PROMETHEUS®

Prima
Sekunda
Tercie
Kvarta

Matematika

Úvodní opakování

Jč
m+f

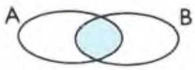
Číslice

Arabské číslice: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
Římské číslice: I, V, X, L, C, D, M

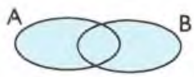
Symbolické zapisování množin

Zápis množiny výčtem prvků: $\mathsf{M} = \{a, b, c, d\}$
Příslušnost prvku k množině: $a \in \mathsf{M}, \quad e \notin \mathsf{M}$

Průnik množin: $\mathsf{A} \cap \mathsf{B}$



Sjednocení množin: $\mathsf{A} \cup \mathsf{B}$



Podmnožina množiny: $\mathsf{A} \subset \mathsf{C}$

Prázdná množina: $\emptyset$
Množina všech přirozených čísel: N

Vzorce

Obvod trojúhelníku se stranami a, b, c: $\boxed{o = a + b + c}$

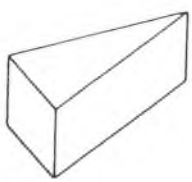
Obvod čtverce se stranou a: $\boxed{o = 4 \cdot a}$

Obsah čtverce se stranou a: $\boxed{S = a \cdot a}$

Obvod obdélníku se stranami a, b: $\boxed{o = 2 \cdot (a + b)}$

Obsah obdélníku se stranami a, b: $\boxed{S = a \cdot b}$

Tělesa



hranol

válec

kužel

jehlan

Prima
Sekunda
Tercie
Kvarta

Matematika

Úvodní opakování

RNDr. Jiří HERMAN, Ph. D.
PaedDr. Vítězslava CHRÁPAVÁ
Mgr. Eva JANČOVIČOVÁ
Doc. RNDr. Jaromír ŠIMŠA, CSc.

Prima
Sekunda
Tercie
Kvarta

Matematika

Úvodní opakování

PROMETHEUS

Publikace byla připravena ve spolupráci s JČMF.

Lektorovali RNDr. Jura Charvát, CSc., a RNDr. Milan Ryšavý.

Koordinátor učebnic matematiky pro nižší třídy víceletých gymnázií
doc. RNDr. Jindřich Bečvář, CSc.

Revizi výsledků provedl RNDr. Jura Charvát, CSc.

Schválilo MŠMT ČR dne 21. 7. 1997 pod č. j. 12364/97–21
k zařazení do seznamu učebnic pro nižší ročníky víceletých gymnázií
a třídy základních škol s rozšířenou výukou matematiky.

Dotisk 2. přepracovaného vydání

ISBN 80-7196-080-2

OBSAH

Na vysvětlenou ...

Tato publikace je přepracovaným prvním sešitem z řady učebnic matematiky pro nižší gymnázia a třídy základních škol s rozšířenou výukou matematiky.

Cílem našeho projektu je vytvořit v řadě 17 sešitů úplnou a soběstačnou pomůcku pro výuku matematiky v prvních čtyřech ročnících víceletého gymnázia. Proto jsou sešity sestavovány tak, aby je bylo možno použít jak při výkladu nové látky či jejím procvičování ve vyučovacích hodinách, tak i při domácí přípravě žáků. Kromě toho věříme, že bohatý příkladový materiál usnadní učitelům zadávání domácích úkolů a umožní žákům důkladně si probrané učivo procvičit. Zvídaví žáci také najdou mezi příklady řadu obtížnějších úloh.

Tento první sešit je věnován *opakování učiva matematiky*, které měli žáci zvládnout *v prvních pěti ročnících základní školy*. Je nasnadě, že právě takovým „opakovacím kursem" musí výuka matematiky v nově sestavené primě začít. Přicházejí sem totiž žáci z různých škol, jejichž matematická průprava je velmi různorodá, a to nejen pokud jde o kvalitu, ale i tematickou náplň. V prvních týdnech výuky je proto zapotřebí látku základní školy pečlivě zopakovat a doplnit tak znalosti a dovednosti jednotlivých žáků na potřebnou standardní úroveň. Je na učiteli, aby rozpoznal, že určité téma činí potíže většímu počtu žáků, takže bude nutné ho opakovat déle a podrobněji.

Náš sešit není pouhou *sbírkou úloh*, i když právě řešené úlohy v něm mají významné místo. Rozhodli jsme se dát tomuto *opakovacímu* sešitu stejnou formu, jakou budou mít další sešity naší řady, které už jsou věnovány *novým* tématům. Rozdíl je jen v tom, že podrobná vysvětlení a motivace nových pojmů, poznatků a pravidel jsou v tomto prvním sešitě nahrazeny stručným výkladem, který má často charakter shrnujícího přehledu. Jen na několika místech, kde učivo základní školy doplňujeme o nové poznatky, zejména v kapitolách o úhlech, je náš text podrobnější. Každý výklad je uveden otázkou (označenou otazníkem na okraji stránky) nebo řešeným příkladem. Nejdůležitější poznatky jsou shrnuty ve *větách*, které jsou graficky vyznačeny *rámečky*. Drobným písmem (petitem) jsou tištěny zajímavosti, historické poznámky a poznatky, které přesahují standardní rámec učiva.

U řešených příkladů často zařazujeme ukázky „opsané“ ze žákovských sešitů. Máme totiž zkušenosti, že žáci často nedokážou to, co sami správně vymyslí, srozumitelně a přehledně zapsat. Uvedené ukázky by jim mohly napovědět, jak zápisy svých řešení provádět.

Cvičení určená pro samostatnou práci žáků jsou trojího druhu. V každé kapitole jsou zařazovány *průběžné úkoly* značené ➡, které slouží k procvičení dílčích poznatků. Ke kontrole zvládnutí větších celků jsou určena samostatná *cvičení* uváděná vždy za jednou, případně několika kapitolami. Závěrečná *souhrnná cvičení* tvoří vlastně sbírku úloh k učivu celého 1. stupně základní školy. Všechny úkoly, cvičení i souhrnná cvičení jsou – pokud to má smysl – na konci sešitu opatřeny výsledky. Příklady určené k samostatné práci žáků označujeme někdy těmito symboly s uvedenými významy:

□ – lze řešit zpravidla zpaměti
* – obtížnější příklad
** – velmi obtížný příklad
■ – zajímavý příklad (podle našeho názoru)

V průběhu přípravy našich učebnic došlo k některým podstatným změnám v koncepci základních škol i víceletých gymnázií, které ovlivnily rozložení učiva matematiky do jednotlivých ročníků. Náš projekt, původně určený pro první tři ročníky (prima až tercie), tak nyní pokryje učivo ročníků čtyř. Navíc bylo redukováno učivo matematiky prvních pěti ročníků základní školy. Tomu jsme přizpůsobili tento úvodní opakovací sešit. Na něj bude navazovat nový sešit *Kladná a záporná čísla*, o který jsme původní projekt rozšířili. Celý projekt nyní vypadá takto:

Prima

Úvodní opakování
Kladná a záporná čísla
Dělitelnost
Osová a středová souměrnost

Sekunda

Racionální čísla. Procenta
Trojúhelníky a čtyřúhelníky
Hranoly
Výrazy 1

Tercie

Rovnice a nerovnice
Kruhy a válce
Úměrnosti
Geometrické konstrukce
Výrazy 2

Kvarta

Rovnice a jejich soustavy
Funkce
Podobnost a funkce úhlu
Jehlany a kužely

ÚVOD

V základní škole jste se v hodinách matematiky seznámili se základy *aritmetiky* a *geometrie*. Řekneme si nejdříve pár slov o tom, čím se tyto dva nejstarší matematické obory zabývají a jak vypadala jejich dávná historie.

Slovo $\alpha\varrho\iota\theta\mu o\zeta$ (čti aritmos) v řečtině znamená *číslo*. Aritmetika je nauka o číslech, především číslech přirozených, a o početních operacích, které s nimi provádíme. Proto je součástí našeho každodenního života. Pojem čísla si lidé osvojili velmi dávno, ještě v dobách, ze kterých se nám nedochovaly žádné písemné památky. Došlo k tomu pravděpodobně postupným vývojem tak, že lidé ve svých myšlenkách začali rozpoznávat jednotlivé předměty ve skupinách a rozlišovat jejich počty. Zpočátku obrazně pojmenovávali jen několik prvních přirozených čísel (např. oči = 2, pěst = 5) a značili je např. zářezy na kouscích dřeva, kosti nebo hromádkou kamenů, mušliček, uzlíky na provaze apod. Větší počty popisovali neurčitým slovem *mnoho*. S rozvojem hospodářské činnosti, zemních prací a obchodu se nároky na počítání neustále zvyšovaly. Lidé byli nuceni přemýšlet, jak úsporně zapisovat velká čísla. Dospěli tak k různým druhům *číselných soustav*. Zároveň se zdokonalovali v provádění čtyř aritmetických operací: sčítání, odčítání, násobení a dělení.

K nejstarším průkazným svědectvím o úrovni aritmetických znalostí lidstva patří staroegyptské papyry, napsané téměř 2 000 let před Kristem. Jde o sbírky úloh pro písařské školy. Zhruba ze stejného období pocházejí nejstarší matematické texty Babyloňanů, psané klínovým písmem na hliněných tabulkách. V nich se zajímavým způsobem pojí desítkový systém zápisu čísel se systémem šedesátkovým. Zručnými počtáři byli též obyvatelé staré Číny a Indie. Psali však bohužel na málo trvanlivý bambus a kůru stromů, takže se jejich písemné záznamy nedochovaly. Výpočty prováděli na tzv. počítacích deskách pomocí tyčinek nebo vepisovali číslice do vrstvy písku či prachu. Staří Řekové v 6. až 3. století před n. l. poznatky o číslech logicky uspořádali a spojili do uceleného systému. Přetvořili tak aritmetiku ve vědu. Pevné základy aritmetiky umožnily v novověku vznik a rozvoj dalších matematických disciplín.

Také název geometrie má svůj původ v řečtině; doslova znamená *zeměměřictví*. Geometrie však není věda o měření Země, ta se nazývá *geodézie*. Tuto zápletku s názvy nám vysvětlí historie. Řadu geometrických poznatků totiž objevili staří Egypťané právě při měření Země. Tato měření byla nutná, neboť řeka Nil, jejich hlavní živitelka, se pravidelně rozlévala, měnila tak své břehy a „smazala“ hranice dříve vyměřených pozemků. Kromě samotného měření se Egypťané naučili počítat obsahy a objemy jednoduchých obrazců a těles. Staří Řekové poznatky Egypťanů převzali, doplnili a logicky uspořádali. Zejména Eukleides ve svém díle *Základy* vybudoval geometrii již v našem současném pojetí. Je to nauka, která se zabývá rovinnými a prostorovými útvary. Zkoumá jejich tvary, velikosti, vzájemnou polohu a změny při různých zobrazeních (jako je odraz v zrcadle, zmenšení na fotografii apod.). Z hlediska geometrie není důležité, z jaké látky jsou zkoumaná tělesa utvořena, jakou mají barvu, hmotnost, teplotu apod. Podstatné je jen to, kterou část prostoru vyplňují. Protože geometrie popisuje prostorové vztahy světa, ve kterém žijeme, lze jen stěží najít obor lidské činnosti, kde tvary a objemy těles nehrají žádnou roli a kde se tedy obejdeme bez geometrických poznatků.

1 ČÍSLO A ČÍSLICE

Pojem *číslo* je základním stavebním kamenem celé *aritmetiky.* Ačkoliv lidé používali malá přirozená čísla již před mnoha tisíciletími, teprve objev důmyslného zápisu čísel v *desítkové soustavě* umožnil, že se nejdříve aritmetika a později i další obory matematiky začaly bouřlivě rozvíjet. Proto i my začneme naše opakování připomenutím, jak přirozená čísla vznikla a jak je v současné době zapisujeme.

? Jaký je rozdíl mezi *číslem* a *číslicí*?

Nejen z hodin matematiky, ale i z běžného života víte, že k vyjádření nějakého *počtu* nebo *množství* či pro určení toho, kolikátý je daný předmět v řadě podobných předmětů, používáme matematický pojem zvaný *číslo*.

Prohlédněte si následující obrázky:

Jana má *dva* bratry.

Týden má *sedm* dnů.

Jsem *třetí* nejvyšší v naší třídě.

Česká republika má více než *deset milionů* obyvatel.

Slova vytištěná kurzívou jsou číslovky, vyjadřující **čísla**.

Pro složitější výpočty je slovní vyjádření čísel naprosto nevhodné. Proto lidé dlouho hledali, jak čísla stručně a přehledně zapisovat. Časem dospěli k dnešnímu zápisu pomocí deseti znaků, kterým říkáme *arabské číslice*:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Čteme je nula, jednička, dvojka, trojka, čtyřka, pětka, šestka, sedmička, osmička, devítka.

Každá z těchto číslic sama o sobě však vyjadřuje také jedno z čísel

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

(čteme: nula, jedna, dvě, tři, čtyři, pět, šest, sedm, osm, devět).

V běžném životě často číslice a čísla nerozlišujeme. V matematice se však učíme nejen počítat, ale také přesně se vyjadřovat. Proto si dejme dobrý pozor, kdy mluvíme o čísle a kdy o číslici.

Číslice jsou znaky, které slouží k zápisu **čísel**.

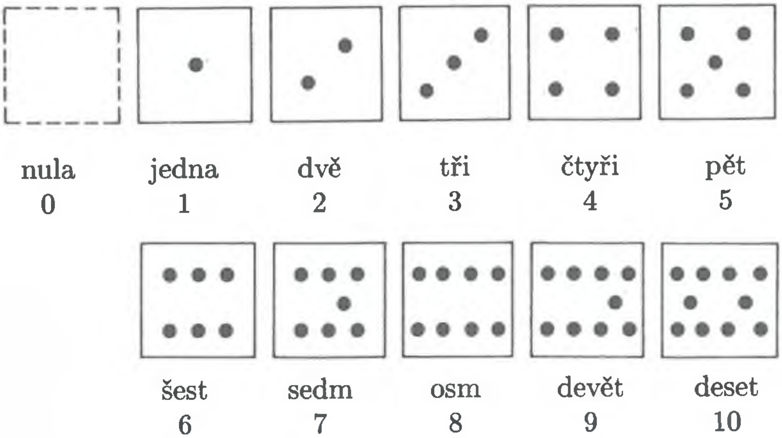
Arabské číslice mají svůj původ v Indii. Za své pojmenování však vděčí tomu, že v Evropě zdomácněly díky arabským učencům a obchodníkům, kteří je od Indů převzali.

Místo slova *číslice* se často používá i cizí slovo *cifra*, které je arabského původu. Méně užívané je latinské slovo *numero*; častěji se setkáte se slovem *numerický* (= číselný) či jinými z něj odvozenými slovy.

Co jsou přirozená čísla? Jak je zapisujeme a čteme?

Lidé si vymysleli *přirozená čísla* patrně proto, aby mohli vyjadřovat *počty prvků* různých skupin lidí, zvířat či předmětů.

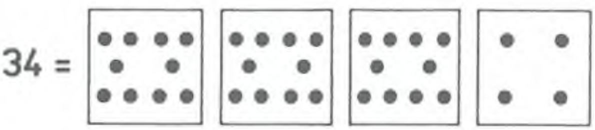
Znázorníme si puntíky několik nejmenších čísel (počtů). Každé z nich má v našem jazyce svůj název – slovo, které je připojeno:



Číslo nula, udávající počet prvků prázdné skupiny, má mezi čísly výjimečné postavení. Lidé začali nulu používat mnohem později než čísla 1, 2, 3, ...

Dohodneme se, že **nulu nebudeme považovat za přirozené číslo**.

Přirozené číslo, které je větší než devět, zapisujeme skupinou číslic. Tak například dvojice číslic 34 (kterou čteme „třicet čtyři") určuje číslo, které znázorníme pomocí puntíků takto:



V takovém zápise je tedy vyjádřeno, z kolika *desítek* a *jednotek* je toto číslo složeno. Abychom mohli zapsat čísla větší než 99, potřebujeme jednotky vyšších řádů: stovky, tisíce (tisícovky), ... Tyto názvy jsou vysvětleny v následující tabulce.

Jednotka	řádu	má význam	rovná se číslu
desítka	1	10 jednotek	10
stovka	2	10 desítek	100
tisíc	3	10 stovek	1 000
deset tisíc	4	10 tisíců	10 000
sto tisíc	5	100 tisíců	100 000
milion	6	1 000 tisíců	1 000 000
miliarda	9	1 000 milionů	1 000 000 000

Vidíme, že řád každé z těchto jednotek je roven počtu nul v zápise čísla, které jí odpovídá. Proto „výchozí" jednotku, která se rovná číslu 1, nazýváme **jednotkou řádu nula** (nebo též **základní jednotkou**).
Každá jednotka následujícího řádu je složena z *deseti* jednotek předchozího řádu. Proto se naše soustava pro zápis čísel nazývá **desítková**.

Zapíšete-li za jedničku 12 nul, vznikne číslo, které se nazývá *bilion*, pokud za jedničku zapíšete 18 nul, jmenuje se zapsané číslo *trilion*. Výpočty s takovými čísly jsou obtížné, protože jejich zápisy jsou dlouhé a nepřehledné. Naštěstí taková čísla potřebujeme zřídkakdy. Později se naučíte jednotky velkých řádů zapisovat zkráceně.

Jistě víte, které číslo označuje skupina číslic

$$25\,045,$$

a umíte toto číslo správně přečíst. Připomeňme si, jaký význam mají jednotlivé číslice 2, 5, 0, 4, 5 v zápise tohoto čísla. Jde o číslo složené z pěti jednotek, čtyř desítek, žádné stovky, pěti tisíců a dvou desetitisíců. Takový rozklad zapisujeme součtem

$$2 \cdot \boxed{10\,000} + 5 \cdot \boxed{1\,000} + 0 \cdot \boxed{100} + 4 \cdot \boxed{10} + 5 \cdot \boxed{1}$$

a nazýváme ho **rozvinutým zápisem** daného čísla v desítkové soustavě. Zápis 25 045 nazýváme **zkráceným**.

Je důležité si uvědomit, že každá číslice má v zápise čísla 25 045 pevné místo (pozici), která odpovídá příslušnému řádu:

číslice 2 stojí na místě řádu 4 (neboli na místě desetitisíců)
číslice 5 stojí na místě řádu 3 (neboli na místě tisíců)
číslice 0 stojí na místě řádu 2 (neboli na místě stovek)
číslice 4 stojí na místě řádu 1 (neboli na místě desítek)
číslice 5 stojí na místě řádu 0 (neboli na místě jednotek)

Na různých pozicích může být zapsána stejná číslice: v našem případě stojí číslice 5 na místě tisíců i jednotek. Zaměníme-li pořadí číslic, dostaneme jiná čísla: např. 55 402, 24 505, atd. Dostali jsme se tak k podstatě našeho zápisu čísel.

> Každé přirozené číslo před zápisem rozložíme tak, že určíme, z kolika jednotek, desítek, stovek, ... je toto číslo složeno.

Počet jednotek, desítek, stovek, ... v rozkladu každého čísla je menší než 10, neboť 10 jednotek téhož řádu dává jednu jednotku řádu vyššího. Proto nám k zápisu počtů jednotek, desítek, stovek, ... každého čísla stačí číslice 0, 1, 2, ..., 9.

Zapíšeme-li tyto číslice (tj. počty jednotek, desítek, stovek, ...) za sebe v pořadí zprava doleva, dostaneme zápis daného přirozeného čísla v desítkové soustavě. Pro lepší přehlednost zapisujeme číslice velkých čísel po trojicích, tvořených zprava doleva a oddělených malou mezerou. Například 72 012 745 004 545.

1. Přečtěte správně čísla:
a) 1 200 b) 1 200 000 c) 1 200 000 000

2. Přečtěte správně čísla
a) 102 304 506, b) 8 965 378 216
a určete jejich rozvinutý zápis.

3. Zapište čísla
a) jeden milion čtyři tisíce čtyři, b) tři miliardy pět,
c) dva miliony sto pět tisíc.

4. Cvičte po trojicích:
Jeden zapíše přirozené číslo větší než 100 000, druhý ho přečte třetímu a ten ho opět zapíše. Oba zápisy pak porovnejte.

5. Napište všechna čísla, která lze sestavit z číslic 1 a 2, má-li se každá číslice vyskytovat v sestaveném čísle nejvýše dvakrát.

6. Kolik čísel lze zapsat pomocí některých z číslic 1, 5 a 9 tak, aby se žádná číslice v jednom čísle neopakovala?

Jak odhadujeme velikost čísla?

Potřebujeme-li si udělat přibližnou představu, jak je některé přirozené číslo veliké, podíváme se, který nejvyšší řád je v něm zastoupen. Jistě znáte z běžného života rčení podobná těmto:

- Pan X. má na svém kontě šestimístnou sumu.
- Shromáždění se zúčastnily stovky demonstrantů.
- Utkání v kopané sledovaly desetitisíce diváků.

V matematice velikost přirozeného čísla posuzujeme podle toho, kolik číslic je třeba k jeho zápisu. Tak číslo 25 045 je *pěticiferné*, protože jeho zápis je složen z pěti číslic, které obsazují 5 pozic. Podobně hovoříme o jednociferných, dvojciferných, trojciferných, čtyřciferných, ... číslech.

Někdy se ve stejném významu používají názvy jednomístná, dvojmístná, trojmístná, ... čísla.

Zvláštní postavení mezi číslicemi má číslice 0. Ta označuje, že daný řád není v čísle zastoupen. Proto je zbytečné, aby zápis přirozeného čísla začínal jednou nebo více nulami: Například místo 015 píšeme 15 a toto číslo považujeme za dvojciferné. V běžném životě se však setkáte i se zápisy začínajícími nulou (např. u telefonních čísel). Na jiných místech však nulu vynechat nemůžeme: například čísla 703 a 73 jsou různá.

Připomněli jsme si základní zásady zápisu čísel v *desítkové poziční soustavě.*

Je jasné, proč se námi užívaná soustava jmenuje právě takto: k zápisu čísel používáme *deset* číslic a záleží na *pozici*, na které je každá číslice v čísle zapsána.

□ **7.** Určete, kolik je všech
   a) dvojciferných čísel,   b) trojciferných čísel.

8. Zapište a přečtěte největší trojciferné, čtyřciferné a sedmiciferné číslo.

9. Číslice 0, 1, 2, 3, 4 zapište v takovém pořadí, aby vzniklo
   a) největší,   b) nejmenší
   možné pěticiferné číslo.

Jak se zapisují čísla pomocí *římských* číslic?

Při označování letopočtů, číslování kapitol v některých knihách či na ciferníních některých hodin se můžete setkat s některými *písmeny* ve významu *římských číslic*, s nimiž počítali lidé v antickém Římě. K zápisu čísel tak dodnes slouží těchto sedm římských číslic:

Římská číslice	I	V	X	L	C	D	M
značí číslo	1	5	10	50	100	500	1 000

Další čísla se zapisují podle těchto pravidel:

- Zapsané číslo je ***součtem*** všech svých číslic, pokud v něm někde nestojí znak menšího čísla před větším.
- Jestliže v čísle následuje za znakem menšího čísla znak čísla většího, musíme nejprve menší číslo od většího *odečíst*. Teprve pak sečteme všechna (zmenšená i nezmenšená) čísla.

Odčítaná čísla mohou být vyjádřena jen číslicemi I, X, C a každá z nich se může odečítat jen jednou.

Prohlédněte si na následujících příkladech, jak se některá čísla římskými číslicemi zapisují:

II	...	2	[1 + 1]	IV	...	4	[5 − 1]
III	...	3	[1 + 1 + 1]	IX	...	9	[10 − 1]
VII	...	7	[5 + 1 + 1]	XL	...	40	[50 − 10]
XVIII	...	18	[10 + 5 + 1 + 1 + 1]	IC	...	99	[100 − 1]
LXII	...	62	[50 + 10 + 1 + 1]	CD	...	400	[500 − 100]
MDLV	...	1 555	[1 000 + 500 + 50 + 5]	CM	...	900	[1 000 − 100]

Zatímco čísla v levém sloupci určíme postupným sčítáním zapsaných číslic, při čtení čísel v pravém sloupci jsme museli odečíst „menší" číslici od „větší". Při vyjadřování některých čísel je však třeba použít jak sčítání, tak odčítání:

XIV	...	14	[10 + 5 − 1]
XLVI	...	46	[50 − 10 + 5 + 1]
XCIV	...	94	[100 − 10 + 5 − 1]
CDXIX	...	419	[500 − 100 + 10 + (10 − 1)]
MCMXCV	...	1 995	[1 000 + (1000 − 100) + (100 − 10) + 5]

Každá z číslic I, X, C se v zápisu jednoho čísla vyskytuje nejvýše třikrát za sebou.

Pravidla, která jsme uvedli, však nejsou vždy dodržována. Zejména ve starších textech najdete například i zápis XXXXIIII. Závažnější je, že i podle našich pravidel lze některá čísla zapsat více způsoby. Například IC a XCIX jsou dva možné zápisy čísla 99.

10. Zapište arabskými číslicemi následující čísla: XII, XXXIX, CDLX, MDCLXI, MMIC, MCDXI

11. Zapište římskými číslicemi tato čísla: 29, 57, 74, 169, 341, 1 132, 1 492

12. Zapište římskými číslicemi letopočet letošního roku i roku vašeho narození.

13. Určete, kterou římskou číslici lze zapsat do rámečku, má-li být vzniklé číslo větší než číslo před rámečkem:

a) V☐	b) X☐	c) L☐
d) C☐	e) D☐	f) M☐

Každé číslo zapište arabskými číslicemi v desítkové soustavě. Najděte všechny možnosti.

14. Určete, kterou římskou číslici lze zapsat do rámečku, má-li být vzniklé číslo menší než číslo za rámečkem:

a) ☐V	b) ☐X	c) ☐L
d) ☐C	e) ☐D	f) ☐M

Každé číslo zapište arabskými číslicemi v desítkové soustavě. Najděte všechny možnosti.

Z předchozích příkladů je vidět, že zápis čísel římskými číslicemi je složitější než obvyklý zápis číslicemi arabskými v desítkové poziční soustavě. Ještě komplikovanější je počítání s takto zapsanými čísly – jednoduché není ani sčítání a odčítání „málociferných" čísel.

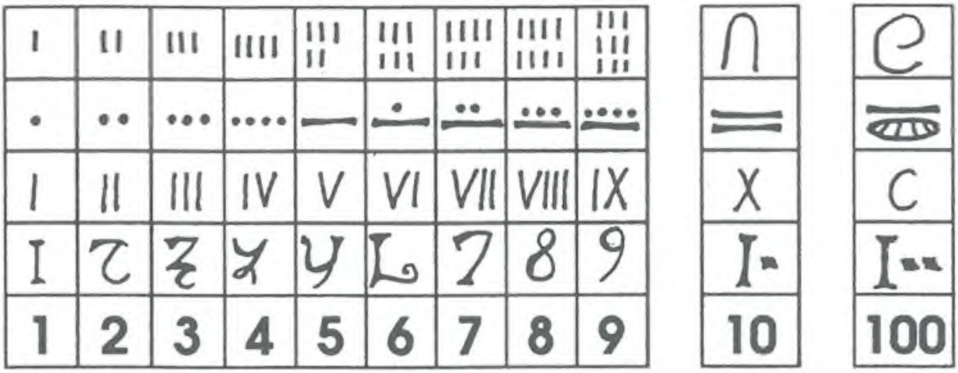
Výhody, které má *desítková poziční* soustava, způsobily, že zápisy v této soustavě se používají již téměř 500 let. S římskými číslicemi se nyní setkáváme zřídka.

To, že lidé začali k počítání používat *desítkovou* soustavu, zřejmě souvisí s tím, že naši prapředkové si při prvních jednoduchých výpočtech pomáhali deseti prsty svých rukou.

Historicky významná byla i *šedesátková soustava*, v níž počítali Sumerové již 3 000 let před Kristem. Se „zbytky" této soustavy se můžeme setkat i nyní, zejména v údajích o čase (1 hodina = 60 minut; 1 minuta = 60 sekund).

V moderní době se ukazuje, že i desítková soustava je zbytečně „složitá" pro počítače. Ty pracují v tzv. *dvojkové* poziční soustavě, kde se k zápisu čísel používají pouze dvě číslice – nula a jednička.

V následující tabulce jsou zachyceny zápisy číslic u některých starých národů. V prvním řádku jsou *staroegyptské* číslice, v druhém znaky, které používali pro zápis čísel staří *Mayové*. *Římské* číslice z třetího řádku jistě sami poznáte. Číslice, které užíváme dnes, jsou nakresleny v posledním řádku. Vznikly ze *starých arabských* číslic, které najdete v předposledním řádku tabulky.



CVIČENÍ 1

1. Zapište číslem v desítkové soustavě:

a) jeden tisíc šest set dvacet čtyři,

b) padesát šest tisíc osm,

c) tři miliardy dva miliony sedmnáct.

□ **2.** Přečtěte číslo:

a) 207 805 b) 86 002

c) 3 025 180 d) 76 659 043 105

3. Velká čísla v následujících větách zapište číslicemi:
Asi před 17 miliardami let vznikl superexplozí (tzv. velkým třeskem) vesmír. Ale teprve zhruba před 5 miliardami let se ze sluneční mlhoviny kotoučového tvaru vytvořilo Slunce s naší planetární soustavou. Ve světovém oceánu se objevily přibližně před čtyřmi miliardami let první počátky úkazu, který nazýváme život. Před 440 miliony let vylezli první členovci z vody na souš a začali novou kapitolu v knize vývoje života.

4. Určete zkrácený zápis čísla:

a) $7 \cdot 1\,000 + 0 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 9 \cdot 1$

b) $5 \cdot 10\,000 + 4 \cdot 1\,000 + 5 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 0 \cdot 1$

5. Určete rozvinutý zápis čísla:

a) 6 305 b) 311 907

6. Zapište šesticiferné číslo, které má:

a) číslici 4 na místě jednotek, tisíců i statisíců a na ostatních místech má číslici 0,

b) číslici 9 na místě stovek a statisíců a na ostatních místech má číslici 8.

7. Seřaďte od nejmenšího k největšímu tato čísla:

a) 57, 505, 7 005, 75, 570, 5 007, 750, 7 070, 7 500

b) 678 785, 678 857, 678 768 688 578, 678 785 768 578

□ **8.** Ke každému z daných čísel určete číslo o 2 menší a o 2 větší:

a) 999 b) 63 999 c) 4 749 001

d) 7 099 e) 69 001 f) 4 999 999

□ **9.** Kolikaciferné je číslo, jehož první číslice zleva značí

a) 7 tisíců, b) 2 stotisíce, c) 8 stomilionů?

10. Kolikrát zapíšete číslici 0, vypíšete-li za sebou

a) prvních deset přirozených čísel,

b) prvních sto přirozených čísel,

c) prvních tisíc přirozených čísel?

11. Napište všechna dvojciferná čísla vytvořená z číslic 1, 5, 6.

12. Napište všechna dvojciferná čísla vytvořená z číslic 1, 3, 6, 9 a seřaďte je podle velikosti.

13. Napište všechna trojciferná čísla vytvořená z číslic 0, 1, 2, 3, ve kterých se žádná číslice neopakuje. Uspořádejte je podle velikosti.

14. Zjistěte, zda v okolí vašeho bydliště je na nějaké budově (kostele, památníku apod.) nápis s letopočtem zapsaným římskými číslicemi. Pokud ano, opište letopočet do sešitu a přineste do školy. Napište ho na tabuli a nechte zapsat spolužákům arabskými číslicemi.

15. Zapište římskými číslicemi čísla od 40 do 60.

16. Zapište římskými číslicemi čísla:

a) 3, 30, 300, 3 000

b) 5, 25, 35, 95, 250, 350, 2 500, 3 500

c) 2, 28, 32, 280, 320, 2 800, 3 200

d) 195, 185, 165, 1 900, 1 950, 1 850, 1 650

e) 8, 18, 38, 888

17. Zapište arabskými číslicemi čísla: XCIX, CCIX, CCCLXXIX, DCCVII, CDXXVIII, MCMXCV, MM, MIM, MXM

☐ **18.** Přečtěte letopočty z obrázků:

NICOLAVS ISTVANFFII · S · CÆS
SECRETARIVS
AETATIS SVAE XXXVI
ANNO DOMINI · M · D · LXXV

Anno Christi MCCCCXXIV
Die kvis ante
Festum Galle

ANNO+MCCCCLXXXVI+SAIN

2 MNOŽINY

V dalších kapitolách připomeneme základní poznatky o všech druzích čísel, s kterými jste se setkali v základní škole. Abychom se mohli stručně a srozumitelně vyjadřovat, zopakujeme v této kapitole, co jsou *množiny*, jak se určují a zapisují a jak se s nimi pracuje.

Co je *množina*?

?

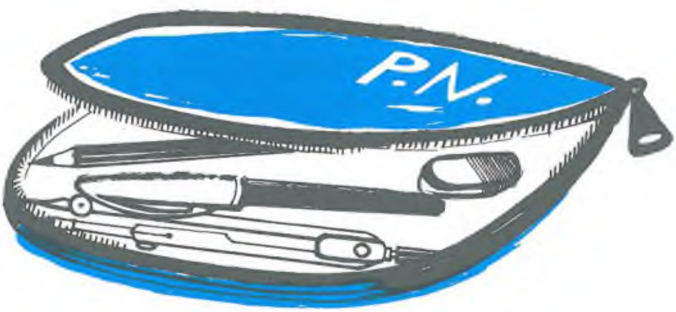
Místo slov skupina, souhrn, hromada, ... používáme v matematice termín *množina*.
Tak např. můžeme mluvit o množině všech žáků třídy I.B, množině všech dvojciferných čísel, množině všech vrcholů daného čtverce apod.
Snadno sami určíte, který objekt do uvedených množin započítat a který ne. Pokud některý objekt do dané množiny patří, říkáme mu *prvek* této množiny.

> **Množinou** nazýváme skupinu objektů zvaných **prvky** této množiny. Pro každý objekt je jednoznačně určeno, zda do dané množiny patří, nebo nepatří.

Jak určujeme, zapisujeme a značíme množiny?

?

Podívejte se, co má Petr ve svém pouzdře:



Vidíme, že množina všech předmětů v jeho pouzdře má čtyři prvky. Označíme je malými písmeny: tužku t, pero p, gumu g a kružítko k. Celou tuto množinu předmětů pak označíme písmenem A.

V matematice můžeme takovou množinu určit *výčtem prvků*:

tužka, pero, guma, kružítko

Symbolicky to zapisujeme takto:

$$\mathsf{A} = \{t, p, g, k\}$$

Značení prvků jedním písmenem však není vždy nutné. Tak například

$$\mathsf{V} = \{\text{červená, bílá, modrá}\}$$

je výčtem zapsaná množina V *všech barev na české státní vlajce.*

V takových zápisech *složené* závorky { } označují, že jde o množinu. Mezi tyto závorky vypisujeme jednotlivé prvky a oddělujeme je čárkami. Na pořadí zapsaných prvků nezáleží:

$$\{t, p, g, k\} = \{k, p, t, g\}$$
$$\{\text{červená, bílá, modrá}\} = \{\text{bílá, modrá, červená}\}$$

Každý prvek se při výčtu zapisuje jen jednou. Např.

$$\{a, b, d, k, n, s\}$$

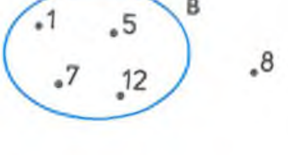
je množina *všech písmen slova bandaska.*

K označení množin používáme zpravidla velká písmena, zatímco prvky množin obvykle značíme malými písmeny.

Dále budeme pracovat především s množinami, jejichž prvky jsou čísla. Takové množiny budeme zapisovat např. takto:

$$\mathsf{B} = \{1, 5, 7, 12\}$$

Tento zápis znamená, že množina B obsahuje právě 4 prvky, kterými jsou čísla 1, 5, 7 a 12. Pro názornou představu si zakreslíme tuto množinu diagramem:



Na tomto diagramu je navíc znázorněno, že číslo 8 do množiny B nepatří.

Ukážeme ještě, jak symbolicky zapsat, zda daný prvek do dané množiny patří, či nepatří.

V našem případě platí:

$1 \in \mathsf{B}$	(čti: číslo 1 patří do množiny B)
$5 \in \mathsf{B}$	(čti: číslo 5 patří do množiny B)
$7 \in \mathsf{B}$	(čti: číslo 7 patří do množiny B)
$12 \in \mathsf{B}$	(čti: číslo 12 patří do množiny B)
$8 \notin \mathsf{B}$	(čti: číslo 8 nepatří do množiny B)

Znak $\in$ můžeme také číst „je prvkem množiny“, znak $\notin$ „není prvkem množiny“.

Znak $\in$ vznikl z řeckého písmena ε (čti „epsilon“) – prvního písmena slova $\varepsilon\lambda\varepsilon\mu\varepsilon\nu\tau$ (čti „element“), které znamená prvek.

1. Zapište výčtem množinu P všech jednociferných přirozených čísel.

□**2.** Je dána množina $\mathsf{T} = \{7, 9, 11, 15, 20\}$. Rozhodněte, zda platí:
a) $9 \in \mathsf{T}$ b) $21 \in \mathsf{T}$ c) $11 \notin \mathsf{T}$ d) $6 \notin \mathsf{T}$

3. Zapište výčtem množinu všech měsíců v roce, které mají 31 dnů.

□**4.** Množina S je dána výčtem prvků:

$$\mathsf{S} = \{11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99\}$$

Popište množinu S jinak než výčtem prvků.

$*$**5.** Určete danou množinu společnou vlastností jejích prvků:
a) T = {h, ch, k, r, d, t, n} b) P = {červenec, srpen}
c) N = {c, d, e, f, g, a, h}

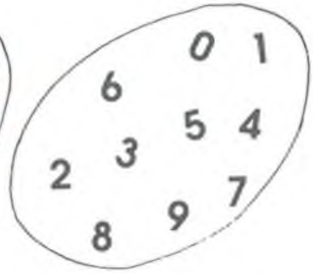
(Nebudete-li si v případě b) vědět rady, nic si z toho nedělejte, o prázdninách se vás na to nikdo ptát nebude. Nebudete-li si vědět rady v případě c), zazpívejte si!)

? Jak rozdělujeme množiny podle počtu prvků?

Na následujících obrázcích jsou znázorněny tři množiny T, K a C:

množina T
tří tužek

množina K
čtyř květin



množina C
deseti číslic

Množina T obsahuje tři prvky, proto jí říkáme *tříprvková*. Podobně množina K je *čtyřprvková* a množina C *desetiprvková*.

Vezměme si jakoukoli množinu předmětů či živých bytostí ze světa, který nás obklopuje. Můžeme si představit, že její prvky postupně vybíráme a značíme čísly 1, 2, 3, ..., až celou množinu vyčerpáme. Největší přirozené číslo, které při takovém číslování použijeme, udává počet prvků naší množiny. Protože po označení posledního prvku číslování *skončí*, nazývá se každá taková množina **konečná**.

Konečné jsou i množiny, které jsou těžko představitelné pro ohromný počet svých prvků, například množina všech zrnek písku na všech pobřežích světa, množina všech atomů, z nichž jsou složeny všechny živé bytosti naší sluneční soustavy v tomto okamžiku, množina všech slov ve všech dosud napsaných románech i jiné.

V matematice je výhodné uvažovat i o množinách, které nejsou konečné. Příkladem je *množina všech přirozených čísel*, kterou značíme písmenem N a zapisujeme

$$\mathsf{N} = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

Počet prvků této množiny nelze vyjádřit žádným přirozeným číslem: ke každému přirozenému číslu můžeme totiž vytvořit číslo o 1 větší. Množiny, které nemají konečný počet prvků, se nazývají **nekonečné**.

Symbol N pro množinu přirozených čísel je prvním písmenem latinského slova *naturalis*, které česky znamená *přirozený*.

Zvláštní postavení mezi konečnými množinami má množina, která neobsahuje žádný prvek. Ta se nazývá **prázdná** a značí se symbolem $\emptyset$ nebo $\{\,\}$.

Prázdnou množinou je například

- množina všech Čechů, kteří byli prezidenty USA,
- množina všech přirozených čísel větších než 6 a menších než 7.

☐ **6.** Určete, kolik prvků má množina
   a) všech žáků ve vaší třídě,
   b) všech tříd ve vaší škole,
   c) všech dívek ve vaší třídě, které hovoří plynně španělsky.

7. Určete, kolik prvků má množina všech čtyřciferných přirozených čísel.

∗**8.** Určete, kolik prvků má množina všech čísel, které lze zapsat římskými číslicemi I, V a X. Neuvažujte zápisy se čtyřmi stejnými číslicemi za sebou.

Co jsou *průnik* a *sjednocení* dvou množin?

Často je užitečné zjistit, které prvky patří současně do dvou daných množin. Vyberme ze žáků třídy I.B množinu H všech žáků, kteří hrají na nějaký hudební nástroj, a množinu S všech žáků, kteří závodně sportují.

Pavel, který se učí hrát na klavír a závodně hraje kopanou, patří současně do obou množin, H i S. Všichni Pavlovi spolužáci, kteří hrají na hudební nástroj *a současně* závodně sportují, vytvoří množinu, které říkáme **průnik** množin H a S a označujeme $H \cap S$.

Podobně pro množiny

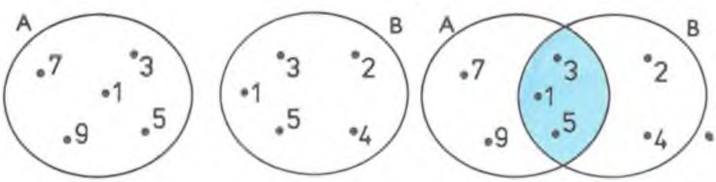
$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\} \quad \text{a} \quad B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

je průnikem množina

$$A \cap B = \{1, 3, 5\},$$

neboť pouze čísla 1, 3 a 5 patří do obou množin A i B.

Dobře je to vidět na následujícím diagramu:



Jindy je třeba stručně popsat všechny takové prvky, které patří *alespoň do jedné* ze dvou daných množin.

Potřebuje-li třídní profesor I.B zjistit, kteří žáci jeho třídy hrají na hudební nástroj nebo závodně sportují, vypíše všechny žáky, kteří patří aspoň do jedné z množin H a S. Ti tvoří množinu, kterou nazýváme **sjednocení** množin H a S a označujeme $\mathsf{H} \cup \mathsf{S}$.

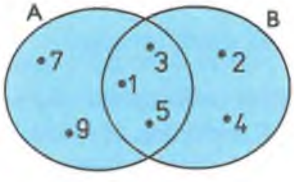
Pro množiny

$$\mathsf{A} = \{1, 3, 5, 7, 9\} \quad \text{a} \quad \mathsf{B} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

je jejich sjednocením množina

$$\mathsf{A} \cup \mathsf{B} = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$$

znázorněná tímto diagramem:



Jsou-li dány množiny A a B, pak **průnikem** množin A a B nazýváme množinu, která obsahuje všechny prvky, které patří **současně do obou** množin A i B. Značíme ji $\mathsf{A} \cap \mathsf{B}$.
Sjednocením množin A a B rozumíme množinu všech prvků, které patří **aspoň do jedné** z množin A, B. Značíme ji $\mathsf{A} \cup \mathsf{B}$.

9. Jsou dány množiny

$$\mathsf{A} = \{1,2,5,8\}, \quad \mathsf{B} = \{1,3,5,7,9\}, \quad \mathsf{C} = \{2,4,6,8\}.$$

Načrtněte si vhodný diagram a určete výčtem prvků tyto množiny:

a) $\mathsf{A} \cap \mathsf{B}$ b) $\mathsf{A} \cap \mathsf{C}$ c) $\mathsf{B} \cap \mathsf{C}$
d) $\mathsf{A} \cup \mathsf{B}$ e) $\mathsf{A} \cup \mathsf{C}$ f) $\mathsf{B} \cup \mathsf{C}$

10. Vymyslete příklady dvou dvouprvkových množin X a Y, aby množina $\mathsf{X} \cap \mathsf{Y}$

a) byla prázdná, b) měla 1 prvek, c) měla 2 prvky.

Zkoumejte, kolik prvků má v jednotlivých případech množina $\mathsf{X} \cup \mathsf{Y}$.

Co je *podmnožina*?

Petr si vyndá před hodinou geometrie z pouzdra tužku a kružítko a položí je na prázdnou lavici. Pak můžeme mluvit o dvouprvkové množině

$$\mathsf{B} = \{\text{tužka, kružítko}\}$$

všech věcí ležících na Petrově lavici.

Množina B má tu vlastnost, že každý její prvek je současně prvkem množiny

$$\mathsf{A} = \{\text{tužka, pero, guma, kružítko}\}$$

všech věcí, které měl Petr původně v pouzdře.

V takovém případě říkáme, že množina B *je podmnožinou* množiny A, a píšeme $\mathsf{B} \subset \mathsf{A}$.

Množina A má i jiné podmnožiny. Vypíšeme například všechny ty, které jsou jednoprvkové:

$$\mathsf{C} = \{\text{tužka}\}, \quad \mathsf{D} = \{\text{pero}\}, \quad \mathsf{E} = \{\text{guma}\}, \quad \mathsf{F} = \{\text{kružítko}\}$$

Je dobré si uvědomit, kdy jedna množina X *není podmnožinou* druhé množiny Y. To nastane, když *některý* (tzn. *aspoň jeden*) prvek množiny X nepatří do množiny Y.

Protože prázdná množina neobsahuje žádný prvek, považujeme ji za podmnožinu každé množiny.

Každá množina je podmnožinou sebe sama.

V matematice je často potřebné ověřit, že se dvě množiny X a Y *rovnají*, tj. že jsou tvořeny stejnými prvky. Znamená to, že jsou současně splněny dvě podmínky:

- každý prvek množiny X je i prvkem množiny Y,
- každý prvek množiny Y je i prvkem množiny X.

Tehdy píšeme $\mathsf{X} = \mathsf{Y}$. Vidíme, že rovnost $\mathsf{X} = \mathsf{Y}$ platí právě tehdy, když platí $\mathsf{X} \subset \mathsf{Y}$ a zároveň $\mathsf{Y} \subset \mathsf{X}$.

Příklad 1. Vypište všechny podmnožiny množiny $\mathsf{D} = \{1, 2, 3\}$.

Řešení. Množina D má tyto podmnožiny:

prázdnou množinu $\emptyset$,
tři jednoprvkové množiny $\mathsf{X}_1 = \{1\}$, $\mathsf{X}_2 = \{2\}$, $\mathsf{X}_3 = \{3\}$,
tři dvouprvkové množiny $\mathsf{Y}_1 = \{1, 2\}$, $\mathsf{Y}_2 = \{1, 3\}$, $\mathsf{Y}_3 = \{2, 3\}$,
jednu tříprvkovou $\mathsf{D} = \{1, 2, 3\}$.

Celkem jsme vypsali 8 podmnožin tříprvkové množiny D. Žádné jiné podmnožiny množina D nemá.

V předchozím příkladě jsme označili jednoprvkové (a také dvouprvkové) podmnožiny množiny D stejnými písmeny, která jsme opatřili tzv. *indexy* – přirozenými čísly připisovanými vpravo dolů. Takové označení je v matematice užitečné, pokud chceme vyjádřit, že označované objekty jsou téhož „druhu“. V našem případě jsme pomocí indexů rozlišovali ty podmnožiny, které měly stejný počet prvků. Označili jsme je stejným písmenem s různými indexy.
Označení pomocí indexů je výhodné i tehdy, je-li počet označovaných předmětů tak velký, že by k jejich označení nestačila písmena abecedy. Užívá se také v případech, kdy je důležité *pořadí* značených předmětů.

11. Vypište všechny dvouprvkové podmnožiny množiny

$$\mathsf{A} = \{t, p, g, k\}$$

všech předmětů z Petrova pouzdra.

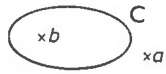
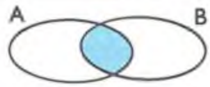
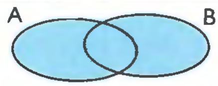
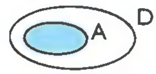
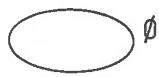
12. Je dána množina X všech jednociferných přirozených čísel a množina $\mathsf{Y} = \{2, 4, 6, 8\}$.

a) Zdůvodněte, proč $\mathsf{Y} \subset \mathsf{X}$. b) Určete $\mathsf{X} \cap \mathsf{Y}$ a $\mathsf{X} \cup \mathsf{Y}$.

13. Vypište všechny podmnožiny množiny $\mathsf{A} = \{1, 2, 3, 4\}$, které nejsou podmnožinami množiny $\mathsf{B} = \{1, 2, 4, 5\}$.

$*$**14.** Je pravda, že každé dvě prázdné množiny se rovnají?

Pro dobré zapamatování shrneme nejdůležitější probrané poznatky o množinách v následujícím přehledu:

SYMBOLICKÝ ZÁPIS	VÝZNAM	ZNÁZORNĚNÍ
$M = \{1, 2, 3\}$	zápis množiny výčtem prvků	
$b \in C$ $a \notin C$	příslušnost prvku k množině	
$A \cap B$	průnik množin	
$A \cup B$	sjednocení množin	
$A \subset D$	podmnožina množiny	
$\emptyset$ nebo $\{\ \}$	prázdná množina	

CVIČENÍ 2

1. Zapište výčtem prvků množinu A všech dvojciferných čísel, která mají na místě jednotek číslici 6.

2. Zapište výčtem prvků množinu
   a) B všech písmen ve slově BRAMBORA,
   b) K všech písmen ve slově KALENDÁŘ,
   c) P všech písmen ve větě JELENOVI PIVO NELEJ.

3. Zapište množinu všech písmen této věty.

4. Zapište jinak než výčtem prvků tyto množiny:

a) $\mathsf{A} = \{\text{č}, \text{í}, \text{s}, \text{l}, \text{o}\}$ b) $\mathsf{B} = \{\text{k}, \text{o}, \text{l}\}$ c) $\mathsf{C} = \{\text{m}, \text{a}, \text{t}, \text{e}, \text{i}, \text{k}\}$

d) $\mathsf{M} = \{\text{tma, mat, tam, atm, mta, amt}\}$

□ 5. Popište každou z množin V a M jinak než výčtem prvků:

$\mathsf{V} = \{\text{sobota, neděle}\}$, $\mathsf{M} = \{\text{m}, \text{o}, \text{l}\}$

□ 6. Množina všech samohlásek ve slově KRK je prázdná. Uveďte několik dalších podobných příkladů prázdných množin.

□ 7. Rozhodněte, zda následující množiny jsou konečné, nebo nekonečné:

a) množina všech přirozených čísel

b) množina všech násobků čísla 2

c) množina všech žijících obyvatel zeměkoule

d) množina všech zrnek písku na zeměkouli

∗8. Je množina všech řádů desítkové soustavy konečná?

9. Je dána množina $\mathsf{M} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. Zapište následující podmnožiny množiny M:

a) podmnožinu T všech násobků tří

b) podmnožinu B všech násobků deseti

c) podmnožinu P všech dvojciferných čísel

d) podmnožinu J všech čísel, jejichž zápis začíná cifrou 1

10. Vypište všechny podmnožiny množiny $\{a, b, c\}$.

11. Jsou dány množiny $\mathsf{A} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ a $\mathsf{B} = \{3, 6, 9\}$. Načrtněte vhodný diagram a určete výčtem prvků množiny $\mathsf{A} \cap \mathsf{B}$ a $\mathsf{A} \cup \mathsf{B}$.

12. Jsou dány množiny

$$\mathsf{M} = \{1, 5, 10\},\ \mathsf{L} = \{2, 4, 6, 8, 10\}\ \text{a}\ \mathsf{P} = \{3, 7, 9, 10\}.$$

Načrtněte vhodný diagram a určete výčtem prvků množiny:

a) $\mathsf{M} \cup \mathsf{L}$ b) $\mathsf{M} \cup \mathsf{P}$ c) $\mathsf{L} \cup \mathsf{P}$

d) $\mathsf{M} \cap \mathsf{L}$ e) $\mathsf{M} \cap \mathsf{P}$ f) $\mathsf{L} \cap \mathsf{P}$

13. Jsou dány množiny

$$\mathsf{K} = \{k, o, b\},\ \mathsf{L} = \{l, o, f\}\ \text{a}\ \mathsf{M} = \{a, b, c, d, e\}.$$

Určete výčtem prvků množiny:

a) $\mathsf{K} \cup \mathsf{L}$ b) $\mathsf{K} \cup \mathsf{M}$ c) $\mathsf{L} \cup \mathsf{M}$

d) $\mathsf{K} \cap \mathsf{L}$ e) $\mathsf{K} \cap \mathsf{M}$ f) $\mathsf{L} \cap \mathsf{M}$

3 PŘIROZENÁ ČÍSLA

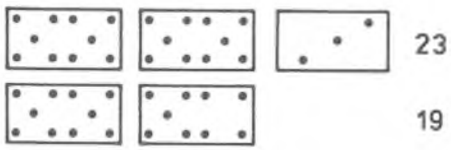
O množině $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ všech přirozených čísel již víme, že je nekonečná. Zopakovali jsme rovněž základní pravidla pro zápis přirozených čísel v desítkové poziční soustavě.

V této kapitole nejprve připomeneme, jak se přirozená čísla *porovnávají podle velikosti*. Pak se zaměříme na základní *početní operace* s přirozenými čísly. V závěru kapitoly zopakujeme, jak se přirozená čísla *zaokrouhlují*.

Jak *porovnáváme* a *znázorňujeme* přirozená čísla?

?

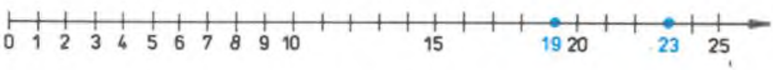
Už jsme si připomněli, že přirozená čísla označují počty různých předmětů, osob, zvířat, věcí apod. Dobře víte, že větší počet předmětů je vyjádřen větším číslem.



Číslo 23 je větší než číslo 19. V matematice to zapisujeme pomocí známých znaků nerovností $>$ (čti „je větší než“) a $<$ (čti „je menší než“):

$$23 > 19 \qquad \text{neboli} \qquad 19 < 23$$

Přirozená čísla jste se také naučili znázorňovat body na *číselné ose*.



Kromě přirozených čísel je na naší číselné ose znázorněno i číslo 0. Všimněte si, že větší číslo je znázorněno *napravo* od čísla menšího.

1. Do rámečku doplňte správný znak nerovnosti:

a) 891 $\square$ 901   b) 1 091 $\square$ 1 910

c) 2 222 $\square$ 22 221   d) 37 051 $\square$ 35 701

e) 107 624 $\square$ 170 264   f) 1 111 111 $\square$ 999 999

2. Daná čísla uspořádejte od nejmenšího k největšímu:

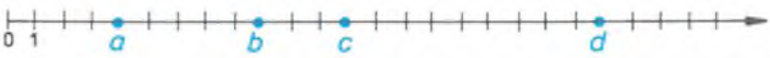
a) 1 234, 1 324, 1 423, 1 243, 1 432, 1 342

b) 7 650, 6 570, 5 670, 5 760, 7 560, 6 750

3. Která přirozená čísla jsou větší než 154 a zároveň menší než 161?

4. Na číselné ose znázorněte čísla 4, 7 a 14.

5. Písmena a, b, c a d nahraďte správnými přirozenými čísly:



? Co víme o *sčítání* čísel?

Sčítání přirozených čísel byla první početní operace, s kterou jste se seznámili v 1. třídě základní školy. Sami vysvětlete, proč $2 + 3 = 5$.

Čísla, která sčítáme, se nazývají *sčítance*, výsledek sčítání *součet*.

2	+	3	=	5
↑		↑		↑
sčítanec		sčítanec		součet

Slovem *součet* však označujeme také zápis sčítání. Například výrazu

$$5 + 25 + 105 + 1\,035$$

říkáme součet čtyř sčítanců.

Víte již, že sčítání je *komutativní* (pořadí sčítanců lze zaměňovat) i *asociativní* (sčítance lze libovolně sdružovat):

$$105 + 250 = 250 + 105$$

$$(17 + 32) + 23 = 17 + (32 + 23)$$

Obě pravidla symbolicky zapíšeme vzorci, které platí pro libovolná přirozená čísla a, b, c:

$$\boxed{\begin{gathered} a + b = b + a \\ (a + b) + c = a + (b + c) \end{gathered}}$$

Slovo *commutare* (čti „komutare“) znamená latinsky *zaměňovat.* Z latiny je i slovo *asociare*, které znamená *sdružovat.*

Obě pravidla využíváme zejména při sčítání většího počtu čísel, můžeme-li získat „šikovné mezisoučty“, a tím si sčítání usnadnit. Například:

$$13 + 26 + 117 + 84 = (13 + 117) + (26 + 84) = 130 + 110 = 240$$

$$120 + 57 + 3 + 80 = (120 + 80) + (57 + 3) = 200 + 60 = 260$$

$$40 + 25 + 30 + 110 + 43 + 12 = (40 + 30 + 110) + (25 + 43 + 12) =$$
$$= 180 + 80 = 260$$

6. Sečtěte výhodným způsobem:

a) $2 + 7 + 8 + 3$ b) $15 + 16 + 24 + 35$
c) $5 + 37 + 10 + 5 + 63$ d) $240 + 345 + 155 + 760$

7. Sečtěte písemně:

a) $1\,258 + 6\,548 + 2\,659$ b) $128 + 84\,726 + 3\,009$
c) $1\,230 + 840 + 3\,870$ d) $110 + 1\,200 + 45$
e) $4\,127 + 659 + 64$ f) $450 + 1\,505 + 4\,086$

8. Sečtěte:

a) $2\,000+2\,200+20\,020+200\,002$ b) $124 + 1\,240 + 12\,400 + 124\,000$

Co víme o *odčítání* čísel?

Z 1. třídy znáte nejen *sčítání*, ale také *odčítání* čísel a souvislost mezi těmito dvěma operacemi. Například $7 - 3 = 4$, protože $4 + 3 = 7$.

Při odčítání rozlišujeme jednotlivá čísla pojmenováním. *Menšenec* je číslo, od kterého odčítáme, *menšitel* je číslo, které odčítáme, a *rozdíl* je výsledek odčítání.

Například:

$$\begin{array}{ccccc} \boxed{7 & - & 3 & = & 4} \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \boxed{\text{menšenec}} & & \boxed{\text{menšitel}} & & \boxed{\text{rozdíl}} \end{array}$$

Slovem *rozdíl* však označujeme nejenom výsledek, ale také zápis odčítání. Proto výraz $12 - 5$ můžeme číst „rozdíl čísel 12 a 5“.

Připomeňme, že prozatím umíme odčítat menší číslo od většího.

Odčítáme-li více čísel, odčítáme je postupně zleva doprava, např.:

$$80 - 20 - 8 - 4 = \underbrace{80 - 20} - 8 - 4 = \underbrace{60 - 8} - 4 = \underbrace{52 - 4} = 48$$

Jsou-li v zápisu odčítání závorky, vypočítáme nejprve rozdíly v závorkách. Teprve potom použijeme pravidlo „zleva doprava“:

$$20 - (6 - 2) - 7 = 20 - \underbrace{(6 - 2)} - 7 = \underbrace{20 - 4} - 7 = \underbrace{16 - 7} = 9$$

$$20 - (6 - 5) - (7 - 2) = 20 - \underbrace{(6 - 5)} - \underbrace{(7 - 2)} = \underbrace{20 - 1} - 5 = \underbrace{19 - 5} = 14$$

$$50 - (30 - 10 - 5) = 50 - (\underbrace{30 - 10} - 5) = 50 - \underbrace{(20 - 5)} = \underbrace{50 - 15} = 35$$

□ **9.** Vypočtěte:

a) $35 - 17$, $69 - 41$, $86 - 57$

b) $113 - 52$, $274 - 80$, $353 - 71$

c) $1\,820 - 240$, $1\,310 - 620$, $2\,480 - 500$

d) $1\,888 - 999$, $3\,564 - 2\,998$, $7\,534 - 6\,970$

10. Odečtěte písemně:

a) $1\,060 - 937$ b) $10\,937 - 9\,703$

c) $15\,442 - 3\,097$ d) $213\,529 - 90\,073$

11. Vypočtěte číslo označené písmenem y:

a) $712 + y = 1\,000$ b) $y + 383 = 678$

c) $1\,457 + y = 10\,000$ d) $y + 544 = 9\,088$

12. Vypočtěte:

a) $(92 + 35) - 104$ b) $(112 - 14) - 53$

c) $100 - (16 + 28)$ d) $149 - (85 - 14)$

13. Vypočtěte:

a) $110 - 44 - 33 - 22 - 11$ b) $110 - (44 - 33) - (22 - 11)$

c) $110 - 44 - (33 - 22 - 11)$ d) $(110 - 44) - (33 - 22) - 11$

e) $(110 - 44 - 33) - (22 - 11)$ f) $110 - (44 - 33) - 22 - 11$

Co víme o *násobení* přirozených čísel?

Čísla, která násobíme, se nazývají *činitelé*, výsledkem násobení je *součin*.

$$\boxed{2 \quad \cdot \quad 3 \quad = \quad 6}$$

2	3	6
↑	↑	↑
činitel	činitel	součin

Slovo *součin* však označuje také zápis násobení. Například výrazu

$$5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 10$$

říkáme součin čtyř činitelů.

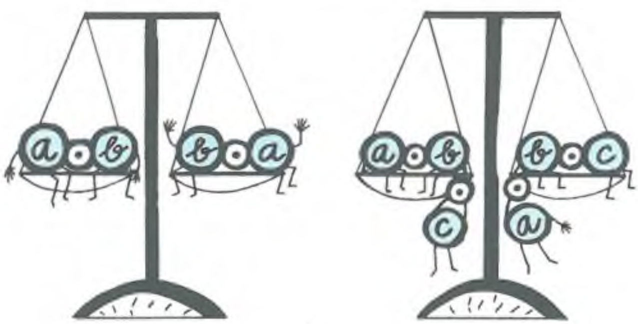
Podobně jako sčítání je i násobení *komutativní* (pořadí činitelů lze zaměňovat) i *asociativní* (činitele lze libovolně sdružovat):

$$7 \cdot 5 = 5 \cdot 7$$

$$(3 \cdot 2) \cdot 5 = 3 \cdot (2 \cdot 5)$$

Pro libovolná přirozená čísla a, b, c tedy platí:

$$\boxed{\begin{gathered} a \cdot b = b \cdot a \\ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \end{gathered}}$$



Násobení je navíc *distributivní* vzhledem ke sčítání. To znamená, že máme-li vynásobit součet dvou čísel třetím číslem, můžeme k výsledku dospět dvěma způsoby. Vysvětlíme to na příkladu $(5+7)\cdot 3$.

1. Nejprve oba sčítance sečteme a pak tento „průběžný" součet vynásobíme třetím číslem:

$$\underbrace{(5+7)}\cdot 3 = 12\cdot 3 = 36$$

2. Nejprve vynásobíme oba sčítance třetím číslem a pak oba vzniklé „průběžné" součiny sečteme:

$$(5+7)\cdot 3 = (5\cdot 3) + (7\cdot 3) = 15 + 21 = 36$$

Pro libovolná přirozená čísla a, b, c tedy platí:

$$\boxed{(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c}$$

Víte již, že násobení má přednost před sčítáním. Proto jsme na pravé straně vzorce závorky vynechali.

Protože násobení je komutativní, můžeme distributivnost násobení vzhledem ke sčítání zapsat i takto:

$$c\cdot(a+b) = c\cdot a + c\cdot b$$

Násobení je distributivní i vzhledem k odčítání. Například:

$$5\cdot\underbrace{(10-7)} = 5\cdot 3 = 15$$

$$5\cdot(10-7) = 5\cdot 10 - 5\cdot 7 = 50 - 35 = 15$$

Někdy je výhodné použít distributivnost i v „opačném směru“. To se hodí zejména při násobení zpaměti. Tak například:

$$35 \cdot 11 = 35 \cdot (10 + 1) = 350 + 35 = 385$$
$$9 \cdot 78 = (10 - 1) \cdot 78 = 780 - 78 = 702$$

Postup při písemném násobení dvou čísel si připomeňte podle Hančina sešitu:

$$\begin{array}{r} 351 \\ \cdot\ 13 \\ \hline 1053 \\ 351 \\ \hline 4563 \\ \hline\hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 203507 \\ \cdot\ 621 \\ \hline 203507 \\ 407014 \\ 1221042 \\ \hline 126377847 \\ \hline\hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 9707 \\ \cdot\ 107 \\ \hline 67949 \\ 97070 \\ \hline 1038649 \\ \hline\hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1928 \\ \cdot\ 3746 \\ \hline 11568 \\ 7712 \\ 13496 \\ 5784 \\ \hline 7222288 \\ \hline\hline \end{array}$$

□ **14.** Vynásobte:

a) $2 \cdot 5 \cdot 7$ b) $4 \cdot 4 \cdot 25$ c) $2 \cdot 20 \cdot 2 \cdot 2$ d) $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

15. Vynásobte písemně:

a) $17 \cdot 26$ b) $45 \cdot 38$ c) $102 \cdot 14$
d) $85 \cdot 149$ e) $108 \cdot 509$ f) $1\,050 \cdot 3\,003$

16. Vypočtěte:

a) $(27 + 15) \cdot 48$ b) $12 \cdot (104 + 37)$
c) $13 \cdot (58 - 36)$ d) $(143 - 84) \cdot 8$

∗**17.** Násobte výhodně:

a) $14 \cdot 99$ b) $11 \cdot 19$ c) $101 \cdot 12$ d) $15 \cdot 1\,010$

Co víme o *dělení* přirozených čísel?

Při dělení ***záleží na pořadí*** čísel, která proto rozlišujeme i pojmenováním. Číslo, které dělíme, se nazývá *dělenec*. Číslu, kterým dělíme, říkáme *dělitel*. Výsledkem dělení je číslo zvané *podíl*.

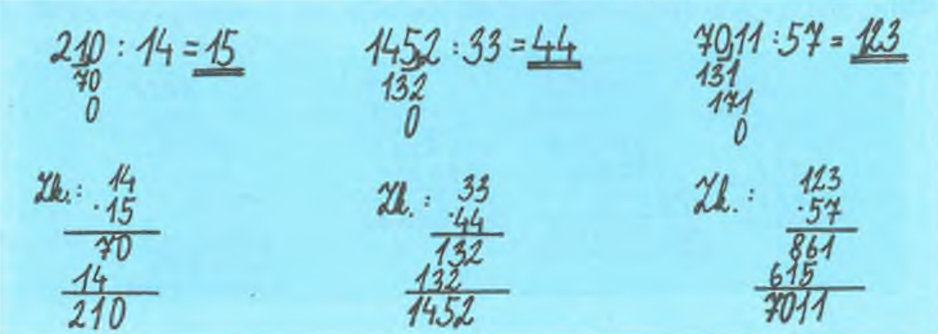
$$\begin{array}{ccccc} 10 & : & 2 & = & 5 \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \text{dělenec} & & \text{dělitel} & & \text{podíl} \end{array}$$

Slovem *podíl* označujeme nejenom výsledek, ale také zápis dělení. Výraz 125 : 5 můžeme číst nejen „125 děleno 5“, ale také „podíl čísel 125 a 5“.

Připomeňme, že dělení je operací „opačnou“ k násobení:

$$24 : 8 = 3 \quad \text{znamená, že} \quad 3 \cdot 8 = 24$$

Podle ukázek z Honzova sešitu si zopakujte, jak se dělí dvojciferným dělitelem:



Všimněte si, že Honza ihned po výpočtu provedl *zkoušku* násobením.

Dělíme-li přirozené číslo přirozeným číslem, nemusí to dopadnout tak „šťastně“, jak se to třikrát stalo Honzovi. Například dělíme-li 16 kuliček mezi 5 chlapců, dostane každý z nich 3 kuličky a jedna kulička zbude. Jde o *dělení se zbytkem*. Zapisujeme:

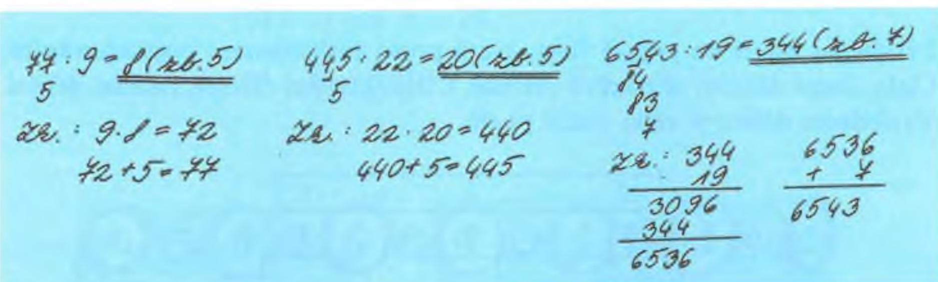
$$16 : 5 = 3 \text{ (zbytek 1)}$$

To znamená, že platí:

$$16 = 3 \cdot 5 + \boxed{1}$$

Číslo 3 se nazývá *neúplný podíl* a číslo 1 *zbytek* při dělení čísla 16 číslem 5.

Tři příklady na dělení se zbytkem jsme převzali z Terezčina sešitu:



18. Vydělte:

a) $156 : 12$ b) $234 : 26$ c) $2\,170 : 31$ d) $1\,568 : 16$

19. Určete neúplný podíl a zbytek:

a) $25 : 9$ b) $75 : 8$ c) $54 : 11$ d) $145 : 27$

Co je *zaokrouhlení* čísla na předem zvolený řád?

V mnoha praktických situacích není třeba (nebo ani není možné) počítat s přesnými číselnými údaji. Mnohdy stačí znát pouze jejich přibližné hodnoty. Tehdy čísla *zaokrouhlujeme* na určitý řád (na desítky, na stovky apod.).

Postup při zaokrouhlování vysvětlíme na následujícím příkladu.

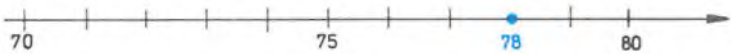
Příklad 1. Zaokrouhlete číslo 78 na desítky.

Řešení. I když všichni víte, že výsledkem zaokrouhlení bude číslo 80, vysvětlíme, proč je tomu tak. Číslo 78 leží mezi čísly 70 a 80 (nejbližší „celé desítky“). Ke kterému z nich je „blíže“?

$$78 - 70 = 8 \qquad \text{a} \qquad 80 - 78 = 2$$

Protože $2 < 8$, zaokrouhlíme 78 na číslo 80. Zapíšeme to pomocí symbolu $\doteq$, který čteme „je přibližně rovno“:

$$78 \doteq 80$$



Vysvětlíme nyní obecně, jak provádíme *zaokrouhlování na předem určený řád*:

1. Je-li zaokrouhlované číslo x rovno celému počtu jednotek určeného řádu, je výsledkem zaokrouhlení toto číslo samo. Například

   $20 \doteq 20$ při zaokrouhlování na desítky.

2. Ve zbývajících případech určíme dvě „sousední“ čísla a, b o celém počtu jednotek určeného řádu, mezi nimiž číslo x leží. Výsledkem zaokrouhlení je to z čísel a, b, ke kterému je číslo x „blíže“.

   Například při zaokrouhlení čísla $x = 7\,483$ na stovky mají sousední čísla a, b hodnoty $a = 7\,400$ a $b = 7\,500$. Bližší je číslo b, proto

   $$7\,483 \doteq 7\,500.$$

3. Zbývá ještě rozhodnout, jak zaokrouhlit číslo, které je „stejně vzdáleno“ od obou čísel, která s ním „sousedí“ a mají celý počet jednotek předepsaného řádu.

Máme-li např. zaokrouhlit číslo 1 500 na tisíce, mohli bychom ho stejně dobře nahradit jak číslem 1 000, tak číslem 2 000, neboť od obou se liší o 500. V takovém případě se *dohodneme* na zaokrouhlení „nahoru“, tzn. číslo 1 500 nahradíme číslem 2 000:

$$1\,500 \doteq 2\,000$$

? Jak prakticky zaokrouhlujeme?

Pro zaokrouhlení daného čísla na předem stanovený řád je rozhodující číslice, která stojí bezprostředně *za* místem tohoto řádu.

Tak například v čísle **2 459** je rozhodující při zaokrouhlování

- na *tisíce* číslice **4** na místě *stovek*,
- na *stovky* číslice **5** na místě *desítek*,
- na *desítky* číslice **9** na místě *jednotek*.

Stojí-li na tomto *rozhodujícím místě* některá z číslic **0**, **1**, **2**, **3** nebo **4**, zaokrouhlujeme „dolů“: Dané číslo nahradíme „nejbližším“ **menším** číslem o celém počtu jednotek daného řádu.

Stojí-li na tomto *rozhodujícím místě* některá z číslic **5**, **6**, **7**, **8** nebo **9**, zaokrouhlujeme „nahoru“: Dané číslo nahradíme „nejbližším“ **větším** číslem o celém počtu jednotek daného řádu.

Proto číslo 2 459 zaokrouhlíme:

$2\,459 \doteq 2\,000$ (na tisíce zaokrouhlujeme „dolů“)
$2\,459 \doteq 2\,500$ (na stovky zaokrouhlujeme „nahoru“)
$2\,459 \doteq 2\,460$ (na desítky zaokrouhlujeme „nahoru“)
$2\,459 \doteq 2\,459$ (na jednotky se zaokrouhlením číslo nezmění)

20. Zaokrouhlete na stovky čísla: 230, 1 277, 50, 4, 90, 9 999, 123 895

21. Číslo 27 052 386 zaokrouhlete

a) na tisíce,
b) na miliony,
c) na desítky,
d) na desetimiliony,
e) na stovky,
f) na statisíce.

22. Je možné zapsat $428 \doteq 0$? Vysvětlete.

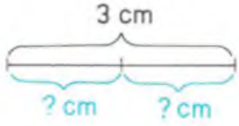
4 DESETINNÁ ČÍSLA

V minulé kapitole jsme zopakovali pravidla pro počítání s přirozenými čísly. Nyní se zaměříme na čísla *desetinná*, tak jak jste je poznali v základní škole. Počítali jste tam jen s takovými desetinnými čísly, která měla za desetinnou čárkou jednu nebo dvě číslice. „Složitějším“ desetinným číslům se budeme věnovat až v sešitě *Kladná a záporná čísla.*

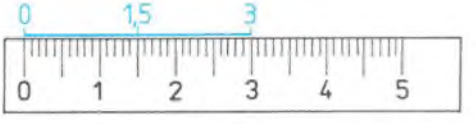
K čemu slouží a jak se zapisují desetinná čísla?

?

Již jste poznali, že k některým výpočtům přirozená čísla nestačí. Na obrázku je úsečka délky 3 cm rozdělena na dva stejné díly. Kolik centimetrů měří každý z nich?



Odpověď je (v centimetrech) vyjádřena ***desetinným číslem*** 1,5 (čteme „jedna celá, pět desetin“).



Jaký má slovo desetina v tomto případě význam? Desetina centimetru je délka úseček, které dostaneme, když úsečku dlouhou 1 cm rozdělíme na 10 stejných dílů. Každý díl pak má délku, které říkáme milimetr (ve zkratce mm):

$$0{,}1\,\text{cm} = 1\,\text{mm}, \qquad \text{protože} \qquad 10\,\text{mm} = 1\,\text{cm}$$

Také již víte, jaký význam mají *setiny*. Například jedna setina koruny je haléř:

$$0{,}01\,\text{Kč} = 1\,\text{hal}, \qquad \text{protože} \qquad 100\,\text{hal} = 1\,\text{Kč}$$

Každé desetinné číslo, s kterým jste dosud počítali, bylo složeno z *celé* části a z *necelé* části tvořené desetinami a setinami. Čárce, která v zápise desetinného čísla odděluje celou a necelou část, říkáme ***desetinná čárka***.

Například číslo 16,32 můžeme vyjádřit jako součet:

$$16{,}32 = 16 + 0{,}32$$

Číslo 16 je celou částí a číslo 0,32 necelou částí uvažovaného čísla.

celá část → 16,32 ← necelá část

↑

desetinná čárka

Příklady desetinných čísel doplníme správným způsobem jejich čtení:

3,28 ... tři celé, dvacet osm setin
0,4 ... žádná celá, čtyři desetiny
15,08 ... patnáct celých, osm setin

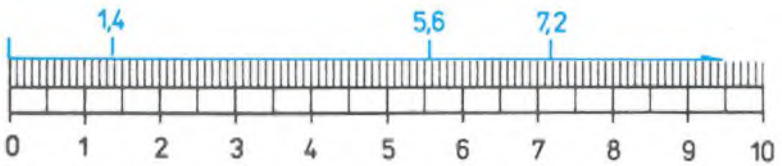
□ **1.** Přečtěte správně čísla: 0,27; 1,01; 12,12; 0,02; 1 414,14

2. Zapište číslicemi:

a) tři celé, sedm desetin
b) žádná celá, dvacet tři setin
c) pět celých, pět setin

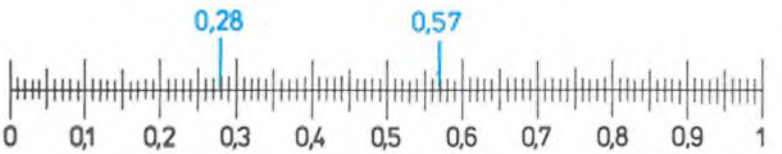
Jak znázorňujeme a porovnáváme desetinná čísla?

Desetinná čísla znázorňujeme na stejné číselné ose jako čísla přirozená. Z obrázku je vidět, jak se znázorní čísla 1,4, 5,6 a 7,2:



Kromě zmíněných čísel jsme na číselné ose znázornili i čísla 0 a 1. Tím jsme vlastně zadali na číselné ose *jednotku délky* (v našem případě 1 cm).

Kdybychom měli na číselné ose znázornit čísla 0,28 a 0,57, bylo by vhodnější zvolit jinou jednotku (např. 10 cm):



Číslo 0,57 je *větší* než číslo 0,28, neboli číslo 0,28 je *menší* než číslo 0,57:

$$0{,}57 > 0{,}28 \qquad \text{neboli} \qquad 0{,}28 < 0{,}57$$

Na číselné ose leží větší číslo napravo od čísla menšího.

3. Rozhodněte, který ze znaků $=$, $<$, $>$ patří do rámečku:

a) $2{,}12 \ \square \ 2{,}21$ b) $12{,}10 \ \square \ 12{,}1$ c) $9{,}99 \ \square \ 10$

d) $7{,}00 \ \square \ 7$ e) $19{,}99 \ \square \ 20{,}01$ f) $4 \ \square \ 3{,}99$

4. Na číselné ose s jednotkou délky 1 cm znázorněte všechna daná čísla: 1,7; 10,2; 7,0; 0,6; 5,5

Jaké výpočty s desetinnými čísly již umíte?

V předchozích ročnících jste se naučili desetinná čísla sčítat a odčítat. Zvládli jste i některé případy násobení a dělení. To vše si nyní stručně zopakujeme na řešených příkladech.

Příklad 1. Určete součet a rozdíl čísel 8,2 a 1,37.

Řešení jsme převzali z Bořkova sešitu.

$$\begin{array}{r} 8{,}10 \\ 1{,}37 \\ \hline 9{,}57 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 8{,}10 \\ -\ 1{,}37 \\ \hline 6{,}73 \end{array}$$

Bořek při písemných výpočtech dbal na to, aby jednotky zapsal pod jednotky, desetiny pod desetiny a setiny pod setiny. U prvního čísla na místo setin připsal „zamlčenou" nulu.

Příklad 2. Vypočtěte: $3{,}24 \cdot 7$

Řešení

Pavel

$$\begin{array}{r} 3{,}24 \\ \cdot\ 7 \\ \hline \underline{\underline{22{,}68}} \end{array}$$

Jirka

$$3{,}24 \cdot 7 = \underline{\underline{22{,}68}}$$

Pavel zapsal násobená čísla pod sebe. To mu usnadnilo „umístit“ desetinnou čárku do výsledku.

Jirka provedl výpočet „na jednom řádku“. Nejprve vynásobil 324 · 7 a ve výsledku pak desetinnou čárkou oddělil poslední dvě číslice – tolik, kolik jich za desetinnou čárkou měl činitel 3,24.

Příklad 3. Vydělte: 44,96 : 8

Řešení

Pavel		Jirka
44,96 : 8 = 5,62 4 9 16 0	zk.: 5,62 · 8 44,96	44,96 : 8 = 5,62 zk.: 5,62 · 8 = 44,96

Čísla v pomocných řádcích, která Pavel psal, si Jirka pouze představoval. Oba na stejném místě výsledku zapsali desetinnou čárku, když ji při dělení „překročili“ v dělenci.

Zbývá ještě zopakovat, jak se při násobení a dělení čísly 10 a 100 „posunuje“ desetinná čárka:

1,28 · 10 = 12,8	31 : 10 = 3,1
1,28 · 100 = 128	31 : 100 = 0,31
0,05 · 10 = 0,5	3,1 : 10 = 0,31
0,05 · 100 = 5	1128 : 10 = 112,8
0,7 · 10 = 7	1128 : 100 = 11,28
0,7 · 100 = 70	0,4 : 10 = 0,04

5. Vypočtěte:

a) 3,54 + 1,8 b) 19,6 + 5,79 c) 60,08 + 78,6

d) 17,69 – 9,3 e) 254 – 45,2 f) 600 – 8,73

6. Vypočtěte:

a) 26 · 7; 2,6 · 7; 0,26 · 7 b) 9 · 132; 9 · 13,2; 9 · 1,32

7. Vydělte a proveďte zkoušku:

a) 17,01 : 3 b) 226,8 : 4 c) 4,45 : 5
d) 62,3 : 7 e) 32,16 : 8 f) 361,8 : 9

□**8.** Čísla 140; 14; 1,4; 0,14 vynásobte

a) deseti, b) stem.

□**9.** Vydělte:

a) 5 640 : 10
5 640 : 100

b) 2 781 : 10
2 781 : 100

c) 37 : 10
37 : 100

CVIČENÍ 3

1. Pokud v čísle 353 zaměníme číslice na místech jednotek a stovek, číslo se nezmění. Určete, kolik přirozených čísel větších než 100 a menších než 1 000 má stejnou vlastnost.

□**2.** Určete aspoň jedno číslo složené ze stejných číslic jako číslo nalevo, které můžeme doplnit napravo tak, aby platilo:

a) 77 877 > $\boxed{}$ b) 111 101 > $\boxed{}$ c) 606 060 > $\boxed{}$
d) 21 102 < $\boxed{}$ e) 434 003 < $\boxed{}$ f) 441 233 < $\boxed{}$

3. Z číslic 1, 2, 4, 5 utvořte všechna čtyřciferná čísla, která mají na místě tisíců číslici 4, a pak je uspořádejte od nejmenšího k největšímu.

4. Na jedné vhodné číselné ose znázorněte čísla: 10, 27, 43, 65, 88, 120

□**5.** Sečtěte zpaměti:

a) $8 + 124 + 12 + 76$ b) $3 + 26 + 31 + 47 + 29 + 24$
c) $104 + 208 + 312 + 416$ d) $1\,111 + 333 + 222 + 444$

6. Doplňte neznámého sčítance označeného otazníkem:

a)	b)	c)	d)
3 452	2 064	?	78 654
?	7 056	8 531	?
896	?	98	92 078
4 471	14 487	17 539	170 935

7. Sečtěte:

a) $854 + 321 + 123 + 205 + 471$
b) $7\,125 + 9\,341 + 1\,502 + 2\,735$
c) $583 + 7\,654 + 312 + 8\,937$

8. Určete součet dvou sčítanců, jestliže první z nich je roven

a) 150 a druhý je o 70 větší,
b) 49 a druhý je o 17 menší,
c) 21 a druhý je třikrát větší,
d) 808 a druhý je osmkrát menší.

9. Z čísel 12, 23, 43, 45, 57, 67, 78, 89 vyberte dvě, jejichž

a) součet je největší možný,
b) rozdíl je největší možný,
c) součin je největší možný,
d) součet je nejmenší možný,
e) rozdíl je nejmenší možný,
f) součin je nejmenší možný.

□ **10.** Pro každé $x \in \{30, 52, 78, 105, 421\}$ určete zpaměti:

a) $x + 29$ b) $x - 17$ c) $500 - x$

11. Určete rozdíl součtu čísel 82 a 86 a rozdílu čísel 82 a 68.

12. Je dán rozdíl 10 804. Zjistěte

a) menšitele, je-li menšenec 20 679,
b) menšence, je-li menšitel 2 396.

13. Vypočtěte součet a rozdíl čísel:

a) 8 888 a 1 234 b) 7 777 a 2 345 c) 6 666 a 3 456

14. Vypočtěte:

a) $230 - 71 - 62 - 53 - 44$
b) $230 - 71 + 62 - 53 + 44$
c) $230 - (71 + 62 - 53 + 44)$

□ **15.** Vynásobte výhodně:

a) $2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ b) $8 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 6$ c) $5 \cdot 27 \cdot 20$
d) $50 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 4$ e) $1\,003 \cdot 5$ f) $99 \cdot 15$

□ **16.** Vypočtěte zpaměti:

a) $(7 + 4) \cdot 5$ b) $(7 - 4) \cdot 5$ c) $5 \cdot (7 + 4 + 9)$
d) $(50 + 9) \cdot 6$ e) $(60 - 1) \cdot 6$ f) $59 \cdot 6$
g) $4 \cdot 68$ h) $5 \cdot 83$ i) $98 \cdot 27$

17. Vynásobte písemně:

a) $2\,007 \cdot 365$ b) $38 \cdot 9\,036$ c) $1\,203 \cdot 560$
d) $4\,090 \cdot 782$ e) $6\,030 \cdot 125$ f) $71 \cdot 3\,500$

□ **18.** Čísla 24, 36, 48, 60, 96, 120, 240 vydělte zpaměti
a) třemi, b) čtyřmi, c) dvanácti.

19. Vydělte bez zápisu „pomocných řádků“:

a) $126 : 3$ b) $1\,744 : 4$ c) $23\,785 : 5$
d) $3\,012 : 6$ e) $2\,254 : 7$ f) $10\,827 : 9$

20. Vydělte a proveďte zkoušku násobením:
a) $777 : 21$ b) $10\,438 : 34$ c) $4\,088 : 56$

21. Určete neúplný podíl a zbytek (proveďte také zkoušku):
a) $1\,856 : 15$ b) $3\,531 : 78$ c) $63\,085 : 93$

22. Vypočtěte:

a) $55 : 5$, $5\,555 : 55$, $5\,050 : 5$, $555\,555 : 55$
b) $77 : 7$, $7\,777 : 77$, $7\,007 : 7$, $7\,777\,077 : 77$

23. Na jedné číselné ose s jednotkou délky 10 cm znázorněte čísla:
0,25; 0,4; 0,5; 0,63; 0,87; 1,14

24. Určete, kterou číslici můžeme napsat do rámečku, aby vzniklá nerovnost platila:

a) $0{,}8 < 0{,}\square$ b) $3{,}45 < 3{,}\square$ c) $12{,}\square < 12{,}3$
d) $0{,}\square 5 < 0{,}4$ e) $7{,}62 > 7{,}\square 3$ f) $\square{,}33 < 3{,}33$
g) $4{,}\square 7 > 4{,}7$ h) $\square{,}49 < 2{,}25$ i) $0{,}58 > 0{,}\square$

Najděte všechny možnosti.

25. Daná čísla seřaďte od nejmenšího k největšímu:
1,56; 1,5; 1,65; 1,05; 2,06; 1,6; 1,55

26. Napište deset čísel, z nichž každé následující je o 0,3 větší než předcházející. Začněte číslem 2,53.

27. Napište deset čísel, z nichž každé následující je o 0,07 menší než předcházející. Začněte číslem 1,3.

28. Do prázdných políček tabulky doplňte součty čísel zapsaných v prvním řádku a prvním sloupci:

+	0,2	0,9	0,04	0,83	1,5	2,37
0,6						
0,05						
1,2						
5,43						

29. Určete rozdíly:

a) 1 – 0,7; 1 – 0,34; 1 – 0,06
b) 5 – 1,8; 5 – 2,04; 5 – 4,75
c) 0,7 – 0,56; 0,56 – 0,4
d) 12 – 0,96; 2,65 – 0,4
e) 3,4 – 2,7; 5,3 – 0,14
f) 7,65 – 0,09; 8,3 – 6,15

30. Vypočtěte:

a) $15{,}84 + 356{,}9$
b) $114{,}28 - 93{,}45$
c) $162{,}7 - 39{,}42$
d) $88{,}47 + 57{,}3 + 854{,}23$
e) $3\,000 - 123{,}4$
f) $6 + 6{,}6 + 66{,}6 + 6{,}66$

31. Čísla 0,7; 0,34; 5,62 vynásobte

a) dvěma,
b) třemi,
c) sedmi.

32. Vydělte a proveďte zkoušku:

a) 0,8 : 4
b) 0,72 : 9
c) 1,56 : 4
d) 76,51 : 7
e) 547,23 : 3
f) 823,5 : 5

33. Určete, která čísla patří do prázdných políček tabulky:

a	6	0,4	0,09	0,27	3,5	8,07
$a \cdot 10$						
$a \cdot 100$						

34. Vydělte:

a) 500 : 10
b) 600 : 100
c) 40 : 100
d) 7 : 10
e) 8 : 100
f) 0,3 : 10
g) 3,4 : 10
h) 71 : 100
i) 87 : 10

5 ČÍSELNÉ VÝRAZY

Naučili jsme se provádět čtyři početní výkony s přirozenými i některými desetinnými čísly. Umíme je *sčítat*, *odčítat*, *násobit* i *dělit*. Zatím jsme však neřešili složitější úlohy, kdy je třeba provést několik početních operací v určitém pořadí.

Chceme-li naznačit jedním zápisem, jak z výchozích čísel výsledek vznikl, zapíšeme to *číselným výrazem*. Kromě *znaků* početních operací, které je třeba provést, jsou v něm *závorky*, které určují pořadí prováděných operací.

Jak počítáme s *číselnými výrazy*?

Abychom výraz správně „vypočítali“, tj. určili jeho ***číselnou hodnotu***, musíme přesně vědět, v jakém pořadí se naznačené operace provádějí. Vysvětlíme to na příkladu výrazu se čtyřmi operacemi:

$$(((3 + 5) - 4) : (10 - 8)) \cdot 3$$

Nejprve si uvědomíme, které závorky k sobě „patří“:

$$(((3 + 5) - 4) : (10 - 8)) \cdot 3$$

Pak vypočteme výrazy ve „vnitřních závorkách“: $3 + 5 = 8$ a $10 - 8 = 2$. Tím se výraz zjednoduší:

$$((8 - 4) : 2) \cdot 3$$

Předchozí postup opakujeme. Vypočítáme-li $8 - 4 = 4$, dostaneme $(4 : 2) \cdot 3$. Protože $4 : 2 = 2$, vychází nakonec: $2 \cdot 3 = 6$.

Zjistili jsme, že
$$(((3+5)-4):(10-8))\cdot 3 = 6.$$

V zápise daného výrazu byly použity jen *kulaté* závorky. Přehledněji jej zapíšeme takto:
$$\{[(3+5)-4]:(10-8)\}\cdot 3$$

Při takovém zápisu jsme použili i závorky *hranaté* [ ] a *složené* { }. Tak lépe vidíme, jak jsou závorky do sebe „vnořeny“.

$$(((3+5)-4):(10-8))\cdot 3 \xrightarrow{\text{závorky}} \{[(3+5)-4]:(10-8)\}\cdot 3$$

kulaté
hranaté
složené

Příklad 1. Vypočtěte:

a) $(7+5)\cdot 3$ b) $6\cdot[17-(8+2)]$ c) $(12-6):[1+(4:2)]$

Řešení

a) $(7+5)\cdot 3 = 12\cdot 3 = 36$

b) $6\cdot[17-(8+2)] = 6\cdot[17-10] = 6\cdot 7 = 42$

c) $(12-6):[1+(4:2)] = 6:[1+2] = 6:3 = 2$

? Které závorky můžeme vynechávat?

V této kapitole jsme dosud počítali s výrazy, které byly „důsledně uzávorkovány“. Některé závorky jsou však zbytečné. Víme již, že bez závorek se obejdeme v těchto případech:

- Výraz obsahuje pouze několik operací sčítání a odčítání.
- Výraz obsahuje pouze několik operací násobení.

Například:
$$2+5+3=10$$
$$6-4+8=10$$
$$3\cdot 7\cdot 10=210$$

Aby lidé mohli psát bez závorek i další výrazy, dohodli se na následujícím pravidlu „přednosti“ pro výrazy, které obsahují součet nebo rozdíl a zároveň součin či podíl.

> Obsahuje-li výraz několik početních operací, má násobení a dělení přednost před sčítáním a odčítáním.

Například:

$$2+3\cdot 7 = 2+\underbrace{3\cdot 7} = \underbrace{2+21} = 23$$

$$7+12:6 = 7+\underbrace{12:6} = \underbrace{7+2} = 9$$

$$7\cdot 5-12:4 = \underbrace{7\cdot 5}-\underbrace{12:4} = \underbrace{35-3} = 32$$

Je-li třeba provést početní operace v jiném pořadí, než je to, které vyplývá z předchozího pravidla, používáme k zápisu výrazu *závorky*.

Máme-li určit, čemu je roven „trojnásobek součtu čísel 5 a 7", zapíšeme jej se závorkami

$$3\cdot(5+7) \quad \text{a vypočteme} \quad 3\cdot(5+7) = 3\cdot 12 = 36.$$

Kdybychom závorky nepoužili, vyšel by nesprávný výsledek:

$$3\cdot 5+7 = 15+7 = 22$$

Nyní vypočteme několik výrazů, ve kterých je použito jak pravidlo přednosti, tak i závorky.

Příklad 2. Vypočtěte:

a) $25-(4+2\cdot 3)$ b) $18+5\cdot(14-70:10)$

Řešení

a) $25-(4+\underbrace{2\cdot 3}) = 25-\underbrace{(4+6)} = \underbrace{25-10} = 15$

b) $18+5\cdot(14-\underbrace{70:10}) = 18+5\cdot\underbrace{(14-7)} = 18+\underbrace{5\cdot 7} = \underbrace{18+35} = 53$

Příklad 3. Vypočtěte: $60-[35+4\cdot(20-5\cdot 3)]$

Řešení

$$60-[35+4\cdot(20-\underbrace{5\cdot 3})] = 60-[35+4\cdot\underbrace{(20-15)}] = 60-[35+\underbrace{4\cdot 5}] =$$
$$= 60-\underbrace{[35+20]} = \underbrace{60-55} = 5$$

V tomto příkladu bylo použito více druhů závorek. V takových případech je obvyklé po odstranění vnitřních závorek nahradit vnější závorky jednoduššími. Takto nahradil hranaté závorky kulatými i Martin. Prohlédněte si jeho řešení předchozího příkladu:

$$60-[35+4\cdot(20-\underbrace{5\cdot 3}_{})]=60-[35+4\cdot(\underbrace{20-15}_{})]=$$
$$=60-(35+\underbrace{4\cdot 5}_{})=60-(\underbrace{35+20}_{})=60-55=\underline{5}$$

Podobně budeme postupovat i my při řešení následujícího příkladu.

Příklad 4. Vypočtěte: $3\cdot\{26-[32-(5-2)\cdot 8]+14:2\}$

Řešení

$$3\cdot\{26-[32-\underbrace{(5-2)}_{}\cdot 8]+\underbrace{14:2}_{}\}=3\cdot[26-(32-\underbrace{3\cdot 8}_{})+7]=$$
$$=3\cdot[26-\underbrace{(32-24)}_{}+7]=3\cdot\underbrace{(26-8+7)}_{}=\underbrace{3\cdot 25}_{}=75$$

Prohlédněte si ještě několik výpočtů z Martinova sešitu:

$$\underbrace{20\cdot 4}_{}+\underbrace{35:5}_{}-\underbrace{320:8}_{}-\underbrace{77:11}_{}=80+\cancel{7}-40-\cancel{7}=\underline{40}$$

$$420:(40-\underbrace{12\cdot 3}_{}+\underbrace{3\cdot 22}_{})=420:(40-36+66)=420:70=\underline{6}$$

$$[28-3\cdot(5\cdot 6-4\cdot 7)+2\cdot 5]:8=[28-\underbrace{3\cdot(30-28)}_{}+10]:8=$$
$$=(28-6+10):8=32:8=\underline{\underline{4}}$$

$$66-\{40-[4+3\cdot(\underbrace{12-5}_{})]+\underbrace{4\cdot 6}_{}\}=66-[40-(4+\underbrace{3\cdot 7}_{})+24]=$$
$$=66-(40-25+24)=66-39=\underline{\underline{27}}$$

1. Vypočtěte:

a) $6+3\cdot 5$
$7+16:4$
$48-15\cdot 2$
$25-32:2$

b) $3\cdot 7+2\cdot 14$
$24:4-16:8$
$15:3+21\cdot 3$
$6\cdot 9-32:8$

c) $2+2\cdot 5+3\cdot 4$
$3\cdot 5+12:4-3$
$4+6\cdot 5-68:2$
$12\cdot 2+12:2-3\cdot 9$

2. Vypočtěte:

a) $4 + 5 \cdot 6$
$(4 + 5) \cdot 6$
$(2 + 10) : 2$
$2 + 10 : 2$

b) $20 - 2 \cdot 3$
$(20 - 2) \cdot 3$
$30 - 26 : 2$
$(30 - 26) : 2$

c) $15 \cdot 4 - 20 \cdot 3$
$(12 \cdot 5) : (2 \cdot 3)$
$60 + (18 - 8) - 10 \cdot 6$
$(300 : 30) \cdot (27 : 9)$

3. Vypočtěte:

a) $24 : 4 + 8 \cdot 2 + 4$
b) $(24 : 4 + 8) \cdot 2 + 4$
c) $24 : [(4 + 8) \cdot 2] + 4$
d) $24 : (4 + 8 \cdot 2 + 4)$

***4.** Doplňte do zápisu číselného výrazu $2 \cdot 4 + 24 : 6 - 3$ jednu dvojici kulatých závorek tak, aby měl hodnotu:

a) 10
b) 13
c) 16

5. Vypočtěte:

a) $100 - (48 - 3)$
$100 - [60 - (48 - 3)]$
$100 - \{90 - [60 - (48 - 3)]\}$

b) $100 - (48 + 3)$
$100 - [60 - (48 + 3)]$
$100 - \{90 - [60 - (48 + 3)]\}$

6. Vypočtěte:

a) $100 - [25 - (16 + 5)]$
b) $4 \cdot 12 + 7 \cdot [(5 \cdot 8 - 7) - 11 \cdot 2 - 4]$
c) $2 \cdot [8 \cdot (15 - 7) - 2 \cdot 7] - 2$
d) $132 - [3 \cdot 2 + (5 \cdot 8 - 6) - 2] + 5$
e) $\{53 - [11 - (17 + 5) : 2] + 39 : 3\} \cdot 2 - 8 \cdot 4$

6 ROVNICE

Tato kapitola bude věnována základním poznatkům o *rovnicích.* Zopakujeme v ní, jak se jednoduché rovnice řeší.

Kvůli přesnému a srozumitelnému vyjadřování nejprve vysvětlíme, jaký je rozdíl mezi *rovností* a *rovnicí.*

Co je *rovnost*?

?

Představme si, že máme dvě čísla nebo dva číselné výrazy. Chceme-li vyjádřit, že mají stejnou hodnotu, zapíšeme mezi ně znak rovnosti. Například:

$$1 = 1, \qquad 3 = 5 - 2, \qquad 100 - 75 = 5 \cdot 5$$

Znak $=$ odděluje *levou* a *pravou* stranu rovnosti. Levou stranu rovnosti budeme často značit písmenem L a pravou písmenem P. Například:

$$\underbrace{2+3}_{L} = \underbrace{5}_{P}$$

Symbolicky zapisujeme: $L = P$

K vyjádření toho, že se dvě čísla nebo dva číselné výrazy nerovnají, používáme symbol $\neq$, který čteme „není rovno". Například $5 - 2 \neq 7$.

? Jaký je rozdíl mezi *rovností* a *rovnicí*?

Zápis

$$x - 2 = 7$$

nemůžeme nazvat rovností. Levá strana totiž obsahuje písmeno x, za které můžeme dosazovat různá čísla. Dosadíme-li např. za x číslo 5, dostaneme chybný zápis

$$5 - 2 = 7.$$

Nás naopak zajímá, která čísla po dosazení za x dají rovnost. Dobře víte, že v našem příkladu je to jediné číslo 9.

Zápis

$$x - 2 = 7$$

je příkladem *rovnice*. Objevuje se zde neznámé číslo, které je třeba určit. Nazývá se **neznámá**; obvykle se označuje písmenem x. Užívají se však i jiná písmena.

Řešit rovnici znamená určit všechna čísla, která je možné dosadit za neznámou, aby se rovnice „přeměnila" v rovnost. Každé takové číslo nazýváme **kořenem** nebo **řešením** dané rovnice.

Slovo „řešení" se u rovnic používá ve dvojím významu: jednak znamená *postup*, kterým určujeme neznámou, jednak se jím pojmenovává i „správná hodnota" neznámé – *kořen* rovnice. Ze souvislosti bývá však jasné, v kterém významu je slovo „řešení" použito.

Připomeneme ještě, že i u rovnic hovoříme o *levé* a *pravé* straně rovnice. K jejich označení také často používáme písmena L a P.

Jak postupujeme při řešení rovnic?

?

Nejjednodušší typy rovnic už umíte řešit. Podívejte se, jak takové rovnice řešil Petr:

$$\begin{aligned} x + 2 &= 8 \\ x &= 8 - 2 \\ x &= 6 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2 \cdot x &= 20 \\ x &= 20 : 2 \\ x &= 10 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2 \cdot x + 3 &= 5 \\ 2 \cdot x &= 5 - 3 \\ 2 \cdot x &= 2 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Na třech příkladech jsme zopakovali postup, který se používá při řešení jednoduchých rovnic. S obecnými pravidly užívanými při řešení složitějších typů rovnic se seznámíte později.

Hledání účinného postupu, který vede k řešení libovolně „složitých" rovnic, se vine jako zlatá nit historií téměř čtyř tisíciletí vývoje matematiky. Již staří Babyloňané a později Řekové řešili úlohy, které vedou k jednoduchým rovnicím. Nepoužívali však symbolické zápisy jako my. Rovnice se vyjadřovaly a řešily jen slovně, proto byla řešení komplikovaná a nepřehledná. Až v 16. a 17. století došlo k podstatnému pokroku v symbolickém zapisování rovnic.

Úvahy o řešení rovnic daly vzniknout celému důležitému odvětví matematiky – klasické *algebře*. S jejími základy se postupně seznámíte v dalších ročnících gymnázia.

? Co je zkouška?

Vyřešíme-li danou rovnici, bývá užitečné správnost řešení zkontrolovat. Provedeme tzv. *zkoušku* správnosti řešení: Dosadíme vypočítanou hodnotu neznámé do obou stran původní rovnice. Pokud se po dosazení obě strany rovnají, je výsledek správný. Rozdílné hodnoty levé a pravé strany jsou signálem k hledání chyby – buď při samotném řešení rovnice, nebo při provádění zkoušky.

V následujících ukázkách z Pavlova sešitu je dobře vidět způsob zápisu vlastního řešení i zkoušky:

Příklad 1.: $2 \cdot x = 12 - 4$
$2 \cdot x = 8$
$x = 8 : 2$
$\underline{\underline{x = 4}}$
zk.: $L = 2 \cdot x = 2 \cdot 4 = 8$
$P = 12 - 4 = 8$
$L = P$

Příklad 2.: $3 \cdot x - 2 = 13$
$3 \cdot x = 13 + 2$
$3 \cdot x = 15$
$x = 15 : 3$
$\underline{\underline{x = 5}}$
zk.: $L = 3 \cdot x - 2 = 3 \cdot 5 - 2 =$
$= 15 - 2 = 13$
$P = 13$
$L = P$

Ačkoliv většina rovnic, se kterými jste se dosud setkali, má *právě jeden* kořen, nemusí tomu tak být vždy. Například rovnice

$$x \cdot (x - 1) = 0$$

má právě dva kořeny, kterými jsou čísla 0 a 1. (Sami proveďte zkoušku.)
Naopak rovnice

$$(3 - 3) \cdot x = 1$$

nemá žádný kořen. Ať za x dosadíme jakékoli číslo, vždy dostaneme $L = 0$, $P = 1$, tj. nikdy nevyjde rovnost, ale vyjde chybný zápis $0 = 1$.
Některé rovnice mohou mít *nekonečně mnoho* kořenů. Příkladem je rovnice

$$x + 5 = 5 + x.$$

Dosadíme-li do ní za x libovolné číslo, vyjde vždy rovnost.

□ **1.** Zjistěte, zda číslo 8 je kořenem následující rovnice:

a) $7 \cdot x + 3 = 58$ b) $6 = 30 - 3 \cdot y$ c) $9 \cdot z - 9 = 63$

□ **2.** Řešte rovnice:

a) $x - 2 = 10$ b) $x + 2 = 10$
c) $x \cdot 2 = 10$ d) $x : 2 = 10$

3. Řešte rovnice:

a) $10 - x = 5$ b) $5 + x = 10$
c) $0{,}5 \cdot x = 1$ d) $1 \cdot x = 0{,}5$
e) $2 \cdot x - 1 = 11$ f) $3 \cdot x = 11 - 2 \cdot 4$

4. Z množiny $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ vyberte ta čísla, která jsou kořeny rovnice:

a) $x \cdot x + 6 = 5 \cdot x$ b) $x \cdot x + 2 = 3 \cdot x$

CVIČENÍ 4

1. Vypočtěte:

a) $12 - 4 + 2$
$12 - 4 \cdot 2$
$12 - 4 : 2$
$12 \cdot 4 - 2$
$12 - 4 - 2$

b) $24 + 8 - 3$
$24 : 8 - 3$
$24 - 8 \cdot 3$
$24 + 8 \cdot 3$
$24 : 8 + 3$

c) $20 - 12 + 4$
$20 + 12 : 4$
$20 - 12 : 4$
$(20 - 12) \cdot 4$
$(20 - 12) : 4$

2. Vypočtěte:

a) $2 \cdot 8 + 5 \cdot 3$ b) $2 \cdot (8 - 5) \cdot 3$
c) $26 : 13 + 2 \cdot 9$ d) $2 \cdot (21 - 3 \cdot 4)$
e) $6 \cdot 6 - 45 : 9$ f) $(27 - 4 \cdot 5) \cdot 6$

3. Vypočtěte:

a) $14 - 4 \cdot 2 + 1$
$(14 - 4) \cdot (2 + 1)$
$14 - 4 \cdot (2 + 1)$
$(14 - 4) \cdot 2 + 1$
$14 - (4 \cdot 2 + 1)$

b) $(17 + 3) \cdot (12 - 5)$
$(17 + 3) \cdot 12 - 5$
$17 + (3 \cdot 12 - 5)$
$17 + 3 \cdot (12 - 5)$
$(17 + 3 \cdot 12) - 5$

■ **4.** Do chybného zápisu doplňte jednu dvojici kulatých závorek tak, aby vznikla rovnost:

a) $2 + 8 \cdot 3 - 20 = 10$ b) $2 \cdot 5 + 40 - 15 : 6 = 10$
c) $8 \cdot 5 - 17 + 13 = 10$ d) $13 - 25 - 10 : 5 = 10$

5. Které z následujících výrazů mají hodnotu 100?

a) $11 + 3 \cdot [(11 - 2) \cdot 4 - 6] - 1$ b) $[8 + 2 \cdot (9 - 3) + 5] \cdot 4$
c) $[3 \cdot (3 \cdot 15 - 3 \cdot 13) + 2] \cdot 5$ d) $[(72 - 4) : 2 + (32 : 2)] \cdot 2$

6. Vypočtěte:

a) $27 - [3 \cdot 6 - (15 - 2 \cdot 7) \cdot 4]$ b) $4 \cdot 11 - [4 \cdot (19 - 60 : 12) - 26]$

c) $50 - \{3 \cdot [34 - (17 + 9)] + 8\} - 3$ d) $\{[(24 - 15) \cdot 7 - 33] \cdot 2 - 16 + 4\} : 3$

□ **7.** Řešte rovnice:

a) $x : 2 = 12$
$x - 3 = 12$
$x \cdot 4 = 12$
$x + 5 = 12$

b) $56 : y = 7$
$56 \cdot y = 112$
$56 - 2 \cdot y = 50$
$56 + 4 \cdot y = 60$

c) $t + 0 = 1$
$t + t = 10$
$t : 8 = 8$
$t : 8 = 0$

8. Řešte rovnici a proveďte zkoušku:

a) $42 - x = 30 + 5$ b) $15 - x = 7{,}8$

c) $3 \cdot x + 18 = 33$ d) $21 = 4 \cdot x - 11$

e) $127 = 7 + 12 \cdot x$ f) $100 - 8 \cdot x = 12$

∗**9.** Řešte rovnici s neznámou m a proveďte zkoušku:

a) $7 \cdot m - 4{,}5 = 16{,}5$ b) $0{,}3 + 2 \cdot m = 8{,}9$

c) $3 \cdot m + 1{,}1 = 20$ d) $11{,}8 - 9 \cdot m = 9{,}1$

10. Určete, které číslo z množiny $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ je řešením rovnice

$$7 \cdot x - 3 \cdot x + 12 = 11 \cdot x - 16.$$

7 SLOVNÍ ÚLOHY

Tato kapitola je věnována *slovním úlohám*. Jejich zadání vyžaduje, abychom popsané situaci dobře porozuměli a dokázali ji vhodně „převést“ do matematického jazyka. To je někdy obtížné, protože žádný obecný recept, „jak na to jít“, neexistuje. Snad vám pomůže, budete-li dodržovat všechny zásady platné pro řešení slovních úloh. Připomeňme si je.

1. Stručně zapíšeme zadání a uděláme náčrtek (pokud je třeba).
2. Promyslíme, jak budeme úlohu řešit.
3. Zapíšeme řešení tak, aby byl dobře vidět náš postup.
4. Pokud je to možné, provedeme zkoušku správnosti.
5. Zapíšeme odpověď.

Uvedeme nyní čtyři slovní úlohy. Pokuste se je nejprve vyřešit sami; teprve potom se podívejte, jak úlohy řešili Honza, Alena a Petra. Vaše zápisy se mohou od jejich lišit.

Příklad 1. Ze tří polí byla sklízena řepa. Z prvního pole ji odváželo auto s nosností 5 tun a jelo čtrnáctkrát – vždy plně naloženo. Z druhého pole ji stejné plně naložené auto odváželo šestnáctkrát. Z posledního pole byla řepa odvážena traktorem s vlečkou, na kterou se vejdou 3,5 tuny řepy. Traktor jel sedmkrát – šestkrát byla vlečka plně naložena, posedmé na ní byly 2 tuny řepy. Kolik tun řepy bylo odvezeno ze všech tří polí dohromady?

Řešení

Honza

1. pole ..... po 5 t 14-krát
2. pole ..... po 5 t 16-krát
3. pole ..... po 3,5 t ..... 6-krát + 2 t

kolik celkem?

$$\begin{array}{r} 14 \\ \cdot\ 5 \\ \hline 70 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 16 \\ \cdot\ 5 \\ \hline 80 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3,5 \\ \cdot\ 6 \\ \hline 21,0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 21 \\ +\ 2 \\ \hline 23 \end{array}$$

1. pole: 70 t
2. pole: 80 t
3. pole: 23 t

celkem: 173 t

Celkem bylo odvezeno 173 tun řepy.

Petra

po 5 tunách ..... (14 + 16)-krát ..... u t
po 3,5 tunách ..... 6-krát ..... y t
navíc ..... 2 t
celkem ..... z t

$u = 30 \cdot 5\,t = 150\,t$

$y = 6 \cdot 3,5\,t = 21,0\,t$

$z = 150\,t + 21\,t + 2\,t = \underline{\underline{173\,t}}$

Bylo odvezeno 173 tun řepy.

Alena

14 aut po 5 t
16 aut po 5 t
6 trakt. po 3,5 t + 2 t

? celkem

počítám v tunách:

$14 \cdot 5 = 70$
$16 \cdot 5 = 80$
$6 \cdot 3,5 = 21,0$
$+ 2$

$\underline{\underline{173}}$

Odvezlo se 173 t řepy.

Příklad 2. Jana a Petr dostali od rodičů svolení, aby si na zahradě otrhali zbylý rybíz a prodali jej do sběrny ovoce. Utržené peníze si mohli ponechat. Oba sourozenci trhali 3 dny a postupně prodali 12 kg, 10 kg a 8 kg rybízu. Ve sběrně platili 8 Kč za 1 kg rybízu. Jak Jana, tak i Petr si každý den koupili oříškovou čokoládu za 11 Kč. Kolik Kč jim zbylo?

Řešení

Honza

rybíz .... 12 kg + 10 kg + 8 kg = 30 kg
za 1 kg rybízu .... 8 Kč
za čokolády .... 3 . (2 . 11 Kč) = 66 Kč
zbylo peněz .... ?

30 . 8 Kč = 240 Kč   240 Kč − 66 Kč = 174 Kč

Janě s Petrem zbylo 174 Kč.

Petra

prodali celkem ....(12+10+8) kg
cena 1 kg .... 8 Kč
utratili .... 6 · 11 Kč
zbylo x

počítám v korunách:
x = (12+10+8)·8 − 6·11 =
= 30·8 − 6·11 =
= 240 − 66 = 174

Janě a Petrovi zůstalo 174 Kč.

Alena

1. den ..... 12 kg
2. den ..... 10 kg
3. den ..... 8 kg
1 kg rybízu ... 8 Kč
utržili x
celkem ..... 6 čokolád
1 čokoláda ... 11 Kč
6 čokolád ... y
zbytek ..... z

x = (12 + 10 + 8) · 8 Kč =
= 30 · 8 Kč = 240 Kč
y = 6 · 11 Kč = 66 Kč
z = 240 Kč − 66 Kč =
= 174 Kč

Sourozencům zůstalo 174 Kč.

Příklad 3. Čtyřnásobek neznámého čísla je o 3 větší než číslo 17. Určete neznámé číslo.

Řešení

Honza

neznámé číslo x
platí: $4 . x = 3 + 17$

$4 . x = 3 + 17$
$4 . x = 20$
$x = 20 : 4$
$x = 5$

Zk: $4 . 5 = 20$
$20 - 3 = 17$

Neznámé číslo je 5.

Alena

číslo x
platí ..... $4 \cdot x - 3 = 17$

$4 \cdot x - 3 = 17$
$4 \cdot x = 20$
$x = 20 : 4$
$x = 5$

Zk.: $4 \cdot 5 = 20$
$20 - 3 = 17$

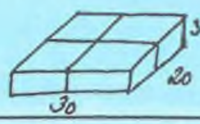
Hledané číslo je pět.

Příklad 4. Kolik centimetrů ozdobné stuhy je potřeba na převázání balíčku s rozměry 30 cm, 20 cm a 3 cm (viz obrázek)? Na mašličku počítáme 70 cm stuhy.

Řešení

Petra

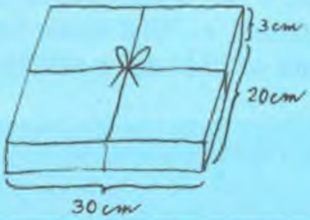
Rozměry v cm: $30 \times 20 \times 3$
mašle .... 70 cm
stuhy .... d cm



počítám v cm:
$d = 2 \cdot 30 + 2 \cdot 20 + 4 \cdot 3 + 70 =$
$= 60 + 40 + 82 = 182$

Potřebujeme 182 cm stuhy.

Honza



délka 30cm
šířka 20cm
výška 3cm
mašlička 70cm
celkem ? cm

$2 \cdot 30\,cm = 60\,cm$
$2 \cdot 20\,cm = 40\,cm$
$4 \cdot 3\,cm = 12\,cm$

$60\,cm + 40\,cm + 12\,cm = 112\,cm$
$112\,cm + 70\,cm = \underline{\underline{182\,cm}}$

Na převázání je potřeba 182 cm stuhy.

CVIČENÍ 5

□ **1.** Procvičte si svůj úsudek na jednoduchých úlohách ze staré učebnice:

a) Maminka koupila 3 kg mouky po 3 K a 1 kg rýže za 4 K. Kolik zaplatila?

b) Obchodník prodával 1 kg jablek za 7,50 K. Kolik utržil za 4 kg, když slevil na každém kilogramu 30 haléřů?

c) V rodině spotřebují týdně dva bochníky chleba po 5 K. Kolik zaplatí za chleba za 6 neděl?

d) Čtvrt metru látky bylo za 5 K, zač bylo 5 metrů?

e) Pět metrů látky je za 300 K, zač je tři a půl metru?

2. Maminka chce olemovat ozdobnou stužkou jeden velký obdélníkový ubrus a dva stejné čtvercové ubrusy. Kolik metrů stužky musí koupit, jestliže rozměry většího ubrusu jsou 2 m a 1,3 m a délka strany čtvercových ubrusů je 90 cm?

3. Školního výletu se zúčastnilo 28 žáků. Paní učitelka vybrala od každého z nich 250 Kč. Kolik Kč musí každému vrátit, jestliže skutečné náklady činily 6 664 Kč a žáci se na nich podíleli rovným dílem?

4. V soupravě nákladního vlaku byly i tři vagony s bramborami. V prvním bylo 15 600 kg brambor, ve druhém o 900 kg více než v prvním a ve třetím stejně jako v prvním. Celý náklad prodal velkoobchod po 3,50 Kč za 1 kg. Kolik Kč za to utržil?

5. Ředitelka školy potřebovala přikoupit 35 kalkulaček. Zjistila, že v obchodě u školy stojí jedna 159 Kč. V jiném obchodě stojí stejná kalkulačka sice 172 Kč, ale koupí-li jich zákazník deset, přidají mu jedenáctou zdarma. V kterém obchodě je výhodnější potřebné kalkulačky zakoupit a kolik Kč tím škola ušetří?

6. Myslím si číslo. Přičtu-li k jeho pětinásobku 30, bude mi chybět právě 5 do sta. Které číslo si myslím?

8 BOD, PŘÍMKA, POLOPŘÍMKA, ÚSEČKA

V následujících kapitolách si připomeneme základní poznatky o *geometrických útvarech*. Setkali jste se s nimi nejen v hodinách matematiky v základní škole, ale máte o nich dobrou názornou představu i z běžného života. Tak například klidná vodní hladina, skleněná tabule nebo list papíru představují části *roviny*. Podobně napjatá šňůra či světelný paprsek představují části *přímky*. Podíváte-li se za bezmračné letní noci na oblohu, jeví se vám jednotlivé hvězdy jako *body*.

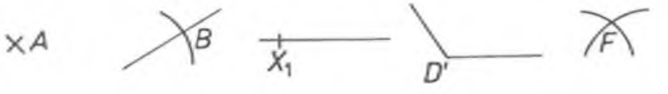
Co víme o *bodu*?

?

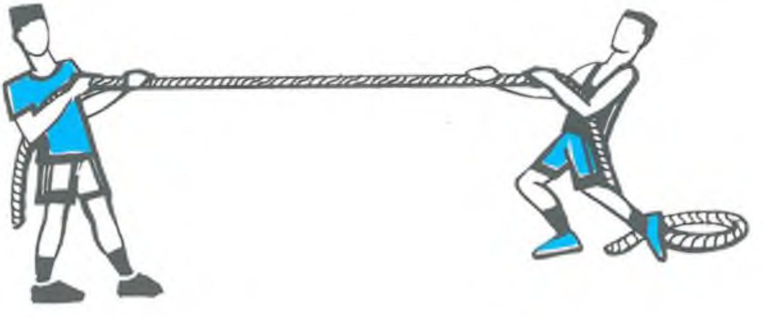
Bod je základní geometrický útvar, ze kterého se „skládají“ další útvary, které chápeme jako *množiny bodů*. Nedá se rozdělit na menší části.

Body označujeme velkými tiskacími písmeny, někdy doplněnými indexy nebo čárkami, například A, B, X_1, D', F na obrázku na stránce 64.

Kdybychom bod znázornili v sešitě nebo na tabuli malou tečkou, nemusel by být vidět. Proto ho zpravidla vyznačujeme malým křížkem. Ramena takového křížku jsou „kousíčky“ přímek, které se protínají právě v tom bodě, který chceme vyznačit. Prohlédněte si různé způsoby vyznačení a popisu bodů:



? Co víme o *přímce*?

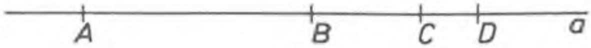


Pokusíme se vyjádřit naše představy o přímce. Přímka je množina bodů tvořících „rovnou čáru“, která nemá „začátek“ ani „konec“. Body jsou na přímce „naskládány hustě“ a na každém „kousku“ přímky je jich nekonečně mnoho.

Je nám taky jasné, že k zadání přímky stačí znát libovolné dva různé body, kterými prochází. Na obrázku je znázorněna část přímky p, která prochází body A a B.

Skutečnost, že přímka p prochází bodem A, zapíšeme množinově $A \in p$ a přečteme „bod A leží na přímce p“ nebo „bod A náleží přímce p“. (Je to obvyklejší než „bod A je prvkem přímky p“.)

Přímku můžeme označit buď malým písmenem, nebo pojmenovat pomocí dvou různých bodů, které na ní leží. Tak přímku p z předchozího obrázku nazýváme AB a píšeme $p = AB$. Někdy užíváme pro přímku také symbol $\leftrightarrow$. Píšeme pak $\leftrightarrow AB$ (čti „přímka á bé“). Uvědomte si, že pro označení jedné přímky můžeme použít různé dvojice jejích bodů. Přímku na obrázku



můžeme zapsat různými způsoby:

$$\leftrightarrow AB = \leftrightarrow BA = \leftrightarrow DC = \leftrightarrow CA = \dots$$

Všimněte si, že při označování bodů a přímek používáme malá a velká písmena „opačně" než při popisu jiných prvků a jejich množin. Čísla obvykle označujeme malými písmeny, množiny čísel pak písmeny velkými. Popis geometrických útvarů se totiž ustálil dávno předtím, než se začala používat množinová symbolika.

Na následujícím obrázku je znázorněna přímka $q = XY$ a bod Z, který na ní neleží. Zapíšeme to dvojím způsobem:

$Z \notin q$ (čti „bod Z neleží na přímce q")

$Z \notin \leftrightarrow XY$ (čti „bod Z neleží na přímce XY")

□ **1.** Mohou body A, B procházet dvě různé přímky?

2. V rovině jsou dány

a) dva různé body, b) tři různé body.

Každými dvěma z daných bodů vedeme přímku. Kolik různých přímek můžeme získat?

3. Zapište symbolicky, zda body A, B, C a D leží na přímce a:

Co víme o *polopřímce*?

Zvolme na přímce p libovolný bod P. Tím se přímka p rozdělí na dvě části, které se „stýkají" v bodě P. Tyto části přímky p se nazývají **polopřímky s počátkem** P. Bod P patří oběma polopřímkám. Nakreslíme nyní jen jednu z nich:

Každý bod polopřímky různý od počátku se nazývá **vnitřní bod** polopřímky. Takových bodů je nekonečně mnoho, na našem obrázku je znázorněn jeden z nich, a to bod Q.

Je jasné, že polopřímka je určena svým *počátkem* P a jedním vnitřním bodem Q. Nazýváme ji polopřímkou PQ. Při zápisech někdy používáme symbol $\mapsto$, takže píšeme $\mapsto PQ$ (čti „polopřímka pé kvé"). Při označení přímky pomocí jejích dvou bodů nezáleží na pořadí, ve kterém body zapíšeme (přímka XY je totožná s přímkou YX). Při označení polopřímky je však pořadí důležité: Nejprve píšeme její počátek, potom některý vnitřní bod. (Na předchozím obrázku sami ukažte polopřímku QP.)

Dvě polopřímky, které vznikly „rozdělením" přímky p bodem P, nazveme navzájem **opačnými polopřímkami**. Jejich sjednocením je celá přímka p, jejich průnikem je jednoprvková množina $\{P\}$.

4. Narýsujte přímku p a zvolte na ní body A, B, C podle obrázku:

Vyznačte barevně polopřímky AB, BC a polopřímky k nim opačné.

□ **5.** Rozhodněte, zda polopřímky DE a DF z obrázku jsou opačné.

□ **6.** Rozhodněte, zda pro polopřímky z obrázku platí:

a) polopřímky AB a AC jsou stejné

b) polopřímky AB a BA jsou navzájem opačné

□ **7.** Vyjmenujte všechny polopřímky, které mají počátek v některém z bodů A, B, C a jsou částmi přímky p na obrázku. Kolik jich je?

Co víme o *úsečce*?

Zvolme na přímce p dva různé body A, B. Pak body A, B spolu se všemi body, které leží na přímce p mezi nimi, tvoří **úsečku** AB. Body A, B se nazývají **krajní body** úsečky AB. Ostatní body úsečky AB, kterých je nekonečně mnoho, jsou její **vnitřní body**. Každá úsečka je určena oběma svými krajními body.

Úsečku AB můžeme také definovat jako *průnik* polopřímek AB a BA:

$$AB = \mapsto AB \cap \mapsto BA$$

Buďte pozorní: Napíšete-li pouze AB, znamená to obvykle *úsečku* AB. Máte-li na mysli celou *přímku* procházející body A, B, měli byste raději psát $\leftrightarrow AB$ nebo „přímka AB“.

Vysvětlete sami následující zápisy:

$$C \in \leftrightarrow AB, \qquad C \in AB$$
$$B \in \leftrightarrow AC, \qquad B \notin AC$$
$$A \in \leftrightarrow BC, \qquad A \notin BC$$

Délkou úsečky rozumíme vzdálenost jejích krajních bodů. Na obrázku je úsečka CD o délce 6 cm.

Délku každé úsečky XY značíme $|XY|$. Na našem obrázku je $|CD| = 6\,\text{cm}$.

Úsečky stejné délky se nazývají **shodné úsečky**. Na obrázku jsou zakresleny tři shodné úsečky KL, MN a OP.

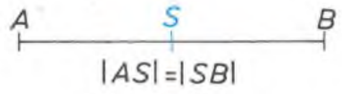
V takovém případě píšeme $KL \cong MN \cong OP$. Znak $\cong$ se čte: „je shodný (shodná, shodné) s". (Používá se i pro jiné shodné útvary než úsečky.)

Rozlišujte mezi *shodnými* a *stejnými* (*totožnými*) úsečkami. Totožné úsečky AB a CD jsou stejné množiny bodů. Mají stejné krajní body (i stejné vnitřní body). Proto platí $A = C$ a $B = D$ nebo $A = D$ a $B = C$. Tehdy píšeme $AB = CD$. Shodné úsečky však nemusí mít dokonce žádný společný bod.

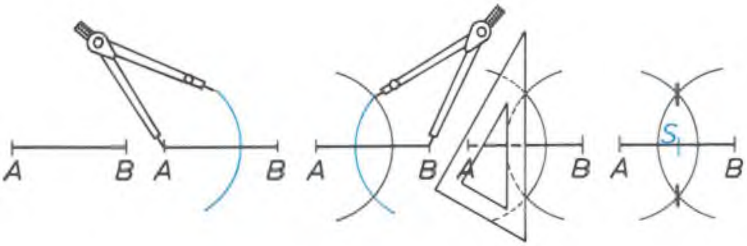
8. Narýsujte úsečky AB, CD, EF a GH o délkách $|AB| = 5\,\text{cm}$, $|CD| = 4\,\text{cm}$, $|EF| = 2\,\text{cm}$ a $|GH| = 1{,}5\,\text{cm}$.
9. Narýsujte úsečku KL shodnou, ne však totožnou s úsečkou AB z předchozí úlohy.
10. Pro které dvojice různých bodů A, B platí $AB = BA$?

? Co je *střed úsečky* a jak ho sestrojíme?

Vnitřní bod úsečky AB, který je stejně vzdálen od obou krajních bodů A i B, se nazývá **střed úsečky** AB. Na obrázku je to bod S. Úsečky AS a SB mají tedy stejnou délku.



Střed úsečky AB sestrojíme pomocí oblouků dvou kružnic se středy v bodech A a B, které mají stejné poloměry „vhodné" velikosti. Zopakujte si tento postup podle obrázků:



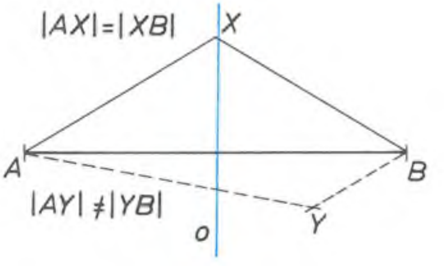
Všimněte si, že všechny pomocné čáry rýsujeme tence. Tlustě je vytažena jen daná úsečka AB. Střed S je zřetelně vyznačen.

11. Narýsujte úsečku CD délky 7,3 cm. Sestrojte její střed S. Dále sestrojte středy S_1 a S_2 úseček CS a SD.

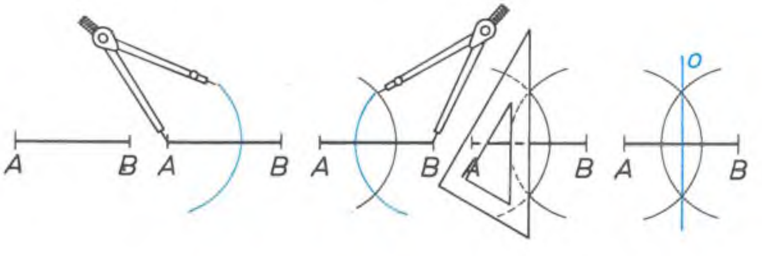
12. Zvolte nejprve dva různé body A, S a potom sestrojte bod B tak, aby bod S byl středem úsečky AB.

Co je *osa úsečky* a jak ji sestrojíme?

Střed úsečky není jediný bod roviny, který má od bodů A, B stejnou vzdálenost. Pokud kružítkem sestrojíte několik takových bodů, zjistíte, že všechny tyto body vyplní *přímku*. Tato přímka se nazývá **osa úsečky** AB. Na obrázku je označena o. Pro každý bod $X \in o$ platí $|XA| = |XB|$. Pro každý bod $Y \notin o$ platí $|YA| \neq |YB|$.



Osu úsečky sestrojíme podobně jako její střed pomocí oblouků dvou kružnic se stejnými poloměry a se středy v bodech A, B. Připomeňte si konstrukci podle obrázků:



13. Narýsujte libovolnou úsečku TU a sestrojte její osu o. Zvolte na ose o pět různých bodů A_1, A_2, A_3, A_4 a A_5 a přesvědčte se bez měření, že každý z nich má od obou bodů T a U stejnou vzdálenost.

CVIČENÍ 6

1. Narýsujte přímku q a body M, N, O, P, Q, pro které platí: $M \in q$, $N \in q$, $O \notin q$, $P = N$, $Q \in q$

2. Zvolte v rovině tři různé body A, B, C tak, aby všemi třemi

a) procházela jedna přímka, a tuto přímku narýsujte,

b) neprocházela žádná přímka.

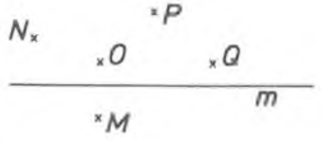
3. Narýsujte polopřímky PX a RY tak, aby

a) byly navzájem opačné,

b) měly společný počátek, ale neležely v jedné přímce,

c) jejich průnikem byla úsečka PR.

4. Narýsujte přímku m a body M, N, O, P, Q podobně jako na obrázku.



Dále narýsujte polopřímky MN, MO, MP, MQ. Jejich průsečíky s přímkou m označte po řadě X_1, X_2, X_3, X_4. Zapište ostatní polopřímky z vašeho obrázku pomocí vyznačených bodů.

5. Narýsujte obrázky k následujícím zápisům:

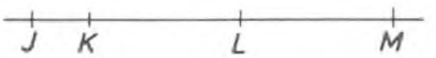
a) přímka p, $A \in p$, $B \in p$, $B \neq A$, $C \notin p$, $D = B$

b) různé body X, Y, Z neležící v přímce, $\mapsto XY$, $\mapsto XZ$, $\mapsto YZ$

c) přímka q, $A \notin q$, $B \notin q$, $C \notin q$, $Q \in q$, $\mapsto QA$, $\mapsto QB$, $\mapsto QC$

d) přímka m, $A \notin m$, $B \notin m$, $C \notin m$, $P \in m$, $\mapsto AP$, $\mapsto BP$, $\mapsto CP$

6. Zapište všechny úsečky, které jsou vyznačeny na obrázku:



7. Narýsujte tři různé přímky e, f, g procházející bodem E. Získáte tak šest polopřímek se společným počátkem E. Na každé z nich vyznačte úsečku délky 3 cm s krajním bodem E.

8. Narýsujte tři úsečky různých délek a sestrojte jejich středy.

9. Zvolte tři body C, D, E, které neleží v přímce. Sestrojte úsečky CC' a DD', jejichž středem je bod E.

10. Narýsujte úsečku RS a sestrojte její osu o. Zvolte libovolný bod osy o a konstrukcí se přesvědčte, že tento bod je středem kružnice, která prochází oběma krajními body úsečky RS. Ověřte na pěti různých bodech osy o.

9 ÚHEL

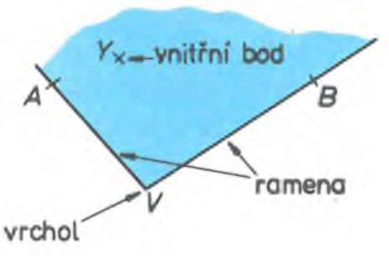
Se slovem *úhel* jste se již v běžném životě jistě setkali. Pravděpodobně víte, co znamená věta: „Ulice svírají pravý úhel." Mnozí hoši rozumějí výroku sportovního komentátora: „Brankář zmenšil útočníkovi střelecký úhel." Jistě sami vymyslíte další věty, v nichž se slovo *úhel* uplatňuje.

Vysvětlíme nyní podrobně, co pojem úhel znamená v matematice.

?

Co je *úhel* a jak ho popisujeme?

Na obrázku vidíte dvě polopřímky VA a VB se společným počátkem V.



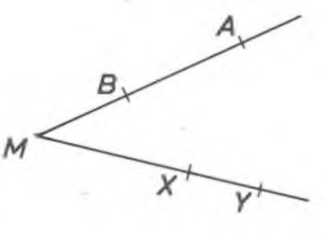
Tyto dvě polopřímky rozdělují rovinu na dvě části, z nichž jedna je vybarvena modře. Této části roviny říkáme *úhel*.

Je jasné, že celý úhel vybarvit nemůžeme. Je to totiž množina bodů v rovině, která není „ohraničená". Na obrázku v učebnici, na tabuli či v sešitě můžeme znázornit jenom část úhlu, podobně jako znázorňujeme jen části přímek, polopřímek apod.

Úhel je tedy část roviny vymezená dvěma polopřímkami se společným počátkem. Tyto polopřímky se nazývají **ramena** úhlu, jejich společný počátek je **vrchol** úhlu. Ty body úhlu, které neleží na jeho ramenech, se nazývají **vnitřní body** úhlu. (Na předchozím obrázku je to například bod Y.) Zdůrazněme, že k úhlu počítáme i všechny body, které leží na jeho ramenech (na obrázku jsou to např. body V, A, B).

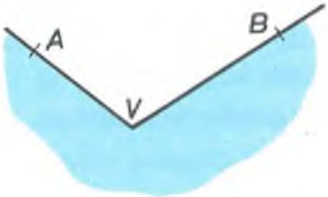
Úhel, o kterém jsme mluvili, zapisujeme $\sphericalangle AVB$ (čti „úhel á vé bé"). Vysvětlíme, jak se takový zápis úhlu sestavuje.

K symbolu úhlu $\sphericalangle$ připisujeme tři velká písmena. Prostřední z nich vždy označuje vrchol úhlu. Například zápis $\sphericalangle AMX$ značí úhel s vrcholem M. Obě krajní písmena označují body vybrané po jednom na každém ramenu úhlu (na pořadí ramen nezáleží). Pomocí vyznačených bodů můžeme úhel z obrázku popsat osmi různými způsoby:

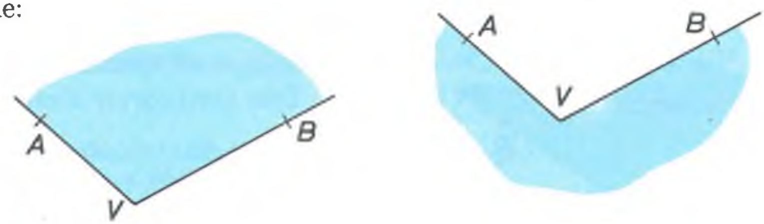


$\sphericalangle AMX$, $\sphericalangle AMY$, $\sphericalangle BMX$, $\sphericalangle BMY$, $\sphericalangle XMA$, $\sphericalangle YMA$, $\sphericalangle XMB$, $\sphericalangle YMB$

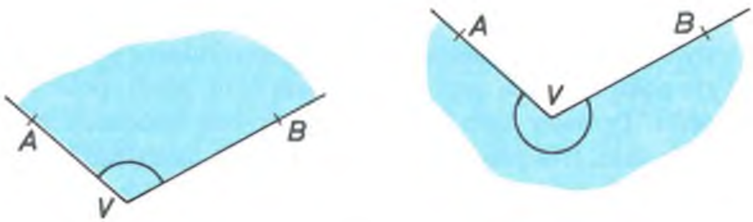
Vraťme se znovu k obrázku z úvodu kapitoly. Tam jsme se zmínili, že polopřímky VA a VB rozdělují rovinu na dvě části. Jednu z nich jsme vybarvili a nazvali úhlem. Vybarvěme nyní druhou část. Možná budete překvapeni, že i této množině bodů říkáme v matematice úhel. Tento úhel má stejný vrchol i stejná ramena jako úhel, o kterém jsme hovořili původně. Proto i tento úhel pojmenováváme AVB nebo BVA.



Z pouhého zápisu $\sphericalangle AVB$ tedy nepoznáme, o který z následujících dvou úhlů jde:



Abychom tedy úhel jasně určili, vyznačíme ho v obrázku obloukem:



K přehlednějšímu popisu úhlů v obrázcích používáme malá řecká písmena α, β, ... (Značku $\sphericalangle$ pak v textu k těmto písmenům nepřipisujeme. Nepíšeme tedy $\sphericalangle\alpha$, nýbrž pouze α, nebo „úhel α“.)

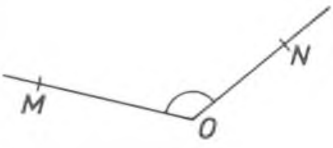
Nejčastěji užívaná malá písmena řecké abecedy uvádíme v tabulce.

α alfa	β beta	γ gama	δ delta	ε epsilon
λ lambda	μ mí	ν ný	π pí	ϱ ró
σ sigma	τ tau	φ fí	ψ psí	ω omega

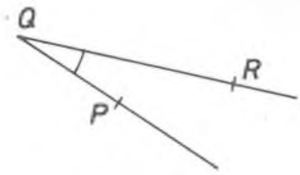
1. Narýsujte do sešitu libovolný úhel EFG a vybarvěte ho.

2. Zapište úhel z obrázku:

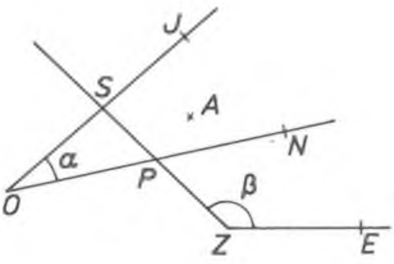
a)



b)



3. Na obrázku jsou úhly α, β a body P, O, Z, N, A, S, J, E. Určete, které z těchto bodů
   a) jsou vnitřními body úhlu α,
   b) patří úhlu α,
   c) jsou vnitřními body úhlu β,
   d) patří úhlu β,
   e) patří úhlu α, ale nepatří úhlu β.



Jak *porovnáváme* úhly?

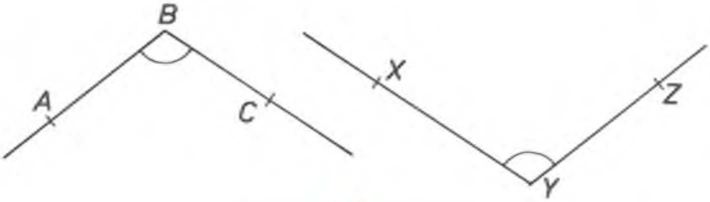
Na obrázku jsou vybarveny tři úhly α, β a γ. Porovnáte-li je, možná vás napadne, že ramena úhlů α a γ jsou „stejně rozevřena“.

Prakticky to můžete potvrdit tak, že například úhel α překreslíte na průsvitný papír a vystřihnete. Vystřižený úhel se vám podaří přiložit na úhel γ tak, aby se oba úhly kryly. Na úhel β se vám úhel α takto přiložit nepodaří. Úhel β je totiž „větší“ než úhel α.

O úhlech α a γ z našeho obrázku řekneme, že jsou **shodné**. Zapíšeme to pomocí znaku shodnosti:

$\alpha \cong \gamma$ (čti „úhel alfa je shodný s úhlem gama") nebo $\gamma \cong \alpha$

Prohlédněte si další dvojici shodných úhlů ABC a XYZ:



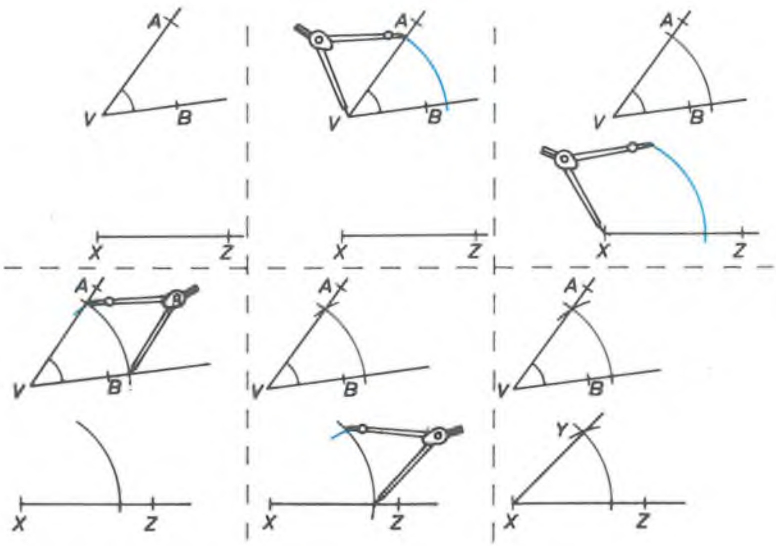
$\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle XYZ$

? Jak *přenášíme* úhly?

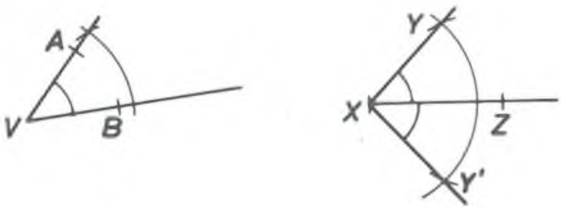
V základní škole jste se naučili kružítkem přenášet úsečku. Nyní vysvětlíme, jak se *přenáší úhel*. Naučíme se, jak k danému úhlu sestrojit shodný úhel, když je „předepsána" poloha jednoho jeho ramena.

Na obrázku je dán úhel AVB a polopřímka XZ. Naším úkolem je sestrojit polopřímku XY tak, aby platilo: $\sphericalangle AVB \cong \sphericalangle YXZ$

Konstrukci zvládneme pomocí kružítka. Postup je patrný z obrázků:

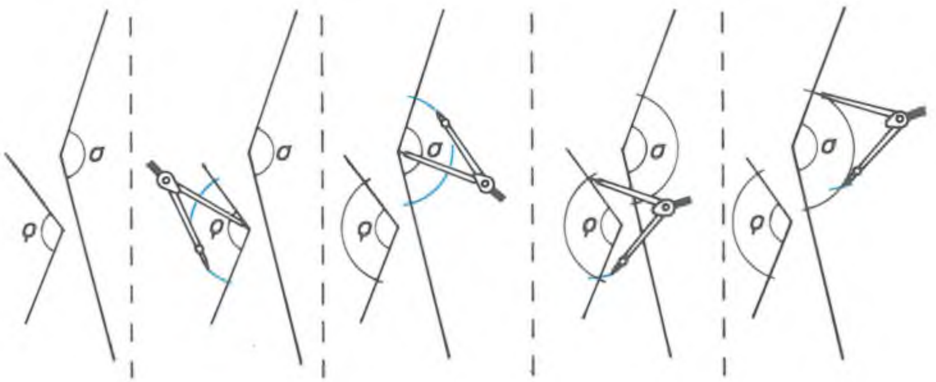


Úhel YXZ z obrázku není jediným řešením naší úlohy. Kdybychom rameno XY hledali v opačné polorovině s hraniční přímkou XZ, dostali bychom druhé možné řešení. Často není důležité, které z nich si narýsujete.



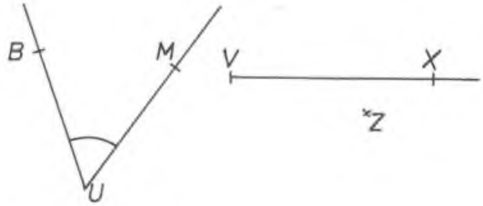
Vyzkoušejte prakticky, že postup při přenášení úhlu, který jsme vysvětlili, je správný. Na papír si sami narýsujte libovolný úhel a libovolnou polopřímku. Pak narýsovaný úhel přeneste tak, aby zvolená polopřímka byla jedním ramenem přeneseného úhlu. Nakonec jeden z úhlů vystřihněte a přiložením se přesvědčte, že je shodný s druhým úhlem.

Rozhodnout, zda jsou dva dané úhly shodné, můžeme pomocí kružítka, aniž bychom úhly vystřihovali a přemísťovali. Na obrázku vidíte jak.

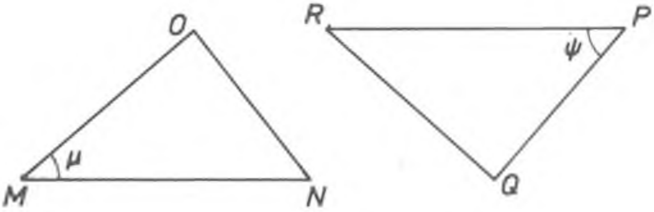


Zjistili jsme, že úhly ϱ a σ *nejsou shodné*, úhel σ je „větší“ než úhel ϱ.

4. Na obrázku je úhel BUM, polopřímka VX a bod Z. Narýsujte si podobný obrázek do sešitu a přeneste úhel BUM tak, aby přenesený úhel obsahoval bod Z a jedním jeho ramenem byla polopřímka VX.

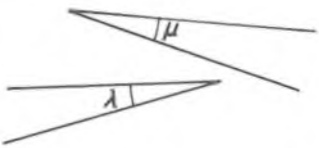


5. Na průsvitný papír si přerýsujte trojúhelníky MNO a PQR z obrázku. Pak pomocí kružítka porovnejte úhly μ a ψ.

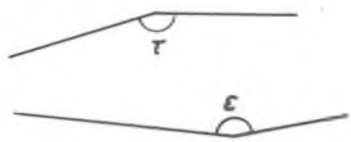


6. Oba úhly z obrázku si přerýsujte na průsvitný papír a pak pomocí kružítka zjistěte, zda jsou shodné.

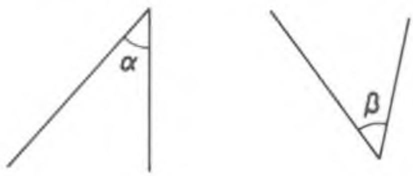
a)



b)

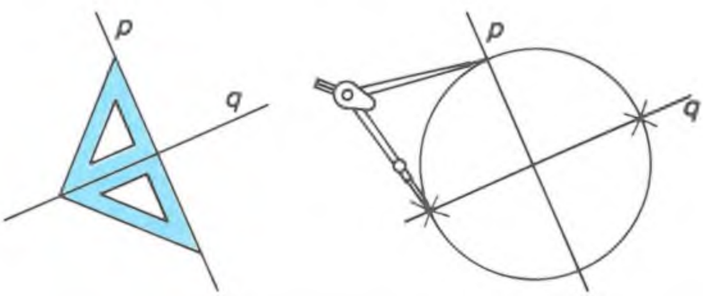


7. Překreslete si oba úhly α, β na průsvitný papír a pak pomocí kružítka zjistěte, který z nich je „větší“.



? Jaké význačné úhly rozeznáváme?

Již v základní škole jste se naučili rýsovat pomocí pravítka s ryskou *kolmé* přímky. Narýsujte do sešitu dvě kolmice p a q. Pomocí kružítka ověřte, že všechny čtyři úhly, na které je rovina přímkami p, q rozdělena, jsou shodné.



Každý z těchto čtyř úhlů se nazývá **pravý**. Všechny pravé úhly jsou shodné.

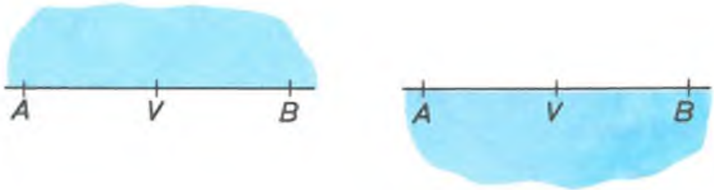
Pravý úhel vyznačujeme obloukem s tečkou, podobně jako je tomu na obrázku vpravo.

Dobře víte, že pravý úhel svírají ručičky hodin, ukazují-li právě 3 hodiny nebo právě 9 hodin.

Jaký úhel svírají ručičky hodin, na kterých je právě 6 hodin? Je jasné, že tehdy oba vytvořené úhly (ten s číslicí 3 i ten s číslicí 9) jsou shodné.

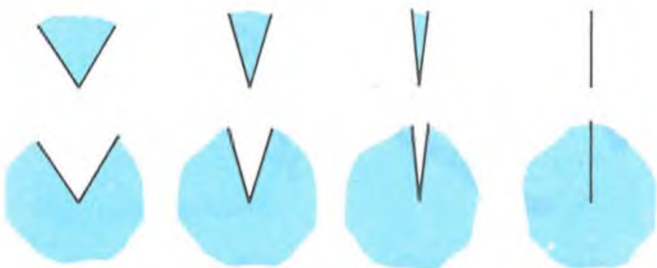
Říkáme jim *přímé úhly*.

Přímý úhel je takový úhel, jehož ramena jsou dvě navzájem opačné polopřímky. Na obrázcích jsou nakresleny oba přímé úhly s daným vrcholem V a danými rameny VA a VB.

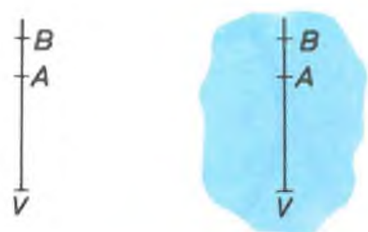


Zajímavou polohu mají ručičky hodin v poledne nebo o půlnoci, tj. ukazují-li přesně 12 hodin. Tehdy se minutová i hodinová ručička „kryjí". Svírají vůbec nějaký úhel?

Podívejme se, co se děje s oběma úhly, které svírají ručičky hodin, když se k sobě přibližují.



Úplně vpravo jsou znázorněny „mezní" situace, kdy obě ramena úhlů splývají. Tehdy určují dva „výjimečné" úhly, kterým říkáme *nulový* a *plný*.



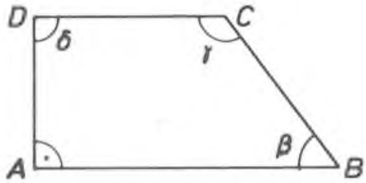
nulový úhel **plný** úhel

Plný úhel AVB (lze ho pojmenovat i AVA) obsahuje všechny body roviny. S výjimkou bodů polopřímky VA jsou to jeho vnitřní body. Naproti tomu nulový úhel AVA žádný vnitřní bod nemá.

8. Narýsujte a vybarvěte nějaký pravý úhel ACB, nějaký přímý úhel DEF a nějaký plný úhel HVQ.

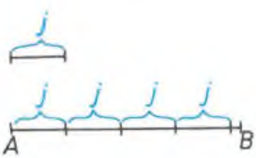
9. Narýsujte pravý úhel XVY. Pak bez kružítka narýsujte libovolný úhel β, který je „menší“ než úhel XVY, a libovolný úhel γ, který je „větší“ než úhel XVY. Nakonec kružítkem ověřte, zda jste úkol splnili správně.

10. Na průsvitný papír překreslete čtyřúhelník z obrázku. Pomocí kružítka porovnejte všechny tři pojmenované úhly a zapište je v pořadí od nejmenšího k největšímu.



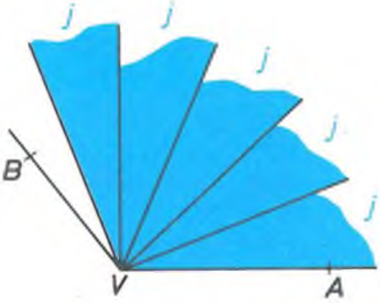
Jak *měříme* úhly?

Vzpomeňte si nejdříve, jak měříme úsečky, tj. jak zjišťujeme jejich *délky*. Vybereme nějakou jednotku j (např. 1 cm) a pak zkoumáme, kolik těchto jednotek lze do měřené úsečky AB za sebe „umístit“. Na obrázku to jsou 4 jednotky.



Budeme-li chtít úsečku AB změřit přesněji, použijeme některou menší jednotku (např. desetinu původní jednotky j) k měření „zbytku“ úsečky AB.

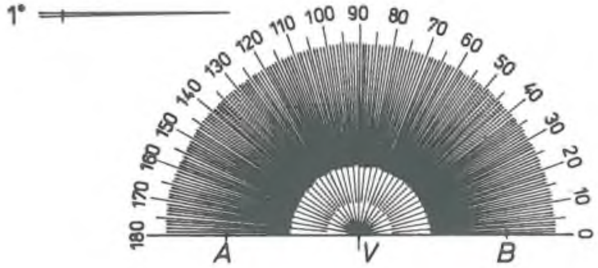
Podobným způsobem budeme měřit úhly, tzn. zjišťovat jejich *velikosti*. Na obrázku vidíte určitou „úhlovou“ jednotku j. (Zvolil ji náhodně náš malíř.) Do úhlu AVB se vešlo 5 takových jednotek. („Kousek“ úhlu však zůstal nezměřen.)



Praktický význam měření je založen na tom, že jednu dohodnutou jednotku používají společně velké skupiny lidí.

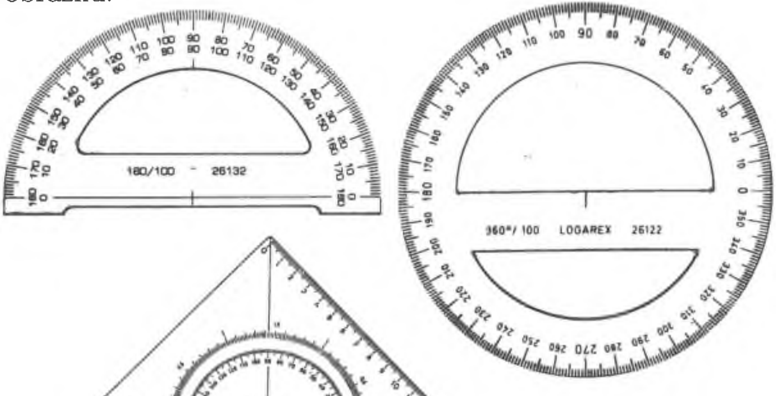
Je jasné, že taková měření úseček i úhlů jsou tím přesnější, čím menší jednotku k měření předem vybereme. (Asi víte, jaké přesnosti měření délek v různých běžných situacích potřebujeme.)

Historickým vývojem došlo k tomu, že nejobvyklejší jednotkou pro měření úhlů je 1 (úhlový) *stupeň* (1°). Tato jednotka vznikne, když přímý úhel rozdělíme na 180 shodných dílů. Každý díl pak má velikost 1°.

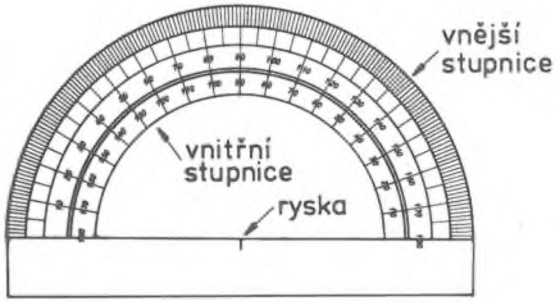


Znamená to, že přímý úhel *má velikost* 180°.
Protože přímý úhel je složen ze dvou úhlů pravých, má pravý úhel velikost 180° : 2, tj. 90°.
Snadno sami vysvětlíte, proč plný úhel má velikost 360° a nulový úhel 0°.

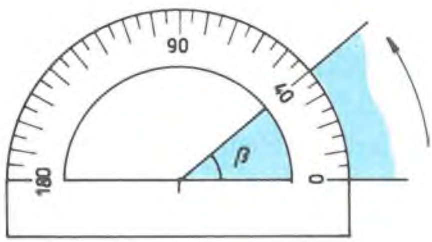
Nyní vysvětlíme, jak se úhly měří prakticky. Používáme k tomu **úhloměry**. Tyto pomůcky jsou zhotoveny v různých provedeních. Některé si prohlédněte na obrázku.



Postup měření vysvětlíme na obvyklém školním úhloměru. Jsou na něm dvě stupnice. Obě jsou „cejchovány“ od 0° do 180°. Na vnější stupnici hodnoty „rostou“ zleva doprava, na vnitřní stupnici naopak. V úhloměru je „vyříznutý“ půlkruh. Uprostřed jeho průměru je ryska.

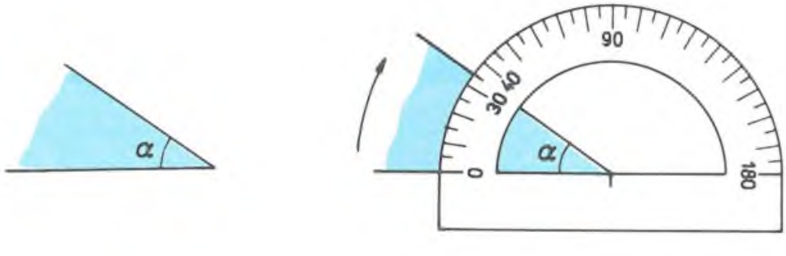


Na obrázku vidíte, jak úhloměr k měřenému úhlu správně přiložit.



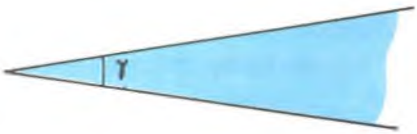
Všimněte si, že k vrcholu úhlu je přiložena ryska úhloměru a že jedno jeho rameno prochází „počátkem“ vnitřní stupnice (hodnota 0°). Velikost úhlu odečteme tam, kde druhé rameno tuto stupnici protíná.
Úhel β z obrázku má tedy velikost 40°.

Nyní určíme velikost úhlu α z dalšího obrázku. Abychom nemuseli úhloměr otáčet a číst jeho stupnici „vzhůru nohama“, použijeme tentokrát vnější stupnici.



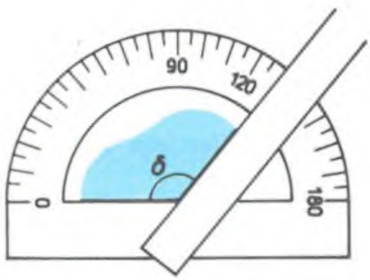
Úhel α má velikost 35°. (Někdy stručně říkáme, že úhel α měří 35°.)

Na dalším úhlu vyzkoušejte sami, že měřit úhloměrem není těžké.

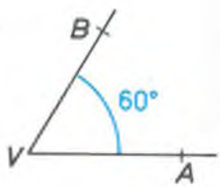


Pokud jste postupovali správně, naměřili jste velikost 17°.

Často se vám stane, že ramena úhlu, který máte změřit, jsou příliš „krátká“. Pak je buď tužkou „prodloužíte“, nebo si pomůžete přiložením pravítka.



Vysvětlíme ještě, jak výsledky měření úhlů zapisujeme.



Podobně jako $|AB|$ značí délku úsečky AB (např. $|AB| = 4\,\mathrm{cm}$), zápis $|\sphericalangle AVB|$ značí velikost úhlu AVB. Na našem obrázku

$$|\sphericalangle AVB| = 60°.$$

Je-li stejný úhel pojmenován řeckým písmenem α, píšeme obvykle

$$\alpha = 60°.$$

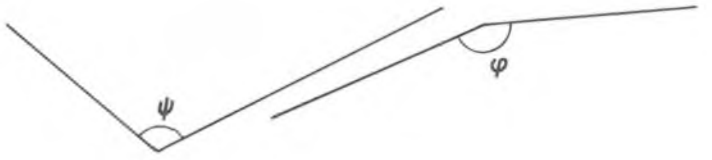
Písmeno α tedy označuje jednak úhel (množinu bodů), jednak jeho velikost. Musí však být vždy jasné, v jakém významu je řecké písmeno použito.

Vzpomeňte si, jak jsme rozhodovali o tom, zda jsou úhly shodné, pomocí jejich přenášení. Nyní můžeme „pravidlo shodnosti“ vyslovit takto:

> Jestliže dva úhly mají stejné velikosti, pak jsou shodné.
> Jestliže jsou dva úhly shodné, pak mají stejné velikosti.

Jsou-li úhly α a β shodné, můžeme psát $\alpha \cong \beta$ (shodnost útvarů) nebo také $\alpha = \beta$ (rovnost velikostí). Podobně jsou-li shodné úhly ABC a XYZ, píšeme $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle XYZ$ nebo $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle XYZ|$.

11. Změřte a zapište velikosti úhlů z obrázku:

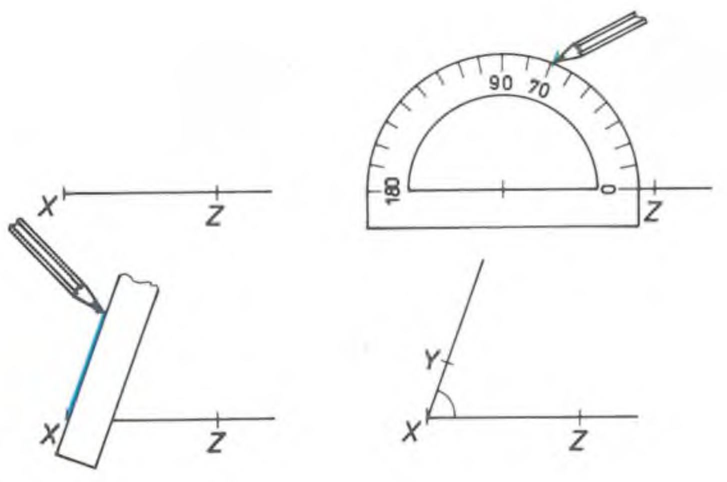


Jak narýsovat úhel dané velikosti?

?

Často potřebujeme sestrojit úhel o dané velikosti. Obvykle k tomu používáme opět úhloměr.

Jak při tom postupujeme, je patrné z následujících obrázků. Je na nich konstrukce úhlu YXZ o velikosti 70°. Začali jsme tak, že jsme nejprve zvolili polohu ramena XZ.



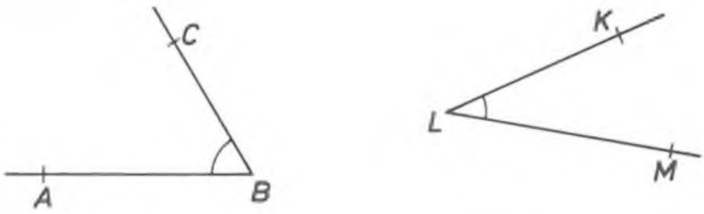
12. Narýsujte úhel α o velikosti:

a) 65° b) 13° c) 111° d) 175°

? Co jsou *ostré*, *tupé* a *nekonvexní* úhly?

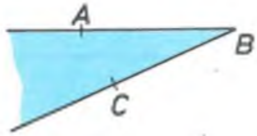
Při porovnávání úhlů pomocí kružítka jsme se naučili rozhodovat, zda jsou dva úhly shodné, nebo zda jeden z nich je „větší“ než druhý. Nyní se to naučíme symbolicky zapisovat. Mezi *velikosti* obou úhlů vepíšeme správný ze znaků $<$ nebo $>$.

$\alpha > \beta$ nebo $\beta < \alpha$



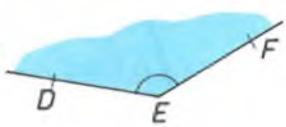
$|\sphericalangle ABC| > |\sphericalangle KLM|$ nebo $|\sphericalangle KLM| < |\sphericalangle ABC|$

Úhly podle jejich velikostí rozdělujeme do několika skupin. Porovnáváme je při tom s význačnými úhly, které již známe. Jde o *nulový* úhel, *pravý* úhel, *přímý* úhel a *plný* úhel.



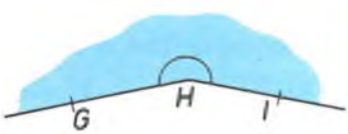
- Úhel, který je „větší“ než nulový a „menší“ než pravý, se nazývá **ostrý**.
  Na obrázku je ostrý úhel ABC:

  $$0° < |\sphericalangle ABC| < 90°$$



- Úhel, který je „větší“ než pravý a „menší“ než přímý, se nazývá **tupý**.
  Na obrázku je tupý úhel DEF:

  $$90° < |\sphericalangle DEF| < 180°$$



- Úhel, který je „větší“ než přímý a „menší“ než plný, se nazývá **nekonvexní**.
  Na obrázku je nekonvexní úhel GHI:

  $$180° < |\sphericalangle GHI| < 360°$$

13. Řekněte druh úhlu, znáte-li jeho velikost:

a) $\alpha = 56°$ b) $\beta = 112°$ c) $\gamma = 225°$

d) $\delta = 350°$ e) $\omega = 0°$ f) $\varphi = 360°$

14. Určete velikosti vyznačených neznámých úhlů z náčrtku:

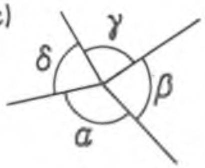
a)

$\alpha = 27°$
$\beta = ?$

b)

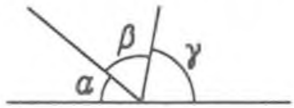
$\alpha = 57°$ $\gamma = 17°$ $\beta = ?$

c)



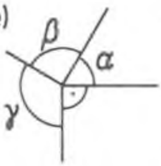
$\alpha = 120°$
$\beta = 82°$
$\gamma = 85°$
$\delta = ?$

d)



$\alpha = 2.x$ $\beta = 3.x$ $\gamma = 4.x$
$\alpha = ?$ $\beta = ?$ $\gamma = ?$

e)



$\alpha = 2.x$ $\alpha = ?$
$\beta = 3.x$ $\beta = ?$
$\gamma = 4.x$ $\gamma = ?$

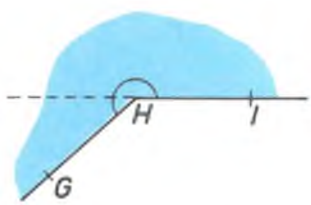
f)

$\alpha = 45°$ $\beta = 170°$ $\gamma = ?$

Jak měříme a rýsujeme nekonvexní úhly?

Obvykle „od oka“ rozeznáme, zda je daný úhel ostrý, tupý či nekonvexní. V hodinách geometrie budete většinou pracovat s ostrými a tupými úhly. S nekonvexními úhly se setkáte jen výjimečně. Přesto se nyní naučíme takové úhly měřit i rýsovat.

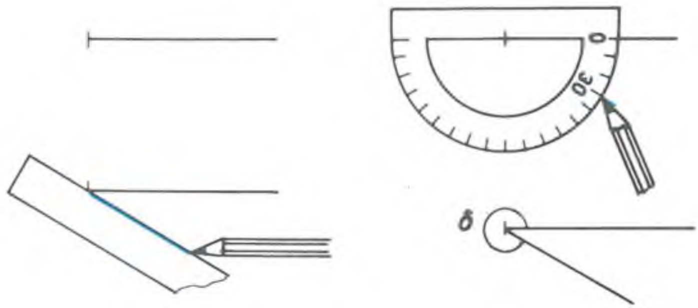
Nejprve změříme velikost nekonvexního úhlu GHI z následujícího obrázku:



Měřený úhel rozdělíme myšlenou polopřímkou na dva úhly, z nichž jeden bude přímý. Velikost „zbytku“ pak odečteme na vnitřní stupnici úhloměru.

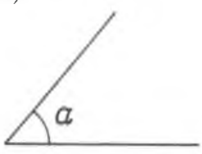
Naměřili jsme 42°. Protože přímý úhel měří 180°, má úhel GHI velikost $180° + 42°$, tedy 222°.

Na dalších obrázcích je zachycen postup při rýsování úhlu δ o velikosti 330°. Využijeme při tom buď rovnost $330° = 180° + 150°$, nebo $330° = 360° - 30°$.

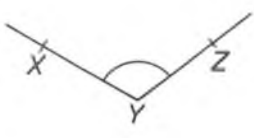


15. Změřte a zapište velikost úhlu z obrázku:

a)



b)

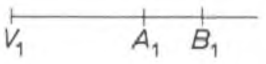


c)

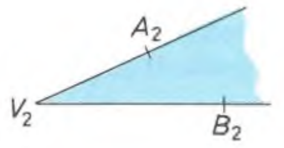
16. Narýsujte úhel KLM o velikosti:

a) 270° b) 200° c) 315°

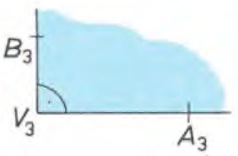
Abyste si názvy všech druhů úhlů dobře zapamatovali, prohlédněte si následující přehled:



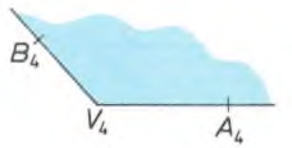
$|\sphericalangle A_1V_1B_1| = 0°$
nulový úhel



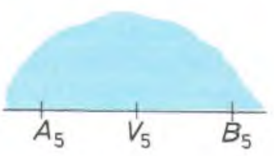
$0° < |\sphericalangle A_2V_2B_2| < 90°$
ostrý úhel



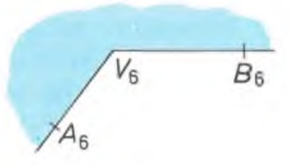
$|\sphericalangle A_3V_3B_3| = 90°$
pravý úhel



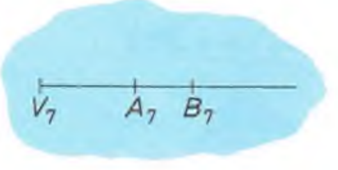
$90° < |\sphericalangle A_4V_4B_4| < 180°$
tupý úhel



$|\sphericalangle A_5V_5B_5| = 180°$
přímý úhel



$180° < |\sphericalangle A_6V_6B_6| < 360°$
nekonvexní úhel



$|\sphericalangle A_7V_7B_7| = 360°$
plný úhel

?

V jakých dalších jednotkách se měří úhly?

Zatím umíme vyjadřovat velikosti úhlů ve *stupních*. K „jemnějšímu" měření slouží jednotky menší – úhlová **minuta** a úhlová **vteřina**.

1 minuta (značka $1'$) je šedesátkrát menší než 1 stupeň. 1 vteřina (značka $1''$) je šedesátkrát menší než 1 minuta. Platí tedy převodní vztahy:

$1^\circ = 60'$ (1 stupeň je 60 minut)

$1' = 60''$ (1 minuta je 60 vteřin)

Má-li například úhel AVB velikost 40 stupňů, 12 minut a 45 vteřin, zapíšeme to takto:

$$|\sphericalangle AVB| = 40^\circ 12' 45''$$

Měření úhlů v menších jednotkách se používá např. při výrobě „mikroskopických" součástek, které je třeba zhotovovat s „obrovskou" přesností, nebo při astronomických pozorováních a výpočtech. My v hodinách matematiky nemůžeme s takovou přesností (na minuty a vteřiny) úhly ani měřit, ani rýsovat.

Měření úhlů ve stupních, minutách a vteřinách i převodní vztahy mezi těmito jednotkami vycházejí – stejně jako měření času a převádění jeho jednotek – z *šedesátkové* soustavy, kterou používali již staří Babyloňané. Proto i převody jednotek velikosti úhlu provádíme podobně jako převádění jednotek času, které už umíte ze základní školy.

Počítáme například:

$$13^\circ 32' + 2^\circ 50' = 15^\circ 82' = 15^\circ (60 + 22)' = 16^\circ 22'$$

$$13^\circ 32' - 2^\circ 50' = 12^\circ (60 + 32)' - 2^\circ 50' = 12^\circ 92' - 2^\circ 50' = 10^\circ 42'$$

$$13^\circ 32' \cdot 3 = 39^\circ 96' = 40^\circ 36'$$

$$13^\circ 32' : 4 = (12 + 1)^\circ 32' : 4 = 12^\circ 92' : 4 = 3^\circ 23'$$

17. Vyjádřete v minutách:

a) 2°, 6°, 15°, 21°, 50°, 90°

b) $1^\circ 30'$, $5^\circ 20'$, $7^\circ 5'$, $10^\circ 10'$

18. Vyjádřete

a) $120'$, $180'$, $420'$, $3\,600'$, $5\,400'$ ve stupních,

b) $100'$, $190'$, $250'$, $500'$, $1\,000'$ ve stupních a minutách.

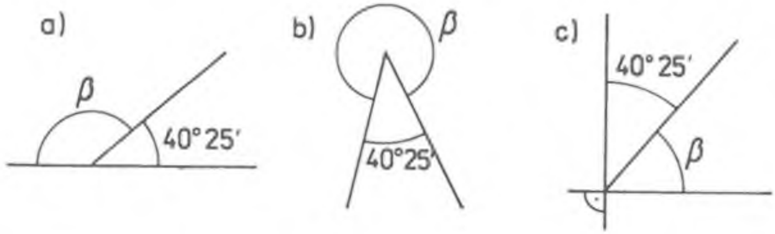
19. Vypočtěte:

a) $27°27' + 52°52'$ b) $52°27' - 27°52'$

c) $27°27' \cdot 3$ d) $40° : 3$

e) $27°27'27'' : 3$ f) $27°27'27'' \cdot 3$

20. Určete velikost úhlu β z obrázku:

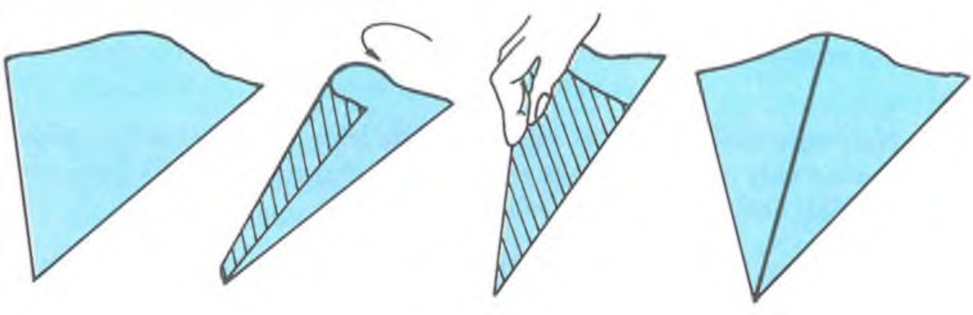


∗**21.** Vypočtěte:

a) $10° : 3$ b) $10° : 4$ c) $10° : 8$ d) $10° : 24$

Co je *osa úhlu* a jak ji sestrojíme?

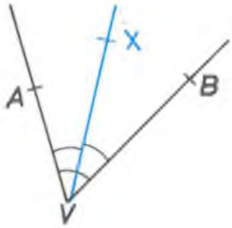
Na kus volného papíru narýsujte libovolný úhel a pak ho vystřihněte. Vystřižený úhel přeložte tak, aby se jeho ramena kryla. V místě přehybu vznikne rýha. Vyznačuje takovou polopřímku, která vystřižený úhel „půlí“, tzn. dělí ho na dva shodné úhly. Říkáme jí *osa* daného úhlu.



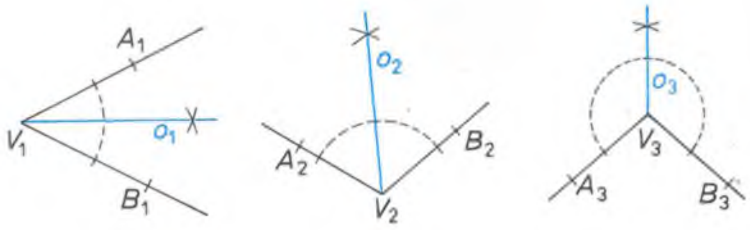
Osa úhlu AVB je polopřímka s počátkem ve vrcholu V, která úhel AVB dělí na dva úhly o stejné velikosti.

Je to tedy polopřímka VX ležící v úhlu AVB taková, že platí

$$|\sphericalangle AVX| = |\sphericalangle XVB| = |\sphericalangle AVB| : 2.$$

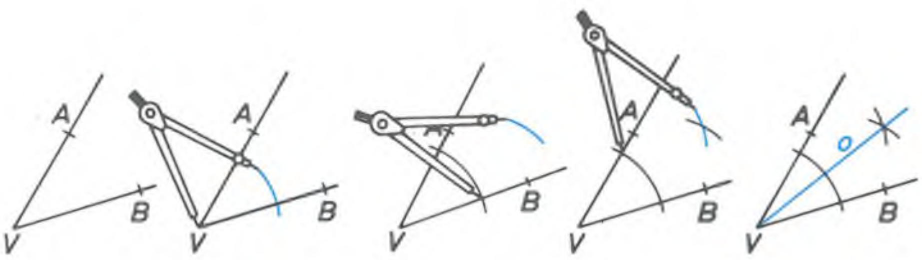


Prohlédněte si, jak vypadá osa ostrého, tupého a nekonvexního úhlu:



I když je osa úhlu polopřímka, bývá zvykem značit ji jedním malým písmenem o. Je-li os několik, rozlišujeme je indexy (jako na obrázku).

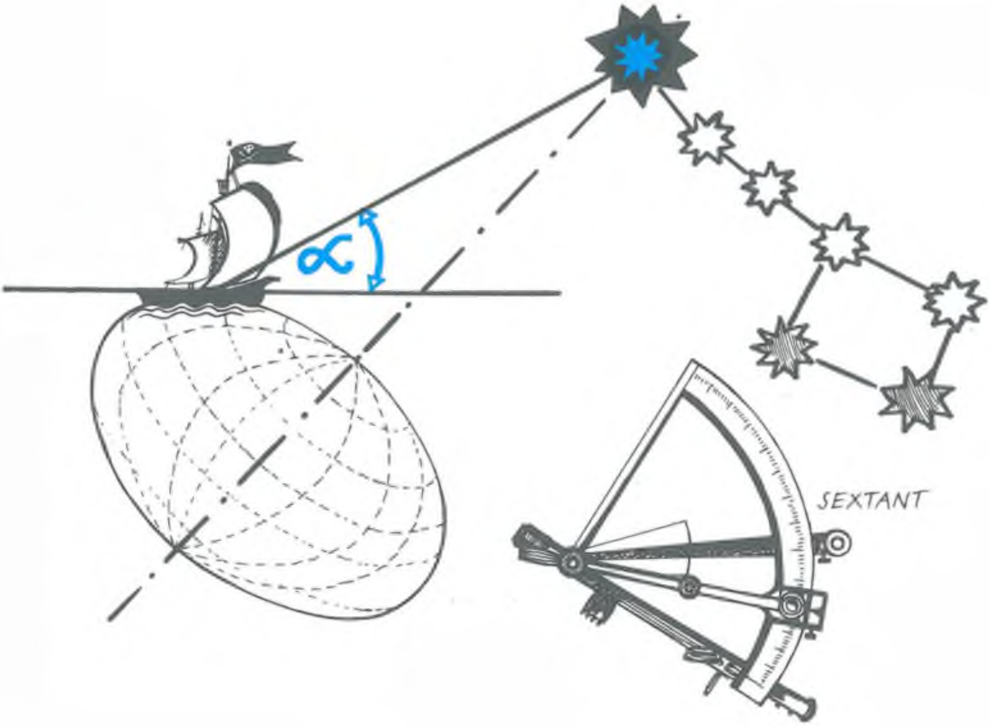
Konstrukce osy úhlu je patrná z následujících obrázků.



22. Narýsujte úhel ω velikosti 160°. Sestrojte jeho osu o a označte vzniklé shodné úhly α a β. Sestrojte osy o_1, o_2 úhlů α a β. Na kolik částí jste rozdělili úhel ω? Jaké mají velikosti?

23. Vysvětlete, jak bez úhloměru (tj. jen pomocí pravítka a kružítka) narýsovat úhel o velikosti 45°.

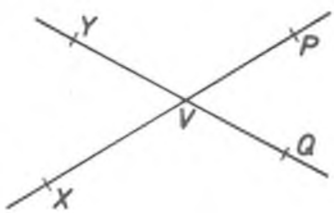
Měření úhlů v minulosti úzce souviselo s hvězdářstvím a mořeplavectvím. Hvězdáři pomocí úhlů určovali polohu hvězd na obloze, mořeplavci zase svou polohu na moři. Měřili při tom úhel, pod kterým nad obzorem viděli některou z hvězd, nejčastěji Polárku. Přístroj, který k měření používali, se nazývá *sextant*.



CVIČENÍ 7

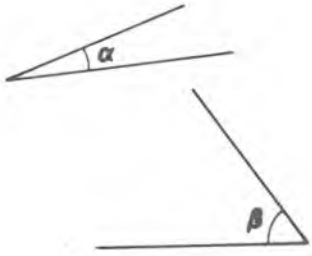
1. Narýsujte dvě polopřímky se společným počátkem V. Různými barvami vybarvěte oba úhly, které tyto polopřímky určují.

2. Kolik úhlů s vrcholem V je na obrázku? Načrtněte si podobný obrázek a každý úhel vyznačte obloučkem.



3. Narýsujte libovolný ostrý úhel XYZ a polopřímku PQ. Přeneste úhel XYZ tak, aby bod P byl vrcholem a polopřímka PQ jedním ramenem výsledného úhlu.

4. Narýsujte dva ostré úhly α, β podobně jako na obrázku. Pak narýsujte tři takové trojúhelníky, aby každý z nich měl jeden vnitřní úhel shodný s úhlem α a druhý vnitřní úhel shodný s úhlem β. Pomocí kružítka porovnejte mezi sebou třetí vnitřní úhly těchto trojúhelníků.



5. Narýsujte libovolný úhel ω. Pak se pokuste „odhadem" narýsovat další čtyři úhly α, β, γ a δ, které budou shodné s úhlem ω. Nakonec se kružítkem přesvědčte, nakolik se vám to podařilo.

□**6.** Vyjmenujte příklady ze svého okolí, kde se setkáváte s pravým úhlem.

□**7.** Které úhly jsou ostré a které tupé? Uveďte příklady takových úhlů ze svého okolí.

8. Narýsujte dva úhly α a β, jejichž průnikem je jedno společné rameno, aby jejich sjednocením byl

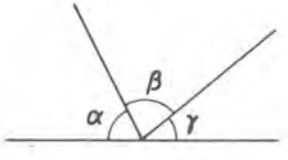
a) ostrý úhel, b) tupý úhel.

Zmíněné sjednocení vybarvěte.

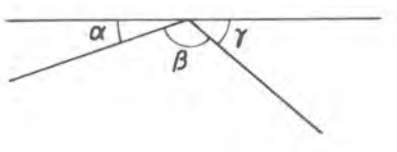
***9.** Narýsujte tři pravé úhly s různými vrcholy tak, aby každé dva z nich měly právě jeden společný bod.

10. Změřte a zapište velikosti všech tří úhlů α, β a γ z obrázku. Pak je sečtěte, a tak zkontrolujte správnost svého měření.

a)



b)



11. Narýsujte libovolný úhel o velikosti:

a) 70° b) 80° c) 90°
d) 100° e) 110° f) 120°

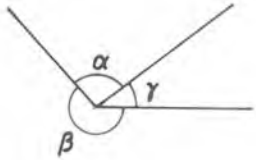
12. Narýsujte ostrý úhel α. Pak „odhadem" narýsujte úhel β tak, aby byl

a) dvakrát, b) třikrát, c) čtyřikrát

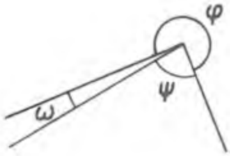
větší než úhel α. Přesnost odhadu zkontrolujte měřením a výpočtem.

13. Změřte velikosti všech tří označených úhlů z obrázku a určete jejich součet.

a)



b)



14. Narýsujte úhel BVC o velikosti:

a) 50° b) 150° c) 250° d) 350°

15. Narýsujte dvě různoběžky a, b s průsečíkem V. Přímky a, b rozdělí rovinu na čtyři úhly s vrcholem V. Označte je α, β, γ a δ. Změřte jejich velikosti a vypočtěte součet $\alpha + \beta + \gamma + \delta$.

16. Vypočtěte:

a) $82°40' + 65°50'$ b) $82°40' - 65°50'$

17. Úhel δ je pětkrát větší než úhel α. Určete jeho velikost, jestliže platí:

a) $\alpha = 17°$ b) $\alpha = 5°15'$ c) $\alpha = 28°30'$ d) $\alpha = 54°47'$

18. Úhel ω je čtyřikrát menší než úhel γ. Určete jeho velikost, jestliže platí:

a) $\gamma = 94°20'$ b) $\gamma = 123°52'$

■ **19.** Narýsujte zvětšená tiskací písmena velké abecedy V a X. Sestrojte osy všech úhlů, které každé z písmen nebo jeho část určují. Kolik os to je? Na kolika různých přímkách leží?

20. Narýsujte s použitím úhloměru úhel o velikosti 148° a pak ho už bez úhloměru rozdělte na čtyři shodné úhly.

21. Narýsujte přímý úhel KOL a sestrojte jeho osu OJ. Jaký úhel svírají polopřímky JO a KO?

22. Pomocí pravítka a kružítka narýsujte do jednoho obrázku úhly 90°, 45° a 22°30'.

23. Určete, o jaký úhel se posune velká ručička hodin za:

a) 1 minutu b) 20 minut c) 55 minut

24. Určete, o jaký úhel se posune malá ručička hodin za:

a) 1 hodinu b) půl hodiny c) 10 minut
d) 3 hodiny e) 5 hodin f) 7 hodin

25. Jaký úhel svírají hodinové ručičky

a) o půl jedné, b) o půl jedenácté, c) v 5 hodin 20 minut?
(Uveďte velikost menšího z obou sevřených úhlů.)

10 DVOJICE PŘÍMEK

V této kapitole zopakujeme, které přímky se nazývají *rovnoběžky*, které *různoběžky*, a jak se určují některé *vzdálenosti* bodů a přímek.

Jakou vzájemnou polohu mohou mít dvě přímky v rovině?

Dvojice přímek p, q v rovině můžeme třídit podle toho, kolik mají tyto dvě přímky *společných bodů.*

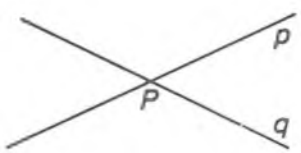
Jestliže přímky p, q nemají *žádný společný bod*, říkáme jim **rovnoběžné přímky** neboli **rovnoběžky**.
Průnikem dvou rovnoběžných přímek je tedy prázdná množina: $p \cap q = \emptyset$

Skutečnost, že přímky p a q jsou rovnoběžné, vyznačíme v náčrtku dvojím krátkým „rovnoběžným" přeškrtnutím obou přímek a zapíšeme pomocí znaku rovnoběžnosti $\parallel$ takto: $p \parallel q$

Za zvláštní případ rovnoběžnosti považujeme situaci, kdy obě dané přímky p, q splynou. Tehdy každý bod přímky p leží na přímce q i každý bod přímky q leží na přímce p. Znamená to, že platí: $p \cap q = p = q$

V takovém případě říkáme, že přímky p, q jsou **totožné** rovnoběžky.

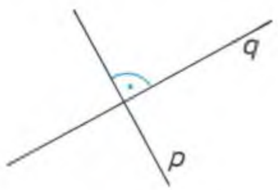
Chceme-li zdůraznit, že dvě rovnoběžky nejsou totožné, mluvíme o *různých* rovnoběžkách.



Mají-li dvě přímky *jediný společný bod*, říkáme jim **různoběžné přímky** neboli **různoběžky**. Společný bod P různoběžek p a q se nazývá jejich **průsečík**. Platí: $p \cap q = \{P\}$

Skutečnost, že přímky p a q jsou různoběžné, zapíšeme pomocí škrtnutého znaku rovnoběžnosti $\nparallel$ takto: $p \nparallel q$

Uvědomte si, že jsme v našem rozboru vyčerpali všechny možnosti. Mají-li totiž dvě přímky dva různé společné body, jde o totožné přímky.



Zvláštním případem různoběžných přímek jsou **přímky kolmé** neboli **kolmice**. Jsou to přímky, které svírají *pravý úhel.* Rýsujeme je obvykle pomocí pravítka s ryskou. Vyznačení pravého úhlu obloukem s tečkou již znáte.

Jak sestrojíme *rovnoběžku* procházející daným bodem?

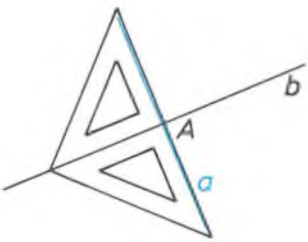
V rovině je dána přímka b a bod A. Máme sestrojit přímku a, která bodem A prochází a je rovnoběžná s přímkou b.

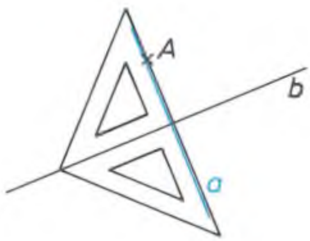
Konstrukce je patrná z obrázků. Na levém je znázorněna situace, kdy bod A leží na přímce b. Jestliže bod A na přímce b neleží, provádí se konstrukce dvěma pravítky, z nichž aspoň jedno je trojúhelníkové.

Jak sestrojíme *kolmici* procházející daným bodem?

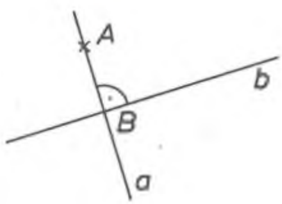
V rovině je dána přímka b a bod A. Máme sestrojit přímku a, která bodem A prochází a je kolmá k přímce b.

Opět si připomeňte konstrukci podle obrázků. Na nich je rozlišeno, zda bod A leží na přímce b, nebo na ní neleží.





Průsečík B přímek a, b se pak nazývá **pata kolmice** vedené z bodu A k přímce b.



1. Narýsujte libovolnou přímku a. Sestrojte

a) přímku b rovnoběžnou s a, která není s a totožná,

b) přímku c různoběžnou s a, která není k a kolmá,

c) přímku d kolmou k a.

2. Narýsujte přímku p, na ní zvolte bod A a mimo ni bod B. Bodem A veďte kolmici q k přímce p a bodem B rovnoběžku r s přímkou p. Zapište symbolicky vzájemnou polohu přímek

   a) p a q, b) p a r, c) q a r.

□ 3. Je dána přímka x a bod X tak, že $X \notin x$. Určete, kolik lze vést bodem X k přímce x

   a) rovnoběžek, b) různoběžek, c) kolmic.

4. Načrtněte si tři vodorovné a tři svislé přímky. Kolik dvojic

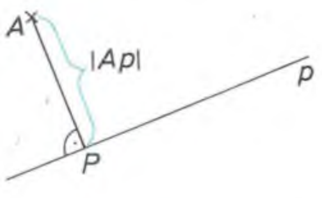
   a) rovnoběžných přímek b) kolmých přímek

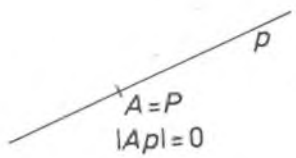
   je na vašem náčrtku?

? Jak určujeme *vzdálenosti* bodů a přímek?

Vzdálenost dvou různých bodů A, B je délka úsečky AB. Jestliže jsou body A a B totožné, pak je jejich vzdálenost rovna 0 (v jakýchkoli jednotkách délky).

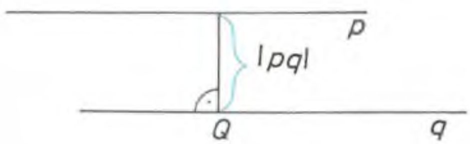
Vzdálenost bodu A **od přímky** p je vzdálenost bodu A od paty P kolmice vedené z bodu A k přímce p. Označíme ji $|Ap|$. Platí $|Ap| = |AP|$. Jestliže bod A leží na přímce p, je $A = P$. Proto je vzdálenost bodu A od přímky p v tomto případě rovna nule.





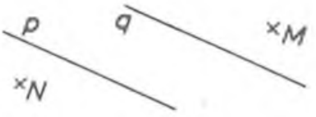
Je zřejmé, že úsečka AP je nejkratší ze všech úseček AX, kde $X \in p$.

O vzdálenosti dvou přímek p, q hovoříme zpravidla jen tehdy, jsou-li přímky p a q *rovnoběžky*. Pak je jejich vzdálenost rovna vzdálenosti libovolného bodu $Q \in q$ od přímky p. (Je tedy jedno, který bod Q na přímce q zvolíme.) Vzdálenost dvou rovnoběžných přímek p, q značíme $|pq|$.



Vidíme, že vzdálenost dvou rovnoběžek je délka nejkratší úsečky XY, kde $X \in p$ a $Y \in q$. Jsou-li p a q totožné rovnoběžky, je $|pq| = 0$.

5. Na obrázku změřte vzdálenost
a) bodů M a N,
b) bodu N od přímky p,
c) rovnoběžek p a q.
Zjištěné výsledky zapište.

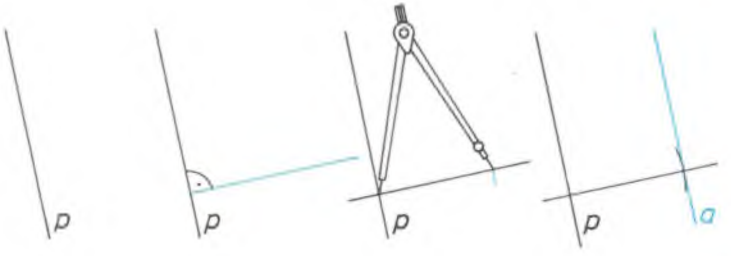


6. Sestrojte bod A, který je od dané přímky q vzdálen 2 cm. Kolik takových bodů můžete sestrojit? Jakou množinu všechny takové body vyplní?

7. Sestrojte bod A a dvě různé přímky p_1, p_2, jejichž vzdálenost od bodu A je 3 cm. Kolik takových přímek existuje?

Jak sestrojíme rovnoběžku v dané vzdálenosti?

Připomeňte si podle obrázků, jak sestrojíme k dané přímce p rovnoběžku q takovou, aby vzdálenost přímek p a q byla 1,5 cm.



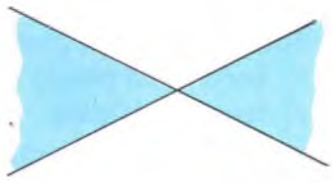
8. Narýsujte rovnoběžky e, f, jejichž vzdálenost je 3,5 cm.

9. Narýsujte rovnoběžky a, b, jejichž vzdálenost je 2 cm. Zvolte na přímce a libovolný bod A a pak na přímce b najděte bod B, jehož vzdálenost od bodu A je 3 cm. Kolik takových bodů B existuje?

10. Vzdálenost rovnoběžek a, b je 3 cm, vzdálenost rovnoběžek b, c je 2 cm. Jaká je vzdálenost rovnoběžek a, c?

11 DVOJICE ÚHLŮ

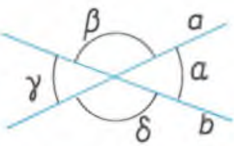
Narýsujeme-li dvě nebo více přímek, objeví se nám často na obrázku několik úhlů. Některé z nich vytvářejí zajímavé dvojice, jako například dva „modré" úhly na obrázku vpravo. Nyní se naučíme takové úhly rozpoznávat a zkoumat jejich vlastnosti.



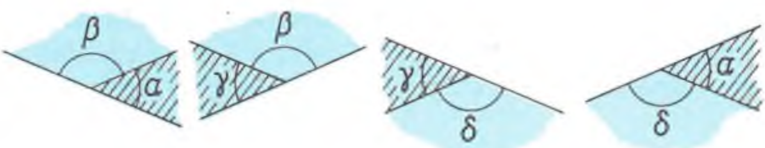
V celé kapitole nebudeme uvažovat o *nekonvexních* úhlech.

? Co jsou *vedlejší* a co *vrcholové* úhly?

Dvě různoběžné přímky a, b rozdělí rovinu na čtyři úhly:



Můžeme mezi nimi najít čtyři dvojice, kterým říkáme *vedlejší úhly*:

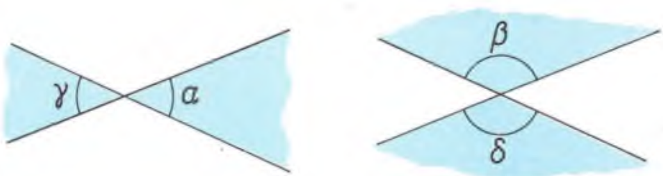


Vedlejší úhly mají společný vrchol a jedno rameno. Zbývající ramena obou úhlů tvoří dvě navzájem opačné polopřímky.

Vedlejší úhly vzniknou rozdělením přímého úhlu na dvě části. Proto je součet jejich velikostí roven 180°:

$$\alpha + \beta = 180° \qquad \beta + \gamma = 180°\,, \quad \gamma + \delta = 180°\,, \quad \delta + \alpha = 180°$$

Na stejném obrázku, kde jsme hledali vedlejší úhly, najdeme i dvě dvojice úhlů, kterým říkáme *vrcholové*:



Vrcholové úhly mají společný vrchol. Ramena jednoho z nich jsou opačné polopřímky k ramenům druhého úhlu. Každé dva vrcholové úhly jsou shodné:

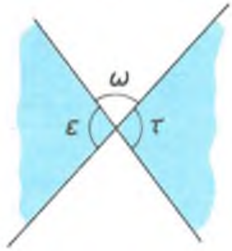
$$\alpha \cong \gamma, \qquad \beta \cong \delta$$

Vysvětlíme to pomocí obrázku, na kterém je kromě vrcholových úhlů ε a τ vyznačen i úhel ω. Tento úhel je vedlejší jak k úhlu ε, tak k úhlu τ. Proto platí:

$$\varepsilon + \omega = 180°$$

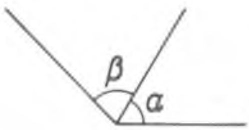
$$\tau + \omega = 180°$$

Odtud vidíme, že $\varepsilon = \tau$.

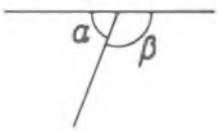


□ **1.** Jsou úhly α a β vedlejší? Odpověď zdůvodněte.

a)



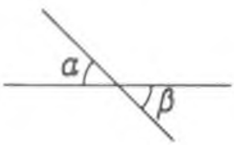
b)



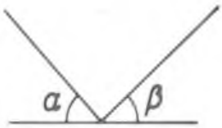
c)

□ **2.** Jsou úhly α a β vrcholové? Odpověď zdůvodněte.

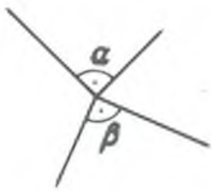
a)



b)

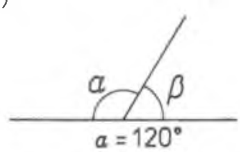


c)

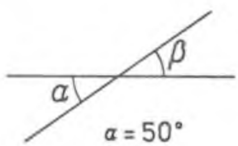


3. Určete velikost úhlu β:

a)



b)

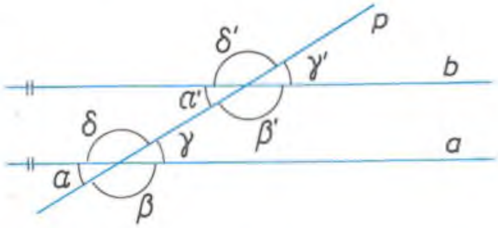


□ **4.** Co platí o druhém úhlu z dvojice vedlejších úhlů, je-li jeden z nich

a) pravý, b) tupý?

Co jsou *souhlasné* a *střídavé* úhly?

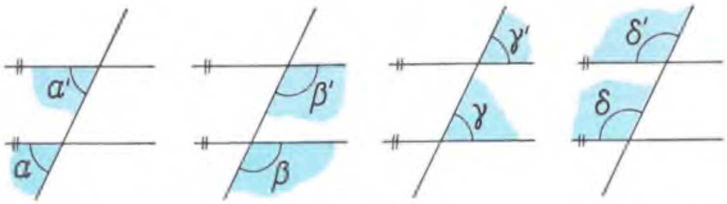
Podle obrázku narýsujte dvě různé rovnoběžky a, b a přímku p, která je s nimi různoběžná. Přímce p se říká ***příčka*** rovnoběžek a, b. Všechny úhly, které tyto tři přímky určují, označte jako na obrázku:



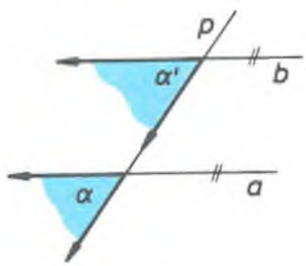
Pomocí kružítka se přesvědčte o shodnostech:

$$\alpha \cong \alpha', \qquad \beta \cong \beta', \qquad \gamma \cong \gamma', \qquad \delta \cong \delta'$$

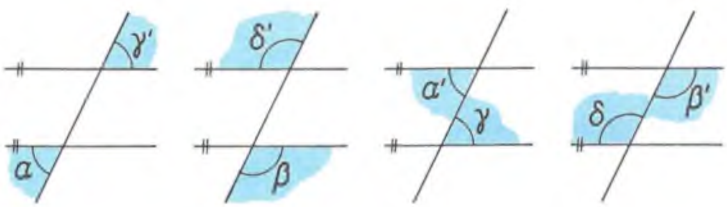
Shodné úhly v každé z těchto dvojic se nazývají **souhlasné**. Všechny čtyři dvojice souhlasných úhlů jsou na dalších obrázcích vyznačeny modře.



Všimněte si, že každé dva souhlasné úhly leží „na téže straně“ od příčky p. Také jejich ramena na příčce p směřují „stejným směrem“.



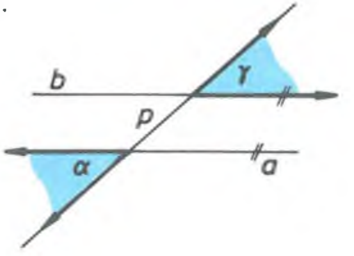
Na našem obrázku příčky dvou rovnoběžek najdeme ještě další čtyři dvojice shodných úhlů:



$$\alpha \cong \gamma', \qquad \beta \cong \delta', \qquad \gamma \cong \alpha', \qquad \delta \cong \beta'$$

Úhlům v takových dvojicích říkáme **střídavé**.

Všimněte si, že každé dva střídavé úhly leží „na různých stranách“ od příčky p. Navíc jejich ramena na příčce p směřují buď „proti sobě“, nebo „od sebe“, tedy „opačně“. (To platí i o ramenech na rovnoběžkách a, b.)



Vysvětlíme, proč střídavé úhly φ a μ jsou skutečně shodné. K tomu nám pomůže úhel ψ.

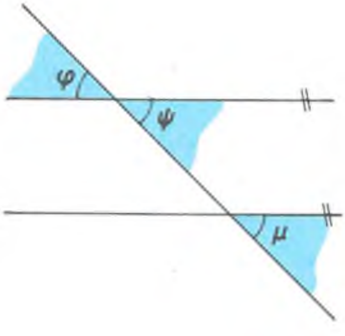
Protože úhly φ a ψ jsou vrcholové, platí

$$\varphi \cong \psi.$$

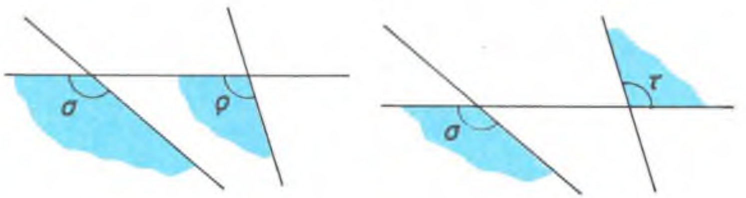
Protože úhly ψ a μ jsou souhlasné, platí

$$\psi \cong \mu.$$

Proto také platí $\varphi \cong \mu$.

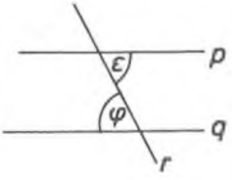


O souhlasných a střídavých úhlech jsme dosud hovořili jen v situacích, kdy příčka p protínala dvě *rovnoběžky*. Méně často se mluví o souhlasných a střídavých úhlech, když příčka protíná dvě *různoběžky*.

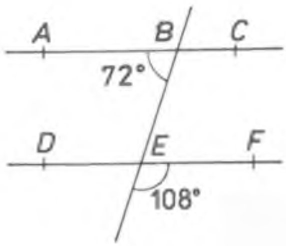


Tehdy jak střídavé úhly, tak souhlasné úhly mají *různé* velikosti. (Přesvědčte se na obrázku, že nejsou shodné ani souhlasné úhly σ a ϱ, ani střídavé úhly σ a τ.)

Odtud plyne důležitý závěr. Pokud přímky p, q, r z obrázku vpravo jsou takové, že vyznačené střídavé úhly ε a φ jsou shodné, pak jsou přímky p a q rovnoběžné. Podobný závěr plyne i ze shodnosti úhlů souhlasných.



Zmíněným způsobem často rozhodujeme o rovnoběžnosti přímek, o kterých dopředu nevíme, jakou mají vzájemnou polohu. Jsou například přímky AC a DF rovnoběžné? Dva úhly, jejichž velikosti známe, nejsou ani souhlasné, ani střídavé. Úhel ABE je však střídavý s úhlem BEF, jehož velikost umíme vypočítat:

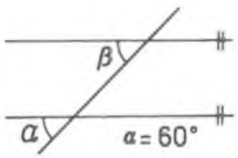


$$|\sphericalangle BEF| = 180° - 108° = 72°$$

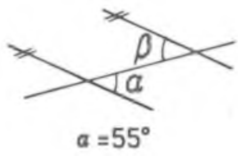
Protože zmíněné střídavé úhly jsou shodné, jsou přímky AC a DF skutečně rovnoběžné.

5. Určete velikost úhlu β:

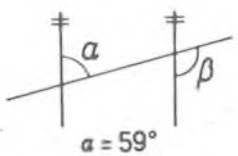
a)



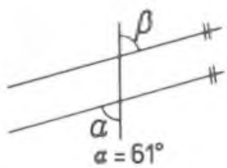
b)



c)

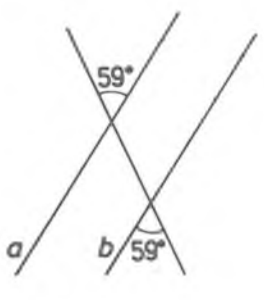


d)

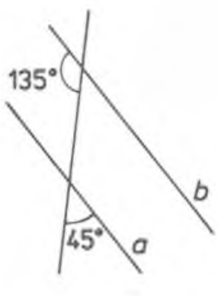


6. Rozhodněte, zda přímky a, b z obrázku jsou rovnoběžné:

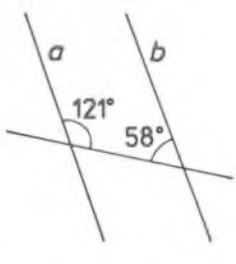
a)



b)



c)

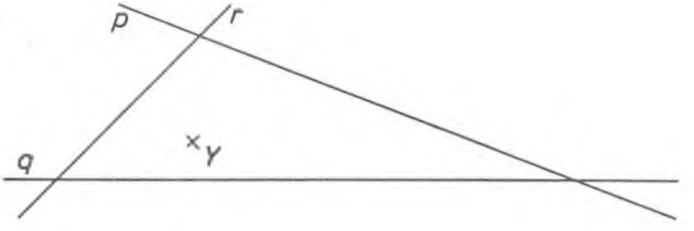


CVIČENÍ 8

1. Narýsujte přímku p, zvolte bod $A \in p$ a bod $B \notin p$. Každým z bodů A, B veďte kolmici k přímce p. Jakou vzájemnou polohu mají tyto kolmice?

2. Narýsujte trojúhelník RST a každým jeho vrcholem veďte rovnoběžku s protější stranou. Silně vytáhněte útvar, který je těmito rovnoběžkami omezen. Jaký útvar vznikne?

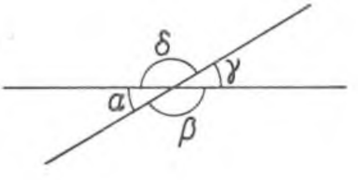
3. Zvolte bod Y a přímky p, q a r podobně jako na obrázku. Určete vzdálenosti bodu Y od přímek p, q, r.



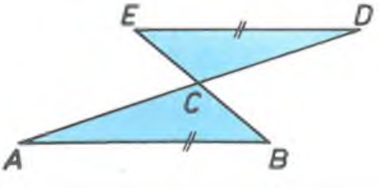
4. Narýsujte rovnoběžky a, b, c, d tak, aby vzdálenost přímek a, d byla 5 cm a přímky b, c ležely v pásu mezi přímkami a, d.

5. Narýsujte tři různé přímky p, q, r procházející bodem P. Na přímce p zvolte body A, B, na přímce q body C, D a na přímce q body E, F tak, aby body zvolené na téže přímce ležely uvnitř opačných polopřímek s počátkem P. Zapište všechny dvojice vrcholových úhlů na obrázku.

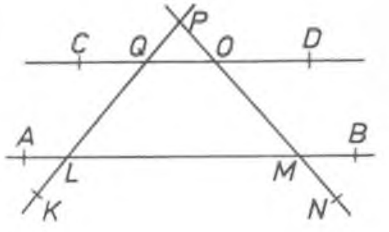
6. Vypočtěte velikosti zbývajících úhlů z obrázku, jestliže úhel α má velikost $30°40'$.



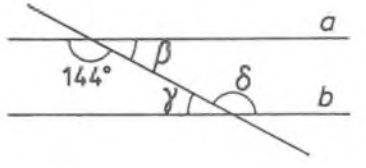
7. Zapište dvojice shodných „vnitřních“ úhlů útvaru $ABCDECA$ na obrázku. Přímky AB a ED jsou rovnoběžné.



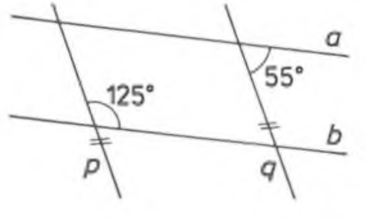
8. Na obrázku jsou trojúhelníky PQO a PLM. Přímky QO a LM jsou rovnoběžné. Zapište všechny dvojice shodných souhlasných úhlů.



9. Určete velikosti úhlů β, γ a δ vyznačených na obrázku. Přímky a, b jsou rovnoběžné.



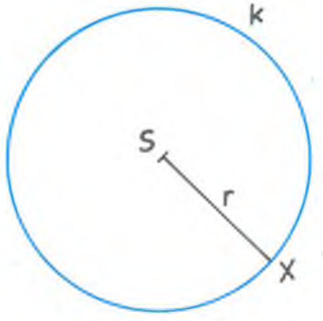
10. Přímky p, q z obrázku jsou rovnoběžné. Pomocí vyznačených úhlů zjistěte, zda jsou rovnoběžné přímky a a b.



12 KRUŽNICE, KRUH

Co víme o *kružnici*?

Zvolíme v rovině bod S a ptáme se, kde leží ty body roviny, které mají od bodu S stejnou vzdálenost, řekněme 2 cm. Dobře víte, že všechny takové body vyplní „uzavřenou čáru“, které říkáme *kružnice*.

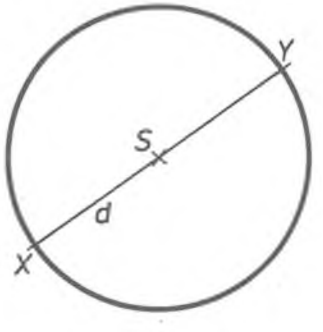


Kružnice je množinou všech bodů v rovině, které mají od daného bodu S stejnou vzdálenost. Bod S se nazývá **střed** kružnice. Vzdálenost libovolného bodu kružnice od jejího středu S se nazývá **poloměr** kružnice.

Kružnici označujeme malým písmenem, nejčastěji k. Její poloměr se obvykle značí písmenem r. Zápis $k(S; r)$ znamená, že máme na mysli kružnici k se středem S a poloměrem r. Na obrázku je tedy kružnice $k(S; 2\,\mathrm{cm})$.

Poloměr se latinsky řekne *radius*.

Název *poloměr* užíváme ve dvojím významu: Zvolíme-li na kružnici libovolný bod X a sestrojíme-li úsečku SX, nazývá se tato *úsečka* poloměr kružnice k. Stejně tak však slovo poloměr znamená i *délku* této úsečky.



Podobně i slovo *průměr* kružnice má dva významy. Zvolíme-li na kružnici k dva body X, Y tak, aby úsečka XY procházela středem S této kružnice, nazýváme úsečku XY **průměrem** kružnice k. Délka této úsečky se však také nazývá průměr kružnice a značí se písmenem d: $d = |XY|$

Průměr se latinsky řekne *diametr*.

Je zřejmé, že pro poloměr r a průměr d téže kružnice platí:

$$\boxed{d = 2 \cdot r} \qquad \boxed{r = d : 2}$$

□ **1.** Kružnice je množina bodů. Patří do ní i její střed? Vysvětlete.

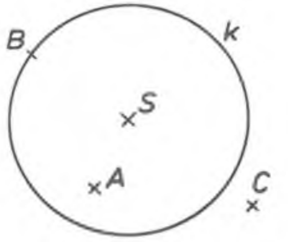
□ **2.** Přečtěte, jak jsou zadány kružnice k, l, m:
$k(S;\ r = 3\,\mathrm{cm})$, $\quad l(A; 5\,\mathrm{cm})$, $\quad m(O; 2{,}5\,\mathrm{cm})$

3. Podle obrázku vyberte pravdivé zápisy:

a) $A \in k$ b) $A \notin k$

c) $B \in k$ d) $B \notin k$

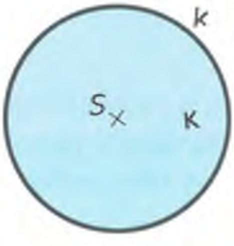
e) $C \in k$ f) $C \notin k$



4. Narýsujte kružnici $l(O;\ r = 3\,\mathrm{cm})$. Vyznačte jeden její poloměr OX a jeden průměr YZ. Zvolte body K, L, M, pro které platí: $|KO| = 3\,\mathrm{cm}$, $|LO| < 3\,\mathrm{cm}$, $|MO| > 3\,\mathrm{cm}$

? Co víme o *kruhu*?

Sestrojme v rovině libovolnou kružnici k. Body roviny, které na kružnici k neleží, můžeme rozdělit do dvou skupin. Do první skupiny dáme takové body, které leží „uvnitř" kružnice k, do druhé pak ty, které leží „vně" kružnice k.

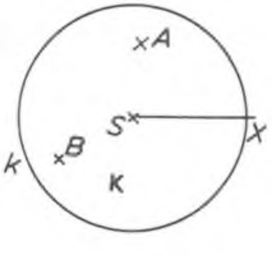


Všechny body z první skupiny mají společnou vlastnost: jejich vzdálenosti od středu S kružnice k jsou *menší* než poloměr této kružnice. Naopak společnou vlastností všech bodů ze druhé skupiny je to, že jejich vzdálenosti od středu S jsou *větší* než poloměr kružnice.

Přidáme-li ke všem bodům z první skupiny ještě všechny body kružnice k, dostaneme geometrický útvar, kterému říkáme *kruh*.

Kruh je množina všech bodů roviny, které mají od daného bodu S vzdálenost menší nebo rovnou dané vzdálenosti, která se nazývá **poloměr** kruhu. Bod S se pak jmenuje **střed** kruhu.

Kruh značíme velkým písmenem, například K. Zápis $\mathsf{K}(S; r)$ znamená, že jde o kruh K se středem S a poloměrem r.

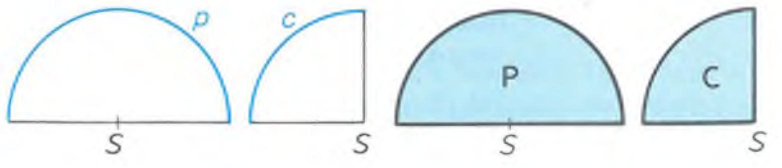


Je-li vzdálenost bodu X od středu S kruhu $\mathsf{K}(S; r)$ *rovna* poloměru r, leží bod X na kružnici k, která kruh K ohraničuje.

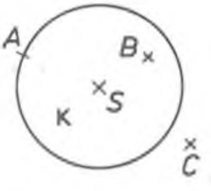
Body kruhu, které mají od jeho středu vzdálenost *menší*, než je poloměr kruhu, se nazývají **vnitřní body** kruhu. Na obrázku jsou to body A a B.

V běžném jazyce se často pojmy *kružnice* a *kruh* přesně nerozlišují. Možná také proto, že **poloměr kruhu** je totéž co poloměr kružnice, která ho ohraničuje. Podobné je to i s **průměrem kruhu**.

Někdy pracujeme i s částmi kružnice nebo kruhu. Na obrázku je znázorněna *půlkružnice p*, *čtvrtkružnice c*, *půlkruh* P a *čtvrtkruh* C.



□ **5.** Které z bodů A, B, C, S patří kruhu K na obrázku?



6. Narýsujte kruh K(S; 2,5 cm). Kružnici, která kruh K ohraničuje, pojmenujte k. Vyznačte nějaké body H, L, M, pro které platí:
$H \notin$ K; $L \in$ K, $L \in k$; $M \in$ K, $M \notin k$

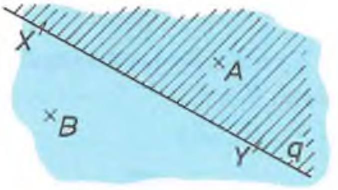
13 TROJÚHELNÍK, ČTYŘÚHELNÍK

V této kapitole zopakujeme základní vlastnosti *trojúhelníků, čtyřúhelníků* i útvarů s větším počtem úhlů – *mnohoúhelníků*. Nejprve však připomeneme, co je *polorovina*.

Co víme o *polorovině*?

Každá přímka rozděluje rovinu na dvě části zvané poloroviny. Na obrázku je vyznačena jedna z nich. Přímka p se nazývá **hraniční přímka** této poloroviny. Vyznačený bod A, který na přímce p neleží, se jmenuje **vnitřní bod** znázorněné poloroviny. **Polorovina** obsahuje všechny body své hraniční přímky a všechny své vnitřní body. Žádné jiné body neobsahuje.

Polorovina je určena svou hraniční přímkou a jedním vnitřním bodem.



Na obrázku je vyznačena přímka $q = XY$ a dva body A, B, které na ní neleží. Polorovinu s hraniční přímkou q, která obsahuje bod A, označujeme qA nebo XYA. (Pozor na pořadí bodů: vnitřní bod zapisujeme naposled.) Někdy při stručných zápisech užíváme pro polorovinu symbol $\mapsto$ a píšeme $\mapsto qA$ nebo $\mapsto XYA$.

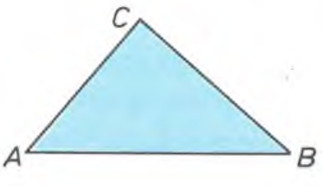
Poloroviny qA a qB z předchozího obrázku se nazývají **opačné**. Mají společnou hraniční přímku q, ale nemají žádný společný vnitřní bod. Platí tedy $\mapsto qA \cap \mapsto qB = q$. Sjednocením dvou opačných polorovin je celá rovina.

1. Narýsujte přímku p. Vyznačte body P, Q tak, aby ležely v opačných polorovinách s hraniční přímkou p.

2. Zvolte v rovině tři body A, B, C, které neleží na jedné přímce. Určete, který útvar je průnikem polorovin ABC a ACB. Umíte určit i průnik tří polorovin ABC, ACB a BCA?

Co víme o *trojúhelníku*?

Zvolme v rovině tři body A, B, C, které neleží na jedné přímce, a sestrojme



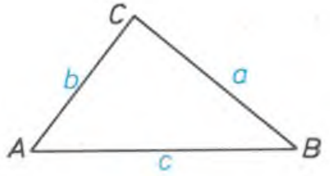
úsečky AB, BC a CA. Vznikne tak „uzavřená čára" složená ze tří úseček. Body roviny, které na této čáře neleží, můžeme rozdělit do dvou skupin. Do první skupiny dáme takové body, které leží „uvnitř" této čáry, do druhé pak ty, které leží „vně".

Množinu všech bodů z první skupiny spolu se všemi body úseček AB, BC a CA nazýváme **trojúhelníkem** ABC. Body A, B a C jsou jeho **vrcholy**. Úsečky AB, AC a BC jsou **strany** tohoto trojúhelníku.

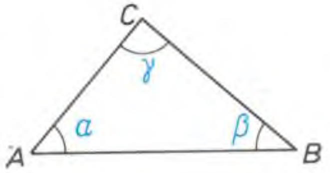
Body trojúhelníku, které neleží na žádné z jeho stran, se nazývají **vnitřní body** trojúhelníku.

Při stručných zápisech používáme pro trojúhelník symbol $\triangle$. Trojúhelník z obrázku můžeme pak označit šesti způsoby: $\triangle ABC$, $\triangle ACB$, $\triangle BCA$, $\triangle BAC$, $\triangle CAB$, $\triangle CBA$

Strany $\triangle ABC$ označujeme buď jako úsečky pomocí krajních bodů, nebo malými písmeny a, b, c. Dodržujeme při tom zásadu, že strana a leží *proti* vrcholu A, strana b *proti* vrcholu B, strana c *proti* vrcholu C. V takových případech používáme např. označení a ve dvou významech. Je to jednak strana BC, tj. úsečka, jednak její *délka*: $a = |BC|$



Někdy se stručně říká „trojúhelník o stranách 3 cm, 4 cm a 5 cm“ místo přesnějšího „trojúhelník o stranách délek 3 cm, 4 cm a 5 cm“.

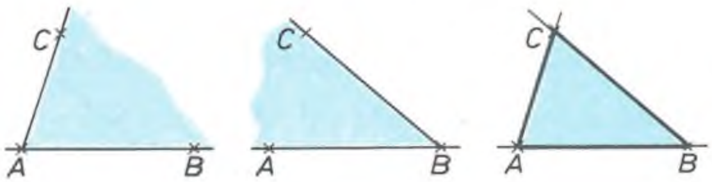


Úhly ABC, BCA a CAB se nazývají **vnitřní úhly** trojúhelníku ABC. Také je obvykle označujeme řeckými písmeny:

$$\sphericalangle CAB = \alpha, \quad \sphericalangle ABC = \beta, \quad \sphericalangle BCA = \gamma$$

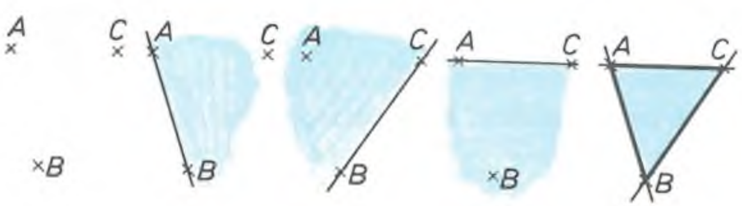
Trojúhelník ABC lze definovat různými způsoby: Například jako *průnik* některé dvojice jeho *vnitřních úhlů*:

$$\triangle ABC = \sphericalangle CAB \cap \sphericalangle ABC$$

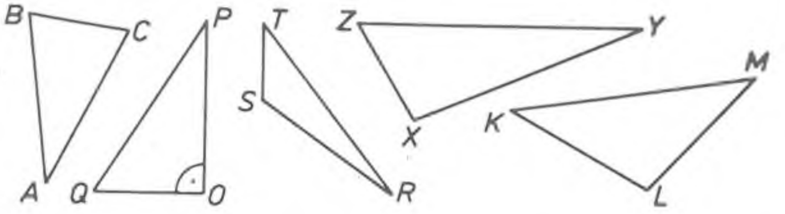


Častěji se však $\triangle ABC$ definuje jako *průnik tří polorovin* ABC, BCA a CAB:

$$\triangle ABC = \mapsto ABC \cap \mapsto BCA \cap \mapsto CAB$$



3. Zapište pomocí značky $\triangle$ trojúhelníky na obrázku:



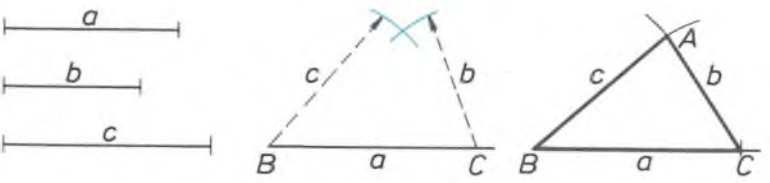
4. Změřte velikosti stran a vnitřních úhlů trojúhelníků QOP a SRT z předchozího obrázku. Změřené hodnoty zapište.

Jak sestrojíme trojúhelník?

Trojúhelník považujeme za sestrojený, jestliže jsou sestrojeny všechny tři jeho strany. Pak totiž dobře vidíme, které body roviny v trojúhelníku leží a které ne.

Snadná je konstrukce trojúhelníku ABC v případě, kdy jsou zadány všechny tři jeho vrcholy A, B, C. Tyto tři body však nesmějí ležet na jedné přímce.

Připomeňte si konstrukci trojúhelníku v případě, že známe délky všech tří jeho stran. Tehdy umístění jedné strany zvolíme libovolně a určíme polohu třetího vrcholu:



Poloha sestrojeného trojúhelníku závisí na tom, kam umístíme stranu BC. (Dokonce i pro „pevnou" polohu strany BC nám při konstrukci vyjdou dva různé body A v opačných polorovinách s hraniční přímkou BC.) Všechny sestrojené trojúhelníky jsou však „stejné". Kdybychom je vystřihli z papíru, mohli bychom je na sebe naskládat tak, aby se navzájem kryly.

Z některých trojic úseček a, b, c však trojúhelník ABC se stranami a, b, c sestrojit nelze. Víme totiž, že pro strany trojúhelníku platí **trojúhelníková nerovnost**: Součet každých dvou stran je *větší* než strana třetí.

Obecně to zapíšeme nerovnostmi:

$$a + b > c, \qquad b + c > a, \qquad c + a > b$$

Známe-li délky úseček a, b, c, stačí ověřit nerovnost jedinou: tu, ve které porovnáváme součet délek dvou *kratších* úseček s *nejdelší*. Zbývající dvě nerovnosti jsou pak splněny samozřejmě.

5. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno:

a) $|AB| = |BC| = |CA| = 5\,\text{cm}$ b) $a = 5\,\text{cm}$, $b = 4\,\text{cm}$, $c = 3\,\text{cm}$

c) $|AB| = 7\,\text{cm}$, $|BC| = 3{,}5\,\text{cm}$, $|AC| = 3{,}5\,\text{cm}$

Co je *obvod* trojúhelníku?

Víme, že každý trojúhelník je omezen třemi úsečkami – stranami. Ty vytvářejí „uzavřenou lomenou čáru“. Její délku nazýváme **obvodem trojúhelníku**. Značíme ho zpravidla písmenem o.

Pro obvod trojúhelníku ABC tedy platí:

$$o = |BC| + |CA| + |AB| = a + b + c$$

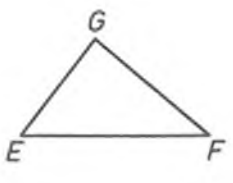
Například trojúhelník EFG o stranách délek

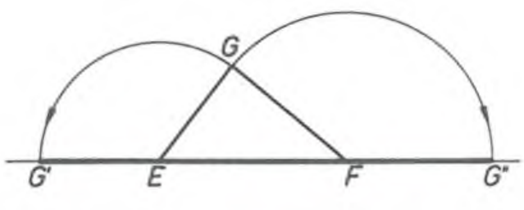
$$|FG| = 2\,\text{cm}, \quad |GE| = 1\,\text{cm}, \quad |EF| = 2{,}5\,\text{cm}$$

má obvod

$$o = |FG| + |GE| + |EF| = 2\,\text{cm} + 1\,\text{cm} + 2{,}5\,\text{cm} = 5{,}5\,\text{cm}.$$

Postup při grafickém určení obvodu $\triangle EFG$ je patrný z obrázků:





6. Určete obvod trojúhelníku ABC, je-li dáno:
   a) $a = b = c = 5{,}5\,\text{cm}$
   b) $a = b = 2{,}5\,\text{cm}$, $c = 4\,\text{cm}$
   c) $a = 3\,\text{cm}$, $b = 4\,\text{cm}$, $c = 3{,}5\,\text{cm}$

7. Vypočtěte délku strany LM trojúhelníku KLM s obvodem $10\,\text{cm}$, mají-li zbylé strany stejnou délku $3\,\text{cm}$.

8. Určete výpočtem a graficky obvod $\triangle XYZ$, je-li $|XY| = 4\,\text{cm}$, $|YZ| = 2{,}8\,\text{cm}$, $|ZX| = 4{,}5\,\text{cm}$.

? Jaké druhy trojúhelníků známe?

Podle velikostí vnitřních úhlů dělíme trojúhelníky do tří skupin:

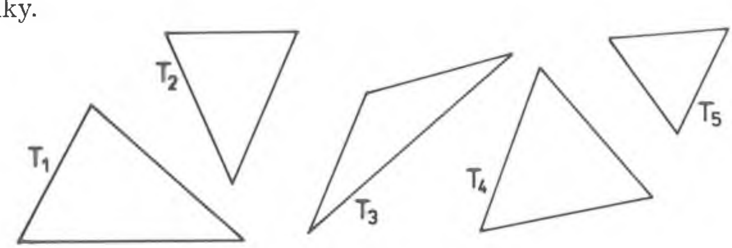
trojúhelníky

↙ ↓ ↘

ostroúhlé	pravoúhlé	tupoúhlé

všechny tři vnitřní úhly jsou **ostré**	právě jeden vnitřní úhel je **pravý**	právě jeden vnitřní úhel je **tupý**

Podle délek stran rozlišujeme *různostranné*, *rovnoramenné* a *rovnostranné* trojúhelníky.



Trojúhelník T_1 je různostranný. Žádné dvě z jeho stran nemají stejnou délku. Trojúhelníky T_2 a T_3 jsou rovnoramenné. Každý z nich má dvě strany stejně dlouhé (říkáme jim *ramena*, třetí straně *základna*). Trojúhelníky T_4 a T_5 jsou nejen rovnoramenné, ale dokonce rovnostranné. Každý z nich má všechny tři strany téže délky. Více se o rovnoramenných a rovnostranných trojúhelnících dozvíte v sekundě.

9. Jaké druhy trojúhelníků jsou na obrázku v úloze č. 3 této kapitoly?

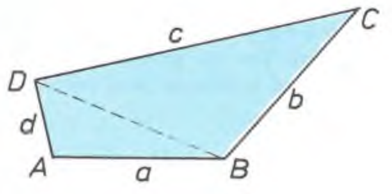
10. Narýsujte libovolný ostroúhlý $\triangle KLM$, pravoúhlý $\triangle RST$ a tupoúhlý $\triangle XYZ$. V pravoúhlém a tupoúhlém trojúhelníku vyznačte barevně nejdelší stranu a největší vnitřní úhel.

11. Narýsujte libovolný tupoúhlý trojúhelník ABC a změřte velikosti jeho vnitřních úhlů. Určete jejich součet.

12. Narýsujte libovolný různostranný $\triangle ABC$, rovnoramenný $\triangle DEF$ a rovnostranný $\triangle GHI$.

Co víme o *čtyřúhelníku*?

Prohlédněte si útvar na obrázku. Je to **čtyřúhelník** $ABCD$. Je omezen „uzavřenou lomenou čárou“, která se skládá ze čtyř úseček AB, BC, CD a DA. Tyto úsečky nazýváme **stranami** čtyřúhelníku $ABCD$. Značíme je také malými písmeny tak, jak je tomu na obrázku. Mají-li dvě strany společný krajní bod, nazývají se *sousední*, pokud žádný společný bod nemají, nazveme je *protějšími*. Tak například strany BC a CD jsou sousední, zatímco strany BC a DA jsou protější.

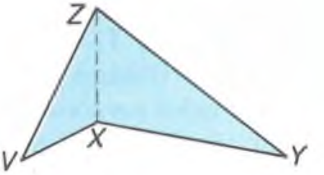


Body A, B, C a D se nazývají **vrcholy** čtyřúhelníku $ABCD$. Leží-li dva vrcholy na jedné straně, nazývají se *sousední*, jinak *protější*. Vrcholy A a D jsou sousední, vrcholy A a C jsou protější.

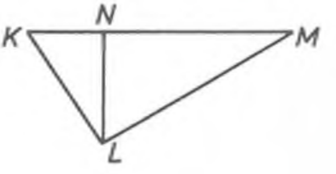
Čtyřúhelník z obrázku můžeme pojmenovat i jinak, například $BCDA$ nebo $CBAD$. Vždy však musíme dbát na pořadí zapisovaných vrcholů: vedle sebe zapisujeme sousední vrcholy. Proto zápis $ACBD$ neoznačuje daný čtyřúhelník.

Podobně jako u trojúhelníku mluvíme i u čtyřúhelníku o **vnitřních úhlech**. Čtyřúhelník $ABCD$ má čtyři vnitřní úhly: $\sphericalangle DAB$, $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle BCD$ a $\sphericalangle CDA$.

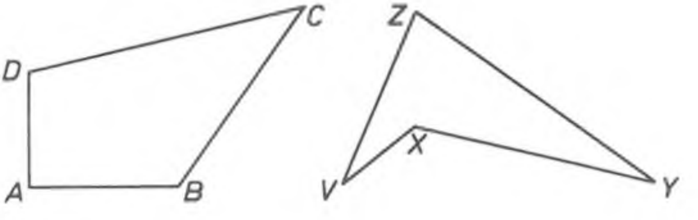
Čtyřúhelník $ABCD$ z obrázku je *sjednocením* dvou trojúhelníků ABD a BCD. Podobně i čtyřúhelník $VXYZ$ je sjednocením trojúhelníků VXZ a XYZ.



Je vždy útvar, který vznikne „slepením“ dvou trojúhelníků KLN a LNM, čtyřúhelník? Na obrázku vpravo vidíte, že tomu tak není. Body K, N a M leží na jedné přímce, místo čtyřúhelníku $KLMN$ vznikl trojúhelník KLM. Podobná „komplikace“ nastane, když při „slepování“ $\triangle KLN$ a $\triangle LNM$ podél strany LN leží na jedné přímce body K, L a M.



Překresleme si ještě jednou čtyřúhelníky $ABCD$ a $VXYZ$:

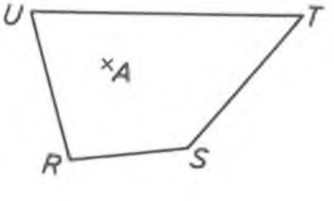


Čtyřúhelník $ABCD$ můžeme „slepit“ ze dvou trojúhelníků dvěma způsoby: jednak podél úsečky BD, jednak podél úsečky AC. U čtyřúhelníku $VXYZ$ je však možný jen jeden způsob, protože úsečka VY leží „vně“ tohoto čtyřúhelníku. Ten má jeden vnitřní úhel větší než 180°. Takové čtyřúhelníky se nazývají *nekonvexní* a dále se jimi nebudeme zabývat.

Úsečka, která spojuje dva protější vrcholy čtyřúhelníku, se nazývá **úhlopříčka**. Každý čtyřúhelník má dvě úhlopříčky.

? Co je *obvod* čtyřúhelníku?

Slovo **obvod** používáme pro čtyřúhelník v podobném významu jako pro trojúhelník. Každý čtyřúhelník je omezen čtyřmi úsečkami – stranami. Součet jejich délek nazýváme **obvodem** čtyřúhelníku a označujeme ho zpravidla písmenem o. Pro obvod čtyřúhelníku $RSTU$ platí:



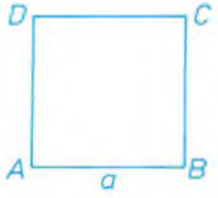
$$o = |RS| + |ST| + |TU| + |UR|$$

Dodejme ještě, že body čtyřúhelníku, které neleží na jeho stranách, nazýváme jeho **vnitřními body**. Na předchozím obrázku je vyznačen vnitřní bod A čtyřúhelníku $RSTU$.

13. Narýsujte libovolný čtyřúhelník $ABCD$. Popište jeho strany, vnitřní úhly a vyznačte jeho úhlopříčky. Změřte a zapište velikosti jeho stran a vypočítejte jeho obvod.

Co je *čtverec*?

Nejjednodušším případem čtyřúhelníku je **čtverec**. Je to takový čtyřúhelník, který má všechny čtyři strany stejně dlouhé a sousední strany navzájem kolmé.



Obvod čtverce o straně a počítáme podle vzorce:

$$o = a + a + a + a = 4 \cdot a$$

Umíte již také vypočítat *obsah* čtverce o straně a podle vzorce:

$$S = a \cdot a = a^2$$

Čtverec $ABCD$ na našem obrázku má stranu a délky 2 cm. Proto pro jeho obvod o a obsah S platí:

$$o = 4 \cdot a = 4 \cdot 2\,\text{cm} = 8\,\text{cm}$$
$$S = a^2 = (2\,\text{cm})^2 = 4\,\text{cm}^2$$

14. Narýsujte čtverec $BCDE$ o straně délky 36 mm. Vypočítejte jeho obvod i obsah.

Co je *obdélník*?

Obdélník je čtyřúhelník, jehož každé dvě protější strany mají stejnou délku a každé dvě sousední strany jsou navzájem kolmé. Znamená to, že podobně jako u čtverce jsou *protější strany rovnoběžné.*

Na obrázku je obdélník $ABCD$ se stranami délek $a = |AB| = 1{,}5\,\mathrm{cm}$ a $b = |BC| = 4\,\mathrm{cm}$. Jeho obvod počítáme podle vzorce:

$$o = 2 \cdot (a + b)$$

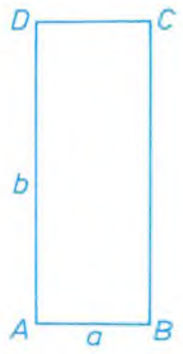
Pro obdélník $ABCD$ proto platí:

$$o = 2 \cdot (1{,}5\,\mathrm{cm} + 4\,\mathrm{cm}) = 2 \cdot 5{,}5\,\mathrm{cm} = 11\,\mathrm{cm}$$

Obsah obdélníku $ABCD$ vypočteme podle vzorce:

$$S = a \cdot b$$

Pro daný obdélník: $S = 1{,}5\,\mathrm{cm} \cdot 4\,\mathrm{cm} = 6\,\mathrm{cm}^2$



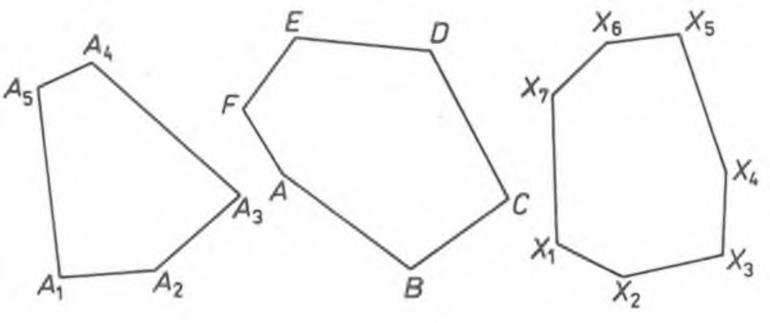
Délkám sousedních stran se v praxi často říká *rozměry* obdélníku. Větší z nich je tzv. *délka*, menší tzv. *šířka* obdélníku.

15. Narýsujte obdélník o stranách 8 cm a 2,5 cm. Vypočítejte jeho obvod a obsah.

16. Narýsujte obdélník $ABCD$ o stranách 7 cm a 4 cm. Sestrojte obě jeho úhlopříčky. Změřte a zapište velikosti všech čtyř úhlů, které úhlopříčky svírají. Nakonec vypočtěte jejich součet a tak se přesvědčte, jak přesně jste měřili.

? Co víme o *mnohoúhelníku*?

Trojúhelníky a čtyřúhelníky řadíme mezi geometrické útvary, kterým souhrnně říkáme **mnohoúhelníky**. Patří sem i pětiúhelníky, šestiúhelníky, ... Někdy jim říkáme také n-úhelníky podle počtu vnitřních úhlů, vrcholů a stran: Každý n-úhelník má n vnitřních úhlů, n vrcholů a n stran. Podrobně se o nich budete učit později. Nyní si jen prohlédněte příklady *pětiúhelníku*, *šestiúhelníku* a *sedmiúhelníku*.

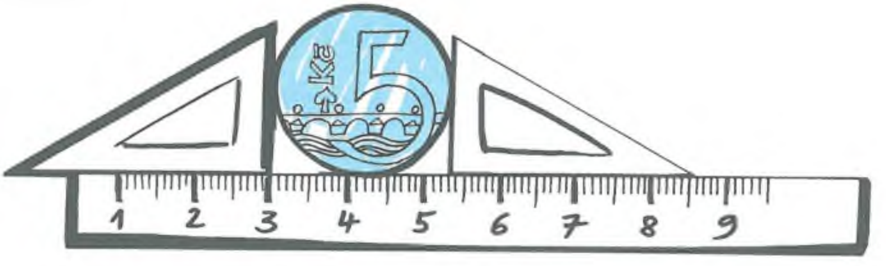


CVIČENÍ 9

1. Narýsujte dvě úsečky různých délek r_1 a r_2 a zvolte dva různé body S_1 a S_2. Sestrojte kružnice $k_1(S_1; r_1)$ a $k_2(S_2; r_2)$.

2. Narýsujte tři různé úsečky AB, CD a EF. Sestrojte kružnice k, l, m, jejichž průměry jsou tyto úsečky.

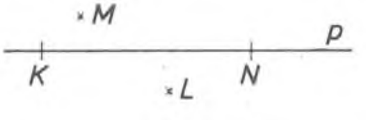
3. Pomocí dvou pravítek a měřítka změřte průměry některých českých mincí.



4. Narýsujte kružnici a zvolte na ní tři body, které jsou vrcholy
   a) ostroúhlého, b) tupoúhlého, c) pravoúhlého
   trojúhelníku.

5. Kruh K se středem S je omezen kružnicí k. Rozhodněte, zda platí:
   a) $S \in k$ b) $S \in \mathsf{K}$

6. Přímka p na obrázku je hraniční přímkou polorovin pM a pL. O každém z bodů K, L, M, N rozhodněte, do které z polorovin pM, pL patří. Svá zjištění zapište symbolicky.



7. Narýsujte přímku p a mimo ni bod A. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C, jehož vrcholy B, C leží na přímce p. Má úloha více řešení?

8. Narýsujte libovolný pravoúhlý trojúhelník. Změřte v něm velikosti ostrých úhlů a pak vypočtěte jejich součet.

9. Nejprve odhadněte a pak přesně změřte obvody svých trojúhelníkových pravítek.

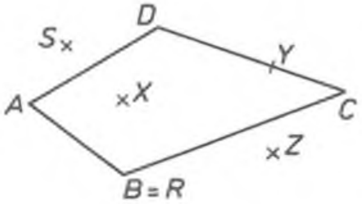
10. Narýsujte libovolný trojúhelník a určete graficky jeho obvod.

□ **11.** Určete, které z označených bodů

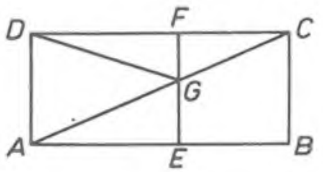
a) náleží čtyřúhelníku $ABCD$,

b) jsou vnitřní body čtyřúhelníku $ABCD$,

c) leží vně čtyřúhelníku $ABCD$.



12. Zapište všechny čtyřúhelníky z obrázku, jejichž stranami jsou vyznačené úsečky.



13. Určete

a) obsah čtverce, jehož obvod je 24 cm,

b) obvod čtverce, jehož obsah je 1 cm^2,

c) obsah obdélníku, jehož obvod je 36 cm a jedna jeho strana je dvakrát delší než druhá.

∗ **14.** Vypočtěte obvod obdélníku o obsahu 2 cm^2, jehož jedna strana je dvakrát delší než druhá.

14 PŘÍMKY A ROVINY V PROSTORU

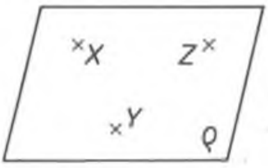
Naše předchozí opakování bylo zaměřeno na rovinné útvary. Znamená to, že za základní množinu jsme považovali *množinu všech bodů v rovině* a všechny zkoumané útvary byly její části (podmnožiny). Část roviny nám představoval nejčastěji list papíru v učebnici či sešitě nebo tabule ve třídě.

V této kapitole zopakujeme základní poznatky o prostorových útvarech. Tentokrát bude základní množinou *množina všech bodů v prostoru*. Prostor si představujeme jako „svět kolem nás“, přímky a roviny jsou jeho části (např. hrana stolu, stěny místnosti apod.). V prostoru existuje nekonečně mnoho různých rovin.

Zkoumání prostorových útvarů je ztíženo tím, že neumíme kreslit „prostorové obrázky“. Nejčastěji si prostorové útvary promítáme do roviny (na papír), podobně jako to dělá fotograf.

Co víme o *rovině*?

Rovina je určena třemi svými body, které neleží v jedné přímce. Na obrázku je znázorněna rovina procházející body X, Y a Z. Říkáme jí rovina XYZ. K označení rovin užíváme také malá řecká písmena. Např. rovinu z obrázku jsme pojmenovali ϱ. Píšeme:

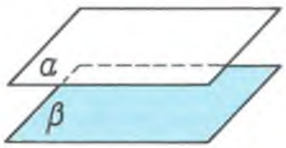


$$\varrho = \leftrightarrow XYZ$$

(Symbol $\leftrightarrow$ značí buď přímku, nebo rovinu. Poznáme to podle počtu bodů, které za ním následují.)

Jakou vzájemnou polohu mohou mít dvě roviny v prostoru?

Dvojice rovin α, β v prostoru můžeme třídit podle toho, kolik mají tyto roviny *společných bodů*.

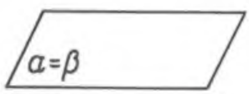


Jestliže roviny α, β nemají *žádný společný bod*, říkáme jim **rovnoběžné roviny**. Praktickým příkladem jsou podlaha a strop místnosti.

Pro rovnoběžné roviny α a β platí:

$$\alpha \cap \beta = \emptyset$$

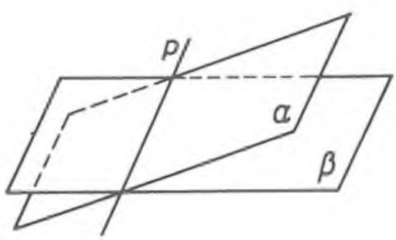
Za zvláštní případ rovnoběžnosti považujeme situaci, kdy obě dané roviny α a β splynou. Každý bod roviny α pak leží v rovině β a také každý bod roviny β leží v rovině α. Platí tedy



$$\alpha \cap \beta = \alpha = \beta.$$

Říkáme, že roviny α a β jsou **totožné**.

Představme si dvě roviny, které nejsou rovnoběžné, např. desky pootevřeného sešitu.



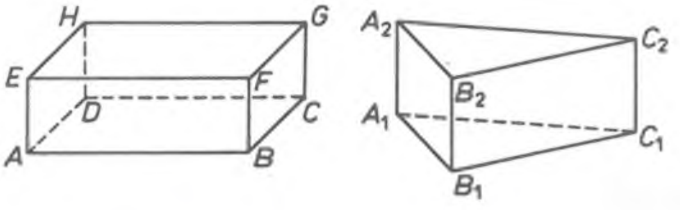
Takové dvě roviny mají společné body. Tyto body vyplní celou přímku, které říkáme **průsečnice** obou rovin. Na obrázku jsou znázorněny roviny α a β a jejich průsečnice p. Platí

$$\alpha \cap \beta = p.$$

Roviny α a β se nazývají **různoběžné**.

☐ **1.** Pomocí dvou listů papíru ukažte příklad dvou rovin, které jsou
a) rovnoběžné, b) totožné, c) různoběžné.

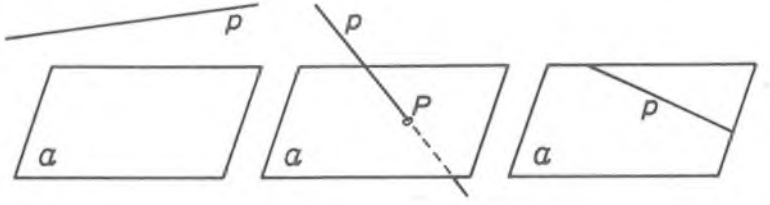
☐ **2.** Podle obrázků kvádru a trojbokého hranolu jmenujte několik dvojic rovin, které jsou
a) rovnoběžné, b) různoběžné.



?

Jakou vzájemnou polohu mohou mít přímka a rovina v prostoru?

Na následujících obrázcích vidíte tři možné případy vzájemné polohy přímky p a roviny α v prostoru. Opět je třídíme podle počtu společných bodů.



Jestliže přímka p nemá s rovinou α *žádný společný bod*, říkáme, že přímka p je **rovnoběžná** s rovinou α. Platí

$$p \cap \alpha = \emptyset.$$

Má-li přímka p s rovinou α *jediný společný bod*, pak říkáme, že přímka p je **různoběžná** s rovinou α. Jejich společný bod P se nazývá **průsečík**. Platí

$$p \cap \alpha = \{P\}.$$

Zbývá případ, kdy přímka p má s rovinou α více společných bodů. Tehdy v rovině α leží všechny body přímky p. Říkáme, že přímka p **leží** v rovině α. Znamená to, že platí

$$p \cap \alpha = p, \quad \text{tedy} \quad p \subset \alpha.$$

Takovou situaci považujeme za zvláštní případ rovnoběžnosti přímky a roviny.

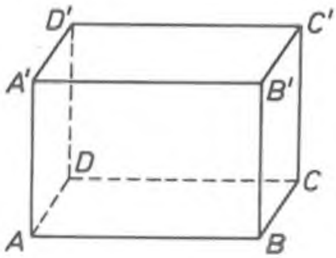
□ **3.** Pomocí špejle a listu papíru ukažte příklad přímky

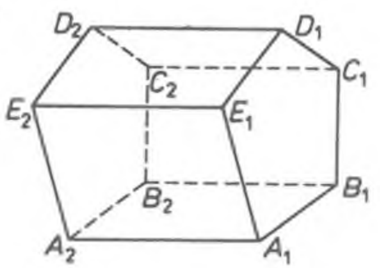
a) rovnoběžné s rovinou, b) různoběžné s rovinou,

c) ležící v rovině.

□ **4.** Podle obrázků kvádru a pětibokého hranolu jmenujte několik dvojic přímka – rovina, v nichž je přímka

a) rovnoběžná s rovinou, b) různoběžná s rovinou.

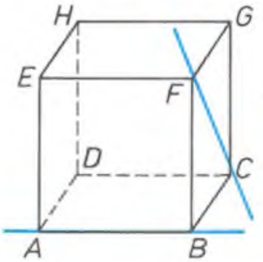


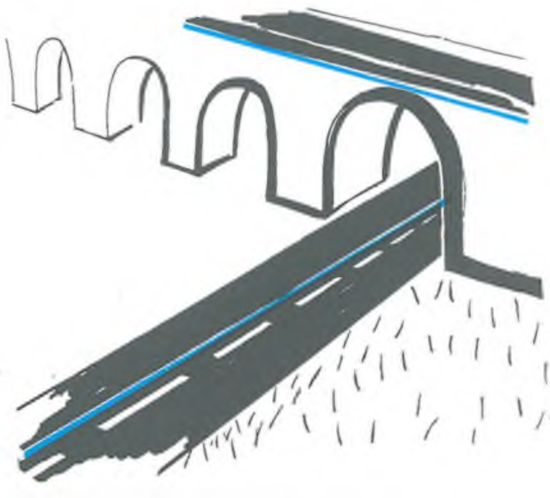


Jakou vzájemnou polohu mohou mít dvě přímky v prostoru?

Představme si dvě přímky v prostoru. Leží-li obě v jedné rovině, pak už víme, že mohou být *rovnoběžné*, *totožné* nebo *různoběžné*. Může se však stát, že v jedné rovině neleží. To nastane, když nemají žádný společný bod a nejsou rovnoběžné. Pak jim říkáme **mimoběžné přímky** neboli **mimoběžky**.

Příklady mimoběžek si prohlédněte na obrázcích.



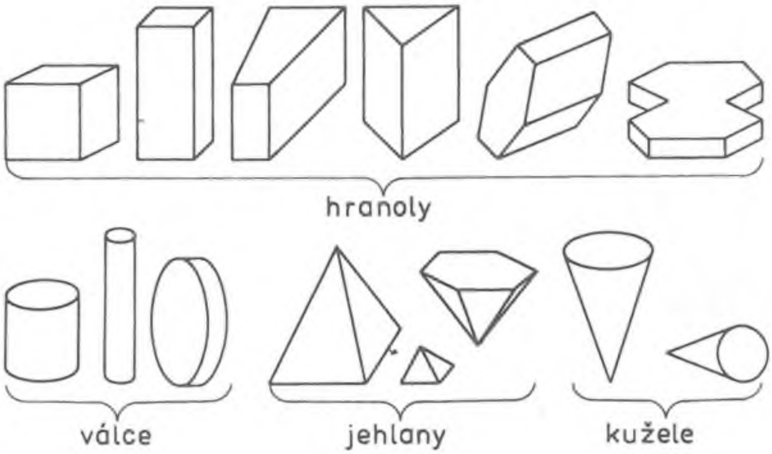


□ **5.** Pomocí dvou špejlí ukažte příklad dvou přímek v prostoru, které jsou
a) různoběžné, b) rovnoběžné, c) mimoběžné.

□ **6.** Na obrázku krychle najděte ještě několik dalších dvojic mimoběžných přímek.

15 TĚLESA

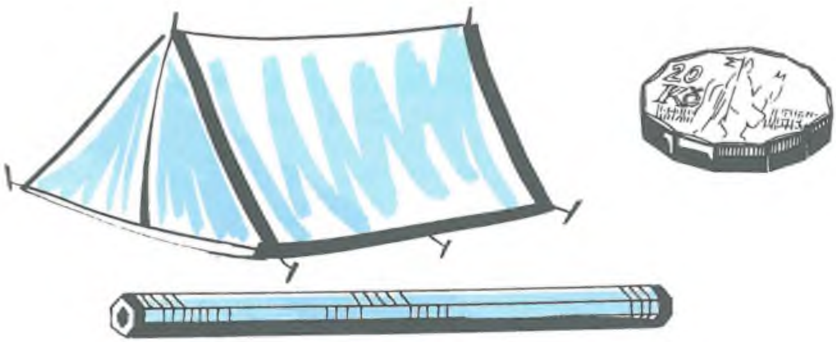
V této kapitole zopakujeme základní poznatky o *tělesech*. Podle obrázků si připomeňte, které druhy těles již znáte.



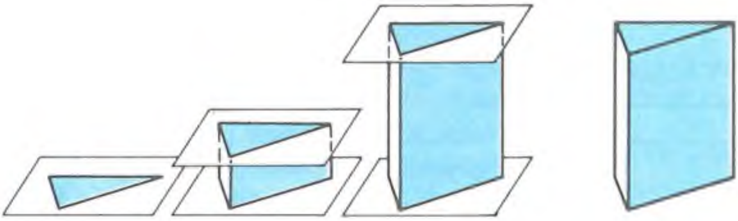
?

Jak poznáme *hranol*?

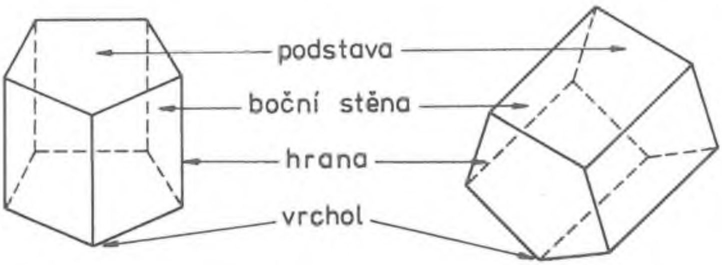
Předměty na následujícím obrázku mají tvar hranolu.



Vysvětlíme, jak hranol vzniká: Ve vodorovné rovině sestrojíme mnohoúhelník. Tuto rovinu i s mnohoúhelníkem budeme „svisle zvedat“ až do určité výšky. „Zvedaný“ mnohoúhelník při tom zaplní část prostoru, které říkáme **hranol**.

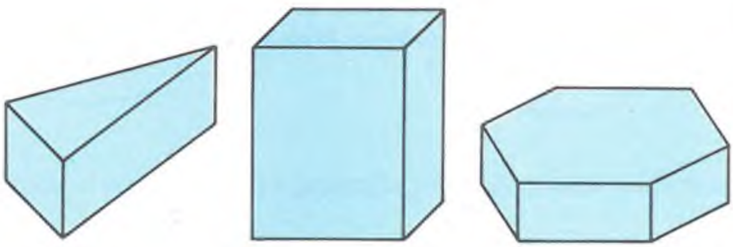


Podívejme se, čím je vzniklé těleso omezeno. Shodné vodorovné mnohoúhelníky se nazývají **podstavy**, svislé obdélníky jsou tzv. **boční stěny** hranolu. Podstavy a boční stěny nazýváme souhrnně **stěny** hranolu. Hranol můžeme v prostoru libovolně posunout a otočit. Jeho podstavy pak nemusí být vodorovné ani boční stěny svislé.



Dvě stěny hranolu, které mají společné body, se nazývají **sousední**. Společné body dvou sousedních stěn vytvářejí úsečku zvanou **hrana** hranolu. Bod, ve kterém se „stýkají“ tři stěny, se nazývá **vrchol** hranolu. Z každého vrcholu hranolu „vycházejí“ tři hrany.

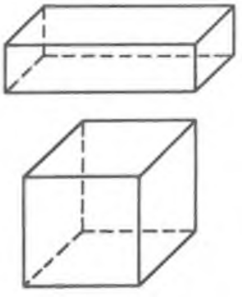
Podle počtu n bočních stěn hovoříme o n-bokém hranolu. Tento počet je stejný jako počet vrcholů v podstavách. Na obrázku je zobrazen postupně trojboký, čtyřboký a šestiboký hranol.



Každý n-boký hranol má celkem $n + n + n = 3 \cdot n$ hran – v každé z obou podstav je po n hranách, dalších n hran odděluje sousední boční stěny. Snadno také určíme počet vrcholů n-bokého hranolu – je jich $n + n = 2 \cdot n$.

Co je *kvádr* a co *krychle*?

Zvláštním druhem hranolu je **kvádr**. Je to takový hranol, jehož podstavou je obdélník nebo čtverec. Má proto celkem 6 stěn. Každá dvojice protějších stěn může tvořit jeho podstavy, záleží jen na tom, jak kvádr „natočíme". Proto u kvádru podstavy a boční stěny nerozlišujeme.

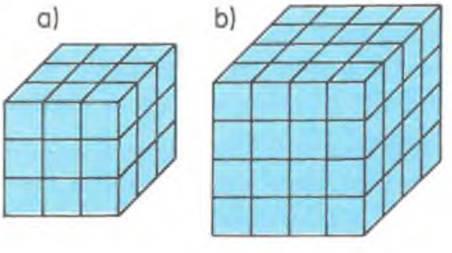


Zvláštním druhem kvádru je **krychle**. Všech šest stěn krychle je tvořeno shodnými čtverci. Všechny hrany krychle jsou tedy shodné úsečky.

□ **1.** Rozhlédněte se po svém okolí a jmenujte předměty, které mají tvar hranolu.

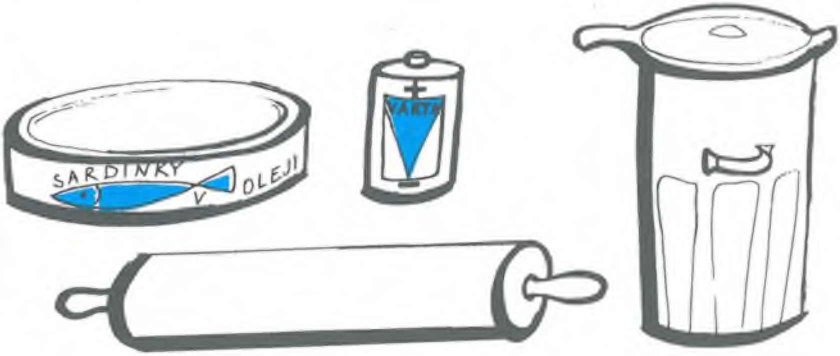
□ **2.** Určete počet vrcholů, stěn a hran kvádru.

3. Představte si, že modře natřenou krychli rozřežeme na malé stejné krychličky, jak to vidíte na obrázku.

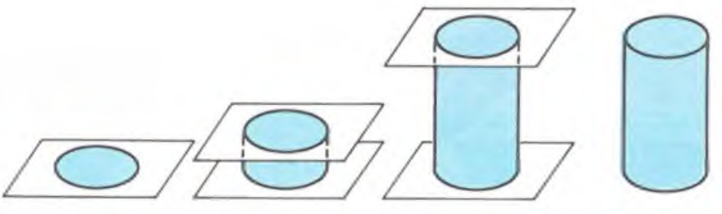


Kolik krychliček bude mít tři stěny modré? Kolik krychliček bude mít dvě modré stěny? Kolik bude krychliček s jednou modrou stěnou? A kolik jich zůstane neobarveno?

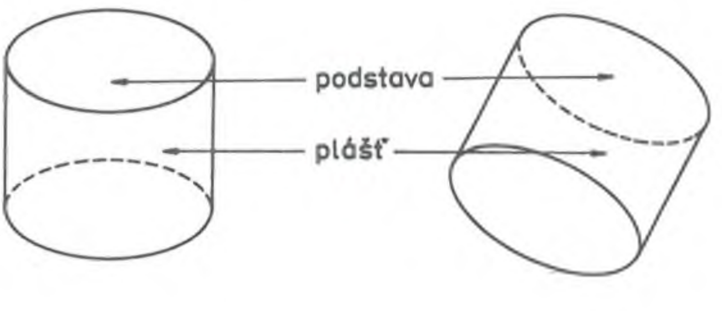
Jak poznáme *válec*? ?



Předměty na obrázku mají tvar válce. Můžeme si představit, že válec vznikne podobně jako hranol. Ve vodorovné rovině však nyní vezmeme místo mnohoúhelníku *kruh*. Rovinu i s kruhem budeme „svisle zvedat“ do určité výše. Zvedaný kruh při tom zaplní část prostoru, které říkáme **válec**.



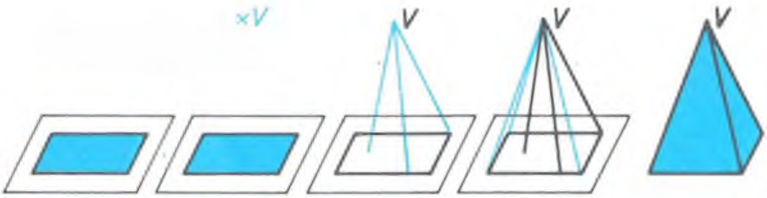
Válec je omezen dvěma **podstavami**, které tvoří stejné vodorovné kruhy, a „zakřivenou plochou“, které se říká **plášť** válce. Je jasné, že v prostoru můžeme válec různě „natočit“.



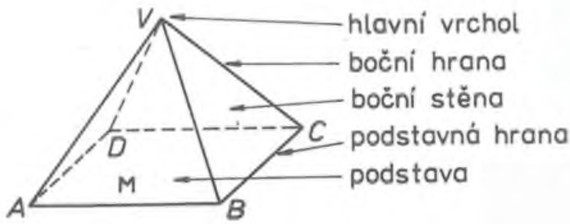
□ **4.** Rozhlédněte se po svém okolí a jmenujte předměty, které mají tvar válce.

? Jak poznáme *jehlan*?

Předměty na obrázku mají tvar jehlanu. Vysvětlíme, jak jehlan vzniká. V rovině vybereme mnohoúhelník M a pak zvolíme bod V, který v této rovině neleží. Bod V spojíme úsečkami se všemi body mnohoúhelníku M. Všechny body těchto úseček vytvoří těleso, které se nazývá **jehlan**.

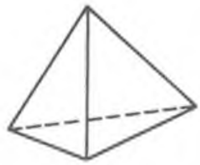


Mnohoúhelník M se nazývá **podstava** jehlanu, bod V jeho **hlavní vrchol**. Vrcholy mnohoúhelníku M a bod V se nazývají **vrcholy** jehlanu. Strany mnohoúhelníku M se nazývají **podstavné hrany** jehlanu. Úsečky, které spojují vrcholy mnohoúhelníku M s hlavním vrcholem V, se nazývají **boční hrany**. Každá **boční stěna** jehlanu je trojúhelník, jehož vrcholy jsou hlavní vrchol V a dva sousední vrcholy podstavy.



Podle počtu n bočních stěn mluvíme o n-bokém jehlanu. Jehlan na předchozím obrázku je čtyřboký.

Podstavou trojbokého jehlanu je trojúhelník. Jeho stěny tedy tvoří čtyři trojúhelníky. Každý z nich můžeme považovat za podstavu takového jehlanu. Trojboký jehlan také někdy nazýváme *čtyřstěnem*.

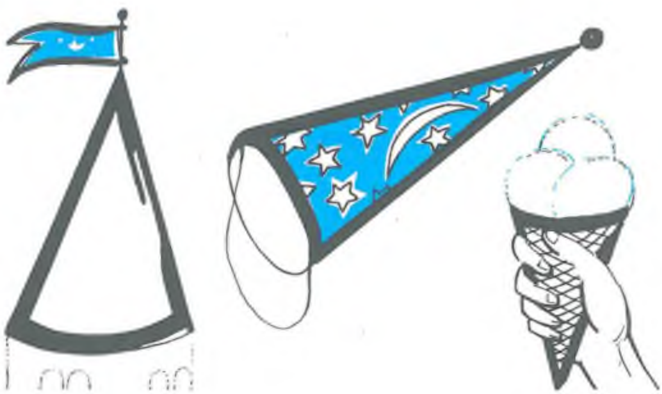


□ **5.** Rozhlédněte se po svém okolí a jmenujte předměty, které mají tvar jehlanu.

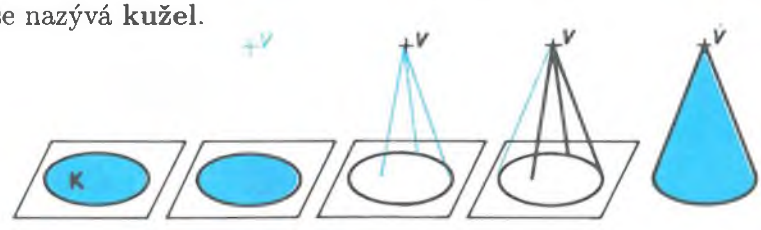
□ **6.** Určete počet vrcholů, stěn a hran pětibokého jehlanu.

Jak poznáme *kužel*?

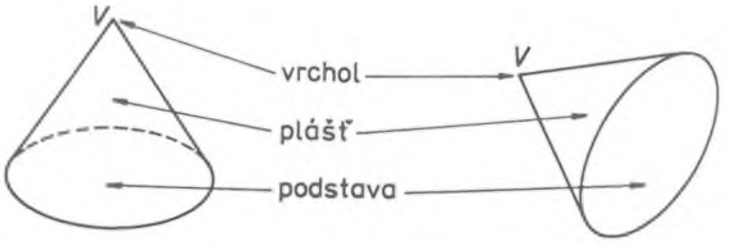
Předměty z následujícího obrázku mají tvar kužele.



Vysvětlíme, jak může vzniknout kužel. Ve vodorovné rovině zvolíme kruh K se středem S. Kruh ponecháme v rovině, pouze „zvedneme" střed S svisle do určité výšky až do bodu, který označíme V. Bod V spojíme úsečkami se všemi body kruhu K. Všechny body těchto úseček vytvoří v prostoru těleso, které se nazývá **kužel**.



Kruh K se nazývá **podstava** kužele, „zakřivená“ plocha, která kužel omezuje „z boku“, je jeho **plášť**. Bod V nazýváme **vrcholem** kužele.



□ **7.** Jmenujte předměty ze svého okolí, které mají tvar kužele.

CVIČENÍ 10

□ **1.** Ukažte ve třídě příklady různoběžných, rovnoběžných a mimoběžných přímek. Ukažte také příklady rovnoběžných rovin. Ukažte dvě různoběžné roviny a popište jejich průsečnici.

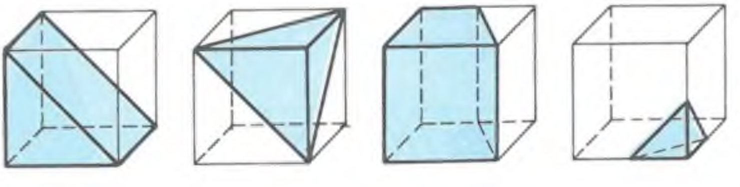
□ **2.** Jmenujte příklady těles tvaru krychle, kvádru, hranolu, jehlanu, válce a kužele, se kterými jste se setkali v běžném životě.

□ **3.** Kolik vrcholů, hran a stěn má

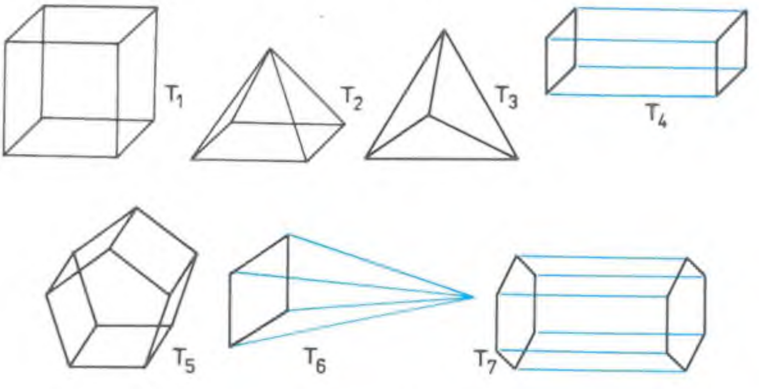
a) trojboký jehlan, b) čtyřboký jehlan,
c) pětiboký jehlan, d) n-boký jehlan?

* **4.** Určete počet vrcholů, hran a stěn dvacetičtyřbokého hranolu.

□ **5.** Pojmenujte barevně vyznačená tělesa, která vznikla odříznutím od krychle:



∗**6.** Petr má 7 drátů dlouhých 240 cm. Chce z nich vyrobit modely 7 těles podle obrázku, z každého celého drátu jedno těleso. Poraďte mu, jak dráty nastříhat, jestliže hrany stejné barvy mají být stejně dlouhé a modré hrany mají být třikrát delší než černé. Drát je křehký, proto se nemůže ohýbat.



16 SOUHRNNÁ CVIČENÍ

1 Číslo a číslice

1. Napište rozvinutý zápis čísla 203 798 v desítkové soustavě.

2. K danému přirozenému číslu určete číslo o 5 větší a o 5 menší:

a) 996 b) 1 097 c) 93 999
d) 99 999 e) 2 499 002 f) 3 100 004

□ **3.** V čísle 203 798 vynechte jednu číslici tak, aby vzniklo pěticiferné číslo a aby bylo

a) co možná největší, b) co možná nejmenší.

4. Z číslic 0, 5, 7 sestavte všechna možná dvojciferná čísla a seřaďte je podle velikosti.

5. Které největší šesticiferné číslo lze sestavit z číslic 1, 2, 3, 5, 7, 9, má-li se v něm každá z daných číslic vyskytovat právě jednou? Přitom číslice 5 má být zapsána na místě desítek a číslice 9 na místě tisíců.

6. Z číslic 1, 2, 3, 4 vytvořte všechna možná

a) dvojciferná čísla, b) trojciferná čísla.

Číslice se v sestavovaném čísle nesmějí opakovat.

∗ **7.** Petr zapsal za sebou bez mezer a čárek všechna přirozená čísla od 1 do 110. Kolikaciferné číslo vytvořil?

8. Kolikrát napíšeme číslici 1, jestliže zapíšeme

a) prvních dvacet, b) prvních sto

přirozených čísel?

9. Určete číslo, které se skládá

a) z 11 desítek a 11 jednotek,
b) z 22 stovek, 22 desítek a 22 jednotek,
c) z 55 tisíců, 55 stovek, 55 desítek a 55 jednotek.

∗ **10.** Určete všechna šesticiferná čísla zapsaná třemi jedničkami a třemi nulami, která jsou

a) větší než 101 001, b) menší než 101 101.

11. V následujícím zápise nahraďte znaky číslicemi tak, aby vznikla platná rovnost (stejné znaky musíte nahradit stejnými číslicemi, různé znaky různými číslicemi):

a) $\triangle\bullet + \bullet\triangle = 99$ b) $5\square + \square\bigstar = 8\square$

c) $1\blacksquare \cdot \blacksquare = 7\blacksquare$ d) $3\clubsuit : \clubsuit = \clubsuit$

∗**12.** Kolikaciferné číslo může vzniknout sečtením

a) dvou trojciferných čísel, b) čtyř pěticiferných čísel,

c) deseti dvojciferných čísel?

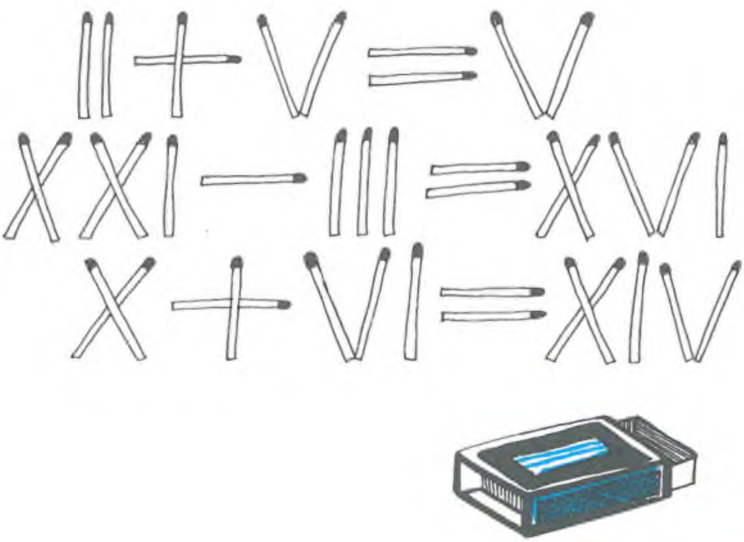
■**13.** Víte, čím je následující letopočet památný?

a) DCCCLXIII b) MCDXV c) MCMXVIII

14. Zapište římskými číslicemi čísla:

a) 95, 96, ..., 105 b) 994, 995, ..., 1 003

■**15.** Přemístěním jediné zápalky opravte následující chybné „zápisy“ tak, aby vznikly rovnosti:



16. Množina A je množina všech sedmi římských číslic. Zapište pomocí znaků $\in$ a $\notin$, která z písmen K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, X, Y, Z jsou a která nejsou prvky množiny A.

17. Zapište výčtem prvků množinu všech žáků vaší třídy, jejichž

a) jméno začíná písmenem M,

b) příjmení začíná písmenem M,

c) jméno i příjmení začíná písmenem M.

18. Zapište výčtem prvků množinu všech oceánů na Zemi.

19. Určete danou množinu společnou vlastností jejích prvků:

a) $\mathsf{A} = \{$smrk, borovice, modřín, jedle, tis$\}$

b) $\mathsf{B} = \{$b, f, l, m, p, s, v, z$\}$

20. Jsou dány množiny

$$\mathsf{M} = \{1, 3, 5, 7, 9\}, \quad \mathsf{K} = \{1, 2, 3, 4\} \quad \text{a} \quad \mathsf{P} = \{2, 4, 9, 10\}.$$

Načrtněte vhodný diagram a určete:

a) $\mathsf{M} \cup \mathsf{K}$ b) $\mathsf{M} \cup \mathsf{P}$ c) $\mathsf{K} \cup \mathsf{P}$

d) $\mathsf{M} \cap \mathsf{K}$ e) $\mathsf{M} \cap \mathsf{P}$ f) $\mathsf{K} \cap \mathsf{P}$

21. P je množina všech přirozených čísel menších než 105. M je množina všech násobků čísla 10 menších než 100. T je množina všech trojciferných čísel. Zapište výčtem prvků množiny:

a) $\mathsf{P} \cap \mathsf{M}$ b) $\mathsf{P} \cap \mathsf{T}$ c) $\mathsf{M} \cap \mathsf{T}$

22. Připomeňte si množinu všech hlásek české abecedy. Zapište výčtem prvků tyto její podmnožiny:

a) množinu všech krátkých samohlásek,

b) množinu všech měkkých souhlásek.

23. Vypište všechny tříprvkové podmnožiny množiny $\{\heartsuit, \triangle, \star, \odot\}$.

24. Vypište všechny podmnožiny množiny $\{$l, o, s$\}$.

25. Vypište všechny dvouprvkové podmnožiny množiny $\{1, 10, 11, 20\}$.

26. Určete výčtem prvků množinu $\mathsf{A} \cap \mathsf{B}$, je-li:

a) A množina všech písmen slova KORUNA, B množina všech písmen slova RUCE,

b) A množina všech písmen slova VZLET, B množina všech písmen slova TELEVIZE,

c) $\mathsf{A} = \{10, 20, 30, 40, 50\}$, $\mathsf{B} = \{50, 60, 70, 80\}$.

3 Přirozená čísla

□ **27.** Představte si, že zapíšete za sebou bez mezer všechna přirozená čísla od 83 do 213. Kolikaciferné číslo vznikne?

28. Na číselné ose s vhodně zvolenou jednotkou délky znázorněte čísla 39, 43, 45, 48 a 51.

□ **29.** Z daných čísel vyberte nejmenší a největší:

a) 127, 237, 231, 132, 312, 213, 117, 321

b) 5 062, 6 052, 5 026, 6 502, 5 620, 6 520, 5 602

□ **30.** Určete součet a rozdíl čísel:

a) 1 452 a 786

b) 8 793 a 35 641

31. Vypočtěte výhodně:

a) $14 + 12 + 28 + 13 + 6 + 27$

b) $84 + 56 + 16 + 44 + 17$

c) $758 + 423 + 242 + 77$

d) $394 + 128 + 202 + 106$

32. Vypočtěte:

a) $100 - (17 + 22 + 33)$

b) $100 - 17 - 22 - 33$

c) $100 - 17 + 22 + 33$

d) $100 - (17 + 22 - 33)$

33. Určete, které číslo musíte

a) odečíst od čísla 800, abyste dostali 457,

b) přičíst k číslu 800, abyste dostali 1 457,

c) odečíst od čísla 1 057, abyste dostali 800,

d) přičíst k číslu 457, abyste dostali 800.

■ **34.** Před kolika lety se staly události, o kterých se učíte v dějepise?

a) V roce 313 prohlásil římský císař křesťanství za náboženství celé Římské říše.

b) Král Karel Veliký začal vládnout Franské říši v roce 768.

c) Kupec Sámo přišel mezi Slovany v roce 623.

d) V roce 935 dal Boleslav zabít svého bratra knížete Václava a sám se stal knížetem.

e) Roku 863 přišli na Velkou Moravu učení bratři Konstantin a Metoděj.

f) Zlatá bula sicilská, která pochází z roku 1212, patří k nejslavnějším listinám našeho středověku.

∗**35.** Určete, jak se změní součet tří čísel, jestliže

a) prvního sčítance zmenšíme o 11, druhého sčítance zvětšíme o 45 a třetího zmenšíme o 17,

b) prvního sčítance zvětšíme o 35, druhého sčítance zvětšíme o 24 a třetího zmenšíme o 56.

∗**36.** Je dán rozdíl dvou čísel. Menšence zmenšíme o 23. Jak musíme změnit menšitele, aby se původní rozdíl

a) nezměnil, b) zvětšil o 50, c) zmenšil o 50?

37. Čísla 3, 5, 7, 9, 10, 11, 12, 15 a 20 vynásobte:

a) sedmi b) jedenácti c) třiceti

□**38.** Vynásobte výhodně:

a) $2 \cdot 74 \cdot 5$ b) $20 \cdot 38 \cdot 5$ c) $25 \cdot 17 \cdot 4$

d) $50 \cdot 307 \cdot 2$ e) $5 \cdot 98 \cdot 20$ f) $4 \cdot 69 \cdot 25$

39. Každé z čísel 72, 96, 112, 160, 184, 208, 400 a 792 zapište jako součin dvou činitelů, z nichž jeden je roven 8.

40. Vypočtěte:

a) $345 \cdot 6$ b) $1\,235 \cdot 7$ c) $30\,507 \cdot 8$
d) $345 \cdot 23$ e) $1\,235 \cdot 60$ f) $30\,507 \cdot 14$
g) $345 \cdot 678$ h) $1\,235 \cdot 608$ i) $30\,507 \cdot 785$

41. Vypočtěte:

a) $135 \cdot 8$ b) $407 \cdot 16$
$135 \cdot 17$ $407 \cdot 22$
$135 \cdot 25$ $407 \cdot 38$

(Při určování součinu na posledním řádku si můžete pomoci předchozími výsledky.)

42. Bez násobení doplňte do rámečku správný znak nerovnosti:

a) $5 \cdot 87 \; \square \; 3 \cdot 87$ b) $136 \cdot 12 \; \square \; 13 \cdot 136$
c) $7 \cdot 523 \; \square \; (5+4) \cdot 523$ d) $5 \cdot (51+33) \; \square \; 84 \cdot (4+2)$

** **43.** Součin dvou čísel je 768. Zvětšíme-li jedno číslo o 4 a druhé nezměníme, dostaneme součin 864. Určete oba původní činitele.

□ **44.** Která čísla patří do prázdných polí tabulky?

a	7			6		8		7
b		6	9		4		4	
$a \cdot b$	56	36	72	72	84	88	88	91

45. Vydělte:

a) $105 : 3$ b) $384 : 4$ c) $810 : 3$
$105 : 5$ $384 : 6$ $810 : 6$
$105 : 7$ $384 : 8$ $810 : 9$

46. Vydělte a proveďte zkoušku tak, že dělence znovu vydělíte, tentokrát vypočteným podílem:

a) $96 : 8$ b) $153 : 17$ c) $1\,470 : 42$

47. Vydělte se zbytkem a proveďte zkoušku:

a) $99 : 7$ b) $416 : 18$ c) $900 : 39$
d) $1\,725 : 52$ e) $10\,885 : 87$ f) $1\,800 : 91$

■ **48.** Kolik celých týdnů tvoří milion dnů? Kolik celých nepřestupných let?

■ **49.** V kterém roce budete staří 10 000 dnů? (Nezapomněli jste na přestupné roky?)

4 Desetinná čísla

50. Z čísel 1,35; 1,53; 1,03; 1,05; 1,55; 1,33 vyberte nejmenší a největší.

51. Z čísel 0,07; 0,57; 0,35; 0,75; 0,53; 0,37; 0,05; 0,03 vyberte všechna čísla

a) menší než 0,73, b) větší než 0,35.

52. Na číselné ose s jednotkou délky 2 cm znázorněte čísla:
0,5; 2,25; 3,1; 4,6; 5,75

□ **53.** Doplňte chybějící sčítance:

a) $\ldots + 0{,}3 = 1$
$0{,}06 + \ldots = 1$
$0{,}72 + \ldots = 1$
$\ldots + 0{,}11 = 1$

b) $0{,}4 + \ldots = 2$
$\ldots + 0{,}04 = 2$
$1{,}3 + \ldots = 2$
$1{,}07 + \ldots = 2$

c) $0{,}2 + \ldots = 3{,}1$
$\ldots + 0{,}45 = 3{,}1$
$2{,}3 + \ldots = 3{,}1$
$\ldots + 1{,}95 = 3{,}1$

54. Sečtěte:

a) $12{,}38 + 7{,}08 + 5{,}01 + 19{,}6$ b) $5{,}32 + 24 + 0{,}08 + 12{,}5 + 13{,}4$
c) $7{,}7 + 0{,}77 + 7{,}77 + 77 + 7{,}07$

□ **55.** Odečtěte zpaměti:

a) $1 - 0{,}72$
$10 - 0{,}72$

b) $2 - 0{,}55$
$2{,}5 - 0{,}55$

c) $3{,}8 - 0{,}75$
$3{,}8 - 0{,}85$

56. Určete součet a rozdíl čísel:

a) 5,74 a 12,35 b) 14,7 a 36,45

57. Od největšího z daných čísel odečtěte nejmenší:

a) 4,8; 4,7; 12,3 b) 9,34; 39,43; 9,43

58. Vynásobte:

a) $3{,}7 \cdot 2$
$3{,}7 \cdot 4$
$3{,}7 \cdot 6$

b) $0{,}72 \cdot 3$
$0{,}72 \cdot 6$
$0{,}72 \cdot 9$

c) $0{,}4 \cdot 5$
$0{,}04 \cdot 10$
$0{,}04 \cdot 5$

d) $3{,}5 \cdot 10$
$3{,}5 \cdot 100$
$0{,}35 \cdot 100$

e) $0{,}68 \cdot 6$
$6{,}8 \cdot 6$
$8 \cdot 6{,}8$

f) $52 \cdot 9$
$5{,}2 \cdot 9$
$0{,}52 \cdot 9$

□ **59.** Čísla 15; 3; 0,6; 0,21; 1,8; 2,7 a 3,3 vydělte třemi.

60. Vydělte a zkoušku proveďte násobením:

a) $0{,}87 : 3$ b) $2{,}96 : 4$ c) $15{,}05 : 5$
d) $33{,}6 : 7$ e) $2{,}72 : 8$ f) $103{,}5 : 9$

61. Od čísla 75,75 odečtěte číslo, které je

a) pětkrát menší, b) třikrát menší, c) o 24 menší.

62. Vydělte:

a) $80 : 10$
$0{,}8 : 10$
$8 : 10$

b) $400 : 100$
$40 : 100$
$4 : 100$

c) $6{,}4 : 10$
$64 : 10$
$64 : 100$

63. Kolikrát musíte od čísla 68,8 odečíst číslo 1,6, aby vyšlo číslo 0?

5 Číselné výrazy

64. Vypočtěte:

a) $6 + 17 - 9$
$7 + 8 \cdot 4$
$18 - 15 : 3$
$9 + 8 \cdot 9$

b) $8 \cdot 4 - 3 \cdot 7 + 11$
$38 - 8 \cdot 3 - 2 \cdot 7$
$6 \cdot 9 + 70 : 2 - 6 \cdot 4$
$39 : 3 + 3 \cdot 9 - 26 : 2$

65. Vypočtěte:

a) $36 - 18 - 15$
$36 - (18 - 15)$
$36 - (18 + 15)$
$36 - 18 + 15$

b) $42 - (9 : 3) \cdot 2 + 6$
$[(42 - 9) : 3] \cdot 2 + 6$
$[(42 - 9) : 3] \cdot (2 + 6)$
$42 - [(9 : 3) \cdot 2 + 6]$

66. Počítejte výhodně:

a) $67 + 91 + 33$ b) $164 + 573 + 236$
c) $25 \cdot 20 \cdot 4 \cdot 5$ d) $8 \cdot 18 \cdot 25$
e) $399 \cdot 6$ f) $(10 \cdot 24 \cdot 7) : 8$
g) $693 : 7$ h) $2\,400 : 25$

67. Vypočtěte:

a) $3 \cdot 25 - 5 \cdot 12 - 4 \cdot 2$
$3 \cdot (25 - 5) \cdot (12 - 4 \cdot 2)$
$3 \cdot [(25 - 5) \cdot (12 - 4) \cdot 2]$
$3 \cdot [(25 - 5) \cdot 12 - 4] \cdot 2$

b) $(48 : 2) \cdot 7 - 2 \cdot 5$
$(48 : 2) \cdot (7 - 2) \cdot 5$
$[48 : (2 \cdot 7 - 2)] \cdot 5$
$48 : (2 \cdot 7 - 2 \cdot 5)$

6 Rovnice

□**68.** Řešte rovnice:

a) $x + 7 = 12$
$x - 3 = 8$
$11 + x = 33$
$x - 3 = 0$
$12 - x = 7$

b) $8 \cdot x = 32$
$3 \cdot x = 27$
$2 \cdot x = 1$
$12 = 12 \cdot x$
$0 = 5 \cdot x$

c) $x - 7 = 3$
$9 \cdot x = 36$
$20 - x = 12$
$30 = 3 \cdot x$
$19 - x = 19$

69. Řešte rovnici a proveďte zkoušku:

a) $2 \cdot x + 1 = 11$
b) $3 \cdot x - 5 = 22$
c) $2 \cdot x - 1 = 13$
d) $5 \cdot x + 4 = 39$

∗**70.** Řešte rovnici a proveďte zkoušku:

a) $4 \cdot y = 36 - 8$
b) $10 - 6 \cdot y = 7{,}6$
c) $5{,}4 - 1{,}5 = 3 \cdot y$
d) $8{,}2 + 4 \cdot y = 11{,}4$

7 Slovní úlohy

71. Švadlena ustřihla z třicetimetrového balíku hedvábí na 15 stejných halenek. Z balíku jí zbylo 6 m hedvábí. Kolik metrů látky potřebovala k ušití jedné halenky?

72. Obchodník smíchal 5 kg bonbonů po 58 Kč za kilogram s 8 kg bonbonů po 65 Kč za kilogram. Za kolik korun by měl prodávat 1 kg směsi, aby neprodělal?

73. V mlékárně odebrali z cisterny s mlékem poprvé 120 l mléka, podruhé o 30 l více a potřetí dvakrát tolik co poprvé. V cisterně zůstalo 200 l mléka. Kolik litrů mléka bylo v cisterně na začátku?

74. Pavel si chce koupit kapesní svítilnu za 299 Kč. Až bude mít pětkrát tolik, kolik má již našetřeno, bude mu chybět už jen 20 Kč. Kolik Kč mu chybí nyní?

75. Maminka si chtěla objednat z katalogu pro zahrádkáře 3 keře žlutých růží. Cena jednoho balení po třech kusech byla 295 Kč. Za zabalení a poštovné se platí 35 Kč. Pak se domluvila se sousedkou, že si společně objednají větší balení se šesti kusy za 495 Kč. Cena za zabalení a poštovné vyšla nastejno – také 35 Kč.

a) Kolik Kč by maminka zaplatila, kdyby si objednala menší balení?
b) Kolik Kč zaplatily maminka se sousedkou za větší balení?
c) Kolik Kč maminka ušetřila výhodnější objednávkou?

76. Milada pozvala na oslavu svých narozenin 9 spolužáků. Chtěla je překvapit zdravým předkrmem – studenou ovocnou polévkou.
Měla předpis na 4 porce: 6 kusů kiwi, 125 g ananasové dužiny, 150 ml vody, 2 polévkové lžíce (30 ml) citronové šťávy a 2 čajové lžičky máty. Pomozte Miladě a přepište recept tak, aby porce takové polévky vyšly nejen pro všechny pozvané spolužáky, ale i pro ni.

8 Bod, přímka, polopřímka, úsečka

77. Narýsujte tři přímky p, q, r tak, aby jejich průnik byl

a) prázdná množina,
b) jednoprvková množina,
c) nekonečná množina.

78. Pomocí pěti bodů A, B, C, D, E můžete popsat tři dvojice opačných polopřímek z obrázku. Zapište je.

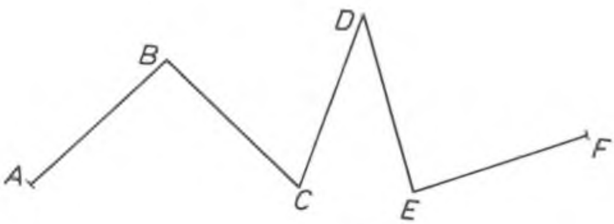
79. Určete podle obrázku:

a) $\mapsto VX \cap \mapsto YZ$
b) $\mapsto YZ \cap \mapsto XV$
c) $\mapsto YV \cap \mapsto YZ$
d) $\mapsto YV \cap \mapsto XZ$
e) $\mapsto YV \cup \mapsto YZ$
f) $\mapsto XZ \cap \mapsto YZ$

80. Narýsujte body P, Q, R a dvě přímky tak, aby na každé z nich ležely právě dva z bodů P, Q, R.

81. Narýsujte body M, N, O, P, Q, R a tři přímky tak, aby na každé z nich ležely právě tři z bodů M, N, O, P, Q, R.

82. Lomená čára $ABCDEF$ na obrázku se skládá z pěti shodných úseček. Určete její délku, je-li $|BC| = 4{,}8\,\text{cm}$.



83. Narýsujte nějaký trojúhelník KLM. Sestrojte středy všech jeho stran a označte je X, Y, Z. Narýsujte trojúhelník XYZ. Přesvědčte se, že každá strana $\triangle XYZ$ je rovnoběžná s jednou ze stran $\triangle KLM$.

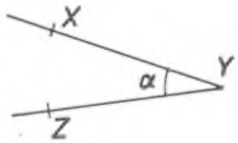
84. Narýsujte přímku p a zvolte na ní bod O. V opačných polorovinách s hraniční přímkou p zvolte body K, L. Sestrojte body K', L' tak, aby bod O byl středem úseček KK' a LL'.

9 Úhel

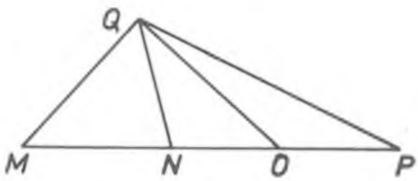
85. Které ze zápisů

a) $\sphericalangle XZY$, b) $\sphericalangle XYZ$, c) α,
d) $\sphericalangle YXZ$, e) $\sphericalangle ZXY$, f) $\sphericalangle ZYX$

úhlu z obrázku jsou chybné?

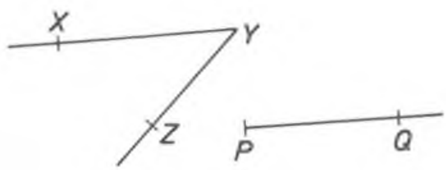


86. Zapište všechny úhly s vrcholem Q z obrázku. (Nulové a plné úhly neuvažujte.)



87. Narýsujte libovolný pravoúhlý trojúhelník. Pomocí kružítka porovnejte jeho ostré vnitřní úhly (a také obě jeho kratší strany).

88. Narýsujte úhel XYZ a polopřímku PQ podobně jako na obrázku. Přeneste úhel XYZ k ramenu PQ do obou polorovin s hraniční přímkou PQ.



89. Narýsujte dva různé úhly AVB a CVD se společným vrcholem V tak, aby jejich průnikem byl

a) ostrý úhel AVD, b) pravý úhel BVC, c) tupý úhel AVC.

■ **90.** Rozmístěte v rovině čtyři pravé úhly tak, aby žádné dva z nich neměly společný bod.

** **91.** Jaký největší počet pravých úhlů se vám podaří rozmístit v rovině tak, aby žádné tři z nich neměly společný bod?

92. Sestrojte úhel o velikosti 48° a kružítkem ho přeneste do tří různých poloh.

93. Na základě odhadu narýsujte úhly o velikostech 40°, 80° a 135°. Přesnost svého odhadu zkontrolujte úhloměrem.

94. Narýsujte úhel $\tau = 100°$ a mimo něj polopřímku VY. Sestrojte úhel XVY shodný s úhlem τ pouze pomocí pravítka a kružítka.

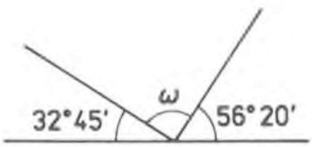
95. Narýsujte tři libovolné nekonvexní úhly α, β a γ a změřte jejich velikosti.

96. Narýsujte a vybarvěte úhly $\lambda = 150°$, $\mu = 210°$ a $\nu = 330°$.

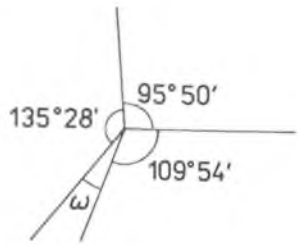
97. Jaký úhel svírají hodinová a minutová ručička ve 13 hodin, v 17 hodin, v 19 hodin, v 22 hodin, o půlnoci? (Uveďte vždy velikost menšího z obou úhlů.)

98. Určete velikost úhlu ω z obrázku:

a)



b)

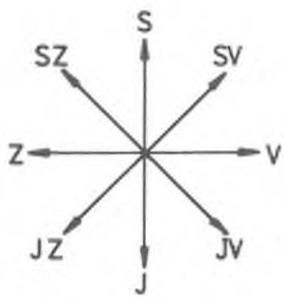


99. Narýsujte přímý úhel AVB a pomocí kružítka a pravítka ho rozdělte na čtyři shodné úhly. Přesnost rýsování zkontrolujte měřením.

100. Narýsujte úhel $\psi = 32°$. Bez použití úhloměru pak sestrojte úhly β, γ, δ a ω o velikostech $\beta = 64°$, $\gamma = 96°$, $\delta = 160°$ a $\omega = 16°$.

101. Narýsujte libovolný trojúhelník PQR. Sestrojte osy všech tří jeho vnitřních úhlů. (Budete-li rýsovat přesně, všechny tři osy se protnou v jediném bodě.)

102. Směrovou růžici z obrázku znáte ze zeměpisu. Určete, jaké úhly svírají následující dvojice směrů: S–V, SV–J, Z–V, SZ–SV, Z–SV. (Nekonvexní úhly neuvažujte.)



103. Narýsujte plánek čtyř přímých cest, které vedou z místa M. První cesta A_1 vede z místa M přímo na sever, druhá cesta A_2 přímo na jihovýchod. Třetí cesta A_3 směřuje o $55°$ „západněji“ než cesta A_2, čtvrtá cesta A_4 o $30°$ „západněji“ než cesta A_1. Určete, jaký úhel svírají cesty A_3 a A_4.

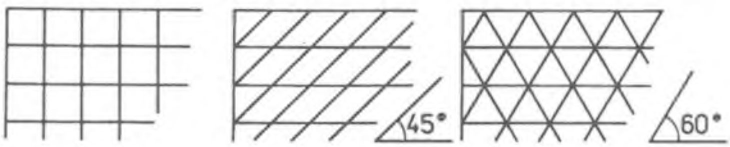
∗**104.** Vypočtěte:

a) $128°30' + 65°40'$ b) $128°30' - 65°40'$

c) $3°20' \cdot 7$ d) $30° : 9$

10 Dvojice přímek, dvojice úhlů

105. Narýsujte do sešitu části sítí z obrázku:



106. Narýsujte čtverec $ABCD$. Každým jeho vrcholem veďte přímku kolmou k úhlopříčce, která tímto vrcholem prochází. Průsečíky těchto přímek označte postupně V, X, Y, Z (po směru hodinových ručiček). Útvar $VXYZ$ silně vytáhněte. Jaký je to obrazec?

107. Narýsujte kružnici k a vyznačte její průměr AB. Na kružnici k zvolte bod X různý od bodů A a B a sestrojte polopřímky XA a XB. Změřte velikost úhlu AXB.

108. Narýsujte úhel:

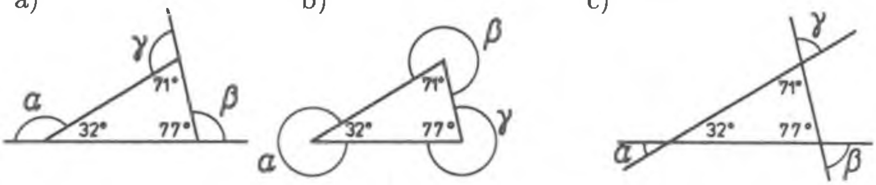
a) $\sigma = 82°$ b) $\varrho = 12°$ c) $\omega = 145°$

K narýsovanému úhlu sestrojte úhel vedlejší. Určete výpočtem jeho velikost a výsledek zkontrolujte měřením.

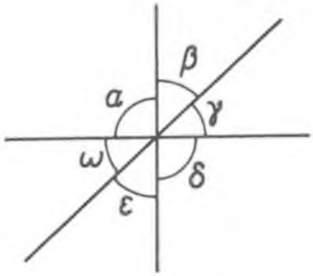
109. Narýsujte libovolný obdélník $KLMN$ a označte S průsečík jeho úhlopříček. Zapište dvojice vrcholových úhlů s vrcholem S.

110. Určete velikosti úhlů α, β a γ z obrázku. Vypočtěte součet $\alpha + \beta + \gamma$.

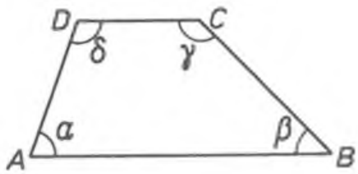
a) b) c)



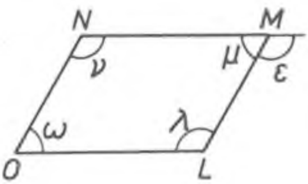
111. Určete velikosti úhlů β, γ, δ a ω z obrázku, je-li úhel α pravý a velikost úhlu ε je 47°.



112. Čtyřúhelník na obrázku má rovnoběžné strany AB a CD. Vypočtěte velikosti jeho vnitřních úhlů β a δ, je-li $\alpha = 70°$ a $\gamma = 135°$.



113. Velikost úhlu ε na obrázku je 118°. Určete velikosti všech vnitřních úhlů čtyřúhelníku $LMNO$, ve kterém $OL \parallel MN$ a $ON \parallel LM$.



114. Pomocí souhlasných úhlů vysvětlete, proč každé dvě kolmice k téže přímce jsou rovnoběžné.

11 Kružnice, kruh

115. Narýsujte podle vzoru v učebnici následující ornamenty, tvořené kružnicí a půlkružnicemi:

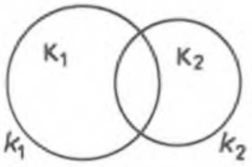
116. Zvolte v rovině tři různé body D, E, F. Sestrojte kružnice k a l, které mají střed v bodě F a pro které platí: $D \in k$, $E \in l$. Obě kružnice zapište symbolicky.

117. Narýsujte libovolný pravoúhlý trojúhelník. Dále sestrojte kružnici, jejímž průměrem je nejdelší strana trojúhelníku.

118. Na obrázku jsou kružnice k_1, k_2, které ohraničují kruhy K_1, K_2. Narýsujte podobný obrázek a barevně v něm vyznačte:

a) $k_1 \cap k_2$

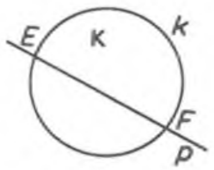
b) $\mathsf{K}_1 \cap \mathsf{K}_2$



119. Kruh K je omezen kružnicí k. Podle obrázku určete a zapište:

a) $p \cap k$

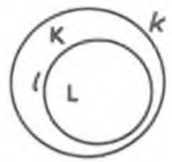
b) $p \cap \mathsf{K}$



120. Kruhy K, L jsou omezeny kružnicemi k, l. Podle obrázku určete a zapište:

a) $k \cap l$ b) $\mathsf{K} \cap l$

c) $k \cap \mathsf{L}$ d) $\mathsf{K} \cap \mathsf{L}$

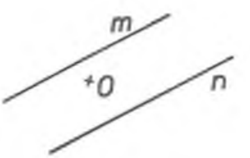


121. Kruh K je omezen kružnicí k. Rozhodněte, zda průměr AB kružnice k je podmnožinou

a) kružnice k, b) kruhu K.

12 Trojúhelník, čtyřúhelník

122. Narýsujte dvě rovnoběžné přímky m, n a zvolte bod O jako na obrázku. Vybarvěte průnik polorovin mO a nO.

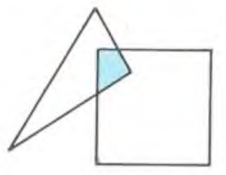


123. Narýsujte dvě různoběžné přímky p, q a zvolte body P, Q tak, aby ležely uvnitř dvou různých úhlů vytvořených přímkami p, q. Vybarvěte průnik polorovin pP a qQ.

124. Trojúhelník má obvod 8 cm a délky jeho stran v centimetrech jsou celá čísla. Která? Najděte všechny možnosti.

125. Narýsujte takový čtyřúhelník, jehož
a) právě jeden vnitřní úhel je pravý,
b) právě dva vnitřní úhly jsou pravé,
c) právě tři vnitřní úhly jsou pravé.

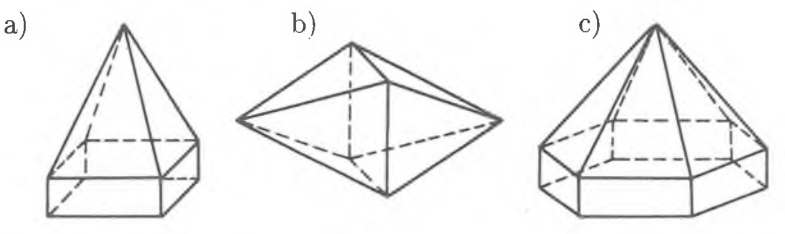
126. Průnikem čtverce a trojúhelníku na obrázku je čtyřúhelník. Načrtněte trojúhelník a čtverec tak, aby jejich průnikem byl
a) bod, b) úsečka,
c) trojúhelník, d) obdélník,
e) pětiúhelník, f) šestiúhelník.



127. Může být
a) kružnice podmnožinou jiné kružnice,
b) kruh podmnožinou jiného kruhu,
c) polorovina podmnožinou jiné poloroviny?

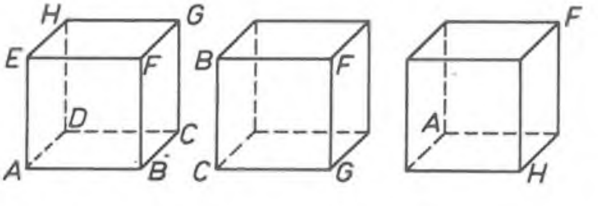
13 Tělesa

128. Kolik vrcholů, hran a stěn mají tělesa na obrázku? Z kterých známých těles je každé z nich „složeno"?

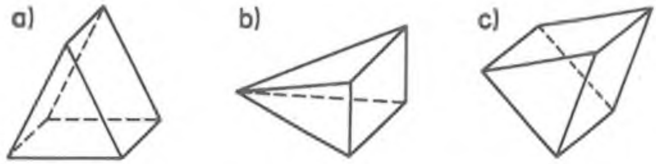


129. Které mnohoúhelníky tvoří stěny
a) krychle, b) kvádru,
c) trojbokého jehlanu, d) trojbokého hranolu?

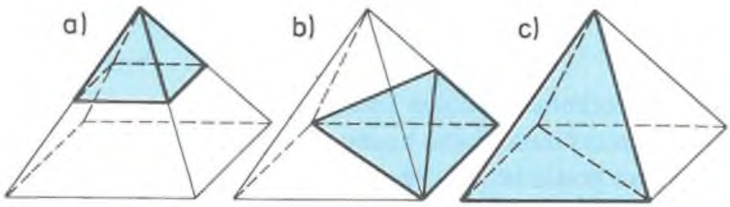
∗**130.** Načrtněte obrázek krychle $ABCDEFGH$ v polohách z obrázku a doplňte popis neoznačených vrcholů.



131. Na kterém obrázku je znázorněn jehlan?

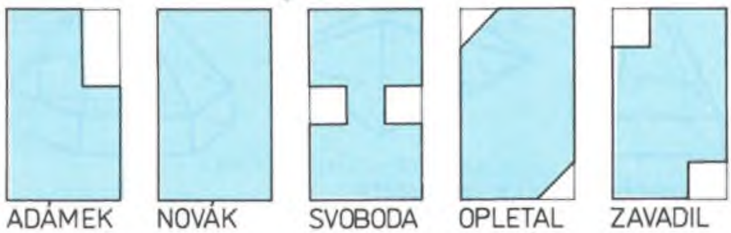


132. Pojmenujte barevně vyznačená tělesa vzniklá odříznutím části jehlanu a určete počty jejich vrcholů, hran a stěn.



14 Několik úloh z matematických soutěží na závěr

■ **133.** Pánové Adámek, Novák, Svoboda, Opletal a Zavadil mají zahrady obehnané ploty. Jejich plánky vidíte na obrázku. Bez měření rozhodněte, který plot je nejkratší a který nejdelší.



■ **134.** Z 35 kartiček hry PEXESO byl sestaven obdélník složený ze 7 řad a 5 sloupců. Z něho bylo odebráno 10 kartiček. Obvod zbylého útvaru zůstal stejný jako obvod obdélníku. Nakreslete aspoň tři možnosti.

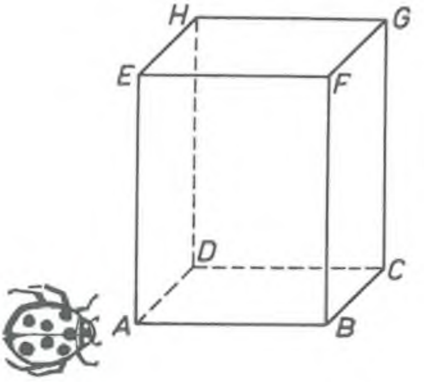
■ **135.** Vyškrtněte ze sedmiciferného čísla 4 713 268 tři číslice tak, abyste dostali co největší číslo.

■ **136.** Vyškrtněte z jedenatřiceticiferného čísla

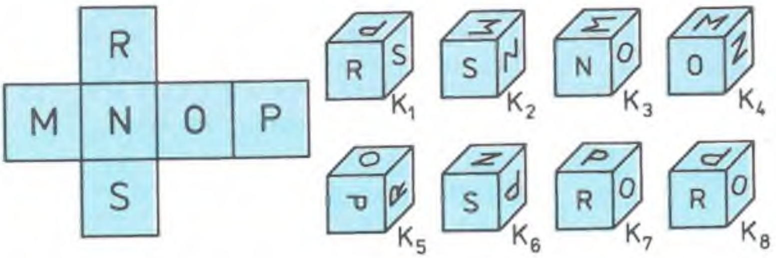
1 243 567 891 011 121 314 151 617 181 920

šest číslic tak, abyste dostali co nejmenší číslo.

■ **137.** Na každé hraně kvádru (viz obr.) mimoběžné s hranou DH čekají pavouci. Mohou se pohybovat po jedné hraně od jednoho vrcholu ke druhému, na vrcholy však nesmějí. Sluněčko sedmitečné se chce po hranách kvádru dostat z vrcholu A do vrcholu G nejkratší cestou, aniž by potkalo pavouka. Po které cestě by se mělo vydat? Najděte všechny možnosti.



■ **138.** Které z osmi kostek na obrázku mohl Mirek zhotovit z papíru s písmeny, jestliže ho pouze ohýbal a slepoval?



VÝSLEDKY PRŮBĚŽNÝCH ÚKOLŮ

1 Číslo a číslice

2. a) $1 \cdot 100\,000\,000 + 0 \cdot 10\,000\,000 + 2 \cdot 1\,000\,000 + 3 \cdot 100\,000 + 0 \cdot 10\,000 + 4 \cdot 1\,000 + 5 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 6 \cdot 1$; b) $8 \cdot 1\,000\,000\,000 + 9 \cdot 100\,000\,000 + 6 \cdot 10\,000\,000 + 5 \cdot 1\,000\,000 + 3 \cdot 100\,000 + 7 \cdot 10\,000 + 8 \cdot 1\,000 + 2 \cdot 100 + 1 \cdot 10 + 6 \cdot 1$. **3.** a) 1 004 004; b) 3 000 000 005, c) 2 105 000. **5.** 1, 2, 11, 12, 21, 22, 112, 121, 211, 122, 212, 221, 1 122, 1 212, 1 221, 2 112, 2 121, 2 211. **6.** 15 čísel. **7.** a) 90; b) 900. **5.** 999, 9 999, 9 999 999. **9.** a) 43 210; b) 10 234. **10.** 12, 39, 460, 1 661, 2 099, 1 411. **11.** XXIX, LVII, LXXIV, CLXIX, CCCXLI, MCXXXII, MCDXCII. **13.** a) I; b) I, V, X, L, C, D, M; c) I, V, X; d) I, V, X, L, C, D, M; e) I, V, X, L, C; f) I, V, X, L, C, D, M. **14.** a) I; b) I; c) I, X; d) I, X; e) I, X, C; f) I, X, C.

2 Množiny

1. $\mathsf{P} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. **2.** a) Ano; b) ne; c) ne; d) ano. **3.** {leden, březen, květen, červenec, srpen, říjen, prosinec}. **4.** Např. množina všech dvojciferných čísel zapsaných dvěma stejnými číslicemi. **5.** a) Množina všech českých tvrdých souhlásek; b) množina všech měsíců hlavních prázdnin; c) množina všech tónů stupnice C dur. **7.** 9 000. **8.** 39. **9.** a) $\{1, 5\}$; b) $\{2, 8\}$; c) $\emptyset$; d) $\{1, 2, 3, 5, 7, 8, 9\}$; e) $\{1, 2, 4, 5, 6, 8\}$; f) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. **11.** $\{t, p\}$; $\{t, g\}$; $\{t, k\}$; $\{p, g\}$; $\{p, k\}$; $\{g, k\}$. **12.** a) Každý prvek množiny Y je také prvkem množiny X; b) $\mathsf{X} \cap \mathsf{Y} = \mathsf{Y}$ a $\mathsf{X} \cup \mathsf{Y} = \mathsf{X}$. **13.** Všechny podmnožiny množiny A obsahující číslo 3. (Je jich osm.) **14.** Ano.

3 Přirozená čísla

1. a) $<$; b) $<$; c) $<$; d) $>$; e) $<$; f) $>$. **2.** a) 1 234, 1 243, 1 324, 1 342, 1 423, 1 432; b) 5 670, 5 760, 6 570, 6 750, 7 560, 7 650. **3.** 155, 156, 157, 158, 159 a 160. **4.** Např. obr. A-1. **5.** $a = 4$, $b = 9$, $c = 12$, $d = 21$. **6.** a) 20; b) 90; c) 120; d) 1 500. **7.** a) 10 465; b) 87 863; c) 5 940; d) 1 355; e) 4 850; f) 6 041. **8.** a) 224 222; b) 137 764. **9.** a) 18, 28, 29; b) 61, 194, 282; c) 1 580, 690, 1 980; d) 889, 566, 564. **10.** a) 123; b) 1 234; c) 12 345; d) 123 456. **11.** a) 288; b) 295; c) 8 543; d) 8 544. **12.** a) 23; b) 45; c) 56; d) 78. **13.** a) 0; b) 88; c) 66; d) 44; e) 22; f) 66. **14.** a) 70; b) 400; c) 160; d) 210. **15.** a) 442; b) 1 710; c) 1 428; d) 12 665; e) 54 972; f) 3 153 150. **16.** a) 2 016; b) 1 692; c) 286; d) 472. **17.** a) 1 386; b) 209; c) 1 212; d) 15 150. **18.** a) 13; b) 9; c) 70; d) 98. **19.** a) 2 (zbytek 7); b) 9 (zbytek 3); c) 4 (zbytek 10); d) 5 (zbytek 10). **20.** 200, 1 300, 100, 0, 100, 10 000, 123 900. **21.** a) 27 052 000; b) 27 000 000; c) 27 052 390; d) 30 000 000; e) 27 052 400; f) 27 100 000. **22.** Ano, např. při zaokrouhlení na tisíce.

4 Desetinná čísla

2. a) 3,7; b) 0,23; c) 5,05. **3.** a) $<$; b) $=$; c) $<$; d) $=$; e) $<$; f) $>$. **4.** Obr. A-2. **5.** a) 5,34; b) 25,39; c) 138,68; d) 8,39; e) 208,8; f) 591,27. **6.** a) 182; 18,2; 1,82; b) 1 188; 118,8; 11,88. **7.** a) 5,67; b) 56,7; c) 0,89; d) 8,9; e) 4,02; f) 40,2. **8.** a) 1 400; 140; 14; 1,4; b) 14 000; 1 400; 140; 14. **9.** a) 564; 56,4; b) 278,1; 27,81; c) 3,7; 0,37.

5 Číselné výrazy

1. a) 21, 11, 18, 9; b) 49, 4, 68, 50; c) 24, 15, 0, 3. **2.** a) 34, 54, 6, 7; b) 14, 54, 17, 2; c) 0, 10, 10, 30. **3.** a) 26; b) 32; c) 5; d) 1. **4.** a) $2\cdot(4+24:6-3)$; b) $2\cdot(4+24:6)-3$; c) $2\cdot 4+24:(6-3)$. **5.** a) 55, 85, 25; b) 49, 91, 19. **6.** a) 96; b) 97; c) 98; d) 99; e) 100.

6 Rovnice

1. a) Ne; b) ano; c) ano. **2.** a) $x = 12$; b) $x = 8$; c) $x = 5$; d) $x = 20$. **3.** a) $x = 5$; b) $x = 5$; c) $x = 2$; d) $x = 0{,}5$; e) $x = 6$; f) $x = 1$. **4.** a) 2, 3; b) 1, 2.

8 Bod, přímka, polopřímka, úsečka

1. Ano, pokud $A = B$. **2.** a) Jednu; b) leží-li body na přímce, pak jedinou přímku, jinak tři. **3.** $A \in a$, $B \notin a$, $C \notin a$, $D \in a$. **5.** Nejsou. **6.** a) Ano; b) ne. **7.** Je jich šest: polopřímky BA, BC, CA, AB a polopřímky opačné k polopřímkám AB a CA. **10.** Pro všechny.

9 Úhel

2. a) $\sphericalangle MON$ nebo $\sphericalangle NOM$; b) $\sphericalangle PQR$ nebo $\sphericalangle RQP$. **3.** a) A; b) A, J, S, O, P, N; c) J, A, N; d) J, A, N, S, P, Z, E; e) O. **4.** Např. obr. A-3. **5.** Úhel μ je „menší“ než úhel ψ. **6.** a) Ano; b) ne. **7.** β. **10.** β, δ, γ. **11.** $\psi = 110°$, $\varphi = 160°$. **12.** Obr. A-4. **13.** a) Ostrý; b) tupý; c) nekonvexní; d) nekonvexní; e) nulový; f) plný. **14.** a) $\beta = 63°$; b) $\beta = 106°$; c) $\delta = 73°$; d) $\alpha = 40°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 80°$; e) $\alpha = 60°$, $\beta = 90°$, $\gamma = 120°$; f) $\gamma = 55°$. **15.** a) $\alpha = 50°$; b) $|\sphericalangle XYZ| = 114°$; c) $\varphi = 295°$. **16.** Obr. A-5. **17.** a) 120′, 360′, 900′, 1 260′, 3 000′, 5 400′; b) 90′, 320′, 425′, 610′. **18.** a) 2°, 3°, 7°, 60°, 90°; b) 1°40′, 3°10′, 4°10′, 8°20′, 16°40′. **19.** a) 80°19′; b) 24°35′; c) 82°21′; d) 13°20′; e) 9°9′9″; f) 82°22′21″. **20.** a) $\beta = 139°35'$; b) $\beta = 319°35'$; c) $\beta = 49°35'$. **21.** a) 3°20′; b) 2°30′; c) 1°15′; d) 25′. **22.** Na čtyři shodné úhly velikosti 40°. **23.** Nejprve sestrojíme přímý úhel, pak pomocí jeho osy pravý úhel. Ten nakonec „rozpůlíme“ osou na dva úhly o velikosti 45°.

10 Dvojice přímek

2. a) $p \perp q$; b) $p \parallel r$; c) $r \perp q$. **3.** a) Jedinou; b) nekonečně mnoho; c) jedinou. **4.** a) 6; b) 9. **5.** a) $|MN| = 4$ cm; b) $|Np| = 0{,}8$ cm; c) $|pq| = 1{,}4$ cm. **6.** Nekonečně mnoho, jejich množinou jsou dvě rovnoběžky s přímkou q ve vzdálenosti 2 cm. **7.** Nekonečně mnoho. **9.** Obr. A-6, existují dva takové body. **10.** Buď 1 cm, nebo 5 cm.

11 Dvojice úhlů

1. a) Ne; b) ano; c) ne. **2.** a) Ano; b) ne; c) ne. **3.** a) 60°; b) 50°. **4.** a) Je také pravý; b) je ostrý. **5.** a) 60°; b) 55°; c) 121°; d) 61°. **6.** a) Ano; b) ano; c) ne.

12 Kružnice, kruh

1. Ne. **2.** b), c), f). **5.** Kruhu patří body A, S, B.

13 Trojúhelník, čtyřúhelník

2. Úhel BAC; trojúhelník ABC. **5.** Trojúhelník ABC v případě c) neexistuje. **6.** a) 16,5 cm; b) 9 cm; c) 10,5 cm. **7.** 4 cm. **8.** 11,3 cm. **9.** Jeden ostroúhlý, jeden pravoúhlý, tři tupoúhlé. **14.** $o = 144\,\mathrm{mm}$, $S = 1\,296\,\mathrm{mm}^2$. **15.** $o = 21\,\mathrm{cm}$, $S = 20\,\mathrm{cm}^2$.

14 Přímky a roviny v prostoru

2. a) Např. roviny ABC a EFH, $A_1B_1C_1$ a $A_2B_2C_2$; b) např. roviny ABC a ABE, $A_1B_1B_2$ a $B_1C_1C_2$. **4.** a) Např. přímka AB a rovina $A'B'C'$, přímka A_1A_2 a rovina $E_2E_1D_1$; b) např. přímka AB a rovina BCC', přímka A_1A_2 a rovina $A_1B_1D_1$. **6.** Např. přímky AB a CG, AB a ED, ED a FG.

15 Tělesa

2. 8 vrcholů, 6 stěn, 12 hran. **3.** a) 8 s třemi modrými stěnami, 12 s dvěma modrými stěnami, 6 s jednou modrou stěnou, 1 s žádnou modrou stěnou; b) 8 s třemi modrými stěnami, 24 s dvěma modrými stěnami, 24 s jednou modrou stěnou, 8 s žádnou modrou stěnou. **6.** 6 vrcholů, 6 stěn, 10 hran.

VÝSLEDKY CVIČENÍ

Cvičení 1

1. a) 1 624; b) 56 008; c) 3 002 000 017. **3.** 17 000 000 000, 5 000 000 000, 4 000 000 000, 440 000 000. **4.** a) 7 029; b) 54 500. **5.** a) $6 \cdot 1\,000 + 3 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 5 \cdot 1$; b) $3 \cdot 100\,000 + 1 \cdot 10\,000 + 1 \cdot 1\,000 + 9 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 7 \cdot 1$. **6.** a) 404 004; b) 988 988. **7.** a) $57 < 75 < 505 < 570 < 750 < 5\,007 < 7\,005 < 7\,070 < 7\,500$; b) $678\,785 < 678\,857 < 678\,768\,688\,578 < 678\,785\,768\,578$. **8.** a) 997, 1 001; b) 63 997, 64 001; c) 4 748 999, 4 749 003; d) 7 097, 7 101; e) 68 999, 69 003; f) 4 999 997, 5 000 001. **9.** a) Čtyřciferné; b) šesticiferné; c) devíticiferné. **10.** a) Jednou; b) jedenáctkrát; c) stodvaadevadesátkrát. **11.** 11, 15, 16, 51, 55, 56, 61, 65, 66. **12.** $11 < 13 <$ $< 16 < 19 < 31 < 33 < 36 < 39 < 61 < 63 < 66 < 69 < 91 < 93 < 96 < 99$. **13.** $102 < 103 < 120 < 123 < 130 < 132 < 201 < 203 < 210 < 213 < 230 <$ $< 231 < 301 < 302 < 310 < 312 < 320 < 321$. **15.** XL, XLI, XLII, XLIII, XLIV, XLV, XLVI, XLVII, XLVIII, IL, L, LI, LII, LIII, LIV, LV, LVI, LVII, LVIII, LIX, LX. **16.** a) III, XXX, CCC, MMM; b) V, XXV, XXXV, XCV, CCL, CCCL, MMD, MMMD; c) II, XXVIII, XXXII, CCLXXX, CCCXX, MMDCCC, MMMCC; d) CXCV, CLXXXV, CLXV, MCM, MCML, MDCCCL, MDCL; e) VIII, XVIII, XXXVIII, DCCCLXXXVIII. **17.** 99, 209, 379, 707, 428, 1 995, 2 000, 1 999, 1 990. **18.** 36, 1575, 1424, 1486, 1593.

Cvičení 2

1. $A = \{16, 26, 36, 46, 56, 66, 76, 86, 96\}$. **2.** a) $B = \{B, R, A, M, O\}$; b) $K = \{K, A, L, E, N, D, Á, Ř\}$; c) $P = \{J, E, L, N, O, V, I, P\}$. **3.** $\{Z, a, p, i, š, t, e, m, n, o, ž, u, v, ch, í, s, é, ě, y\}$. **4.** Např. množina všech: a) písmen slova číslo; b) písmen slova kolo; c) písmen slova matematika; d) „slov“, která lze získat různým seřazením písmen slova tma. **5.** Např. množina všech: a) volných dnů v „obvyklém“ týdnu; b) písmen slova molo. **6.** Např. množina všech moří, které omývají území naší republiky. **7.** a) Nekonečná; b) nekonečná; c) konečná; d) konečná. **8.** Není. **9.** a) $T = \{3, 6, 9, 12\}$; b) $B = \{10\}$; c) $P = \{10, 11, 12\}$; d) $J = \{1, 10, 11, 12\}$. **10.** $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, $\{a, b, c\}$. **11.** $A \cap B = \{6\}$, $A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10\}$. **12.** a) $\{1, 2, 4, 5, 6, 8, 10\}$; b) $\{1, 3, 5, 7, 9, 10\}$; c) $\{2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10\}$; d) $\{10\}$; e) $\{10\}$; f) $\{10\}$. **13.** a) $\{b, f, k, l, o\}$; b) $\{a, b, c, d, e, k, o\}$; c) $\{a, b, c, d, e, f, l, o\}$; d) $\{o\}$; e) $\{b\}$; f) $\emptyset$.

Cvičení 3

1. 90. **2.** a) 77 778 nebo 77 787; b) 101 111, 110 111 nebo 111 011; c) 600 066, 600 606, 600 660 nebo 606 006; d) 21 120, 21 201, 21 210, 22 011, 22 101 nebo 22 110; e) 434 030, 434 300, 440 033, 440 303, 440 330, 443 003, 443 030 nebo 443 300; f) 441 323, 441 332, 442 133, 442 313, 442 331, 443 123, 443 132, 443 213, 443 231, 443 312 nebo 443 321. **3.** 4 125, 4 152, 4 215, 4 251, 4 512, 4 521. **4.** Např. obr. B-1. **5.** a) 220; b) 160; c) 1 040; d) 2 110. **6.** a) 123; b) 5 367; c) 8 910; d) 203. **7.** a) 1 974; b) 20 703; c) 17 486. **8.** a) 370; b) 81; c) 84; d) 909. **9.** a) 78 a 89; b) 89 a 12; c) 78 a 89; d) 12 a 23; e) 45 a 43; f) 12 a 23. **10.** a) 59, 81, 107, 134, 450; b) 13, 35, 61, 88, 404; c) 470, 448, 422, 395, 79. **11.** 154. **12.** a) 9 875; b) 13 200. **13.** a) 10 122 a 7 654; b) 10 122 a 5 432; c) 10 122 a 3 210. **14.** a) 0; b) 212; c) 106. **15.** a) 120; b) 1 200; c) 2 700; d) 7 000; e) 5 015; f) 1 485. **16.** a) 55; b) 15; c) 100; d) 354; e) 354; f) 354; g) 272; h) 415; i) 2 646. **17.** a) 732 555; b) 343 368; c) 673 680; d) 3 198 380; e) 753 750; f) 248 500. **18.** a) 8, 12, 16, 20, 32, 40, 80; b) 6, 9, 12, 15, 24, 30, 60; c) 2, 3, 4, 5, 8, 10, 20. **19.** a) 42; b) 436; c) 4 757; d) 502; e) 322; f) 1 203. **20.** a) 37; b) 307; c) 73. **21.** a) 123 (zbytek 11); b) 45 (zbytek 21); c) 678 (zbytek 31). **22.** a) 11, 101, 1 010, 10 101; b) 11, 101, 1 001, 101 001. **23.** Např. obr. B-2. **24.** a) 9; b) 5, 6, 7, 8, 9; c) 0, 1, 2; d) 0, 1, 2, 3; e) 0, 1, 2, 3, 4, 5; f) 0, 1, 2; g) 7, 8, 9; h) 0, 1; i) 0, 1, 2, 3, 4, 5. **25.** 1,05; 1,5; 1,55; 1,56; 1,6; 1,65; 2,06. **26.** 2,53; 2,83; 3,13; 3,43; 3,73; 4,03; 4,33; 4,63; 4,93; 5,23. **27.** 1,3; 1,23; 1,16; 1,09; 1,02; 0,95; 0,88; 0,81; 0,74; 0,67. **28.** První řádek: 0,8; 1,5; 0,64; 1,43; 2,1; 2,97; druhý řádek: 0,25; 0,95; 0,09; 0,88; 1,55; 2,42; třetí řádek: 1,4; 2,1; 1,24; 2,03; 2,7; 3,57; čtvrtý řádek: 5,63; 6,33; 5,47; 6,26; 6,93; 7,8. **29.** a) 0,3; 0,66; 0,94; b) 3,2; 2,96; 0,25; c) 0,14; 0,16; d) 11,04; 2,25; e) 0,7; 5,16; f) 7,56; 2,15. **30.** a) 372,74; b) 20,83; c) 123,28; d) 1 000; e) 2 876,6; f) 85,86. **31.** a) 1,4; 0,68; 11,24; b) 2,1; 1,02; 16,86; c) 4,9; 2,38; 39,34. **32.** a) 0,2; b) 0,08; c) 0,39; d) 10,93; e) 182,41; f) 164,7. **33.** První řádek: 60; 4; 0,9; 2,7; 35; 80,7; druhý řádek: 600, 40, 9, 27, 350, 807. **34.** a) 50; b) 6; c) 0,4; d) 0,7; e) 0,08; f) 0,03; g) 0,34; h) 0,71; i) 8,7.

Cvičení 4

1. a) 10, 4, 10, 46, 6; b) 29, 0, 0, 48, 6; c) 12, 23, 17, 32, 2. **2.** a) 31; b) 18; c) 20; d) 18; e) 31; f) 42. **3.** a) 7, 30, 2, 21, 5; b) 140, 235, 48, 38, 48. **4.** a) $(2 + 8) \cdot 3 - 20 = 10$; b) $2 \cdot (5 + 40 - 15) : 6 = 10$; c) $8 \cdot 5 - (17 + 13) = 10$; d) $13 - (25 - 10) : 5 = 10$. **5.** Všechny. **6.** a) 13; b) 14; c) 15; d) 16. **7.** a) $x = 24$, $x = 15$, $x = 3$, $x = 7$; b) $y = 8$, $y = 2$, $y = 3$, $y = 1$; c) $t = 1$, $t = 5$, $t = 64$, $t = 0$. **8.** a) $x = 7$; b) $x = 7{,}2$; c) $x = 5$; d) $x = 8$; e) $x = 10$; f) $x = 11$. **9.** a) $m = 3$; b) $m = 4{,}3$; c) $m = 6{,}3$; d) $m = 0{,}3$. **10.** 4.

Cvičení 5

1. a) 13 K; b) 28,80 K; c) 60 K; d) 100 K; e) 210 K. **2.** Nejméně 13,8 m stužky. **3.** 12 Kč. **4.** 166 950 Kč. **5.** Nakoupí-li v druhém obchodě, ušetří 61 Kč. **6.** 13.

Cvičení 6

1. Např. obr. B-3. **2.** Např. obr. B-4. **3.** Např. obr. B-5. **4.** $\mapsto X_1N$, $\mapsto X_2O$, $\mapsto X_3P$, $\mapsto X_4Q$, $\mapsto X_1X_2$, $\mapsto X_2X_1$, $\mapsto X_2X_3$, $\mapsto X_3X_2$, $\mapsto X_3X_4$, $\mapsto X_4X_3$ a polopřímky opačné k $\mapsto X_1X_2$ a k $\mapsto X_4X_3$. **5.** Např. obr. B-6. **6.** JK, JL, JM, KL, KM, LM. **9.** Obr. B-7.

Cvičení 7

2. 20. **4.** Jsou shodné. **8.** Např. obr. B-8. **9.** Např. obr. B-9. **10.** a) $\alpha = 63°$, $\beta = 78°$, $\gamma = 39°$; b) $\alpha = 19°$, $\beta = 120°$, $\gamma = 41°$. (Součet je vždy 180°.) **13.** a) $\alpha = 95°$, $\beta = 228°$, $\gamma = 37°$; b) $\omega = 8°$, $\psi = 80°$, $\varphi = 272°$. (Součet je vždy 360°.) **14.** Obr. B-10. **15.** $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$. **16.** a) 148°30′; b) 16°50′. **17.** a) 85°; b) 26°15′; c) 142°30′; d) 273°55′. **18.** a) 23°35′; b) 30°58′. **19.** Písmeno Y: 2 osy na jedné přímce, písmeno X: 4 osy na dvou navzájem kolmých přímkách (nebereme-li v úvahu přímé úhly.) **21.** 90°. **22.** Využijte osu úhlu. **23.** a) 6°; b) 120°; c) 330°. **24.** a) 30°; b) 15°; c) 5°; d) 90°; e) 150°; f) 210°. **25.** a) 165°; b) 135°; c) 40°.

Cvičení 8

1. Jsou rovnoběžné. **2.** Trojúhelník. **4.** Např. zmenšený obr. B-11. **6.** $\beta = \delta = 149°20'$, $\gamma = 30°40'$. **7.** $\sphericalangle CAB \cong \sphericalangle CDE$, $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle DEC$, $\sphericalangle ACB \cong \sphericalangle ECD$. **8.** $\sphericalangle ALK$ a $\sphericalangle CQL$, $\sphericalangle KLM$ a $\sphericalangle LQO$, $\sphericalangle ALQ$ a $\sphericalangle CQP$, $\sphericalangle MLQ$ a $\sphericalangle OQP$, $\sphericalangle LMN$ a $\sphericalangle QOM$, $\sphericalangle LMO$ a $\sphericalangle QOP$, $\sphericalangle OMB$ a $\sphericalangle POD$, $\sphericalangle NMB$ a $\sphericalangle MOD$. **9.** $\beta = \gamma = 36°$, $\delta = 144°$. **10.** Ano.

Cvičení 9

5. a) Ne; b) ano. **6.** $K \in \mapsto pM$ a $K \in \mapsto pL$, $L \in \mapsto pL$, $M \in \mapsto pM$, $N \in \mapsto pM$ a $N \in \mapsto pL$. **7.** Obr. B-12; nekonečně mnoho, neboť bod $B \neq C$ lze na přímce p zvolit libovolně. **8.** 90°. **11.** a) A, B, C, D, R, Y, X; b) X; c) Z, S. **12.** $ABCD$, $AEFD$, $AEGD$, $AGFD$, $EBCF$, $EBCG$. **13.** a) 36 cm²; b) 4 cm; c) 72 cm². **14.** 6 cm.

Cvičení 10

3. a) 4 vrcholy, 6 hran, 4 stěny; b) 5 vrcholů, 8 hran, 5 stěn; c) 6 vrcholů, 10 hran, 6 stěn; d) $n+1$ vrcholů, $2 \cdot n$ hran, $n+1$ stěn. **4.** 48 vrcholů, 72 hran, 26 stěn. **5.** a) Trojboký hranol; b) trojboký jehlan; c) čtyřboký hranol; d) trojboký jehlan. **6.** T_1: 12 drátů po 20 cm; T_2: 8 drátů po 30 cm; T_3: 6 drátů po 40 cm; T_4: 8 drátů po 12 cm a 4 dráty po 36 cm; T_5: 15 drátů po 16 cm; T_6: 4 dráty po 15 cm a 4 dráty po 45 cm; T_7: 12 drátů po 8 cm a 6 drátů po 24 cm.

VÝSLEDKY SOUHRNNÝCH CVIČENÍ

1 Číslo a číslice

1. $2\cdot 100\,000+0\cdot 10\,000+3\cdot 1\,000+7\cdot 100+9\cdot 10+8\cdot 1$. **2.** a) 1 001 a 991; b) 1 102 a 1 092; c) 94 004 a 93 994; d) 100 004 a 99 994; e) 2 499 007 a 2 498 997; f) 3 100 009 a 3 099 999. **3.** a) 23 798; b) 20 378. **4.** 50, 55, 57, 70, 75, 77. **5.** 739 251. **6.** a) 12, 13, 14, 21, 23, 24, 31, 32, 34, 41, 42, 43; b) 123, 124, 132, 134, 142, 143, 213, 214, 231, 234, 241, 243, 312, 314, 321, 324, 341, 342, 412, 413, 421, 423, 431, 432. **7.** Číslo o 222 cifrách. **8.** a) Dvanáctkrát; b) jedenadvacetkrát. **9.** a) 121; b) 2 442; c) 61 105. **10.** a) 101 010, 101 100, 110 001, 110 010, 110 100, 111 000; b) 100 011, 100 101, 100 110, 101 001, 101 010, 101 100. **11.** Např. a) $18+81=99$; b) $53+30=83$; c) $15\cdot 5=75$; d) $36:6=6$. **12.** a) Trojciferné nebo čtyřciferné; b) pěticiferné nebo šesticiferné; c) trojciferné. **13.** a) Příchod Konstantina a Metoděje na Moravu; b) upálení Jana Husa; c) vznik Československé republiky. **14.** Např. a) XCV, XCVI, XCVII, XCVIII, IC, C, CI, CII, CIII, CIV, CV; b) CMXCIV, CMXCV, CMXCVI, CMXCVII, CMXCVIII, IM, M, MI, MII, MIII. **15.** a) I + V = VI, I + IV = V; b) XX − III = XVII; c) X + IV = XIV, X+VI=XVI.

2 Množiny

18. {Atlantský oceán, Indický oceán, Severní ledový oceán, Tichý oceán}. **19.** a) Množina všech u nás běžných jehličnanů; b) množina všech českých obojetných souhlásek. **20.** a) $\{1,2,3,4,5,7,9\}$; b) $\{1,2,3,4,5,7,9,10\}$; c) $\{1,2,3,4,9,10\}$; d) $\{1,3\}$; e) $\{9\}$; f) $\{2,4\}$. **21.** a) P; b) $\{100,101,102,103,104\}$; c) $\emptyset$. **22.** a) {a, e, i, o, u} (písmena i, y představují jednu hlásku); b) {ž, š, č, ř, c, j, ď, ť, ň}. **23.** $\{\heartsuit, \triangle, \star\}$, $\{\heartsuit, \triangle, \odot\}$, $\{\heartsuit, \star, \odot\}$, $\{\triangle, \star, \odot\}$. **24.** $\emptyset$, {l}, {o}, {s}, {l, o}, {l, s}, {o, s}, {l, o, s}. **25.** $\{1,10\}$, $\{1,11\}$, $\{1,20\}$, $\{10,11\}$, $\{10,20\}$, $\{11,20\}$. **26.** a) {R, U}; b) {V, Z, L, E, T}; c) {50}.

3 Přirozená čísla

27. Číslo o 376 číslicích. **28.** Např. obr. C-1. **29.** a) 117 a 321; b) 5 026 a 6 520. **30.** a) 2 238 a 666; b) 44 434 a 26 848. **31.** a) 100; b) 217; c) 1 500; d) 830. **32.** a) 28; b) 28; c) 138; d) 94. **33.** a) 343; b) 657; c) 257; d) 343. **35.** a) Zvětší se o 17; b) zvětší se o 3. **36.** a) Zmenšit o 23; b) zmenšit o 73; c) zvětšit o 27. **37.** a) 21, 35, 49, 63, 70, 77, 84, 105 a 140; b) 33, 55, 77, 99, 110, 121, 132, 165 a 220; c) 90, 150, 210, 270, 300, 330, 360, 450 a 600. **38.** a) 740; b) 3 800; c) 1 700; d) 30 700; e) 9 800; f) 6 900. **39.** $72=8\cdot 9$, $96=8\cdot 12$, $112=8\cdot 14$, $160=8\cdot 20$, $184=8\cdot 23$, $208=8\cdot 26$, $400=8\cdot 50$, $792=8\cdot 99$. **40.** a) 2 070; b) 8 645; c) 244 056; d) 7 935; e) 74 100; f) 427 098; g) 233 910; h) 750 880; i) 23 947 995. **41.** a) 1 080, 2 295, 3 375; b) 6 512, 8 954, 15 466. **42.** a) $>$; b) $<$; c) $<$; d) $<$. **43.** 32 a 24. **44.** První řádek: 6, 8, 21, 22; druhý řádek: 8, 12, 11, 13. **45.** a) 35, 21, 15; b) 96, 64, 48; c) 270, 135, 90. **46.** a) 12; b) 9; c) 35. **47.** a) 14 (zbytek 1); b) 23 (zbytek 2); c) 23 (zbytek 3); d) 33 (zbytek 9); e) 125 (zbytek 10); f) 19 (zbytek 71). **48.** 142 857 týdnů, 2 739 let.

4 Desetinná čísla

50. 1,03 a 1,55. **51.** a) 0,07; 0,57; 0,35; 0,53; 0,37; 0,05; 0,03; b) 0,57; 0,75; 0,53; 0,37. **52.** Obr. C-2. **53.** a) 0,7; 0,94; 0,28; 0,89; b) 1,6; 1,96; 0,7; 0,93; c) 2,9; 2,65; 0,8; 1,15. **54.** a) 44,07; b) 55,3; c) 100,31. **55.** a) 0,28; 9,28; b) 1,45; 1,95; c) 3,05; 2,95. **56.** a) 18,09 a 6,61; b) 51,15 a 21,75. **57.** a) 7,6; b) 30,09. **58.** a) 7,4; 14,8; 22,2;

b) 2,16; 4,32; 6,48; c) 2; 0,4; 0,2; d) 35; 350; 35; e) 4,08; 40,8; 54,4; f) 468; 46,8; 4,68. **59.** 5; 1; 0,2; 0,07; 0,6; 0,9; 1,1. **60.** a) 0,29; b) 0,74; c) 3,01; d) 4,8; e) 0,34; f) 11,5. **61.** a) 60,6; b) 50,5; c) 24. **62.** a) 8; 0,08; 0,8; b) 4; 0,4; 0,04; c) 0,64; 6,4; 0,64. **63.** 43krát.

5 Číselné výrazy

64. a) 14, 39, 13, 81; b) 22, 0, 65, 27. **65.** a) 3, 33, 3, 33; b) 42, 28, 88, 30. **66.** a) 191; b) 973; c) 10 000; d) 3 600; e) 2 394; f) 210; g) 99; h) 96. **67.** a) 7, 240, 960, 1 416; b) 158, 600, 20, 12.

6 Rovnice

68. a) $x = 5$, $x = 11$, $x = 22$, $x = 3$, $x = 5$; b) $x = 4$; $x = 9$; $x = 0{,}5$; $x = 1$; $x = 0$; c) $x = 10$, $x = 4$, $x = 8$, $x = 10$, $x = 0$. **69.** a) $x = 5$; b) $x = 9$; c) $x = 7$; d) $x = 7$. **70.** a) $y = 7$; b) $y = 0{,}4$; c) $y = 1{,}3$; d) $y = 0{,}8$.

7 Slovní úlohy

71. 1,6 m. **72.** Nejméně za 62,40 Kč. **73.** 710 l. **74.** 243 Kč a 20 hal. **75.** a) 330 Kč; b) 530 Kč; c) 65 Kč. **76.** 15 kiwi, 312,5 g ananasové dužiny, 375 ml vody, 5 lžic (75 ml) citronové šťávy a 5 lžiček máty.

8 Bod, přímka, polopřímka, úsečka

77. Např. obr. C-3. **78.** $\mapsto BA$ a $\mapsto BC$; $\mapsto CA$ a $\mapsto CD$; $\mapsto DA$ a $\mapsto DE$. **79.** a) Polopřímka YZ; b) $\emptyset$; c) $\{Y\}$; d) úsečka XY; e) přímka VZ; f) polopřímka YZ. **80.** Např. obr. C-4. **81.** Např. obr. C-5. **82.** 24 cm. **84.** Např. obr. C-6.

9 Úhel

85. a), d), e). **86.** $\sphericalangle MQN$, $\sphericalangle MQO$, $\sphericalangle MQP$, $\sphericalangle NQO$, $\sphericalangle NQP$, $\sphericalangle OQP$. **89.** Např. obr. C-7. **90.** Např. obr. C-8. **91.** Osm, např. obr. C-9. **96.** Např. obr. C-10. **97.** 30°, 150°, 150°, 60°, 0°. **98.** a) 90°55′; b) 18°48′. **100.** Obr. C-11. **102.** 90°, 135°, 180°, 90°, 135°. **103.** 140°. **104.** a) 194°10′; b) 62°50′; c) 23°20′; d) 3°20′.

10 Dvojice přímek, dvojice úhlů

106. Čtverec. **107.** Obr. C-12, $|\sphericalangle AXB| = 90°$. **108.** a) 98°; b) 168°; c) 35°. **109.** $\sphericalangle KSL$ a $\sphericalangle NSM$; $\sphericalangle KSN$ a $\sphericalangle LSM$. **110.** a) $\alpha + \beta + \gamma = 360°$; b) $\alpha + \beta + \gamma = 900°$; c) $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. **111.** $\beta = 47°$, $\gamma = \omega = 43°$, $\delta = 90°$. **112.** $\beta = 45°$, $\delta = 110°$. **113.** $\omega = \mu = 62°$, $\lambda = \nu = 118°$. **114.** Souhlasné úhly u kolmic jsou pravé, a proto shodné, takže kolmice jsou skutečně rovnoběžné.

11 Kružnice, kruh

116. $k(F;\ r = |FD|)$, $l(F;\ r = |FE|)$. **118.** Obr. C-13. **119.** a) $\{E, F\}$; b) úsečka EF. **120.** a) $\emptyset$; b) l; c) $\emptyset$; d) L. **121.** a) Není; b) je.

12 Trojúhelník, čtyřúhelník

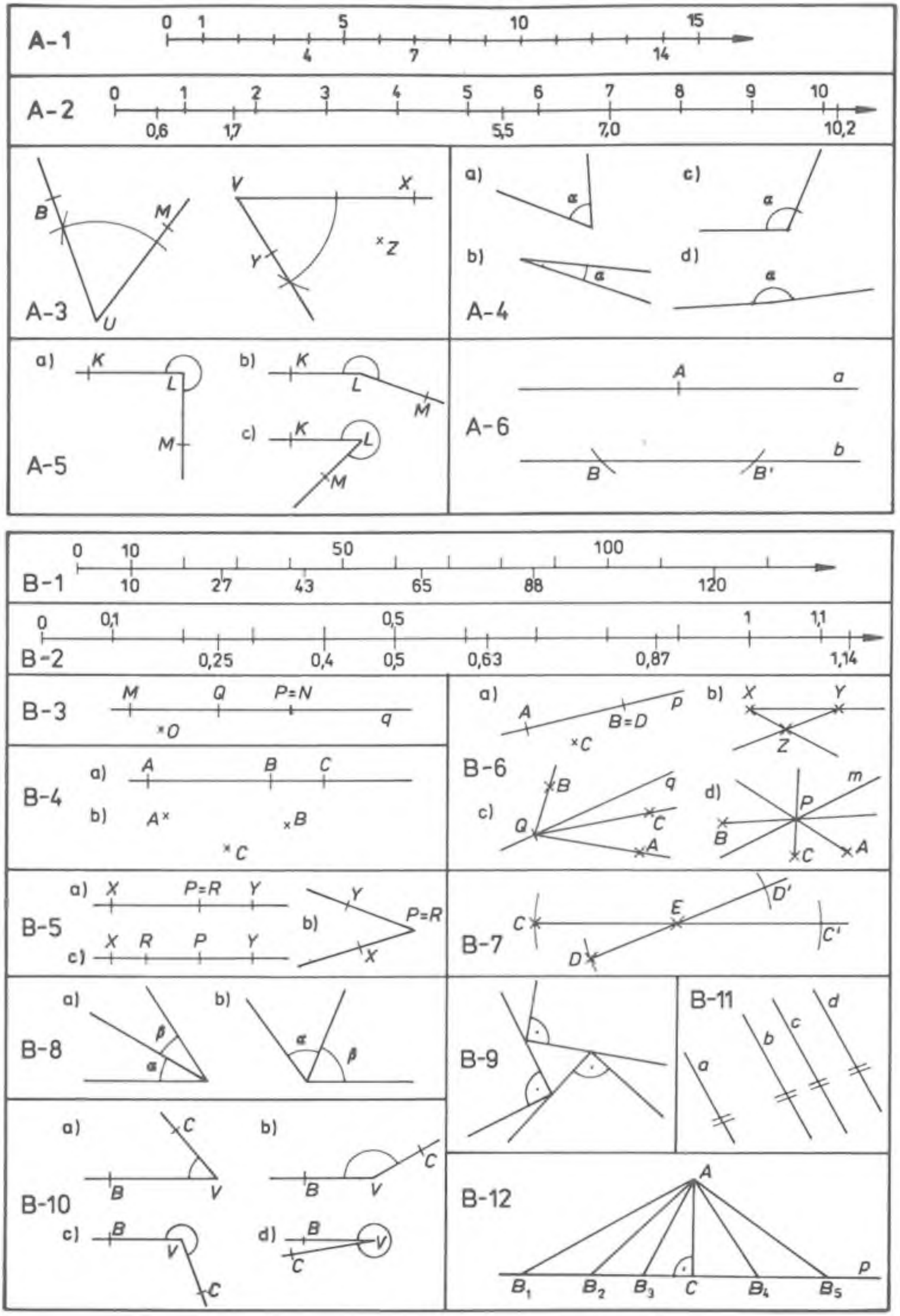
122. Obr. C-14. **123.** Např. obr. C-15. **124.** 2, 3 a 3. **125.** Příklady a) a b) jsou na obr. C-16, příklad c) neexistuje. **126.** Např. obr. C-17. **127.** a) Jen pokud obě kružnice mají stejný střed i stejný poloměr; b) ano; c) ano.

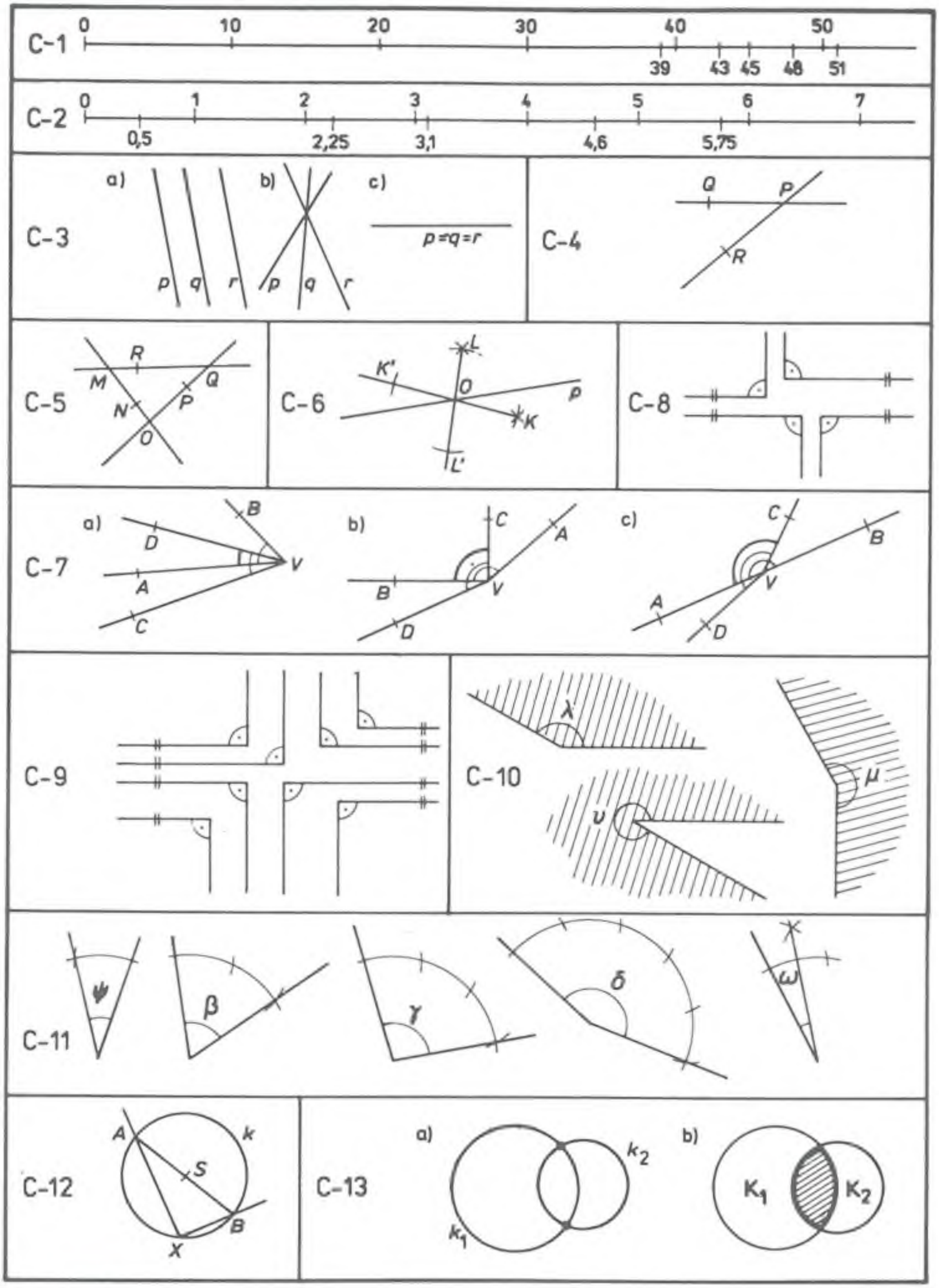
13 Tělesa

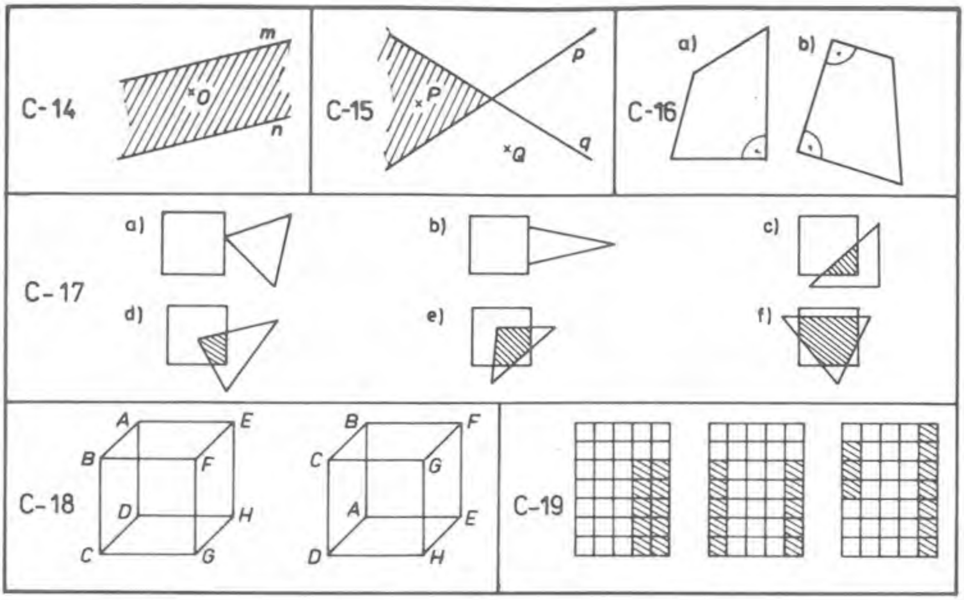
128. a) 9 vrcholů, 16 hran, 9 stěn; jehlan a kvádr; b) 6 vrcholů, 12 hran, 8 stěn; dva jehlany; c) 13 vrcholů, 24 hran, 13 stěn; jehlan a hranol. **129.** a) Čtverce; b) obdélníky nebo čtverce; c) trojúhelníky; d) trojúhelníky a obdélníky (čtverce). **130.** Obr. C-18. **131.** Na prostředním obrázku. **132.** a) Čtyřboký jehlan – 5 vrcholů, 8 hran, 5 stěn; b) trojboký jehlan – 4 vrcholy, 6 hran, 4 stěny; c) trojboký jehlan – 4 vrcholy, 6 hran, 4 stěny.

14 Několik úloh z matematických soutěží na závěr

133. Nejkratší plot je u Opletalovy zahrádky, nejdelší u Svobodovy. (Ostatní ploty jsou stejně dlouhé.) **134.** Např. obr. C-19 (odebrané kartičky jsou vybarveny). **135.** 7 368. **136.** 1 231 011 121 314 151 617 181 920. **137.** 3 možnosti: $A-D-C-G$, $A-D-H-G$, $A-E-H-G$. **138.** K_5 a K_8.


A-1
0 1 5 10 15
4 7 14
A-2
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
0,6 1,7 5,5 7,0 10,2
A-3
B M U
V X Y Z
A-4
a) α
b) α
c) α
d) α
A-5
a) K L M
b) K L M
c) K L M
A-6
A a
B B' b
B-1
0 10 50 100
10 27 43 65 88 120
B-2
0 0,1 0,5 1 1,1
0,25 0,4 0,5 0,63 0,87 1,14
B-3
M Q P=N q
O
B-4
a) A B C
b) A B C
B-5
a) X P=R Y
b) Y P=R X
c) X R P Y
B-6
a) A B=D p C
b) X Y Z
c) B q Q C A
d) m P B C A
B-7
C E D' C' D
B-8
a) β α
b) α β
B-9
B-10
a) C B V
b) B V C
c) B V C
d) B V C
B-11
a b c d
B-12
A p
B₁ B₂ B₃ C B₄ B₅


C-1
0 10 20 30 40 50
39 43 45 48 51
C-2
0 1 2 3 4 5 6 7
0,5 2,25 3,1 4,6 5,75
C-3
a) b) c)
p q r
p=q=r
C-4
Q P R
C-5
R M Q N P O
C-6
L K' O p K L'
C-8
C-7
a) b) c)
B D V A C
C A B V D
C B A V D
C-9
C-10
λ μ υ
C-11
ψ β γ δ ω
C-12
A k S B X
C-13
a) b)
k_2 k_1
K_1 K_2


C-14
m
O
n
C-15
P
p
Q
q
C-16
a)
b)
C-17
a)
b)
c)
d)
e)
f)
C-18
A
E
B
F
D
H
C
G
B
F
C
G
A
E
D
H
C-19

RNDr. Jiří Herman, Ph. D.
PaedDr. Vítězslava Chrápavá
Mgr. Eva Jančovičová
Doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc.

Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií
Úvodní opakování

Obálku navrhl Miloš Jirsa
Ilustrovala Lucie Voráčková
Pérové obrázky narýsoval
RNDr. Jiří Mikulčák, CSc.
Vydalo nakladatelství Prometheus, spol. s r. o.,
Čestmírova 10, 140 00 Praha 4,
roku 2003
tel./fax: 241 740 283
e-mail: info@prometheus-nakl.cz
http://www.prometheus-nakl.cz
Edice Učebnice pro základní školy
Odpovědná redaktorka Marie Nováková
Sazbu programem TEX připravil Jura Charvát
Vytiskly Tiskárny Havlíčkův Brod, a. s.,
Husova 1881, 580 01 Havlíčkův Brod

Dotisk 2. přepracovaného vydání

94 11 020

ISBN 80-7196-080-2

Symbolické značení v geometrii

Bod A o souřadnici x	$A[x]$
Bod B o souřadnicích x, y	$B[x;y]$
Úsečka MN	MN
Délka úsečky MN	$\|MN\|$
Shodnost úseček PQ a RS	$PQ \cong RS$
Polopřímka CD	$\mapsto CD$
Přímka p	p
Přímka AB	$\leftrightarrow AB$
Bod D leží na přímce p	$D \in p$
Rovnoběžné přímky p, q	$p \parallel q$
Kolmé přímky p, r	$p \perp r$
Průnik přímek p, s	$p \cap s$
Úhel ABC	$\sphericalangle ABC$
Úhel α	α
Velikost úhlu ABC	$\|\sphericalangle ABC\|$
Trojúhelník ABC	$\triangle ABC$
Kružnice k se středem S a poloměrem r	$k(S;r)$
Kruh K se středem S a poloměrem r	$\mathsf{K}(S;r)$
Rovina ϱ	ϱ
Polorovina ABC	$\mapsto ABC$
Polorovina pM	$\mapsto pM$

Některá malá řecká písmena

α	alfa	δ	delta	φ	fí
β	beta	ε	epsilon	ψ	psí
γ	gama	ϱ	ró	ω	omega

ISBN 80-7196-080-2
9 788071 960805

PROMETHEUS

94 11 020