PROMETHEUS®

Prima

Sekunda

Tercie

Kvarta

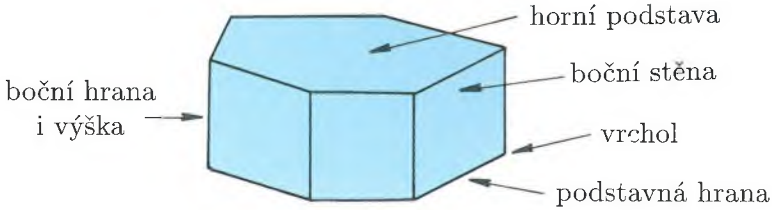
Matematika

Hranoly

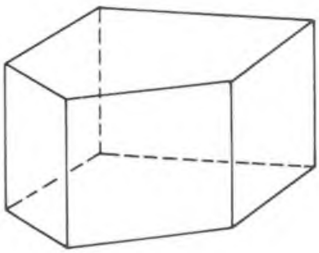
Jč

m+f

HRANOL



trojboký hranol



pětiboký hranol

$$S = 2 \cdot S_p + S_{pl}$$
$$V = S_p \cdot v$$

S_p … obsah podstavy
S_{pl} … obsah pláště
v … výška hranolu

S … **povrch** hranolu

jednotky:

$1\,\mathrm{km}^2 = 1\,000\,000\,\mathrm{m}^2$ $\quad$ $1\,\mathrm{m}^2 = 100\,\mathrm{dm}^2$
$1\,\mathrm{dm}^2 = 100\,\mathrm{cm}^2$ $\quad$ $1\,\mathrm{cm}^2 = 100\,\mathrm{mm}^2$

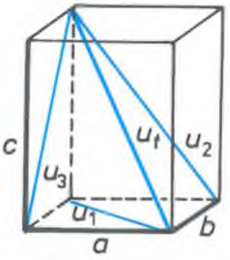
V … **objem** hranolu

jednotky:

$1\,\mathrm{km}^3 = 1\,000\,000\,000\,\mathrm{m}^3$ $\quad$ $1\,\mathrm{m}^3 = 1\,000\,\mathrm{dm}^3$
$1\,\mathrm{dm}^3 = 1\,000\,\mathrm{cm}^3$ $\quad$ $1\,\mathrm{cm}^3 = 1\,000\,\mathrm{mm}^3$
$1\,\mathrm{hl} = 100\,\mathrm{l}$ $\quad$ $1\,\mathrm{l} = 10\,\mathrm{dl}$
$1\,\mathrm{dl} = 10\,\mathrm{cl}$ $\quad$ $1\,\mathrm{cl} = 10\,\mathrm{ml}$
$1\,\mathrm{l} = 1\,\mathrm{dm}^3$ $\quad$ $1\,\mathrm{ml} = 1\,\mathrm{cm}^3$

KVÁDR

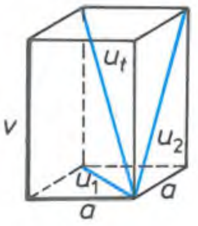
obdélníková podstava



$S = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$

$V = a \cdot b \cdot c$

čtvercová podstava



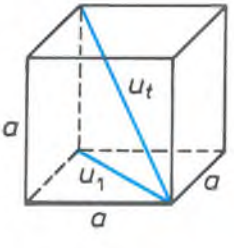
$S = 2 \cdot a^2 + 4 \cdot a \cdot v$

$V = a^2 \cdot v$

u_1, u_2, u_3 ... stěnové úhlopříčky

u_t ... tělesová úhlopříčka

KRYCHLE



$S = 6 \cdot a^2$

$V = a \cdot a \cdot a$

PRAVIDELNÝ HRANOL

podstava je pravidelný mnohoúhelník

RNDr. Jiří HERMAN, Ph.D.
PaedDr. Vítězslava CHRÁPAVÁ
Mgr. Eva JANČOVIČOVÁ
Doc. RNDr. Jaromír ŠIMŠA, CSc.

Prima
Sekunda
Tercie
Kvarta

Matematika

Hranoly

PROMETHEUS

Učebnice byla zpracována ve spolupráci s JČMF.

Lektorovali RNDr. Jura Charvát, CSc., a RNDr. Milan Ryšavý.

Koordinátor učebnic matematiky pro nižší třídy víceletých gymnázií
doc. RNDr. Jindřich Bečvář, CSc.

Revizi výsledků provedl RNDr. Jura Charvát, CSc.

Schválilo MŠMT ČR dne 8. 3. 2002, č. j. 14519/2002–22,
k zařazení do seznamu učebnic pro základní školy a víceletá gymnázia jako součást ucelené řady učebnic pro vyučovací předmět matematika s dobou platnosti šest let.

2. vydání

ISBN 80-7196-257-0

OBSAH

Na vysvětlenou ...

Šestý sešit z řady učebnic matematiky pro nižší třídy gymnázií, popř. výběrové třídy základních škol, který právě dostáváte do rukou, je věnován zkoumání důležitých prostorových útvarů – *hranolů*.

Připomínáme, že cílem našeho projektu je vytvořit ve formě řady asi 15 sešitů úplnou a soběstačnou pomůcku pro výuku matematiky v prvních třech ročnících víceletého gymnázia. Proto jsou sešity sestaveny tak, aby je bylo možno použít jak při výkladu nové látky či jejím procvičování ve vyučovacích hodinách, tak i při domácí přípravě žáků. Kromě toho věříme, že bohatý příkladový materiál usnadní učitelům zadávání domácích úkolů a umožní žákům důkladně si probrané učivo procvičit. Zvídaví žáci také najdou mezi příklady řadu obtížnějších úloh.

Zmíněné cíle ovlivnily rozsah i formu textu. Zopakujme stručně, jakým způsobem:

Výklad nového učiva je zpravidla uveden motivující otázkou (značenou otazníkem na okraji stránky). Nové pojmy, poznatky a pravidla jsou pak podrobně vysvětlovány a zdůvodňovány tak, aby je žák v případě potřeby mohl zvládnout samostatným studiem. Nezakrýváme, že naše učebnice jsou psány pro žáky s hlubším zájmem o matematiku a další přírodovědné předměty. Především těm jsou určeny i drobnějším písmem (petitem) tištěné pasáže, které přesahují standardní rámec učiva.

V tomto sešitě klademe velký důraz na rozvíjení prostorové představivosti žáků. Proto hodně místa věnujeme netradičním úlohám, které by tomu mohly napomoci. Klíčem k řešení některých úloh je vhodný názorný náčrtek situace v prostoru. To je důvod, proč důkladně vysvětlujeme, jak takové náčrtky kreslit.

Rovněž považujeme za důležité, aby se žáci naučili vlastní řešení srozumitelně a přehledně zapisovat. Proto jsme do učebnice zařadili ukázky „opsané“ z žákovských sešitů, které by mohly žákům posloužit jako vzory takových zápisů.

Abychom žákům prostorové vztahy lépe přiblížili, požadujeme od nich často, aby z papíru vystřihli nějaký útvar a z něj pak složili model tělesa. V těchto místech je na okraji stránek umístěn znak nůžek. Mnohdy budou žáci potřebovat i milimetrový papír nebo lepidlo.

Důležité výsledky výkladu jsou shrnuty ve *větách*, které jsou graficky vyznačeny *rámečky*. Neměl by to být v žádném případě signál k bezduchému memorování, ale výzva k tomu, aby se žáci nad obsahem těchto vět důkladně zamysleli a správně je pochopili. To lze kontrolovat *průběžnými úkoly*, v textu značenými ➡. Ke kontrole zvládnutí větších celků jsou určena *cvičení* uváděná zpravidla za každou kapitolou. Závěrečná *souhrnná cvičení* tvoří vlastně sbírku úloh k tématu celého sešitu.

Všechny úkoly, cvičení i souhrnná cvičení jsou až na několik výjimek opatřeny na konci sešitu výsledky.

Příklady, které jsou určeny k samostatné práci žáků, označujeme někdy (pro lepší orientaci) těmito symboly s uvedenými významy:

□ – lze řešit zpravidla zpaměti
* – obtížnější příklad
** – velmi obtížný příklad
■ – zajímavý příklad (podle našeho názoru)

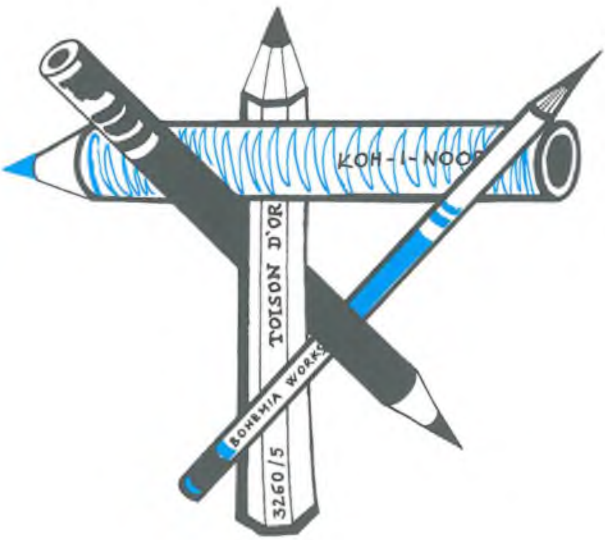
Na závěr připojujeme přehled titulů předchozích sešitů naší řady:

Opakování z obecné školy
Dělitelnost
Osová a středová souměrnost
Racionální čísla. Procenta
Trojúhelníky a čtyřúhelníky

ÚVOD

Pojem *hranolu*, který už znáte, poprvé přesně popsali řečtí matematikové *Eukleides* a *Archimedes* už ve 3. století před Kristem. Dospěli k němu při odvozování pravidel pro výpočet objemů „hranatých" těles, které dnes nazýváme *mnohostěny*. Různá, více či méně přesná pravidla pro výpočet objemů těles a obsahů ploch, které je omezují, však byly známy mnohem dříve obyvatelům starého Egypta, Mezopotámie a Číny. Potřebovali je v každodenní praxi, zejména při stavebních pracích. Jistě pochopíme, že například egyptské stavitele zajímal odhad množství kamene potřebného ke stavbě pyramid.

Dříve než se naučíme počítat *povrch* a *objem* hranolů, seznámíme se s těmito tělesy blíže. Abychom mohli lépe zkoumat tvar a vzájemnou polohu různých prostorových útvarů, naučíme se kreslit názorné obrázky těles. (Prohlédněte si popletený obrázek čtyř tužek.) Dozvíme se také něco o *sítích* hranolů. Tyto sítě mají praktický význam při průmyslové výrobě různých krabiček a obalů. My je využijeme nejen ke zhotovování pěkných papírových modelů, ale i k řešení zajímavých úloh o stěnách hranolů.

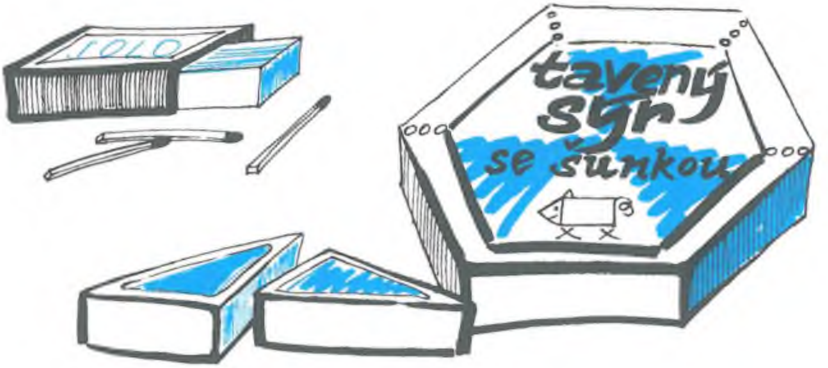


1 HRANOL, KVÁDR, KRYCHLE

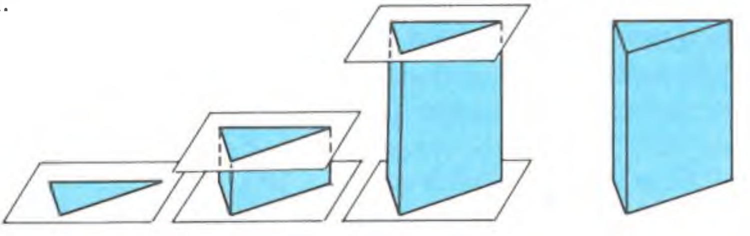
V úvodní kapitole si připomeneme základní poznatky o *hranolech*.

Co již víme o *hranolu*? ?

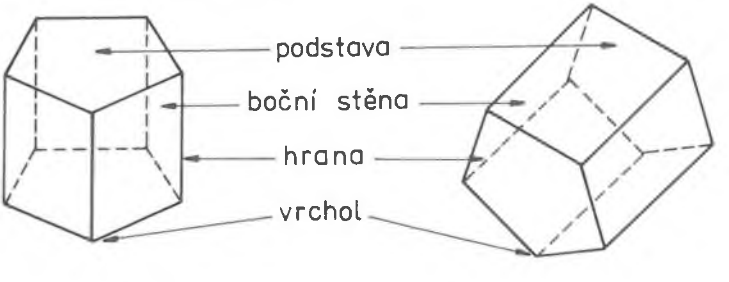
Předměty na následujícím obrázku mají tvar hranolu.



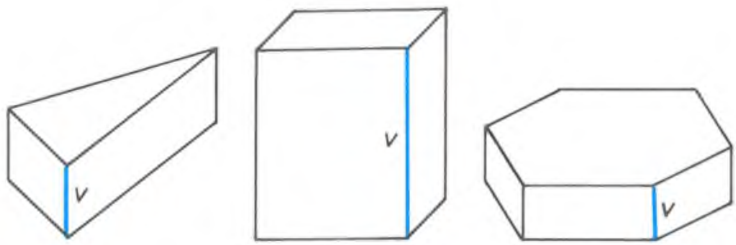
Zopakujeme, jak hranol vzniká: Ve vodorovné rovině sestrojíme mnohoúhelník. Tuto rovinu i s mnohoúhelníkem budeme „svisle zvedat“ do určité výšky. „Zvedaný“ mnohoúhelník při tom zaplní část prostoru, které říkáme **hranol**.



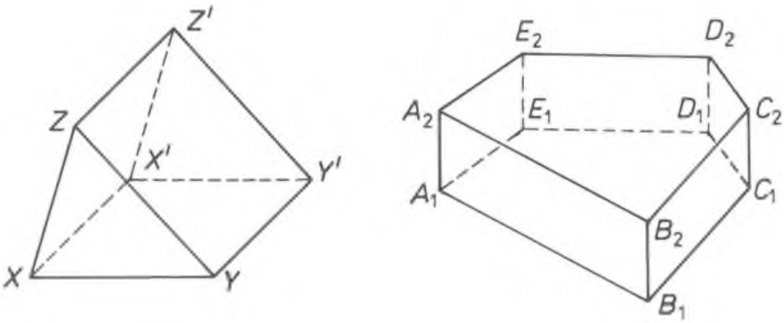
Podívejme se, čím je vzniklé těleso omezeno. Dva shodné vodorovné mnohoúhelníky se nazývají **podstavy**, svislé obdélníky jsou tzv. **boční stěny** hranolu. Podstavy a boční stěny nazýváme souhrnně **stěny** hranolu. Hranol můžeme v prostoru libovolně posunout a otočit. Jeho podstavy pak nemusí být vodorovné ani boční stěny svislé.



Dvě stěny hranolu, které mají společné body, se nazývají **sousední**. Společné body dvou sousedních stěn vytvářejí úsečku zvanou **hrana** hranolu. Hrany ležící v podstavě se nazývají **podstavné**, ostatní hrany se nazývají **boční**. Všechny boční hrany mají stejnou délku. Ta je rovna výšce, do které jsme vyzdvihli podstavu, jestliže jsme hranol vytvořili popsaným způsobem. Proto ji nazýváme **výškou** hranolu.
Bod, ve kterém se „stýkají" tři stěny, se nazývá **vrchol** hranolu. Z každého vrcholu hranolu „vycházejí" tři hrany.
Podle počtu n bočních stěn hovoříme o **n-bokém hranolu**. Tento počet je stejný jako počet vrcholů v každé z podstav. Na obrázku jsou trojboký, čtyřboký a šestiboký hranol – každý s vyznačenou výškou v.



Hranol popisujeme pomocí vrcholů. Ty, které leží na téže boční hraně, označujeme zpravidla stejnými písmeny rozlišenými čárkami nebo indexy. Na obrázku si prohlédněte trojboký hranol $XYZX'Y'Z'$ a pětiboký hranol $A_1B_1C_1D_1E_1A_2B_2C_2D_2E_2$.



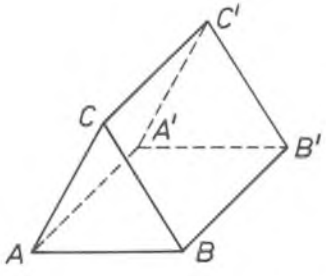
□ **1.** Vyjmenujte podstavy, boční stěny, podstavné a boční hrany hranolů z předchozího obrázku.

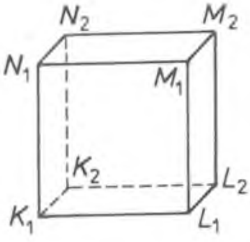
□ **2.** Určete počet vrcholů, stěn a hran pětibokého hranolu.

3. Určete počet vrcholů, stěn a hran n-bokého hranolu.

Co je *pravidelný* hranol?

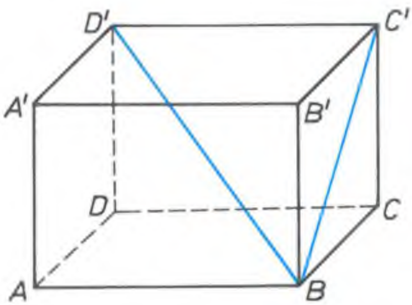
Hranol, jehož podstavami jsou pravidelné mnohoúhelníky, se nazývá **pravidelný**. Tak např. podstavami pravidelného trojbokého hranolu $ABCA'B'C'$ jsou rovnostranné trojúhelníky ABC a $A'B'C'$, podstavami pravidelného čtyřbokého hranolu $K_1L_1M_1N_1K_2L_2M_2N_2$ jsou čtverce $K_1L_1M_1N_1$ a $K_2L_2M_2N_2$.





Co je *úhlopříčka* hranolu?

Jsou-li dva vrcholy hranolu spojeny hranou, nazývají se **sousední**. Úsečka, která spojuje dva vrcholy, které nejsou sousední, se nazývá **úhlopříčka** hranolu. Leží-li oba krajní body úhlopříčky v téže stěně, hovoříme o **stěnové** úhlopříčce. Ostatní úhlopříčky se nazývají **tělesové**. Na obrázku čtyřbokého hranolu $ABCDA'B'C'D'$ jsou vyznačeny stěnová úhlopříčka BC' a tělesová úhlopříčka BD'.

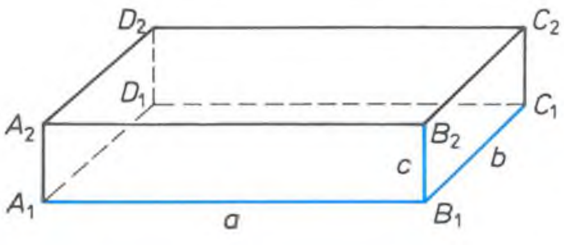


□ **4.** Kolik tělesových úhlopříček má pravidelný trojboký hranol?

5. Určete počet stěnových a tělesových úhlopříček čtyřbokého hranolu.

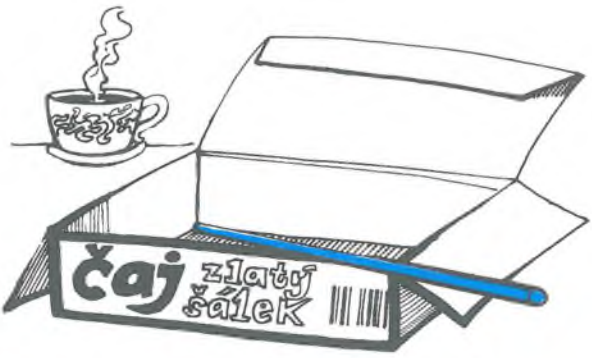
? Co je *kvádr*?

Zvláštním případem hranolu je **kvádr**. Jeho podstavou je buď čtverec, nebo obdélník. Kvádr má tedy šest stěn, každé dvě protější stěny jsou shodné pravoúhelníky. Přitom *protějšími stěnami* kvádru rozumíme každé dvě stěny, které nemají společný bod. Za podstavy kvádru můžeme považovat každé dvě jeho protější stěny. Záleží jen na tom, jak kvádr „natočíme". Proto u kvádru podstavy a boční stěny zpravidla nerozlišujeme. Prohlédněte si kvádr $A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2$ na obrázku.



Délky tří hran kvádru vycházejících z jednoho vrcholu nazýváme stručně *rozměry* kvádru. Na předchozím obrázku kvádru jsou vyznačeny jeho rozměry a, b, c. V praxi jim často říkáme *délka*, *šířka* a *výška*.

Pomocí krabičky tvaru kvádru a špejle se přesvědčte, že všechny čtyři tělesové úhlopříčky kvádru mají stejnou délku.

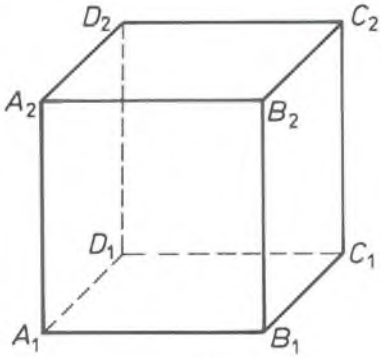


□ **6.** Má každý kvádr všechny stěnové úhlopříčky stejně dlouhé? Zdůvodněte.

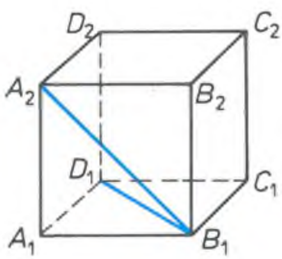
Co je *krychle*?

Krychle je zvláštní případ kvádru. Všech šest stěn krychle jsou shodné čtverce. Proto všechny hrany krychle jsou shodné úsečky.

Dohodneme se, že například místo „krychle o hraně délky 3 cm" budeme stručně říkat „krychle o hraně 3 cm".



7. Vysvětlete, proč v krychli $A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2$ mají úhlopříčky B_1D_1 a B_1A_2 stejné délky.



□ **8.** Mohou mít některé dvě stěnové úhlopříčky krychle různé délky? Zdůvodněte.

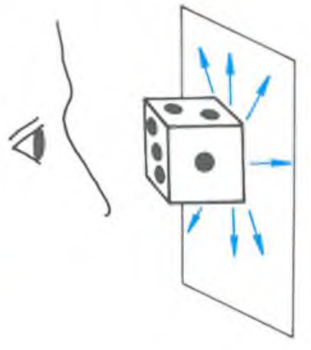
2 ZOBRAZENÍ HRANOLU

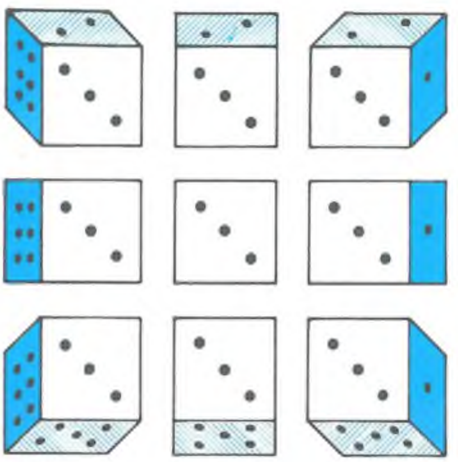
Víme již, že při řešení úloh o geometrických útvarech nám velmi pomáhá, když si tyto útvary znázorníme vhodnými obrázky. Zkoumání útvarů v prostoru je však ztíženo tím, že „prostorové obrázky" kreslit neumíme. Protože jen zřídka máme po ruce vhodný model tělesa, je užitečné umět situaci v prostoru výstižně znázornit v rovině (na listu papíru nebo na tabuli). Tato rovina se nazývá *nákresna*.

„Rovinné" obrázky těles, mezi které patří i hranoly, jste už určitě viděli. Jsou i v předchozí kapitole tohoto sešitu. Nyní se je naučíte sami kreslit metodou *volného rovnoběžného promítání*. Vysvětlíme ji nejprve při znázorňování krychle.

? Jak znázorňujeme krychli?

Vezměte si do ruky hrací kostku a pozorujte ji. Pozvedněte ji do úrovně svých očí jako na obrázku.
Budete-li kostku posunovat po vyznačené rovině a nebudete-li jí otáčet, uvidíte ji v některém z vyznačených pohledů:





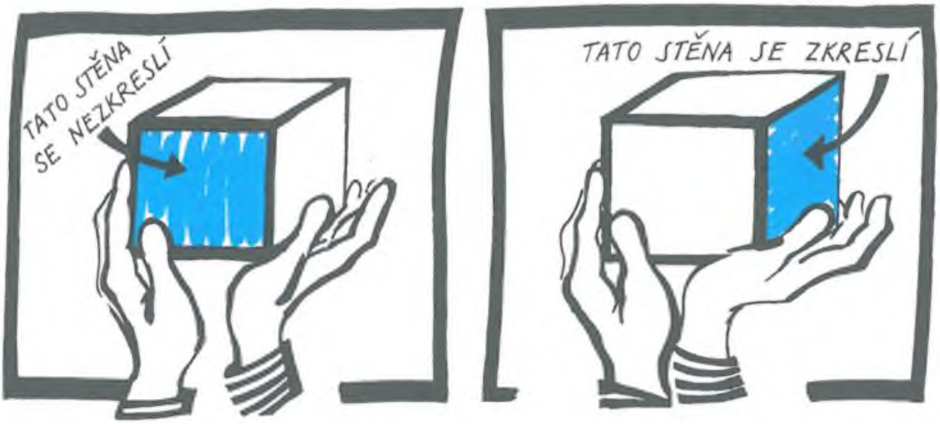
Které z těchto obrázků jsou nejnázornější? Jsou to čtyři „rohové" obrázky, protože na nich je vidět nejvíce – tři stěny kostky.

Naopak nejméně názorný je prostřední obrázek, kdy kostku vidíme v *přímém pohledu*. Na něm každý z vrcholů čtverce zakrývá celou hranu kostky, která směřuje „dozadu“ za nákresnu. Tyto čtyři hrany jsou příkladem úseček, které jsou *kolmé* k nákresně.

Všechny čtyři nejnázornější obrázky kostky jsou nakresleny podle těchto pravidel:

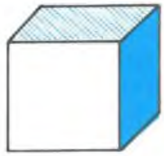
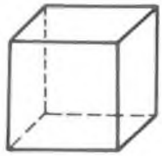
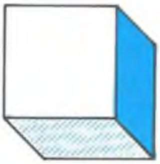
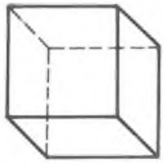
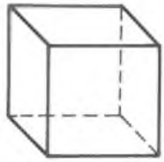
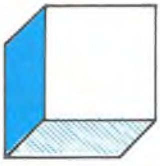
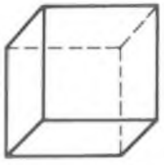
- Leží-li útvar v rovině rovnoběžné s nákresnou, zobrazí se nezkresleně (ve skutečné velikosti).
- Rovnoběžné a shodné úsečky se zobrazí jako rovnoběžné a shodné úsečky.
- Úsečka kolmá k nákresně se zobrazí jako úsečka, svírající s vodorovnou přímkou úhel o velikosti 45°.
- Délka úsečky kolmé k nákresně se zkrátí na polovinu.

Tato pravidla volného rovnoběžného promítání budeme používat také při znázorňování jiných hranolů a těles.

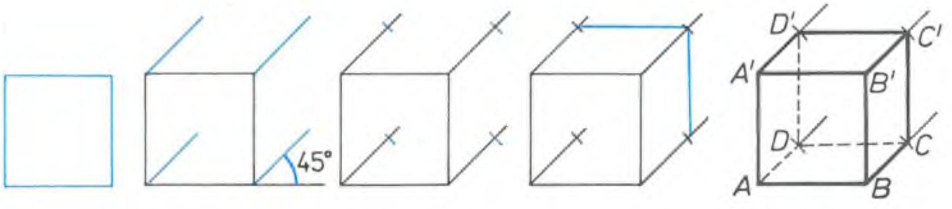


Jsou-li rozměry zobrazovaného tělesa „velké“, nemůžeme žádnou jeho část nakreslit ve skutečné velikosti například proto, že se nám do sešitu „nevejde“. V takovém případě celé těleso zobrazíme *zmenšené*. Přitom si představíme, že všechny jeho rozměry jsou „zkráceny“ ve stejném poměru, podobně jako na fotografii.
Pokud je naopak zobrazované těleso příliš „malé“, znázorníme je *zvětšené*.

Prohlédněte si, jak se ve volném rovnoběžném promítání zobrazí krychle ve všech čtyřech názorných pohledech. Na obrázcích je také vyznačena *viditelnost* hran. Hrací kostka, která nám krychli představuje, je vyrobena z neprůhledného materiálu. Proto některé její hrany nevidíme. Ty při zobrazení rýsujeme *čárkovaně*. V pravém sloupci tabulky je uveden název obrázku v daném pohledu.

		*pravý nadhled*
		*pravý podhled*
		*levý nadhled*
		*levý podhled*

Nejčastěji se tělesa znázorňují v pravém nadhledu. Na obrázcích si prohlédněte postup, kterým se sestrojí obraz krychle o hraně 1,5 cm v tomto pohledu:

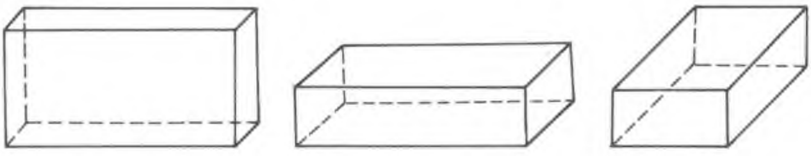


1. Znázorněte krychli o hraně 3 cm v pravém podhledu.

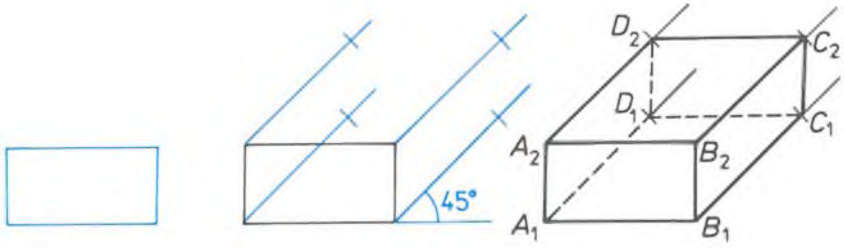
Jak znázorňujeme hranol?

?

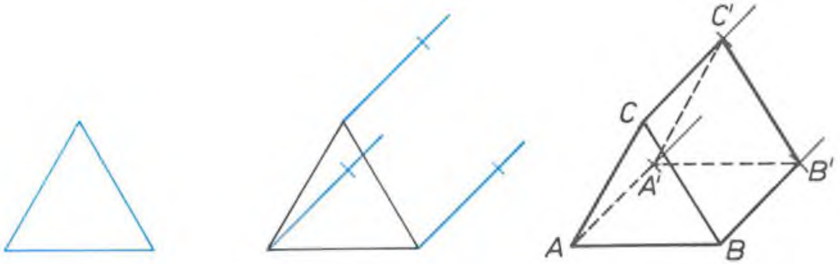
Na obrázcích je znázorněn čtyřboký hranol ve třech různých polohách:



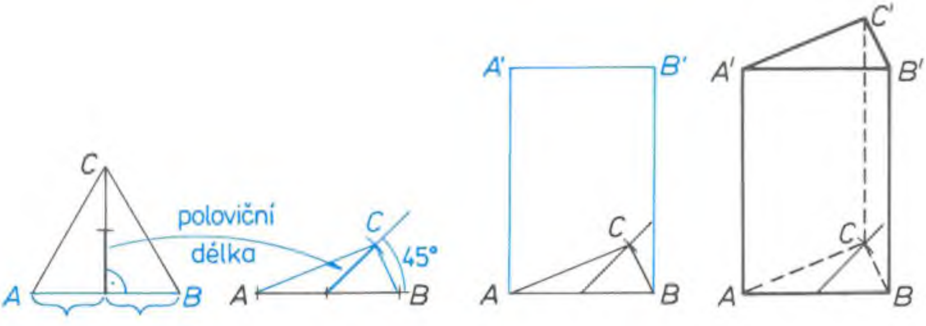
Do sešitu si sami sestrojte pravý krajní obrázek. Zvolte rozměry 4 cm, 2 cm a 1 cm. Napovíme vám, jak postupovat.



Vidíte, že při znázorňování čtyřbokého hranolu postupujeme podobně jako u krychle. Obtížnější je zobrazit hranol trojboký. Ukážeme si dva způsoby zobrazení pravidelného trojbokého hranolu $ABCA'B'C'$. Při prvním umístíme do nákresny podstavu ABC. Boční hrany AA', BB' a CC' pak budou kolmé k nákresně, protože při přímém pohledu na podstavu např. bod A zakryje celou hranu AA'. Proto se boční hrany zobrazí „šikmo“ a jejich délky se zkrátí na polovinu.



Při druhém způsobu umístíme do nákresny jednu z bočních stěn, např. obdélník $ABB'A'$. Ten se zobrazí nezkresleně, proto ho narýsujeme nejdříve. Jak nyní sestrojit „zkreslené“ obrazy podstav ABC a $A'B'C'$? K tomu si narýsujeme pomocný obrázek: Sestrojíme trojúhelník ABC ve skutečné velikosti a vyznačíme v něm výšku v_c. Při přímém pohledu na stěnu $ABB'A'$ je tato úsečka zakryta středem hrany AB. Proto je výška v_c kolmá k nákresně, takže se zobrazí na „šikmou“ úsečku poloviční délky.

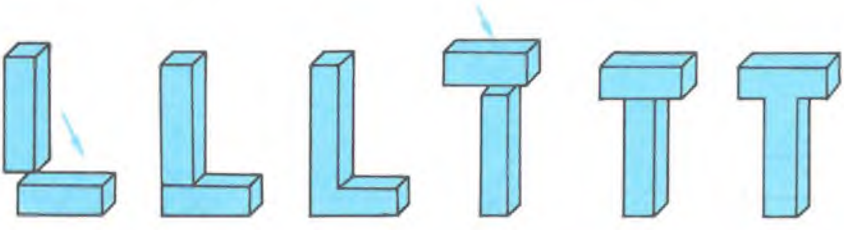


2. Změřte délky hran krabičky od zápalek a sestrojte její názorný obrázek ve volném rovnoběžném promítání aspoň ve dvou různých pohledech.

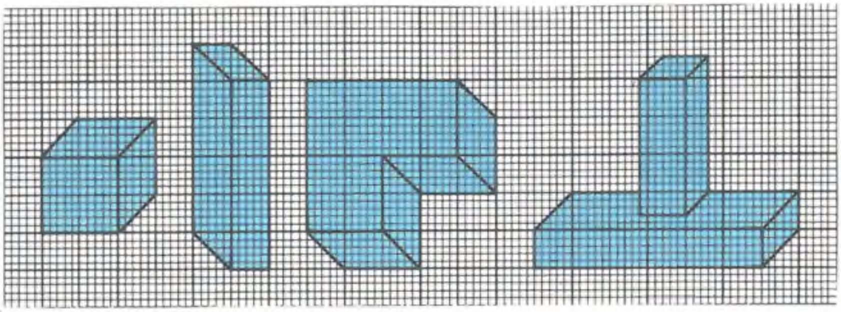
3. Načrtněte od ruky názorný obrázek krychle, kvádru a trojbokého hranolu v levém nadhledu.

*4. Narýsujte obraz trojbokého hranolu $XYZX'Y'Z'$ v nákresně $XYY'X'$, je-li $|XY| = 4\,\text{cm}$, $|XZ| = |YZ| = 5\,\text{cm}$, $|XX'| = 5{,}5\,\text{cm}$.

■ 5. Velká tiskací písmena L a T na obrázku jsou „slepena“ z hranolů s podstavami v nákresně. Podobně načrtněte další „hranatá“ velká tiskací písmena I, H, F, E, X, A. Neviditelné hrany nevyznačujte.

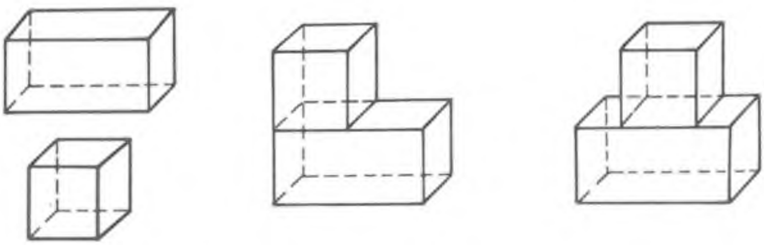


Náčrty „hranatých“ těles ve volném rovnoběžném promítání se snadno pořizují na milimetrový papír. Vybarvíme-li těleso a nezakreslujeme-li neviditelné hrany, získáme pěkné názorné obrázky:

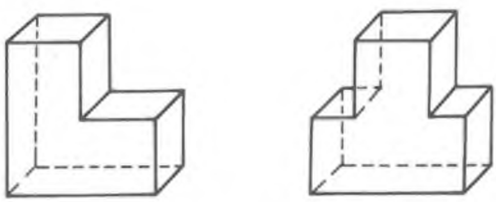


Při náčrtcích těles na milimetrovém papíru zkracujeme délky hran kolmých k nákresně jinak než na polovinu. Tak totiž můžeme s výhodou použít předtištěné linky.

Z kvádru a krychle v levé části dalšího obrázku jsou sestavena a vedle zakreslena dvě „složitější“ tělesa.



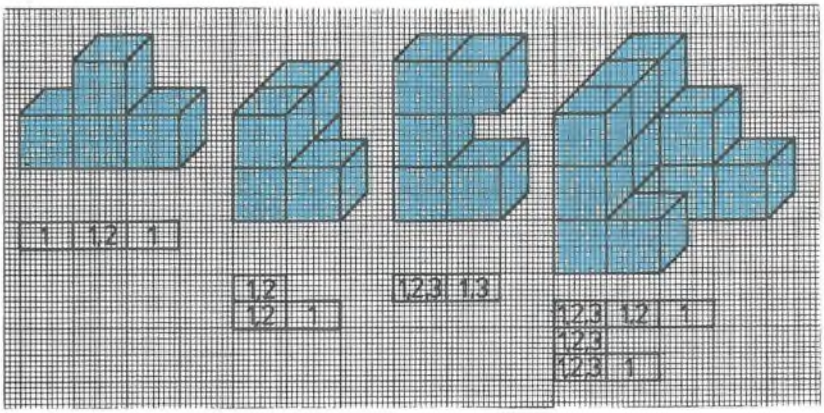
Všimněte si, že jsme kvůli názornosti zakreslili všechny hrany původních těles, třebaže některé z nich hranami vzniklých těles vlastně nejsou. Bez těchto „zbytečných hran“ vypadají tělesa takto:



6. Na předchozím obrázku jsou obě tělesa znázorněna v pravém nadhledu. Do sešitu je zobrazte

a) v levém nadhledu, b) v pravém podhledu.

7. Na následujícím obrázku jsou znázorněna tělesa složená ze stejných krychlí. Pod nimi je uveden symbolický zápis jejich složení.



a) „Rozšifrujte" tyto zápisy.

b) Ve volném rovnoběžném promítání načrtněte tělesa podle symbolických zápisů:

1,2	1	1,2

T_1

1,2	1
1	

T_2

1,3	1,2,3

T_3

1,2,3	1,2
1,2	1

T_4

CVIČENÍ 1

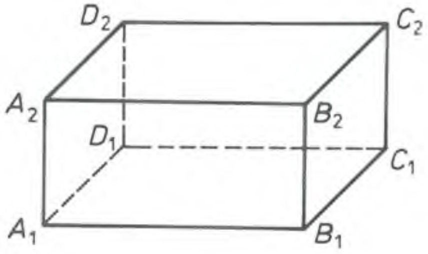
□ 1. Které mnohoúhelníky a v jakém počtu tvoří stěny
   a) krychle,
   b) čtyřbokého hranolu,
   c) trojbokého hranolu,
   d) pravidelného čtyřbokého hranolu?

2. Určete počet vrcholů, hran a stěn
   a) šestibokého hranolu,   b) patnáctibokého hranolu.

□ **3.** Na obrázku je kvádr $A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2$.

a) Najděte všechny hrany, které jsou rovnoběžné s hranou D_1D_2.

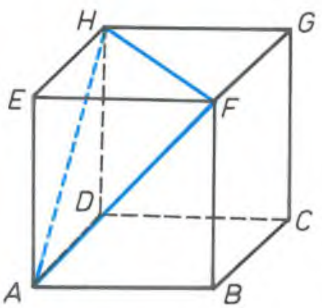
b) Najděte další dvě čtveřice rovnoběžných hran.



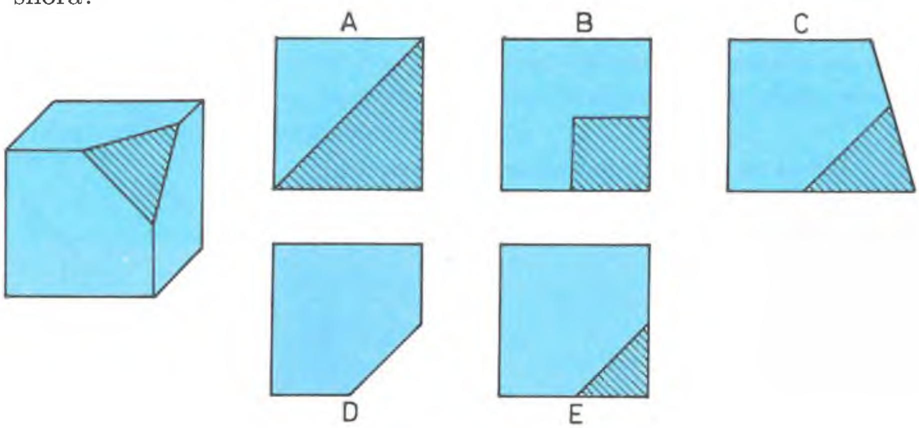
4. Kolik stěnových úhlopříček má trojboký hranol?

∗**5.** Kolik tělesových úhlopříček má pětiboký hranol?

∗**6.** Na obrázku jsou vyznačeny tři stěnové úhlopříčky krychle, které jsou stranami trojúhelníku AFH. Určete velikosti jeho vnitřních úhlů.



□ **7.** Na obrázku je krychle, z níž byl odříznut jeden vrchol. Který z obrázků A, B, C, D, E ukazuje, jak vypadá „odříznutá“ krychle při pohledu shora?

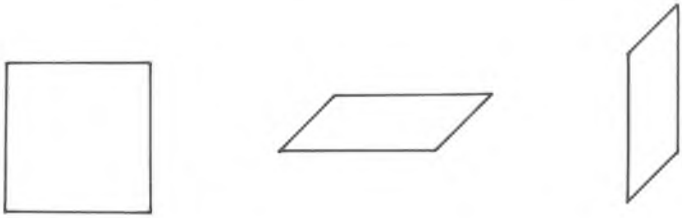


8. Sestrojte ve volném rovnoběžném promítání obrazy kvádrů o rozměrech:

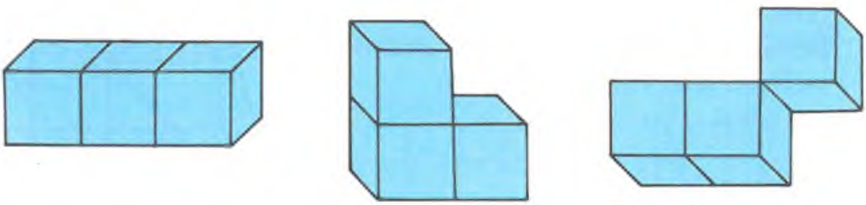
a) 2 cm; 3 cm a 4 cm b) 3,4 cm; 2,2 cm a 2,8 cm

9. Doplňte obraz krychle ve volném rovnoběžném promítání, je-li dán obraz

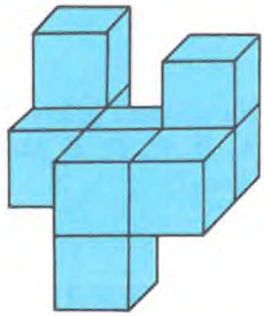
a) přední stěny, b) horní stěny, c) levé boční stěny.



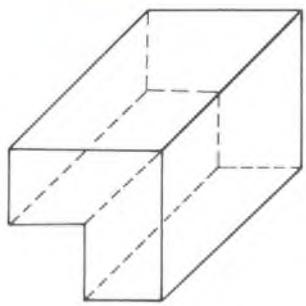
10. Tělesa na obrázku vznikla ze tří stejných krychlí, které jsou k sobě přilepeny stěnou nebo hranou. Načrtněte každé z těles v jiném pohledu.



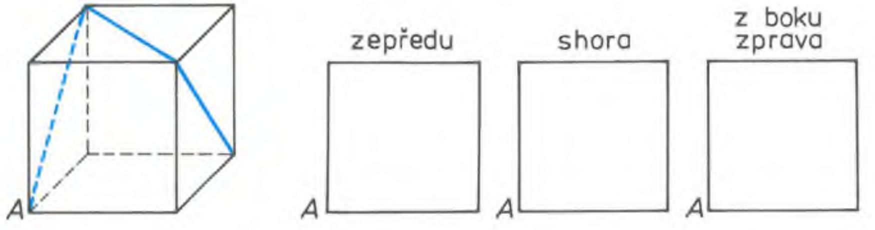
□ **11.** Z kolika shodných krychlí je složeno těleso na obrázku?



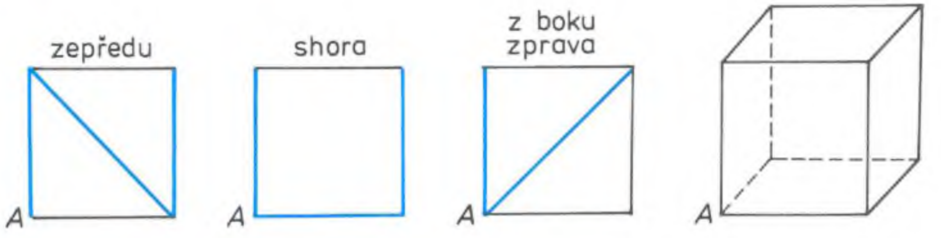
∗ **12.** Těleso na obrázku je znázorněno v pravém nadhledu. Zobrazte je v levém nadhledu.



∗13. Na průhledné krychli je modře nakreslena lomená čára složená ze tří úseček. Do tří čtverců v sešitě nakreslete, jak byste ji viděli při pohledu zepředu, shora a z boku.



∗14. Na průhledné krychli je modře nakreslena lomená čára složená ze čtyř úseček. Na obrázcích vidíte, jak se zobrazí při pohledu zepředu, shora a z boku. Zobrazte krychli v pravém nadhledu a vyznačte v ní lomenou čáru.

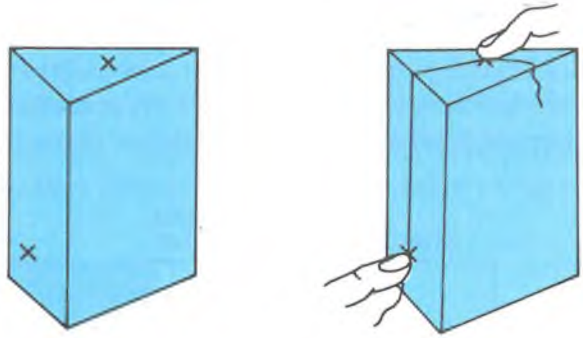


15. Představte si, že ze tří stejných krychlí sestavujete tělesa. Každá krychle při tom přiléhá k některé další celou stěnou. Takto lze sestavit dvě různá tělesa. (Pokud jedno těleso vznikne otočením druhého, nepovažujeme tato tělesa za různá.) Nakreslete obě tělesa ve volném rovnoběžném promítání.

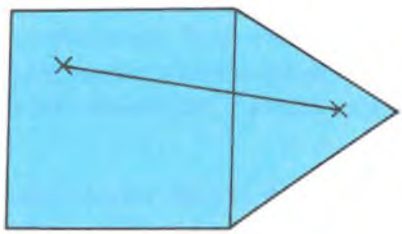
∗∗16. Jestliže se krychle k sobě slepují celými stěnami, je možné ze čtyř stejných krychlí slepit osm různých těles. Načrtněte tato tělesa ve volném rovnoběžném promítání.

3 SÍŤ HRANOLU

V minulé kapitole jsme se naučili kreslit názorné obrázky hranolů ve volném rovnoběžném promítání. Přesto však v některých situacích ani s takovými obrázky nevystačíme. Představte si například, že na každé ze dvou sousedních stěn hranolu je vyznačen jeden bod. Zajímá nás, jak vypadá „nejkratší cesta“, která tyto dva body spojuje a která vede po stěnách hranolu. Máme-li po ruce model hranolu a nit, určíme ji pokusem: Nit mezi oběma body „napneme“. Napjatá nit znázorňuje hledanou cestu.



Nemáme-li však potřebné pomůcky k dispozici, stačí k vyřešení úlohy umět „rozvinout“ obě stěny hranolu do roviny.



Pokud „rozvineme“ všechny stěny hranolu podle určitých pravidel, získáme *síť hranolu*. Než se k tomuto novému pojmu dostaneme, vysvětlíme, co nazýváme *povrchem* hranolu.

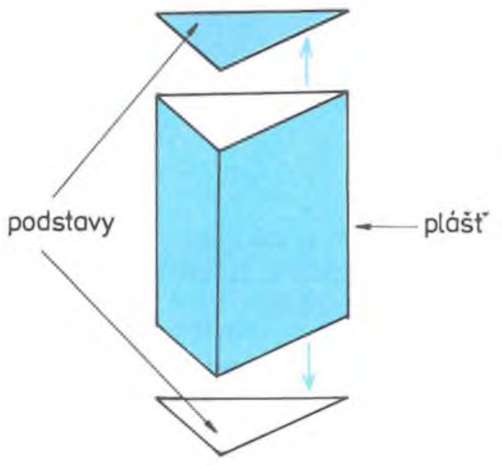
? Co je *povrch* a *plášť* hranolu?

Víme, že hranol je prostorový útvar, který je omezen *stěnami* – dvěma podstavami a několika stěnami bočními. Sjednocení všech stěn hranolu tvoří tzv. **povrch** hranolu.

Jako příklad povrchu hranolu může sloužit papírová krabička.

Jinou představu o povrchu získáme, když si představíme, že celý hranol obarvíme ponořením do nádoby s barvou. Povrch hranolu je pak tvořen všemi obarvenými body.

Povrch hranolu se skládá ze dvou podstav a z bočních stěn. Sjednocení bočních stěn hranolu je část jeho povrchu, která se nazývá **plášť** hranolu.



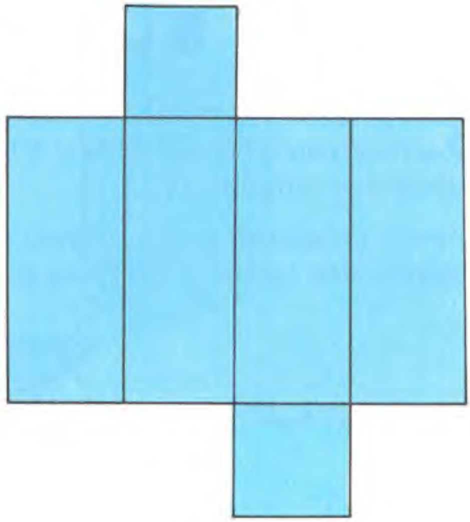
Povrch hranolu je sjednocením dvou podstav a pláště hranolu.

□ **1.** Kolika stěnám hranolu může náležet bod jeho povrchu?

Co je *síť* hranolu?

Vezměte si do rukou papírovou krabičku tvaru kvádru a nůžky. Rozstřihněte krabičku tak, aby papír, z něhož je vyrobena, bylo možné „narovnat" do roviny. Při stříhání postupujte opatrně, abyste neporušili žádnou stěnu a aby se výsledný papírový obrazec „nerozpadl" na několik částí. To znamená, že stříhat je nutné po hranách krabičky a že střihů nesmí být „příliš mnoho".

Po „narovnání" rozstříhané krabičky získáme její *síť*.



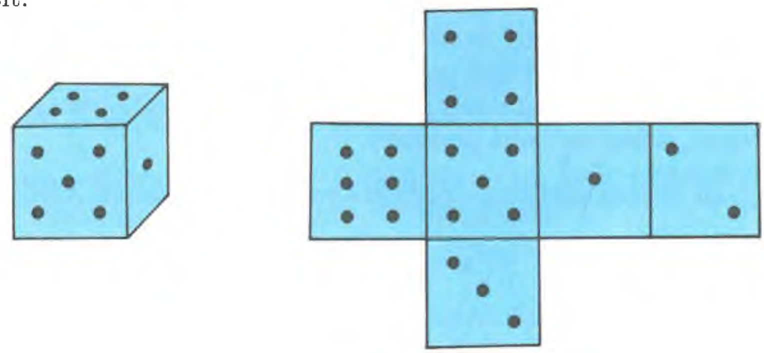
Papírová krabička (bez záložek k zavírání a „chlopní" k lepení) nám při pokusu představovala *povrch kvádru*. Rozstříháme-li podobně povrch libovolného hranolu, získáme *síť hranolu*.

Protože k síti můžeme dospět různými postupy stříhání a narovnání, mohou se výsledné sítě lišit svým tvarem.

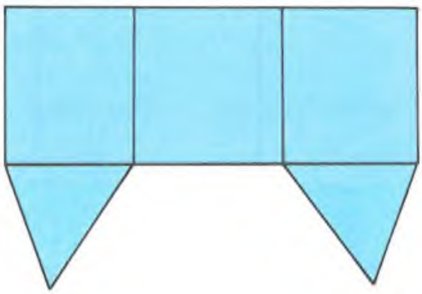
Co však mají všechny sítě společné?

- Síť je rovinná soustava mnohoúhelníků, která je „souvislá".
- Síť obsahuje tolik mnohoúhelníků, kolik má hranol stěn.
- Každé dva „sousední" mnohoúhelníky sítě k sobě „přiléhají" celými stranami.
- Stěny hranolu i mnohoúhelníky sítě lze očíslovat tak, že stěna a mnohoúhelník, které jsou označeny stejným číslem, jsou vždy shodné.

Příkladem zmíněného číslování jsou počty ok na hrací kostce. Prohlédněte si její síť.



Ne každá soustava mnohoúhelníků s uvedenými vlastnostmi je však sítí hranolu. Například při rozvinutí povrchu trojbokého hranolu nikdy nedospějeme k tomuto výsledku:



Jak tedy rozhodnout, zda daná soustava mnohoúhelníků je sítí hranolu? Tak, že „podezřelou" soustavu mnohoúhelníků překreslíte na papír, vystřihnete a zkoušíte, zda přehýbáním papíru podél stran mnohoúhelníků je možné „složit" povrch některého hranolu. (U jednoduchých sítí si toto „skládání" často pouze představujeme.)

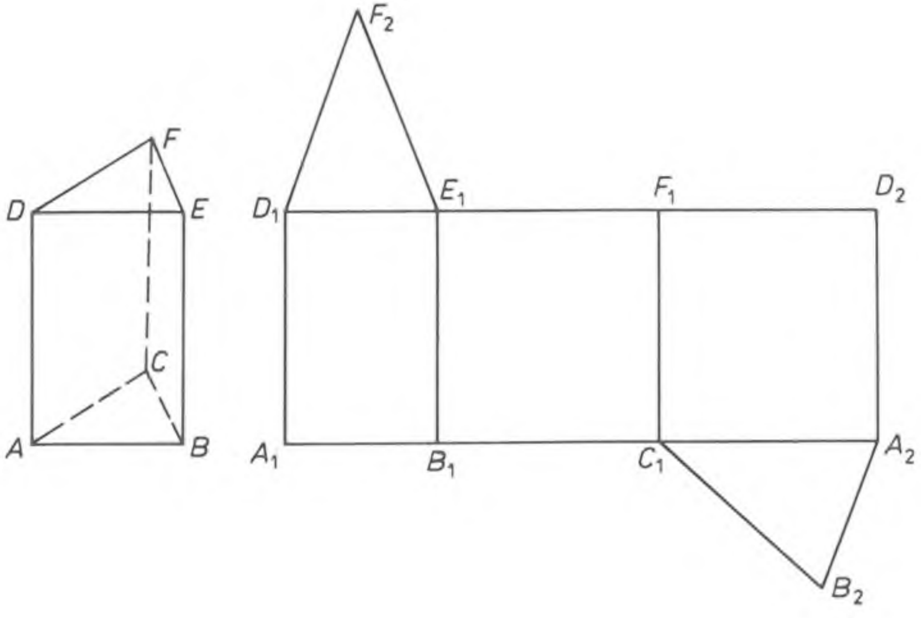
Proto můžeme síť hranolu charakterizovat takto:

Síť hranolu je soustava mnohoúhelníků v rovině. Jestliže ji obkreslíme na papír a vystřihneme, je možné pouhým přehýbáním papíru podél některých stran mnohoúhelníků vytvořit povrch daného hranolu.

? Jak sestrojíme síť hranolu?

Už jsme vysvětlili, že každý hranol má několik sítí, které se liší svým tvarem. Které z nich se používají nejčastěji? Ty, ve kterých jsou boční stěny rozvinuty do jediného pásu tvaru pravoúhelníku. K tomuto pásu jsou z protějších stran „přilepeny“ obě podstavy.

Popsanou síť si prohlédněte na příkladu trojbokého hranolu $ABCDEF$.



Síť vznikla „rozříznutím“ boční hrany AD, hran AB, BC v dolní podstavě a hran EF a FD v horní podstavě. Boční stěny vytvořily obdélník $A_1A_2D_2D_1$. Podstavy ABC a DEF přešly ve dva shodné trojúhelníky $A_2B_2C_1$ a $D_1E_1F_2$.

Jak jsme při sestrojení sítě postupovali? Nejprve jsme narýsovali tři „slepené“ obdélníky $A_1B_1E_1D_1$, $B_1C_1F_1E_1$, $C_1A_2D_2F_1$ shodné s bočními stěnami hranolu. Pak jsme sestrojili trojúhelníky $C_1A_2B_2$ a $D_1E_1F_2$ shodné s podstavami hranolu.

Dokážete vysvětlit, proč jsme některé vrcholy sítě označili stejnými písmeny rozlišenými jen indexy?

2. Zhotovte si model trojbokého hranolu. Jeho síť najdete na straně 82. Překreslete si ji a vystřihněte i s „chlopněmi“, které jsou určeny k lepení. (Chlopně lepíme dovnitř modelu.)

■ 3. Představte si, že povrch trojbokého hranolu rozstřihnete, abyste získali jeho síť. Kolik hran musíte rozstřihnout?

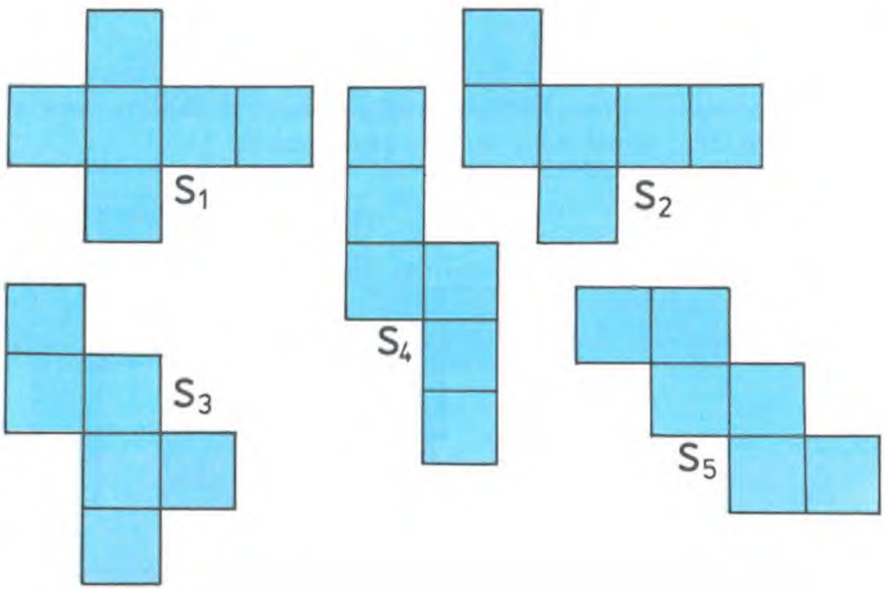
4. Sestrojte síť pravidelného čtyřbokého hranolu, jehož podstavou je čtverec o straně 3 cm a boční hrana má délku 5 cm.

Víme již, že zvláštními případy hranolů jsou *kvádr* a *krychle*. U těchto těles můžeme libovolné dvě protější stěny považovat za podstavy a z ostatních čtyř stěn vytvořit plášť. Proto u kvádru můžeme „dohodnutým způsobem“ (čtyři stěny pláště v jednom pásu) vytvořit více různých sítí.

Nyní se podrobněji zaměříme na sítě krychle.

Jak vypadají sítě *krychle*?

Každá síť krychle je soustava šesti shodných čtverců. Některé sítě krychle jsou na obrázku.



Sítě S_1 a S_2 jsou vytvořeny „dohodnutým způsobem". Snadno si představíme, jak z nich lze „svinout" plášť a k němu „přilepit" obě podstavy. U dalších soustav čtverců S_3, S_4 a S_5 není na první pohled vidět, že jde skutečně o sítě krychle. Umíte si představit, jak se z nich povrch krychle složí?

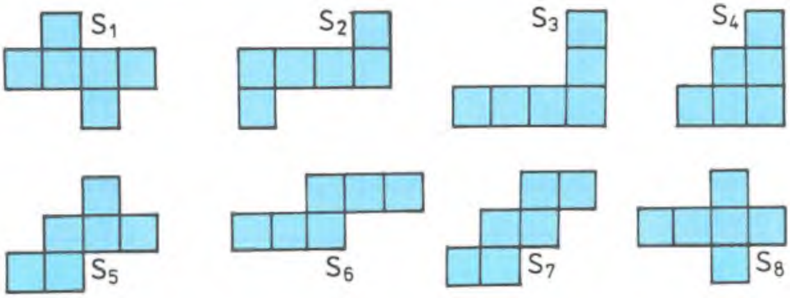
5. U každé z pěti sítí krychle na předchozím obrázku určete:

a) Kolik hran krychle bylo třeba rozstřihnout pro jejich zhotovení?

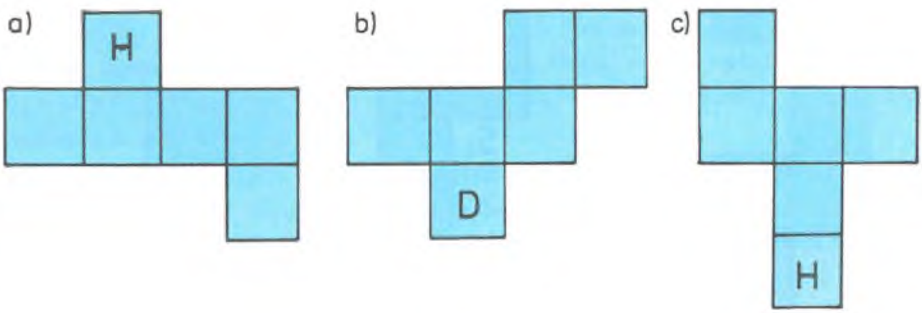
b) Kolik stran čtverců je na „obvodu" sítě?

Jaká je souvislost mezi zjištěnými počty střihů a „obvodem" sítě? Dokážete ji vysvětlit?

6. Na obrázku je 8 soustav čtverců. Pomocí papíru a nůžek se přesvědčte, které z nich jsou sítěmi krychle. (Při rýsování volte stranu čtverce 3 cm.)



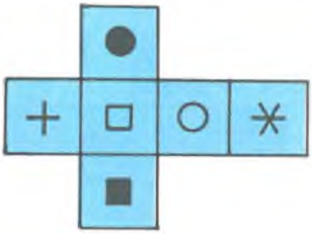
7. Na obrázcích sítí krychle značí písmeno H horní podstavu a písmeno D dolní podstavu. Překreslete si obrázky do sešitu a doplňte označení zbývajících stěn. Boční stěny označte písmenem B.



Rozborem možností lze zjistit, že každá krychle má právě 11 různých sítí. Přitom dvě sítě téže krychle považujeme za různé, jestliže nejsou shodné jako rovinné útvary. To znamená, že dvě různé sítě krychle nemůžeme žádným způsobem položit na sebe tak, aby se kryly.

Na dvou příkladech si procvičte prostorovou představivost.

Příklad 1. Na stěny modelu krychle jsme nakreslili značky a pak jsme povrch krychle rozvinuli do sítě na obrázku:



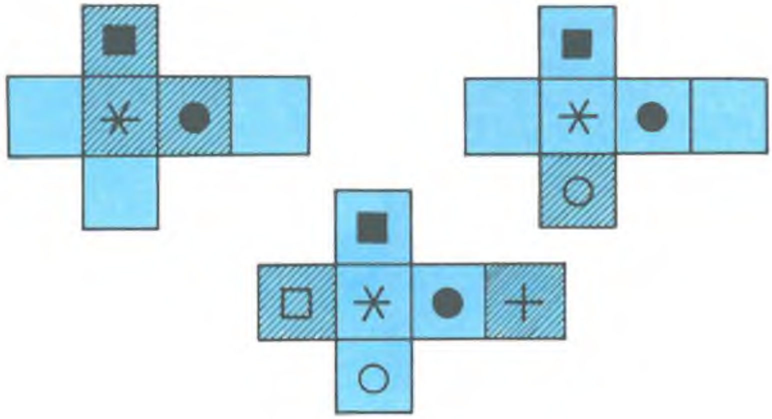
Určete, jaké značky patří na místa otazníků.

Řešení. Představte si, že z „označené“ sítě znovu složíte model krychle. Ten vhodně otočíte tak, abyste v pravém nadhledu viděli dvě označené stěny. Pak snadno doplníte chybějící značky.

(Pokud nemáte natolik dobrou představivost, abyste řešení „uviděli“, vyrobte si vlastní model označené krychle.)

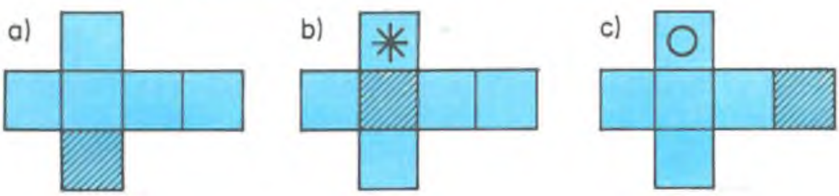
Příklad 2. Na stěnách krychle jsou nakresleny značky (na různých stěnách různé). Na obrázcích je tato krychle znázorněna v pravém nadhledu ve třech různých polohách. Nakreslete ji v levém podhledu pro každou z těchto poloh.

Řešení. Nakreslíme si síť krychle a budeme postupně její čtverce označovat ve shodě s odpovídajícími stěnami krychle. Postup značení je patrný z obrázků.

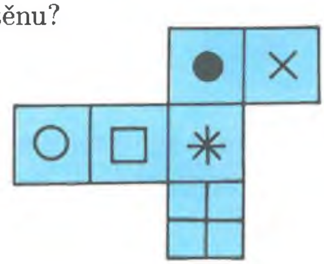


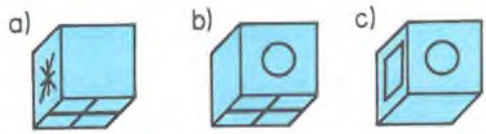
Nyní si představíme, že z takto označené sítě „slepíme“ povrch krychle a že ji otočíme do předepsaných poloh. V levých podhledech pak bude krychle vypadat takto:

8. Na obrázku je jedna krychle v několika pohledech. Načrtněte si její síť podle obrázku v učebnici a dokreslete do ní obrázky ze stěn krychle.



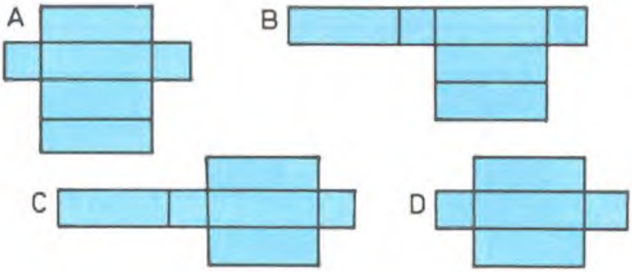
∗**9.** Ze sítě na obrázku byla složena krychle. Který obrázek patří na prázdnou stěnu?



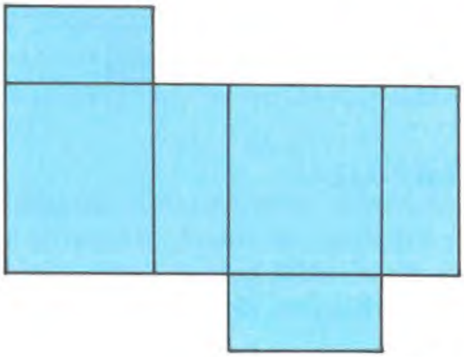


CVIČENÍ 2

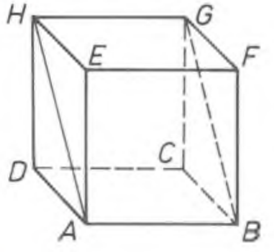
□ **1.** Na kterém z obrázků A, B, C, D je síť kvádru?



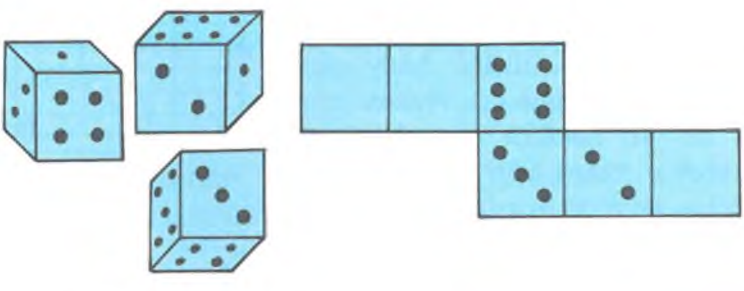
2. Ve volném rovnoběžném promítání znázorněte kvádr, jehož síť je na obrázku.



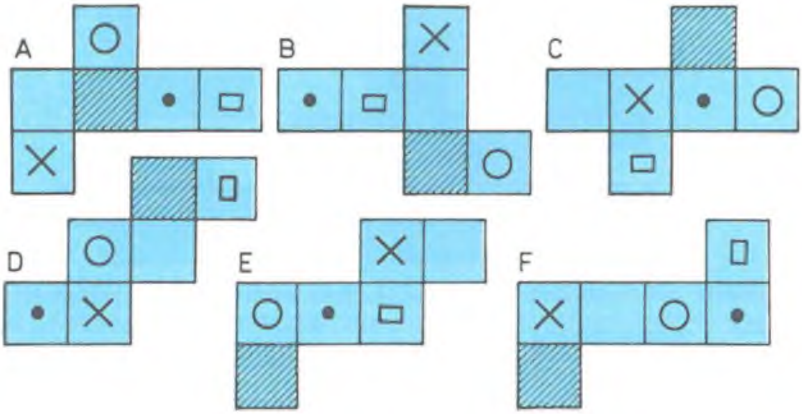
∗**3.** Krychle $ABCDEFGH$ se rozříznutím podél obdélníku $ABGH$ rozpadne na dvě tělesa. Vysvětlete, že jde o hranoly, a určete jejich podstavy. Nakreslete síť jednoho z nich, je-li délka hrany krychle 3 cm.



∗**4.** Doplňte síť „popletené“ hrací kostky, kterou vidíte ze tří pohledů:



■ **5.** Milan měl dvě stejné, ale různě pomalované kostky. Nakreslil tři sítě každé z nich, vystřihl je a pak je pomíchal. Své sestře Janě uložil, aby určila, které sítě znázorňují stejnou kostku. Dovedli byste Janě poradit?



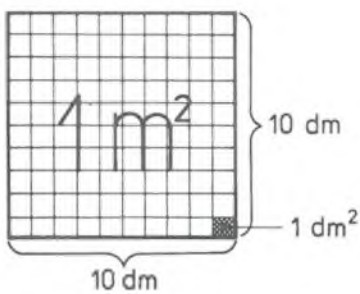
4 POVRCH HRANOLU

V minulé kapitole jsme vysvětlili, že *povrch* hranolu je sjednocení všech jeho stěn. Ale slovo povrch se užívá také v jiném významu. Rozumí se jím *součet obsahů* všech stěn hranolu. Značí se písmenem S a vyjadřuje se v jednotkách obsahu.

Dříve než začneme povrchy hranolů počítat, zopakujeme si nejprve převodní vztahy mezi *jednotkami obsahu*, ve kterých se povrch vyjadřuje. Protože stěnami hranolu jsou mnohoúhelníky, připomeneme si také známé vzorce pro jejich obsahy.

? Které jednotky *obsahu* známe?

Základní jednotkou obsahu je **1 metr čtverečný** (značka **1 m^2**). Takový obsah má například čtverec o straně 1 m.



Rozdělíme-li každou stranu takového čtverce na deset dílů a „protilehlé" body spojíme úsečkami, rozdělíme tak výchozí čtverec na $10 \cdot 10$ menších čtverců, tj. na 100 čtverců o straně 1 dm. Obsah každého z těchto čtverců je 1 dm^2. Proto platí $1\,m^2 = 100\,dm^2$.

Podobně je možné odvodit i další převodní vztahy mezi jednotkami obsahu. Jsou uvedeny v následující tabulce:

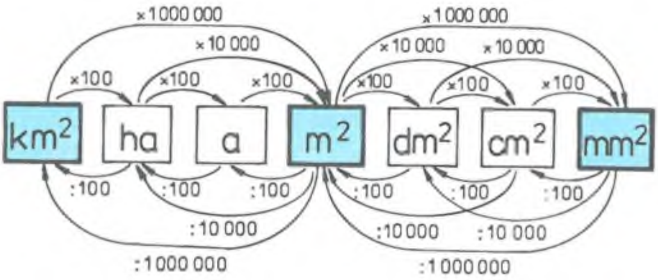
Název	Značka	Převodní vztah
1 kilometr čtverečný	$1\,\mathrm{km}^2$	$1\,\mathrm{km}^2 = 1\,000\,000\,\mathrm{m}^2$
1 decimetr čtverečný	$1\,\mathrm{dm}^2$	$1\,\mathrm{dm}^2 = 0{,}01\,\mathrm{m}^2$
1 centimetr čtverečný	$1\,\mathrm{cm}^2$	$1\,\mathrm{cm}^2 = 0{,}000\,1\,\mathrm{m}^2$
1 milimetr čtverečný	$1\,\mathrm{mm}^2$	$1\,\mathrm{mm}^2 = 0{,}000\,001\,\mathrm{m}^2$

V běžném životě (zejména v zemědělství) se používají další jednotky – *ar* a *hektar*.

- **1 ar** (značka **1 a**) je obsah čtverce o straně 10 m.
- **1 hektar** (značka **1 ha**) je obsah čtverce o straně 100 m.

1 ar je tedy stokrát větší než $1\,\mathrm{m}^2$ ($1\,\mathrm{a} = 100\,\mathrm{m}^2$). 1 hektar je desettisíckrát větší než $1\,\mathrm{m}^2$ ($1\,\mathrm{ha} = 10\,000\mathrm{m}^2$).

V následujícím schématu jsou přehledně znázorněny převodní vztahy mezi jednotkami obsahu:



Při výpočtu povrchu hranolů používáme téměř výhradně jednotky z „pravé poloviny" předchozího schématu.

1. Pomocí milimetrového papíru si znovu připomeňte vztahy mezi $1\,\mathrm{dm}^2$, $1\,\mathrm{cm}^2$ a $1\,\mathrm{mm}^2$.

2. Vyjádřete

a) v m^2: $4\,\mathrm{dm}^2$, $12\,\mathrm{dm}^2$, $70\,\mathrm{dm}^2$, $105\,\mathrm{dm}^2$, $210\,\mathrm{dm}^2$

b) v dm^2: $1{,}08\,\mathrm{m}^2$, $1{,}6\,\mathrm{m}^2$, $3{,}2\,\mathrm{m}^2$, $0{,}9\,\mathrm{m}^2$, $0{,}07\,\mathrm{m}^2$

3. Doplňte:

a) $3\,m^2 = \dots\ dm^2 = \dots\ cm^2 = \dots\ mm^2$

b) $0{,}2\,m^2 = \dots\ dm^2 = \dots\ cm^2 = \dots\ mm^2$

c) $45\,m^2 = \dots\ dm^2 = \dots\ cm^2 = \dots\ mm^2$

d) $0{,}05\,m^2 = \dots\ dm^2 = \dots\ cm^2 = \dots\ mm^2$

e) $7\,dm^2 = \dots\ m^2 = \dots\ cm^2 = \dots\ mm^2$

f) $465\,dm^2 = \dots\ m^2 = \dots\ cm^2 = \dots\ mm^2$

4. Doplňte správné jednotky:

a) $75\,cm^2 = 7\,500\ \dots$

$75\,cm^2 = 0{,}75\ \dots$

$75\,cm^2 = 0{,}007\,5\ \dots$

b) $3\,dm^2 = 300\ \dots$

$3\,dm^2 = 30\,000\ \dots$

$3\,dm^2 = 0{,}03\ \dots$

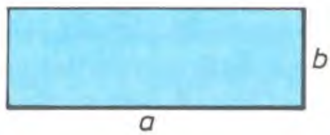
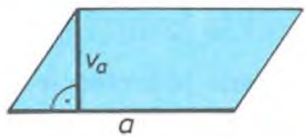
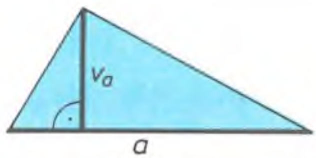
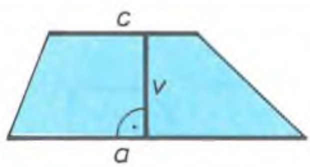
■**5.** V tabulce jsou uvedeny rozlohy 7 největších jezer světa. Uspořádejte je podle velikosti od největšího k nejmenšímu.

Název	Světadíl	Rozloha
Hořejší jezero	Severní Amerika	$82\,103\,000\,000\,m^2$
Huronské jezero	Severní Amerika	$59\,570\,000\,000\,m^2$
Aralské jezero	Asie	$37\,500\,000\,000\,m^2$
Ukerewe	Afrika	6 880 000 ha
Michiganské jezero	Severní Amerika	5 775 700 ha
Kaspické moře	Asie	$371\,000\,km^2$
Tanganika	Afrika	$32\,880\,km^2$

6. Kolik čtverečků o obsahu $1\,mm^2$ byste potřebovali na pokrytí přední strany obálky vaší učebnice matematiky? Počet čtverečků nejprve odhadněte, potom změřte potřebné rozměry a vypočtěte.

Jak vypočteme obsah některých mnohoúhelníků?

V následující tabulce je uveden přehled vzorců pro výpočet obsahu nám dosud známých mnohoúhelníků:

čtverec	$S = a \cdot a$	
obdélník	$S = a \cdot b$	
rovnoběžník	$S = a \cdot v_a$	
trojúhelník	$S = \dfrac{a \cdot v_a}{2}$	
lichoběžník	$S = \dfrac{(a + c) \cdot v}{2}$	

□ **7.** Vypočtěte obsah čtverce o straně 7 cm.

□ **8.** Vypočtěte obsah obdélníku o rozměrech 12 cm a 0,8 dm.

□ **9.** Vypočtěte obsah rovnoběžníku $KLMN$, má-li strana KL délku 3 cm a je-li výška k této straně rovna 5 cm.

10. Vypočtěte obsah trojúhelníku ABC, je-li dáno:

a) $a = 7\,\text{cm}$, $v_a = 2\,\text{cm}$ b) $b = 4\,\text{cm}$, $v_b = 5\,\text{cm}$

c) $c = 11\,\text{mm}$, $v_c = 2\,\text{cm}$

11. Vypočtěte obsah trojúhelníku XYZ se stranami 13 cm, 12 cm a 5 cm, víte-li, že je to pravoúhlý trojúhelník.

12. Vypočtěte obsah lichoběžníku se základnami a, c a výškou v:

a) $a = 1{,}5\,\text{dm}$, $c = 2{,}5\,\text{dm}$, $v = 4\,\text{dm}$

b) $a = 30\,\text{mm}$, $c = 100\,\text{mm}$, $v = 50\,\text{mm}$

c) $a = 4\,\text{cm}$, $c = 5\,\text{cm}$, $v = 0{,}6\,\text{dm}$

Připomněli jsme si vzorce pro obsah některých mnohoúhelníků i to, jak se prakticky používají. Pomocí nich můžeme určit obsah každé stěny hranolu. Pak už není obtížné vypočítat povrch hranolu. Stačí jen sečíst obsahy všech jeho stěn. Celý výpočet si usnadníme, uvědomíme-li si, že některé stěny hranolu jsou shodné. Ukážeme si to nejprve na krychli.

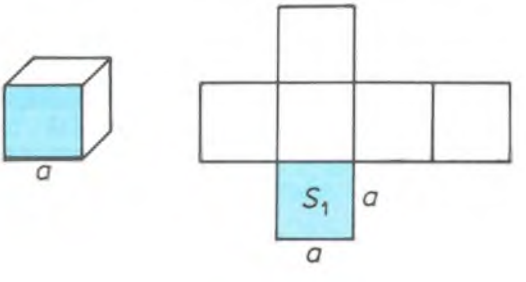
? Jak vypočítáme povrch *krychle*?

Povrch krychle je tvořen šesti shodnými čtverci. Délka strany každého z těchto čtverců je rovna délce hrany krychle. Má-li krychle hranu délky a, pro obsah S_1 jedné její stěny platí

$$S_1 = a \cdot a = a^2.$$

Proto pro povrch S krychle platí:

$$\boxed{S = 6 \cdot S_1 = 6 \cdot a \cdot a = 6 \cdot a^2}$$

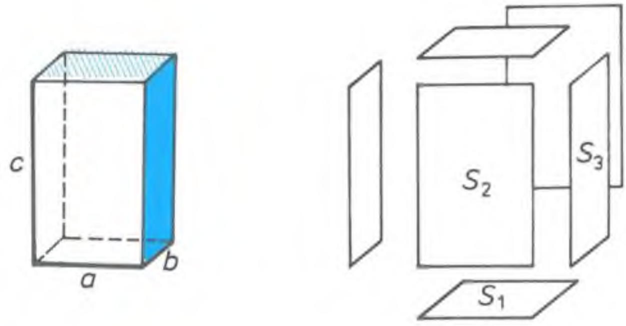


Tak například krychle s hranou délky 5 cm má povrch

$$S = 6 \cdot a \cdot a = 6 \cdot 5\,\text{cm} \cdot 5\,\text{cm} = 6 \cdot 25\,\text{cm}^2 = 150\,\text{cm}^2.$$

Jak vypočítáme povrch *kvádru*?

Kvádr je omezen šesti stěnami. Každé dvě protější stěny jsou shodné. Na obrázku je kvádr s rozměry a, b, c. Vypočteme jeho povrch:



Podstavami jsou shodné obdélníky s rozměry a a b. Označíme obsah každého z nich S_1. Platí

$$S_1 = a \cdot b.$$

Přední a zadní stěnu kvádru tvoří shodné obdélníky s rozměry a a c. Označíme-li obsah každé z těchto stěn S_2, platí

$$S_2 = a \cdot c.$$

Také boční stěny kvádru jsou shodné obdélníky. Každý z nich má obsah

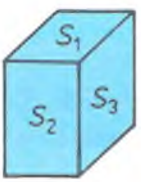
$$S_3 = b \cdot c.$$

Pro povrch S kvádru o rozměrech a, b, c jsme odvodili vzorec:

$$\boxed{S = 2 \cdot S_1 + 2 \cdot S_2 + 2 \cdot S_3 = 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot c}$$

Tak například kvádr s rozměry $a = 3\,\text{cm}$, $b = 5\,\text{cm}$, $c = 6\,\text{cm}$ má povrch:

$$S = 2 \cdot 3\,\text{cm} \cdot 5\,\text{cm} + 2 \cdot 3\,\text{cm} \cdot 6\,\text{cm} + 2 \cdot 5\,\text{cm} \cdot 6\,\text{cm} =$$
$$= 30\,\text{cm}^2 + 36\,\text{cm}^2 + 60\,\text{cm}^2 = 126\,\text{cm}^2$$

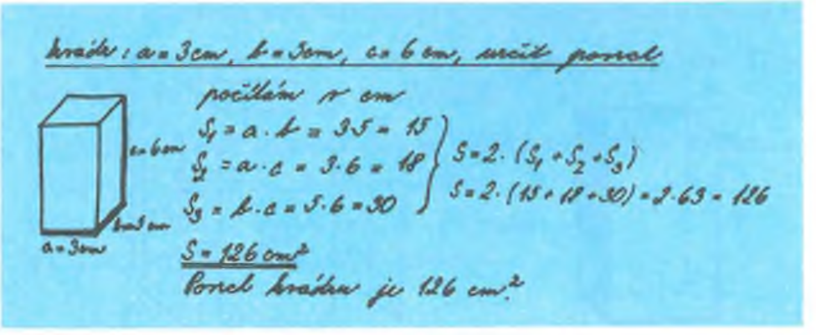


Vzorec pro povrch kvádru někdy zapisujeme ve tvaru:

$$S = 2 \cdot (S_1 + S_2 + S_3) = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$$

Tento vzorec odpovídá tomu, že nejprve sečteme obsahy tří „viditelných“ stěn. Ty tvoří právě polovinu celého povrchu.

Podívejte se, jak tento postup použil Martin při výpočtu povrchu kvádru s rozměry 3 cm, 5 cm a 6 cm.



? Jak vypočítáme povrch *pravidelného čtyřbokého hranolu*?

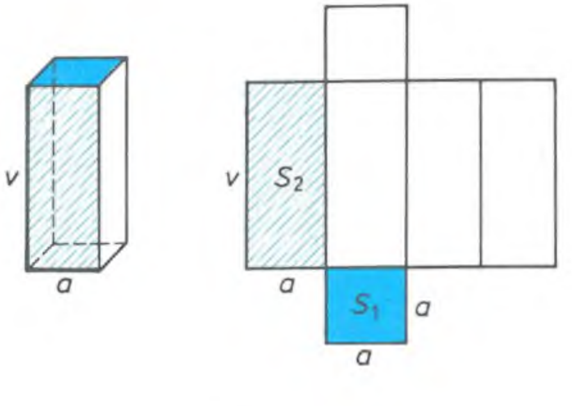
Pravidelný čtyřboký hranol je zvláštní případ kvádru. Jeho podstavy tvoří dva shodné čtverce. Jeho plášť se skládá ze čtyř shodných obdélníků.

Pravidelný čtyřboký hranol je určen délkou a podstavné hrany a výškou v. Pro obsah S_1 každé jeho podstavy (čtverec o straně a) platí:

$$S_1 = a \cdot a = a^2$$

Pro obsah S_2 každé boční stěny (obdélník o stranách a, v) platí:

$$S_2 = a \cdot v$$



Povrch S pravidelného čtyřbokého hranolu je roven součtu obsahů dvou podstav a čtyř bočních stěn:

$$\boxed{S = 2 \cdot S_1 + 4 \cdot S_2 = 2 \cdot a \cdot a + 4 \cdot a \cdot v}$$

Příklad 1. Vypočtěte povrch pravidelného čtyřbokého hranolu, jehož podstavná hrana má délku 6 cm a boční hrana 10 cm.

Řešení. Nejprve vypočteme obsah S_1 čtvercové podstavy hranolu:

$$S_1 = 6\,\text{cm} \cdot 6\,\text{cm} = 36\,\text{cm}^2$$

Pro obsah S_2 jedné boční stěny platí:

$$S_2 = 6\,\text{cm} \cdot 10\,\text{cm} = 60\,\text{cm}^2$$

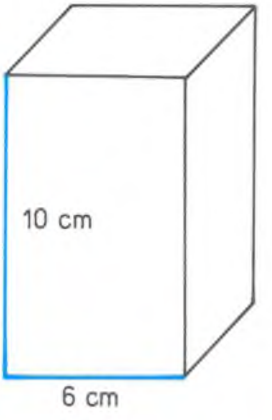
Dosadíme-li vypočtené hodnoty do vzorce

$$S = 2 \cdot S_1 + 4 \cdot S_2,$$

zjistíme, že

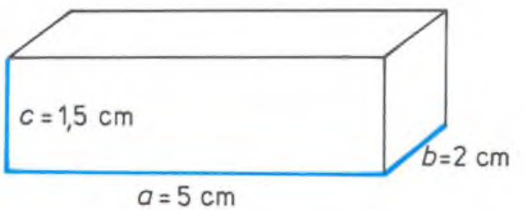
$$S = 2 \cdot 36\,\text{cm}^2 + 4 \cdot 60\,\text{cm}^2 = 312\,\text{cm}^2.$$

Hranol má povrch $312\,\text{cm}^2$.



13. Vypočtěte povrch krychle o hraně 1,2 dm.

14. Určete povrch kvádru, jehož rozměry jsou uvedeny v obrázku:



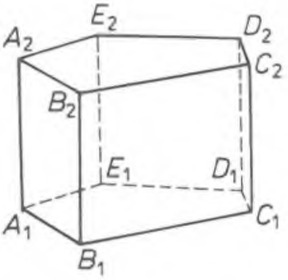
15. Délka podstavné hrany pravidelného čtyřbokého hranolu je 0,8 dm, délka jeho boční hrany je 10 cm. Určete jeho povrch.

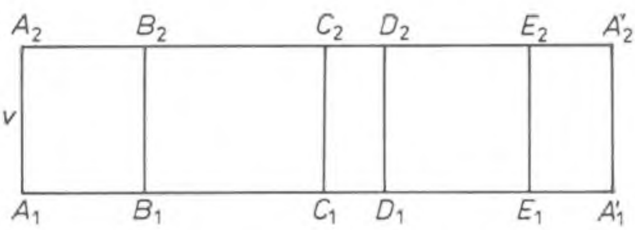
Jak vypočítáme povrch *hranolu*?

Na příkladu pravidelného čtyřbokého hranolu jsme vlastně vysvětlili obecný postup, který můžeme použít při výpočtu povrchu libovolného hranolu. Všechny jeho stěny rozdělíme na podstavy a plášť. Vypočítáme obsah S_p jedné podstavy a obsah S_{pl} pláště jako součet obsahů všech obdélníků, ze kterých je složen. Povrch S hranolu je pak součtem dvojnásobku obsahu S_p a obsahu S_{pl}:

$$\boxed{S = 2 \cdot S_p + S_{pl}}$$

Vysvětlíme nyní, jak určíme obsah pláště S_{pl}, aniž bychom museli počítat jednotlivé obsahy bočních stěn. Na obrázku je znázorněn plášť pětibokého hranolu s podstavami $A_1B_1C_1D_1E_1$ a $A_2B_2C_2D_2E_2$, který má výšku v.





Vidíme, že plášť je obdélník. Jaké jsou jeho rozměry? Šířka obdélníku je rovna výšce v hranolu. Délka obdélníku $|A_1A_1'|$ je součtem délek všech hran dolní podstavy hranolu. Je tedy rovna *obvodu* mnohoúhelníku, který je podstavou hranolu. Proto pro obsah pláště libovolného hranolu platí vzorec

$$S_{pl} = o \cdot v,$$

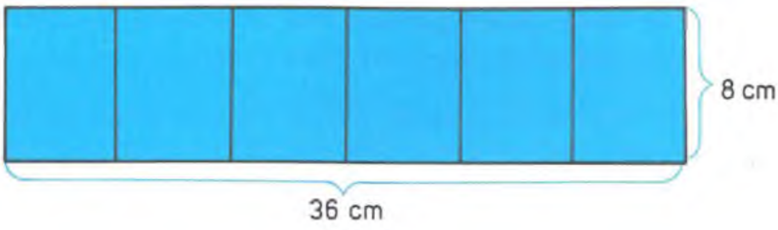
kde o je obvod podstavy a v výška hranolu.

Příklad 2. Vypočtěte obsah pláště pravidelného šestibokého hranolu, jehož podstavná hrana má délku 6 cm a výška měří 8 cm.

Řešení. Protože podstavou hranolu je pravidelný šestiúhelník o straně 6 cm, pro obvod o podstavy platí:

$$o = 6 \cdot 6\,\text{cm} = 36\,\text{cm}$$

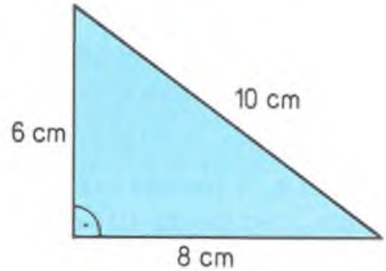
Plášť hranolu tedy tvoří obdélník s rozměry 36 cm a 8 cm.



Tento obdélník má obsah $36\,\mathrm{cm} \cdot 8\,\mathrm{cm} = 288\,\mathrm{cm}^2$.
Obsah pláště hranolu je tedy roven $288\,\mathrm{cm}^2$.

Příklad 3. Vypočtěte povrch trojbokého hranolu o výšce 1,2 dm, jehož podstavou je pravoúhlý trojúhelník se stranami 6 cm, 8 cm a 10 cm.

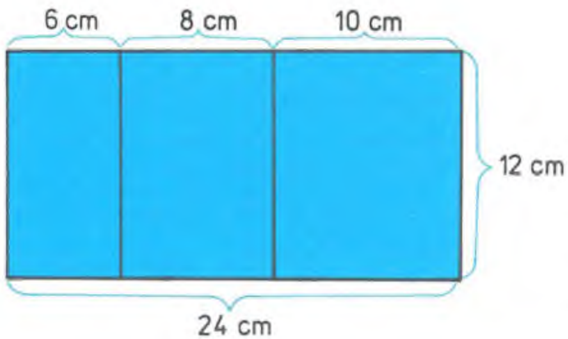
Řešení. Vypočteme nejprve obsah jedné podstavy. V daném pravoúhlém trojúhelníku měří odvěsny 6 cm a 8 cm, přepona má délku 10 cm.



Proto pro obsah jedné podstavy S_p platí:

$$S_p = \frac{1}{2} \cdot 6\,\mathrm{cm} \cdot 8\,\mathrm{cm} = 24\,\mathrm{cm}^2$$

Plášť hranolu tvoří obdélník o šířce $1{,}2\,\mathrm{dm} = 12\,\mathrm{cm}$ a délce $6\,\mathrm{cm} + 8\,\mathrm{cm} + 10\,\mathrm{cm} = 24\,\mathrm{cm}$.



Pro obsah pláště tedy platí:

$$S_{pl} = 12\,\mathrm{cm} \cdot 24\,\mathrm{cm} = 288\,\mathrm{cm}^2$$

Dosazením do vzorce pro povrch hranolu dostáváme:

$$S = 2 \cdot S_p + S_{pl} = 2 \cdot 24\,\mathrm{cm}^2 + 288\,\mathrm{cm}^2 = 48\,\mathrm{cm}^2 + 288\,\mathrm{cm}^2 = 336\,\mathrm{cm}^2$$

Trojboký hranol má povrch $336\,\mathrm{cm}^2$.

16. Vypočtěte obsah pláště pravidelného trojbokého hranolu s výškou 6 dm, jehož podstavná hrana má délku 35 cm.

17. Podstavou čtyřbokého hranolu je čtyřúhelník $ABCD$, pro který platí: $|AB| = 5\,\text{cm}$, $|BC| = 6\,\text{cm}$, $|CD| = 5{,}5\,\text{cm}$ a $|DA| = 6{,}5\,\text{cm}$. Výška hranolu je 8,5 cm. Vypočtěte obsah jeho pláště.

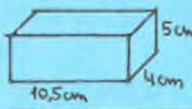
18. Podstavou čtyřbokého hranolu je pravoúhlý lichoběžník se základnami 6 dm a 3 dm, jehož ramena měří 4 dm a 5 dm. Určete jeho povrch, jestliže délka boční hrany hranolu je 3 dm.

19. Vypočtěte povrch čtyřbokého hranolu, jehož podstavou je rovnoběžník se stranami $a = 15\,\text{mm}$ a $b = 13\,\text{mm}$ a výškou $v_a = 12\,\text{mm}$. Výška hranolu je 25 mm.

Na závěr kapitoly uvedeme ještě dvě praktické úlohy. Jejich řešení jsme převzali ze Zdeňkova a Evina sešitu.

Příklad 4. V továrně balí vitaminy DUOVIT do papírových krabiček tvaru kvádru. Jsou dlouhé 10,5 cm, široké 4 cm a vysoké 5 cm. Denně jich vyrobí 1 500 kusů. Jaká je denní spotřeba papíru, jestliže se navíc počítá s 20 % papíru na lepení a záložky?

Zdeněk



povrch krabičky ...... S
spotřeba na 1 krabičku .. 120%S
na 1500 krabiček X

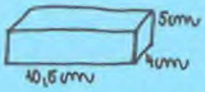
$S = 2\cdot 10{,}5\cdot 4\,\text{cm}^2 + 2\cdot 10{,}5\cdot 5\,\text{cm}^2 + 2\cdot 4\cdot 5\,\text{cm}^2 = 84\,\text{cm}^2 + 105\,\text{cm}^2 + 40\,\text{cm}^2 = 229\,\text{cm}^2$

120%S je $1{,}2\cdot 229\,\text{cm}^2 = 274{,}8\,\text{cm}^2$

$X = 1500\cdot 274{,}8\,\text{cm}^2 = 412\,200\,\text{cm}^2 = 41{,}22\,\text{m}^2 \doteq 42\,\text{m}^2$

Denně se spotřebuje na krabičky DUOVITU asi 42 m² papíru.

Eva



na krabičku ...... $S + 20\%\, S$

na 1500 krabiček ....?

počítáme v cm:

$S = 2 \cdot S_p + S_{pl}$ $\qquad S_p = 10{,}5 \cdot 4 = 42$

$\qquad S_{pl} = (10{,}5 + 4 + 10{,}5 + 4) \cdot 5 = 145$

$S = 2 \cdot 42 + 145 = 84 + 145 = 229$

$S = 229\ cm^2$

na 1 krabičku : $229\ cm^2$

na 1500 krabiček : $1500 \cdot 229\ cm^2 = 343500\ cm^2 = 34{,}35\ m^2$

100 % ...... $34{,}35\ m^2$

1 % ...... $0{,}3435\ m^2$

20% ...... $20 \cdot 0{,}3435\ m^2 = 6{,}8700\ m^2$

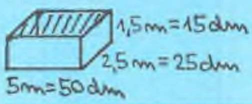
120% ...... $34{,}35\ m^2 + 6{,}87\ m^2 = 41{,}22\ m^2 \doteq 42\ m^2$

Na 1500 krabiček se denně spotřebují necelých $42\ m^2$ papíru.

Příklad 5. Určete, kolik čtvercových dlaždiček o straně 5 cm je třeba k vydláždění dna a stěn zahradního bazénu tvaru kvádru. Hloubka bazénu je 1,5 m, šířka 2,5 m a délka 5 m. Spáry mezi dlaždičkami zanedbejte.

Zdeněk

Bazén - kvádr: vydláždit dlaždičkami - čtverec:



kolik dlaždiček?

4 dlaždičky ... $1\ dm^2$

dno: $S_1 = 50\ dm \cdot 25\ dm = 1\,250\ dm^2$

$1250 \cdot 4 = 5\,000$ (dlaždiček)

přední stěna: $S_2 = 50\ dm \cdot 15\ dm = 750\ dm^2$

$750 \cdot 4 = 3\,000$ (dlaždiček)

boční stěna : $S_3 = 25\ dm \cdot 15\ dm = 375\ dm^2$

$375 \cdot 4 = 1\,500$ (dlaždiček)

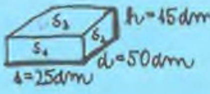
celkem:

5 000
6 000
3 000
14 000

Na vydláždění bazénu bude potřeba 14 000 dlaždiček.

Eva

čtvercové dlaždičky ...... $a = 5\,cm = 0{,}5\,dm$
vydláždit bazén ..... x dlaždiček
rozměry bazénu: hloubka $h = 1{,}5\,m = 15\,dm$
šířka $š = 2{,}5\,m = 25\,dm$
délka $d = 5\,m = 50\,dm$



počítáme v dm:
$S_1 = š \cdot h = 25 \cdot 15 = 375$
$S_2 = d \cdot h = 50 \cdot 15 = 750$
$S_3 = š \cdot d = 25 \cdot 50 = 1250$

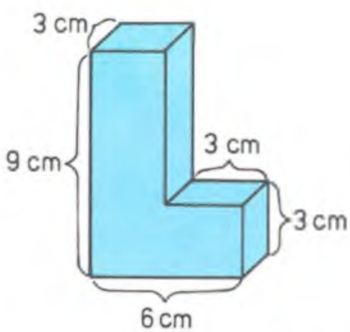
$\boxed{S_4}$ $a = 0{,}5\,dm$
$S_4 = a \cdot a = 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$

$S = 2 \cdot S_1 + 2 \cdot S_2 + S_3 = 2 \cdot 375 + 2 \cdot 750 + 1250 = 750 + 1500 + 1250 = 3500$
$x = S : S_4 = 3500 : 0{,}25 = \underline{\underline{14000}}$

K vydláždění bazénu je třeba 14000 dlaždiček.

20. Kolik m^2 skla je třeba k výrobě otevřeného akvária tvaru kvádru o délce 1 m, šířce 40 cm a výšce 60 cm, počítáme-li s desetiprocentním odpadem? (Tloušťku skla zanedbejte.)

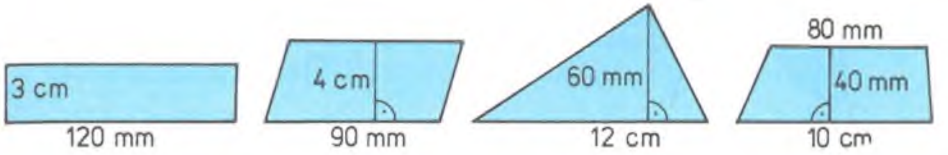
21. Vypočtěte povrch „prostorového" písmena L. Potřebné rozměry jsou na obrázku.



■ **22.** Změřte rozměry krabičky od zápalek a vypočtěte, kolik cm^2 papíru je třeba k výrobě obou jejích částí. (Spotřebu papíru na lepení zanedbejte.)

CVIČENÍ 3

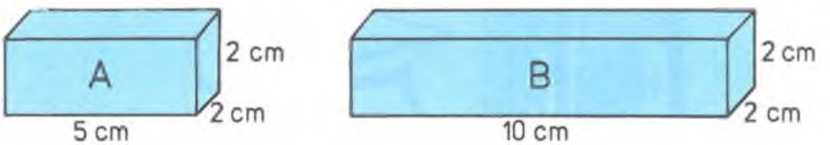
□ **1.** Určete obsahy obdélníku, rovnoběžníku, trojúhelníku a lichoběžníku a vyjádřete je v cm^2.



□ **2.** Vypočtěte povrch krychle o hraně

a) 1 cm, b) 2 cm, c) 3 cm, d) 4 cm.

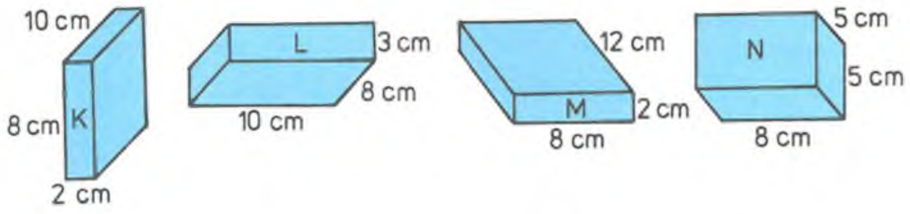
3. Kvádry A a B mají dva rozměry shodné. Třetí rozměr kvádru B je dvakrát větší než třetí rozměr kvádru A. Má kvádr B dvakrát větší povrch než kvádr A? O správnosti své odpovědi se přesvědčte výpočtem.



■ **4.** Odhadněte v dm^2 povrch kvádru se stejnými rozměry, jako má vaše učebnice matematiky. Pak potřebné rozměry změřte a povrch vypočtěte.

5. Kolikrát je povrch velké krabičky od zápalek větší než povrch malé krabičky? Velká krabička má rozměry 97 mm, 52 mm a 27 mm, malá krabička 50 mm, 37 mm a 15 mm. Výsledek zaokrouhlete na desetiny.

6. Kvádry K, L, M, N uspořádejte podle velikosti jejich povrchů. Nejprve odhadněte, který kvádr má povrch největší a který nejmenší.



7. Odhadněte, kolik dm^2 papíru je třeba k výrobě krabice na mléko, zanedbáme-li záložky a odpad. Pak spotřebu papíru vypočtěte. Litrová krabice má rozměry 6 cm, 9,5 cm a 16,5 cm.

□ **8.** Určete povrch krychle, o které víme, že součet délek všech jejích hran je 36 cm.

9. Vypočtěte povrch trojbokého hranolu, jehož podstavou je pravoúhlý trojúhelník. Výška hranolu je 15 cm, délky jeho podstavných hran jsou 15 cm, 12 cm a 9 cm.

10. Trojboký hranol má povrch S, obsah jeho pláště je S_{pl} a obsah jedné podstavy je S_p. Znáte-li dva údaje, vypočtěte třetí:

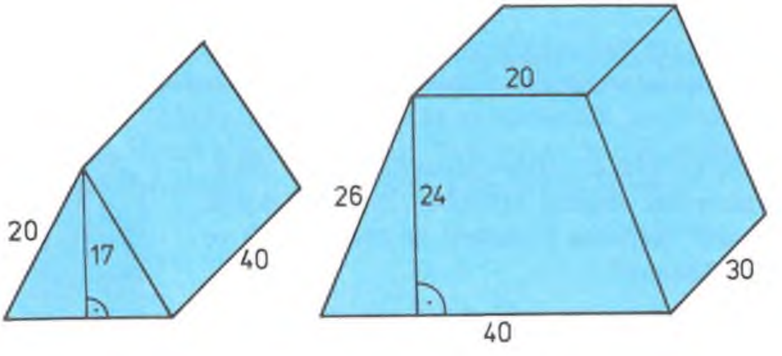
a) $S_p = 6\,\mathrm{cm}^2$, $S_{pl} = 96\,\mathrm{cm}^2$

b) $S = 378\,\mathrm{cm}^2$, $S_p = 39\,\mathrm{cm}^2$

c) $S = 258\,\mathrm{cm}^2$, $S_{pl} = 180\,\mathrm{cm}^2$

$\ast$**11.** Pravidelný čtyřboký hranol má podstavnou hranu délky 8 cm. Jeho povrch měří 288 cm^2. Vypočtěte délku boční hrany tohoto hranolu.

■**12.** Milan se chtěl přesvědčit, že umí počítat povrchy hranolů. Našel si ve stavebnici dvě kostky tvaru hranolu. Podstavou jedné byl rovnostranný trojúhelník, druhé rovnoramenný lichoběžník. Změřil potřebné údaje s přesností na milimetry a zapsal je do náčrtku. Pak vypočítal povrchy obou hranolů a vyšlo mu 27,4 cm^2 a 54,6 cm^2. Počítal správně?



5 OBJEM HRANOLU

Dobře víte, že množství kapaliny, které se vejde do dané nádoby, vyjadřujeme veličinou zvanou *objem nádoby*. Z hodin prvouky si možná vzpomenete na postup, jak ponořením do kapaliny v odměrném válci zjišťujeme *objem tělesa*.

Tato veličina tedy vyjadřuje v určitých jednotkách, kolik „místa“ dané těleso v prostoru zaujímá.

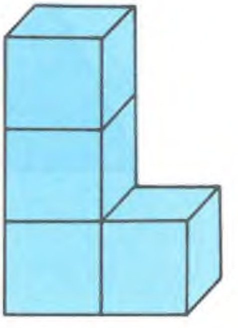
V hodinách matematiky se naučíme počítat objemy některých těles, známe-li jejich *tvar* a *rozměry*. Budeme při tom vycházet ze dvou základních vlastností objemu:

- Tělesa, která mají stejný „tvar" a „velikost" (tzn. liší se jen umístěním v prostoru), mají stejný objem.
- Objem tělesa, které je rozděleno na několik částí, je roven součtu objemů jednotlivých částí.

Uvědomte si, že podobné vlastnosti mají *obsahy* rovinných útvarů. To odpovídá tomu, že v matematice má objem těles v prostoru obdobný význam jako obsah útvarů v rovině.

Ukažme si na jednoduchém příkladu, jak se předchozí vlastnosti objemu uplatňují. Na obrázku je „prostorové" písmeno L složené ze čtyř krychlí se shodnými hranami.

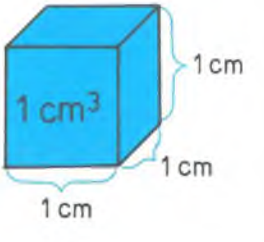
Všechny čtyři krychle mají stejný objem. Objem písmena L je roven součtu objemů všech čtyř krychlí, tj. čtyřnásobku objemu jedné z nich.



Myšlenku rozkladu tělesa na menší shodné krychle uplatníme i u dalších těles. Objem jedné takové krychle, která má dohodnutou velikost, budeme považovat za jednotku objemu.

? Jaké jednotky objemu používáme?

Nejčastěji budeme pracovat s jednotkou objemu, která je rovna objemu krychle o hraně 1 cm. Tuto jednotku nazýváme **1 centimetr krychlový** a značíme 1 cm^3.



Menší jednotkou objemu je 1 *milimetr krychlový*. Je to objem krychle o hraně 1 mm. Značíme ji 1 mm^3.

Používáme také jednotky objemu větší než $1\,\mathrm{cm}^3$. Jsou to:

- 1 *decimetr krychlový* ($1\,\mathrm{dm}^3$)
- 1 *metr krychlový* ($1\,\mathrm{m}^3$)
- 1 *kilometr krychlový* ($1\,\mathrm{km}^3$)

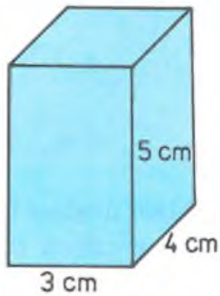
Sami vysvětlete, co znamenají.

Uvedené jednotky někdy pojmenováváme centimetr *kubický*, decimetr *kubický* apod. Slovo *cubus* (čti „kubus") v latině znamená *krychle*.

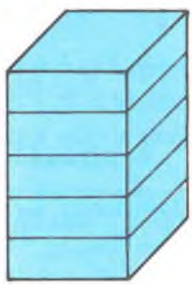
Možná vás zarazí, že jsme uvedli jiné jednotky objemu, než jsou ty, s kterými jste doposud pracovali. Byl to 1 *litr* a jednotky z něho odvozené: 1 decilitr (1 dl), 1 hektolitr (1 hl) aj. Tyto jednotky se zpravidla používají k určení objemů kapalin, plynů a sypkých látek. Vrátíme se k nim později, stejně jako k převodním vztahům mezi různými jednotkami objemu.

Jak vypočteme objem *kvádru*?

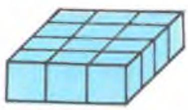
Na obrázku je znázorněn kvádr o rozměrech 3 cm, 4 cm a 5 cm. Jak vyjádříme jeho objem v centimetrech krychlových? Musíme zjistit, zda je daný kvádr možné rozdělit na celý počet krychlí o hraně 1 cm a kolik krychlí při takovém rozdělení vznikne.



Celý kvádr o výšce 5 cm nejprve rozdělíme na 5 stejných „vrstev" o „tloušťce" 1 cm.

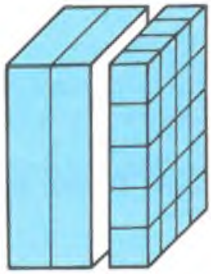


Z dalšího obrázku je jasné, že každou vrstvu můžeme rozdělit na $(3 \cdot 4)$ krychlí = 12 krychlí o hraně 1 cm.

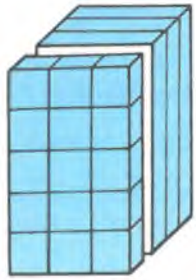


Proto je objem jedné vrstvy roven $12\,\mathrm{cm}^3$. Objem celého kvádru je tedy $5 \cdot 12\,\mathrm{cm}^3 = 60\,\mathrm{cm}^3$.

Ke stejnému výsledku dospějeme i při jiných děleních kvádru na vrstvy:



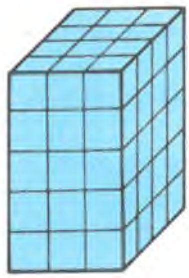
$3 \cdot 20\,\text{cm}^3 = 60\,\text{cm}^3$



$4 \cdot 15\,\text{cm}^3 = 60\,\text{cm}^3$

Všimněte si, že výsledný objem je roven součinu všech tří rozměrů kvádru:

$$60\,\text{cm}^3 = 3\,\text{cm} \cdot 4\,\text{cm} \cdot 5\,\text{cm}$$



Podobnou úvahou lze zjistit objem libovolného kvádru, jehož rozměry jsou vyjádřeny *celými* čísly ve stejných jednotkách.

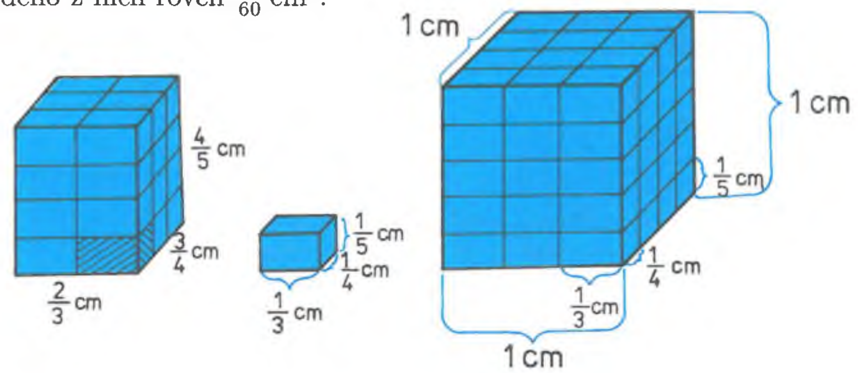
Objem kvádru o rozměrech a, b, c je roven součinu $a \cdot b \cdot c$. Přitom rozměry a, b, c musí být vyjádřeny ve stejných jednotkách. Výsledný objem vyjde v příslušných jednotkách krychlových.

Objem kvádru značíme písmenem V. Předchozí pravidlo zapisujeme stručně vzorcem

$$\boxed{V = a \cdot b \cdot c}$$

Pravidlo pro výpočet objemu platí i v případech, kdy rozměry kvádru nejsou v daných jednotkách vyjádřeny celými čísly, ale desetinnými čísly nebo zlomky.

Vysvětlíme to na příkladu kvádru s rozměry $\frac{2}{3}$ cm, $\frac{3}{4}$ cm a $\frac{4}{5}$ cm. Představíme si, že celý kvádr je rozdělen na $2 \cdot 3 \cdot 4$ menších kvádrů, tj. na 24 kvádrů s rozměry $\frac{1}{3}$ cm, $\frac{1}{4}$ cm a $\frac{1}{5}$ cm. Protože právě $3 \cdot 4 \cdot 5$ kvádrů uvedených rozměrů, tj. 60 takových kvádrů, vyplní krychli o hraně 1 cm^3, je objem každého z nich roven $\frac{1}{60}$ cm^3.



Objem původního kvádru je proto roven

$$\frac{24}{60}\,\text{cm}^3 = \frac{2\cdot 3\cdot 4}{3\cdot 4\cdot 5}\,\text{cm}^3 = \frac{2}{3}\,\text{cm} \cdot \frac{3}{4}\,\text{cm} \cdot \frac{4}{5}\,\text{cm}.$$

Příklad 1. Vypočtěte objem kvádru o rozměrech a, b, c, je-li:

a) $a = 12\,\text{cm}$, $b = 7\,\text{cm}$, $c = 20\,\text{cm}$

b) $a = 1{,}3\,\text{dm}$, $b = 0{,}8\,\text{dm}$, $c = 2\,\text{dm}$

c) $a = 8\,\text{cm}$, $b = 45\,\text{mm}$, $c = 1{,}6\,\text{dm}$

Řešení

a) Dosadíme do vzorce pro objem kvádru:

$$V = a \cdot b \cdot c = 12\,\text{cm} \cdot 7\,\text{cm} \cdot 20\,\text{cm} = 1\,680\,\text{cm}^3$$

b) I v tomto případě stačí dosadit do vzorce pro objem kvádru:

$$V = a \cdot b \cdot c = 1{,}3\,\text{dm} \cdot 0{,}8\,\text{dm} \cdot 2\,\text{dm} = 2{,}08\,\text{dm}^3$$

c) Před vlastním výpočtem objemu vyjádříme všechny rozměry ve stejných jednotkách délky. Zvolíme například centimetry:

$$a = 8\,\text{cm} \quad b = 45\,\text{mm} = 4{,}5\,\text{cm} \quad c = 1{,}6\,\text{dm} = 16\,\text{cm}$$

Objem kvádru dostaneme v centimetrech krychlových:

$$V = a \cdot b \cdot c = 8\,\text{cm} \cdot 4{,}5\,\text{cm} \cdot 16\,\text{cm} = 576\,\text{cm}^3$$

1. Vypočtěte objem kvádru s rozměry a, b, c:

a) $a = 15\,\mathrm{mm}$, $b = 25\,\mathrm{mm}$, $c = 80\,\mathrm{mm}$

b) $a = 1{,}5\,\mathrm{dm}$, $b = 0{,}4\,\mathrm{dm}$, $c = 2{,}8\,\mathrm{dm}$

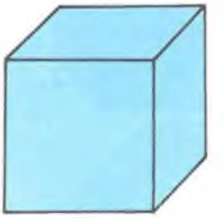
c) $a = 1{,}5\,\mathrm{dm}$, $b = 40\,\mathrm{cm}$, $c = 5{,}5\,\mathrm{dm}$

2. Změřte rozměry krabičky od zápalek a vypočtěte její objem.

Jak vypočítáme objem *krychle*?

Víme již, že krychle je zvláštním případem kvádru, jehož všechny tři rozměry jsou stejné. Objem krychle také značíme písmenem V. Má-li krychle hranu délky a, vypočteme její objem podle vzorce

$$\boxed{V = a \cdot a \cdot a}$$



Tak například krychle o hraně 2,5 cm má objem

$$V = 2{,}5\,\mathrm{cm} \cdot 2{,}5\,\mathrm{cm} \cdot 2{,}5\,\mathrm{cm} = 15{,}625\,\mathrm{cm}^3.$$

Vzorec pro objem krychle zapisujeme zkráceně pomocí *mocnin* ve tvaru:

$$V = a^3$$

Výraz a^3 čteme „a na třetí". Znamená součin tří stejných činitelů:

$$a^3 = a \cdot a \cdot a$$

Podrobněji se o mocninách budeme učit později. Nyní jen připomeňme, že s *druhou mocninou* jsme se již setkali, například v zápisu vzorce pro obsah S čtverce o straně a:

$$S = a^2 = a \cdot a$$

□ 3. Vypočtěte objem krychle o hraně 2 m.

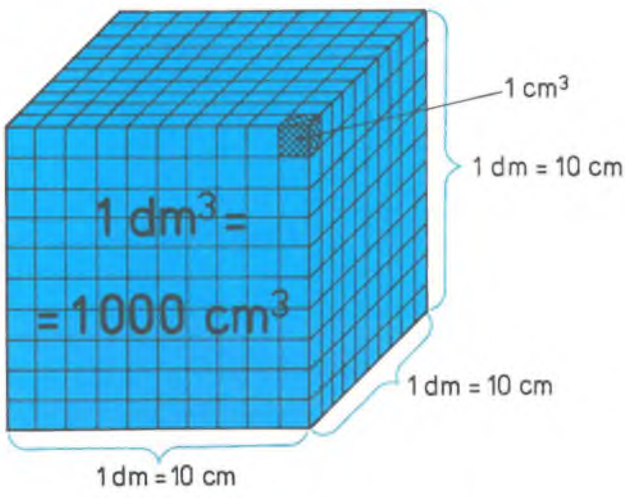
Jak převádíme jednotky objemu?

?

Vysvětlíme nyní, jak se objem tělesa v daných jednotkách vyjádří v jednotkách jiných.

Krychli o hraně 1 dm můžeme rozdělit na $10 \cdot 10 \cdot 10$ krychlí, tj. na 1 000 krychlí o hraně 1 cm. Proto platí:

$$1\,\mathrm{dm}^3 = 1\,000\,\mathrm{cm}^3$$



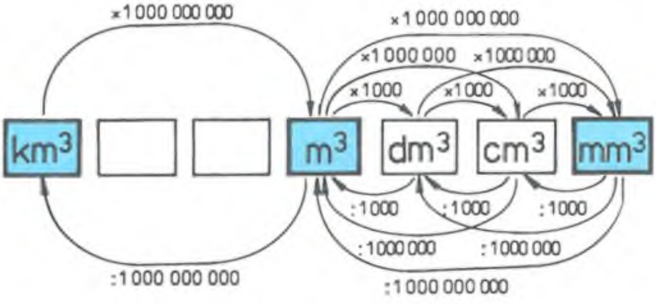
Ve fyzice se za základní jednotku objemu považuje **1 metr krychlový**. Rozdělením krychle o hraně 1 m na 10 · 10 · 10 krychlí, tj. na 1 000 krychlí o hraně 1 dm, zjistíme, že platí

$$1\,\mathrm{m}^3 = 1\,000\,\mathrm{dm}^3.$$

Podobně je možné odvodit i další převodní vztahy mezi jednotkami objemu. Jsou uvedeny v následující tabulce:

Název	Značka	Převodní vztah
1 kilometr krychlový	$1\,\mathrm{km}^3$	$1\,\mathrm{km}^3 = 1\,000\,000\,000\,\mathrm{m}^3$
1 decimetr krychlový	$1\,\mathrm{dm}^3$	$1\,\mathrm{dm}^3 = 0{,}001\,\mathrm{m}^3$
1 centimetr krychlový	$1\,\mathrm{cm}^3$	$1\,\mathrm{cm}^3 = 0{,}000\,001\,\mathrm{m}^3$
1 milimetr krychlový	$1\,\mathrm{mm}^3$	$1\,\mathrm{mm}^3 = 0{,}000\,000\,001\,\mathrm{m}^3$

Převodní vztahy mezi různými jednotkami objemu lze přehledně znázornit schématem:



4. Doplňte:

a) $1\,\mathrm{dm}^3 = \ldots\ \mathrm{cm}^3$
$1\,\mathrm{dm}^3 = \ldots\ \mathrm{m}^3$
$1\,\mathrm{dm}^3 = \ldots\ \mathrm{mm}^3$

b) $1\,\mathrm{mm}^3 = \ldots\ \mathrm{cm}^3$
$1\,\mathrm{mm}^3 = \ldots\ \mathrm{dm}^3$
$1\,\mathrm{mm}^3 = \ldots\ \mathrm{m}^3$

5. Vyjádřete v daných jednotkách objemu:

a) $1\,\mathrm{dm}^3 = \ldots\ \mathrm{m}^3 = \ldots\ \mathrm{cm}^3 = \ldots\ \mathrm{mm}^3$
b) $2\,\mathrm{dm}^3 = \ldots\ \mathrm{m}^3 = \ldots\ \mathrm{cm}^3 = \ldots\ \mathrm{mm}^3$
c) $25\,\mathrm{dm}^3 = \ldots\ \mathrm{m}^3 = \ldots\ \mathrm{cm}^3 = \ldots\ \mathrm{mm}^3$
d) $0{,}04\,\mathrm{dm}^3 = \ldots\ \mathrm{m}^3 = \ldots\ \mathrm{cm}^3 = \ldots\ \mathrm{mm}^3$

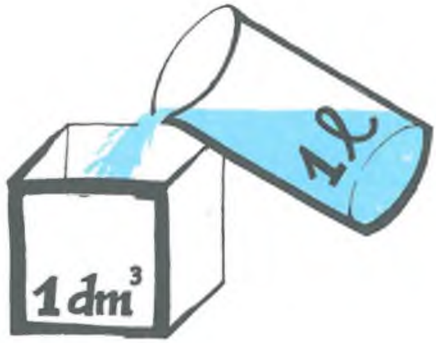
6. Doplňte správné jednotky:

a) $25\,\text{cm}^3 = 25\,000 \ldots$
$25\,\text{cm}^3 = 0{,}025 \ldots$
$25\,\text{cm}^3 = 0{,}000\,025 \ldots$

b) $0{,}007\,\text{m}^3 = 7\,000 \ldots$
$0{,}007\,\text{m}^3 = 7 \ldots$
$0{,}007\,\text{m}^3 = 7\,000\,000 \ldots$

Zbývá ještě vysvětlit vztah mezi jednotkami odvozenými z 1 metru krychlového a jednotkami odvozenými z 1 litru. Zapamatujte si, že platí:

$$\boxed{1\,\text{dm}^3 = 1\,\text{l}}$$



Proto také například platí:

$$1\,\text{dl} = 0{,}1\,\text{l} = 0{,}1\,\text{dm}^3$$
$$1\,\text{hl} = 100\,\text{l} = 100\,\text{dm}^3$$
$$1\,\text{m}^3 = 1\,000\,\text{dm}^3 = 1\,000\,\text{l}$$
$$1\,\text{cm}^3 = 0{,}001\,\text{dm}^3 = 0{,}001\,\text{l}$$

7. Doplňte:

a) $1\,\text{cm}^3 = \ldots\ \text{l}$
b) $1\,\text{hl} = \ldots\ \text{m}^3$
c) $1\,\text{mm}^3 = \ldots\ \text{dl}$
d) $1\,\text{dl} = \ldots\ \text{cm}^3$

8. Vyjádřete v daných jednotkách objemu:

a) $5\,\text{dm}^3 = \ldots\ \text{l} = \ldots\ \text{dl} = \ldots\ \text{hl}$
b) $2\,\text{m}^3 = \ldots\ \text{l} = \ldots\ \text{dl} = \ldots\ \text{hl}$
c) $25\,\text{l} = \ldots\ \text{dm}^3 = \ldots\ \text{cm}^3 = \ldots\ \text{m}^3$
d) $0{,}04\,\text{hl} = \ldots\ \text{dm}^3 = \ldots\ \text{cm}^3 = \ldots\ \text{m}^3$

Jak vypočteme objem *hranolu*?

?

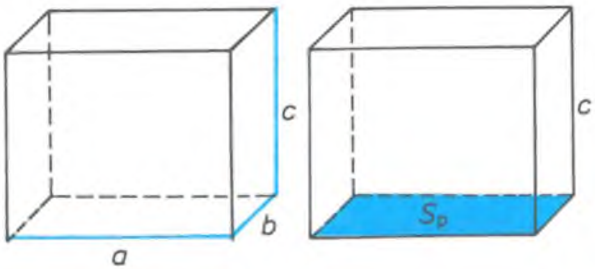
Zatím jsme se naučili počítat objemy některých „speciálních“ hranolů – krychlí a kvádrů. Nyní vysvětlíme, jak se vypočítá objem hranolu, jehož podstavou je libovolný mnohoúhelník. Nejprve se však znovu vrátíme ke kvádru a na vzorec pro jeho objem se podíváme trochu „jinak“.

Víme již, že objem V kvádru o rozměrech a, b, c vypočteme podle vzorce

$$V = a \cdot b \cdot c.$$

Jaký význam má součin $a \cdot b$? Pokud kvádr vhodně „natočíme“, vyjadřuje tento součin ***obsah podstavy*** tohoto hranolu. Třetí rozměr c je pak jeho ***výškou***. Platí tedy:

Objem kvádru je roven součinu obsahu jeho podstavy a výšky.



Stejné pravidlo platí i pro objem libovolného hranolu.

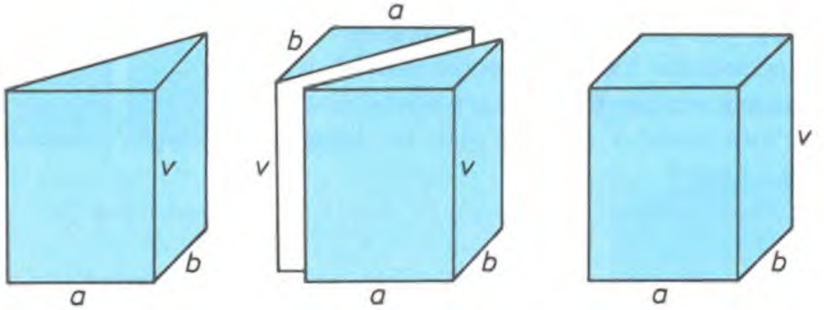
Objem hranolu je roven součinu obsahu jeho podstavy a výšky.

Objem hranolu značíme také písmenem V. Označíme-li jako dříve S_p obsah podstavy hranolu a v jeho výšku, lze předchozí pravidlo vyjádřit vzorcem:

$$\boxed{V = S_p \cdot v}$$

Dosadíme-li do tohoto vzorce výšku v daných jednotkách délky (např. v cm) a obsah podstavy v odpovídajících jednotkách čtverečných (tedy v cm^2), dostaneme objem v odpovídajících jednotkách krychlových (v našem případě v cm^3).

Vysvětlíme, proč předchozí vzorec platí nejen pro kvádr. Nejprve vezmeme trojboký hranol, jehož podstavou je *pravoúhlý* trojúhelník. Odvěsny tohoto trojúhelníku označíme a a b. Vezmeme ještě jednu kopii téhož hranolu a z obou trojbokých hranolů „slepíme“ kvádr:



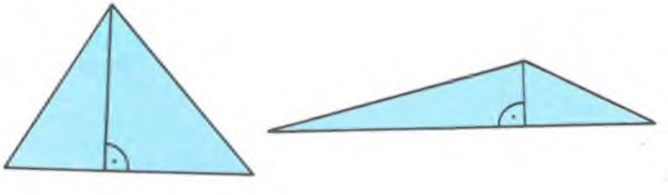
Slepený kvádr má stejnou výšku v jako původní hranol. Jeho podstavou je obdélník s obsahem $a \cdot b$. Objem kvádru $a \cdot b \cdot v$ je dvojnásobkem objemu původního hranolu. Proto pro objem V původního hranolu platí:

$$V = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot v$$

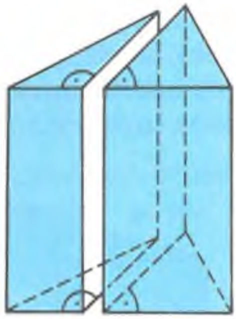
Avšak součin $\frac{1}{2} \cdot a \cdot b$ vyjadřuje obsah S_p podstavy tohoto hranolu. Proto vzorec pro jeho objem můžeme zapsat takto:

$$V = S_p \cdot v$$

Nyní si vezmeme trojboký hranol, jehož podstavou je *ostroúhlý* nebo *tupoúhlý* trojúhelník. Takový trojúhelník můžeme rozdělit na dva pravoúhlé trojúhelníky:

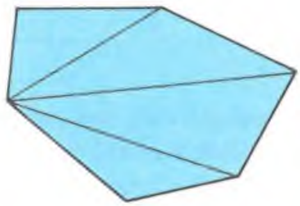


Rozdělíme takto obě podstavy a s nimi i hranol podobně jako na obrázku. Každá z obou částí je trojboký hranol, jehož podstavou je pravoúhlý trojúhelník. Jak víme, pro takové hranoly vzorec $V = S_p \cdot v$ platí.



Obě části jsou hranoly se stejnou výškou rovnou výšce původního hranolu. Součet obsahů jejich podstav je roven obsahu podstavy původního hranolu. Proto vzorec $V = S_p \cdot v$ platí pro libovolný trojboký hranol.

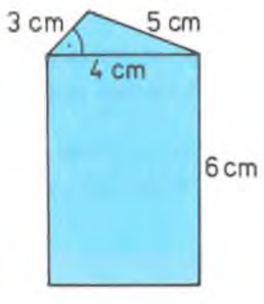
Zbývá ještě vysvětlit, proč stejný vzorec platí pro hranol, jehož podstavou je libovolný mnohoúhelník. To vyplývá z toho, že každý mnohoúhelník je možné rozdělit na trojúhelníky. Proto můžeme každý hranol rozdělit na několik trojbokých hranolů se stejnou výškou.



Výpočet objemu hranolů si procvičíme na dvou příkladech.

Příklad 2. Vypočtěte objem hranolu, jehož podstavou je pravoúhlý trojúhelník o stranách 3 cm, 4 cm a 5 cm. Výška hranolu je 6 cm.

Řešení. Nejprve vypočteme obsah S_p podstavy hranolu. Podstavou je pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami 3 cm a 4 cm, proto platí



$$S_p = \tfrac{1}{2} \cdot 3\,\mathrm{cm} \cdot 4\,\mathrm{cm} = 6\,\mathrm{cm}^2.$$

Dosazením do vzorce pro objem hranolu dostáváme

$$V = S_p \cdot v = 6\,\mathrm{cm}^2 \cdot 6\,\mathrm{cm} = 36\,\mathrm{cm}^3.$$

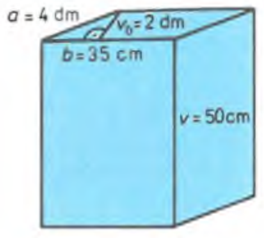
Příklad 3. Podstavou čtyřbokého hranolu je rovnoběžník $ABCD$ o stranách $a = 4$ dm a $b = 35$ cm a výšce $v_b = 2$ dm. Boční hrana má délku 50 cm. Vypočtěte objem tohoto hranolu.

Řešení. Obsah S_p podstavy hranolu vypočteme ze vzorce

$$S_p = b \cdot v_b.$$

Vyjádříme oba potřebné údaje ve stejných jednotkách, např. v decimetrech: $b = 3{,}5$ dm, $v_b = 2$ dm. Platí tedy

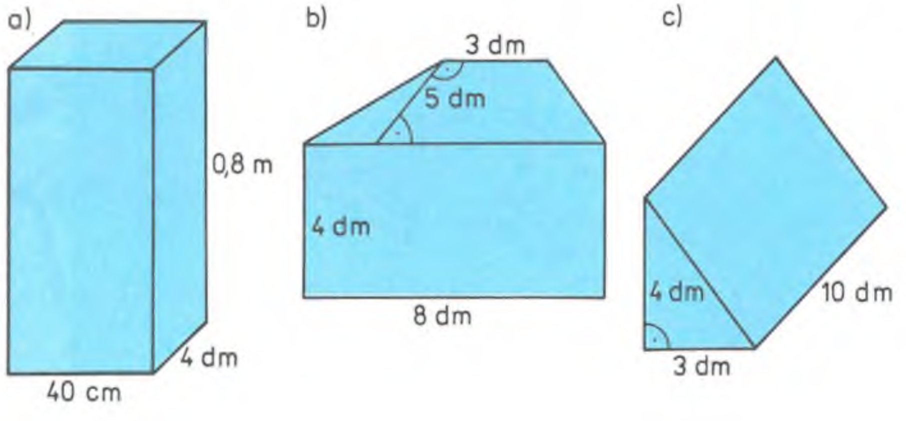
$$S_p = 3{,}5\,\text{dm} \cdot 2\,\text{dm} = 7\,\text{dm}^2.$$



Také výšku hranolu vyjádříme v decimetrech: $v = 5$ dm. Dosadíme do vzorce pro objem:

$$V = S_p \cdot v = 7\,\text{dm}^2 \cdot 5\,\text{dm} = 35\,\text{dm}^3$$

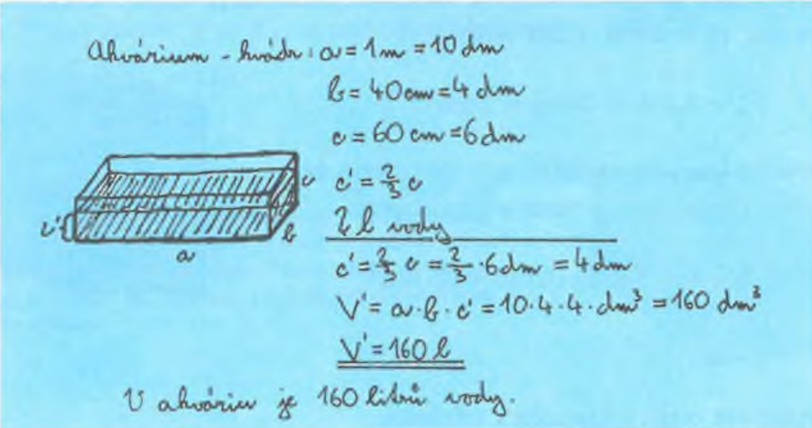
9. Vypočtěte objem hranolu z obrázku.



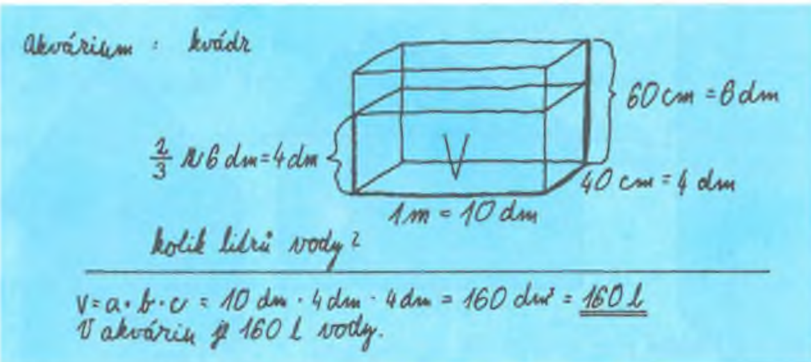
Na závěr kapitoly uvedeme ještě jednu praktickou úlohu. Její řešení uvádíme z Jakubova a Honzova sešitu.

Příklad 4. Určete, kolik litrů vody je v akváriu tvaru kvádru s obdélníkovou podstavou o rozměrech 1 m a 40 cm. Výška akvária je 60 cm a akvárium je naplněno vodou do dvou třetin výšky.

Jakub



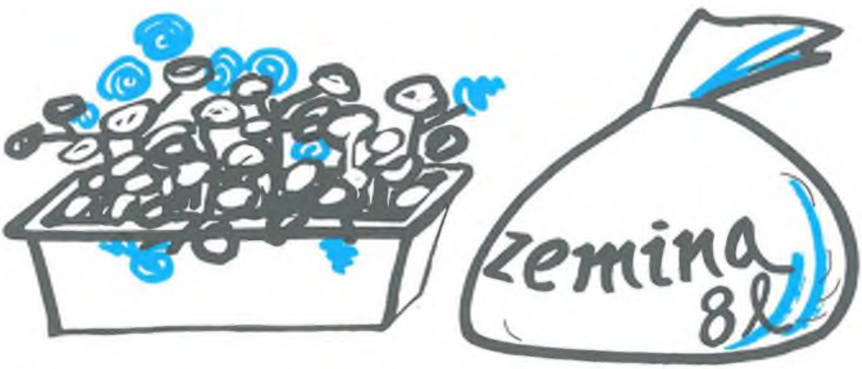
Honza



10. Do přívěsného vozíku za automobil je možno naložit 442 kg nákladu. Jaký je objem úložného prostoru vozíku, jestliže v prospektu jsou uvedeny jeho vnitřní rozměry: 1 950 mm, 1 560 mm a 1 100 mm?

11. V papírové krabičce je lahvička obsahující 50 ml voňavky. Krabička má tvar kvádru s rozměry 6 cm, 3 cm a 10 cm. Vypočtěte přibližně, kolik procent objemu krabičky tvoří voňavka.

12. Maminka koupila zeminu do 6 truhlíků na balkon. V obchodě měli zeminu v sáčcích po 8 l za 29 Kč. Kolik sáčků musela koupit a kolik za ně zaplatit, jestliže jí syn Ondra změřil, že každý truhlík tvaru kvádru je 40 cm dlouhý, 15 cm široký a 12 cm hluboký?



CVIČENÍ 4

1. Vyjádřete v mm^3: $9\,cm^3$, $34\,cm^3$, $1{,}5\,cm^3$, $0{,}08\,cm^3$, $0{,}128\,cm^3$.

2. Vyjádřete v cm^3: $8\,000\,mm^3$, $756\,mm^3$, $52\,mm^3$, $4\,mm^3$.

3. Doplňte:

a) $2\,m^3 = \ldots\,dm^3$
$1{,}3\,m^3 = \ldots\,dm^3$
$2\,dm^3 = \ldots\,m^3$
$985\,dm^3 = \ldots\,m^3$

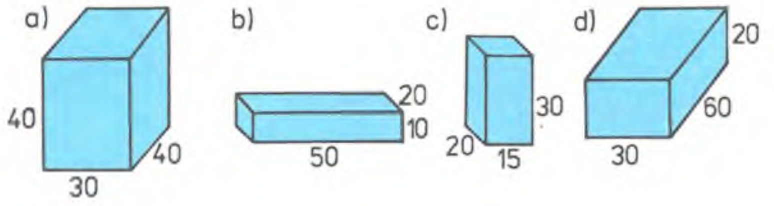
b) $32\,dm^3 = \ldots\,cm^3$
$6{,}2\,dm^3 = \ldots\,cm^3$
$32\,cm^3 = \ldots\,dm^3$
$7\,450\,cm^3 = \ldots\,dm^3$

c) $20\,cm^3 = \ldots\,mm^3$
$0{,}04\,cm^3 = \ldots\,mm^3$
$14\,mm^3 = \ldots\,cm^3$
$4\,250\,mm^3 = \ldots\,cm^3$

d) $1{,}3\,l = \ldots\,dm^3$
$0{,}05\,l = \ldots\,cm^3$
$150\,cm^3 = \ldots\,dl$
$0{,}15\,m^3 = \ldots\,hl$

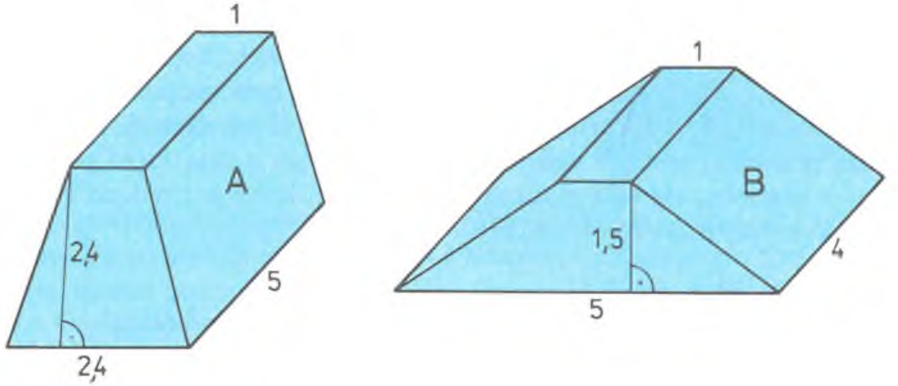
4. Vypočtěte objem krychle o hraně:
a) 2 cm b) 3 cm c) 4 cm d) 5 cm

5. Rozměry kvádru na obrázku jsou v milimetrech. Vypočtěte jeho objem a vyjádřete ho v centimetrech krychlových:

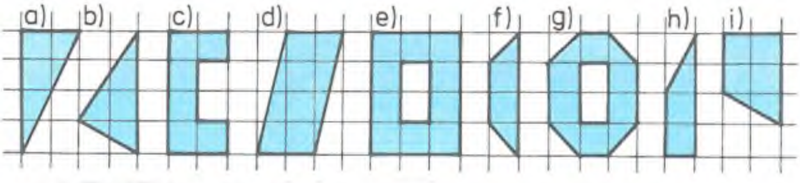


6. Vypočtěte objem trojbokého hranolu s výškou v. Podstavou hranolu je pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami a, b:
a) $v = 7\,cm$, $a = 9{,}9\,cm$, $b = 2\,cm$
b) $v = 2\,dm$, $a = 11\,cm$, $b = 3\,dm$

7. Hranoly na obrázku mají podstavu tvaru lichoběžníku. Nejprve odhadněte, který z nich má větší objem, a pak objemy obou hranolů vypočtěte. Rozměry jsou uvedeny v centimetrech.



8. Do centimetrové čtvercové sítě jsme vyznačili podstavu hranolu. Na obrázku je síť zmenšena. Vypočtěte objem hranolu s touto podstavou, je-li jeho výška 10 cm.



9. Tatínek se rozhodl vyrobit otevřenou plechovou nádrž na jímání dešťové vody. Nádrž má mít tvar kvádru s čtvercovou podstavou o straně 60 cm a výšce 90 cm. Kolik m^2 plechu bude potřebovat? Kolik litrů vody se do nádrže vejde?

■ **10.** Nejprve odhadněte, kolik litrů vzduchu se vejde do místnosti, ve které je vaše třída. Pak délku a šířku místnosti změřte, výšku odhadněte a objem místnosti vypočtěte.

* **11.** Určete, jakou hmotnost bude mít sklo potřebné k zasklení dvou stejně velkých obdélníkových výloh obchodu. Rozměry výlohy jsou 3 m a 2,1 m. Tloušťka použitého skla je 14 mm a hmotnost 1 cm^3 skla je 2,6 g.

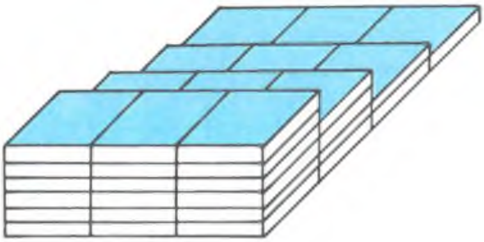
6 ÚLOHY Z MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

Tato kapitola i následující cvičení jsou věnovány obtížnějším úlohám o hranolech, které byly zadány v minulých ročnících *matematické olympiády*.

Tak jako v předchozích sešitech jsou všechny zde zařazené úlohy opatřeny odkazy na ročník soutěže, kdy je soutěžící řešili. Zopakujme, že například zápis „34. r., Z6–I–3" znamená, že úloha byla zadána ve 34. ročníku v kategorii Z6 v I. (tzn. školním) kole jako úloha číslo 3. Tyto odkazy vám pomohou srovnat vaše vlastní řešení nejen s tím, které publikujeme zde v učebnici, ale také s autorským řešením, které je uvedeno v příslušné *ročence* matematické olympiády.

Úloha 1 (34. r., Z6–I–3)
V balírně závodu na výrobu dlaždic ukládají vyrobené dlaždice s rozměry 15 cm, 8 cm a 1,5 cm na dřevěné palety do tvaru krychle. Všechny dlaždice se ukládají ve stejné poloze jako na obrázku.

a) Jaké jsou nejmenší možné rozměry krychle na paletě?
b) Kolik je v této krychli dlaždic?

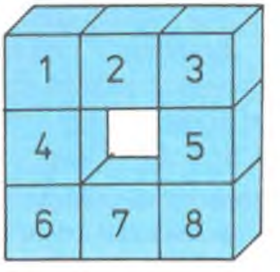


Řešení.

a) Abychom pracovali s celými čísly, vyjádříme nejprve rozměry jedné dlaždice v milimetrech: 150 mm, 80 mm, 15 mm. Mají-li „stejným směrem" uložené dlaždice vyplnit krychli, musí být délka hrany krychle násobkem každého rozměru dlaždice, tedy společným násobkem všech tří rozměrů. Aby se jednalo o nejmenší možnou krychli, musí jít o nejmenší společný násobek. Protože
$$n(150, 80, 15) = 1\,200,$$
je délka hrany nejmenší možné krychle rovna 1 200 mm, tj. 1,2 m.

b) Určíme nejprve, kolik dlaždic se poskládá do jedné „vrstvy" krychle, jejíž hrana má délku 1,2 m: Protože $1\,200 : 150 = 8$ a $1\,200 : 80 = 15$, obsahuje jedna vrstva $8 \cdot 15$ dlaždic, tj. 120 dlaždic. Počet vrstev je roven $1\,200 : 15 = 80$. Celkový počet dlaždic tedy činí $120 \cdot 80 = 9\,600$. Nejmenší možná krychle na paletě má hranu 1,2 m a je v ní uloženo 9 600 dlaždic.

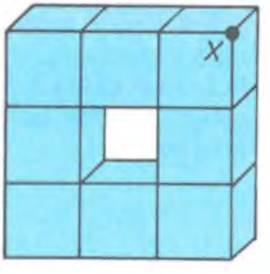
Úloha 2 (40. r., Z6–I–1)
Na obrázku je znázorněno těleso složené z osmi krychlí o hraně 1 cm. Kolik čtverců o straně 1 cm tvoří povrch tohoto tělesa? Jaký je nejmenší počet barev, kterými lze obarvit tyto čtverce tak, aby žádné dva, které mají společnou stranu, nebyly obarveny stejnou barvou? Způsob obarvení popište nebo nakreslete.

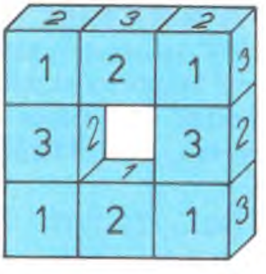


Řešení. K povrchu tělesa přispívá každá „rohová“ i každá „hranová“ krychle 4 stěnami. Proto povrch tělesa tvoří $8 \cdot 4$ čtverců, tj. 32 čtverců. Stejně tak je čtverce možné počítat po „stěnách“ a „otvoru“: $2 \cdot 8 + 4 \cdot 3 + 4 = 32$.

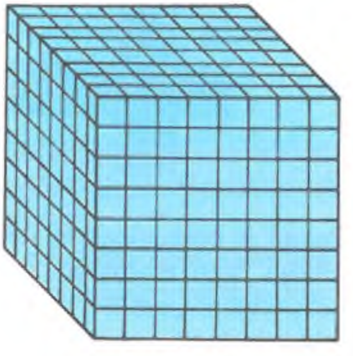
Nyní určíme, kolik barev je třeba k předepsanému obarvení tělesa. Je jasné, že dvě barvy k takovému obarvení nestačí. Například u vrcholu X „rohové“ krychle na obrázku vlevo se „stýkají“ tři stěny. Ty musí být obarveny třemi různými barvami.

Příklad správného obarvení třemi barvami je na obrázku vpravo. Stejnými čísly jsou popsány stejně obarvené čtverce. Neviditelné čtverce jsou přitom obarveny stejně jako čtverce „protilehlé“.





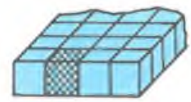
Úloha 3 (41. r., Z6–II–1)
Krychle o hraně 8 cm byla namočena do zelené barvy a potom rozřezána na malé krychle o hraně 1 cm. Pak z nich byl slepen zelený hranol s podstavou o obsahu $4\,\mathrm{cm}^2$. Jakou mohl mít největší výšku? Kolik malých krychlí zbylo po slepení takového hranolu?



Řešení. Počet kostek, na které byla krychle rozřezána, je $8 \cdot 8 \cdot 8 = 512$. Z tohoto počtu 8 „rohových" má obarveny tři stěny, $12 \cdot 6$ kostek, tj. 72 kostek „hranových" má obarveny dvě stěny. V každé ze šesti stěn zůstává 36 kostek s jednou obarvenou stěnou, celkem jich je tedy $6 \cdot 36 = 216$. Neobarvené kostky tvoří „vnitřní" krychli o hraně 6 cm, jejich počet je roven $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$.

Určíme nyní, jaké zelené hranoly s podstavou o obsahu $4\,\mathrm{cm}^2$ lze z takových kostek sestavit. Podstavou každého takového hranolu je buď obdélník o stranách 4 cm a 1 cm, nebo čtverec o straně 2 cm.

Zelený hranol s obdélníkovou podstavou složit nelze, neboť k tomu bychom potřebovali kostky s obarvenými protějšími stěnami. Žádné takové kostky však z původní krychle nevzniknou.

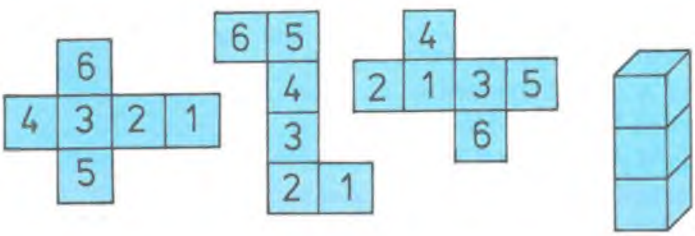


Složíme hranol se čtvercovou podstavou. Všech 8 kostek se třemi obarvenými stěnami musíme použít k sestavení dvou „podstavných vrstev". Každá „vnitřní vrstva" bude složena ze čtyř kostek se dvěma obarvenými stěnami. Ze 72 takových kostek sestavíme současně $72 : 4 = 18$ „vrstev".

Proto zelený hranol mohl mít největší výšku $1\,\mathrm{cm} + 18\,\mathrm{cm} + 1\,\mathrm{cm} = 20\,\mathrm{cm}$. Takový hranol byl slepen z $4 \cdot 20$ kostek, tj. 80 kostek. Protože $512 - 80 = 432$, zbylo 432 kostek.

Úloha 4 (42. r., Z7–I–3)

Ze sítí na obrázku můžeme složit tři kostky:



Pokud je postavíme do sloupečku, na jeho bocích si můžeme (shora dolů) přečíst čtyři trojmístná čísla (nevadí, že některé číslice budou „ležet na boku" nebo „vzhůru nohama"). Sečteme je. Jaký největší součet můžeme takto dostat?

Řešení. Představme si, že jsme ze sítí všechny tři kostky složili, libovolným způsobem je postavili do sloupečku, vzniklá čísla přečetli a sečetli. Všimněme si, že výsledek ovlivňují jen číslice zapsané na svislých stěnách („bocích“) každé kostky. Přitom číslice na bocích horní kostky určují počty stovek přečtených čísel. Podobně číslice na bocích prostřední kostky vyjadřují počty desítek, číslice na bocích dolní kostky vyjadřují počty jednotek. Proto součet všech čtyř přečtených čísel můžeme určit také tak, že odděleně sečteme počty jejich stovek, pak počty desítek a pak počty jednotek. Každé z těchto tří čísel je rovno součtu všech čtyř číslic na bocích příslušné kostky.

„Příspěvek“ každé kostky k celkovému součtu bude tím větší, čím větší bude součet všech čtyř číslic na jejích bocích. Tento součet může mít pro každou kostku tři hodnoty podle toho, které čtyři její stěny zvolíme za boční. Tyto hodnoty nyní určíme:

1. kostka	2. kostka	3. kostka
$4+3+2+1=10$	$5+4+3+2=14$	$2+1+3+5=11$
$4+5+2+6=\mathbf{17}$	$6+5+1+3=\mathbf{15}$	$4+1+6+5=\mathbf{16}$
$6+3+5+1=15$	$6+4+1+2=13$	$6+3+4+2=15$

Pro každou kostku je tučně vytištěn vždy největší součet.

Abychom dostali co největší součet čtyř vzniklých čísel, postavíme 1. kostku nahoru, 3. kostku doprostřed a 2. kostku dolů. Jejich polohy zvolíme tak, abychom na bocích dostali číslice z tučně vytištěných součtů. Největší možný součet je proto roven

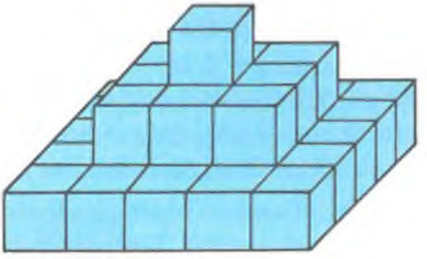
$$17 \cdot \boxed{100} + 16 \cdot \boxed{10} + 15 \cdot \boxed{1} = 1\,875.$$

CVIČENÍ 5

1. (38. r., Z5–I–3)
Máme 100 kostek o hraně 1 cm. Kolik různých kvádrů z nich můžeme poskládat, když musíme vždy použít všechny kostky?

2. (43. r., Z4–I–1)
Paní učitelka přinesla do třídy 500 stejných krychliček. Žáci z nich chtěli postavit co nejdelší řadu různě velkých krychlí. Kolik nejvíce krychlí mohlo být v takové řadě? Kolik krychliček zbylo?
Krabice, ve které paní učitelka krychličky přinesla, byla také tvaru krychle. Jaké nejmenší rozměry mohla mít tato krabice, jestliže hrana každé krychličky měřila 3 cm?

3. (33. r., Z6–I–2)
Na obrázku je nakreslena tříposchoďová pyramida složená ze stejných kostek. Kolik poschodí má podobná pyramida složená ze 455 stejných kostek?



4. (33. r., Z7–II–3)
Každý ze šesti kamarádů má dřevěnou kostku, jejíž každá stěna je obarvena jednou z barev: bílá, žlutá, červená, zelená, modrá, černá. Na žádné kostce nejsou dvě různé stěny obarveny stejně a proti bílé stěně je vždy stěna černá. Kostky se liší pouze umístěním dalších barev. Například Alešova kostka má proti zelené stěně stěnu modrou, zatímco u Honzovy kostky jsou zelená a modrá stěna sousedními stěnami. Mohou být kostky všech šesti kamarádů obarveny tak, aby se každé dvě lišily?

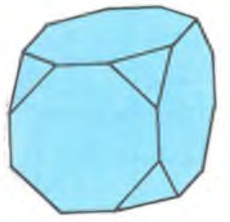
5. (30. r., Z7–I–3)
Z krychlí s objemem $1\,\text{cm}^3$ je sestavena velká krychle, jejíž povrch je obarven a měří $216\,\text{cm}^2$. Z každého rohu velké krychle odebereme jednu malou krychli.

a) Určete objem takto vzniklého tělesa.
b) Rozhodněte, zda je možno z takto odebraných krychlí sestavit kvádr, jehož povrch bude mít tolik cm^2, o kolik se zmenšil obarvený povrch. Jestliže ano, jaké budou jeho rozměry?
c) Kolik procent barvy by se ušetřilo, kdybychom místo původní krychle obarvili až vzniklé těleso?

6. (43. r., Z6–I–6)
Z bílého moduritu jsem si vymodeloval krychli a obarvil ji namodro. Potom jsem ji rozřezal na 64 stejných krychliček. Je možné z těchto krychliček složit modrobílou šachovnici? Je možné to udělat tak, aby svislé stěny celého okraje šachovnice byly modré? Svou odpověď vysvětlete.

7 SOUHRNNÁ CVIČENÍ

1. Těleso na obrázku vzniklo tak, že jsme z krychle odřízli všechny její „rohy“. Určete, kolik má vzniklé těleso vrcholů, stěn a hran.



2. Dřevěná namodro obarvená krychle byla rozřezána na menší shodné krychličky, jejichž hrana byla pětkrát kratší než hrana původní krychle. Kolik krychliček vzniklo? Kolik z nich mělo modře obarvené tři stěny, kolik právě dvě stěny a kolik právě jednu stěnu? Kolik krychliček zůstalo neobarveno?

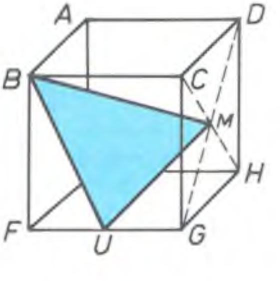
3. Z 64 stejných neobarvených kostek jsme složili krychli a její povrch jsme obarvili. Některé z kostek odebereme. Kolik kostek zůstane, jestliže odebereme

a) všechny kostky s právě dvěma obarvenými stěnami,
b) všechny kostky s právě jednou obarvenou stěnou,
c) všechny kostky s aspoň jednou obarvenou stěnou?

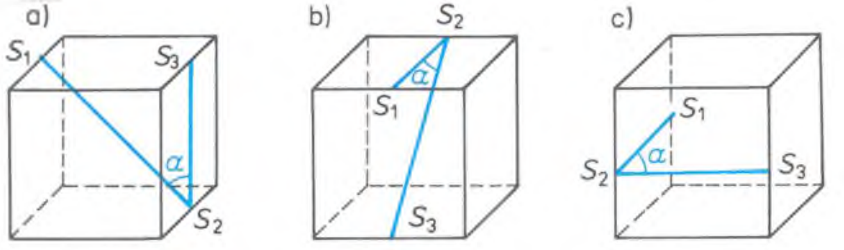
4. Načrtněte obraz krychle ve volném rovnoběžném promítání

a) v levém nadhledu, b) v pravém nadhledu,
c) v levém podhledu, d) v pravém podhledu.

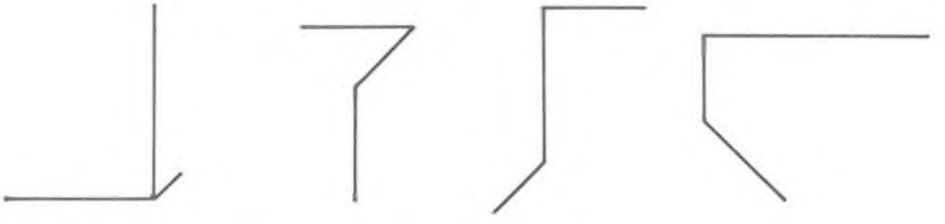
5. V průhledné krychli $ABCDEFGH$ je umístěn trojúhelník BUM. Bod U je středem hrany FG a bod M je průsečíkem stěnových úhlopříček stěny $CGHD$. Na obrázku je krychle zobrazena tak, že v nákresně je stěna $FGCB$. Představte si, že krychlí otáčíte tak, aby se v nákresně vystřídalo všech pět ostatních stěn. Načrtněte krychli i trojúhelník ve všech těchto pěti polohách.



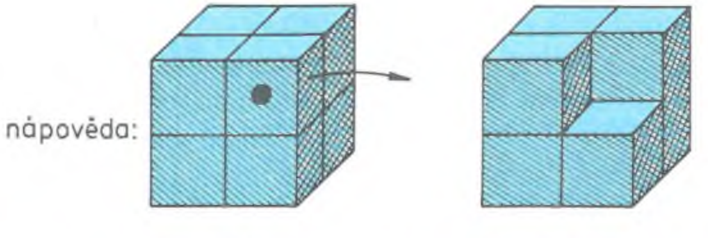
6. Určete velikost úhlu α z obrázku, víte-li, že body S_1, S_2, S_3 jsou středy hran krychle.

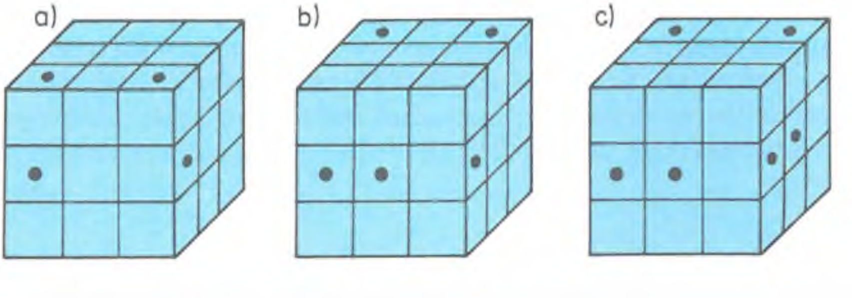


■ **7.** Radek zobrazil čtyři kvádry ve volném rovnoběžném promítání. Potom některé úsečky smazal. Překreslete si jeho neúplné obrázky do sešitu a doplňte smazané hrany kvádrů.



■ **8.** Krychle na obrázku je složena z 27 shodných kostek. Nakreslete ve volném rovnoběžném promítání těleso, které vznikne po odebrání kostek označených tečkou. Pro názornější představu pak vybarvěte jednou barvou „přední stěny“ tělesa, jinou barvou jeho „horní stěny“ a další barvou „boční stěny“ vzniklého tělesa.





9. Těleso na obrázku je složeno ze tří stejných krychlí. Symbolicky je možné jeho stavbu a polohu zapsat způsobem A. Načrtněte totéž těleso v jiných polohách podle zápisů B, C a D.

A

1	1,2

B

2	1,2

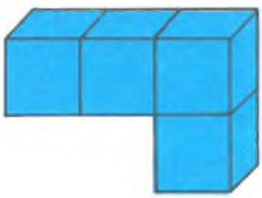
C

1	1
1	

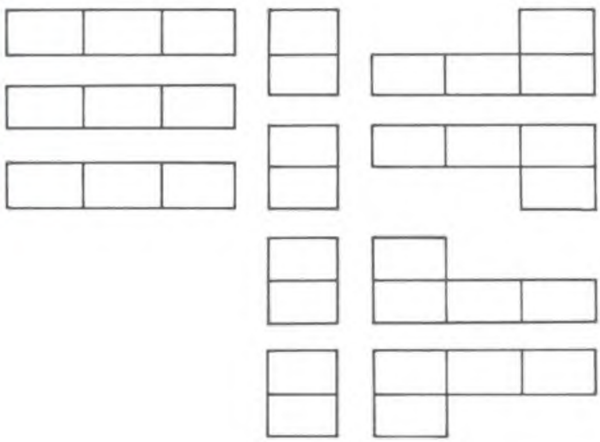
D

	1
1	1

∗10. Těleso na obrázku je složeno ze čtyř stejných krychlí. Pod ním je symbolický zápis jeho stavby a polohy. Do připravených políček doplňte symbolické zápisy tohoto tělesa v jedenácti dalších polohách.



2	2	1,2



∗11. Marta složila těleso ze šesti stejných kostek. Ve čtyřech různých polohách zapsala symbolicky jeho stavbu. Pak zjistila, že se jednou zmýlila. Kde udělala chybu?

A

		1
1,2	2	1,2

B

	3
1,2,3	1,3

C

		2
1,2	2	1,2

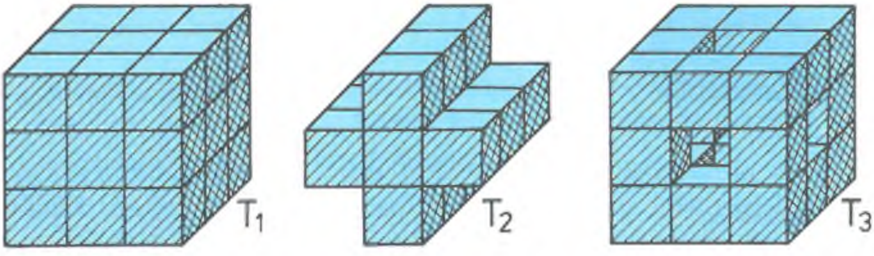
D

1,2,3	1,3
	1

$\ast$**12.** Tělesa T_2 a T_3 vznikla z krychle T_1 složené ze 27 stejných kostek tak, že jsme několik kostek odebrali. Na obrázku je vidíte „zepředu“, při pohledu „zezadu“ vypadají stejně. Pak jsme obě tělesa ponořili do barvy, a tím obarvili jejich povrch.

a) Z kolika kostek jsou tělesa T_2 a T_3 složena?

b) U každého z těles T_2 a T_3 určete postupně počet kostek, které mají obarveny 4, 3, 2 a 1 stěnu.



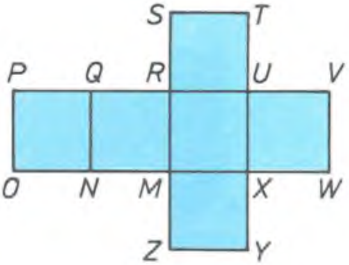
$\ast$**13.** Představte si, že z krychle složené ze 27 kostek jsme odebrali všechny takové kostky, které měly společný bod s některou hranou původní krychle. Povrch vzniklého tělesa obarvíme.

a) Z kolika kostek je toto těleso složeno?

b) Kolik je skupin kostek se stejným počtem obarvených stěn? Kolik kostek je v každé skupině?

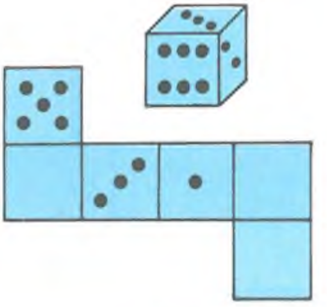
✂ **14.** Ze sítě na straně 83 slepte model pětibokého hranolu.

□**15.** Ze sítě na obrázku byla složena krychle. Které dva z vyznačených bodů splynuly s bodem P?



✂ **16.** Narýsujte síť pravidelného trojbokého hranolu, jehož všechny hrany mají délku 6 cm. Pak ji vystřihněte a povrch hranolu složte.

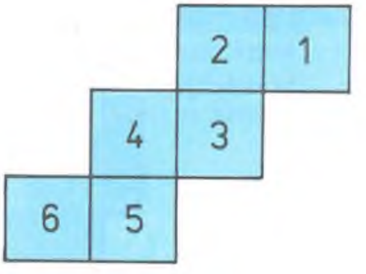
17. Součet ok na každých dvou protilehlých stěnách běžné hrací kostky je roven 7. Dokreslete oka do její sítě na obrázku. (Pozor na polohu ok ve stěně.)



18. Na síti krychle jsou očíslovány její stěny.

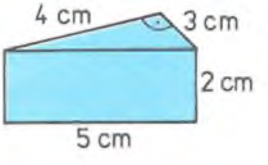
a) Zapište všechny dvojice čísel na protějších stěnách.

b) Určete, které stěny sousedí se stěnou s číslem 6.

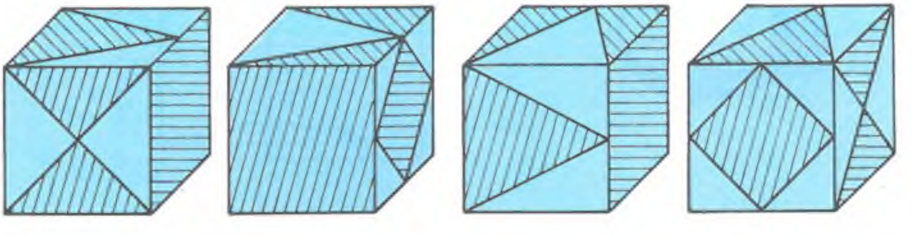


19. Na čtverečkovaný papír načrtněte všech šest různých sítí jednoho pravidelného čtyřbokého hranolu s pláštěm „v jednom pásu“.

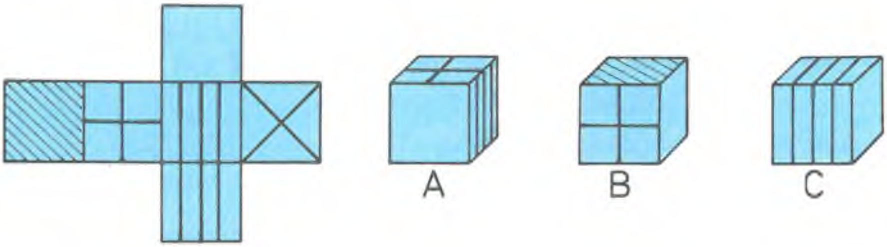
20. Narýsujte síť trojbokého hranolu, jehož podstavou je pravoúhlý trojúhelník. Rozměry hranolu jsou uvedeny na obrázku.



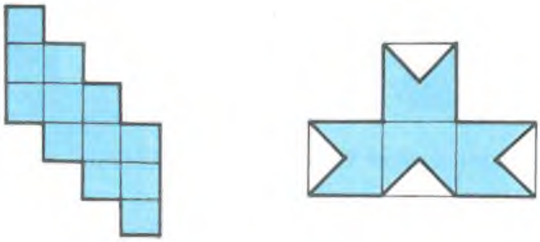
21. Na obrázku je znázorněna krychle o hraně 4 cm ve čtyřech různých polohách. Narýsujte její síť a doplňte do ní geometrické vzory. Pak síť vystřihněte, krychli složte a přesvědčte se, že jste úlohu vyřešili správně.



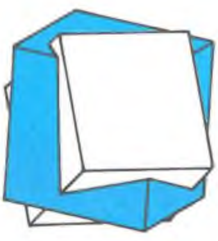
22. Kterou z krychlí A, B, C lze slepit ze sítě na obrázku?

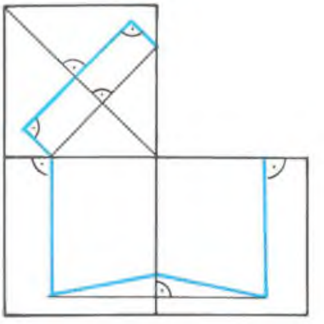


■ **23.** Přesvědčte se, že každý z obou útvarů na obrázku je „sítí“ krychle, která vznikne vhodným stříháním jejího povrchu (nikoliv pouze po hranách).

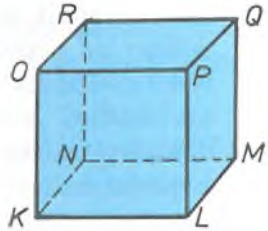


■ ∗∗**24.** Obrázek vlevo ukazuje, že v dřevěné krychli lze vyříznout takový otvor, kterým projde stejná krychle. Okraje tohoto otvoru jsou dvě shodné lomené čáry složené ze 7 úseček. Vidíte je nezkresleně na pravém obrázku. Změřte si v něm potřebné údaje, vynásobte je dvěma a krychli o hraně 4 cm s vyříznutým otvorem nakreslete s přední stěnou v nákresně v pravém nadhledu, kdy hledíme „do otvoru“. Neviditelné hrany nevyznačujte, povrch krychle vybarvěte a otvor nechte bílý.



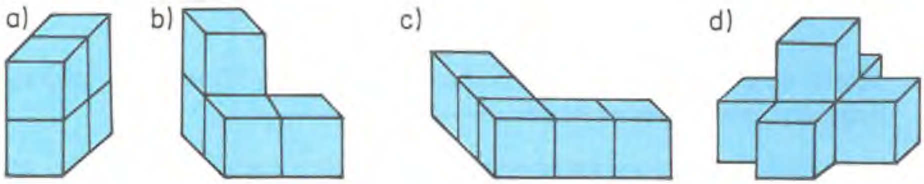


25. Na obrázku je krychle $KLMNOPQR$. Které z trojúhelníků OQR, MNP, KMR, KRO, LOQ jsou rovnostranné?

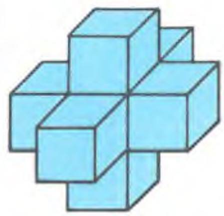


26. Kolik cm stuhy je třeba k převázání balíčku, jestliže na mašli počítáme se 40 cm stuhy? Délka balíčku je 30 cm, šířka 18 cm a výška 6 cm.

27. Vypočtěte povrchy těles, která jsou slepena z krychlí o hraně 1 cm podél jejich společných stěn.



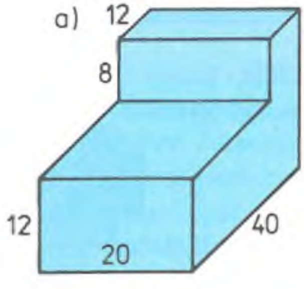
28. Vypočtěte objem prostorového kříže, který byl slepen z krychlí o hraně 3 cm podél jejich společných stěn.

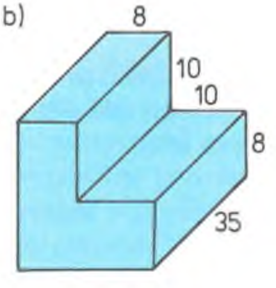


29. Novákovi chtějí natřít stěny a dno svého bazénu ochranným nátěrem ISOL. Bazén má tvar kvádru, je dlouhý 12 m, široký 7 m a hluboký 2 m. V obchodě mají ISOL v pětilitrových plechovkách za 279 Kč a v desetilitrových plechovkách za 495 Kč. Jeden litr nátěru vystačí k natření 7 m^2 plochy. Poraďte Novákovým, kolik kterých plechovek mají nakoupit, aby je nátěr bazénu vyšel co nejlevněji.

30. Žáci si plánují, že v kreslírně nově natřou skříň a dvě stejně velké menší skříňky na pomůcky. Chtějí koupit Balacryl a nátěr provést dvakrát. Kolik plechovek musí koupit, jestliže jedna plechovka vystačí asi na $8\,m^2$ nátěru? Velká skříň je vysoká 1,8 m, široká 1 m a hluboká 0,6 m. Rozměry malých skříněk jsou stejné a činí 0,85 m, 1 m a 0,3 m. Zadní a spodní stěny skříní se nenatírají.

31. Těleso na obrázku vzniklo slepením dvou kvádrů. Určete jeho objem. Rozměry jsou v centimetrech.

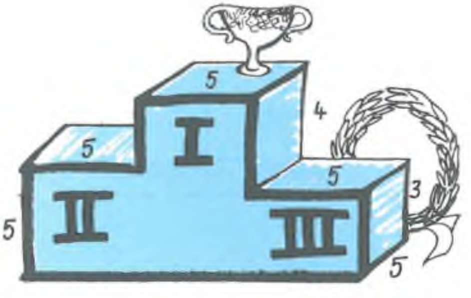




∗**32.** Obsah jedné podstavy pravidelného čtyřbokého hranolu je $64\,cm^2$. Výška hranolu je polovinou délky podstavné hrany. Vypočtěte jeho objem.

33. Kolik litrů vody je v akváriu tvaru kvádru, sahá-li voda 7 cm pod jeho horní okraj? Akvárium je dlouhé 65 cm, široké 30 cm a hluboké 45 cm.

34. Kolik m^2 látky je třeba na potažení stupňů vítězů? Rozměry (v dm) jsou na obrázku. Nepotahuje se jen obdélník na podlaze.



∗**35.** Kolik hektolitrů vody se vejde do nádrže tvaru pravidelného čtyřbokého hranolu, jehož dno a boční stěna mají stejný obsah, který je roven $4\,\mathrm{m}^2$?

36. V parku udělali pro děti pískoviště s prolézačkami. Má obdélníkový tvar, je dlouhé 10 m a široké 4 m. Nasypali do něj vrstvu písku vysokou 20 cm. Kolik m^3 písku použili?

37. Kolik stejných kostek se vejde do krychle, jejíž hrana je

a) dvakrát b) třikrát

delší než hrana jedné kostky?

38. Následující tabulku si překreslete do sešitu a doplňte prázdná políčka. Přitom a je hrana krychle, S její povrch a V její objem.

a (cm)	1	7	3,2			
S (cm^2)				150	600	
V (cm^3)						1 000

39. Následující tabulku si překreslete do sešitu a doplňte prázdná políčka. Přitom a, b, c jsou rozměry kvádru, S jeho povrch a V jeho objem.

a (cm)	3	7	11	6
b (cm)	2	10	7	
c (cm)	1	5		4
S (cm^2)				
V (cm^3)			154	144

■**40.** Představte si, že máte 5 stejných krychlí o hraně 30 cm. Jedna je vyrobena z korku, druhá z dubového dřeva, třetí z borového dřeva, čtvrtá ze skla a poslední je ulita z pečetního vosku. Které z nich unesete? Svůj odhad zkontrolujte výpočtem; $1\,\mathrm{dm}^3$ látky má tuto hmotnost: korek 0,3 kg, dubové dřevo 0,7 kg, borové dřevo 0,5 kg, sklo 2,2 kg a vosk 1,8 kg.

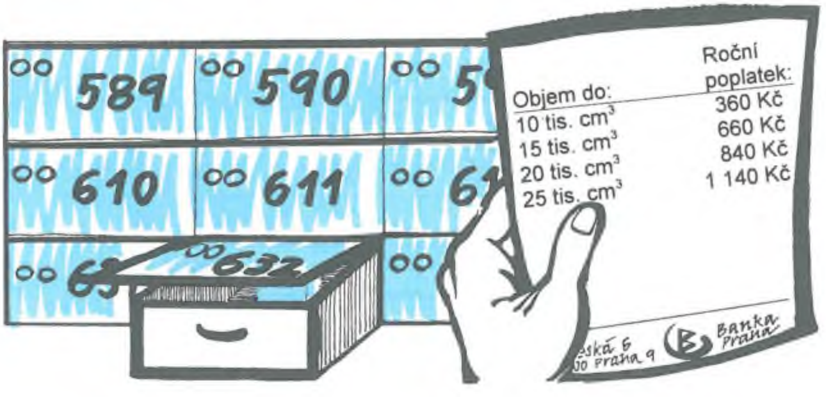
■**41.** Malá exkurze do zeměpisu: V mírném pásu je roční úhrn srážek asi 700 mm, v rovníkovém pásu až 3 000 mm. Pro zajímavost vypočtěte, jaké přibližné množství vody naprší za rok na území o rozloze 1 ha jednak v mírném pásu, jednak v rovníkovém pásu.

■ **42.** David zjistil, že do vaničky na zahrádce napršelo za silného deště 12 mm vody. Protože byl dobrý počtář, spočítal si, kolik litrů vody napršelo na celou zahrádku. Ta má tvar obdélníku o rozměrech 6 m a 14 m. Také ho zajímalo, kolikrát by musel jít s pětilitrovou konví, aby celou zahrádku zalil stejně vydatně. Zjistěte to také.

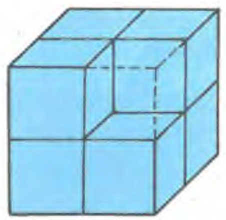
43. Banka pronajímá bezpečnostní schránky k úschově cenných věcí. Roční poplatky za pronájem schránky závisí na jejím objemu a jsou uvedeny v tabulce.

Objem do:	Roční poplatek
10 tis. cm^3	360 Kč
15 tis. cm^3	660 Kč
20 tis. cm^3	840 Kč
25 tis. cm^3	1 140 Kč

Kolik Kč zaplatí ročně pan Opatrný, který si pronajal dvě schránky? První má rozměry 20 cm × 20 cm × 25 cm, druhá 62 cm × 30 cm × 12 cm. (Takové zápisy rozměrů se v praxi často používají.)



■ **44.** Těleso na obrázku vzniklo tak, že jsme z krychle odřízli její „roh“. Odříznutá část má tvar krychle o hraně poloviční délky, než je hrana původní krychle. Porovnejte součet délek hran tohoto tělesa se součtem délek hran původní krychle. Porovnejte také povrchy a objemy obou těles.

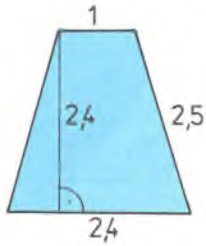


45. Povrch trojbokého hranolu, jehož podstavou je pravoúhlý trojúhelník se stranami 6 cm, 10 cm a 8 cm, je 288 cm^2. Vypočtěte objem tohoto hranolu.

∗**46.** Povrch vody v bazénu tvoří obdélník o délce 50 m a šířce 12 m. Hloubka vody stoupá rovnoměrně od 1 m na jednom konci do 3 m na druhém konci. Určete množství vody v bazénu v hektolitrech.

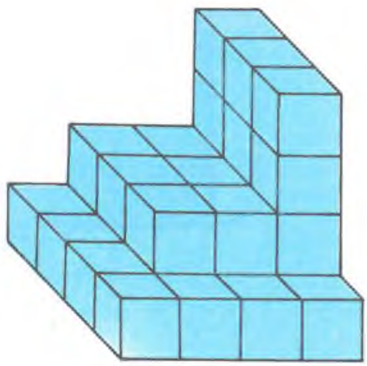
47. Když Petr hodil do nádoby s vodou kámen, zjistil, že hladina vody stoupla o 4 cm. Nádoba má tvar kvádru, její dno má rozměry 24 cm a 14 cm. Jaký objem má kámen?

48. Při obnově rybníku se musí znovu vybudovat betonová hráz dlouhá 42 m. Kolik m^3 betonu bude třeba dovézt? Hráz má průřez tvaru rovnoramenného lichoběžníku. Jeho rozměry v metrech jsou uvedeny na obrázku.



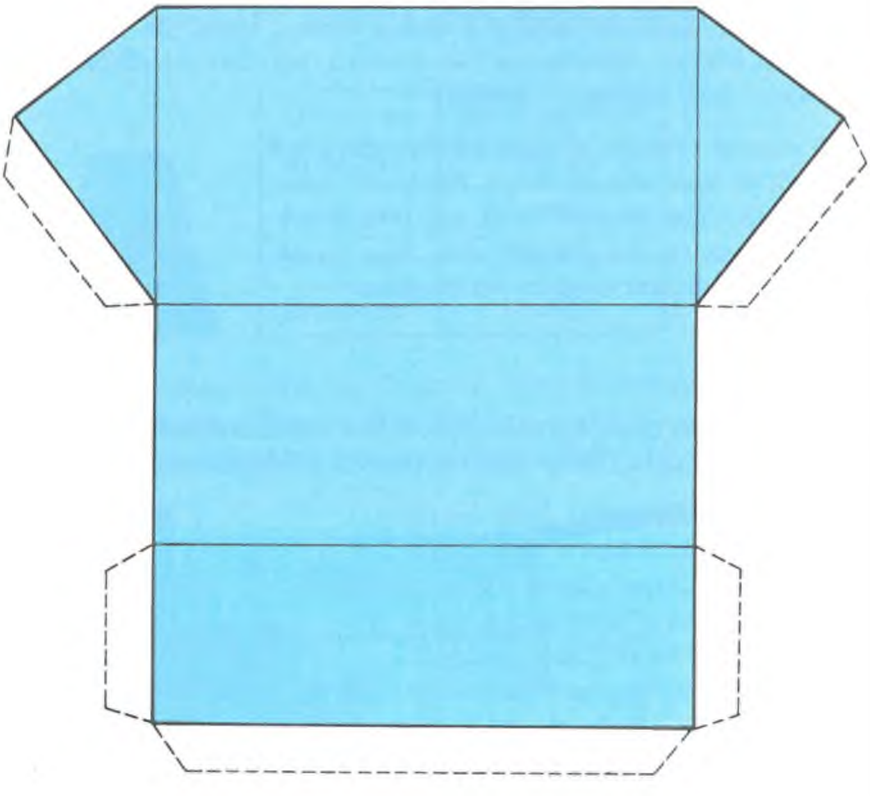
49. Kolik cm měří hrana krychle, jejíž objem v centimetrech krychlových je vyjádřen stejným číslem jako její povrch v centimetrech čtverečných?

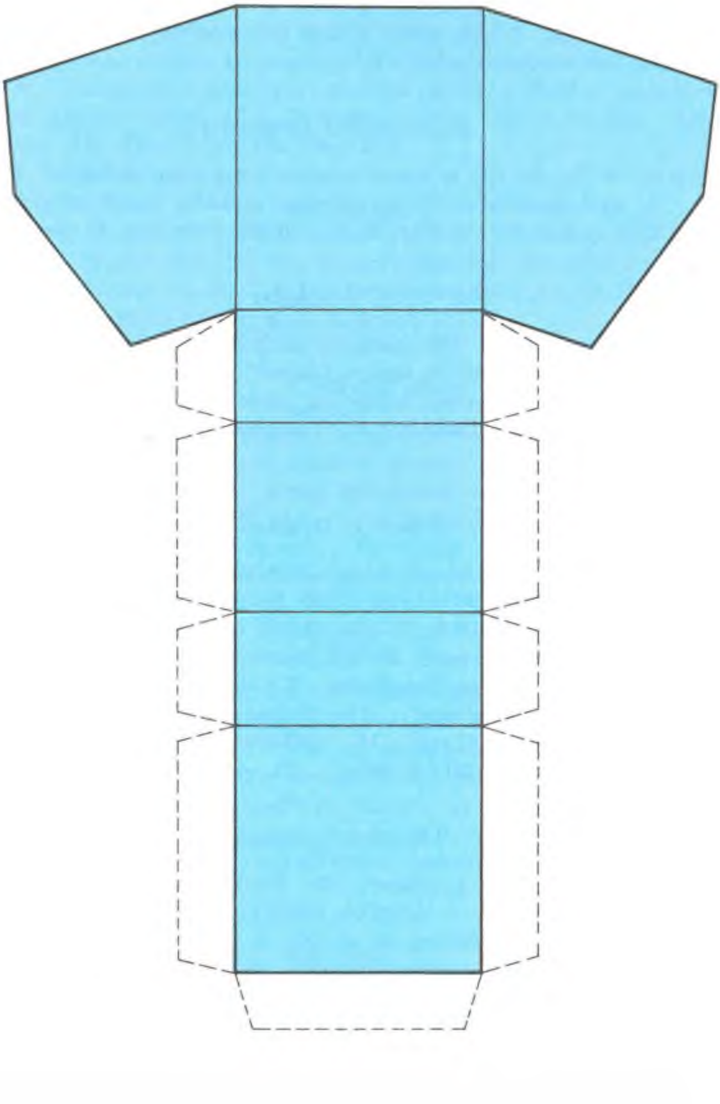
50. V dřevěné stavebnici jsou kostky o hraně 1 cm. Adam z nich postavil na stole „hrad", který vidíte na obrázku. Není v něm žádný otvor, který by byl na obrázku „zatajen". Vypočtěte objem a povrch sestaveného tělesa.



■∗**51.** Je možné do šátku tvaru čtverce o straně 30 cm zabalit krychli o objemu 1 dm^3?

■**52.** Představte si, že krychli o hraně 1 m rozdělíme na kostky o hraně 1 cm a ty postavíme na sebe do sloupce. Jak by byl tento sloupec vysoký? Jak by se změnila výška sloupce, kdybychom krychli rozdělili na kostky o hraně 1 mm?





VÝSLEDKY PRŮBĚŽNÝCH ÚKOLŮ

1 Hranol, kvádr, krychle

2. 10 vrcholů, 7 stěn, 15 hran. **3.** $2 \cdot n$ vrcholů, $n + 2$ stěn, $3 \cdot n$ hran. **4.** Žádnou. **5.** 12 stěnových a 4 tělesové úhlopříčky. **6.** Ne, délky úhlopříček v různých dvojicích protějších stěn se mohou lišit. **7.** Shodné čtverce $A_1B_1C_1D_1$ a $A_1B_1B_2A_2$ mají shodné úhlopříčky B_1D_1 a B_1A_2. **8.** Ne, stěny krychle jsou tvořeny shodnými čtverci, proto i úhlopříčky těchto čtverců jsou shodné.

2 Zobrazení hranolu

3. Např. obr. A-1. **4.** Na obr. A-2 je hranol znázorněn v pravém nadhledu. **5.** Obr. A-3. **6.** Obr. A-4. **7.** a) Jednotlivé obdélníky označují umístění kostek při pohledu shora, čísla v nich označují „poschodí", ve kterých jsou kostky umístěny; b) obr. A-5.

3 Síť hranolu

1. Jedné, dvěma, nebo třem. **3.** Pět, nezávisle na způsobu stříhání. **4.** Zmenšená síť je na obr. A-6. **5.** a) 7 hran; b) 14 stran. „Obvod" je tvořen dvojnásobným počtem „rozstřižených" hran. To lze vysvětlit takto: na „obvod" sítě se „dostanou" právě jen „rozstřižené" hrany, a to každá dvakrát. **6.** Všechny kromě S_3 a S_4. **7.** Obr. A-7. **8.** Obr. A-8. **9.** Obr. A-9.

4 Povrch hranolu

2. a) 0,04 m^2; 0,12 m^2; 0,7 m^2; 1,05 m^2; 2,1 m^2; b) 108 dm^2; 160 dm^2; 320 dm^2; 90 dm^2; 7 dm^2. **3.** a) 300; 30 000; 3 000 000; b) 20; 2 000; 200 000; c) 4 500; 450 000; 45 000 000; d) 5; 500; 50 000; e) 0,07; 700; 70 000; f) 4,65; 46 500; 4 650 000. **4.** a) mm^2, dm^2, m^2; b) cm^2, mm^2, m^2. **5.** Kaspické moře, Hořejší jezero, jezero Ukerewe, Huronské jezero, Michiganské jezero, Aralské jezero, Tanganika. **7.** 49 cm^2. **8.** 96 cm^2. **9.** 15 cm^2. **10.** a) 7 cm^2; b) 10 cm^2; c) 110 mm^2. **11.** 30 cm^2. **12.** a) 8 dm^2; b) 3 250 mm^2; c) 27 cm^2. **13.** 8,64 dm^2. **14.** 41 cm^2. **15.** 4,48 dm^2. **16.** 63 dm^2. **17.** 195,5 cm^2. **18.** 90 dm^2. **19.** 1 760 mm^2. **20.** 2,288 m^2. **21.** 162 cm^2.

5 Objem hranolu

1. a) 30 000 mm^3; b) 1,68 dm^3; c) 33 dm^3. **3.** 8 m^3. **4.** a) 1 000; 0,001; 1 000 000; b) 0,001; 0,000 001; 0,000 000 001. **5.** a) 0,001; 1 000; 1 000 000; b) 0,002; 2 000; 2 000 000; c) 0,025; 25 000; 25 000 000; d) 0,000 04; 40; 40 000. **6.** a) mm^3, dm^3, m^3; b) cm^3, dm^3, mm^3. **7.** a) 0,001; b) 0,1; c) 0,000 01; d) 100. **8.** a) 5; 50; 0,05; b) 2 000; 20 000; 20; c) 25; 25 000; 0,025; d) 4; 4 000; 0,004. **9.** a) 128 dm^3; b) 110 dm^3; c) 60 dm^3. **10.** Asi 3,35 m^3. **11.** Asi 28 %. **12.** Protože potřebovala asi 5 a půl sáčku, musela koupit 6 sáčků a zaplatit za ně 174 Kč.

VÝSLEDKY CVIČENÍ

Cvičení 1

1. a) 6 čtverců; b) 2 (shodné) čtyřúhelníky a 4 pravoúhelníky; c) 2 (shodné) trojúhelníky a 3 pravoúhelníky; d) 2 (shodné) čtverce a 4 pravoúhelníky. **2.** a) 12 vrcholů, 18 hran a 8 stěn; b) 30 vrcholů, 45 hran a 17 stěn. **3.** a) A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2; b) čtveřice A_1B_1, A_2B_2, D_1C_1, D_2C_2 a čtveřice A_1D_1, A_2D_2, B_1C_1, B_2C_2. **4.** 6. **5.** 10. **6.** $\triangle AFH$ je rovnostranný, proto všechny tři jeho vnitřní úhly mají velikost 60°. **7.** E. **8.** Např. obr. B-1. **9.** Na obr. B-2 je zadání označeno modře, v části a) je nakresleno pouze jedno ze čtyř možných řešení. **11.** Z devíti krychlí. **12.** Obr. B-3. **13.** Obr. B-4. **14.** Obr. B-5. **15.** Obr. B-6. **16.** Obr. B-7.

Cvičení 2

1. A a C. **2.** Např. obr. B-8. **3.** Oba hranoly jsou trojboké, jeden z nich má podstavy AEH a BFG, druhý AHD a BGC. Příklad zmenšené sítě je na obr. B-9. **4.** Obr. B-10. **5.** A, C, F jsou sítě jedné kostky, B, D, E druhé.

Cvičení 3

1. Všechny útvary mají obsah 36 cm². **2.** a) 6 cm²; b) 24 cm²; c) 54 cm²; d) 96 cm². **3.** Ne; kvádr A má povrch 48 cm², kvádr B 88 cm². **5.** 2,9krát. **6.** Kvádr K má povrch 232 cm², kvádr L 268 cm², kvádr M 272 cm², kvádr N 210 cm². Pořadí kvádrů podle velikosti povrchu: M, L, K, N. **7.** 6,255 dm². **8.** 54 cm². **9.** 648 cm². **10.** a) 108 cm²; b) 300 cm²; c) 39 cm². **11.** 5 cm. **12.** V prvním případě ano, ve druhém ne – povrch hranolu s lichoběžníkovou podstavou je 48 cm².

Cvičení 4

1. 9 000, 34 000, 1 500, 80, 128. **2.** 8; 0,756; 0,052; 0,004. **3.** a) 2 000; 1 300; 0,002; 0,985; b) 32 000; 6 200; 0,032; 7,45; c) 20 000; 40; 0,014; 4,25; d) 1,3; 50; 1,5; 1,5. **4.** a) 8 cm³; b) 27 cm³; c) 64 cm³; d) 125 cm³. **5.** a) 48 cm³; b) 10 cm³; c) 9 cm³; d) 36 cm³. **6.** a) 69,3 cm³; b) 3,3 dm³. **7.** Hranol A má objem 20,4 cm³, hranol B 18 cm³. **8.** a) 40 cm³; b) 40 cm³; c) 60 cm³; d) 80 cm³; e) 100 cm³; f) 30 cm³; g) 80 cm³; h) 30 cm³; i) 50 cm³. **9.** Bude potřebovat aspoň 2,52 m² plechu. Do vyrobené nádrže se vejde 324 l vody. **11.** 458,64 kg. (Nejprve vypočtěte objem použitého skla v cm³ a pak určete jeho hmotnost.)

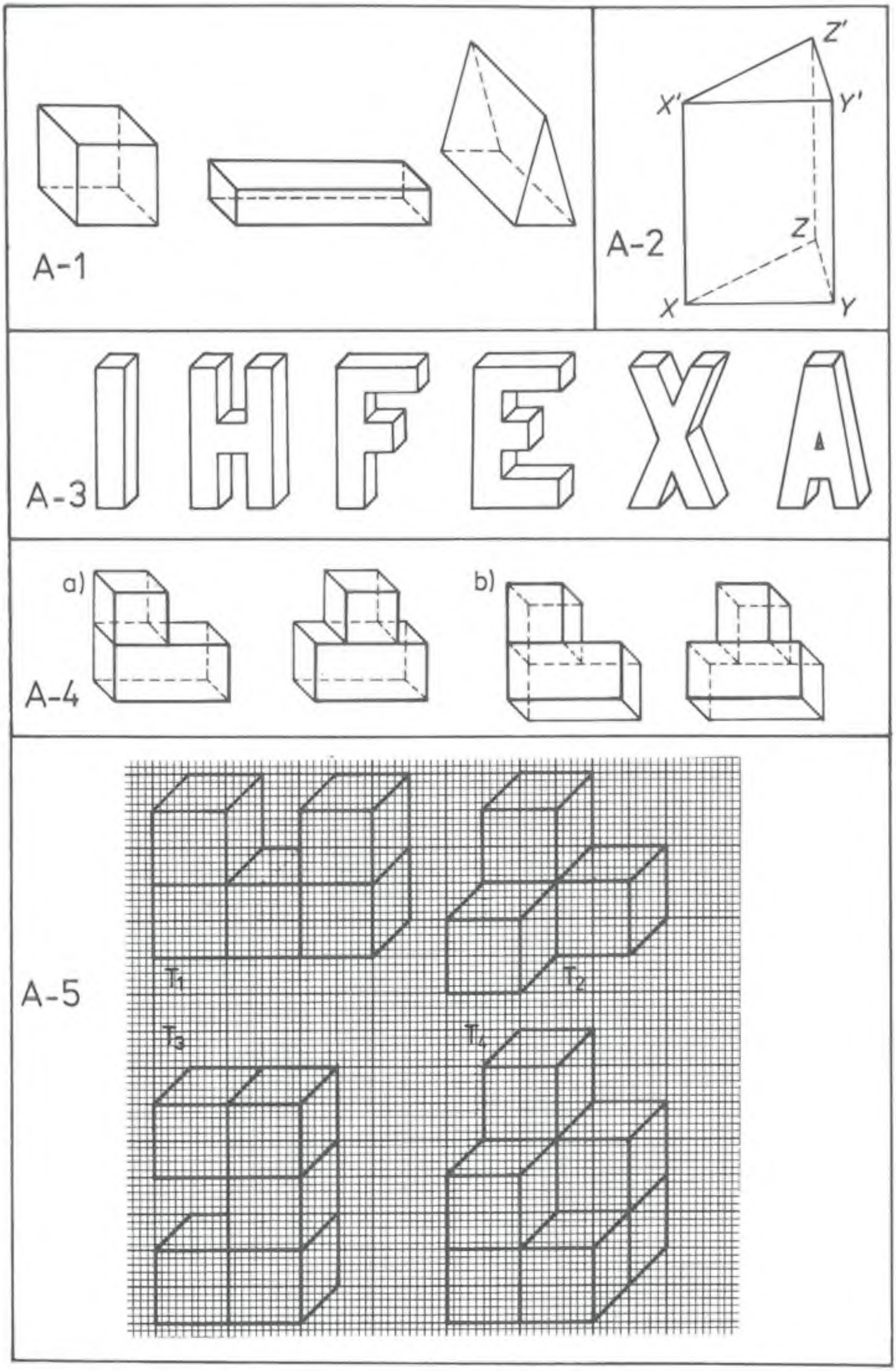
Cvičení 5

1. Nalezneme všechny různé rozklady čísla 100 na součin tří přirozených čísel: $100 = 1\cdot 1\cdot 100 = 1\cdot 2\cdot 50 = 1\cdot 4\cdot 25 = 1\cdot 5\cdot 20 = 1\cdot 10\cdot 10 = 2\cdot 2\cdot 25 = 2\cdot 5\cdot 10 = 4\cdot 5\cdot 5$ Každému rozkladu odpovídá jeden kvádr, jehož rozměry v centimetrech udávají jednotliví činitelé. Možných rozkladů je 8, proto můžeme sestavit 8 různých kvádrů. **2.** Nejdelší řadu dostaneme, když na nejmenší krychli spotřebujeme 1 kostku, na další krychli $2\cdot 2\cdot 2$ kostek, tj. 8 kostek, na třetí $3\cdot 3\cdot 3$ kostek, tj. 27 kostek, na čtvrtou $4\cdot 4\cdot 4$ kostek, tj. 64 kostek, na pátou $5\cdot 5\cdot 5$ kostek, tj. 125 kostek, na šestou $6\cdot 6\cdot 6$ kostek, tj. 216

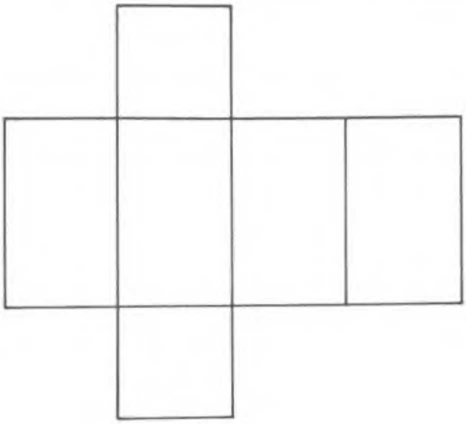
kostek. Protože $1 + 8 + 27 + 64 + 125 + 216 = 441$ a na sedmou krychli by bylo potřeba $7 \cdot 7 \cdot 7$ kostek, tj. 343 kostek, může být v řadě nejvýše 6 různých krychlí. Přitom zbude $(500 - 441)$ kostek $= 59$ kostek. Protože $7 \cdot 7 \cdot 7 = 343 < 500 < 512 = 8 \cdot 8 \cdot 8$, přinesla paní učitelka kostky v krychlové krabici o hraně alespoň $8 \cdot 3\,\mathrm{cm} = 24\,\mathrm{cm}$. **3.** Pyramidu budeme stavět „shora“: Na první (nejvyšší) poschodí je třeba 1 kostka, na druhé $3 \cdot 3$ kostek, tj. 9 kostek, na třetí $5 \cdot 5$ kostek, tj. 25 kostek, na čtvrté $7 \cdot 7$ kostek, tj. 49 kostek, na páté $9 \cdot 9$ kostek, tj. 81 kostek, na šesté $11 \cdot 11$ kostek, tj. 121 kostek, a na sedmé $13 \cdot 13$ kostek, tj. 169 kostek. Protože $1 + 9 + 25 + 49 + 81 + 121 + 169 = 455$, lze ze 455 kostek sestavit pyramidu o sedmi poschodích. **4.** Ano, je to možné. Příklad takového obarvení je na obr. B-11. Různá čísla ve čtvercích sítí kostek odpovídají různým barvám, čísla 5 a 6 odpovídají černé a bílé. **5.** a) Hrany krychle s povrchem $216\,\mathrm{cm}^2$ měří 6 cm. Velká krychle je tedy sestavena z $6 \cdot 6 \cdot 6$ malých krychlí, tj. z 216 krychlí. Má tedy objem $216\,\mathrm{cm}^3$. Po odebrání 8 „rohových“ krychlí vznikne těleso s objemem $208\,\mathrm{cm}^3$. b) Obarvený povrch se odebráním „rohových“ krychlí zmenšil o $8 \cdot 3\,\mathrm{cm}^2 = 24\,\mathrm{cm}^2$. Z osmi odebraných krychlí lze sestavit kvádr o rozměrech 1 cm, 1 cm, 8 cm, kvádr o rozměrech 1 cm, 2 cm, 4 cm nebo krychli o hraně 2 cm. Pouze tato krychle má povrch $24\,\mathrm{cm}^2$. c) Povrch vzniklého tělesa je stejný jako povrch původní krychle. (Místo tří stěn každé odebrané „rohové“ krychle je třeba obarvit po jedné stěně každé ze tří krychlí, které s ní sousedily.) Proto by se žádná barva neušetřila. **6.** Rozřezáním obarvené krychle vznikne 8 krychlí se třemi modrými stěnami, $2 \cdot 12$ krychlí, tj. 24 krychlí se dvěma (sousedními) modrými stěnami a $2 \cdot 2 \cdot 6$ krychlí, tj. 24 krychlí s jednou modrou stěnou. Každá z 64 krychlí má aspoň jednu stěnu bílou. Aspoň jednu modrou stěnu má $8 + 24 + 24$ krychlí, tj. 56 krychlí. Proto modrobílou šachovnici (s 32 bílými a 32 modrými poli) je možné sestavit. K sestavení šachovnice s modrými svislými stěnami můžeme použít 2 krychle se třemi modrými stěnami (do protilehlých rohů), dále 14 krychlí s dvěma sousedními modrými stěnami (na okraje šachovnice), dále 30 krychlí s jednou modrou stěnou (z toho 12 na okraj šachovnice a $3 \cdot 6 = 18$ na modrá vnitřní pole) a konečně 18 krychlí na bílá vnitřní pole. Všechny tyto krychle máme k dispozici v dostatečném množství, proto i takovou šachovnici můžeme sestavit.

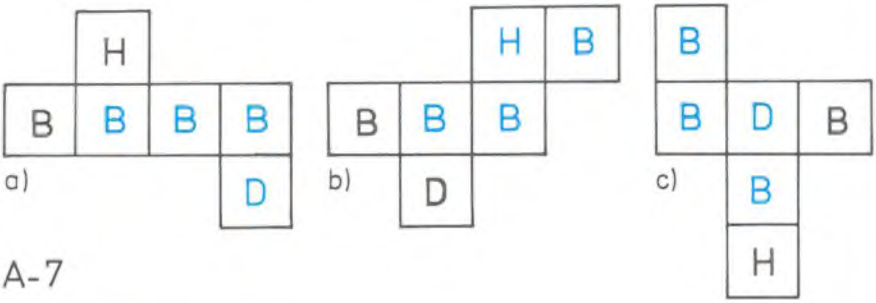
VÝSLEDKY SOUHRNNÝCH CVIČENÍ

1. 24 vrcholů, 14 stěn a 36 hran. **2.** Vzniklo 125 krychliček, z nich 8 mělo obarvené 3 stěny, 36 právě dvě stěny, 54 právě jednu stěnu a 27 zůstalo neobarveno. **3.** a) 40; b) 40; c) 8. **5.** Obr. C-1. **6.** a) 45°; b) 45°; c) 90°. **7.** Obr. C-2. **8.** Obr. C-3. **9.** Obr. C-4. **10.** Obr. C-5. **11.** Chybný je zápis C. **12.** a) Těleso T_2 je složeno z 15 nebo 14 kostek, těleso T_3 z 20 kostek; b) těleso T_2: 8, 4, 0, 2, těleso T_3: 12, 8, 0, 0. **13.** a) Ze 7 kostek; b) 2 skupiny – 6 kostek má 5 obarvených stěn, 1 kostka žádnou. **15.** T a V. **17.** Obr. C-6. **18.** a) 1 a 4, 2 a 5, 3 a 6; b) 1, 2, 4, 5. **19.** Např. obr. C-7. **20.** Např. obr. C-8. **21.** Např. obr. C-9. **22.** B. **23.** Na obr. C-10 je modře vyznačeno, kde je třeba „sítě“ přehýbat, abychom z nich složili povrchy krychlí. **24.** Krychle s otvorem je znázorněna na obr. C-11. Návod (obr. C-12): Nejprve znázorněte celou krychli s přední stěnou $KLMN$ v nákresně. Úsečky MS, MU a ST se zobrazí ve skutečné velikosti. Úsečka MP se zobrazí v poloviční velikosti a splyne s obrazem úsečky MX. Úsečka XV se zobrazí ve skutečné velikosti rovnoběžně s MU; tak dostaneme obraz bodu V. Obrazy úseček RS a QP budou rovnoběžné s obrazem úhlopříčky MO v horní stěně. Obraz bodu R zjistíme pomocí bodu Y. Pak už určíme i obraz bodu Q ($|RS| = |QP|$). Podobně zobrazíme i druhý okraj otvoru. **25.** KMR a LOQ. **26.** 160 cm. **27.** a) 16 cm^2; b) 18 cm^2; c) 22 cm^2; d) 26 cm^2. **28.** 189 cm^3. **29.** K natření bazénu je třeba asi 22,86 l barvy. Protože nákup dvou pětilitrových plechovek je dražší než nákup jedné desetilitrové, měli by Novákovi koupit dvě plechovky desetilitrové a jednu pětilitrovou. **30.** Protože je třeba dvakrát natřít plochu 7,88 m^2, musí žáci koupit 2 plechovky. **31.** a) 11 520 cm^3; b) 7 840 cm^3. **32.** 256 cm^3. **33.** 74,1 l. **34.** 2,95 m^2. **35.** 80 hl. **36.** 8 m^3. **37.** a) 8; b) 27. **38.** První řádek: 5, 10, 10; druhý řádek: 6; 294; 61,44; 600; třetí řádek: 1; 343; 32,768; 125; 1 000. **39.** Druhý řádek: 6; třetí řádek: 2; čtvrtý řádek: 22, 310, 226, 168; pátý řádek: 6, 350. **40.** Krychle z korku má hmotnost 8,1 kg, z dubového dřeva 18,9 kg, z borového dřeva 13,5 kg, ze skla 59,4 kg a z vosku 48,6 kg. (Sami podle své fyzické kondice zvažte, které z nich jste schopni zvednout a nést.) **41.** V mírném pásu 7 000 m^3, v rovníkovém pásu až 30 000 m^3. **42.** Na celou zahrádku napršelo 1 008 l vody. David by musel jít s konví 202krát. **43.** První schránka má objem 10 000 cm^3, druhá 22 320 cm^3. Za rok zaplatí pan Opatrný celkem 1 500 Kč. **44.** Součty délek hran i povrch obou těles jsou stejné. Upravená krychle má objem menší o   objemu původní krychle. **45.** 240 cm^3. **46.** 12 000 hl. **47.** 1 344 cm^3. **48.** 171,36 m^3 betonu. **49.** 6 cm. **50.** Povrch tělesa je 76 cm^2, objem 31 cm^3. **51.** Ano. Na obr. C-13 je vybarvena „síť" krychle s jednou rozstřiženou stěnou. Rýsováním a měřením lze zjistit, že pro krychli o hraně 1 dm je strana čtverce, ve kterém je tato síť umístěna, kratší než 29 cm. **52.** Sloupec z „centimetrových" kostek by měřil 10 km, sloupec z „milimetrových" kostek 1 000 km. Byl by tedy o 990 km vyšší.

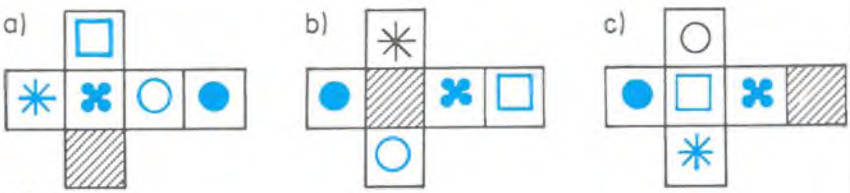

A-1
A-2
X'
Y'
Z'
X
Y
Z
A-3
IHFEXA
A-4
a)
b)
A-5
T_1
T_2
T_3
T_4

A-6



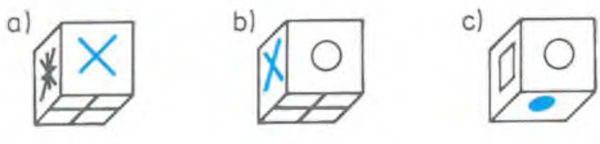


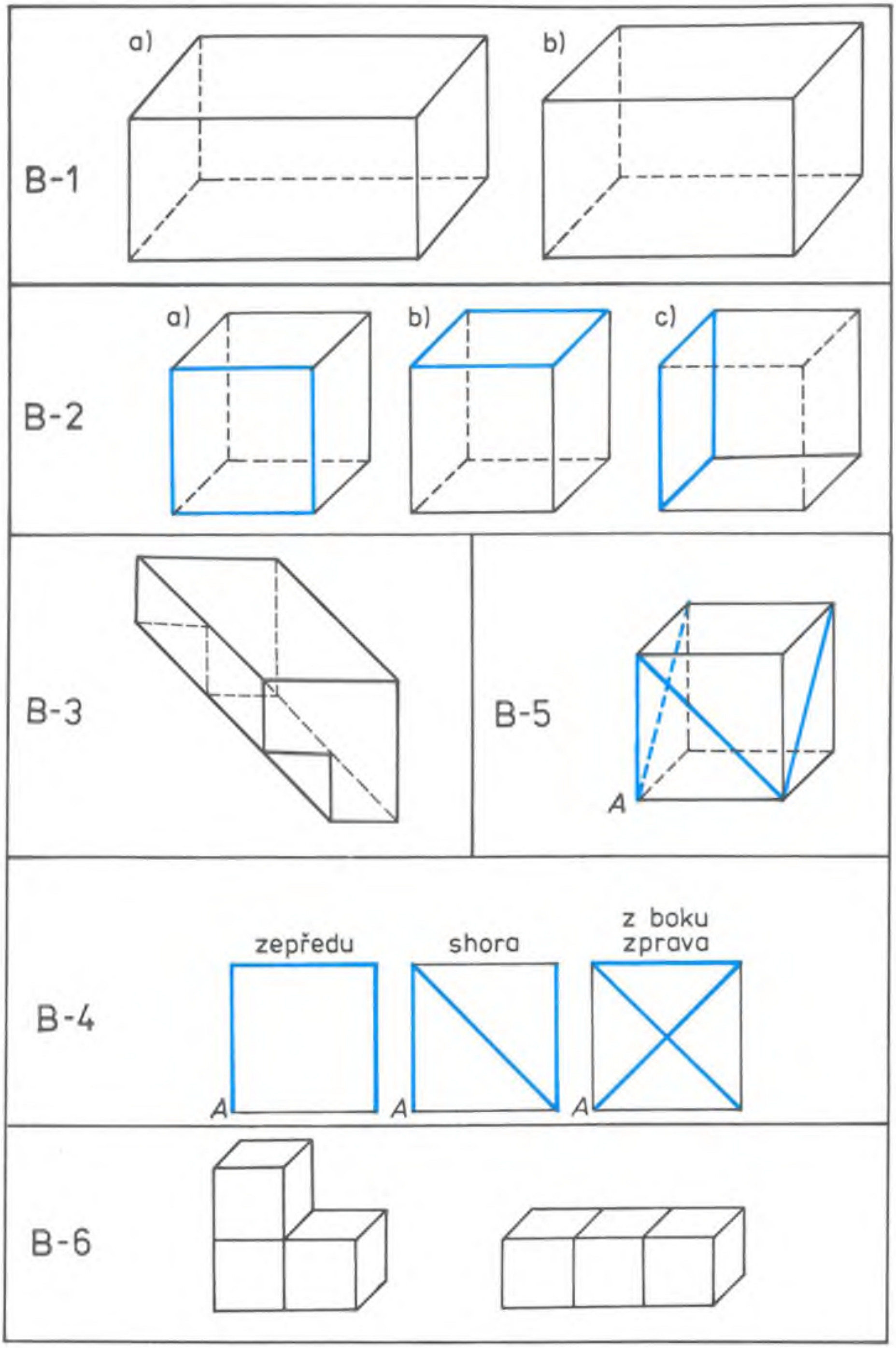
A-7

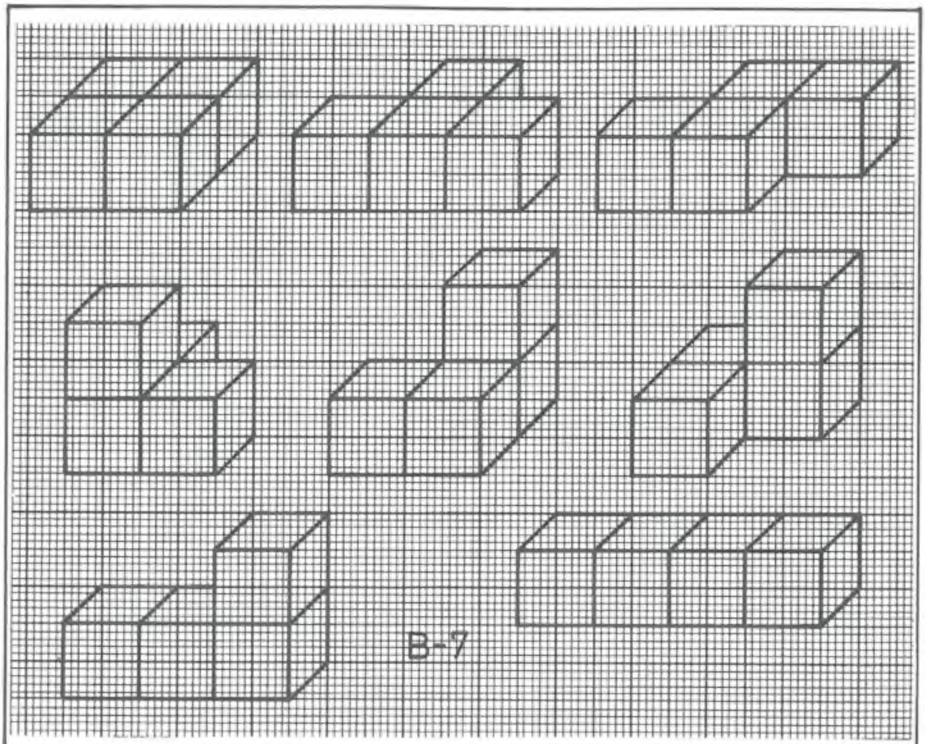


A-8

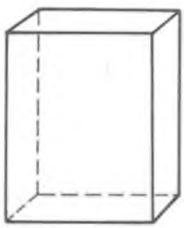
A-9



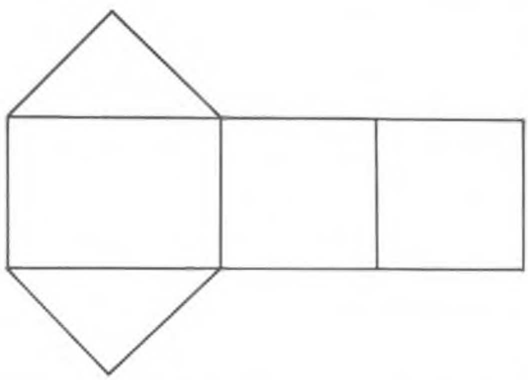

B-1
a)
b)
B-2
a)
b)
c)
B-3
B-5
A
B-4
zepředu
shora
z boku
zprava
A
A
A
B-6



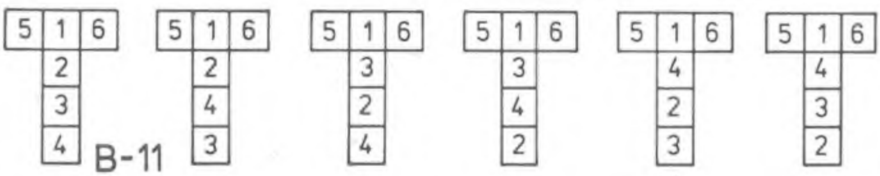
B-7



B-8

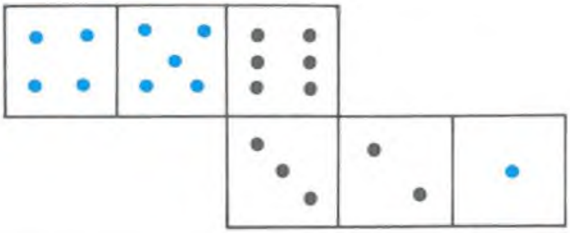


B-9

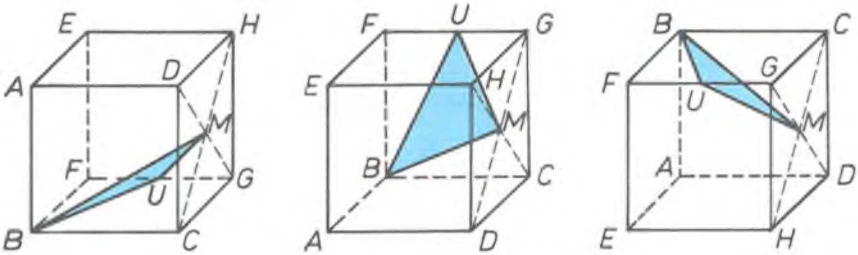


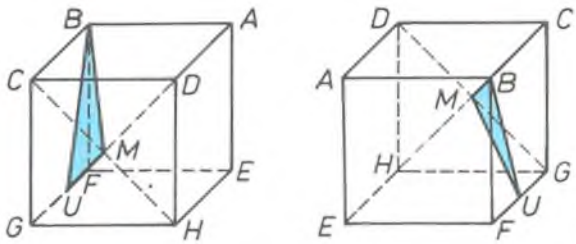
B-11

B-10

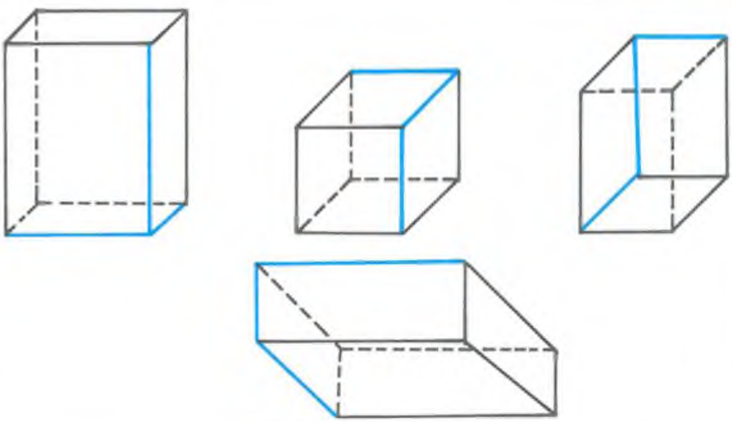


C-1

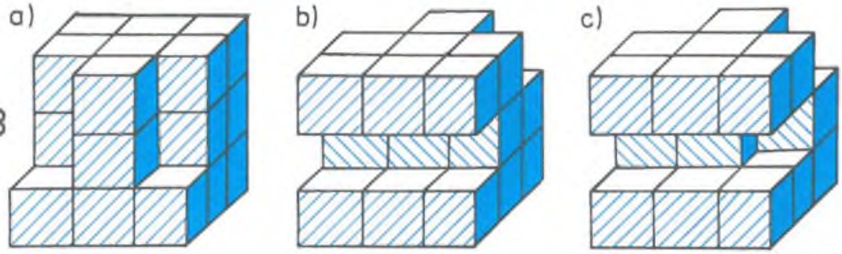

E H A D M F G U B C
F U G E H M B C A D
B C F G U M A D E H


B A C D M F E U G H
D C A B M H G E U F

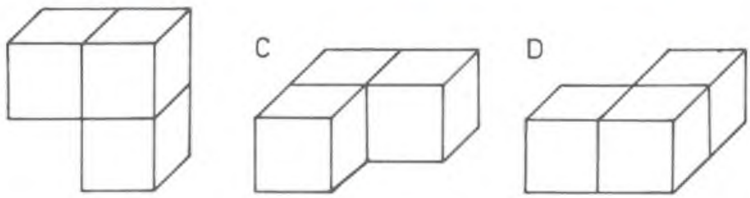
C-2



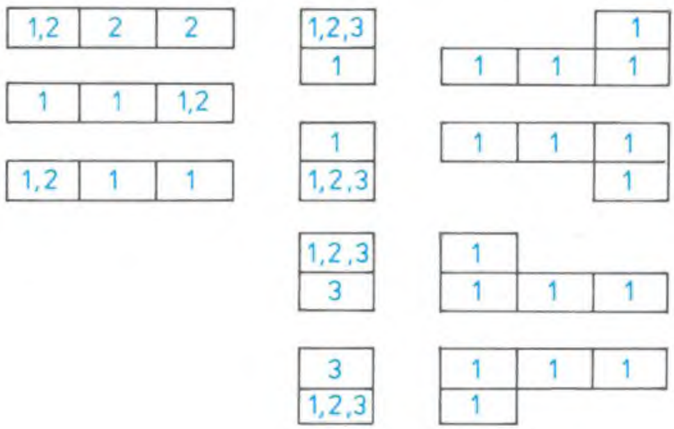
C-3


a)
b)
c)

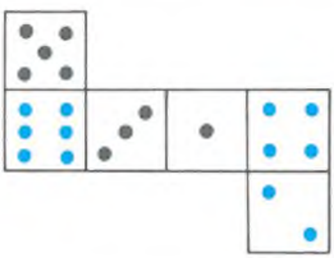
C-4

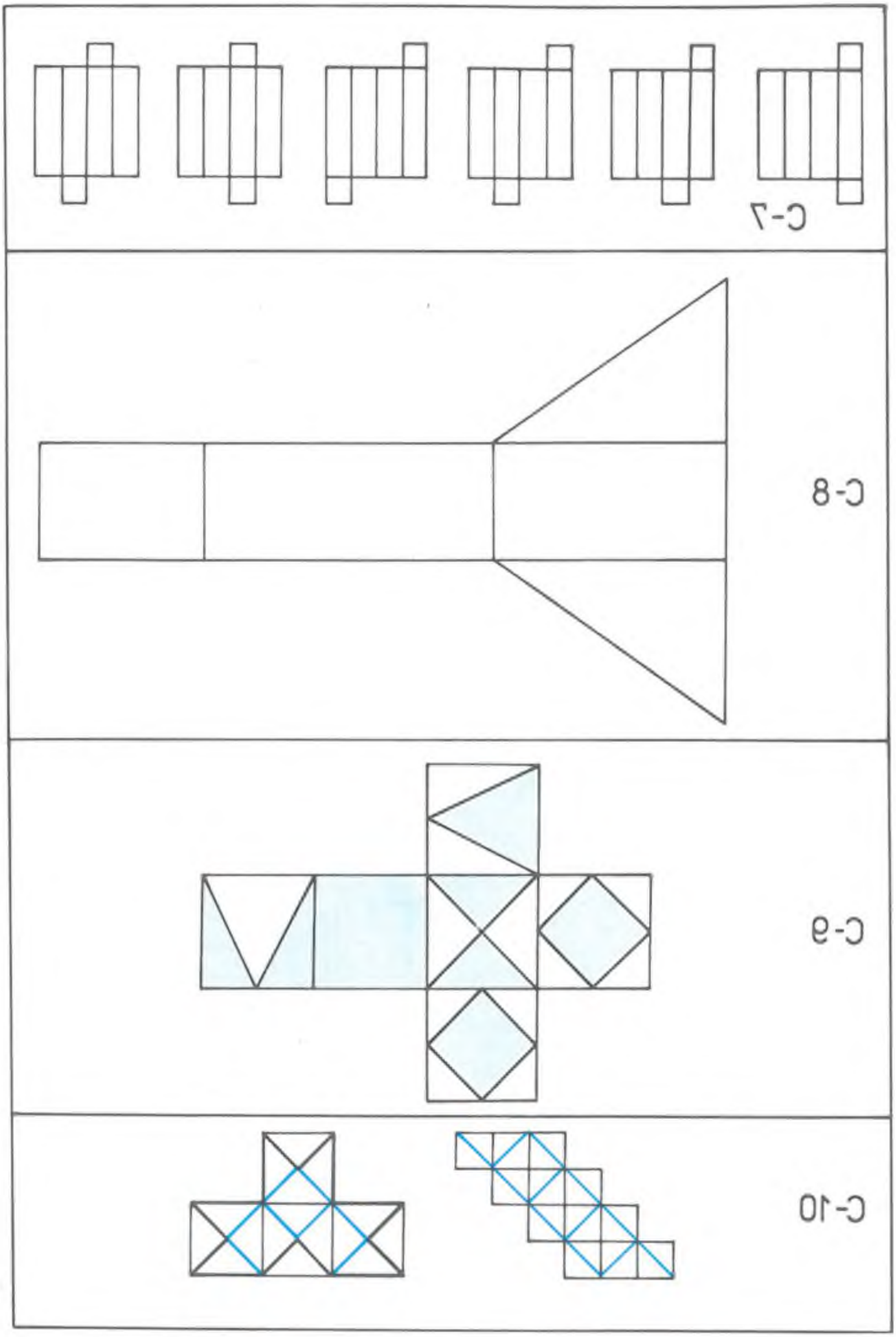

B
C
D

C-5

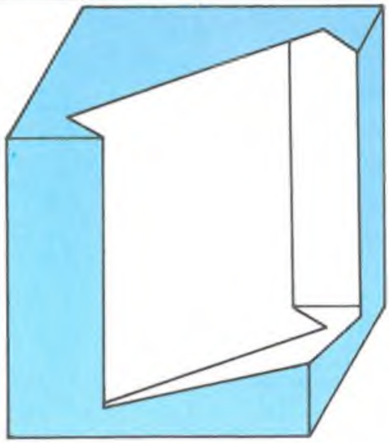

1,2 | 2 | 2
1 | 1 | 1,2
1,2 | 1 | 1
1,2,3
1
1
1,2,3
1,2,3
3
3
1,2,3
1
1 | 1 | 1
1 | 1 | 1
1
1
1 | 1 | 1
1 | 1 | 1
1

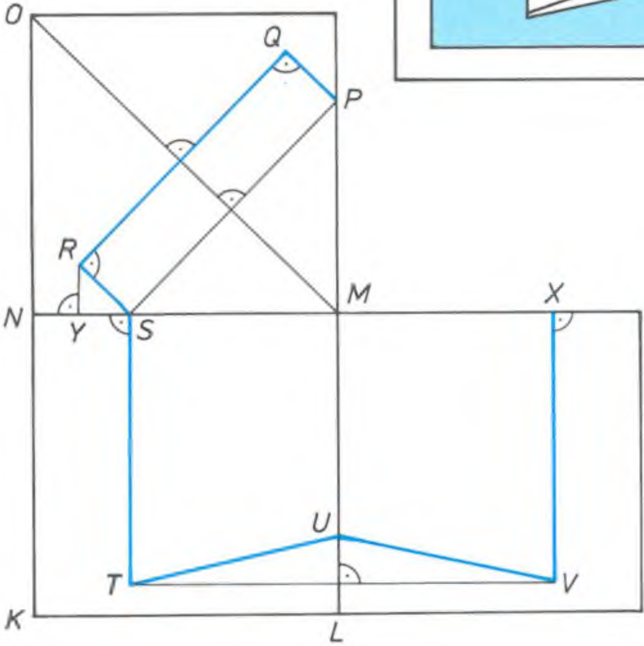
C-6




C-7
C-8
C-9
C-10

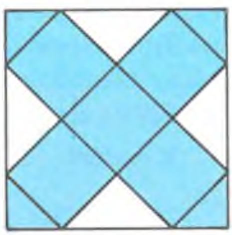
C-11





C-12

C-13



RNDr. Jiří Herman, Ph. D.
PaedDr. Vítězslava Chrápavá
Mgr. Eva Jančovičová
Doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc.

Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií
Hranoly

Obálku navrhl Miloš Jirsa
Ilustrovala Lucie Voráčková
Pérové obrázky narýsoval
RNDr. Jiří Mikulčák, CSc.
Vydalo nakladatelství Prometheus, spol. s r. o.,
Čestmírova 10, 140 00 Praha 4,
roku 2003
tel./fax: 241 740 283
e-mail: info@prometheus-nakl.cz
http://www.prometheus-nakl.cz
Edice Učebnice pro základní školy
Odpovědná redaktorka Marie Nováková
Sazbu programem TEX připravil Jura Charvát
Vytiskly Tiskárny Havlíčkův Brod, a. s.,
Husova 1881, 580 01 Havlíčkův Brod

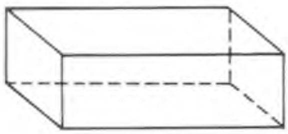
2. vydání

94 11 025

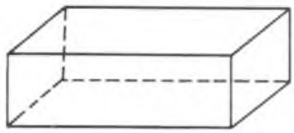
ISBN 80-7196-257-0

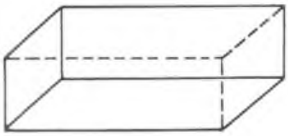
KVÁDR VE **VOLNÉM ROVNOBĚŽNÉM PROMÍTÁNÍ**

levý nadhled

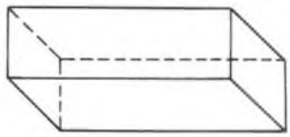


pravý nadhled



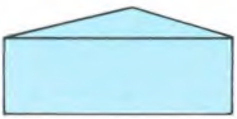


levý podhled

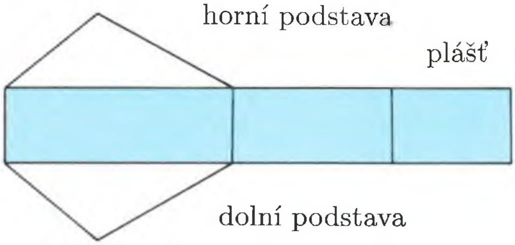


pravý podhled

SÍŤ HRANOLU



hranol



jeho síť

ISBN 80-7196-257-0
9 788071 962571

PROMETHEUS
94 11 025