle Pythagorovy věty platí:

$$
\begin{aligned}
l^2 &= \left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2 \\
\hline
l^2 &= 12^2 + 9^2 \\
l^2 &= 144 + 81 \\
l &= \sqrt{225} \\
l &= 15 \\
\hline
l &= 15\,\text{cm}
\end{aligned}
$$



Strana kosočtverce $LMNO$ má délku 15 cm.

CVIČENÍ

1. Zjistěte, zda jsou trojúhelníky pravoúhlé, mají-li tyto délky stran:
a) 7 cm, 24 cm, 25 cm b) 7 dm, 0,9 m, 1,1 m
c) 1 m, 24 dm, 260 cm d) 12 cm, 50 mm, 1,3 dm
e) 9,6 cm, 11 cm, 14,6 cm f) 3 dm, 24 cm, 1,9 dm
g) 5,1 m, 24 dm, 450 cm h) 40 cm, 0,3 m, 5 dm

2. Vypočítejte délku úhlopříčky obdélníku o rozměrech:
a) 15 cm, 3 cm b) 9 cm, 4 dm c) 3,7 cm, 12 mm

3. Určete délku úhlopříčky čtverce, jehož strana má délku:
a) 6 cm b) 15 dm c) 0,8 m

4. A. Vypočtěte délku úhlopříčky čtverce, který má obvod 44 dm.
B. Vypočtěte délku úhlopříčky obdélníku, který má rozměry 12 cm a 6 cm.

5. V obdélníku $KLMN$ je délka strany $k = 9\,\text{cm}$ a úhlopříčky LN 15 cm. Vypočtěte délku strany KN.

6. Vypočtěte délku strany čtverce, jehož úhlopříčka měří 7,6 cm.

7. A. Vypočtěte obvod obdélníku $ABCD$, je-li $|AB| = 15\,\text{dm}$ a $|AC| = 1{,}7\,\text{m}$.
B. Vypočtěte obsah obdélníku, jehož jedna strana má délku 5 dm a úhlopříčka 1,3 m.

8. Doplňte tabulku:

		a	b	u	S	o
a)	čtverec	8 cm	—			
b)	čtverec		—		$81\,\mathrm{dm}^2$	
c)	čtverec		—	$\frac{3}{5}$ m		
d)	obdélník	13 cm	10 cm			
e)	obdélník	6 dm		68 cm		
f)	obdélník		72 cm	9 dm		
g)	obdélník		7 m			62 m

9. Vypočítejte výšku rovnostranného trojúhelníku, je-li délka jeho strany:
a) 21 cm b) 5,6 dm c) 64 mm d) 0,19 m

10. Vypočítejte výšku k základně rovnoramenného trojúhelníku, je-li dána délka ramena r a délka základny z:
a) $r = 17\,\mathrm{m}$, $z = 32\,\mathrm{m}$ b) $r = 9\,\mathrm{dm}$, $z = 10{,}8\,\mathrm{dm}$
c) $z = 18\,\mathrm{mm}$, $r = 4\,\mathrm{cm}$ d) $z = 12\,\mathrm{m}$, $r = 7{,}8\,\mathrm{m}$

11. A. Vypočtěte obsah rovnostranného trojúhelníku, jehož obvod je 24 cm.
B. Vypočtěte obsah rovnoramenného trojúhelníku, jehož obvod je 36 dm a rameno má délku 10 dm.

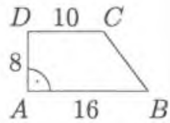
12. Vypočtěte délku základny rovnoramenného trojúhelníku, je-li dána délka jeho ramena r a výška v_z k základně:
a) $r = 9\,\mathrm{cm}$, $v_z = 5\,\mathrm{cm}$ b) $r = 1\,\mathrm{dm}$, $v_z = 8\,\mathrm{cm}$

13. Vypočtěte obvod rovnoramenného trojúhelníku, je-li dána výška k základně a délka ramena:
A. $v_z = 12\,\mathrm{cm}$, $r = 1{,}8\,\mathrm{dm}$ B. $v_z = 7\,\mathrm{dm}$, $r = 1{,}3\,\mathrm{m}$

14. Vypočítejte obvod a obsah pravoúhlého trojúhelníku:
A. $\triangle KLM$, je-li délka přepony $l = 1{,}5\,\mathrm{dm}$ a odvěsny $k = 7\,\mathrm{cm}$.
B. $\triangle PQR$, je-li délka přepony $p = 2\,\mathrm{dm}$ a odvěsny $q = 9\,\mathrm{cm}$.

15. V trojúhelníku ABC je dáno: délka těžnice $t_a = 13\,\mathrm{cm}$, délka strany $b = 10\,\mathrm{cm}$ a úhel ACB je pravý. Vypočítejte:
a) obsah trojúhelníku ABC,
b) délku těžnice t_b.

16. Vypočítejte délky úhlopříček pravoúhlého lichoběžníku $ABCD$. Uvedené rozměry jsou v cm.



17. Vypočítejte výšku rovnoramenného lichoběžníku $DEFG$ se základnami DE, FG, jestliže rameno má délku 9 cm a $|DE| = 18$ cm, $|FG| = 10$ cm.

18. A. V pravoúhlém lichoběžníku $RSTU$ platí: $RS \parallel TU$, $UR \perp RS$, $|RS| = 18$ dm, $|ST| = |RT| = 14$ dm. Vypočtěte obvod a obsah lichoběžníku $RSTU$.

B. Pro rovnoramenný lichoběžník $VXYZ$ platí: $VX \parallel ZY$, $|VX| = 15$ cm, $|ZY| = 11$ cm a výška $v = 7$ cm. Vypočítejte jeho obvod a obsah.

19. Vypočtěte obvod kosočtverce, jehož úhlopříčky mají délky 3 dm a 16 cm.

20. Délka strany kosočtverce je 6 dm, délka jedné jeho úhlopříčky je 72 cm. Vypočítejte délku druhé úhlopříčky.

21. A. Na kružnici $k(S, r = 8\text{ cm})$ leží dva různé body C, D. Tětiva CD má délku 12 cm, jejím středem je bod X. Vypočítejte vzdálenost tětivy CD od středu S kružnice k.

B. V kruhu K se středem S leží tětiva AB délky 2,4 dm a je od bodu S vzdálena 1,3 dm. Vypočítejte poloměr kruhu K.

22. Ve vnější oblasti kružnice $k(S, r = 4{,}2\text{ cm})$ leží bod A, kterým je vedena tečna t dotýkající se kružnice k v bodě T.

a) Jakou délku musí mít úsečka SA, aby platilo $|TA| = 5{,}6$ cm?

b) Jakou délku bude mít úsečka TA, když délka úsečky SA bude 7 cm?

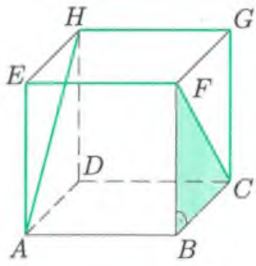
2.3 Užití Pythagorovy věty ve stereometrii

1 Honza pozoroval housenku, jak leze po kostce ze stavebnice; hrana kostky má délku 4 cm. Rozhodl se, že vypočítá délku dráhy, kterou housenka urazila. Sledujte jeho postup.

Na krychli vyznačil cestu housenky. Cesta vedla po úsečkách AE, EF, FC, CG, GH, HA. Čtyři z těchto úseček jsou hrany krychle. Zbývající dvě úsečky jsou stěnové úhlopříčky.

Obě úhlopříčky mají stejnou délku, protože jsou to úhlopříčky shodných čtverců. Trojúhelník FBC je pravoúhlý a jeho odvěsny jsou hranami krychle. Proto platí:

$$
\begin{aligned}
u^2 &= a^2 + a^2 \\
\hline
u^2 &= 4^2 + 4^2 \\
u^2 &= 2 \cdot 16 \\
u &= \sqrt{32} \\
u &\doteq 5{,}66 \\
\hline
u &\doteq 5{,}66\,\text{cm}
\end{aligned}
$$



Délka dráhy $s \doteq (4 \cdot 4 + 2 \cdot 5{,}66)\,\text{cm} = 27{,}32\,\text{cm}$.

Housenka urazila dráhu dlouhou asi 27,32 cm.

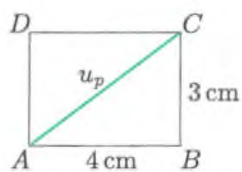
Úsečka spojující dva vrcholy mnohostěnu, které neleží v jedné jeho stěně, se nazývá **tělesová úhlopříčka**.

2 Výška čtyřbokého hranolu $ABCDEFGH$ je 6 cm, podstavné hrany mají délky 4 cm a 3 cm. Vypočtěte délku jeho tělesové úhlopříčky AG.

Řešení

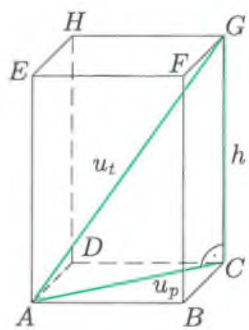
Tělesová úhlopříčka AG je přeponou pravoúhlého trojúhelníku ACG, jehož odvěsny jsou: boční hrana h a úhlopříčka u_p podstavy.
Podstavou hranolu je obdélník $ABCD$. Vypočteme délku jeho úhlopříčky:

$$
\begin{aligned}
u_p^2 &= |AB|^2 + |BC|^2 \\
\hline
u_p^2 &= 4^2 + 3^2 \\
u_p^2 &= 16 + 9 \\
u_p^2 &= 25 \\
u_p &= 5 \\
\hline
u_p &= 5\,\text{cm}
\end{aligned}
$$



Pro délky stran $\triangle ACG$ platí:

$$
\begin{aligned}
u_t^2 &= u_p^2 + h^2 \\
\hline
u_t^2 &= 5^2 + 6^2 \\
u_t^2 &= 25 + 36 \\
u_t &= \sqrt{61} \\
u_t &\doteq 7{,}8 \\
\hline
u_t &\doteq 7{,}8\,\text{cm}
\end{aligned}
$$



Tělesová úhlopříčka hranolu má délku asi 7,8 cm.

3 Petr vyráběl z papíru model pravidelného čtyřbokého jehlanu, který měl délku podstavné hrany 3 dm a výšku 5 dm. K sestrojení sítě potřeboval znát délku boční hrany jehlanu. Tento údaj mohl zjistit konstrukcí nebo výpočtem.

Petr počítal:

$\triangle ASV$: $h^2 = u^2 + v^2$
$\triangle ASB$: $a^2 = u^2 + u^2$

$u^2 = \frac{a^2}{2} \rightarrow h^2 = \frac{a^2}{2} + v^2$

$h^2 = \frac{9}{2} + 25$

$h = \sqrt{29{,}5}$

$h \doteq 5{,}4$

$h \doteq 5{,}4$ dm

Zkuste zjistit délku boční hrany jehlanu konstrukcí a porovnejte svůj výsledek s Petrovým.

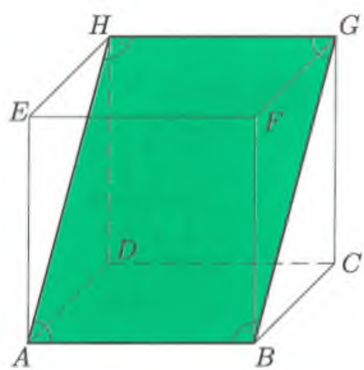
CVIČENÍ

1. Načrtněte pravidelný čtyřboký hranol. V náčrtku vyznačte úhlopříčku podstavy, stěnovou a tělesovou úhlopříčku.

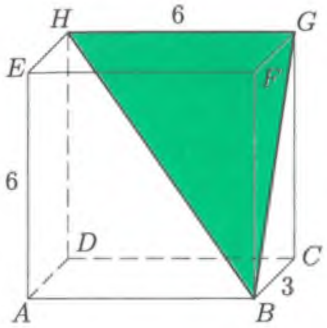
2. Načrtněte kvádr *ABCDEFGH*, jehož podstavou je obdélník *ABCD*. Vyznačte jeden pravoúhlý trojúhelník, v němž je přeponou:
   a) úhlopříčka podstavy, b) úhlopříčka stěny *ABFE*,
   c) úhlopříčka stěny *BCGF*, d) tělesová úhlopříčka.

3. Pravidelný čtyřboký hranol má podstavnou hranu délky 5 cm a výšku 6 cm. Vypočítejte délku úhlopříčky a) podstavy, b) stěny, c) tělesa.

4. Vypočítejte obvod a obsah řezu, který vznikne seříznutím krychle *ABCDEFGH* rovinou procházející úhlopříčkami *BG* a *AH*. Hrana krychle má délku 6 cm.



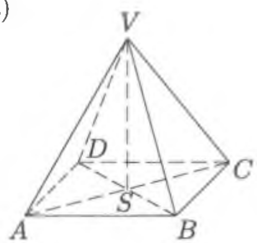
5. Rozměry kvádru na obrázku jsou dány v dm. Vypočítejte obvod trojúhelníku BGH.



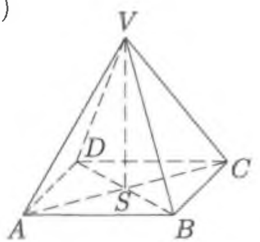
6. O kolik cm se zvětší délka tělesové úhlopříčky krychle, jestliže její hranu, která má délku 8 cm, zvětšíme o 4 cm?

7. Načrtněte podle obrázku dva čtyřboké jehlany. V jednom z nich vyšrafujte pravoúhlý trojúhelník, jehož jednou stranou je hrana jehlanu, ve druhém vyšrafujte pravoúhlý trojúhelník, jehož jednou stranou je výška stěny jehlanu.

a)



b)



8. Pravidelný čtyřboký jehlan má podstavnou hranu délky 4 cm a výšku 80 mm. Vypočtěte a) výšku jeho boční stěny, b) obsah boční stěny.

9. Podstavou jehlanu je obdélník $ABCD$ s rozměry 3,2 dm a 24 cm. Vypočtěte výšku jehlanu, je-li délka všech bočních hran jehlanu 60 cm.

2.4 Užití Pythagorovy věty v praxi

Během života se setkáme s řadou různých situací, v nichž je třeba řešit úlohy vyžadující znalost Pythagorovy věty.

1 Zuzanka pouštěla papírového draka na provaze dlouhém 50 metrů. Drak se vznášel nad místem, které bylo vzdáleno 12 m od Zuzanky. Jak vysoko nad zemí se vznášel?

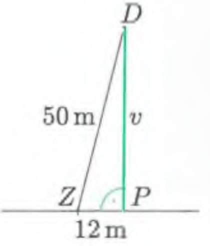
Řešení

Situaci popsanou v textu znázorníme náčrtkem. Trojúhelník DPZ je pravoúhlý s odvěsnou v. Užijeme Pythagorovu větu:

$$v^2 = |ZD|^2 - |ZP|^2$$

$$v^2 = 50^2 - 12^2$$
$$v^2 = 2500 - 144$$
$$v = \sqrt{2356}$$
$$v \doteq 48{,}5$$

$$v \doteq 48{,}5\,\mathrm{m}$$



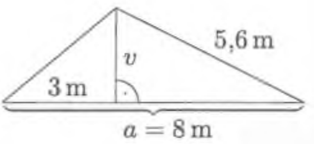
Drak se vznášel přibližně 48,5 m nad zemí.

2 Štít domu chceme obložit palubkami. Kolik m^2 jich je třeba, má-li štít tvar trojúhelníku, jehož některé rozměry jsou uvedeny na obrázku?

Řešení

Je třeba vypočítat obsah trojúhelníku, který je vyznačen v náčrtku.

$$S = \frac{a \cdot v}{2}$$



Výšku vypočteme pomocí Pythagorovy věty:

$$v^2 = (5{,}6^2 - 5^2)\,\mathrm{m}^2$$

$$v^2 = 5{,}6^2 - 5^2$$
$$v^2 = 31{,}36 - 25$$
$$v = \sqrt{6{,}36}$$
$$v \doteq 2{,}5$$

$$v \doteq 2{,}5\,\mathrm{m}$$

$$S = \frac{a \cdot v}{2}$$

$$S \doteq \frac{8 \cdot 2{,}5}{2}$$

$$S \doteq 10$$

$$S \doteq 10\,\mathrm{m}^2$$

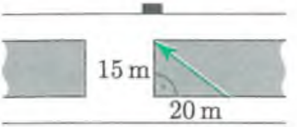
K obložení štítu bude třeba asi $10\,\mathrm{m}^2$ palubek.

CVIČENÍ

1. Žebřík dlouhý 3,5 m je opřen o zeď domu. Jeho dolní konec je od zdi vzdálen 1 m. V jaké výši se žebřík dotýká horním koncem zdi?

2. Modrý klín na státní vlajce České republiky zasahuje do jejího středu. Kolik m^2 látky každé barvy je potřeba k výrobě vlajky 2 m široké, je-li rameno klínu dlouhé 1,8 m?

3. O kolik metrů si lidé zkracují cestu, chodí-li na zastávku autobusu po trávníku místo po chodníku?



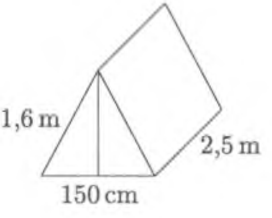
4. Jaký nejmenší průměr musí mít kmen stromu, abychom z něj mohli vyříznout hranolek se čtvercovým průřezem o délce strany 20 cm?

5. Do jaké výšky sahají štafle, které mají ramena dlouhá 2,5 m, jsou-li jejich dolní konce od sebe vzdáleny 1,6 m?

6. Otevřené štafle sahají do výšky 180 cm a vzdálenost jejich dolních konců je 1,2 m. Můžeme složené štafle uložit ve skladišti pod regál dlouhý 1,95 m?

7. Televizní obrazovka má rozměry 460 mm a 350 mm. Jak dlouhou má úhlopříčku?

8. Stan typu A je 2,5 m dlouhý a 150 cm široký. Přední díl má tvar rovnoramenného trojúhelníku, jehož rameno má délku 1,6 m.
   a) Kolik m^3 vzduchu stan obsahuje?
   b) Kolik m^2 plátna je třeba k ušití stanu bez podlážky? Připočtěte 10 % materiálu na švy a záložky.

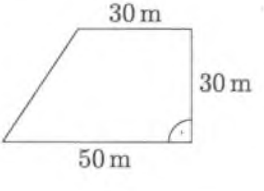


9. Silná vichřice nalomila stožár 6 m nad zemí a jeho vrchol dopadl na zem 8 m od paty stožáru. Jak byl stožár původně vysoký?

10. Rovnoramenný trojúhelník má základnu dlouhou 7,2 dm, rameno má délku 60 cm. Jak daleko od základny leží těžiště trojúhelníku?

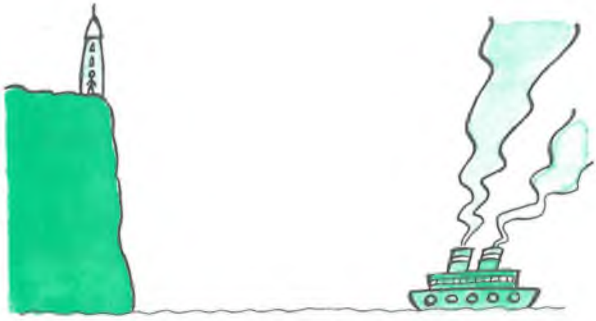
11. Střecha chalupy má štít tvaru rovnoramenného trojúhelníku o délce základny 8 m a délce ramena 10 m. Jak vysoký je štít?

12. Zahrada má tvar pravoúhlého lichoběžníku. Kolik metrů pletiva je třeba koupit k jejímu oplocení, počítáme-li s 5 % pletiva navíc?
Rozměry zahrady jsou na náčrtku.



13. V kružnici $k(S, r = 8\,\text{cm})$ jsou narýsovány dvě rovnoběžné tětivy: $|AB| = 12\,\text{cm}$, $|MN| = 8\,\text{cm}$. Určete vzdálenost těchto tětiv.

14. Turista stojí na útesu u majáku a pozoruje loď, která kotví 300 m od útesu. Jak vysoko nad mořem stojí turista, je-li vzdušná vzdálenost mezi ním a lodí 360 m?



2.5 Pythagorejské trojúhelníky

Při řešení příkladů s použitím Pythagorovy věty jste si mohli všimnout, že délky všech stran některých pravoúhlých trojúhelníků byly vyjádřeny jen přirozenými čísly. Podívejte se na některé příklady.

1 Vypočtěte délku třetí strany pravoúhlého trojúhelníku, je-li dáno:
a) $\triangle ABC$: přepona $c = 13\,\text{cm}$, odvěsna $a = 5\,\text{cm}$
b) $\triangle KLM$: odvěsny $k = 9\,\text{dm}$, $l = 12\,\text{dm}$
c) $\triangle XYZ$: přepona $y = 17\,\text{cm}$, odvěsna $z = 14\,\text{cm}$

Řešení

a)
$$\begin{aligned} b^2 &= c^2 - a^2 \\ b^2 &= 13^2 - 5^2 \\ b^2 &= 169 - 25 \\ b^2 &= 144 \\ b &= 12 \\ b &= 12\,\text{cm} \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} m^2 &= k^2 + l^2 \\ m^2 &= 9^2 + 12^2 \\ m^2 &= 81 + 144 \\ m^2 &= 225 \\ m &= 15 \\ m &= 15\,\text{dm} \end{aligned}$$

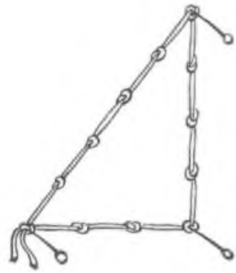
c)
$$\begin{aligned} x^2 &= y^2 - z^2 \\ x^2 &= 17^2 - 14^2 \\ x^2 &= 289 - 196 \\ x^2 &= 93 \\ x &\doteq 9{,}6 \\ x &\doteq 9{,}6\,\text{cm} \end{aligned}$$

Délky stran trojúhelníků ABC a KLM jsou vyjádřeny (při zvolených jednotkách) přirozenými čísly. Takové trojúhelníky nazýváme **pythagorejské trojúhelníky**. Trojúhelník XYZ pythagorejský není.

Nejmenší z přirozených čísel, která vyjadřují délky stran pravoúhlého trojúhelníku, jsou 3, 4, 5.

V praxi se takových čísel výhodně využívalo při vytyčování pravého úhlu.

2 Na provázku si udělejte 13 uzlíků stejně od sebe vzdálených. První uzlík spojte s třináctým. Pak první, čtvrtý a osmý uzlík připevněte špendlíkem k desce stolu a provázek napněte tak, aby tvořil obvod trojúhelníku. Takto jste vytyčili pravoúhlý trojúhelník, a tedy také pravý úhel s vrcholem ve čtvrtém uzlíku.



3 Určete délky stran dalších pythagorejských trojúhelníků.

Řešení

Jestliže čísla 3, 4, 5, která tvoří pythagorejskou trojici, vynásobíme týmž přirozeným číslem, získáme další pythagorejskou trojici čísel, která mohou vyjadřovat délky stran pravoúhlého trojúhelníku. Ověřme si to pro tři trojice čísel:

6, 8, 10	24, 32, 40	33, 44, 55
$10^2 = 8^2 + 6^2$	$40^2 = 32^2 + 24^2$	$55^2 = 44^2 + 33^2$
$100 = 64 + 36$	$1\,600 = 1\,024 + 576$	$3\,025 = 1\,936 + 1\,089$
$100 = 100$	$1\,600 = 1\,600$	$3\,025 = 3\,025$

Pythagorejské trojice čísel je také možno vypočítat pomocí tří následujících vzorců. Jsou-li x, y přirozená čísla taková, že $x > y$, pak čísla a, b, c:

$$a = 2 \cdot x \cdot y$$
$$b = x^2 - y^2$$
$$c = x^2 + y^2$$

tvoří pythagorejskou trojici.

Např.:
Pro $x = 5$, $y = 4$ je $a = 2 \cdot 5 \cdot 4 = 40$
$b = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$
$c = 5^2 + 4^2 = 25 + 16 = 41$

Zkouška: $41^2 = 9^2 + 40^2$
$1\,681 = 81 + 1\,600$
$1\,681 = 1\,681$

Trojúhelník, jehož strany mají délky 40, 9 a 41 stejných délkových jednotek, je pravoúhlý.

4

25
2 500
250 000
0,25
0,002 5
0,49
0,09
1 600
1,44
360 000
0,01
6 400
1,69
0,16
0,012 1
0,04
8 100
1,96
0,022 5
0,36

CVIČENÍ

1. Sestavte deset trojic přirozených čísel, která mohou vyjadřovat délky stran pravoúhlých trojúhelníků tak, aby to byly násobky pythagorejské trojice čísel (3, 4, 5).

2. Zapište délky stran tří pythagorejských trojúhelníků tak, aby jejich rozměry byly udány čísly, která jsou větší než 10 a menší nebo rovna 30.

3. Sestavte text úlohy, v níž se bude počítat s rozměry pythagorejského trojúhelníku.

4. Doplňte tabulku s údaji o pythagorejských trojúhelnících:

A

	Přepona	Odvěsna	Odvěsna
a)	10	6	
b)	13		12
c)		9	12
d)	17		15
e)		12	16

B

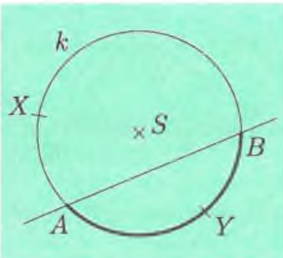
	Přepona	Odvěsna	Odvěsna
a)	25		20
b)	26	10	
c)	29		21
d)		24	18
e)	35		28

5. Z trojic čísel na proužku 5 vyberte pythagorejské trojice.

3 KRUŽNICE

3.1 Thaletova kružnice

Pozorujte!



Kružnice $k(S,r)$ je rozdělena dvojicí bodů A, B na dva oblouky: oblouk AXB a oblouk AYB. Sjednocením těchto oblouků je celá kružnice $k(S,r)$.

Zapíšeme:

$$\overset{\frown}{AXB}$$

$$\overset{\frown}{AYB}$$

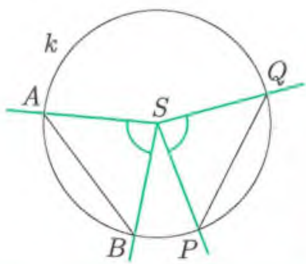
$$\overset{\frown}{AXB} \cup \overset{\frown}{AYB} = k(S,r)$$

Každé dva různé body A, B kružnice $k(S,r)$ rozdělí tuto kružnici na dva oblouky kružnice, které leží v opačných polorovinách určených přímkou AB. Těmto obloukům se říká také **kružnicové oblouky**.

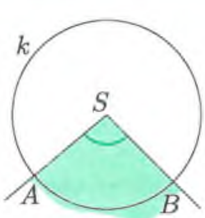
1 Narýsujte kružnici $k(S, 3\,\text{cm})$ a její tětivy AB a PQ: $|AB| = |PQ| = 4\,\text{cm}$.

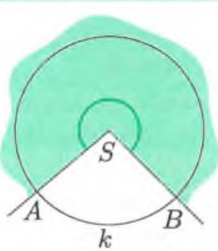
a) Přesvědčte se, že trojúhelníky ABS a PQS jsou shodné (věta *sss*).

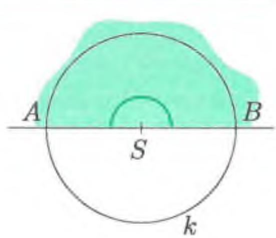
b) Porovnejte velikost úhlů ASB a PSQ.



Úhel ASB, jehož vrchol S je středem kružnice k a ramena procházejí krajními body oblouku AB kružnice k, se nazývá středový úhel příslušný k tomu oblouku AB, který v tomto úhlu leží.



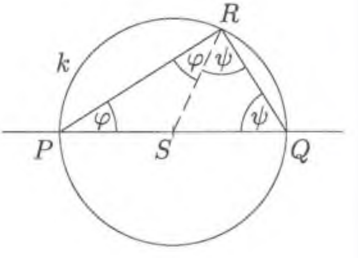




2 Sestrojte kružnici $k(S, 5\,\mathrm{cm})$ s průměrem PQ. Dokažte, že každý trojúhelník PQR, jehož vrchol R je vnitřním bodem některého z oblouků PQ kružnice k, je pravoúhlý.

Řešení

Všechny vrcholy trojúhelníku PQR leží na kružnici k. Proto je kružnice k kružnicí opsanou tomuto trojúhelníku. Trojúhelníky PSR a RSQ jsou rovnoramenné se základnami PR a RQ.



Označme

$$\varphi = |\sphericalangle RPS| = |\sphericalangle PRS|,$$
$$\psi = |\sphericalangle SRQ| = |\sphericalangle SQR|.$$

Protože součet velikostí vnitřních úhlů $\triangle PQR$

$$2\varphi + 2\psi = 2\mathrm{R},$$

je

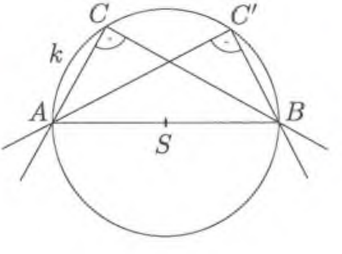
$$\varphi + \psi = \mathrm{R} = 90°.$$

Trojúhelník PQR je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu R.

Pravoúhlý trojúhelník je velmi důležitý. Jeho vlastností lze využít při geometrických konstrukcích i při dokazování matematických vět. Pozornost mu věnovali již staří Řekové. V 6. století před naším letopočtem žil filozof, matematik a obchodník Thales z Milétu, který vyslovil toto tvrzení:

Thaletova věta

Všechny úhly ACB s vrcholem C na kružnici, jejímž průměrem je úsečka AB, jsou pravé.

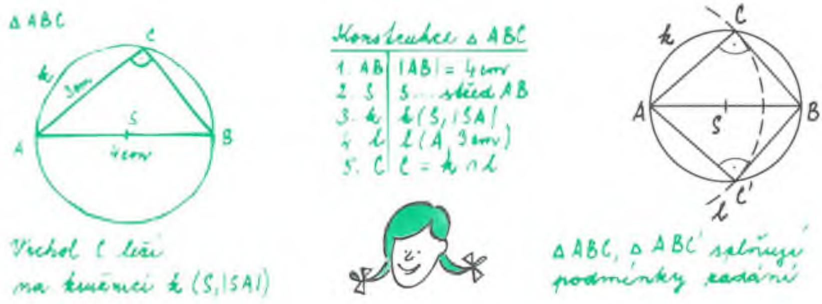


Porovnejte Thaletovo tvrzení s řešením příkladu 2. I my jsme tuto poučku „objevili“, ale o 25 století později.

Thaletovu větu lze výhodně použít při konstrukci pravoúhlých trojúhelníků.

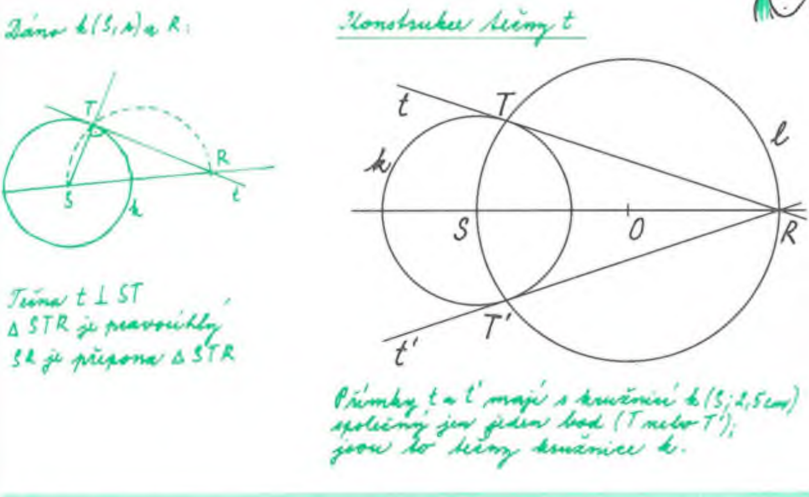
3 Narýsujte pravoúhlý trojúhelník ABC, jehož nejdelší strana AB má délku 4 cm a strana AC délku 3 cm.

Lenka řešila úlohu takto:



4 Sestrojte tečny kružnice $k(S; 2{,}5\,\text{cm})$ procházející bodem R, je-li $|RS| = 8\,\text{cm}$.

Vendulka uvažovala takto:



Kružnici, jejímž průměrem je přepona AB pravoúhlého trojúhelníku ABC, nazýváme **Thaletova kružnice**.
Thaletova kružnice je kružnice opsaná všem pravoúhlým trojúhelníkům se společnou přeponou AB.

Vendulka použila při konstrukci tečen ke kružnici $k(S, r)$ Thaletovu kružnici s průměrem SR.
Protože konstrukci tečen ke kružnici budeme často používat, zapíšeme její postup podrobněji.

Konstrukce tečen vedených z daného bodu R ke kružnici k

1. k; $k(S; 2{,}5\,\text{cm})$
2. R; $|RS| = 8\,\text{cm}$
3. O; O ... střed úsečky SR
4. l; $l(O, |OS|)$
5. T, T'; $k \cap l = \{T, T'\}$
6. t, t'; $t = \leftrightarrow RT$, $t' = \leftrightarrow RT'$

CVIČENÍ

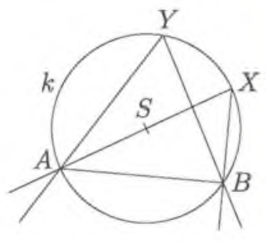
1. Sestrojte kružnici $k(S, 3\,\text{cm})$ a vyznačte středový úhel ASB o velikosti $60°$. Změřte délku tětivy AB.

2. Narýsujte kružnici $k(S, 5\,\text{cm})$, její průměr AX a tětivu AB o délce 4 cm.

a) Na oblouku AXB zvolte bod Y a sestrojte ramena konvexních úhlů AYB a AXB.

b) Porovnejte graficky velikosti úhlů AXB a AYB.

c) Porovnejte měřením velikosti úhlů AYB a ASB.



3. Přepona XY pravoúhlého trojúhelníku XYZ má délku 5 cm, vnitřní úhel při vrcholu X je polovinou úhlu pravého. Sestrojte $\triangle XYZ$.

4. Narýsujte kružnici $g(G, 3\,\text{cm})$ a její průměr KL. Sestrojte pravoúhlé trojúhelníky KLM, KLN a KLO. Porovnejte jejich obsahy. Jak je třeba volit bod Q, aby pravoúhlý trojúhelník KLQ měl největší možný obsah?

5. Sestrojte kružnici $m(M, 2\,\text{cm})$ a bod Q tak, aby $|MQ| = 6\,\text{cm}$.

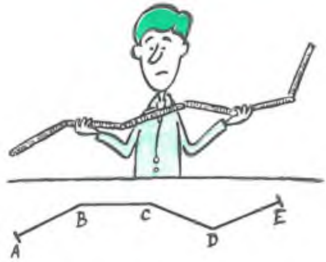
a) Veďte bodem Q tečny a, b ke kružnici m a jejich body dotyku označte po řadě A, B.

b) Porovnejte velikost úseček AQ a BQ.

Úloha pro odvážné:

6. Narýsujte vzor na dlaždici, který je popsán takto: Dlaždice má tvar čtverce o straně délky 10 cm. V jejím středu je kruh, jehož průměr měří 4 cm. Všechny vrcholy čtverce jsou spojeny s tímto kruhem úsečkami, které leží na tečnách kruhu. (Popis samozřejmě není jednoznačný ani matematický. Narýsujte vzor dlaždice tak, jak mu rozumíte, a porovnejte svůj obrázek s prací kamarádů.) Zkuste zapsat pomocí matematických symbolů konstrukci vzoru.

3.2 Délka kružnice



Délku lomené čáry umíte zjistit dvěma způsoby:
1. změříte délky všech úseček, z nichž se lomená čára skládá, a sečtete je,
2. graficky sečtete všechny úsečky lomené čáry a změříte délku výsledné úsečky.

Který postup byste zvolili?

1 Narýsujte pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$ se středem S, je-li $|SA| = 3\,\text{cm}$. Určete délku lomené čáry a) $FASC$, b) $FACS$.

Řešení

a) Pravidelný šestiúhelník je sjednocením šesti rovnostranných trojúhelníků se stranami délky $a = 3\,\text{cm}$. Každá úsečka lomené čáry $FASC$ je stranou takového trojúhelníku. Proto platí: $|FASC| = |FA| + |AS| + |SC| = 9\,\text{cm}$.

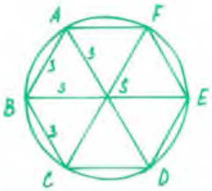
b) Také lomená čára $FACS$ se skládá ze tří úseček. Úsečky FA a CS měří 3 cm, neznáme však délku úsečky AC. Změříme ji: $|AC| \doteq 5{,}2\,\text{cm}$. (Kolik cm jste naměřili vy?)
Můžeme tedy psát:
$$|FACS| = |FA| + |AC| + |CS| \doteq 3\,\text{cm} + 5{,}2\,\text{cm} + 3\,\text{cm} = 11{,}2\,\text{cm}.$$
Délka lomené čáry $FASC$ je 9 cm, délka lomené čáry $FACS$ přibližně 11,2 cm.

Všechny vrcholy pravidelného šestiúhelníku $ABCDEF$ z příkladu 1 leží na kružnici $k(S, 3\,\text{cm})$. Říkáme, že kružnice k je šestiúhelníku $ABCDEF$ **opsána** nebo že šestiúhelník $ABCDEF$ je kružnici $k(S, 3\,\text{cm})$ **vepsán**.

2 Navrhněte způsob, jak přibližně určit délku kružnice k.

Vendulka napsala:

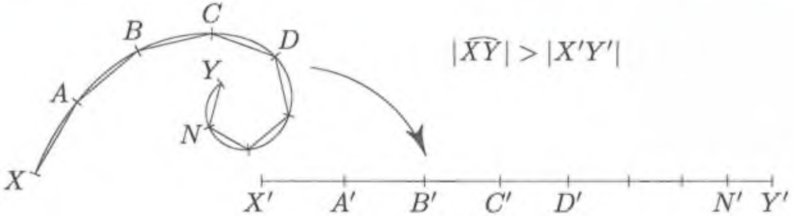
Délka kružnice k je větší než obvod pravidelného šestiúhelníku, který je jí vepsán, $|AB| < |\widehat{AB}|$.
Obvod pravidelného šestiúhelníku
$o = 6 \cdot |AB| = 6 \cdot 3\,\text{cm} = 18\,\text{cm}$.
Proto délka kružnice k je větší než 18 cm.



Honza poznamenal, že odhad délky kružnice k bude přesnější, jestliže i oblouky AB, BC, CD, DE, EF a FA rozdělíme na několik menších obloučků a ty nahradíme úsečkami. Doplnil proto na kružnici k dalších šest vrcholů tak, aby získal pravidelný dvanáctiúhelník $AKBLCMDNEOFP$. Zjistil, že délky stran tohoto dvanáctiúhelníku jsou přibližně 15,5 mm a zapsal:

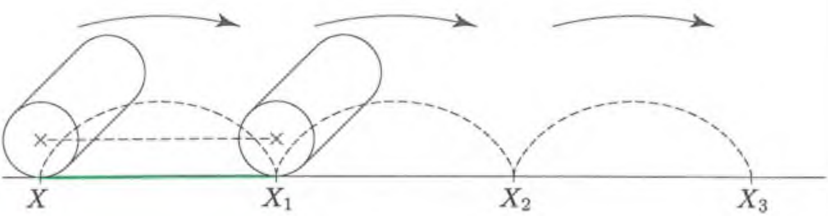
Obvod dvanáctiúhelníku AKBLCMDNEOFP je přibližně 12 · 15,5 mm, tj. 186 mm neboli 18,6 cm.
Proto je délka kružnice k větší než 18,6 cm.

Délku křivky XY můžeme zhruba odhadnout pomocí délky lomené čáry $XAB\ldots NY$, jejíž body A, B, $\ldots$, N na křivce XY po řadě leží.
Čím kratší jsou úsečky lomené čáry XY, tím přesnější je odhad délky křivky XY.



3 Výška dřevěného špalíku tvaru rotačního válce je 5 cm, průměr jeho podstavy 20 mm. Zjistěte rozměry jeho pláště.

Petr uvažoval takto:
„Plášť rotačního válce můžeme rozvinout do obdélníku. Rozměry jeho stran jsou výška v válce a obvod podstavy. Výšku válce známe; $v = 5$ cm. Obvod podstavy je roven délce kružnice $k(S, 1\,\text{cm})$.
Kružnice k je však velmi malá a odhad její délky pomocí vhodného n-úhelníku by byl značně nepřesný. Vhodnější asi bude položit válec na rovnou podložku a zjistit délku kružnice k jeho odvalením.



Při jednom odvalení válce získáme úsečku XX_1 jejíž délka je rovna délce kružnice k.
Protože je to však experiment, který nebývá v praxi přesný, je vhodnější odvalit válec např. desetkrát a změřit úsečku XX_{10}. Její délka je rovna přibližně desetinásobku délky kružnice k.
Proto délka kružnice k bude asi $\frac{1}{10}|XX_{10}|$. Musíme ovšem pracovat přesně.“

Rozhodněte, zda je Petrova úvaha správná.
Víte o jiném způsobu odhadu délky kružnice?

Délku kružnice budeme značit o.

4 Odhadněte některou z uvedených metod délky kružnic k_1, k_2 a k_3 s průměry d_1, d_2 a d_3. (Využijte např. školní modely, kousky trubky nebo narýsované kružnice.) Pak doplňte následující tabulku:

Kružnice	Průměr d	Poloměr r	Délka o	$\frac{o}{d}$
k_1				
k_2				
k_3				

Porovnejte výsledky v posledním sloupci tabulky. Pokud jste pracovali a počítali přesně, jsou všechna zde uvedená čísla blízká číslu tři. Čím přesnější byl váš postup, tím více se podíl $\frac{o}{d}$ blíží číslu, které můžeme zaokrouhlit na 3,14.
Ve skutečnosti je tento podíl pro všechny kružnice roven číslu

$$3{,}141\,592\,65\ldots$$

s neukončeným a neperiodickým desetinným rozvojem.
Tomuto číslu se říká **Ludolfovo číslo** na počest matematika Ceulena Ludolfa (1540–1610), který vypočítal jeho prvních 35 desetinných míst. Značí se π (čteme „pí“); často se užívá jen zaokrouhlené např. na setiny:

$$\pi \doteq 3{,}14$$

Číslo π vyjadřuje poměr délky o kružnice k a jejího průměru d.

$$o : d = \pi : 1 \longrightarrow o = \pi \cdot d$$

$$o : r = 2\pi : 1 \longrightarrow o = 2\pi \cdot r$$

Délku kružnice $k(S, r)$ vypočítáme podle vzorce

$$o = 2\pi \cdot r,$$

kde π je Ludolfovo číslo.

K přesnému určení čísla π vedla dlouhá cesta. Nejprve lidé počítali s číslem tři, staří Řekové používali zlomek $\frac{22}{7}$. Na displeji vaší kalkulačky po stisknutí tlačítka $\boxed{\pi}$ čtete pravděpodobně číslo 3,141 592 7. Nezapomeňte, že jde o přibližnou hodnotu čísla π, o zaokrouhlené číslo π. Proto musíte počítat s tím, že kdykoli ve výpočtu užijete tlačítko $\boxed{\pi}$, bude váš výsledek pouze přibližný.

5 Vypočtěte délku kružnice $l(O, 6\,\mathrm{cm})$ s přesností na jedno desetinné místo.

Řešení

$$o = 2\pi \cdot r = (2\pi) \cdot 6\,\mathrm{cm} = 12 \cdot \pi\,\mathrm{cm}.$$

Číslo π zaokrouhlíme, $\pi \doteq 3{,}14$, a počítáme dále:

$$o \doteq 12 \cdot 3{,}14\,\mathrm{cm} = 37{,}68\,\mathrm{cm}$$

Délka kružnice l je rovna přibližně 37,7 cm.

6 Vypočtěte poměr délek kružnic $k(S, 2\,\mathrm{cm})$ a $l(S, 3\,\mathrm{cm})$.

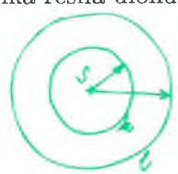
Honza se rozhodl k výpočtu délek obou kružnic použít kalkulačku a pak určit poměr jejich délek:

$k\ (S, 2\,\mathrm{cm})$ $\qquad o_k = 2\pi \cdot 2\,\mathrm{cm} \doteq 12{,}566371\,\mathrm{cm}$

$l\ (S, 3\,\mathrm{cm})$ $\qquad o_l = 2\pi \cdot 3\,\mathrm{cm} \doteq 18{,}849556\,\mathrm{cm}$

$$\frac{o_k}{o_l} \doteq \frac{12{,}566371\,\mathrm{cm}}{18{,}849556\,\mathrm{cm}} = 0{,}6666$$

Vendulka řešila úlohu takto:



$k\,(S, 2\,\mathrm{cm})$ $\qquad o_k = 2\pi \cdot 2\,\mathrm{cm} = 4\pi\,\mathrm{cm}$

$l\,(S, 3\,\mathrm{cm})$ $\qquad o_l = 2\pi \cdot 3\,\mathrm{cm} = 6\pi\,\mathrm{cm}$

Poměr délek k, l:

$$\frac{o_k}{o_l} = \frac{4\pi\,\mathrm{cm}}{6\pi\,\mathrm{cm}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Délky kružnic k, l jsou v poměru 2 : 3.

Poměr délek dvou kružnic je roven poměru jejich poloměrů.

Všimněte si, že Vendulka nemusela při výpočtu dosazovat za číslo π. Zvykněte si i vy při výpočtech dosazovat číselné hodnoty až tehdy, je-li to nezbytně nutné. Často se tak výpočet zjednoduší. Můžeme také objevit vztahy, které jsou obecnější a neplatí jen pro dané hodnoty zadané v úloze.

CVIČENÍ

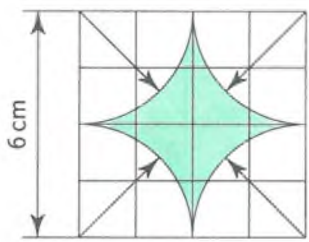
1. Sestrojte pravidelný osmiúhelník vepsaný do kružnice $k(S, 3\,\mathrm{cm})$. Zjistěte měřením jeho obvod.

2. Vypočtěte délku kružnice $k(S, 3\,\mathrm{cm})$ s přesností na dvě desetinná místa.

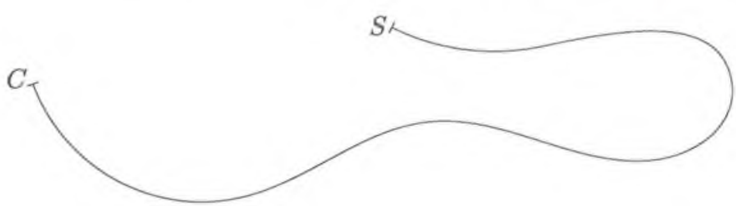
3. Porovnejte délky obvodů pravidelného šestiúhelníku, osmiúhelníku a dvanáctiúhelníku vepsaných do kružnice $k(S, 3\,\mathrm{cm})$ s délkou této kružnice.

4. Kolik km ujel cyklista, jestliže se jeho kolo s průměrem 70 cm otočilo při vyjížďce právě 10 000krát?

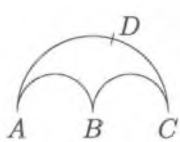
5. Z plechu tvaru čtverce je vyříznuta kovová ozdoba podle nákresu.
a) Popište její výrobu.
b) Vypočtěte její obvod.



6. Odhadněte pomocí lomené čáry délku závodní tratě pro přespolní běh. Trasa závodu je vyznačena na obrázku v měřítku 1 : 5 000.



7. Porovnejte délku polokružnice ADC o poloměru $r = 4\,\mathrm{cm}$ s délkou čáry ABC složené ze dvou polokružnic s poloměry $r = 2\,\mathrm{cm}$. (Výsledek odhadněte, pak teprve vypočtěte.)



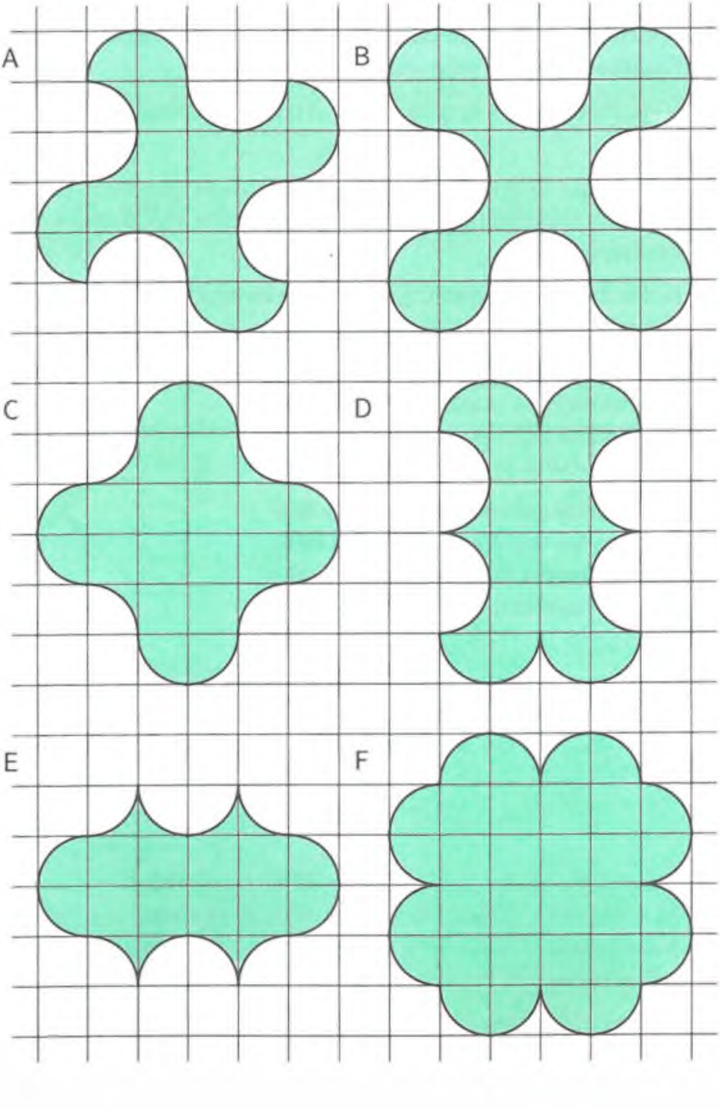
8. Obvod rybníčku, který má tvar kruhu, je 20 m. Vypočtěte jeho průměr.

9. Kolik závitů měděného drátu vznikne navinutím 100 m drátu na kovovou tyč tvaru rotačního válce s průměrem 10 cm? (Čím tlustší je drát, tím méně závitů vznikne. Průměr drátu však neuvažujte.)

10. Útvary A, B, C, D, E a F na obrázku jsou omezeny oblouky shodných kružnic se středy ve vrcholech shodných čtverců.

a) Porovnejte bez počítání obvody těchto útvarů.

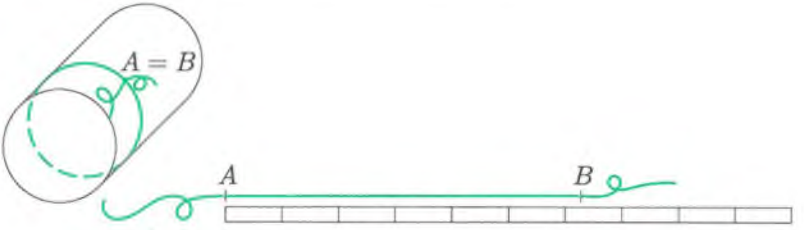
b) Označte útvary, které mají týž obsah.



3.3 Rektifikace kružnice

1 Vendulka chtěla oblepit proužkem tapety krabici tvaru rotačního válce. Potřebnou délku proužku tapety určila krejčovským metrem, který ovinula okolo krabice. Na tomto metru je vyznačeno centimetrové měřítko. Proto si Vendulka mohla ihned přečíst, jak dlouhý proužek bude potřebovat. Kdyby použila obyčejný provázek, musela by pak změřit potřebnou délku třeba pravítkem.

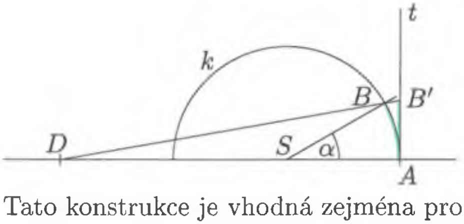
Prohlédněte si „obrázkový návod“ tohoto postupu.



Tento postup můžeme popsat jako „narovnání kružnice na přímku“ nebo naopak „navinutí úsečky AB na danou kružnici k“.
Tomuto narovnávání, napřimování, se říká **rektifikace**.
Matematici marně hledali konstrukci, která by umožnila sestrojit úsečku, jejíž délka se rovná délce kružnice s daným poloměrem r. Je však známo několik přibližných metod, které tuto úlohu řeší. Dvě z nich si ukážeme, protože mohou mít značný význam v praxi.

Rektifikace oblouku kružnice

Na kružnici $k(S, r)$ je vyznačen oblouk AB, $|\sphericalangle ASB| = 30°$. Tento oblouk „napřímíme“ na tečnu t kružnice k, která se kružnice dotýká v bodě A, takto:



1. t; $A \in t$, $t \perp SA$
2. D; $D \in \mapsto AS$, $|SD| = 2r$
3. B'; $t \cap \leftrightarrow DB = B'$

$|AB'| \doteq |\widehat{AB}|$

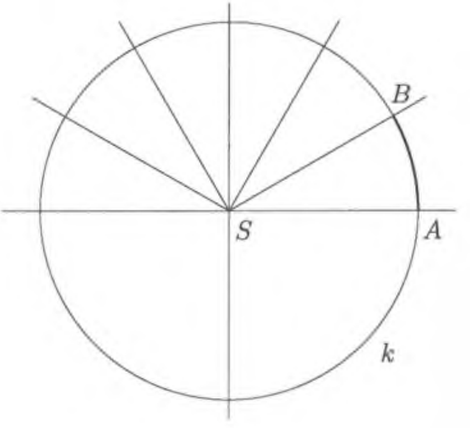
Tato konstrukce je vhodná zejména pro úhly α, pro něž platí

$$\alpha \leqq 30°.$$

Pro úhly větší již nevyhovuje.

2 Ověřte uvedenou metodu rektifikace oblouku kružnice pro kružnici $k(S, 5\,\text{cm})$ a její oblouk AB ležící uvnitř úhlu ASB o velikosti 30°.

Návod:
Narýsujte kružnici k a úhel ASB. Protože plný úhel lze rozdělit na 12 shodných úhlů, jejichž velikost je 30° (viz pravidelný dvanáctiúhelník), je délka oblouku AB rovna $\frac{1}{12}$ délky kružnice k. Délku oblouku vypočtěte, délku úsečky AB' změřte a oba výsledky porovnejte.

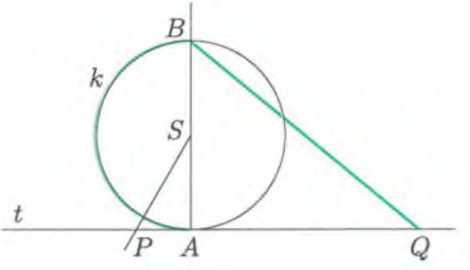


Rektifikace polokružnice

Je dána kružnice $k(S, r)$ a její průměr AB. K oblouku AB této kružnice sestrojíme úsečku BQ takovou, že $|\widehat{AB}| \doteq |BQ|$:

1. t; $A \in t$, $t \perp AB$
2. P; $P \in t$, $|\sphericalangle PSA| = 30°$
3. Q; $Q \in \mapsto PA$, $|PQ| = 3r$

$|BQ| \doteq |\widehat{AB}|$



(Této konstrukci se říká *Kochańského rektifikace kružnice*, i když jde vlastně o rektifikaci polokružnice.)

3 Proveďte Kochańského rektifikaci polokružnice $k(S, 5\,\text{cm})$. Výslednou úsečku BQ porovnejte s úsečkou AB' sestrojenou podle příkladu 1.

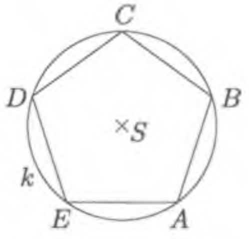
CVIČENÍ

1. Konstrukčně zjistěte délku řemene, který spojuje dvě kola téhož průměru $d = 5\,\text{dm}$, jsou-li středy těchto kol od sebe vzdáleny 10 dm. (Překreslete ve vhodném měřítku.)

2. Vypočtěte délku řemene ze cvičení 1:
   a) Proveďte výpočet pro $d = 5\,\text{dm}$.
   b) Počítejte s proměnnou d a střednou $SS' = 2d$.

3. Jednoduchou „rektifikaci“ můžeme (podobně jako starověcí stavitelé) provést i na hřišti pomocí kolíků, křídy a dostatečně dlouhé šňůry. Popište postup práce a aplikujte ho na kružnici $k(S, 3\,\text{m})$. Porovnejte naměřenou hodnotu s výpočtem.

3.4 Délka oblouku kružnice



1 Do kružnice $k(S; 2{,}5\,\text{cm})$ je vepsán pravidelný pětiúhelník $ABCDE$. Vypočtěte délky oblouků kružnice k nad jednotlivými stranami pětiúhelníku $ABCDE$.

Honza vyřešil úlohu takto:

Vrcholy pravidelného pětiúhelníku dělí kružnici k na 5 shodných oblouků.

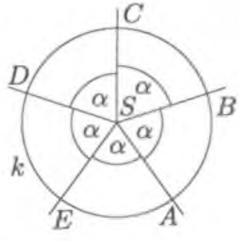
Proto $|\widehat{AB}| = \frac{1}{5}\,o = \frac{1}{5} \cdot 2\pi r =$

$= \frac{1}{5} \cdot 2 \cdot 2{,}5\,\pi\,\text{cm} = \underline{\pi\,\text{cm}}$

$|\widehat{AB}| \doteq 3{,}14\,\text{cm}$

Délky oblouků kružnice k nad stranami pětiúhelníku jsou asi 3,14 cm.

Vendulka zapsala:



Pravidelný pětiúhelník $ABCDE$ je vepsaný kružnici $k(S; 2{,}5\,\text{cm})$. Označím α středový úhel ASB, $\alpha = \dfrac{360°}{5} = 72°$. Má-li celá kružnice k délku x cm, pak oblouk příslušný středovému úhlu o velikosti 1° má délku $\dfrac{1}{360} \cdot x$ a oblouk příslušný středovému úhlu o velikosti $72°$ má délku $\frac{1}{360} \cdot x \cdot 72$.

Proto

$$|\widehat{AB}| = \frac{1}{360} \cdot x \cdot 72 = \frac{72}{360} \cdot x = \frac{x}{5}. \qquad (*)$$

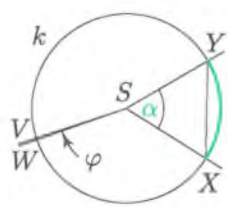
Protože $x = o = 2\pi r = 2\pi \cdot 2{,}5\,\text{cm} = 5\pi\,\text{cm}$, dosadím za x do $(*)$:

$$|\widehat{AB}| = \frac{x}{5} = \frac{5\pi\,\text{cm}}{5} = \pi\,\text{cm}$$

Délka oblouku AB je rovna π cm.
Oblouk AB měří přibližně 3,14 cm.

Vendulka řešila úlohu sice mnohem delším způsobem než Honza, ale zato použila postup, který můžeme využít k odvození vzorce pro výpočet délky oblouku kružnice $k(S, r)$ příslušného k jejímu středovému úhlu α.

Mějme kružnici $k(S, r)$ a její středový úhel α s rameny SX a SY (viz obr.), kde XY je tětiva kružnice k. Délku oblouku XY kružnice k, který přísluší středovému úhlu α, vypočteme pomocí délky oblouku VW příslušného ke středovému úhlu $\varphi = 1°$.



Protože plný úhel má velikost $360°$ a délka celé kružnice k je rovna $2\pi \cdot r$, je délka oblouku VW

$$|\widehat{VW}| = \frac{2\pi \cdot r}{360} = \frac{\pi \cdot r}{180}.$$

Délka oblouku kružnice k příslušného ke středovému úhlu α je α-násobkem délky oblouku VW.

Délku oblouku XY kružnice $k(S, r)$, který přísluší středovému úhlu o velikosti $\alpha°$, vypočteme podle vzorce

$$|\widehat{XY}| = \frac{\pi \cdot r \cdot \alpha}{180}.$$

2 Při opravě kruhové fontány bylo třeba vyměnit litinové zábradlí na jejím okraji. Kolik metrů zábradlí je ještě třeba vyrobit, jestliže k hotové části dlouhé 7 m přísluší středový úhel $\alpha = 55°$?

Ukážeme si dva způsoby *řešení.*

a) Obvod kruhové fontány vypočteme pomocí právě odvozeného vzorce.

Použijeme tyto vzorce:

$o = 2\pi \cdot r$

$|\widehat{XY}| = \dfrac{\pi \cdot r \cdot \alpha}{180}$

Známé údaje:

$|\widehat{XY}| = 7\,\mathrm{m}$

$\alpha = 55°$

Dosadíme a počítáme:

$$\pi \cdot r \cdot \frac{55}{180} = 7$$
$$\frac{11}{36} \cdot \pi \cdot r = 7 \quad / \cdot 36$$
$$11\pi \cdot r = 36 \cdot 7 \quad / : 11$$
$$\pi \cdot r = 36 \cdot \frac{7}{11}$$
$$\pi \cdot r \doteq 23$$
$$\pi \cdot r \doteq 23\,\mathrm{m}$$

(Všimněte si, že není třeba počítat poloměr r, protože do vzorce pro výpočet délky kružnice můžeme dosadit přímo výraz $\pi \cdot r$.)

Délka kružnice: $o = 2\pi \cdot r$, $\pi \cdot r \doteq 23\,\mathrm{m}$, tedy

$$o \doteq 2 \cdot 23\,\mathrm{m} = 46\,\mathrm{m}.$$

Celé zábradlí měří přibližně 46 metrů. Hotovo je zatím 7 metrů zábradlí. Je třeba vyrobit ještě přibližně 39 metrů zábradlí.

b) Protože délka oblouku kružnice je přímo úměrná velikosti příslušného středového úhlu, můžeme úlohu řešit i trojčlenkou jako Lenka:

Plný úhel . . . 360°
360° − 55° = 305°

55° . . . . 7 m
305° . . . . x m

$55x = 305 \cdot 7$

$x = \frac{305 \cdot 7}{55} = \frac{61 \cdot 7}{11} = 38{,}8$

K opravě fontány je třeba vyrobit ještě přibližně 38,8 m zábradlí.

Vidíte, že trojčlenka je metoda úsporná na čas i místo. Proto se s ní budete setkávat ještě velmi dlouho — a to nejen v matematice.

3 Vypočtěte velikost středového úhlu, který přísluší oblouku XY kružnice $k(S, r)$, je-li délka oblouku XY rovna poloměru r kružnice k.

Řešení

Použijeme vzorec pro výpočet délky oblouku kružnice:

$$|\widehat{XY}| = \frac{\pi \cdot r \cdot \alpha}{180}$$

Protože $|\widehat{XY}| = r$, je

$$r = \frac{\pi \cdot r \cdot \alpha}{180} \quad / : r$$

$$1 = \frac{\pi \cdot \alpha}{180} \quad / \cdot \frac{180}{\pi}$$

$$\alpha = \frac{180}{\pi}$$

Na displeji kalkulačky dostanete pravděpodobně číslo 57,295 78, které udává (přibližnou) velikost úhlu α ve stupních. Vyjádřeme tuto velikost ve stupních, minutách a vteřinách:

$$\alpha \doteq 57{,}295\,78^\circ \doteq 57^\circ 17' 45''$$

Tento úhel α je jednotkovým úhlem při měření velikosti úhlu v obloukové míře. Nazývá se **radián**. S obloukovou mírou se setkáte na střední škole.

CVIČENÍ

1. Vypočtěte délku oblouku AB kružnice $m(M, 4\,\text{cm})$, je-li $|\sphericalangle AMB| = 30°$.

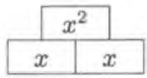
2. Oblouk CD kružnice $n(N, 2\,\text{cm})$ přísluší středovému úhlu $\alpha = 60°$.
a) Vypočtěte délku oblouku CD.
b) Porovnejte délku oblouku CD s délkou oblouku AB ze cvičení 1.

3. Dvě desetikorunové mince položte na stůl podle obrázku. Jednu z nich pevně přidržte na podložce, druhou kutálejte po hraně první mince až do výchozí polohy.
a) Je po oběhu mince do výchozí polohy v původní poloze i obraz na minci?
b) Proč je možné po oběhu mince dosáhnout její původní polohy?
c) Proveďte s mincí jen poloviční oběh a vysvětlete, proč se obraz na minci otočil o 360°.

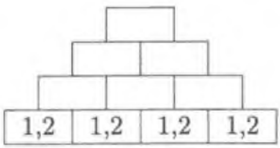
4 SOUHRNNÁ CVIČENÍ I

1. Výměra polí se dříve udávala v jitrech nebo v korcích; 1 jitro = = 2 korce = 1 600 čtverečných sáhů. Čtverečný sáh je čtverec o straně délky přibližně 1,896 m. Určete velikost čtverečného sáhu, korce a jitra v metrech čtverečných a v arech.

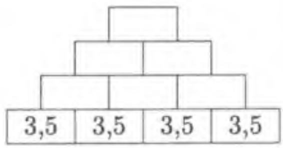
2. Doplňte pyramidy podle vzoru: (Druhé mocniny zaokrouhlujte na dvě desetinná místa)



A.



B.



3. Vypočtěte:

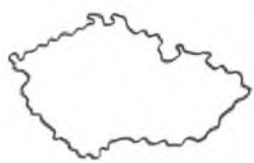
a) $2 \cdot \dfrac{\sqrt{36}}{4} + 1$ b) $2 \cdot \sqrt{\dfrac{36}{4}} + 1$

c) $\dfrac{9^2 + 5}{4 \cdot \sqrt{49} + 15}$ d) $\dfrac{5^2 - 9}{4 \cdot \sqrt{49 + 15}}$

e) $4 \cdot \dfrac{(5-9)^2}{\sqrt{49 + 15}}$ f) $\dfrac{4 + (5-9)^2}{3 + \sqrt{49}} + 15$

4. Jak dlouhá je hrana krychle, jejíž povrch je a) $73{,}5\,\mathrm{cm}^2$, b) $2\,166\,\mathrm{mm}^2$, c) $0{,}010\,\mathrm{m}^2$?

5. Jaké číslo musíme přičíst k $\sqrt{10\,000}$, aby se součet rovnal 10 000?



6. Rozloha České republiky je $78\,863\,\mathrm{km}^2$. Kdyby měla naše země tvar čtverce, jak dlouhou by měla hranici? (Zaokrouhlete na km.)

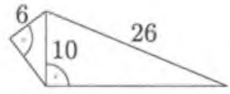
7. Vypočtěte pomocí kalkulačky. Výsledek zaokrouhlete na tři desetinná místa.

a) $\sqrt{1\,999} + \sqrt{199{,}9} + \sqrt{19{,}99} + \sqrt{1{,}999} + \sqrt{0{,}1999}$

b) $\sqrt{2\,000} + \sqrt{200} + \sqrt{20} + \sqrt{2} + \sqrt{0{,}2}$

c) $\sqrt{2\,001} + \sqrt{200{,}1} + \sqrt{20{,}01} + \sqrt{2{,}001} + \sqrt{0{,}2001}$

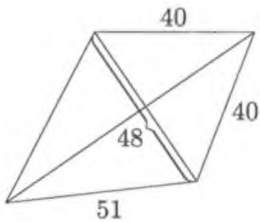
8. Mezi lesem a plotem zahrady je louka, jejíž tvar a některé rozměry (v metrech) vidíte na obrázku. Určete obvod a výměru této louky.



9. Plechová střecha zahradního altánu má tvar pravidelného čtyřbokého jehlanu s podstavnou hranou délky 3 m a výškou 1,2 m. Střechu potřebujeme natřít barvou. Jedna plechovka, v níž je 500 g barvy, stačí k nátěru tří metrů čtverečných plechu.
   a) Jak velkou plochu je třeba natřít?
   b) Kolik plechovek barvy musíme koupit?

10. Nad stranami pravoúhlého trojúhelníku ABC se stranami $a = 3\,\text{cm}$, $b = 4\,\text{cm}$, $c = 5\,\text{cm}$ sestrojte rovnoramenné trojúhelníky, jejichž výšky jsou rovny vždy polovině té strany trojúhelníku, nad níž jsou sestrojeny.
   a) Vypočtěte obsahy těchto trojúhelníků.
   b) Porovnejte obsah trojúhelníku sestrojeného nad přeponou trojúhelníku ABC s obsahy zbývajících rovnoramenných trojúhelníků.

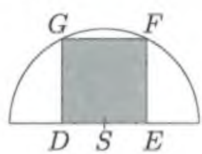
11. Kolik m^2 papíru je třeba k výrobě draka tvaru deltoidu, který vidíte na obrázku? (Rozměry jsou uvedeny v cm.) Připočtěte ještě 5 % na záhyby u okrajů draka.



12. Jak dlouhý musí být žebřík, aby dosáhl k oknu, které je 3,5 m nad zemí, je-li u zdi vodní příkop 120 cm široký?

13. Vypočtěte délku kružnice opsané obdélníku s rozměry 3 dm a 16 cm.

14. Do půlkruhu s průměrem 10 cm je vepsán čtverec $DEFG$. Vypočtěte délku jeho strany.



15. Stodola má délku 12 m, šířku 8 m a zdi vysoké 4 m. Štíty tvaru trojúhelníku s vodorovnými stranami délky 8 m mají výšku 3,5 m.
   a) Vypočtěte objem půdního prostoru této stodoly.
   b) Vypočtěte objem prostoru stodolou obestavěného.

16. Úhlopříčka čtverce má délku $6 \cdot \sqrt{2}\,\text{cm}$. Vypočtěte obvod a obsah tohoto čtverce.

17. Délky stran trojúhelníku XYZ jsou 15 cm, 9 cm a 12 cm.
   a) Je-li trojúhelník XYZ pravoúhlý, vypočtěte délky jeho dvou těžnic.

b) Není-li trojúhelník XYZ pravoúhlý, narýsujte ho v měřítku 1 : 2 a zjistěte poloměr kružnice, která je mu opsána.

18. Narýsujte kružnici $k(S, 3\,\mathrm{cm})$ a její body A, B tak, aby $|\sphericalangle ASB| = 120°$.

a) V bodech A a B sestrojte tečny a, b ke kružnici k.
b) Průsečík tečen a, b označte X a vypočtěte velikost úhlu AXB.
c) Určete obsah čtyřúhelníku $AXBS$.

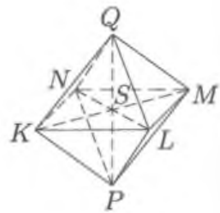
19. Narýsujte kružnici $k(S, 3\,\mathrm{cm})$ a v jejím bodě T tečnu t.

a) Na tečně t zakreslete bod Q tak, aby $|TQ| = 5\,\mathrm{cm}$.
b) Určete vzdálenost bodu Q od středu kružnice k měřením a pak výpočtem.
Výsledky porovnejte.

20. Přední kolo traktoru má průměr 120 cm, zadní kolo je 1,4krát větší.

a) Kolik metrů ujede přední kolo, jestliže se otočí 1 000krát?
b) Kolik otáček vykoná na stejně dlouhé trase zadní kolo?
c) Porovnejte poměrem počet otáček obou kol.

21. Stěny pravidelného osmistěnu $KLMNPQ$ tvoří shodné rovnostranné trojúhelníky.
Vypočtěte:
a) povrch osmistěnu,
b) objem osmistěnu.
Proveďte nejprve obecně pro $|KL| = a$, pak pro $a = 8\,\mathrm{cm}$.



22. Určete tvar řezu osmistěnu $KLMNPQ$ z předchozího obrázku rovinou α; $\alpha = \leftrightarrow QSL$.

23. a) Sestrojte obraz krychle $ABCDEFGH$, $|AB| = 8\,\mathrm{cm}$.
b) Středy jejích stěn jsou vrcholy pravidelného osmistěnu $KLMNPQ$. Narýsujte jeho obraz do obrazu krychle $ABCDEFGH$.
c) Každý vrchol osmistěnu $KLMNPQ$ „odřízněte“ rovinou, která prochází středy hran osmistěnu, které z příslušného vrcholu vycházejí. Jaké těleso z osmistěnu $KLMNPQ$ takto získáte?

24. Na proužku 6 uvádí první číslo každé trojice délku středné, druhá dvě čísla poloměry dvou kružnic. Určete vzájemnou polohu dvojic kružnic s danými poloměry a střednou.

25. Dvojice čísel na proužku 6 udávají velikost středového úhlu a poloměr kružnice. Vypočtěte délky příslušných oblouků těchto kružnic.

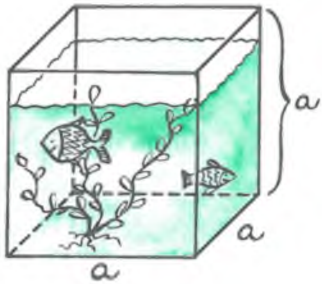
5 TŘETÍ MOCNINA A ODMOCNINA

1 Kolik litrů vody obsahuje zcela naplněné akvárium tvaru krychle o hraně délky 30 cm?

Řešení

Máme vypočítat objem krychle o hraně délky 30 cm:

$$V = a \cdot a \cdot a$$
$$V = 30 \cdot 30 \cdot 30$$
$$V = 27\,000$$
$$V = 27\,000\ \text{cm}^3 = 27\ \text{l}$$



Zcela naplněné akvárium obsahuje 27 l vody.

Součin tří sobě rovných činitelů můžeme zapsat jako mocninu:

$30 \cdot 30 \cdot 30 = 30^3$ → **třetí mocnina čísla 30**

$a \cdot a \cdot a = \boxed{a^3}$ → **mocnitel (exponent)**, **třetí mocnina**

základ mocniny

Třetí mocnina je součin tří sobě rovných činitelů.

2 Určete třetí mocniny čísel 0; 2; −2; $\frac{1}{2}$; 0,2; 0,1; 0,01; 20; 10; 100.

Řešení

$$0^3 = 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$$
$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$
$$(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$
$$0{,}2^3 = 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}008$$
$$0{,}1^3 = 0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}001$$
$$0{,}01^3 = 0{,}01 \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}01 = 0{,}000\,001$$

Třetí mocnina má trojnásobný počet desetinných míst než základ mocniny.

$$20^3 = 20 \cdot 20 \cdot 20 = 8\,000$$
$$10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1\,000$$
$$100^3 = 100 \cdot 100 \cdot 100 = 1\,000\,000$$

Třetí mocnina je zakončena trojnásobným počtem nul než základ mocniny.

Třetí mocnina kladného čísla je kladné číslo.
Třetí mocnina záporného čísla je záporné číslo.
Třetí mocnina nuly je nula.

3 Vypočtěte a porovnejte výsledky:

a) $2^3 \cdot 3^3$; $(2 \cdot 3)^3$

b) $2^3 + 3^3$; $(2 + 3)^3$

c) $3^3 - 2^3$; $(3 - 2)^3$

d) $4^3 : 2^3$; $(4 : 2)^3$

Řešení

a) $2^3 \cdot 3^3 = 8 \cdot 27 = 216$
$(2 \cdot 3)^3 = 6^3 = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ $\qquad 2^3 \cdot 3^3 = (2 \cdot 3)^3$

b) $2^3 + 3^3 = 8 + 27 = 35$
$(2 + 3)^3 = 5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ $\qquad 2^3 + 3^3 \neq (2 + 3)^3$

c) $3^3 - 2^3 = 27 - 8 = 19$
$(3 - 2)^3 = 1^3 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$ $\qquad 3^3 - 2^3 \neq (3 - 2)^3$

d) $4^3 : 2^3 = 64 : 8 = 8$
$(4 : 2)^3 = 2^3 = 8$ $\qquad 4^3 : 2^3 = (4 : 2)^3$

Pro všechna čísla a, b, platí:

$$(a \cdot b)^3 = a^3 \cdot b^3$$

$$(a \cdot b)^3 = (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) = (a \cdot a \cdot a) \cdot (b \cdot b \cdot b) = a^3 \cdot b^3$$

Třetí mocniny některých čísel dokážeme vypočítat zpaměti. V ostatních případech použijeme tabulky nebo kalkulačku.

4 Vypočtěte na kalkulačce třetí mocniny čísel:

a) 27 b) 3,5 c) 12 345

Řešení

Třetí mocnina je součin tří sobě rovných činitelů. Nemá-li kalkulačka tlačítko pro výpočet třetí mocniny, určíme třetí mocninu daného čísla násobením:

a) $27^3 = 27 \cdot 27 \cdot 27 = 19\,683$

b) $3{,}5^3 = 3{,}5 \cdot 3{,}5 \cdot 3{,}5 = 42{,}875$

c) Máme určit $12\,345^3$:

Odhad: $12\,345 \doteq 10\,000$

$$10\,000^3 = \underbrace{1\,000\,000\,000\,000}_{13 \text{ míst}}$$

Běžně používané kalkulačky mají na displeji 8–10 míst. Třetí mocninu čísla 12 345 buď vůbec nezobrazí, nebo ji zapíší způsobem, který si objasníme později.

Číselné údaje, se kterými v běžné praxi počítáme, jsou většinou zaokrouhlené. I my zaokrouhlíme základ mocniny $12\,345^3$, např. na tři platné číslice:

$$12\,345^3 \doteq 12\,300$$

$$12\,345^3 \doteq 12\,300^3 = (123 \cdot 100)^3 = 123^3 \cdot 100^3 =$$
$$= 1\,860\,867 \cdot 1\,000\,000 = 1\,860\,867\,000\,000$$

Získali jsme **přibližnou hodnotu** třetí mocniny čísla 1,345.

5 Určete pomocí tabulek třetí mocninu čísla 321.

Řešení

n	n^2	$\sqrt{n}$	n^3	$\sqrt[3]{n}$
320	102 400	17,89	32 768 000	6,84
321	103 041	92	33 076 161	85
322	103 684	94	33 386 248	85
323	104 329	97	33 698 267	86
324	104 976	18,00	34 012 224	87
325	105 625	18,03	34 328 125	6,88
326	106 276	06	34 645 976	88
327	106 929	08	34 965 783	89
328	107 584	11	35 287 552	90
329	108 241	14	35 611 289	90

K určení třetí mocniny použijeme tabulku, s jejímž uspořádáním jsme se už seznámili.

Máme určit 321^3:
Ve sloupci nadepsaném n vyhledáme číslo 321.
V témže řádku, ve sloupci nadepsaném n^3, přečteme jeho třetí mocninu.

$$321^3 = 33\,076\,161$$

Stejným způsobem můžeme v této tabulce vyhledat třetí mocniny celých čísel od 0 do 1 000.
Máme-li určit třetí mocninu čísel větších než 1 000 nebo třetí mocninu desetinných čísel, použijeme větu o umocňování součinu:

$$(a \cdot b)^3 = a^3 \cdot b^3$$

Základ mocniny nejprve rozložíme na součin dvou činitelů, z nichž jeden je přirozené číslo, jehož třetí mocninu nalezneme v tabulkách, a druhý činitel je buď 10; 100; ... ,nebo 0,1; 0,01; ... atd. Třetí mocniny čísel 10; 100; 0,1; 0,01; ... umíme určit zpaměti.

6 Určete pomocí tabulek třetí mocniny čísel a) 32,4; b) 3 280.

Řešení

a) $$32{,}4^3 = (324 \cdot 0{,}1)^3 = \underbrace{\boxed{324^3}}_{\text{nalezneme v tabulkách}} \cdot \underbrace{\boxed{0{,}1^3}}_{\text{určíme zpaměti}} = 34\,012\,224 \cdot 0{,}001$$

$32{,}4^3 = 34\,012{,}224$

b) Máme určit $3\,280^3$:

$3\,280^3 = (328 \cdot 10)^3 = 328^3 \cdot 10^3 = 35\,287\,552 \cdot 1\,000 = 35\,287\,552\,000$

Máme-li určit třetí mocninu víceciferného čísla, zaokrouhlíme nejprve toto číslo tak, abychom mohli použít tabulky. V tabulkách jsou uvedeny třetí mocniny nejvýše trojciferných čísel, proto zaokrouhlíme základ mocniny tak, aby měl nejvýše tři platné číslice. Získáme pak pouze přibližnou hodnotu třetí mocniny daného čísla.

7 Určete pomocí tabulek třetí mocniny čísel a) 3 254; b) 3,217.

Řešení

a) Máme určit $3\,254^3$:

$$\boxed{3\,25}4^3 \doteq 3\,250^3 = (325 \cdot 10)^3 = 325^3 \cdot 10^3 =$$
$$= 34\,328\,125 \cdot 1\,000 = \underline{34\,328\,125\,000}$$

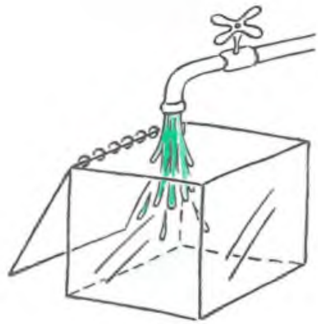
b) Máme určit $3{,}217^3$:

$$\boxed{3{,}21}7^3 \doteq 3{,}22^3 = (322 \cdot 0{,}01)^3 = 322^3 \cdot 0{,}01^3 =$$
$$= 33\,386\,248 \cdot 0{,}000\,001 = \underline{33{,}386\,248}$$

V několika předchozích příkladech jsme si ukázali, jak k danému číslu určíme jeho třetí mocninu. Často však řešíme úlohu opačnou: k danému nezápornému číslu n hledáme takové nezáporné číslo a, pro které platí $a^3 = n$.

8 Kolik m^2 pozinkovaného plechu je třeba na zhotovení nádrže tvaru krychle (i s víkem), má-li být její objem 125 l? (Materiál potřebný na přehyby nepočítejte.)

Řešení



$$V = 125\,\mathrm{l} = 125\,\mathrm{dm}^3$$

Máme určit povrch krychle: $S = 6 \cdot a^2$
Potřebujeme znát délku a hrany krychle.

Víme, že $V = a^3$,
$125 = a^3$.

Hledáme takové číslo a, pro které platí:

$$a^3 = a \cdot a \cdot a = 125$$

Tento požadavek splňuje číslo 5, protože $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.

Zapisujeme:	*Čteme:*
$\sqrt[3]{125} = 5$	Třetí odmocnina ze 125 je 5.

Délka hrany krychlové nádrže je 5 dm.

Povrch krychle:

$$S = 6 \cdot a^2$$
$$S = 6 \cdot 5^2$$
$$S = 150$$
$$S = 150\,\mathrm{dm}^2 = 1{,}5\,\mathrm{m}^2$$

Na zhotovení nádrže je třeba nejméně $1{,}5\,\mathrm{m}^2$ pozinkovaného plechu.

Jestliže $a^3 = 125$, pak $a = \sqrt[3]{125}$.

odmocnitel **odmocnítko**

odmocnitele 3
píšeme vždy

$a = \boxed{\sqrt[3]{125}} = 5$, protože $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$

odmocněnec **třetí odmocnina z čísla 125**

Třetí odmocnina z nezáporného čísla n je takové nezáporné číslo a, pro které platí

$$a^3 = n.$$

Zapisujeme:

$a = \sqrt[3]{n}$

Čteme:

Číslo a je třetí odmocnina z čísla n.

Podobně: $\sqrt[3]{8} = 2$, protože $2^3 = 8$

$\sqrt[3]{1\,000} = 10$, protože $10^3 = 10\,000$

9 Doplňte tabulku:

n	0	27	64	125	1 000 000	0,000 001	1 000	0,001
$\sqrt[3]{n}$								

10 Vypočtěte a výsledky porovnejte:

a) $\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{125}$ b) $\sqrt[3]{8 \cdot 125}$

Řešení

a) $\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{125} = 2 \cdot 5 = 10$

b) $\sqrt[3]{8 \cdot 125} = \sqrt[3]{1\,000} = 10$ $\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{8 \cdot 125}$

Pro každá dvě nezáporná čísla a, b platí:

$$\sqrt[3]{a \cdot b} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$$

11 Určete pomocí tabulek třetí odmocninu čísla 325.

Řešení

K určení třetí odmocniny použijeme tabulku, jejíž uspořádání už známe:

Máme určit $\sqrt[3]{325}$:

V tabulce vyhledáme ve sloupci nadepsaném n číslo 325 a ve stejném řádku ve sloupci nadepsaném $\sqrt[3]{n}$ přečteme jeho třetí odmocninu.

$$\sqrt[3]{325} \doteq 6{,}88$$

n	n^2	$\sqrt{n}$	n^3	$\sqrt[3]{n}$
320	102 400	17,89	32 768 000	6,84
321	103 041	92	33 076 161	85
322	103 684	94	33 386 248	85
323	104 329	97	33 698 267	86
324	104 976	18,00	34 012 224	87
325	105 625	18,03	34 328 125	6,88
326	106 276	06	34 645 976	88
327	106 929	08	34 965 783	89
328	107 584	11	35 287 552	90
329	108 241	14	35 611 289	90

Stejným způsobem můžeme v tabulkách vyhledat přibližné hodnoty třetích odmocnin všech celých čísel od nuly do 1 000. Třetí odmocniny jsou v těchto tabulkách zaokrouhleny na dvě desetinná místa.

K přibližnému určování třetích odmocnin čísel, která nejsou uvedena v tabulkách, používáme podobně jako u druhé odmocniny vztah

$$\sqrt[3]{a \cdot b} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}.$$

Odmocněnce nejprve zapíšeme jako součin dvou činitelů. Jeden činitel je nejvýš trojciferné přirozené číslo, jehož třetí odmocninu najdeme v tabulkách. Druhý činitel je 1 000; 1 000 000; 0,001; 0,000 001 atd. (tj. takové racionální číslo, jehož třetí odmocninu umíme určit zpaměti). Vzniklý součin odmocníme.

12 Určete pomocí tabulek třetí odmocniny čísel:

a) 42 000　　b) 0,596

Řešení

a) Máme určit $\sqrt[3]{42\,000}$:

$\sqrt[3]{42\,000} = \sqrt[3]{42 \cdot 1\,000} = \sqrt[3]{42} \cdot \sqrt[3]{1\,000} \doteq 3{,}48 \cdot 10 = \underline{34{,}8}$

b) Máme určit $\sqrt[3]{0{,}596}$:

$\sqrt[3]{0{,}596} = \sqrt[3]{596 \cdot 0{,}001} = \sqrt[3]{596} \cdot \sqrt[3]{0{,}001} \doteq 8{,}42 \cdot 0{,}1 = \underline{0{,}842}$

13 Určete pomocí tabulek přibližnou hodnotu třetí odmocniny čísel:

a) 13 562   b) 0,004 732   c) 4,5

Řešení

Odmocněnce nejprve zaokrouhlíme tak, abychom zaokrouhlené číslo dokázali rozložit na součin dvou činitelů, z nichž jeden je přirozené číslo menší než 1 000 a druhý činitel je 1000, 1 000 000, ... nebo 0,001; 0,000 001 atd.

a) $\sqrt[3]{13\,562} \doteq \sqrt[3]{14\,000} = \sqrt[3]{14} \cdot \sqrt[3]{1\,000} \doteq 2{,}41 \cdot 10 = \underline{24{,}1}$

b) $\sqrt[3]{0{,}004\,732} \doteq \sqrt[3]{0{,}005} = \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{0{,}001} \doteq 1{,}71 \cdot 0{,}1 = \underline{0{,}171}$

c) $\sqrt[3]{4{,}5} \doteq \sqrt[3]{5} \doteq \underline{1{,}71}$

Třetí odmocniny čísel větších než 1 a menších než 10, která rostou po 0,1, jsou uvedeny s větší přesností ve zvláštní tabulce (M1A). Podle této tabulky je $\sqrt[3]{4{,}5} \doteq 1{,}65$.

Třetí odmocniny je možné určit pomocí kalkulačky, je-li opatřena příslušným tlačítkem $\boxed{y^x}$ nebo $\boxed{\sqrt[3]{\ }}$.

CVIČENÍ

1. Určete třetí mocniny čísel:

a) $3; -30; 0{,}3; \frac{1}{3}$ b) $-4; 400; \frac{1}{4}; -0{,}04$ c) $5; -\frac{3}{5}; 50; -0{,}5$

2. Vypočtěte:

a) $\dfrac{4^3 - 3^3}{(4-3)^3}$ b) $\dfrac{(1+5)^3}{1^3 + 5^3}$ c) $\dfrac{(1+2+3)^3}{1^3 + 2^3 + 3^3}$

d) $(0{,}2 - 0{,}3)^3 \cdot 10^3$ e) $(0{,}3 - 0{,}5)^3 \cdot (50 - 30)^3$

f) $2^3 \cdot (-3)^3 + (-2)^3 \cdot 3^3$

3. Dětská stavebnice obsahuje 48 různobarevných kostek ze smrkového dřeva. Všechny kostky mají tvar krychle o hraně délky 3 cm. Jsou uloženy v krabici, jejíž hmotnost je 0,3 kg.

a) Jaká je hmotnost jedné kostky, je-li hustota smrkového dřeva $650\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ $(0{,}65\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3})$?

b) Jaká je hmotnost celé stavebnice i s krabicí?

4. Určete pomocí kalkulačky třetí mocniny čísel:

a) 32	b) 405	c) 1,8
3,2	40,5	0,23
0,32	0,405	1,42
320	4,5	28,1

Výsledky zaokrouhlete na tři platné číslice.

5. Určete pomocí kalkulačky třetí mocniny čísel:

a) 4 521 b) 72 341 c) 5,7246

Základ mocniny nejprve zaokrouhlete na dvě platné číslice.

6. Doplňte tabulku:

x	-2	-1	0	1	2	$0,3$	$\frac{1}{2}$
x^3							
$3x$							

7. V tabulkách vyhledejte přibližné hodnoty třetích mocnin daných čísel:

a) 23	b) 34	c) 513
2,3	4,5	7,34
0,23	0,61	0,281
2 300	5 400	1 800

8. V tabulkách vyhledejte přibližné hodnoty třetích mocnin daných čísel. Základ mocniny nejprve zaokrouhlete na tři platné číslice.

a) 4 561	b) 2 384	c) 3 193
45,61	34,82	13,93
4,561	8,324	9,133
456,1	483,2	331,9

9. Vypočtěte:

a) $\sqrt[3]{8}$	b) $\sqrt[3]{125}$	c) $\sqrt[3]{0,064}$
$\sqrt[3]{8\,000}$	$\sqrt[3]{125\,000}$	$\sqrt[3]{27\,000}$
$\sqrt[3]{0,008}$	$\sqrt[3]{0,125}$	$\sqrt[3]{0,027}$

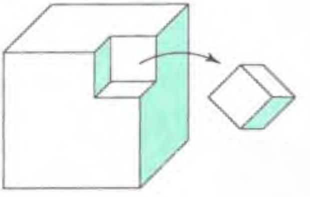
10. Vypočtěte:

a) $(\sqrt[3]{64} + \sqrt[3]{8}) \cdot 8$	b) $\sqrt[3]{1\,000} \cdot \sqrt[3]{27} + \sqrt[3]{125} \cdot \sqrt[3]{8}$
$\sqrt[3]{64} + \sqrt[3]{8} \cdot 8$	$\sqrt[3]{1\,000} \cdot (\sqrt[3]{27} + \sqrt[3]{125}) \cdot \sqrt[3]{8}$
$\sqrt[3]{64} + \sqrt[3]{8 \cdot 8}$	$(\sqrt[3]{1\,000} \cdot \sqrt[3]{27} + \sqrt[3]{125}) \cdot \sqrt[3]{8}$

11. Určete přibližné hodnoty třetích odmocnin čísel:

a) 32	b) 48 000	c) 5 488	d) 3,2
129	0,235	13 400	4,8
348	565 000	0,75	5,6
691	0,000 827	3,241	7,1

12. Z krychle o hraně délky 2,74 dm byla odstraněna krychlička, jejíž hrana má délku 2,3 cm. Vypočtěte objem takto vzniklého tělesa.



6 MOCNINY S PŘIROZENÝM MOCNITELEM

6.1 n-tá mocnina čísla a

V matematice se snažíme o co nejstručnější zápisy. Dovedeme stručně zapsat součet několika stejných sčítanců jako součin. Např.

$$5 + 5 + 5 + 5 = 4 \cdot 5,$$

nebo

$$a + a + a + a + a + a = 6a.$$

Podobně můžeme zapsat součin n stejných činitelů jako n-tou mocninu čísla.

Víme, že součin dvou stejných činitelů můžeme zapsat jako druhou mocninu příslušného čísla. Např. součin $5 \cdot 5$ můžeme zapsat jako druhou mocninu čísla 5, tj. 5^2. Tedy

$$5 \cdot 5 = 5^2.$$

Součin tří stejných činitelů můžeme zapsat jako třetí mocninu příslušného čísla. Např. součin $6 \cdot 6 \cdot 6$ můžeme zapsat jako třetí mocninu čísla 6, tj. 6^3. Tedy

$$6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3.$$

Podobně můžeme zapsat součin libovolného počtu stejných činitelů. Například:

$$\underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 5}_{n \text{ činitelů}} = 5^n$$

nebo

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ činitelů}} = a^n$$

Je-li a reálné číslo a n přirozené číslo, je

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a,$$

kde v součinu na pravé straně je n činitelů.

Výraz a^n je **n-tá mocnina čísla** a, číslo a je základ mocniny, číslo n je mocnitel (exponent).

n-tá mocnina čísla a

$\boxed{a^n}$ ⟶ **mocnitel (exponent)** je přirozené číslo

základ mocniny je libovolné číslo

Jestliže $n = 1$, pak

$$2^1 = 2, \quad (-2)^1 = -2, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}, \quad 0^1 = 0, \quad a^1 = a.$$

1 Zapište ve tvaru mocniny:

a) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

b) $(-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3)$

c) $4b \cdot 4b \cdot 4b$

d) $\underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2}}_{r \text{ činitelů}}$

Řešení

a) Základ mocniny je 2, součin má 4 činitele. Zapíšeme 2^4.
b) Základ mocniny je číslo -3, součin má 5 činitelů. Zapíšeme $(-3)^5$.
c) Základ mocniny je $4b$, součin má 3 činitele. Zapíšeme $(4b)^3$.
d) Základ mocniny je $\frac{1}{2}$, součin má r činitelů. Zapíšeme $\left(\frac{1}{2}\right)^r$.

2 Vypočtěte: a) 5^3, b) 3^{10}.

Řešení

a) $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$
b) Použití předcházejícího postupu by bylo příliš zdlouhavé, proto určíme 3^{10} pomocí kalkulačky:

$\boxed{3}\ \boxed{y^x}\ \boxed{1}\ \boxed{0}\ \boxed{=}$ 59 049

Zjistili jsme, že $3^{10} = 59\,049$.

Základ mocniny může být libovolné číslo. Vendulka, Petr a Lenka zjišťují, jak se mění hodnoty mocnin v závislosti na základu a.
Vendulka zjistila, že je-li $a = 0$, potom $0^1 = 0$, $0^2 = 0$, $0^3 = 0$ atd., tedy

$$0^n = 0.$$

Petr volil za základ mocniny různá kladná čísla a zjistil, že

$$\text{je-li } a > 0, \text{ pak } a^n > 0.$$

Lenka volila za základ mocniny různá záporná čísla a vyšlo jí, že někdy je mocnina kladná a někdy záporná, např.:

$$(-1{,}5)^3 = -3{,}375, \quad (-2)^6 = 64$$

Pokuste se zjistit, kdy je mocnina kladná a kdy je záporná, je-li základem mocniny číslo záporné. Pak porovnejte své závěry s tím, k čemu dospěl Honza a Petr.

Honza umocňoval základ -1:

$(-1)^1 = -1$

$(-1)^2 = (-1)\cdot(-1) = 1$

$(-1)^3 = (-1)\cdot(-1)\cdot(-1) = [(-1)\cdot(-1)]\cdot(-1) = (-1)^2\cdot(-1) =$
$= 1\cdot(-1) = -1$

$(-1)^4 = (-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1) = [(-1)\cdot(-1)]\cdot[(-1)\cdot(-1)] =$
$= (-1)^2\cdot(-1)^2 = 1\cdot 1 = 1$

Druhá mocnina záporného čísla je číslo kladné.

Čtvrtá mocnina záporného čísla je číslo kladné.

Petr zkoumal mocniny čísla -2 a všiml si, že každou následující mocninu dostane tak, že předcházející mocninu vynásobí číslem -2. Např.

$$(-2)^3 = (-2)^2 \cdot (-2), \quad (-2)^4 = (-2)^3 \cdot (-2) \quad \text{atd.}$$

Při vynásobení záporným číslem se změní znaménko. Protože $(-2)^1 = -2$, bude $(-2)^2$ kladné číslo, $(-2)^3$ záporné číslo atd. Znaménka mocnin se tedy pravidelně střídají. Je-li mocnitel $1, 3, 5, \ldots$, je mocnina záporné číslo, je-li mocnitel $2, 4, 6, \ldots$, je mocnina kladné číslo.

Oba dospěli k stejnému závěru:

Je-li základ mocniny záporné číslo a mocnitel je liché číslo, pak mocnina je záporné číslo.
Je-li základ mocniny záporné číslo a mocnitel je sudé číslo, pak mocnina je kladné číslo.

CVIČENÍ

1. Zapište ve tvaru mocniny:

a) $8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8$
b) $(-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5)$
c) $(-0{,}5) \cdot (-0{,}5) \cdot (-0{,}5) \cdot (-0{,}5)$
d) $\left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)$
e) $2a \cdot 2a \cdot 2a \cdot 2a \cdot 2a \cdot 2a$
f) $(-0{,}1a) \cdot (-0{,}1a) \cdot (-0{,}1a)$
g) $(a+1) \cdot (a+1) \cdot (a+1) \cdot (a+1)$
h) $(a-2b) \cdot (a-2b) \cdot (a-2b)$

2. Zapište ve tvaru součinu:

a) 12^3 b) $(-2{,}4)^4$ c) $(5c)^5$ d) $(u-4)^3$

3. Zapište ve tvaru mocniny a pak vypočtěte:

a) $0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0$ b) $(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1)$
c) $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$ d) $(-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4)$
e) $0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5$ f) $(-0{,}3) \cdot (-0{,}3) \cdot (-0{,}3)$

4. Vypočtěte:

a) 0^{30} b) 1^{25} c) $(-1)^{64}$ d) 10^6
e) 6^{10} f) $(-2)^7$ g) $1{,}2^5$ h) $(-2{,}1)^5$

5. Rozhodněte, zda zápis $-(2)^6$ můžeme nahradit zápisem:

a) -2^6 b) $(-2)^6$ c) $-(-2)^6$ d) $+(-2)^6$

6. Rozhodněte, které z daných mocnin jsou záporná čísla:

a) $(-2)^{10}$ b) $(-3)^6$ c) $(-1)^{21}$ d) $(-2{,}5)^7$
e) $7{,}1^5$ f) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{13}$ g) $\left(\frac{4}{5}-\frac{3}{4}\right)^9$ h) $\left(\frac{5}{6}-\frac{7}{8}\right)^{11}$

7. Vypočtěte:

a) $5^3 \cdot 50$ b) $(-3)^5 \cdot 15$
c) $(-5)^4 : 100$ d) $2^{12} : 64$
e) $2^3 + 3^5$ f) $2^3 \cdot 3^5$

8. Vypočtěte:

a) $4^3 + (-3)^4$ b) $4^3 - (-3)^4$

c) $(-7)^3 + (-3)^5$ d) $(-7)^3 - (-3)^5$

9. Vypočtěte:

a) $8^4 : (-4)^3$ b) $(-4)^5 : (-2)^3$

c) $(2^5 + 7^3) : (-5)^2$ d) $[2^8 + (-3)^5] : (4^2 - 3)$

6.2 Sčítání a odčítání mocnin s přirozeným mocnitelem

1 Vypočtěte $6 \cdot 3^3 + 7 \cdot 3^2 + 5 \cdot 2^{10} + 4 \cdot 3^3 - 5 \cdot 2^{10} - 5 \cdot 3^2$

Řešení

Vendulčin postup

$$6 \cdot 3^3 + 7 \cdot 3^2 + 5 \cdot 2^{10} + 4 \cdot 3^3 - 5 \cdot 2^{10} - 5 \cdot 3^2 =$$
$$= 6 \cdot 27 + 7 \cdot 9 + 5 \cdot 1024 + 4 \cdot 27 - 5 \cdot 1024 - 5 \cdot 9 =$$
$$= 162 + 63 + 5120 + 108 - 5120 - 45 = 288$$

Petr postupoval takto:

$$6 \cdot 3^3 + 7 \cdot 3^2 + 5 \cdot 2^{10} + 4 \cdot 3^3 - 5 \cdot 2^{10} - 5 \cdot 3^2 =$$
$$= (6 \cdot 3^3 + 4 \cdot 3^3) + (7 \cdot 3^2 - 5 \cdot 3^2) + (5 \cdot 2^{10} - 5 \cdot 2^{10}) =$$
$$= 10 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 0 \cdot 2^{10} = 10 \cdot 27 + 2 \cdot 9 + 0 =$$
$$= 270 + 18 = 288$$

Vendulka i Petr vyřešili úlohu správně. Jak však budeme postupovat, není-li základ mocniny dané číslo, tj. je-li mocnina zapsána ve tvaru a^2, a^3 apod.? Návodem může být Petrovo řešení.

Výraz $6a^3 + 4a^3$ můžeme sečtením zjednodušit, platí totiž

$$6a^3 + 4a^3 = 10a^3.$$

Avšak výraz $6a^3 + 7a^2$ nelze sčítáním zjednodušit, neboť pro libovolné číslo a je $a^3 \neq a^2$.

Při sčítání a odčítání mocnin je zjednodušení možné jen tehdy, mají-li mocniny stejné základy i stejné mocnitele.

2 Vypočtěte:

a) $2a^5 + 5a^3 + 6a^5 - 3a^3$

b) $7b^3 + 8b^2 - 5c^2 + 2c^2 - 6b^2 + 3b^3$

c) $5x^4 + (-3x^2) - (-4x^4) - (+8x^2)$

d) $6a^2b + 13ab^2 - b^2 + 4a^2 - 8ab^2 - (+2a^2) - (-a^2b)$

e) $(9x^2 - 2xy + 5y^2 - 6x) - (7x^2 - 8y^2 - 3xy + y)$

Řešení

a) $2a^5 + 5a^3 + 6a^5 - 3a^3 = (2a^5 + 6a^5) + (5a^3 - 3a^3) = 8a^5 + 2a^3$

b) $7b^3 + 8b^2 - 5c^2 + 2c^2 - 6b^2 + 3b^3 =$
$= (7b^3 + 3b^3) + (8b^2 - 6b^2) + (-5c^2 + 2c^2) = 10b^3 + 2b^2 - 3c^2$

c) $5x^4 + (-3x^2) - (-4x^4) - (+8x^2) = 5x^4 - 3x^2 + 4x^4 - 8x^2 =$
$= (5x^4 + 4x^4) + (-3x^2 - 8x^2) = 9x^4 - 11x^2$

d) $6a^2b + 13ab^2 - b^2 + 4a^2 - 8ab^2 - (+2a^2) - (-a^2b) =$
$= 6a^2b + 13ab^2 - b^2 + 4a^2 - 8ab^2 - 2a^2 + a^2b =$
$= (6a^2b + a^2b) + (13ab^2 - 8ab^2) + (4a^2 - 2a^2) - b^2 =$
$= 7a^2b + 5ab^2 + 2a^2 - b^2$

e) $(9x^2 - 2xy + 5y^2 - 6x) - (7x^2 - 8y^2 - 3xy + y) =$
$= 9x^2 - 2xy + 5y^2 - 6x - 7x^2 + 8y^2 + 3xy - y =$
$= (9x^2 - 7x^2) + (5y^2 + 8y^2) + (-2xy + 3xy) - 6x - y =$
$= 2x^2 + 13y^2 + xy - 6x - y$

CVIČENÍ

1. Vypočtěte:

a) $3a^2 + 5a^2 - 6a^2 + a^2$ b) $2b^2 + 3b^2 + 3b^3 - b^3$
c) $4a^4 - 2a^2 - 3a^4 + 5a^2$ d) $7a^2 + 6b^2 - 3a^2 + 4b^2$

2. Vypočtěte:

a) $6a^3 + 5b^2 - 7c^2 - 3a^3 + 4b^2 - 9c^2$
b) $7a^3 - 5a^2 + a - 8a^2 - 3a^3 - 5a$
c) $2{,}5x^2 - 3{,}6y^3 - 1{,}7x^2 + 4{,}2z^4 + 2{,}8y^3 - 6{,}1z^4$
d) $0{,}81x^3 - 6{,}2x^2 + 3{,}94y^2 - 2{,}9x^2 - 1{,}4x^3 - 5{,}6y^2$

3. Vypočtěte:

a) $\frac{3}{2}x^5 - \frac{1}{5}x^4 - \frac{1}{2}x^5 + \frac{2}{3}x^4$
b) $\frac{2}{3}x^2 - \frac{3}{4}x^3 - \frac{5}{6}x^2 + \frac{4}{5}x^3$

4. Vypočtěte:

a) $4a^2b + 3ab^2 - 3a^2b - 4ab^2$
b) $5a^2 - 6ab^2 - 7a^2b + 6ab^2 - 3a^2b + a^2$
c) $3ab^2 - 7a^2b - 3b^2a + 5ba^2 + a^2b$
d) $6a^2b^3 - 3a^3b^2 - 5b^3a + 2b^3a^2 - 4ab^3$

5. Vypočtěte:

a) $4x^3 - (+7x^2) - (-3x^2) - 2x^3$
b) $9xy^2 + (-8x^2y) - (+6xy^2) - (-10x^2y)$
c) $(-11x^2) + (-13xy^2) - (+15x^2) + (+6xy^2) - (-7xy^2)$
d) $8ax^2 - 3x^2 - (+4x^2a) - a^2x + (-7x^2) - 4ax^2$

6. Vypočtěte:

a) $(13x^2 - 5y^2) - (9x^2 - 6y^2)$
b) $(25x^2y - 18xy^2) - (13xy^2 - 16x^2y) - 41x^2y$
c) $3x^2 - (6x^3 - 7x^2 + 5x^5) - (-x^5 - 3x^2 + 6x^3)$
d) $-7xy^2 - (14x^2y - 3xy^2) - (-2xy^2) + (5xy^2 - 9x^2y)$

6.3 Násobení a dělení mocnin s přirozeným mocnitelem

Násobení mocnin se stejným základem

1 Vypočtěte:

a) $3^3 \cdot 3^5$

b) $a^4 \cdot a^6$

Řešení

a) $3^3 \cdot 3^5 = \underbrace{(3 \cdot 3 \cdot 3)}_{3\text{ činitelé}} \cdot \underbrace{(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3)}_{5\text{ činitelů}} = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{(3+5)\text{ činitelů} = 8\text{ činitelů}} = 3^8$

b) $a^4 \cdot a^6 = \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot a)}_{4\text{ činitelé}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a)}_{6\text{ činitelů}} =$

$= \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}_{(4+6)\text{ činitelů} = 10\text{ činitelů}} = a^{10}$

Všimněte si!

$$3^3 \cdot 3^5 = 3^{3+5} = 3^8$$
$$a^4 \cdot a^6 = a^{4+6} = a^{10}$$

Mocniny s přirozeným mocnitelem a se stejným základem násobíme tak, že základ umocníme součtem mocnitelů.

Pro libovolné číslo a a pro přirozená čísla r, s platí

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}.$$

2 Vypočtěte:

a) $5a^2b^3 \cdot 2ab^4$

b) $3a^2bc^3 \cdot 7a^3b^2c^5$

c) $4x^3 \cdot 5x^4 \cdot 6x^2$

d) $8m^2n \cdot (2mn - 3m^3n^2)$

Řešení

a) $5a^2b^3 \cdot 2ab^4 = (5 \cdot 2) \cdot (a^2 \cdot a) \cdot (b^3 \cdot b^4) = 10 \cdot a^{2+1} \cdot b^{3+4} = 10a^3b^7$

b) $3a^2bc^3 \cdot 7a^3b^2c^5 = (3 \cdot 7) \cdot (a^2 \cdot a^3) \cdot (b \cdot b^2) \cdot (c^3 \cdot c^5) =$
$= 21a^{2+3} \cdot b^{1+2} \cdot c^{3+5} = 21a^5b^3c^8$

c) $4x^3 \cdot 5x^4 \cdot 6x^2 = (4 \cdot 5 \cdot 6) \cdot (x^3 \cdot x^4 \cdot x^2) = 120x^{3+4+2} = 120x^9$

d) $8m^2n \cdot (2mn - 3m^3n^2) = 8m^2n \cdot 2mn - 8m^2n \cdot 3m^3n^2 =$
$= (8 \cdot 2) \cdot (m^2 \cdot m) \cdot (n \cdot n) - (8 \cdot 3) \cdot (m^2 \cdot m^3) \cdot (n \cdot n^2) =$
$= 16m^3n^2 - 24m^5n^3$

Dělení mocnin se stejným základem

3 Vypočtěte:

a) $3^5 : 3^2$ b) $a^6 : a^4$

Řešení

Při dělení mocnin se stejným základem různým od nuly použijeme s výhodou zápis dělení ve tvaru zlomku, v němž krátíme stejné činitele v čitateli a ve jmenovateli.

a) $3^5 : 3^2 = \dfrac{3^5}{3^2} = \dfrac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{3 \cdot 3} = \dfrac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{1 \cdot 1} = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3$

b) Víme, že nemůžeme dělit nulou. Proto dělení můžeme provést jen za předpokladu, že $a \neq 0$.

$$a^6 : a^4 = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot a \cdot a}{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1} = a \cdot a = a^2$$

Všimněte si!

$$3^5 : 3^2 = \frac{3^5}{3^2} = 3^{5-2} = 3^3$$

$$a^6 : a^4 = \frac{a^6}{a^4} = a^{6-4} = a^2, \quad a \neq 0$$

Výsledkem dělení mocnin se stejným základem je mocnina s přirozeným mocnitelem, jen je-li mocnitel dělence větší než mocnitel dělitele.

Je-li mocnitel dělence **větší** než mocnitel dělitele, pak mocniny se stejným nenulovým základem dělíme tak, že základ umocníme rozdílem mocnitelů.

Pro libovolné číslo a různé od nuly a pro přirozená čísla r, s taková, že $r > s$, platí

$$a^r : a^s = \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}.$$

Zkoumejme nyní případy, kdy mocnitel dělence se rovná mocniteli dělitele.

4 Vypočtěte:

a) $3^4 : 3^4$ b) $a^2 : a^2$

Řešení

a) $3^4 : 3^4 = \dfrac{3^4}{3^4} = \dfrac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \dfrac{1}{1} = 1$

b) Opět řešíme za předpokladu, že $a \neq 0$.

$a^2 : a^2 = \dfrac{a^2}{a^2} = \dfrac{a \cdot a}{a \cdot a} = \dfrac{1}{1} = 1$

Kdybychom použili pravidlo, které platí, je-li mocnitel dělence větší než mocnitel dělitele, dostali bychom

a) $3^4 : 3^4 = \dfrac{3^4}{3^4} = 3^{4-4} = 3^0$,

b) $a^2 : a^2 = \dfrac{a^2}{a^2} = a^{2-2} = a^0, \quad a \neq 0$

Chceme-li, aby uvedené pravidlo platilo i pro mocnitele nula, pak

pro $a \neq 0$ zavedeme $a^0 = 1$.

Je-li mocnitel dělence roven mocniteli dělitele a základ mocniny je nenulové číslo, platí:

$$a^r : a^r = a^{r-r} = a^0 = 1$$

Zbývá ještě zjistit, jak budeme postupovat v případech, kdy mocnitel dělence je menší než mocnitel dělitele.

5 Vypočtěte:

a) $3^2 : 3^5$ b) $a^4 : a^6$

Řešení

a) $3^2 : 3^5 = \dfrac{3^2}{3^5} = \dfrac{3 \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \dfrac{1}{3 \cdot 3 \cdot 3} = \dfrac{1}{3^3}$

b) $a^4 : a^6 = \dfrac{a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a} = \dfrac{1}{a \cdot a} = \dfrac{1}{a^2}, \quad a \neq 0$

Všimněte si!

$$3^2 : 3^5 = \frac{3^2}{3^5} = \frac{1}{3^{5-2}} = \frac{1}{3^3}$$

$$a^4 : a^6 = \frac{a^4}{a^6} = \frac{1}{a^2}, \quad a \neq 0$$

Je-li mocnitel dělence menší než mocnitel dělitele ($r < s$) a základ mocniny je nenulové číslo, platí

$$a^r : a^s = \frac{1}{a^{s-r}}.$$

Shrnutí

Pro $r > s$ a libovolné číslo a platí $a^r : a^s = a^{r-s}$.

Pro $r = s$ a libovolné nenulové číslo a platí $a^r : a^r = a^0 = 1$.

Pro $r < s$ a libovolné nenulové číslo a platí $a^r : a^s = \dfrac{1}{a^{s-r}}$.

6 Vypočtěte:

a) $4^7 : 4^5$ b) $4^7 : 4^7$ c) $4^5 : 4^7$

Řešení

a) $4^7 : 4^5 = 4^{7-5} = 4^2 = 16$

b) $4^7 : 4^7 = 4^{7-7} = 4^0 = 1$

c) $4^5 : 4^7 = \dfrac{1}{4^{7-5}} = \dfrac{1}{4^2} = \dfrac{1}{16}$

7 Vypočtěte:

a) $8a^6 : (-2a^3)$ b) $12b^5 : 10b^5$ c) $5c^3 : c^7$

Řešení

a) $8a^6 : (-2a^3) = \dfrac{8}{-2}a^{6-3} = -4a^3, \quad a \neq 0$

b) $12b^5 : 10b^5 = \dfrac{12}{10}b^{5-5} = 1{,}2b^0 = 1{,}2 \cdot 1 = 1{,}2, \quad b \neq 0$

c) $5c^3 : c^7 = 5 \cdot \dfrac{1}{c^{7-3}} = \dfrac{5}{c^4}, \quad c \neq 0$

CVIČENÍ

1. Vynásobte:

a) $x^3 \cdot x^5$ b) $y^2 \cdot y^3 \cdot y^4$

c) $x^2 \cdot 2x^3 \cdot 3x^4$ d) $3y \cdot 4y^3 \cdot (-5y^6)$

2. Vynásobte:

a) $4ab^2 \cdot 5a^2b$ b) $3a^2b^3 \cdot (-2ab^2)$

c) $6a^2b^3c^4 \cdot 8ab^2c^3$ d) $(-7a^5b^4c^3) \cdot (-7ab^3c^5)$

3. Vynásobte:

a) $8a^2x^3 \cdot 2x \cdot 3a^3$ b) $12x^5y^4z^3 \cdot 3x^2y \cdot 4y^2z^4$

c) $(-9a^2) \cdot (-3b^2) \cdot 3a^2b^2$ d) $2x^2y^2z^2 \cdot (-2x^2y^3) \cdot (-2x^2z)$

5

4. Zapište ve tvaru mocniny:

a) $2 \cdot 2^4 \cdot 2^5$ b) $10^5 \cdot 10^4 \cdot 10^3$

c) $(1-b)^2 \cdot (1-b)^3$ d) $(2a+3b)^3 \cdot (3b+2a)^4$

5. Zapište ve tvaru mocniny (n je přirozené číslo):

a) $2^3 \cdot (-2)^2$ b) $(a+5)^2 \cdot (5+a)^3$ 27

c) $2^n \cdot 2^2$ d) $(a-b)^n \cdot (a-b)^3$

6. Vydělte a výsledek zapište ve tvaru mocniny: 23

a) $5^7 : 5^5$ b) $(-3)^5 : (-3)^2$

c) $1{,}2^{10} : 1{,}2^6$ d) $(-0{,}8)^8 : (-0{,}8)^3$ 31

7. Vydělte:

a) $x^9 : x^6$ b) $8x^5 : 2x^3$

c) $16x^6 : (-4x^5)$ d) $(-8x^9) : (-16x^7)$

8. Vydělte:

a) $a^3 : a^3$ b) $3a^5 : 27a^5$ 15

c) $24a^3b^5 : 6ab^5$ d) $48a^4b^3c^2 : (-8a^3bc^2)$

9. Vydělte: 9

a) $z^5 : z^8$ b) $3y^2 : y^4$

c) $12x^3 : (-36x^4)$ d) $(-91a^5) : (-13a^9)$ 12

10. Vydělte:

a) $3xy^2 : 6x^2$ b) $2x^3y^2 : 5x^5y^2$

c) $72x^3y^2z : 6xy^2$ d) $144x^5y^4z^6 : (-6x^5y^6z^3)$

11. Vydělte:

a) $(-3ab^3) : (-3a^3b^2)$ b) $(-7a^3b^4) : 21a^4b^4$ 35

c) $\frac{2}{5}a^2b^5 : \frac{5}{2}a^3b^2$ d) $\frac{3}{4}a^3b : \frac{9}{8}a^5c^3$ 37

12. Vydělte a výsledek zapište ve tvaru mocniny:

a) $(a+2)^3 : (a+2)$ b) $(1+a)^7 : (a+1)^3$ 12

c) $6x^2(x-3)^4 : 2x(x-3)$ d) $3x^2y^3(y+4)^5 : 15x^2y^4(4+y)^2$

13. Vypočtěte:

a) $\dfrac{a^3 \cdot a^2}{a^4}$ b) $\dfrac{3b^3 \cdot 4b^2}{6b^5}$

c) $\dfrac{4a^2b \cdot 9ab^3}{12a^3b^5}$ d) $\dfrac{24a^5b^3}{6a^2b^2 \cdot 3a^3b^4}$ 10

14. Vypočtěte:

a) $\dfrac{3x^3(x-1)^4}{x^2(x-1)}$ b) $\dfrac{4x^2(x-1)^3}{(x-1)^2(x-1)}$ 24

c) $\dfrac{5x^5(y+3)^2}{10x^6(y+3)}$ d) $\dfrac{2z(x+1)(y-2)^5}{z^2(x+1)^3(y-2)^2}$ 26

6.4 Mocnina součinu a podílu

1 Umocněte součin:

a) $(5a)^3$ b) $[3a(b-1)]^2$

Řešení

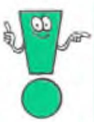
a) $(5a)^3 = 5a \cdot 5a \cdot 5a = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot a \cdot a \cdot a = 5^3 \cdot a^3 = 125a^3$

b) $[3a(b-1)]^2 = 3a(b-1) \cdot 3a(b-1) = 3 \cdot 3 \cdot a \cdot a \cdot (b-1) \cdot (b-1) =$
$= 3^2 \cdot a^2 \cdot (b-1)^2 = 9a^2(b-1)^2$

Všimněte si!

$$(5a)^3 = 5^3 \cdot a^3$$

$$[3a(b-1)]^2 = 3^2 \cdot a^2 \cdot (b-1)^2$$



Součin umocníme tak, že umocníme každého činitele.
Pro libovolná čísla a, b a pro přirozené číslo n platí

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$

2 Umocněte podíl:

a) $(3:5)^4$ b) $(x:y)^3$

Řešení

a) $(3:5)^4 = \left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{3^4}{5^4} = 3^4 : 5^4$

b) $(x:y)^3 = \left(\frac{x}{y}\right)^3 = \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} = \frac{x \cdot x \cdot x}{y \cdot y \cdot y} = \frac{x^3}{y^3} = x^3 : y^3, \quad y \neq 0$

Všimněte si!

$(3:5)^4 = 3^4 : 5^4$ $\qquad \left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{3^4}{5^4}$

$(x:y)^3 = x^3 : y^3, \quad y \neq 0$ $\qquad \left(\frac{x}{y}\right)^3 = \frac{x^3}{y^3}, \quad y \neq 0$

Podíl umocníme tak, že umocníme dělence i dělitele. Je-li a libovolné číslo, b libovolné číslo různé od nuly a n přirozené číslo, pak

$$(a : b)^n = a^n : b^n.$$

Zlomek umocníme tak, že umocníme čitatele i jmenovatele zlomku.

Je-li a libovolné číslo, b libovolné číslo různé od nuly a n přirozené číslo, pak

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

3 Vypočtěte:

a) $(-2ab)^6$ b) $\left[\frac{1}{5}x(y-2z)\right]^3$

c) $\left(\frac{-2a}{b}\right)^5$ d) $\left[\frac{(-4b)(a+2)}{3a}\right]^3$

Řešení

a) $(-2ab)^6 = (-2)^6 \cdot a^6 \cdot b^6 = 64a^6b^6$

b) $\left[\frac{1}{5}x(y-2z)\right]^3 = \left(\frac{1}{5}\right)^3 x^3(y-2z)^3 = \frac{1^3}{5^3}x^3(y-2z)^3 = \frac{1}{125}x^3(y-2z)^3$

c) $\left(\frac{-2a}{b}\right)^5 = \frac{(-2a)^5}{b^5} = \frac{(-2)^5 \cdot a^5}{b^5} = \frac{-32a^5}{b^5}, \quad b \neq 0$

d) $\left[\frac{(-4b)(a+2)}{3a}\right]^3 = \frac{(-4b)^3(a+2)^3}{(3a)^3} = \frac{(-4)^3b^3(a+2)^3}{3^3a^3} =$

$$= \frac{-64b^3(a+2)^3}{27a^3}, \quad a \neq 0$$

CVIČENÍ

1. Vypočtěte:

a) $(6a)^2$ b) $[(-3)b]^3$ c) $(a \cdot b)^7$ d) $(2a \cdot b)^6$

2. Umocněte:

a) $(0{,}1x)^4$ b) $(0{,}2x)^2$ c) $\left(\frac{1}{2}y\right)^5$ d) $\left(\frac{-2}{3}y\right)^3$

3. Vypočtěte:

a) $[a(b-1)]^8$ b) $[(a+1)(b-2)]^3$

c) $[2a(b+5)]^6$ d) $[(-3)a(b-4)]^5$

4. Upravte:

a) $\left(\frac{7a}{3}\right)^2$ b) $\left(\frac{3a}{8}\right)^2$ c) $\left(\frac{-4}{5a}\right)^3$ d) $\left(\frac{2}{3a}\right)^5$

5. Umocněte:

a) $\left(\frac{9xy}{8}\right)^2$ b) $\left(\frac{3x}{8y}\right)^3$

c) $\left(\frac{x+1}{4}\right)^4$ d) $\left(\frac{3-x}{2y}\right)^5$

6. Umocněte:

a) $\left[\frac{b(a-2)}{a}\right]^2$ b) $\left[\frac{a(b+1)}{2b}\right]^4$

c) $\left[\frac{(-2)b(a+1)}{a}\right]^5$ d) $\left[\frac{2a(b-3)}{3b}\right]^3$

6.5 Umocňování mocnin

1 Umocněte:

a) $(3^4)^3$ b) $(c^5)^4$

Řešení

a) $(3^4)^3 = 3^4 \cdot 3^4 \cdot 3^4 = 3^{4+4+4} = 3^{4\cdot 3} = 3^{12}$

b) $(c^5)^4 = c^5 \cdot c^5 \cdot c^5 \cdot c^5 = c^{5+5+5+5} = c^{5\cdot 4} = c^{20}$

Všimněte si!

$$(3^4)^3 = 3^{4\cdot 3}$$

$$(c^5)^4 = c^{5\cdot 4}$$

Mocninu a^r umocníme na s-tou tak, že základ mocniny a umocníme na součin mocnitelů $r \cdot s$.

Pro libovolné číslo a a pro přirozená čísla r, s platí:

$$(a^r)^s = a^{r\cdot s}$$

2 Umocněte:

a) $(3x^2)^4$ b) $(5xy^4)^3$

c) $\left(\frac{2ab^3}{3c^2}\right)^5$ d) $\left[\frac{6a^5(b-1)^2}{5c}\right]^3$

Řešení

a) $(3x^2)^4 = 3^4 \cdot (x^2)^4 = 81x^{2\cdot 4} = 81x^8$

b) $(5xy^4)^3 = 5^3 \cdot x^3 \cdot (y^4)^3 = 125x^3y^{12}$

c) $\left(\frac{2ab^3}{3c^2}\right)^5 = \frac{(2ab^3)^5}{(3c^2)^5} = \frac{2^5a^5(b^3)^5}{3^5(c^2)^5} = \frac{32a^5b^{15}}{243c^{10}}, \quad c \neq 0$

d) $\left[\dfrac{6a^5(b-1)^2}{5c}\right]^3 = \dfrac{[6a^5(b-1)^2]^3}{(5c)^3} = \dfrac{6^3(a^5)^3[(b-1)^2]^3}{5^3c^3} =$

$$= \frac{216a^{15}(b-1)^6}{125c^3}, \quad c \neq 0$$

CVIČENÍ

1. Umocněte:

a) $(2^3)^2$ b) $[(-2)^3]^2$

c) $[(-2)\cdot(-1)^2]^3$ d) $[(-2)^3\cdot(-1)^5]^3$

2. Umocněte:

a) $(5x^2)^2$ b) $(-5x^2)^2$

c) $(-5x^2)^3$ d) $(-5x^3)^2$

3. Umocněte:

a) $(5ab^2)^3$ b) $(-2a^3b^2)^5$

c) $(-9a^6b^4)^2$ d) $(a^3b^4c^0)^7$

4. Umocněte:

a) $\left(\dfrac{8a^2}{5}\right)^2$ b) $\left(-\dfrac{3a^2}{4}\right)^4$

c) $\left(-\dfrac{6}{7a^2}\right)^3$ d) $\left(-\dfrac{2a}{5b^2}\right)^4$

5. Umocněte (n je přirozené číslo):

a) $(6a^2)^n$ b) $\left(\dfrac{1}{a^3}\right)^n$

c) $(7a^3b^n)^2$ d) $(a^4b^nc^{n+2})^3$

6. Umocněte:

a) $[a\cdot(3b)^3]^2$ b) $[(-2a)\cdot(3b)^2]^3$

c) $[(-2a)^2\cdot 3b]^3$ d) $[(-2a)^3\cdot 3b^2]^3$

7. Umocněte:

a) $\left(\dfrac{3ab^5}{2c^3}\right)^2$ b) $\left(\dfrac{-2a^3b}{5c^2}\right)^3$

c) $\left[\dfrac{4a^2(b-1)}{c}\right]^3$ d) $\left[\dfrac{(-5a^3)(b+1)^2}{3c^5}\right]^2$

6

5

30°

2,5

45°

6

60°

4

300°

1

180°

10

18°

3

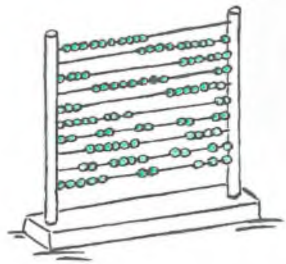
270°

3

90°

6.6 Zápis čísel v desítkové soustavě pomocí mocnin deseti

V matematice a přírodních vědách, především ve fyzice, biologii a astronomii, počítáme často s velkými čísly. Taková čísla můžeme stručněji zapsat ve tvaru součinu dvou čísel, z nichž jedno je větší nebo rovno 1 a přitom je menší než 10 a druhé je mocnina čísla 10. Zápis má tedy tvar $a \cdot 10^n$, kde n je přirozené číslo a pro číslo a platí $1 \leqq a < 10$.



Nejprve si připomeňme některé mocniny čísla 10.

$10^1 = 10$ (deset)
$10^2 = 100$ (sto)
$10^3 = 1\,000$ (tisíc)
$10^4 = 10\,000$ (deset tisíc)
atd.

V praxi se můžete dále setkat s těmito mocninami čísla 10 a jejich názvy:

10^6 milion
10^9 miliarda
10^{12} bilion
10^{18} trilion

1 Následující čísla zapište v tvaru $a \cdot 10^n$, kde $1 \leqq a < 10$ a n je přirozené číslo:

a) 3 000 000 b) 160 000

Řešení

a) Dané číslo 3 miliony můžeme zapsat ve tvaru:

$$3\,000\,000 = 3 \cdot 1\,000\,000 = 3 \cdot 10^6$$

b) Dané číslo sto šedesát tisíc bychom mohli zapsat jako $16 \cdot 10\,000 = 16 \cdot 10^4$. Tento zápis však nemá požadovaný tvar. Neplatí totiž, že $1 \leqq 16 < 10$. Správný zápis je

$$160\,000 = 1{,}6 \cdot 100\,000 = 1{,}6 \cdot 10^5.$$

Všimněte si, že mocnitel čísla 10 (v tomto případě číslo 5) určuje řád první číslice zapisovaného čísla. Řád číslice 1 je 5 (statisíce).

CVIČENÍ

1. Následující čísla zapište ve tvaru $a \cdot 10^n$, kde $1 \leqq a < 10$ a n je přirozené číslo:
   a) 200 000 b) 50 000 000
   c) 3 500 000 d) 760 000 000

2. Zapište číselné údaje uvedené v následujících sděleních ve tvaru $a \cdot 10^n$, kde $1 \leqq a < 10$ a n je přirozené číslo:
   a) Rovníkový průměr planety Saturn je 120 000 km.
   b) Největší ostrov Grónsko má rozlohu 2 175 000 km^2.
   c) Uvnitř lidského oka je 7 milionů čípků a 130 milionů tyčinek.
   d) Podle Národního institutu pro demografické údaje se sídlem v Paříži bylo na začátku roku 1995 na zeměkouli celkem 5 600 000 000 obyvatel.

3. Dané číselné údaje o Zemi nejprve zaokrouhlete na tři platné číslice a pak je vyjádřete ve tvaru $a \cdot 10^n$, kde $1 \leqq a < 10$ a n je přirozené číslo:
   a) Rovníkový poloměr Země je 6 378 388 m.
   b) Délka rovníku je 40 076 592 m.
   c) Povrch oceánů je 361 254 000 km^2.
   d) Objem Země je 1 083 319 780 000 km^3.

4. Neúnavný sval, lidské srdce, vykoná za 1 den asi 100 000 tepů. Vypočítejte, kolik tepů vykoná za 70 let, a toto číslo vyjádřete v tvaru $a \cdot 10^n$, kde $1 \leqq a < 10$ a n je přirozené číslo. Předpokládejte, že rok má 365 dní.

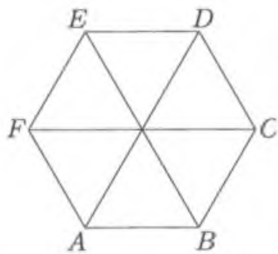
5. Největší hmotnost ze všech planet sluneční soustavy má Jupiter. Jeho hmotnost je 318krát větší než hmotnost Země. Hmotnost Země je asi 6 trilionů tun. Vyjádřete hmotnost Jupiteru v tunách. Výsledek vyjádřete v tvaru $a \cdot 10^n$, kde $1 \leqq a < 10$ a n je přirozené číslo.

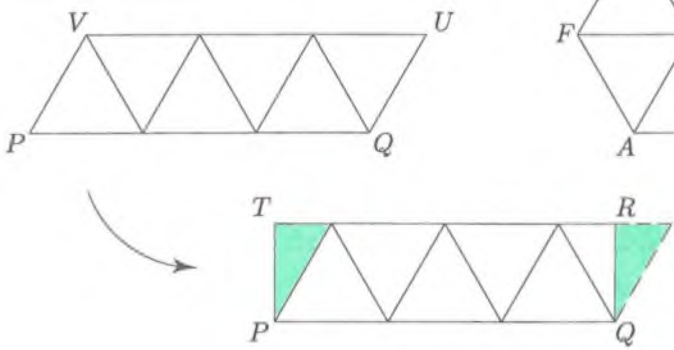
6. Jednou z astronomických jednotek délky je světelný rok. Je to dráha, kterou urazí světlo za jeden rok. Předpokládejte, že rychlost světla je 300 000$\frac{\text{km}}{\text{s}}$ a rok má 365 dní. Vypočítejte, kolik metrů je jeden světelný rok. Výsledek vyjádřete v tvaru $a \cdot 10^n$, kde $1 \leqq a < 10$ a n je přirozené číslo.

7 KRUH. VÁLEC

7.1 Obsah kruhu

1 Narýsujte a vystřihněte šest rovnostranných trojúhelníků se stranami $a = 3\,\text{cm}$. Z těchto trojúhelníků můžete složit pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$ nebo kosodélník $PQUV$, které mají stejné obsahy. Kosodélník $PQUV$ můžeme snadno „proměnit“ na obdélník s delší stranou PQ a kratší stranou PT; $|PQ| = 3a = 9\,\text{cm}$, délka strany PT je rovna výšce trojúhelníků, z nichž je kosodélník složen.



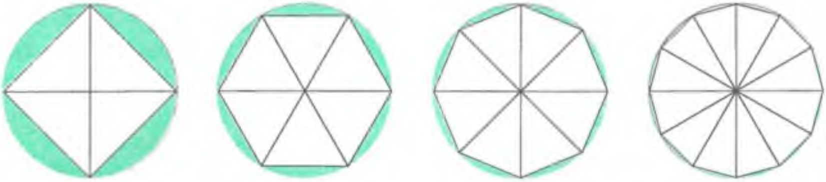


Obsah obdélníku $PQRT$ je roven obsahu pravidelného šestiúhelníku $ABCDEF$.

Obsah pravidelného šestiúhelníku můžeme tedy vypočítat jako součin poloviny jeho obvodu o a výšky v shodných rovnostranných trojúhelníků, z nichž je složen:

$$S_{ABCDEF} = \frac{1}{2} \cdot o_{ABCDEF} \cdot v$$

Takto bychom mohli vypočítat obsah každého pravidelného mnohoúhelníku se sudým počtem vrcholů.



Obvod každého takového n-úhelníku je o trochu menší než délka kružnice $k(O, r)$, která je mu opsána; jeho obsah je menší než obsah kruhu $\mathsf{K}(O, r)$. Čím větší je počet vrcholů tohoto n-úhelníku, tím více se blíží jeho obvod délce kružnice $k(O, r)$ a jeho obsah obsahu kruhu $\mathsf{K}(O, r)$. Také výšky rovnoramenných trojúhelníků určených dvojicemi sousedních vrcholů n-úhelníku a jeho středem se blíží poloměru kruhu $\mathsf{K}(O, r)$. Obsah kruhu $\mathsf{K}(O, r)$ můžeme vypočítat jako součin poloviny jeho obvodu a jeho poloměru:

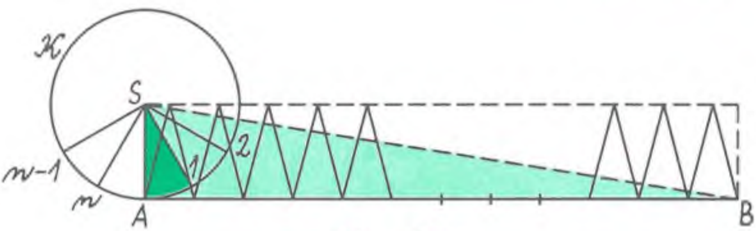
$$S = \left(\frac{2\pi r}{2}\right) \cdot r = \pi \cdot r \cdot r = \pi \cdot r^2$$

2 Lenka zdůvodnila výpočet obsahu kruhu $\mathsf{K}(O, r)$ takto:

Kruh $\mathcal{K}(S, r)$ je složen z n shodných trojúhelníků:
$\triangle A1S$, $\triangle 12S$, $\triangle 23S$, ... $\triangle nAS$

Jejich základny → oblouky
$\widehat{A1}, \widehat{12}, \ldots \widehat{nA}$

Součet délek základen → délka kružnice k



$o = |AB| = 2\pi r$

Obsah všech trojúhelníků $S = o \cdot \frac{r}{2} = \underline{\underline{\pi r^2}}$

Je její úvaha správná?

Návod:
Uvažte, že všechny trojúhelníky ABC se stranami AB stejné délky a s výškami v_c stejné délky mají týž obsah.

Obsah kruhu K s poloměrem r je roven součinu čísla π a druhé mocniny poloměru r:

$$S = \pi \cdot r^2$$

3 Porovnejte obsahy kruhů K(O, 1 cm), L(O, 2 cm), M(O, 3 cm) a N(O, 4 cm). Výsledky přehledně uspořádejte.

Honza si připravil tabulku a doplňoval do ní výsledky:

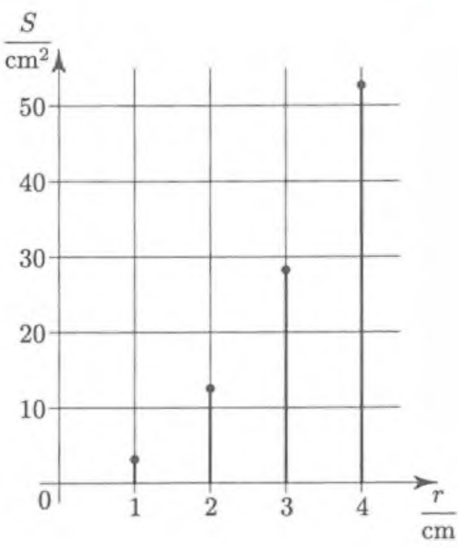
Kruh	r	r^2	πr^2	Obsah kruhu
K	1	1	3,14	3,14 cm²
L	2	4	12,57	12,57 cm²
M	3	9	28,27	28,27 cm²
N	4	16	50,27	50,27 cm²

Petr si zapsal:

Obsah kruhu K(O, r): $S = \pi \cdot r^2$
Poměr obsahů kruhů K(O, r) a K′(O, r'): $S : S' = r^2 : (r')^2$
Proto

$$S_{\mathsf{K}} : S_{\mathsf{L}} : S_{\mathsf{M}} : S_{\mathsf{N}} = 1^2 : 2^2 : 3^2 : 4^2 = 1 : 4 : 9 : 16$$

Obsah kruhu K(O, 1 cm) je přibližně 3,14 cm^2.
Obsah kruhu L(O, 2 cm) je přibližně 12,57 cm^2.
Obsah kruhu M(O, 3 cm) je přibližně 28,27 cm^2.
Obsah kruhu N(O, 4 cm) je přibližně 50,27 cm^2.
(Užil jsem kalkulačku.)



Lenka výsledky znázornila graficky. Na vodorovné ose znázorňovala poloměr, na svislé ose obsah kruhu.

Všimněte si, že obsah kruhu není přímo úměrný jeho poloměru.

CVIČENÍ

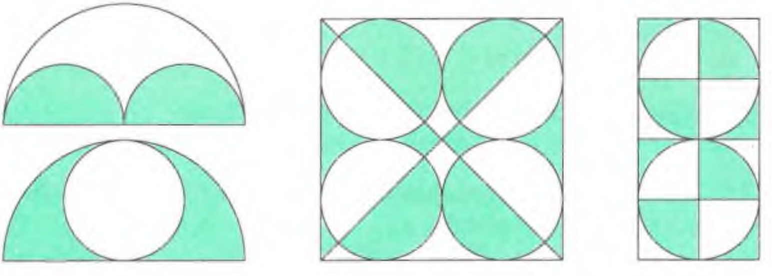
1. Vypočtěte obsah kruhu vepsaného do čtverce $ABCD$, je-li $|AB| = 5\,\mathrm{cm}$.

2. Porovnejte obsah čtverce se stranou délky 7 cm a obsah kruhu s průměrem 8 cm.
   a) Narýsujte čtverec i kruh tak, aby měly společný střed.
   b) Odhadněte vztah mezi obsahy obou útvarů.
   c) Vypočítejte obsah čtverce i kruhu.

3. Polovina dlaždic kruhové arény s průměrem 15 m musela být vyměněna. 1 m^2 dlaždic stojí 260 Kč. Kolik Kč je třeba na nákup nových dlaždic?

4. Z plechů tvaru obdélníku s rozměry 32 cm a 24 cm byly vykrajovány kruhové podložky s průměrem 4 cm. Vyjádřete v procentech odpad, který vzniká při této výrobě.

5. Vypočtěte obsahy vybarvených částí útvarů na obrázku. Určete poměry obsahů bílých a vybarvených částí každého obrazce.

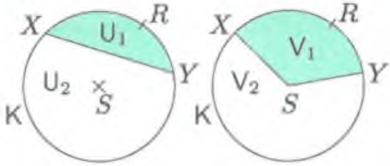


7.2 Části kruhu

Kruh můžeme dělit na části různým způsobem. Nejčastěji užíváme jeho dělení na výseče a úseče.

Tětiva XY rozdělí kruh $\mathsf{K}(O, r)$ na dvě kruhové úseče U_1, U_2; dvojice poloměrů SX a SY rozdělí kruh na dvě kruhové výseče V_1, V_2.

K výpočtu obvodu či obsahu kruhové výseče XSY nebo úseče vyťaté tětivou XY je třeba znát velikost středového úhlu, který přísluší obloukům XRY.



1 Kruh $\mathsf{K}(S, 10\,\mathrm{cm})$ je rozdělen na 10 shodných kruhových výsečí. Vypočtěte obvod jedné kruhové výseče.

Řešení

Středové úhly α shodných výsečí jsou shodné. Proto

$$\alpha = 36°.$$

Obvod o_{V} kruhové výseče XSY je roven součtu poloměrů SX a SY a délky oblouku XY kružnice $k(S, 10\,\mathrm{cm})$.

$$o_{\mathsf{V}} = 2r + |\widehat{XY}|$$

Tedy:

$$o_{\mathsf{V}} = 2r + \frac{o}{10} = 2r + \frac{2\pi r}{10} = 2r + \frac{\pi r}{5} = \frac{10r + \pi r}{5} = \frac{r}{5} \cdot (10 + \pi)$$

Dosadíme $r = 10\,\mathrm{cm}$:

$$o_{\mathsf{V}} = \frac{10}{5} \cdot (10 + \pi)\,\mathrm{cm} = 2(10 + \pi)\,\mathrm{cm} \doteq (20 + 6{,}28)\,\mathrm{cm} = 26{,}28\,\mathrm{cm}$$

Obvod jedné kruhové výseče je přibližně 26,28 cm.

2 Z kruhu $\mathsf{K}(S; 3{,}5\,\mathrm{dm})$ je oddělena kruhová výseč ASB; $|\sphericalangle ASB| = 57°$. Vypočtěte její obsah.

Řešení

Obsah výseče ASB je přímo úměrný velikosti středového úhlu ASB kružnice $k(S; 3{,}5\,\mathrm{dm})$. Proto můžeme k výpočtu použít trojčlenku:

$$\begin{array}{rcr} \uparrow\ \pi r^2\,\mathrm{dm}^2 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 360°\ \uparrow \\ x\,\mathrm{dm}^2 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 57° \end{array}$$

$$x : \pi r^2 = 57 : 360$$

$$360x = 57\pi r^2$$

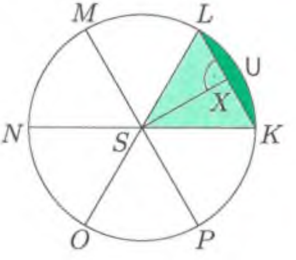
$$x = \frac{57}{360} \cdot \pi \cdot 3{,}5^2 \doteq 6{,}09$$

Obsah výseče ASB je přibližně $6{,}09\,\mathrm{dm}^2$.

3 Do kruhu $K(S, 6\,\text{cm})$ je vepsán pravidelný šestiúhelník $KLMNOP$. Vypočtěte obsah menší z kruhových úsečí, na které je kruh K rozdělen tětivou KL.

Řešení

Obsah výseče KSL je roven jedné šestině obsahu kruhu $K(S, 6\,\text{cm})$. Tato kruhová výseč je sjednocením kruhové úseče U a trojúhelníku KSL.



Označme:

obsah výseče $KSL \ldots S_V$
obsah úseče U .... S_U
obsah $\triangle KSL$ .... $S_\triangle$

Stručně můžeme zapsat:

$$S_U = S_V - S_\triangle$$

$$S_V = \frac{1}{6} \cdot \pi r^2 = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot 6^2\,\text{cm}^2 = 6\pi\,\text{cm}^2 \doteq 18{,}85\,\text{cm}^2$$

$$S_\triangle = \frac{a}{2} \cdot v_a$$

Výšku v_a vypočítáme z pravoúhlého trojúhelníku SXL.

$|SL| = 6\,\text{cm}$, $|XL| = 3\,\text{cm}$. Podle Pythagorovy věty

$$\begin{aligned}
|SL|^2 &= |SX|^2 + |XL|^2 \\
36 &= v_a^2 + 9 \\
v_a^2 &= 27 \\
v_a &= \sqrt{27} \\
v_a &\doteq 5{,}2 \\
v_a &\doteq 5{,}2\,\text{cm}
\end{aligned}$$

$$S_\triangle \doteq 5{,}2 \cdot 3\,\text{cm}^2 = 15{,}6\,\text{cm}^2$$

$$S_U \doteq 18{,}85\,\text{cm}^2 - 15{,}6\,\text{cm}^2 = 3{,}25\,\text{cm}^2$$

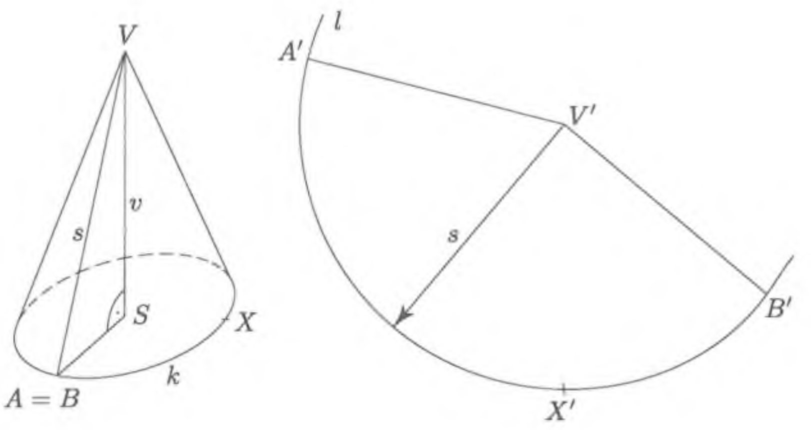
Obsah menší z kruhových úsečí je přibližně $3{,}25\,\text{cm}^2$.

4 Sestrojte plášť rotačního kužele R s podstavou K$(S, 3\,\mathrm{cm})$ a výškou $v = 7\,\mathrm{cm}$.

Řešení

Označme písmenem s délku strany VA kužele. Kužel R je rotační; proto jsou všechny jeho strany stejně dlouhé a trojúhelník VSA je pravoúhlý. Délku strany VA vypočítáme pomocí Pythagorovy věty:

$$\begin{aligned} s^2 &= v^2 + r^2 \\ s^2 &= 7^2 + 3^2 \\ s &= \sqrt{58} \\ s &\doteq 7{,}62 \\ s &\doteq 7{,}62\,\mathrm{cm} \end{aligned}$$



Protože všechny body kružnice $k(S, 3\,\mathrm{cm})$ mají od vrcholu V stejnou vzdálenost s, budou po rozvinutí pláště kužele R ležet na kružnici $l(V', s)$.
Kružnice k se „rozvine do oblouku“ $A'X'B'$ kružnice l. Proto musí platit:

$$o = |\widehat{A'X'B'}|$$

Honza vypočítal délku kružnice k:

$$o \doteq 18{,}85\,\mathrm{cm}$$

a pomocí lomené čáry zkusil „navinout úsečku“ této délky na kružnici $l(V', s)$.

Petr se rozhodl pro přesný výpočet a konstrukci. Vypočítal velikost středového úhlu φ příslušného oblouku $A'X'B'$ kružnice $l(V', s)$. Zapsal:

$o_k = 2\pi r$

$o_l = 2\pi s$

$r = 3$ cm

$s = 7{,}6$ cm

(φ)	(s)
360	$2\pi s$
φ	$2\pi r$

$$\varphi : 2\pi r = 360 : 2\pi s$$

$$\varphi = \frac{2\pi r \cdot 360}{2\pi s} = \frac{360 \cdot r}{s}$$

$$\varphi \doteq \frac{360 \cdot 3}{7{,}6} = 143$$

$$\varphi \doteq 143°$$

Středový úhel φ příslušný oblouku $A'X'B'$ má velikost přibližně 143°.

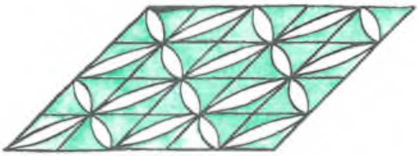
Pak sestrojil kružnici $l(V', 76\,\text{mm})$ a ramena úhlu $XV'Y$; $|XV'Y| \doteq \varphi$. Průsečíky polopřímek $V'X$ a $V'Y$ s kružnicí l označil A' a B'. Kruhová výseč $A'V'B'$ je (přibližně) rozvinutým pláštěm kužele R.

Sestrojte plášť kužele R, vystřihněte ho a vymodelujte nad kruhem $\mathsf{K}(S, 3\,\text{cm})$ rotační kužel R.

CVIČENÍ

1. Vypočtěte obsah kruhové výseče ASB ($|\sphericalangle ASB| = 100°$), která je částí kruhu $\mathsf{K}(S, 3\,\text{cm})$.
2. Obsah kruhové výseče XOY, která je částí kruhu $\mathsf{M}(O, 4\,\text{cm})$ je $12{,}6\,\text{cm}^2$. Vypočtěte velikost příslušného středového úhlu φ.
3. Narýsujte kruh $\mathsf{K}(S, 3\,\text{cm})$ a čtverec $ABCD$ do kruhu K vepsaný.
   a) Vypočtěte obsah výseče ASB se středovým úhlem o velikosti 270°.
   b) Vypočtěte délku strany čtverce $ABCD$.
   c) Vypočtěte obsah menší z kruhových úsečí, na které dělí kruh K tětiva AB.
   d) Určete poměr obsahů kruhu K a čtverce $ABCD$.
   e) Určete poměr obvodů kruhu K a čtverce $ABCD$.

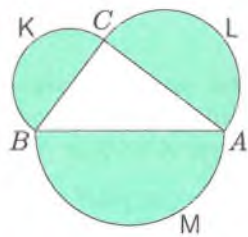
4. Čtvercové dlaždice se stranami o délce $a = 10\,\text{cm}$ jsou ozdobeny bílým listem ohraničeným oblouky dvou kružnic podle nákresu. Vypočtěte
   a) obvod bílého listu,
   b) obsah bílého listu na dlaždici.



5. Narýsujte kruhy K$(S, 3\,\text{cm})$ a L$(O, 4\,\text{cm})$, $|SO| = 5\,\text{cm}$.
   a) Vyznačte barevně průnik kruhů K, L a označte ho písmenem P.
   b) Vrcholy útvaru P označte X a Y. Změřte délku úsečky XY.
   c) Určete velikosti vnitřních úhlů čtyřúhelníku $SXOY$.
   d) Vypočtěte obsah útvaru P.

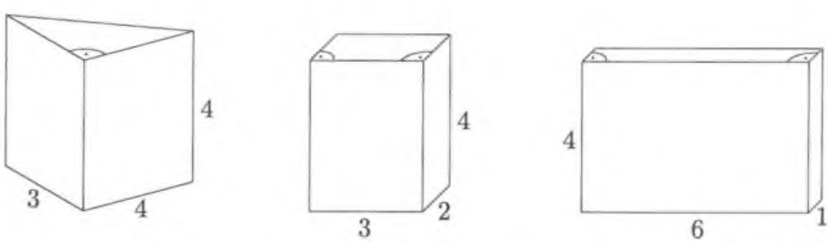
6. Vypočtěte povrch kužele R z příkladu 4.

7. Narýsujte pravoúhlý trojúhelník ABC; $a = 3\,\text{cm}$, $b = 4\,\text{cm}$, $c = 5\,\text{cm}$ a polokruhy K, L a M s průměry BC, CA a AB podle obrázku.
   Ověřte, zda podobně jako pro čtverce sestrojené nad stranami pravoúhlého trojúhelníku platí i pro tyto polokruhy vztah:
   $$S_\mathsf{K} + S_\mathsf{L} = S_\mathsf{M}.$$



7.3 Rotační válec

1 Vypočtěte zpaměti objemy kolmých hranolů znázorněných na obrázku. Jejich rozměry jsou uvedeny v centimetrech.



Řešení

Objem hranolu: $V = S_\mathrm{p} \cdot v$, tj. součin obsahu podstavy a výšky hranolu. Hranoly na obrázku jsou kolmé a jejich výšky se sobě rovnají.

Objemy: $V_1 = \dfrac{3 \cdot 4}{2} \cdot 4\,\mathrm{cm}^3 = 24\,\mathrm{cm}^3$

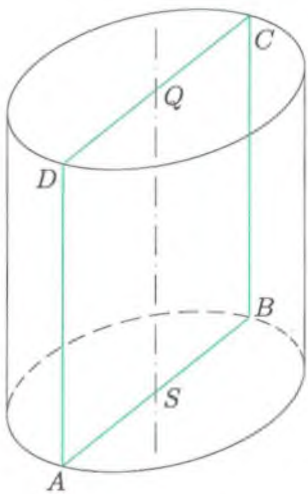
$V_2 = 3 \cdot 2 \cdot 4\,\mathrm{cm}^3 = 24\,\mathrm{cm}^3$

$V_3 = 1 \cdot 6 \cdot 4\,\mathrm{cm}^3 = 24\,\mathrm{cm}^3$

Tvar podstavy není pro objem hranolu důležitý. Objem hranolu závisí pouze na jeho výšce a obsahu podstavy.

Obdobně můžeme vypočítat též objem válce.

2 Vypočtěte objem rotačního válce V, který vznikne otáčením čtverce $ABCD$, $a = 8\,\mathrm{cm}$, kolem jeho střední příčky SQ, $SQ \parallel AD$.



Řešení

Podstavami válce V jsou kruhy $\mathsf{K}(S, |SA|)$ a $\mathsf{L}(Q, |QD|)$ s poloměry $r = 4\,\mathrm{cm}$. Výška válce V je rovna $|SQ|$, tedy $v = 8\,\mathrm{cm}$. Obsah podstavy S_p válce V:

$$S_\mathrm{p} = \pi r^2 = \pi \cdot 4^2\,\mathrm{cm}^2 \doteq 50{,}25\,\mathrm{cm}^2$$

Objem válce V:

$$V = S_\mathrm{p} \cdot v = \pi r^2 \cdot v \doteq 8 \cdot 50{,}25\,\mathrm{cm}^2 = $$
$$= 402\,\mathrm{cm}^2$$

Objem rotačního válce V je přibližně $400\,\mathrm{cm}^2$.

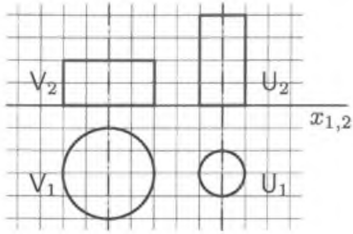
Objem válce V je roven součinu obsahu S_p jeho podstavy a výšky v.

$$V = S_\mathrm{p} \cdot v$$

Objem rotačního válce, jehož podstavou je kruh $\mathsf{K}(S, r)$, proto vypočteme podle vzorce:

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot v$$

3 Na obrázku vidíte půdorysy a nárysy dvou rotačních válců U a V. Průměr válce U je $2a$.



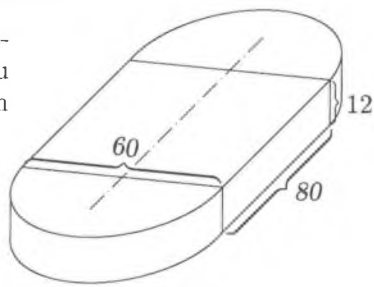
a) Určete rozměry obou válců.
b) Vyjádřete objem obou válců pomocí a.
c) Vyjádřete povrch obou válců pomocí a.

Návod:
Rozměry obou válců snadno určíte z jejich půdorysu a nárysu. Pak stačí použít vzorec pro obsah kruhu, délku kružnice a objem válce a obsah obdélníku.
Objem válce U je roven polovině objemu válce V.

CVIČENÍ

1. Vypočtěte objem největšího rotačního válce, který lze vyříznout z krychle, jejíž hrany mají délku 8 cm.

2. Na obrázku je načrtnuta krabička na olejovky. Její rozměry jsou udány v mm, dno je sjednocením dvou polokruhů a obdélníku.

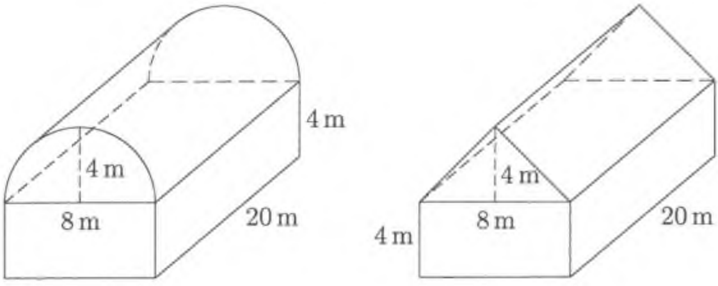


   a) Vypočtěte délku proužku, který tvoří stěny krabičky.
   b) Vypočtěte objem krabičky.
   c) Jaký objem má 150 krabiček? (Neuvažujte tloušťku plechu.)

3. Vypočtěte objem sloupce desetikorunových mincí, jestliže
   a) je tvořen jedním tisícem mincí,
   b) je výška tohoto sloupce přibližně 30 cm.

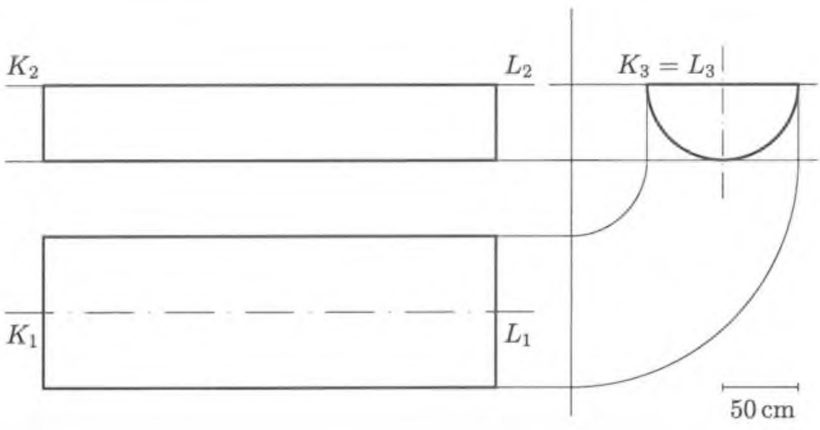
4. Barvy se prodávají v plechovkách tvaru rotačního válce.
   a) Určete rozměry plechovky s objemem 1 dm^3, je-li její výška rovna trojnásobku poloměru podstavy.
   b) Kolik takových plechovek lze vyrobit z 10 m^2 plechu? Počítejte 30 % užitého plechu na odpad a záhyby.

5. Tovární hala nad půdorysem tvaru obdélníku může být zastřešena buď klasickou sedlovou střechou, nebo střechou z hliníkového plechu, která má tvar poloviny pláště rotačního válce.



Porovnejte
a) spotřebu krytiny na klasickou střechu se spotřebou hliníkového plechu,
b) spotřebu materiálu na vyzdění štítů v obou případech,
c) objem haly v metrech krychlových.

6. Pomocí výkresu plechového koryta do umývárny v kempu zjistěte
a) spotřebu plechu na oblé dno koryta,
b) spotřebu plechu na polokruhová čela,
c) kolik litrů vody koryto pojme, je-li hladina vody 15 cm pod jeho okrajem.

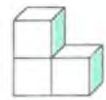


8 SOUHRNNÁ CVIČENÍ II A TESTY

1. Vypočtěte objem tělesa, které vzniklo z krychle o hraně 8,6 cm po odstranění osmi malých krychlí v jejích vrcholech. Délka hrany malých krychlí je 1,5 cm.

2. Které jednociferné přirozené číslo má tu vlastnost, že rozdíl jeho třetí mocniny a jeho druhé mocniny je druhá mocnina čísla 10?

3. Kolik hektolitrů vody se vejde do nádrže tvaru krychle, jejíž hrany mají délku 1,25 m?



4. Vypočtěte povrch a objem tělesa složeného ze tří krychlí, je-li hrana krychle a) 52 mm, b) 3,2 cm, c) 0,045 m.

5. Doplňte tabulku. Použijte kalkulačku a výsledky zaokrouhlete na tři desetinná místa.

x	3,2	0,28	21	14,2	34,73
x^2					
$2x$					
x^3					
$3x$					
$\sqrt{x}$					

6. Pomocí tabulek určete třetí odmocniny čísel 3,2; 0,28; 21; 14,2; 34,73.

7. Vypočtěte povrch rotačního válce vysokého 1 m, je-li jeho podstavou kruh $\mathsf{K}(S, 4\,\mathrm{dm})$.

8. Kolik m^2 plechu je třeba ke zhotovení okapové roury s průměrem 12 cm, má-li být dlouhá 7 m? Připočtěte 15 % plechu na přehyby.

9. Nafukovací hala tvaru poloviny rotačního válce stojí nad půdorysem, který má tvar čtverce a rozlohu $144\,m^2$.
a) Vypočtěte povrch haly.
b) Kolik m^3 vzduchu hala obsahuje?
c) Větrák nasaje do haly $120\,m^3$ vzduchu za hodinu. Za jak dlouho se vymění všechen vzduch v hale?

10. Jaká je celková hmotnost cihel uložených do tvaru krychle o hraně délky 264 cm, je-li hustota cihly přibližně $2\dfrac{g}{cm^3}$? Výsledek vyjádřete v kg a zapište ve tvaru $a \cdot 10n$, kde $1 \leqq a < 10$.

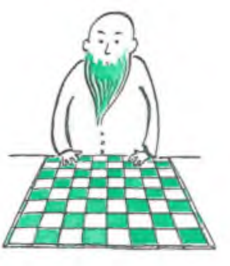
11. Která mocnina je větší? Rámeček nahraďte znakem nerovnosti, popř. rovnosti.

a) $3^3 \square 3^4$ b) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \square \left(\frac{1}{2}\right)^4$

c) $8^3 \square (4 \cdot 8)^2$ d) $4^3 \square (2 \cdot 4)^2$

12. Zapište několik mocnin, které mají základ 2 a jejich mocnitel je postupně 0, 1, 2, 3, … . Přesvědčte se, že kterákoli mocnina v této řadě je o 1 větší než součet všech předcházejících mocnin.

13. *Šachy* údajně vymyslel indický učenec pro dceru svého krále. Na otázku, jakou odměnu si přeje, odpověděl učenec takto: „První den mi dejte jedno zrnko obilí. Každý následující den mi pak dejte dvojnásobek toho, co jsem obdržel předcházející den. Odměnu mi dávejte tolik dní, kolik polí má šachovnice.“ Král se nejprve shovívavě usmíval, jak malou odměnu učenec požaduje. Po několika dnech mu však bylo oznámeno, že vyplácení odměny muselo být zastaveno, protože v královských sýpkách není dostatek obilí.



a) Zapište ve tvaru mocnin se stejným základem, kolik zrnek obilí bylo dáno učenci druhý, třetí, čtvrtý a desátý den.
b) Zapište ve tvaru mocniny se stejným základem jako v úloze a), kolik zrn dostal učenec první den.
c) S využitím poznatku z úlohy b) vypočtěte, kolik zrn obilí měl učenec dostat celkem. Výsledek pak zapište ve tvaru $a \cdot 10^n$, kde $1 \leqq a < 10$, kde n je přirozené číslo, a zaokrouhlete na tři platné číslice.
d) Vypočtěte hmotnost takto zaokrouhlené odměny v tunách, víte-li, že 1 000 zrn má hmotnost 43 gramů.
e) Kolik celosvětových úrod představuje učencova odměna za předpokladu, že roční celosvětová úroda obilí činí 200 milionů tun?

15. Každá trojice čísel na proužku (5) udává rozměry kvádru v centimetrech. Vypočtěte délku hrany krychle, která má
a) stejný objem,
b) stejný povrch jako kvádr.
(Výsledky vhodně zaokrouhlete.)

Test č. 1 — Mocniny

1. Vypočtěte:

$$\frac{3^2+4^2}{5^2}+\frac{6^2+8^2}{10^2}+\frac{7^2+9^2}{2^2+3^2}$$

2. Vypočtěte:

$$100-\left(\sqrt{8\,100}+\sqrt{81}+\sqrt{0{,}81}\right)$$

3. Určete pomocí tabulek:

a) 362^2 b) $3{,}62^2$
c) $3\,620^2$ d) 574^2
e) $57{,}42^2$ f) $5{,}742^2$

4. Určete pomocí tabulek:

a) $\sqrt{742}$ b) $\sqrt{74{,}2}$
c) $\sqrt{7{,}42}$ d) $\sqrt{7\,420}$
e) $\sqrt{0{,}742}$ f) $\sqrt{0{,}0742}$

5. Vypočtěte pomocí kalkulačky:

$$632^2+63{,}2^2+6{,}32^2+0{,}632^2$$

6. Vypočtěte pomocí kalkulačky. Výsledky zaokrouhlete na dvě desetinná místa.

a) $\sqrt{4\,302}$ b) $\sqrt{65{,}38}$
c) $\sqrt{8{,}243}$ d) $\sqrt{0{,}9542}$

7. Vypočtěte:

a) $4a^4-2a^2-3a^4+5a^2$ b) $5a^2b^3\cdot 2ab^4$
c) $16x^5:(-4x^3)$ d) $x^5:x^8$
e) $(5ab^2)^3$ f) $\left(\frac{8a^3}{5}\right)^2$

8. Daná čísla nejdříve zaokrouhlete na dvě platné číslice a pak zapište ve tvaru $a\cdot 10^n$, kde $1\leq a<10$.

a) 35 287 552 000
b) 6 752
c) 10 876 451

Test č. 2 — Kružnice

1. Narýsujte kružnici $k(S, 3\,\mathrm{cm})$ a její poloměry SA, SB tak, aby $|\sphericalangle ASB| = 120°$. V bodech A a B sestrojte tečny kružnice k a jejich společný bod označte R.
   a) Vypočtěte $|\sphericalangle ARB|$.
   b) Vypočtěte obsah čtyřúhelníku $ARBS$.
2. Je dána úsečka QS délky 3 cm a kružnice $k(S, 2\,\mathrm{cm})$. Narýsujte všechny kružnice $l(Q, r)$, které se kružnice k dotýkají.
3. Je dána úsečka SR délky 6 cm a kružnice $k(S, 3\,\mathrm{cm})$. Sestrojte z bodu R tečny ke kružnici k, označte body dotyku M a N a vypočtěte délky úseček RM a RN.
4. Oblouk AXB kružnice $m(M, 5\,\mathrm{cm})$ má délku 20 cm. Vypočtěte velikost středového úhlu, který mu přísluší.
5. Do kružnice $k(Q, 4\,\mathrm{cm})$ je vepsán obdélník $ABCD$. Jeho strana AB má délku 4 cm. Určete druhý rozměr obdélníku $ABCD$
   a) výpočtem,
   b) konstrukcí.
6. Na krychli K o hraně délky a jsou „přilepeny“ tři kruhy podle obrázku. Vyjádřete pomocí neznámé a, kolik procent povrchu krychle je polepeno.

Test č. 3 — Mocniny s přirozeným mocnitelem

1. Rozhodněte, která z uvedených mocnin se rovná 1:
   a) 1^5 b) $(-1)^4$ c) -1^4 d) $-(-1)^3$ e) $-(-1)^6$
2. Rozhodněte, který z uvedených výrazů se rovná a^5:
   a) $a + a + a + a + a$
   b) $a^2 + a^3$
   c) $5a$
   d) $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$
   e) $(a^2)^3$
3. Vypočtěte:
   a) $6a^2b - 3ab^2 - 5a^2b + 4ab^2 - a^2b$
   b) $\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - 0{,}25x^2 + 2x$
   c) $2m^2 - (-3m^2) - (4n - 5m^2) + (-3n)$
   d) $(5m)^2 - 5m^2 - 3m \cdot 4m - (-6m)(-m)$

4. Vypočtěte:

a) $3ab^2 \cdot 4ab^2$
b) $42a^3b^2 : 14ab^2$
c) $\frac{5}{6}a^2b^3 : \frac{10}{3}a^2b$
d) $\frac{3a^3(a-1)^2(b+1)}{a^2(a-1)(1+b)}$

5. Umocněte:

a) $(3x^2yz^0)^3$
b) $(4x^2y^3)^3 \cdot (-0{,}5x)^2$
c) $(x^3y^nz^{n+3})^2$
d) $\left(\frac{2xy^3}{3z^2}\right)^2$
e) $\left(\frac{5x^2y^n}{z+1}\right)^3$
f) $\left(3x^3y^4 \cdot \frac{4xz^2}{6x^2z}\right)^3$

6. Následující čísla zapište v tvaru $a \cdot 10^n$, kde $1 \leqq a < 10$ a n je přirozené číslo:

a) 70 000
b) 66 000 000
c) 1 250 000
d) 308 000 000

Test č. 4 — Stereometrie

1. Do rotačního válce V je vepsán rotační kužel K tak, že obě tělesa mají společnou podstavu a výšku.
   a) Načrtněte obě tělesa.
   b) Vypočtěte délku strany kužele K, je-li poloměr podstavy $r = 12\,\text{cm}$ a výška $v = 15\,\text{cm}$.
   c) Vypočtěte povrch válce V.
   d) Vypočtěte objem válce V.
2. Kvádr $ABCDEFGH$ má hrany o délkách 6 cm, 8 cm a 20 cm. Jaká rovina ho protne ve čtverci?
3. Z kruhové výseče ASB ($|\sphericalangle ASB| = 240°$) oddělené z kruhu $K(S, 10\,\text{cm})$ byl vymodelován plášť rotačního kužele. Vypočtěte
   a) obsah podstavy,
   b) výšku tohoto kužele.
4. Čtyřboký jehlan, jehož podstavou je obdélník $ABCD$, má hranu AV kolmou k rovině podstavy a $|AV| = 10\,\text{cm}$, $|AB| = 5\,\text{cm}$, $|BC| = 7\,\text{cm}$. Vypočtěte délky hran BV, CV a DV jehlanu.

9 MATEMATICKÁ HERNA

9.1 Pythagorova věta

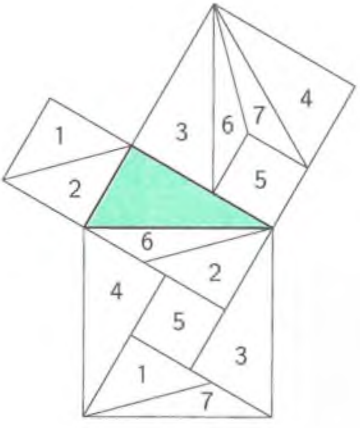
Ve druhé kapitole jsme dokazovali Pythagorovu větu pomocí čtverce, jehož strany mají délku rovnou součtu délek obou odvěsen daného pravoúhlého trojúhelníku.

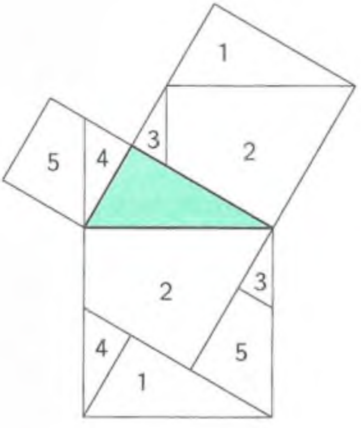
V literatuře můžete nalézt řadu skládanek, které řeší tuto úlohu:

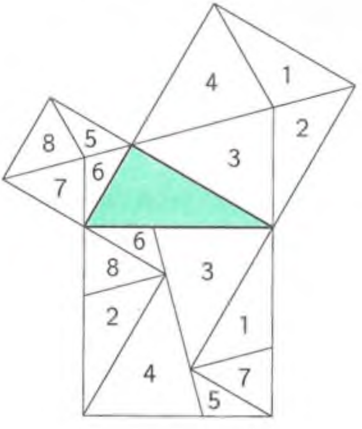
Čtverec sestrojený nad přeponou pravoúhlého trojúhelníku rozdělte na nepřekrývající se n-úhelníky tak, aby z nich bylo možné sestavit dvojici čtverců sestrojených nad odvěsnami tohoto pravoúhlého trojúhelníku. Několik takových rozdělení čtverců je uvedeno na následujících obrázcích. Překreslete si je ve větším měřítku na tužší papír, největší čtverec rozstříhejte podle nákresu a získanými dílky pokryjte oba zbývající čtverce.

(Těžší je úloha pokrýt menší čtverce bez vyznačené „nápovědy“.)

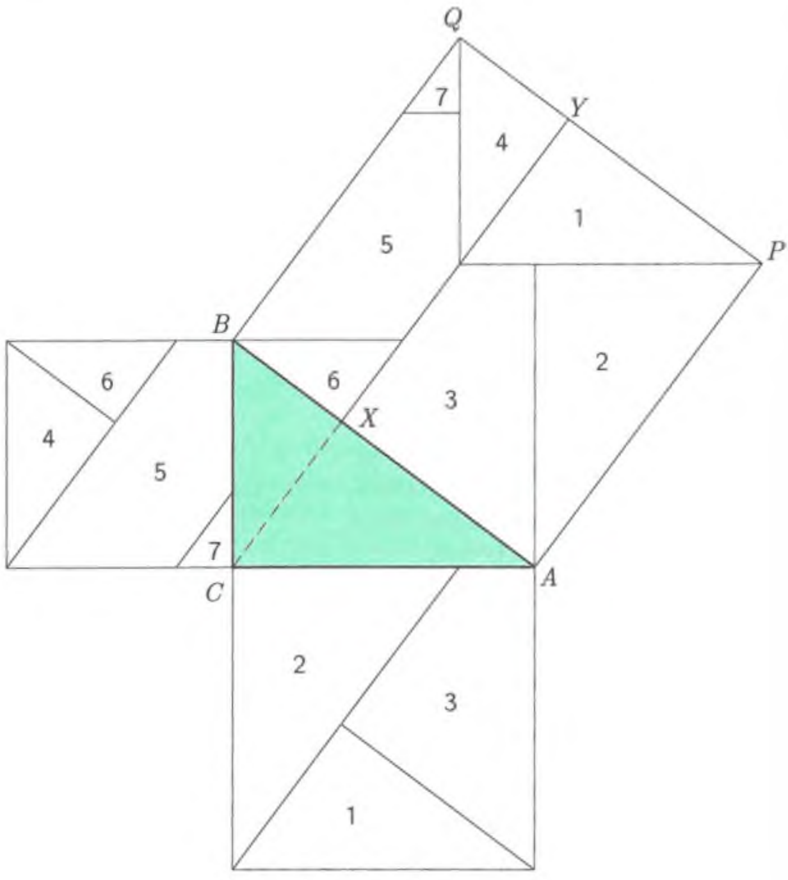
Zkuste podobné „rozdělení“ vymyslet i vy!







Čtverec sestrojený nad přeponou pravoúhlého trojúhelníku můžeme rozstříhat na dílky, které splňují ještě jednu podmínku (viz následující obrázek):



Z dílků, které tvoří obdélník $APYX$, lze sestavit čtverec sestrojený nad jednou odvěsnou tohoto trojúhelníku a z dílků obdélníku $BXYQ$ čtverec sestrojený nad jeho druhou odvěsnou. Odtud plyne, že úsečka XY dělí čtverec $APQB$ na dva obdélníky, jejichž obsahy jsou rovny obsahům čtverců sestrojených nad oběma odvěsnami.

(Toho si povšiml již řecký matematik Euklides, s jehož jménem se setkáte v další učebnici matematiky.)

9.2 Zajímavá spirála

Spirála barevně vyznačená na obrázku má zajímavou vlastnost: prochází dvěma vrcholy každého z pravoúhlých trojúhelníků SAB, SBC, SCD, ..., které mají společný vrchol S, jemu protilehlá odvěsna má délku 1 a odvěsna vycházející z bodu S je vždy rovna přeponě trojúhelníku předchozího.

Narýsujte tuto spirálu.

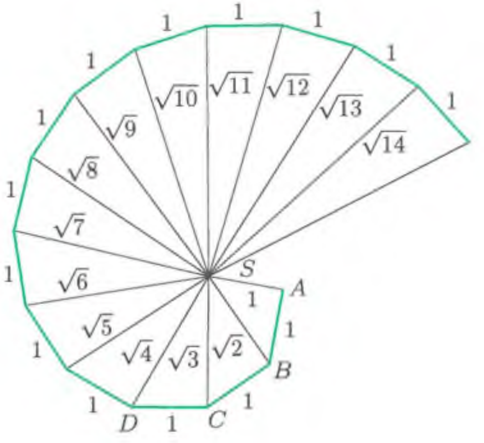
a) Sestrojte pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník SAB s pravým úhlem při vrcholu A a odvěsnami délky 1 cm.

b) Sestrojte úsečku BC kolmou na přímku SB a dlouhou 1 cm a přeponu SC trojúhelníku SBC.

c) Sestrojte úsečku CD kolmou na přímku SC a dlouhou 1 cm a přeponu SD trojúhelníku SCD.

d) ... atd.

1. Až získáte dostatečný počet vrcholů A, B, ..., načrtněte spirálu, která jimi prochází.
2. Pomocí Pythagorovy věty vypočtěte délky úseček SB, SC, SD, SE, SF, SG, SH a SI.
3. Ověřte měřením, zda jste rýsovali dostatečně přesně. (Změřte úsečky SD a SI.)
4. Zjistěte, kolik trojúhelníků lze podle uvedeného postupu narýsovat, než se začnou překrývat.



10 VÝSLEDKY ÚLOH

1 Druhá mocnina a odmocnina

1.1 Druhá mocnina racionálních čísel

1. $5^2 \cdot 2 \cdot 7$, $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, $5^3 \cdot 3$, $2^5 \cdot 3 \cdot 5$, $3^4 \cdot 7$, $7^2 \cdot 3 \cdot 5$. 2. a) 36; b) 0; c) 500; d) 3; e) 10 000; f) 17; g) 1; h) 1 000. 3. A. a) 256; b) 2,25; c) 0,688 9; d) $\frac{25}{49}$; e) 121. B. a) 289; b) 1,96; c) 0,372 1; d) $\frac{16}{81}$; e) 144. 4. a) 400; 250 000; 36 000 000; 12 100; 1 440 000; b) 0,09; 0,16; 0,004 9; 1,69; 0,000 196; c) $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{9}{16}$; $\frac{9}{4}$; $\frac{3}{16}$. 5. A. a) 2 525,25; b) 40; c) 2,272 5; d) 0,016 731. B. a) 1 616,16; b) 208; c) 1,979 6; d) 0,011 979. 6. a) 4 500 cm^2; b) 4 500 cm^2; c) 10 800 cm^2; d) 16 200 cm^2. 7. Např. $4 = 2^2$, $5 = 2^2 + 2 : 2$, $6 = 2^2 + 2$, $7 = 2^2 + 2^2 - 2 : 2$, $8 = 2^2 + 2^2$, $9 = 2^2 + 2^2 + 2 : 2$, $10 = 2^2 + 2^2 + 2$. 8. A. a) 59; b) 209; c) 27; d) 3. B. a) 25; b) 73; c) 676; d) 193. 9. a) 1; b) −4; c) 1; d) 2,19.

1.2 Určování druhé mocniny pomocí tabulek a kalkulačky

1. A. a) 21 316; 561 001; b) 8 410 000; 70 728 100; c) 31,36; 38,937 6; d) 12 602 500; 26 214 400; e) 51,265 6; 7 430,44. B. a) 46 225; 670 761; b) 51 840 000; 85 192 900; c) 60,84; 45,292 9; d) 19 184 400; 32 148 900; e) 63,202 5; 8 046,09. 2. $3\,600 < 65^2 < 4\,900$; $10\,000 < 178^2 < 40\,000$; $25\,000\,000 < 5\,342^2 < 36\,000\,000$; $49 < 7{,}6^2 < 64$; $16 < 4{,}561^2 < 25$; $1\,600 < 45{,}61^2 < 2\,500$; $0{,}16 < 0{,}456\,1^2 < 0{,}25$. 3. A. a) 2 116; 207 936; b) 12 397 441; 97 495 876; c) 60,84; 153,76; d) 0,230 4; 43,296 4; e) 69,755 904; 1 825,852 9. B. a) 4 489; 427 716; b) 31 494 544; 97 535 376; c) 31,36; 462,25; d) 0,547 6; 5,664 4; e) 39,100 009; 593,896 9. 4. a) 220 000; b) 32 000 000; c) 0,77; d) 14; e) 620. 5. A. a) $36 < 6{,}754^2 < 49$; $45{,}616\,516 \doteq 46$; b) $4\,000\,000 < 2\,875^2 < 9\,000\,000$; $8\,265\,625 \doteq 8\,300\,000$; c) $0{,}09 < 0{,}384^2 < 0{,}16$; $0{,}147\,456 \doteq 0{,}15$; d) $1\,600 < 43{,}71^2 < 2\,500$; $1\,910{,}564\,1 \doteq 1\,900$. B. a) $49 < 7{,}654^2 < 64$; $58{,}583\,716 \doteq 59$; b) $4\,000\,000 < 2\,782^2 < 9\,000\,000$; $7\,739\,524 \doteq 7\,700\,000$; c) $0{,}16 < 0{,}493^2 < 0{,}25$; $0{,}243\,049 \doteq 0{,}24$; d) $900 < 34{,}63^2 < 1\,600$; $1\,199{,}236\,9 \doteq 1\,200$. 6. a) Ano; b) ne; c) ano; d) ano; e) ano; f) ne; g) ne; h) ano.

7.

x	0,73	1,24	7,5	80	80,3	672
x^2	0,532 9	1,537 6	56,25	6 400	6 448,09	451 584
$2x$	1,46	2,48	15	160	160,6	1 344

8. 54 cm; 182,25 cm^2; a) třikrát; b) devětkrát. **9.** 1 069,29 cm^2. **10.** a) 7 040 mm^2; b) 3 888 mm^2. **11.** 0,612 5 m$^2 \doteq$ 0,6 m^2. **12.** Přibližně: 0,8 ha; 2,3 ha; 1,4 ha. **13.** 19,6 %; je to méně než čtvrtina plochy koberce. **14.** 2,34 m.

1.3 Druhá odmocnina

1. a) 4; 40; 0,4; b) 6; 600; 0,6; c) 7; 70; 0,07; d) 11; 1,1; 110; e) 15; 150; 0,15. **2.** Chyba: a), c), f), h), i), k). **3.** A. 591,82. B. 672,13. **4.** a) 25; b) 9; c) 3; d) 1; e) 24; f) 48; g) 0; h) 3; i) 6; j) 6,69; k) 1; l) -3. **5.** $3 < \sqrt{11} < 4$; $3 < \sqrt{13} < 4$; $4 < \sqrt{17} < 5$; $4 < \sqrt{19} < 5$; $4 < \sqrt{23} < 5$; $5 < \sqrt{29} < 6$; $5 < \sqrt{31} < 6$; $6 < \sqrt{37} < 7$; $6 < \sqrt{41} < 7$; $6 < \sqrt{43} < 7$; $6 < \sqrt{47} < 7$.

1.4 Určování druhé odmocniny pomocí tabulek a kalkulačky

1. 23,69; 23,73; 23,77; 23,81; 23,85. **2.** a) 217,3; b) 72,8; c) 102,5; d) 0,583; e) 0,911; f) 0,985; g) 2,375; h) 2,131; i) 2,621. **3.** a) 85,4; b) 52,9; c) 92,7; d) 231,9; e) 267,8; f) 252,2; g) 917; h) 735; i) 854. **4.** a) 1,844; b) 2,739; c) 2,258; d) 7,94; e) 6,63; f) 8,25; g) 0,656; h) 0,825; i) 0,927; j) 13,19; k) 11,31; l) 14,25. **5.** a) 85,7; b) 53,2; c) 92,9; d) 231,9; e) 267,7; f) 252,1; g) 914,0; h) 732,4; i) 853,5. **6.** a) 1,84; b) 2,74; c) 2,26; d) 7,94; e) 6,63; f) 8,26; g) 0,65; h) 0,82; i) 0,93; j) 13,20; k) 11,33; l) 14,26. **7.** Délka strany: 3,2 cm, 4,3 cm, 4,6 cm, 6,1 cm, 13,6 cm, 120,7 cm. Obvod: 12,8 cm, 17,2 cm, 18,4 cm, 24,4 cm, 54,4 cm, 482,8 cm.

2 Pythagorova věta

2.1 Pythagorova věta

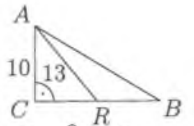
1. a) Přepona TS, $r^2 = t^2 + s^2$; b) přepona OP, $q^2 = o^2 + p^2$; c) přepona MN, $o^2 = m^2 + n^2$; d) přepona SA, $t^2 = a^2 + s^2$; e) přepona u, $u^2 = a^2 + a^2$; f) přepona r, $r^2 = v^2 + \left(\frac{z}{2}\right)^2$; g) přepona a, $a^2 = \left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2$; h) přepona u, $u^2 = m^2 + n^2$; i) přepona r, $r^2 = v^2 + x^2$. **2.** a) Přepona a, $100 = 64 + 36$; b) přepona m, $225 = 144 + 81$; c) přepona y, $289 = 225 + 64$; d) přepona t, $625 = 49 + 576$. **3.** 39 cm. **4.** A. a) 20 cm; b) 37 cm; c) 25 cm. B. a) 34 cm; b) 30 cm; c) 50 cm. **5.** Přibližně 16,64 cm. **6.** $t \doteq 33{,}12$ cm, $s \doteq 31{,}1$ cm, $o \doteq 38{,}55$ cm, $m \doteq 35{,}36$ dm, $l \doteq 25{,}46$ cm, $z \doteq 29{,}75$ cm. **7.** a) $b^2 = a^2 - c^2$, $c^2 = a^2 - b^2$; b) $m^2 = n^2 - o^2$, $o^2 = n^2 - m^2$; c) $r^2 = t^2 - s^2$, $s^2 = t^2 - r^2$; d) $z^2 = u^2 - v^2$, $v^2 = u^2 - z^2$; e) $v^2 = r^2 - \left(\frac{z}{2}\right)^2$, $\left(\frac{z}{2}\right)^2 = r^2 - v^2$. **8.** 24 cm. **9.** 28 cm. **10.** A. a) 48 cm; b) 32 dm; c) 36 cm. B. a) 42 dm;

b) 24 mm; c) 54 dm. **11.** A. $a = 32$ cm, $m = 10$ cm, $s \doteq 10{,}25$ cm. B. $d = 18$ cm, $o = 15$ dm, $u \doteq 10{,}72$ cm.

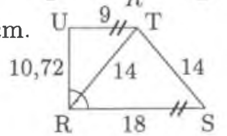
2.2 Užití Pythagorovy věty v planimetrických úlohách

1. a) Ano; b) ne; c) ano; d) ano; e) ano; f) ne; g) ano; h) ano. **2.** a) Přibližně 15,3 cm; b) 41 cm; c) přibližně 39 mm. **3.** Přibližně: a) 8,49 cm; b) 21,2 dm; c) 11,31 dm. **4.** A. Asi 15,5 dm. B. Asi 13,4 cm. **5.** $|KN| = 12$ cm. **6.** Přibližně 5,37 cm. **7.** A. $a = 15$ dm, $b = 8$ dm, $o = 46$ dm. B. $a = 5$ dm, $b = 12$ dm, $S = 60\ \mathrm{dm}^2$. **8.** a) $u \doteq 11{,}31$ cm, $S = 64\ \mathrm{cm}^2$, $o = 32$ cm; b) $a = 9$ dm, $u \doteq 12{,}73$ dm, $o = 36$ dm; c) $a \doteq 42{,}43$ cm, $S \doteq 1\,800\ \mathrm{cm}^2$, $o \doteq 169{,}72$ cm; d) $u \doteq 16{,}4$ cm, $S = 130\ \mathrm{cm}^2$, $o = 46$ cm; e) $b = 32$ cm, $S = 1\,920\ \mathrm{cm}^2$, $o = 184$ cm; f) $a = 54$ cm, $S = 3\,888\ \mathrm{cm}^2$, $o = 252$ cm; g) $a = 24$ m, $u = 25$ m, $S = 168\ \mathrm{m}^2$. **9.** Přibližně: a) 18,19 cm; b) 48,5 cm; c) 55,4 mm; d) 16,45 cm. **10.** a) $v \doteq 5{,}74$ m; b) $v = 72$ cm. c) $v \doteq 39$ mm; d) $v \doteq 4{,}98$ dm. **11.** A. $a = 8$ cm, $v \doteq 6{,}9$ cm, $S \doteq 27{,}7\ \mathrm{cm}^2$. B. $z = 16$ dm, $v = 6$ dm, $S = 48\ \mathrm{dm}^2$. **12.** a) $z \doteq 15$ cm; b) $z = 12$ cm. **13.** A. $z \doteq 26{,}8$ cm, $o \doteq 62{,}8$ cm. B. $z \doteq 21{,}9$ dm, $o \doteq 47{,}9$ dm. **14.** A. $m \doteq 13{,}3$ cm, $o \doteq 35{,}3$ cm, $S \doteq 46{,}6\ \mathrm{cm}^2$. B. $r \doteq 17{,}9$ cm, $o \doteq 46{,}9$ cm, $S \doteq 80{,}55\ \mathrm{cm}^2$.

15. $|CR| \doteq 8{,}3$ cm, $S \doteq 83\ \mathrm{cm}^2$, $a \doteq 16{,}6$ cm, $t_b \doteq 17{,}3$ cm.



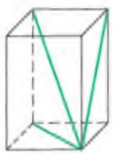
16. $|AC| \doteq 12{,}8$ cm, $|BD| \doteq 17{,}9$ cm. **17.** $v \doteq 8$ cm.



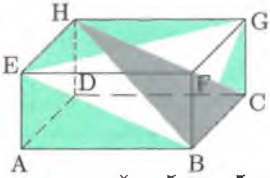
18. A. $|UT| = 9$ dm, $|RU| \doteq 10{,}72$ dm, $o \doteq 51{,}72$ dm, $S \doteq 144{,}72\ \mathrm{dm}^2$. B. $|VZ| = |XY| \doteq 7{,}28$ cm, $o \doteq 40{,}56$ cm, $S = 91\ \mathrm{cm}^2$. **19.** $a = 17$ cm, $o = 68$ cm. **20.** $u = 96$ cm. **21.** A. $|DX| = 6$ cm, $|SD| = 8$ cm, $|SX| \doteq 5{,}29$ cm. B. $r \doteq 17{,}7$ cm. **22.** a) $|SA| = 7$ cm; b) $|TA| = 5{,}6$ cm.

2.3 Užití Pythagorovy věty ve stereometrii

1.



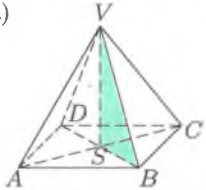
2.



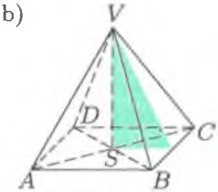
3. Kvádr se čtvercovou podstavou; rozměry 5 cm, 5 cm, 6 cm. Přibližně: a) 7,07 cm; b) 7,81 cm; c) 9,27 cm. **4.** $|BG| \doteq 8{,}5$ cm, $o \doteq 29$ cm, $S \doteq 51\ \mathrm{cm}^2$. **5.** $|HG| = 6$ cm, $|GB| \doteq 6{,}7$ cm, $|HB| \doteq 9$ cm, $o \doteq$

$\doteq 21{,}7\,\mathrm{cm}$. **6.** Délka úhlopříčky dané krychle $u \doteq 13{,}9\,\mathrm{cm}$, délka úhlopříčky nové krychle $w \doteq 20{,}8\,\mathrm{cm}$; asi o 6,9 cm.

7. a)



b)

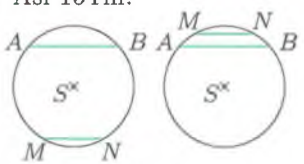


8. a) $v_s \doteq 8{,}24\,\mathrm{cm}$; b) $S_s \doteq 16{,}48\,\mathrm{cm}^2$. **9.** $|AC| = 40\,\mathrm{cm}$, $|SC| = 20\,\mathrm{cm}$, $v \doteq 56{,}6\,\mathrm{cm}$.

2.4 Užití Pythagorovy věty v praxi

1. Asi 3,35 m. **2.** Rozměry vlajky: 3 m, 2 m; $\frac{1}{4}$ modrá, $\frac{3}{8}$ červená, $\frac{3}{8}$ bílá. Modré látky $1{,}5\,\mathrm{m}^2$, bílé a červené po $2{,}25\,\mathrm{m}^2$. **3.** O 10 m. **4.** Asi 28,3 cm. **5.** Přibližně 2,4 m. **6.** Délka štaflí je asi 190 cm; ano. **7.** Asi 578 mm. **8.** a) Asi $2{,}6\,\mathrm{m}^3$ vzduchu; b) asi $11{,}2\,\mathrm{m}^2$. **9.** 16 m. **10.** 16 cm. **11.** Asi 9,2 m. **12.** Asi 154 m.

13. Buď asi 12,2 cm nebo 1,6 cm.



14. Asi 200 m.

2.5 Pythagorejské trojúhelníky

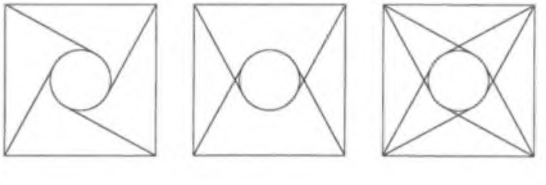
1. Např. $(3,4,5)$; $(6,8,10)$; $(9,12,15)$; $(30,40,50)$; $(33,44,55)$; $(75,100,125)$; $(21,28,35)$; $(66,88,110)$; $(69,92,115)$; $(300,400,500)$ … **2.** $(12,16,20)$; $(15,20,25)$; $(18,24,30)$. **4.** A. a) 8; b) 5; c) 15; d) 8; e) 20. B. a) 15; b) 24; c) 20; d) 30; e) 21.

3 Kružnice

3.1 Thaletova kružnice

1. 3 cm. **2.** b) $|\sphericalangle AXB| = |\sphericalangle AYB|$; c) $|\sphericalangle ASB| = 2|\sphericalangle AYB|$. **3.** Trojúhelník XYZ je rovnoramenný, $|XZ| = |YZ|$. **4.** $GQ \perp KL$. **5.** $|AQ| = |BQ| \doteq 5{,}7\,\mathrm{cm}$.

6. Např.



3.2 Délka kružnice

1. $o \doteq 8 \cdot 2{,}3\,\text{cm} = 18{,}4\,\text{cm}$. **2.** Asi 18,85 cm. **3.** Obvod o_1 šestiúhelníku asi 18 cm, obvod o_2 osmiúhelníku asi 18,4 cm, obvod o_3 dvanáctiúhelníku asi 18,6 cm, délka o_k kružnice k asi 18,85 cm. $o_1 < o_2 < o_3 < o_k$. **4.** Přibližně 22 km. **5.** b) Asi 18,85 cm. **6.** Asi 17 cm. **7.** Délka polokružnice ADC je rovna délce čáry ABC. **8.** Asi 6,37 m. **9.** Jeden závit má délku přibližně 31,4 cm. Ze 100 m drátu vznikne asi 318 závitů. **10.** a) Obvody útvarů C, E se skládají ze šesti polokružnic, obvody útvarů A, D, F z osmi polokružnic, obvod útvaru B z deseti polokružnic. b) Stejný obsah mají útvary A a D, B a C.

3.3 Rektifikace kružnice

2. a) Přibližně 35,7 dm; b) délka l řemene: $4d + \pi \cdot d = d(4 + \pi)$.

3.4 Délka oblouku kružnice

1. $o_m \doteq 25{,}13\,\text{cm}$, $|\overset{\frown}{AB}| \doteq 2{,}09\,\text{cm}$. **2.** a) Asi 2,09; b) délky oblouků se rovnají. **3.** a) Ano; b) obě mince mají obvod téže délky; c) mince se odvalila polovinou svého obvodu, ale současně se „do protisměru“ stočil i okraj první mince, po níž se druhá kutálí.

4 Souhrnná cvičení I

1. $1\,s^2 \doteq 3{,}594\,816\,\text{m}^2 \doteq 3{,}6\,\text{m}^2$, 1 korec $\doteq 2\,875{,}852\,8\,\text{m}^2 \doteq 2\,876\,\text{m}^2$, 1 jitro $\doteq 5\,751{,}705\,6\,\text{m}^2 \doteq 5\,752\,\text{m}^2$.

2. A.

	4,28		
	2,07	2,07	
1,44	1,44	1,44	
1,2	1,2	1,2	1,2

B.

	22 518,00		
	150,06	150,06	
12,25	12,25	12,25	
3,5	3,5	3,5	3,5

3. a) 4; b) 7; c) 2; d) $\frac{1}{2}$; e) 8; f) 17. **4.** a) 3,5 cm; b) 19 mm; c) 0,041 m. **5.** 9 900. **6.** Kdyby měla Česká republika tvar čtverce, jeho hranice by měřila přibližně 1 124 km. **7.** a) 65,181; b) 65,197; c) 65,213. **8.** $o = 64\,\text{m}$, $S = 144\,\text{m}^2$. 9. a) Přibližně $1\,152\,\text{dm}^2$; b) 4 plechovky. **10.** a) $6{,}25\,\text{cm}^2$, $4\,\text{cm}^2$, $2{,}25\,\text{cm}^2$; b) $6{,}25 = 4 + 2{,}25$, obsah trojúhelníku nad přeponou je roven součtu obsahů trojúhelníků nad odvěsnami trojúhelníku ABC. **11.** Druhá úhlopříčka má délku 77 cm, $S = 1\,848\,\text{cm}^2$. Spotřeba papíru je $19\,404\,\text{cm}^2$. **12.** 37 m. **13.** Asi 106,8 cm. **14.** Přibližně 4,47 cm. **15.** a) $168\,\text{m}^3$; b) $552\,\text{m}^3$. **16.** $o = 24\,\text{cm}$, $S = 36\,\text{cm}^2$. **17.** Trojúhelník je pravoúhlý. Dvě těžnice jsou přeponami pravoúhlých trojúhelníků, jejichž odvěsny znáte; $t_1 \doteq 12{,}8\,\text{cm}$, $t_2 \doteq 10{,}8\,\text{cm}$. **18.** b) $|\sphericalangle AXB| = 60°$; c) $|AB| \doteq 5{,}2\,\text{cm}$, $|SX| \doteq 5{,}8\,\text{cm}$, $S \doteq 15{,}6\,\text{cm}^2$. **19.** b) Asi 5,8 cm. **20.** a) Asi 3 770 m;

b) asi 714 otoček; c) 500 : 357 (tj. asi 1,4; porovnejte s poměrem průměrů obou kol). **21.** a) $2a^2 \cdot \sqrt{3}$, pro $a = 8\,\text{cm}$ je $S \doteq 222\,\text{cm}^2$; b) $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{3} \doteq 241\,\text{cm}^3$ (toto jste se ještě neučili, inspiraci najdete v herně v učebnici ze 6. ročníku nebo v Tabulkách pro ZŠ). **22.** Čtverec $QLPN$. **23.** Mnohostěn ohraničený šesti shodnými čtverci a osmi shodnými rovnostrannými trojúhelníky, tedy čtrnáctistěn.

5 Třetí mocnina a odmocnina

1. a) 27; −27 000; 0,027; $\frac{1}{27}$; b) −64; 64 000 000; $\frac{1}{64}$; −0,000 064; c) 125; $-\frac{27}{125}$; 125 000; −0,125. **2.** a) 37; b) $\frac{12}{7}$; c) 6; d) −1; e) −64; f) −432. **3.** a) 17,55 g; b) 1 142,4 g. **4.** a) 32 800; 32,8; 0,032 8; 32 800 000; b) 66 400 000; 66 400; 0,066 4; 91,1; c) 5,83; 0,012 2; 2,86; 22 200. **5.** a) 91 125 000 000; b) 373 248 000 000 000; c) 185,193.

6.

x	−2	−1	0	1	2	0,3	$\frac{1}{2}$
x^3	−8	−1	0	1	8	0,027	$\frac{1}{8}$
$3x$	−6	−3	0	3	6	0,9	$\frac{3}{2}$

7. a) 12 167; 12,167; 0,012 167; 12 167 000 000; b) 39 304; 91,125; 0,226 981; 157 464 000 000; c) 135 005 697; 395,446 904; 0,022 188 041; 5 832 000 000. **8.** a) 94 818 816 000; 94 818,816; 94,818 816; 94 818 816; b) 13 481 272 000; 42 144,192; 575,930 368; 112 678 587; c) 32 461 759 000; 2 685,619; 761,048 497; 36 594 368. **9.** a) 2; 20; 0,2; b) 5; 50; 0,5; c) 0,4; 30; 0,3. **10.** a) 48; 20; 8; b) 40; 160; 70. **11.** a) 3,17; 5,05; 7,03; 8,84; b) 36,3; 0,617; 82,7; 0,093 9; c) 17,1; 23,5; 0,909; 1,44; d) 1,47; 1,69; 1,78; 1,92. **12.** 20,6 dm^3.

6 Mocniny s přirozeným mocnitelem

6.1 n-tá mocnina čísla a

1. a) 8^6; b) $(-5)^5$; c) $(-0,5)^4$; d) $\left(\frac{2}{3}\right)^5$; e) $(2a)^6$; f) $(-0,1a)^3$; g) $(a+1)^4$; h) $(a-2b)^3$. **2.** a) $12 \cdot 12 \cdot 12$; b) $(-2,4)(-2,4)(-2,4)(-2,4)$; c) $5c \cdot 5c \cdot 5c \cdot 5c \cdot 5c$; d) $(u-4)(u-4)(u-4)$. **3.** a) $0^7 = 0$; b) $(-1)^4 = 1$; c) $7^6 = 117\,649$; d) $(-4)^5 = -1\,024$; e) $(0,5)^4 = 0,062\,5$; f) $(-0,3)^3 = -0,027$. **4.** a) 0; b) 1; c) 1; d) 1 000 000; e) 60 466 176; f) −128; g) 2,488 32; h) −40,841 01. **5.** a) ano; b) ne; c) ano; d) ne. **6.** Záporná čísla jsou v úlohách c), d), f), h). **7.** a) 6 250; b) −3 645; c) 6,25; d) 64; e) 251; f) 1 944. **8.** a) 145; b) −17; c) −586; d) −100. **9.** a) −64; b) 128; c) 15; d) 1.

6.2 Sčítání a odčítání mocnin s přirozeným mocnitelem

1. a) $3a^2$; b) $5b^2+2b^3$; c) a^4+3a^2; d) $4a^2+10b^2$. **2.** a) $3a^3+9b^2-16c^2$; b) $4a^3-13a^2-4a$; c) $0{,}8x^2-0{,}8y^3-1{,}9z^4$; d) $-0{,}59x^3-9{,}1x^2-1{,}66y^2$. **3.** a) $x^5+\frac{7}{15}x^4$; b) $\frac{1}{20}x^3-\frac{1}{6}x^2$. **4.** a) a^2b-ab^2; b) $6a^2-10a^2b$; c) $-a^2b$; d) $8a^2b^3-3a^3b^2-9ab^3$. **5.** a) $2x^3-4x^2$; b) $3xy^2+2x^2y$; c) $-26x^2$; d) $-10x^2-a^2x$. **6.** a) $4x^2+y^2$; b) $-31xy^2$; c) $-4x^5-12x^3+$ $+13x^2$; d) $3xy^2-23x^2y$.

6.3 Násobení a dělení mocnin s přirozeným mocnitelem

1. a) x^8; b) y^9; c) $6x^9$; d) $-60y^{10}$. **2.** a) $20a^3b^3$; b) $-6a^3b^5$; c) $48a^3b^5c^7$; d) $49abc$. **3.** a) $48a^5x^4$; b) $144x^7y^7z^7$; c) $81a^4b^4$; d) $8x^6y^5z^3$. **4.** a) 2^{10}; b) 10^{12}; c) $(1-b)^5$; d) $(2a+3b)^7$. **5.** a) 2^5; b) $(a+5)^5$; c) 2^{n+2}; d) $(a-b)^{n+3}$. **6.** a) 5^2; b) $(-3)^3$; c) $1{,}2^4$; d) $(-0{,}8)^5$. **7.** a) x^3, $x\neq 0$; b) $4x^2$, $x\neq 0$; c) $-4x$, $x\neq 0$; d) $\frac{x^2}{2}$, $x\neq 0$; **8.** a) 1, $a\neq 0$; b) $\frac{1}{9}$, $a\neq 0$; c) $4a^2$, $a\neq 0$, $b\neq 0$; d) $-6ab^2$, $a\neq 0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$. **9.** a) $\frac{1}{z^3}$, $z\neq 0$; b) $\frac{3}{y^2}$, $y\neq 0$; c) $-\frac{1}{3x}$, $x\neq 0$; d) $\frac{7}{a^4}$, $a\neq 0$. **10.** a) $\frac{y^2}{2x}$, $x\neq 0$; b) $\frac{2}{5x^2}$, $x\neq 0$, $y\neq 0$; c) $12x^2z$, $x\neq 0$, $y\neq 0$; d) $\frac{-24z^3}{y^2}$, $x\neq 0$, $y\neq 0$, $z\neq 0$. **11.** a) $\frac{b}{a^2}$, $a\neq 0$, $b\neq 0$; b) $\frac{-1}{3a}$, $a\neq 0$, $b\neq 0$; c) $\frac{4b^3}{25a}$, $a\neq 0$, $b\neq 0$; d) $\frac{2b}{3a^2c^3}$, $a\neq 0$, $b\neq 0$. **12.** a) $(a+2)^2$, $a\neq -2$; b) $(1+a)^4$, $a\neq -1$; c) $3x(x-3)^2$, $x\neq 0$, $x\neq 3$; d) $\frac{(y+4)^3}{5y}$, $x\neq 0$, $y\neq 0$, $y\neq -4$. **13.** a) a, $a\neq 0$; b) 2, $b\neq 0$; c) $\frac{3}{b}$, $a\neq 0$, $b\neq 0$; d) $\frac{4}{3b^3}$, $a\neq 0$, $b\neq 0$. **14.** a) $3x(x-1)^3$, $x\neq 0$, $x\neq 1$; b) $4x^2$, $x\neq 1$; c) $\frac{y+3}{2x}$, $x\neq 0$, $y\neq -3$; d) $\frac{2(y-2)^3}{z(x+1)^2}$, $z\neq 0$, $x\neq -1$, $y\neq 2$.

6.4 Mocnina součinu a podílu

1. a) $36a^2$; b) $-27b^3$; c) a^7b^7; d) $64a^6b^6$. **2.** a) $0{,}0001x^4$; b) $0{,}04x^2$; c) $\frac{1}{32}y^5$; d) $\frac{-8}{27}y^3$. **3.** a) $a^8(b-1)^8$; b) $(a+1)^3(b-2)^3$; c) $64a^6(b+5)^6$; d) $-243a^5(b-4)^5$. **4.** a) $\frac{49a^2}{9}$; b) $\frac{9a^2}{64}$; c) $\frac{-64}{125a^3}$, $a\neq 0$; d) $\frac{32}{243a^5}$, $a\neq 0$. **5.** a) $\frac{81x^2y^2}{64}$; b) $\frac{27x^3}{64y^3}$, $y\neq 0$; c) $\frac{(x+1)^4}{256}$; d) $\frac{(3-x)^5}{32y^5}$, $y\neq 0$.

6. a) $\frac{b^2(a-2)^2}{a^2}$, $a \neq 0$; b) $\frac{a^4(b+1)^4}{16b^4}$, $b \neq 0$; c) $\frac{-32b^5(a+1)^5}{a^5}$, $a \neq 0$; d) $\frac{8a^3(b-3)^3}{27b^3}$, $b \neq 0$.

6.5 Umocňování mocnin

1. a) 64; b) 64; c) −8; d) 512. 2. a) $25x^4$; b) $25x^4$; c) $-125x^6$; d) $25x^6$. 3. a) $125a^3b^6$; b) $-32a^{15}b^{10}$; c) $81a^{12}b^8$; d) $a^{21}b^{28}$. 4. a) $\frac{64a^4}{25}$; b) $\frac{81a^8}{256}$; c) $-\frac{216}{343a^6}$, $a \neq 0$; d) $\frac{16a^4}{625b^8}$, $b \neq 0$. 5. a) $6^n a^{2n}$; b) $\frac{1}{a^{3n}}$, $a \neq 0$; c) $49a^6b^{2n}$; d) $a^{12}b^{3n}c^{3n+6}$. 6. a) $3^6a^2b^6 = 729a^2b^6$; b) $(-2)^3 \cdot 3^6 \cdot a^3b^6 = -5\,832a^3b^6$; c) $(-2)^6 \cdot 3^3 \cdot a^6b^3 = 1\,728a^6b^3$; d) $(-2)^9 \cdot 3^3a^9b^6 = -13\,824a^9b^6$. 7. a) $\frac{9a^2b^{10}}{4c^6}$, $c \neq 0$; b) $\frac{-8a^9b^3}{125c^6}$, $c \neq 0$; c) $\frac{64a^6(b-1)^3}{c^3}$, $c \neq 0$; d) $\frac{25a^6(b+1)^4}{9c^{10}}$, $c \neq 0$.

6.6 Zápis čísel v desítkové soustavě pomocí mocnin deseti

1. a) $2 \cdot 10^5$; b) $5 \cdot 10^7$; c) $3{,}5 \cdot 10^5$; d) $7{,}6 \cdot 10^8$. 2. a) $1{,}2 \cdot 10^5$ km; b) $2{,}175 \cdot 10^6$ km^2; c) $7 \cdot 10^6$ čípků; $1{,}3 \cdot 10^8$ tyčinek; d) $5{,}6 \cdot 10^9$ obyvatel. 3. a) $6{,}38 \cdot 10^6$ m; b) $4{,}01 \cdot 10^7$ m; c) $3{,}61 \cdot 10^8$ km^2; d) $1{,}08 \cdot 10^{12}$ km^3. 4. $2{,}555 \cdot 10^9$ tepů. 5. $1{,}908 \cdot 10^{24}$ t. 6. $9{,}460\,8 \cdot 10^{15}$ m.

7 Kruh. Válec

7.1 Obsah kruhu

1. Asi 19,63 cm^2. 2. c) $S_C = 49$ cm^2, $S_K \doteq 50{,}27$ cm^2. 3. Asi 89 m^2 dlaždic, celkem asi 23 140 Kč. 4. Obsah obdélníku 768 cm^2, obsah všech podložek přibližně 603 cm^2. Odpad 21 % plechu. 5. Ve všech případech 1 : 1.

7.2 Části kruhu

1. Asi 7,85 cm^2. 2. $\varphi = 90°$. 3. a) Asi 21,2 cm^2; b) $|AB| \doteq 4{,}24$ cm; c) asi 2,57 cm^2; d) $S_K : S_C \doteq 14 : 9$; e) $o_K : o_C \doteq 19 : 17$. 4. a) $o \doteq 31{,}4$ cm; b) $S \doteq 57$ cm^2. 5. b) $|XY| = 4{,}8$ cm; c) $|\sphericalangle SXO| = |\sphericalangle SYO| = \mathrm{R}$, $|\sphericalangle YOX| \doteq 74°$, $|\sphericalangle XSY| \doteq 106°$; d) 6,7 cm^2. 6. $S_p \doteq 28{,}27$ cm^2, $s \doteq 7{,}62$ cm, $S_{pl} \doteq 72{,}45$ cm^2, $S \doteq 100{,}7$ cm^2. 7. Platí.

7.3 Rotační válec

1. Asi 402,1 cm^3. 2. a) Asi 348 cm; b) asi 91,5 cm^3; c) 13 725 cm^3, tj. asi 13,72 l. 3. a) Asi 1 086 cm^3; b) asi 136 cm^3. 4. a) Poloměr dna asi 4,7 cm, výška plechovky asi 14,1 cm. b) Na jednu plechovku

je třeba asi 555 cm^2 plechu (tj. 70 % celkové spotřeby plechu), celkem 793 cm^2 plechu. Z 10 m^2 plechu je 126 plechovek. **5.** a) Asi 228 m^2 krytiny, hliníkového plechu minimálně 252 m^2; b) na trojúhelníkové štíty 32 m^2, na půlkruhové asi 50 m^2; c) 960 m^3, asi 1 140 m^3. **6.** Přibližně: a) 471 dm^2; b) 78,5 dm^2; c) středový úhel $\omega = 145°$; 734 l.

8 Souhrnná cvičení II a testy

1. Asi 609 cm^3. **2.** Číslo 5. **3.** 19,5 hl. **4.** a) 37 856 mm^2, 421 824 mm^3; b) 143,36 cm^2, 98,304 cm^3; c) 0,028 35 m^2, 0,000 273 m^3.

5.

x	3,2	0,28	21	14,2	34,73
x^2	10,24	0,078	441	201,64	1 206,173
$2x$	6,4	0,56	42	28,4	69,46
x^3	32,768	0,022	9 261	2 863,288	41 890,384
$3x$	9,6	0,84	63	42,6	104,19
$\sqrt{x}$	1,789	0,529	4,583	3,768	5,893

6. Přibližně: 1,47; 0,654; 2,76; 2,41; 3,27. **7.** $S_{pl} \doteq 251{,}3\,dm^2$, $S_p \doteq 50{,}3\,dm^2$, $S \doteq 352\,dm^2$. **8.** Na rouru asi 264 dm^2, celkem 304 dm^2 plechu. **9.** a) Povrch haly tvoří polovina pláště rotačního válce a dva polokruhy; $S \doteq 226{,}2\,m^2 + 113\,m^2$, tj. 339,2 m^2; b) asi 679 m^3 vzduchu; c) asi za 5,6 h. **10.** 36 799,5 kg, tj. asi $3{,}7 \cdot 10^4$ kg. **11.** a) $<$; b) $>$; c) $<$; d) $=$. **13.** a) 2^1, 2^2, 2^3, 2^9; b) 2^0; c) $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{63} = 2^{64} - 1 \doteq 1{,}84 \cdot 10^{19}$; d) $7{,}912 \cdot 10^{11}$ t; e) 3 956.

Výsledky a hodnocení testů

Za každou správnou odpověď získáte jeden bod. V testu č. 1 a č. 3 můžete získat nejvýše 28 bodů, v testu č. 2 10 bodů, v testu č. 4 10 bodů. Pokud vyřešíte více než 75 % úloh správně, rozumíte látce velmi dobře. Kdo dosáhne 50 % až 75 % možných bodů, může být ještě spokojen, ale kdo jich získá méně, měl by si ještě jednou učebnici pozorně projít, aby mu nedostatky nebránily v příštím studiu.

Test č. 1

1. 12. **2.** 0,1. **3.** a) 131 044; b) 13,104 4; c) 13 104 400; d) 329 476; e) 3 294,76; f) 32,947 6. **4.** a) 27,24; b) 8,6; c) 2,724; d) 86; e) 0,86; f) 0,272 4. **5.** 403 458,581 8. **6.** a) 65,59; b) 8,09; c) 2,87; d) 0,98. **7.** a) $a^4 + 3a^2$; b) $10a^3b^7$; c) $-4x^2$, $x \neq 0$; d) $\frac{1}{x^3}$, $x \neq 0$; e) $125a^3b^6$; f) $\frac{64a^6}{25}$. **8.** a) $3{,}5 \cdot 10^{10}$; b) $6{,}8 \cdot 10^3$; c) $1{,}1 \cdot 10^7$.

Test č. 2

1. a) $60°$; b) asi $15{,}6\,\mathrm{cm}^2$. 2. Dvě kružnice; $l(Q, 1\,\mathrm{cm})$ a $l'(Q, 5\,\mathrm{cm})$. 3. $|RM| = |RN| \doteq 5{,}2\,\mathrm{cm}$. 4. Přibližně $230°$. 5. Přibližně $6{,}9\,\mathrm{cm}$. 6. Povrch krychle $S = 6a^2$; obsah tří kruhů $S' = \frac{3}{4} \cdot a^2 \cdot \pi$. Poměr povrchu krychle k polepené části je $8 : \pi$. Polepeno je asi $39\,\%$ povrchu krychle.

Test č. 3

1. Platí a), b), d). 2. Platí d). 3. a) ab^2; b) $1{,}5x + 0{,}5x^2$; c) $10m^2 - 7n$; d) $2m^2$. 4. a) $12a^2b^4$; b) $3a^2$, $a \neq 0$, $b \neq 0$; c) $\frac{1}{4}b^2$, $a \neq 0$, $b \neq 0$; d) $3a(a-1)$, $a \neq 0$, $a \neq 1$, $b \neq -1$. 5. a) $27x^6y^3z^0$; b) $4x^8y^9$; c) $x^6y^{2n}z^{2n+6}$; d) $\frac{4x^2y^6}{9z^4}$, $z \neq 0$; e) $\frac{125x^6y^{3n}}{(z+1)^3}$, $z \neq -1$; f) $8x^6y^{12}z^3$, $x \neq 0$, $z \neq 0$. 6. a) $7 \cdot 10^4$; b) $6{,}6 \cdot 10^7$; c) $1{,}25 \cdot 10^6$; d) $3{,}08 \cdot 10^8$.

Test č. 4

1. b) $s \doteq 19{,}2\,\mathrm{cm}$; c) $S \doteq 2\,036\,\mathrm{cm}^2$; d) $V \doteq 6\,786\,\mathrm{cm}^3$. 2. Rovina procházející dvojicí nejdelších hran kvádru a dvojicí stěnových úhlopříček ve stěnách se zbývajícími rozměry. Strana čtverce má délku $10\,\mathrm{cm}$. 3. Strana kužele $s = 10\,\mathrm{cm}$; obvod jeho podstavy $o \doteq 42\,\mathrm{cm}$; poloměr $r \doteq 6{,}7\,\mathrm{cm}$; a) $S_\mathrm{p} \doteq 141\,\mathrm{cm}^2$; b) $v \doteq 7{,}4\,\mathrm{cm}$. 4. $|BV| \doteq 11{,}2\,\mathrm{cm}$; $|DV| \doteq 12{,}2\,\mathrm{cm}$; $|AC| \doteq 8{,}6\,\mathrm{cm}$; $|CV| \doteq 13{,}2\,\mathrm{cm}$.

PhDr. Alena Šarounová, CSc., PhDr. Ivan Bušek,
Mgr. Jitka Růžičková, Věnceslava Väterová

Matematika 8, I. díl

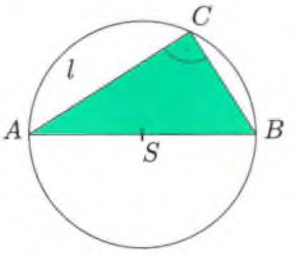
Obálku navrhla Miroslava Jakešová
Ilustroval Martin Mašek
Vydalo nakladatelství Prometheus, spol. s r. o.,
Žitná 25, 117 01 Praha 1, v roce 1999
http://www.prometheus-nakl.cz
Edice Učebnice pro základní školy
Odpovědná redaktorka Mgr. Vladimíra Šilhánková
Sazbu a technické kresby programy TEX a METAFONT
připravil Jiří Rákosník
Vytiskly Tiskárny Havlíčkův Brod, a. s.,
Husova 1881, 580 01 Havlíčkův Brod

Dotisk 1. vydání

97 11 277

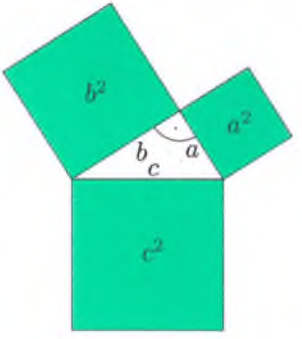
ISBN 80–7196–124–8

PRAVOÚHLÝ TROJÚHELNÍK



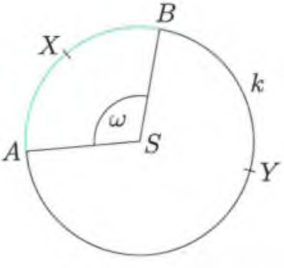
Thaletova kružnice

$l(S, |SA|)$



Pythagorova věta

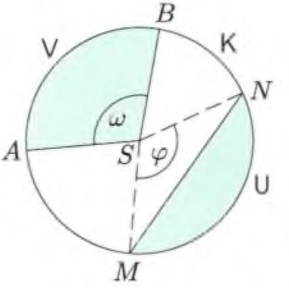
$c^2 = a^2 + b^2$



Kružnice $k(S, |SA|)$

oblouky ... $\widehat{AXB}$, $\widehat{AYB}$

$\omega = \sphericalangle ASB$ ... středový úhel



Kruh $\mathsf{K}(S, |SA|)$

V ... kruhová výseč

U ... kruhová úseč

Délka kružnice $k(S, r)$:

$$o = 2\pi r$$

Délka oblouku AXB:

$$|\widehat{AXB}| = \frac{o \cdot \omega}{360} = \frac{\pi r \cdot \omega}{180}$$

Obsah kruhu $\mathsf{K}(S, |SA|)$:

$$S_{\mathsf{K}} = \pi r^2$$

Obsah kruhové výseče V:

$$S_{\mathsf{V}} = \frac{\pi r^2 \cdot \omega}{360}$$

Obsah kruhové úseče U:

$$S_{\mathsf{V}} - S_{\triangle MSN} = \frac{\pi r^2 \cdot \varphi}{360} - S_{\triangle MSN}$$

PROMETHEUS
97 11 277

ISBN 80-7196-124-8