PROMETHEUS®

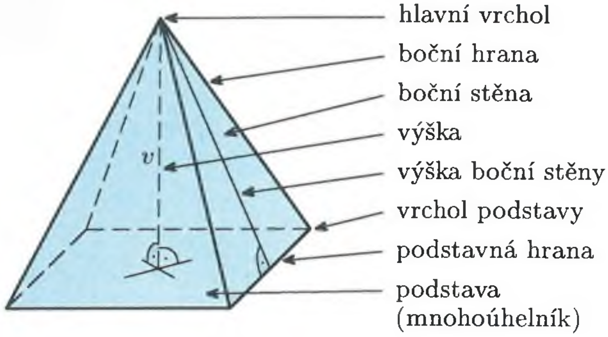
Prima
Sekunda
Tercie
Kvarta

Matematika

Jehlany a kužely

Jč
m+f

JEHLAN



Povrch jehlanu:

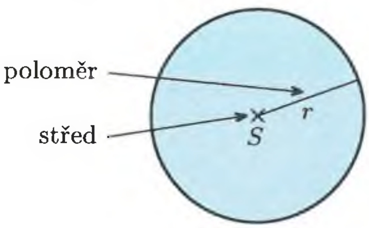
$$\boxed{S = S_{\mathrm{p}} + S_{\mathrm{pl}}}$$

Objem jehlanu:

$$\boxed{V = \frac{1}{3} S_{\mathrm{p}} \cdot v}$$

S_{p} .... obsah podstavy
S_{pl} .... obsah pláště
v .... výška

KOULE



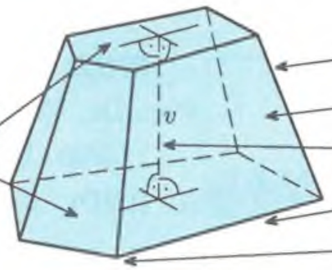
Povrch koule:

$$\boxed{S = 4\pi r^2}$$

Objem koule:

$$\boxed{V = \frac{4}{3}\pi r^3}$$

KOMOLÝ JEHLAN



Povrch komolého jehlanu:

$$\boxed{S = S_1 + S_2 + S_{\mathrm{pl}}}$$

Objem komolého jehlanu:

$$\boxed{V = \frac{1}{3} v \left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2 \right)}$$

S_1, S_2 .... obsahy podstavy
S_{pl} .... obsah pláště
v .... výška

RNDr. Jiří HERMAN, Ph. D.
PaedDr. Vítězslava CHRÁPAVÁ
Mgr. Eva JANČOVIČOVÁ
Doc. RNDr. Jaromír ŠIMŠA, CSc.

Prima
Sekunda
Tercie
Kvarta

Matematika

Jehlany a kužely

PROMETHEUS

Publikace byla připravena ve spolupráci s JČMF.

Lektorovali RNDr. Jura Charvát, CSc., a RNDr. Milan Ryšavý.

Koordinátor učebnic matematiky pro nižší třídy víceletých gymnázií doc. RNDr. Jindřich Bečvář, CSc.

Revizi výsledků provedl RNDr. Jura Charvát, CSc.

Schválilo MŠMT ČR, č. j. 13839/2001–22, dne 26. 3. 2001 k zařazení do seznamu učebnic pro základní školy a víceletá gymnázia jako součást ucelené řady učebnic pro vyučovací předmět matematika s dobou platnosti šest let.

Dotisk 1. vydání

ISBN 80-7196-225-2

OBSAH

Na vysvětlenou ...

Poslední, sedmnáctý sešit z řady učebnic matematiky pro nižší třídy víceletých gymnázií a pro třídy základních škol s rozšířenou výukou matematiky, který právě dostáváte do rukou, je věnován základním poznatkům z *geometrie v prostoru* a jejich uplatněním ve výkladu o tělesech – *jehlanech*, *kuželech* a *koulích*.

Připomínáme, že cílem našeho projektu bylo vytvořit ve formě řady 17 sešitů úplnou a soběstačnou pomůcku pro výuku matematiky v prvních čtyřech ročnících víceletého gymnázia. Proto jsou sešity sestaveny tak, aby je bylo možno použít jak při výkladu nové látky či jejím procvičování ve vyučovacích hodinách, tak i při domácí přípravě žáků. Kromě toho věříme, že bohatý příkladový materiál usnadní učitelům zadávání domácích úkolů a umožní žákům důkladně si probrané učivo procvičit. Zvídaví žáci také najdou mezi příklady řadu obtížnějších úloh.

Zmíněné cíle ovlivnily rozsah i formu textu. Zopakujme stručně, jakým způsobem:

Výklad nového učiva je zpravidla uveden motivující otázkou (značenou otazníkem na okraji stránky). Nové pojmy, poznatky a pravidla jsou pak podrobně vysvětlovány a zdůvodňovány tak, aby je žák v případě potřeby mohl zvládnout samostatným studiem. Nezakrýváme, že naše učebnice jsou psány pro žáky s hlubším zájmem o matematiku a další přírodovědné předměty. Těm jsou určeny i drobnějším písmem (petitem) tištěné pasáže, které přesahují standardní rámec učiva.

Považujeme za důležité, aby se žáci naučili vlastní řešení srozumitelně a přehledně zapisovat. Proto jsme do učebnice zařadili ukázky „opsané“ z žákovských sešitů, které by mohly žákům posloužit jako vzory takových zápisů.

Důležité výsledky výkladu jsou shrnuty ve větách, které jsou graficky vyznačeny *rámečky*. Nejedná se nám v žádném případě o signál k bezduchému memorování, ale o výzvu, aby se žáci nad obsahem těchto tvrzení a definic důkladně zamysleli a správně je pochopili. To lze kontrolovat *průběžnými úkoly*, v textu značenými ➡. Ke kontrole zvládnutí větších celků jsou určena *cvičení* uváděná za jednou či dvěma kapitolami. Závěrečná *souhrnná cvičení* tvoří vlastně sbírku úloh k tématu celého sešitu.

Většina úkolů, cvičení i souhrnných cvičení je na konci sešitu opatřena výsledky. Příklady určené k samostatné práci žáků označujeme někdy (pro lepší orientaci) těmito symboly s uvedenými významy:

□ – lze řešit zpravidla zpaměti
∗ – obtížnější příklad
∗∗ – velmi obtížný příklad
■ – zajímavý příklad (podle našeho názoru)

Na závěr připojujeme přehled titulů všech sešitů naší řady:

Prima

Úvodní opakování
Kladná a záporná čísla
Dělitelnost
Osová a středová souměrnost

Sekunda

Racionální čísla. Procenta
Trojúhelníky a čtyřúhelníky
Hranoly
Výrazy 1

Tercie

Rovnice a nerovnice
Kruhy a válce
Úměrnosti
Geometrické konstrukce
Výrazy 2

Kvarta

Rovnice a jejich soustavy
Funkce
Podobnost a funkce úhlu
Jehlany a kužely

ÚVOD

Svět, ve kterém žijeme, je třírozměrný prostor, ke kterému podle současné fyziky patří neoddělitelně i čtvrtý rozměr – čas. Díky zraku, našemu nejcennějšímu smyslu, se odmalička učíme prostorové orientaci a osvojujeme si základní poznatky o tvaru a velikosti těles a změnách jejich vzájemné polohy, kterých lze různými pohyby v prostoru dosáhnout. V prostorových vztazích se v jisté míře (úměrné složitosti způsobu života) musí „vyznat" každý živý tvor naší planety.

O tvaru a velikosti těles již jistě přemýšleli pravěcí lidé, když například odhadovali množství materiálu potřebného k výstavbě primitivních obydlí či hledali nejvhodnější formy nádob nebo sýpek. Uplynula dlouhá doba, než lidé přešli od pouhého porovnávání objemů k jejich měření a výpočtům podle tvarů a rozměrů těles. Tak starověcí Babyloňané již dokázali počítat objemy pevnostních valů s lichoběžníkovým průřezem, Egypťané znali například postup, jak určit objem sýpky, která má tvar válce. Skutečného mistrovství ve výpočtech objemů různých těles dosáhli matematikové antického Řecka, zejména *Archimédes ze Syrakus* (3. stol. před Kristem) a *Pappos z Alexandrie* (3. stol. po Kristu). Archimédovo důmyslné odvození vzorců pro objem a povrch koule je snad nejvýraznějším projevem jeho matematické geniality; sám Archimédes si natolik cenil poznatek o tom, že *kužel, polokoule a válec o stejných podstavách a výškách mají objemy v poměru* $1:2:3$, že si přál mít na svém náhrobku reliéf válce s vepsanou koulí. Stejné vyobrazení pak bylo rovněž raženo na mincích města Syrakus. Druhý zmíněný Řek Pappos Archimédovy vzorce zobecnil, když objevil pravidlo, podle kterého lze určit objem obecného, tzv. rotačního tělesa, tedy tělesa, jež vznikne otáčením rovinného obrazce v prostoru kolem pevné přímky.

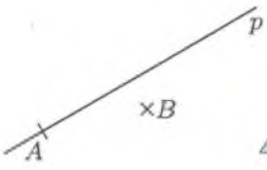
Stavby monumentálních náhrobků staroegyptských faraonů nebo majestátně rozlehlých antických chrámů kladly před tehdejší architekty obtížné prostorové úkoly. Nebylo by možné je vyřešit s takovou přesností, jakou dodnes na těchto památkách obdivujeme, bez dokonalého ovládnutí *základů stereometrie* (geometrie třírozměrného prostoru), k nimž patří určování vzájemných poloh, vzdáleností a odchylek přímek a rovin. Právě s těmito poznatky vás chce naše učebnice seznámit především. I když se třeba nestanete architekty, dobrou prostorovou představivost podloženou znalostí „školní stereometrie" uplatníte i v mnoha dalších oborech přírodních věd, techniky či různých druzích výtvarné činnosti (průmyslový design, navrhování reklamy apod.).

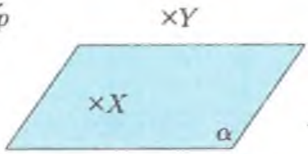
1 PŘÍMKY A ROVINY V PROSTORU

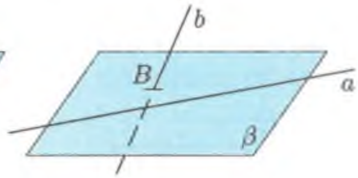
V dalších kapitolách tohoto sešitu se podrobně seznámíte s jehlanem, kuželem a koulí – tělesy, která již sice umíte rozpoznat a pojmenovat, avšak například určit jejich objem nebo povrch dosud nedokážete. Abychom výpočtům spojeným s těmito tělesy dobře rozuměli, nejdříve zopakujeme a rozšíříme naše znalosti o přímkách a rovinách v prostoru.

Víme již, že prostor se skládá z *bodů*, které značíme velkými písmeny (např. A, B, X, Y). Významnými podmnožinami prostoru jsou jednak *přímky* značené obvykle malými písmeny (a, b, p, q, …), jednak *roviny* značené zpravidla malými řeckými písmeny (α, β, ϱ, σ, …). Vztahy mezi nimi vyjadřujeme známými zápisy:

$a \in p, \quad B \notin p$ $\qquad$ $X \in \alpha, \quad Y \notin \alpha$ $\qquad$ $a \subset \beta, \quad b \cap \beta = \{B\}$

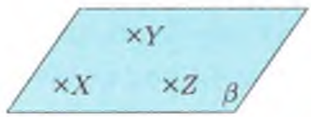




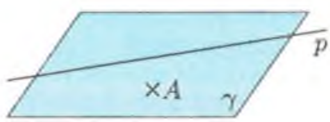


Každá přímka v prostoru je určena (stejně jako v rovině) dvěma různými body, které na ní leží. Pokud $A \in p$ a $B \in p$ $(A \neq B)$, pak přímku p nazýváme přímkou AB a píšeme $p = \leftrightarrow AB$.

Rovina je jednoznačně určena třemi svými body, které neleží v jedné přímce. Na obrázku roviny β jsou to např. body X, Y, Z. Rovině β také říkáme rovina XYZ a píšeme $\beta = \leftrightarrow XYZ$.



Stejně tak je rovina jednoznačně určena, je-li dána jedna její přímka a jeden její bod, který na této přímce neleží. Tak rovina γ z obrázku je určena přímkou p a bodem A. Pak píšeme $\gamma = \leftrightarrow pA$ (rovina pA).



Z každodenní zkušenosti víme, že pro přímky a roviny v prostoru platí:

- Jestliže dva různé body přímky leží v některé rovině, pak v této rovině leží celá tato přímka.

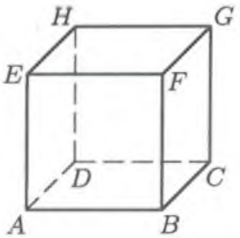
- Jestliže dvě různé roviny mají společný bod, pak mají společnou přímku; kromě bodů této přímky jiné společné body nemají.

?

Jak znázornit účelně prostorový útvar rovinným obrázkem?

Při řešení úloh o tělesech je nezbytné umět si posuzovanou situaci dobře představit. Máme-li po ruce vhodný model tělesa, můžeme pohodlně pozorovat vzájemnou polohu různých přímek a rovin tak, že model různě pootáčíme a dotyčné přímky a roviny pozorujeme z různých směrů. Mnohdy však takovou trojrozměrnou pomůcku k dispozici nemáme. Tehdy si pomáháme vhodnými (jedním nebo několika) rovinnými obrázky. Jak víte, pořídit takové výstižné obrázky nemusí být vůbec jednoduché. S jednou zobrazovací metodou jste se již seznámili v učivu o hranolech. Bylo to *volné rovnoběžné promítání*, které budeme používat i nadále.

Prohlédněte si, jak se touto metodou znázorní krychle $ABCDEFGH$ (v pravém nadhledu):

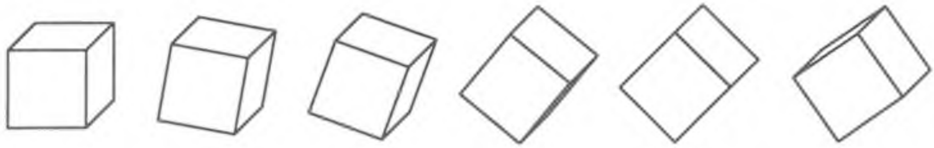


Jakým postupem byl obrázek krychle pořízen? Krychli jsme znázornili v rovině zvané *nákresna*. V ní jsme nejprve zvolili dva navzájem kolmé směry, vodorovný a svislý. (Na našem obrázku má vodorovný směr např. přímka AB, svislý směr např. přímka BF.) Pak jsme rýsovali podle těchto zásad:

- Útvar, který leží v rovině rovnoběžné s nákresnou, se zobrazí nezkresleně, tedy do shodného útvaru (stěny $ABFE$ a $DCGH$).
- Úsečka kolmá k nákresně se zobrazí do úsečky, která svírá s vodorovným i svislým směrem stejné úhly o velikosti 45° a má poloviční délku než zobrazovaná úsečka (hrany BC, FG, AD a EH).
- Dvě rovnoběžné úsečky se zobrazí do dvou rovnoběžných úseček nebo do dvou bodů.

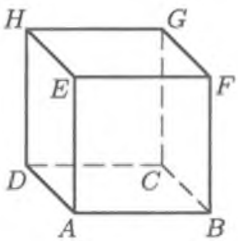
Na obrázku byla vyznačena i viditelnost hran krychle. Kdyby bylo těleso zhotoveno z neprůhledného materiálu, některé hrany bychom neviděli. Protože jsme se na krychli dívali zprava a shora, byly by „neviditelné" hrany AD, CD a DH. Proto jsou na obrázku nakresleny čárkovaně.

Na dalším obrázku vidíte jednu krychli v různých nadhledech zprava (bez neviditelných hran):

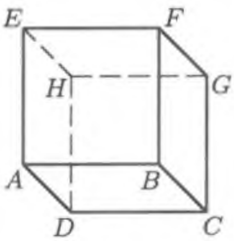


Pouze v první poloze mají hrany přední stěny krychle vodorovný nebo svislý směr nákresny. Takové znázornění je nejvhodnější, protože je z celé krychle „nejvíce vidět“. Proto budeme krychli nejčastěji kreslit právě takto.

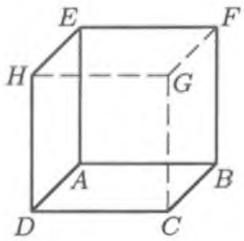
Místo pravého nadhledu je někdy výhodnější zvolit jiný směr pohledu na těleso. Prohlédněte si, jak se znázorní naše krychle v *levém nadhledu*, *pravém podhledu* a *levém podhledu*:



levý nadhled



pravý podhled



levý podhled

Ve všech třech pohledech mají hrany přední stěny krychle vodorovný nebo svislý směr nákresny.

Na závěr poznamenejme, že tělesa, která mají „příliš velké“ nebo „příliš malé“ rozměry, kreslíme ve vhodném zvětšení nebo zmenšení.

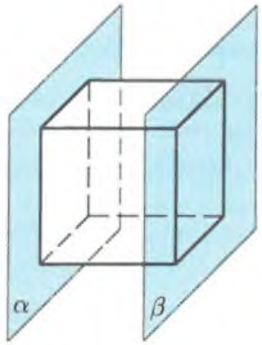
1. Znázorněte kvádr $ABCDEFGH$ o rozměrech $|AB| = |AD| = 4\,\mathrm{cm}$, $|AE| = 6\,\mathrm{cm}$
   a) v pravém nadhledu, b) v levém podhledu.

Co víme o vzájemné poloze přímek a rovin v prostoru?

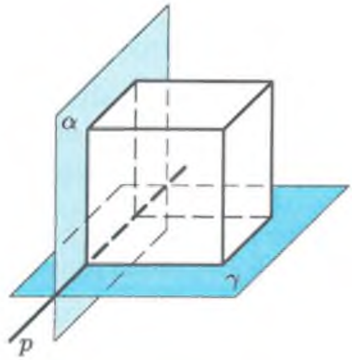
Dvě různé roviny v prostoru jsou buď *rovnoběžné* (nemají-li žádný společný bod), nebo *různoběžné*. Společné body dvou různoběžných rovin vyplní přímku, které říkáme *průsečnice* těchto rovin.

Připomeňme, že za rovnoběžné považujeme i dvě *totožné* roviny.

Příkladem rovnoběžných rovin jsou roviny α, β, ve kterých leží protější stěny krychle. Příkladem různoběžných rovin jsou roviny α, γ, ve kterých leží sousední stěny krychle. Jejich průsečnicí je přímka p, na které leží společná hrana zmíněných stěn.



$\alpha \parallel \beta$
$(\alpha \cap \beta = \emptyset)$

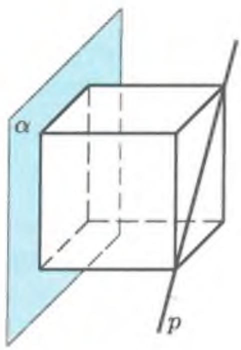


$\alpha \nparallel \gamma$
$(\alpha \cap \gamma = p)$

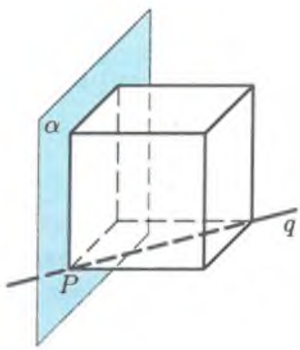
□ **2.** Je dán kvádr $ABCDEFGH$. Pojmenujte vzájemnou polohu rovin
a) ABF a CGH, b) ADE a FGH, c) AFH a BCF.

Přímka, která v dané rovině neleží, je s touto rovinou buď *rovnoběžná* (nemá s ní žádný společný bod), nebo *různoběžná*. Různoběžná přímka protíná danou rovinu v jediném bodě – tzv. *průsečíku*.
Za přímky rovnoběžné s danou rovinou považujeme i všechny přímky, které v této rovině leží.

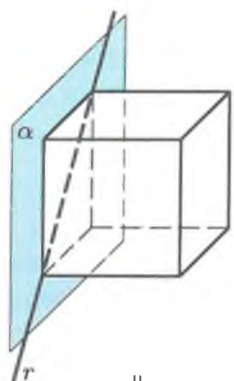
Příklady možných vzájemných poloh přímky a roviny snadno najdeme na krychli:



$p \parallel \alpha$
$(p \cap \alpha = \emptyset)$



$q \nparallel \alpha$
$(q \cap \alpha = \{P\})$

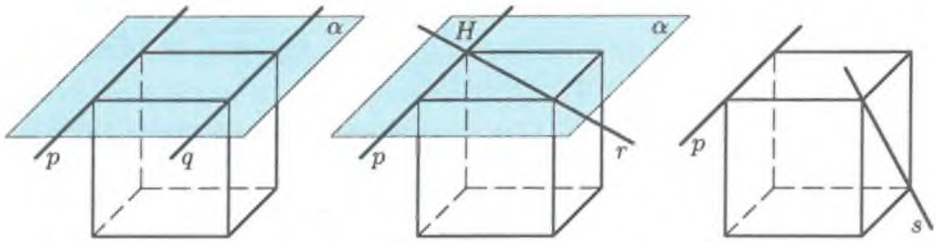


$r \parallel \alpha$
$(r \subset \alpha)$

□ **3.** Je dán kvádr $ABCDEFGH$. Pojmenujte vzájemnou polohu
a) přímky BC a roviny ADH, b) přímky BC a roviny AEF,
c) přímky FH a roviny ADH, d) přímky AG a roviny ACE.

Dvě různé přímky v prostoru jsou buď *rovnoběžné*, nebo *různoběžné*, nebo *mimoběžné*. Rovnoběžné nebo různoběžné jsou ty dvě přímky, které leží v jedné rovině. Mimoběžné jsou ty dvě přímky, které neleží v jedné rovině. Přímky, které nemají společný bod, jsou buď rovnoběžné, nebo mimoběžné. Připomeňme, že dvě *totožné* přímky považujeme za rovnoběžné.

Uveďme příklady možných vzájemných poloh přímek na krychli:



rovnoběžky p, q; $p \parallel q$
$(p \subset \alpha,\ q \subset \alpha,\ p \cap q = \emptyset)$

různoběžky p, r
$(p \subset \alpha,\ r \subset \alpha,\ p \cap r = \{H\})$

mimoběžky p, s

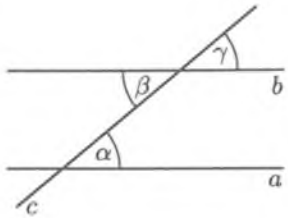
V hodinách planimetrie jsme různoběžnost přímek někdy zapisovali symbolem $\nparallel$, který znamená „není rovnoběžno“. Platí totiž, že dvě přímky v rovině jsou různoběžné právě tehdy, když nejsou rovnoběžné.

„Nerovnoběžné“ přímky (tedy přímky, které nejsou rovnoběžné) v prostoru však nejsou nutně různoběžné, mohou totiž být mimoběžné. Proto symbol $\nparallel$ používáme ve stereometrii jen pro různoběžné roviny; různoběžnost a mimoběžnost přímek budeme vždy vyjadřovat slovně.

□ **4.** Je dán kvádr $ABCDEFGH$. Pojmenujte vzájemnou polohu přímek
a) AD a FG, b) AH a BH, c) AH a FB, d) AB a CH.

Jak rozhodujeme o vzájemné poloze přímek a rovin?

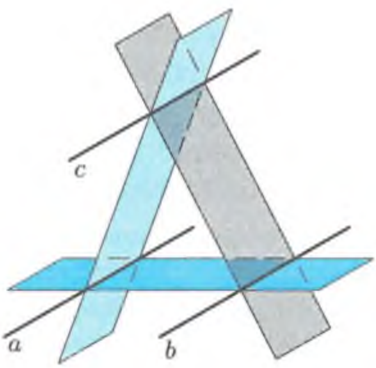
Při určování vzájemné polohy dvou přímek nejprve zkoumáme, zda tyto dvě přímky vůbec leží v jedné rovině (jinak se jedná o mimoběžky). Nalezneme-li rovinu, ve které dvě dané přímky a, b leží, je rozhodování o jejich rovnoběžnosti planimetrickou úlohou, kterou již umíme řešit. Nejčastěji k tomu využíváme vhodnou příčku, tedy takovou přímku c, která obě přímky a, b protíná. Označme α, β, γ úhly mezi příčkou c a přímkami a, b jako na obrázku:



Víme, že rovnoběžnost přímek a, b je zaručena rovností střídavých úhlů $\alpha = \beta$, popř. rovností souhlasných úhlů $\alpha = \gamma$.

Obráceně, kterákoliv z nerovností $\alpha \neq \beta$, $\alpha \neq \gamma$ znamená, že přímky a, b rovnoběžné nejsou (jsou tedy různoběžné).

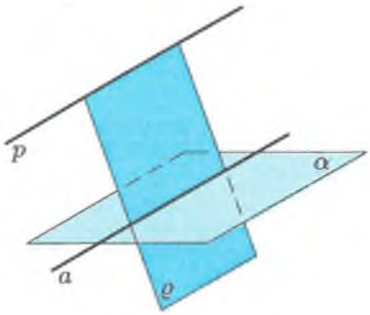
Následující tvrzení o třech přímkách v rovině znáte natolik dobře, že ho považujete za samozřejmé: *Je-li přímka a rovnoběžná s přímkou b a přímka b rovnoběžná s přímkou c, pak je i přímka a rovnoběžná s přímkou c.* Stejné tvrzení platí i v případě, kdy přímky a, b, c v jedné rovině neleží.



□ **5.** Vysvětlete, proč jsou hrany AB a HG kvádru $ABCDEFGH$ rovnoběžné.

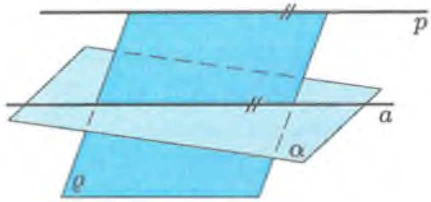
Zkoumejme nyní, kdy je přímka rovnoběžná s rovinou. Především je to v případě, kdy daná přímka p v dané rovině α leží ($p \subset \alpha$). Předpokládejme proto dále, že přímka p v rovině α neleží. V tomto případě vztah $p \parallel \alpha$ znamená právě to, že přímka p rovinu α neprotíná.

Proložme takovou přímkou p libovolnou rovinu ϱ, která je s rovinou α různoběžná. Průsečnicí rovin ϱ a α je přímka, kterou označíme a. Protože přímka p nemá s rovinou α společný bod, nemá společný bod ani s přímkou a, tudíž platí $a \parallel p$.



Zdůrazněme, že přímku a s vlastnostmi $a \subset \alpha$, $a \parallel p$, jsme našli za předpokladu, že výchozí přímka p byla s rovinou α *rovnoběžná*.

Ukažme nyní, že *každá* přímka p, ke které v rovině α existuje přímka a taková, že $a \parallel p$, je s rovinou α rovnoběžná. Rovina ϱ obsahující takové rovnoběžky p, a protíná rovinu α v přímce a; kdyby tudíž přímka p měla s rovinou α společný bod, musel by tento společný bod ležet na přímce a, která se však s přímkou p neprotíná. Proto platí $p \parallel \alpha$.

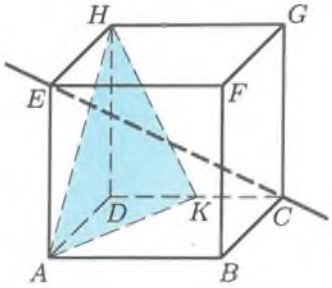


Odvodili jsme tak důležité tvrzení, podle kterého rozhodujeme o rovnoběžnosti dané přímky s danou rovinou:

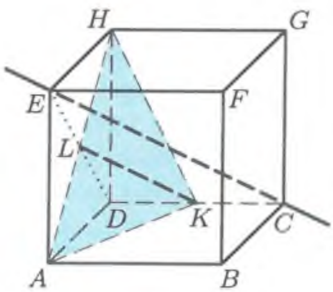
> Přímka p je s rovinou α rovnoběžná, právě když v rovině α existuje přímka rovnoběžná s přímkou p.

Všimněte si, že jsme v poučce neuvedli předpoklad o tom, že přímka p v rovině α neleží. Tvrzení totiž platí, i když přímka p v rovině α leží (za přímku a lze tehdy zvolit samotnou přímku p).

Příklad 1. Je dána krychle $ABCDEFGH$. Dokažte, že přímka EC je rovnoběžná s rovinou AHK, kde K je střed hrany DC.

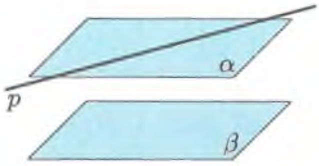


Řešení. Najdeme přímku, která leží v rovině AHK a je rovnoběžná s přímkou EC. Všimněme si, že v rovině AHK leží střed L úsečky AH, který je zároveň středem úsečky DE. V trojúhelníku CDE je tedy bod K středem strany DC a bod L středem strany DE. Úsečka KL je proto střední příčkou trojúhelníku CDE, takže $KL \parallel EC$. V rovině AHK jsme tak našli přímku KL rovnoběžnou s přímkou EC. Proto je přímka EC rovnoběžná s rovinou AHK.



6. Je dána krychle $ABCDEFGH$. Dokažte, že přímka AG je rovnoběžná s rovinou SHC, kde S je střed hrany AD.

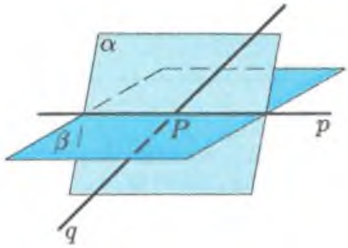
Zbývá nám posoudit podmínky rovnoběžnosti dvou rovin. Předpokládejme nejprve, že dvě různé roviny α a β jsou rovnoběžné, tzn. nemají společný bod. Tehdy žádná přímka p roviny α nemá s rovinou β společný bod. Každá přímka roviny α je tedy rovnoběžná s rovinou β.



Vysvětlíme, že platí i „obrácené“ pravidlo: Pokud je každá přímka roviny α rovnoběžná s rovinou β, pak jsou roviny α a β rovnoběžné.

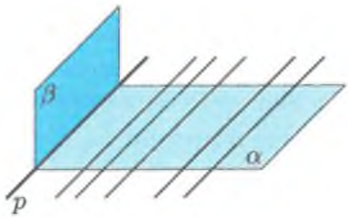
Toto pravidlo dokážeme „nepřímým postupem“: Budeme totiž předpokládat, že roviny α, β *nejsou* rovnoběžné, a najdeme v rovině α přímku q, která *není* rovnoběžná s rovinou β.

Předpokládáme tedy, že roviny α, β jsou různoběžné; označíme p jejich průsečnici a sestrojíme v rovině α libovolnou přímku q různoběžnou s přímkou p. Průsečík P přímek p a q je jediným společným bodem přímky q a roviny β, takže přímka q roviny α je s rovinou β skutečně různoběžná.

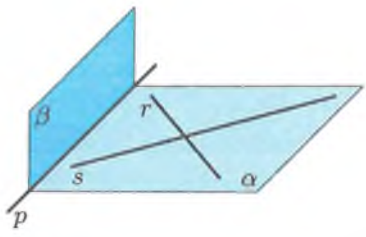


Podmínka „všechny přímky roviny α jsou rovnoběžné s rovinou β“ se k důkazu rovnoběžnosti rovin α a β prakticky nepoužívá. Stačí ověřit podmínku $p \parallel \beta$ jen pro několik přímek p roviny α, jejichž počet a vzájemnou polohu nyní upřesníme.

Předně si uvědomme, že v rovině α existuje dokonce nekonečně mnoho přímek rovnoběžných s rovinou β, i když jsou roviny α a β různoběžné. Jsou to ty přímky roviny α, které jsou rovnoběžné s průsečnicí p rovin α a β, a žádné jiné. Všechny tyto přímky jsou navzájem rovnoběžné.



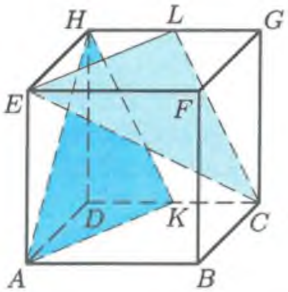
Předpokládejme nyní, že v rovině α existují dvě *různoběžné* přímky r a s, z nichž každá je rovnoběžná s rovinou β. Připusťme, že roviny α a β nejsou rovnoběžné a označme p jejich průsečnici. Přímky p, r a s leží v jedné rovině (v rovině α) a přímky r, s nejsou rovnoběžné. Znamená to, že přímka p nemůže být rovnoběžná jak s přímkou r, tak s přímkou s. S některou z přímek r a s má tedy přímka p (a tedy i rovina β) společný právě jeden bod. Jedna z přímek r, s je tedy s rovinou β různoběžná. Předpoklad o tom, že roviny α a β jsou různoběžné, byl tedy nesprávný.



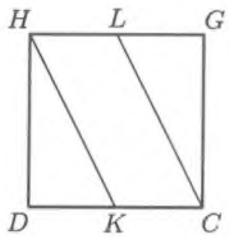
Vysvětlili jsme, že platí následující pravidlo:

> Jestliže v rovině α existují dvě různoběžné přímky, z nichž každá je rovnoběžná s rovinou β, pak jsou roviny α a β rovnoběžné.

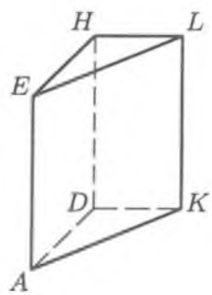
Příklad 2. Je dána krychle $ABCDEFGH$. Označme K střed hrany CD a L střed hrany GH. Dokažte, že roviny AKH a CLE jsou rovnoběžné.



Řešení. V rovině AKH najdeme dvě různoběžky, z nichž každá je rovnoběžná s rovinou CLE. První z nich je přímka KH. Pohledem na stěnu $DCGH$ totiž vidíme, že $KH \parallel LC$ (čtyřúhelník $KCLH$ je rovnoběžník); odtud vyplývá, že přímka KH je skutečně rovnoběžná s rovinou LCE.



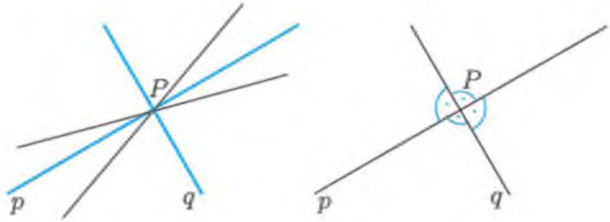
Druhou hledanou přímkou je přímka AK. Obě úsečky AE a KL jsou rovnoběžné a shodné s úsečkou DH, takže přímky AE a KL leží v jedné rovině a čtyřúhelník $AKLE$ je rovnoběžník. Proto $AK \parallel EL$, tudíž přímka AK je skutečně rovnoběžná s rovinou CLE. Protože nalezené přímky KH a AK jsou různoběžné, dokázali jsme, že roviny AKH a CLE jsou skutečně rovnoběžné.



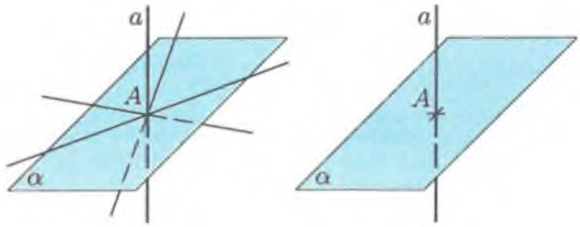
7. V pravidelném čtyřbokém hranolu $ABCDEFGH$ je bod P středem hrany AB, bod T středem hrany EF, bod U středem hrany FG, bod X středem hrany EH, bod S středem hrany AD a bod R středem hrany CD. Dokažte, že roviny PTU a XSR jsou rovnoběžné.

2 KOLMOST PŘÍMEK A ROVIN

Z hodin planimetrie víte, že mezi všemi různoběžkami, které procházejí daným bodem P dané přímky p, má jedna přímka q vzhledem k přímce p „zvláštní postavení“. Všechny čtyři úhly, na které je rovina přímkami p, q rozdělena, jsou tehdy shodné (a pravé). Právě o takových přímkách p, q říkáme, že jsou navzájem *kolmé*.



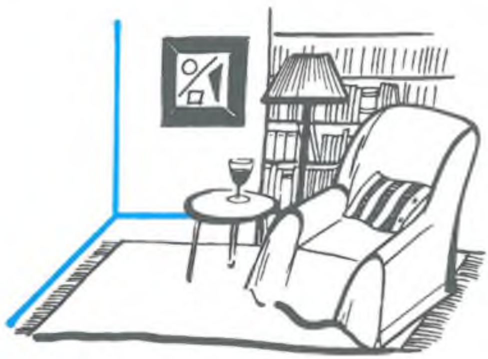
V této kapitole se budeme zabývat kolmostí v prostoru. Ukážeme, že pokud je v prostoru dána rovina α a v ní bod A, má mezi všemi přímkami, které procházejí bodem A, podobné „výjimečné“ postavení vzhledem k rovině α jediná přímka a. Nazveme ji přímkou *kolmou* k rovině α.



Na obrázku zatím není vyznačeno, v čem zmíněná výjimečnost přímky a spočívá. Uhodnete to sami?

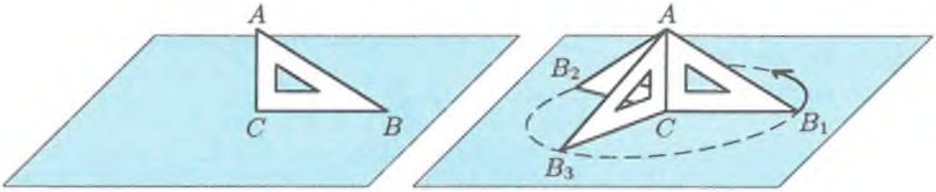
Kdy je přímka kolmá k rovině?

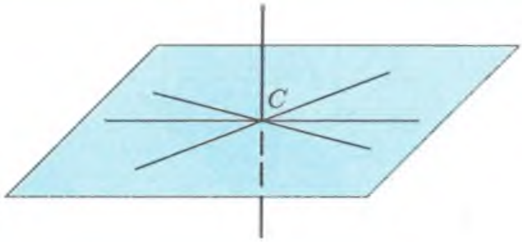
Názornou představu o kolmosti přímek a rovin jsme získali již v učivu o hranolech, kdy jsme využívali zkušeností se svislými přímkami a vodorovnými rovinami ze světa kolem nás.



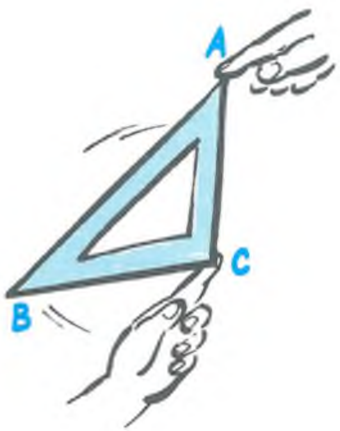
Nyní přesně matematicky vysvětlíme, co znamená, že daná přímka je k dané rovině kolmá.

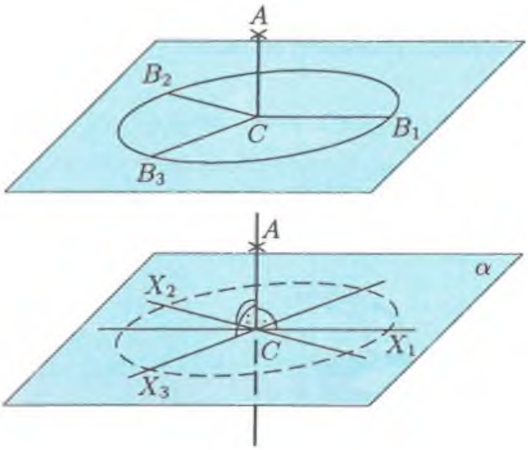
Začneme malým pokusem. Přiložíme pravítko tvaru pravoúhlého trojúhelníku ABC s přeponou AB k vodorovné desce stolu tak, aby jeho odvěsna AC měla svislý směr a odvěsna BC „ležela“ na stole. Budeme-li pravítkem otáčet kolem svislé přímky AC, vyplní otáčející se přímka BC celou rovinu desky stolu.





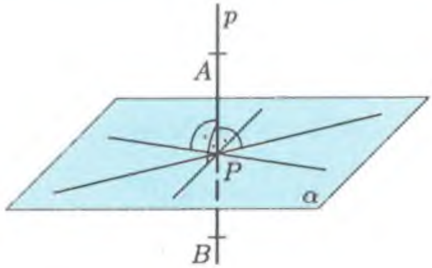
Nyní pravítko zvedněme ze stolu, přidržme jeho hranu AC v pevné poloze kdekoli v prostoru a zopakujme otáčení pravítka kolem přímky AC.





Otáčející se přímka BC vyplní jistou rovinu α, která obsahuje bod C a má následující vlastnost: Každá přímka CX této roviny je kolmá k přímce AC. O takové rovině α řekneme, že je ***kolmá*** k přímce AC. Budeme také říkat, že přímka AC je kolmá (je kolmicí) k rovině α.

Předpokládejme, že přímka p protíná rovinu α v bodě P. Říkáme, že přímka p je kolmá k rovině α, a píšeme $p \perp \alpha$, pokud je přímka p kolmá ke každé přímce q, která leží v rovině α a prochází bodem P. Bod P se pak nazývá pata kolmice p k rovině α.



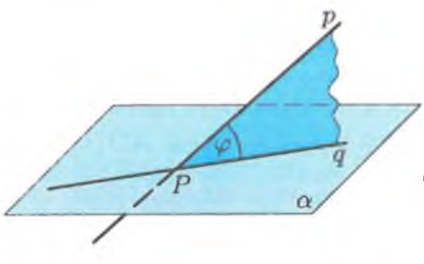
Skutečnost, že přímka $p = \leftrightarrow AB$ je kolmá k rovině α, slovně vyjadřujeme i těmito způsoby:

- rovina α je kolmá k přímce p (zápis $\alpha \perp p$)
- přímka p a rovina α jsou navzájem kolmé
- úsečka AB je kolmá k rovině α (zápis $AB \perp \alpha$)

Není těžké zdůvodnit, že přímka p k rovině α *není* kolmá.

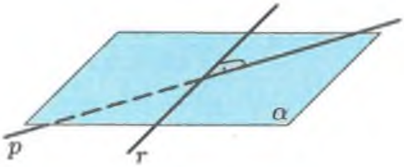
Především je to v případě, kdy $p \parallel \alpha$.

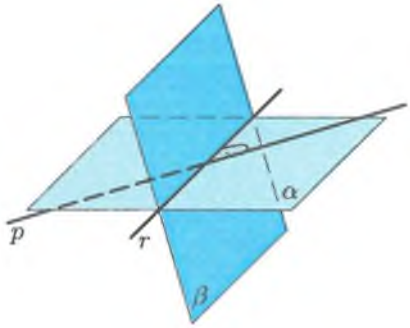
Má-li přímka p s rovinou α jediný společný bod P, stačí najít v rovině α jednu přímku q, která prochází bodem P a není k přímce p kolmá (různoběžky p, q svírají ostrý úhel φ).



$\varphi < 90°$

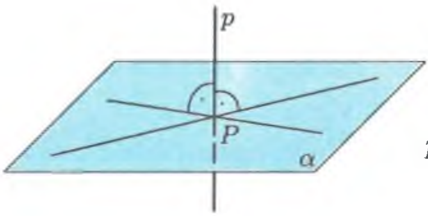
Prozkoumejme situaci, kdy neplatí ani $p \parallel \alpha$, ani $p \perp \alpha$, podrobněji. V rovině α pak existuje *nekonečně mnoho* přímek q, které procházejí bodem $P \in p \cap \alpha$ a nejsou kolmé k přímce p. Vysvětlíme, že to jsou *všechny* přímky roviny α procházející bodem P *kromě jediné* přímky, kterou označíme r. Každá přímka, která je kolmá k přímce p a prochází bodem P, totiž leží v rovině β, která obsahuje bod P a je kolmá k přímce p. Protože neplatí $p \perp \alpha$, jsou roviny α a β různé a zmíněná „výjimečná" přímka r je průsečnicí rovin α a β.





O kolmosti přímky a roviny rozhodujeme podle následujícího pravidla:

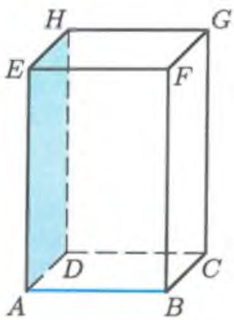
> Předpokládejme, že přímka p protíná rovinu α v bodě P. Je-li přímka p kolmá ke *dvěma* různým přímkám, které leží v rovině α a procházejí bodem P, pak je přímka p kolmá k rovině α.



$p \perp \alpha$

Platnost pravidla plyne z úvahy o „výjimečné" přímce r v petitu na str. 21, 22.

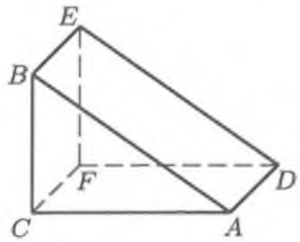
Příklad 1. Je dán kvádr $ABCDEFGH$. Zdůvodněte, proč je jeho hrana AB kolmá k rovině ADH.



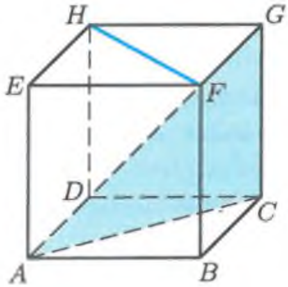
Řešení. Rovina ADH je rovina, ve které leží stěna $ADHE$. Stačí si uvědomit, že přímka AB je kolmá jak k přímce AD, tak k přímce AE (stěny kvádru jsou totiž pravoúhelníky). V rovině ADH jsme tak našli dvě různoběžky AD, AE kolmé k přímce AB, proto je přímka AB skutečně kolmá k rovině ADH.

□ 1. Na obrázku je trojboký hranol $ABCDEF$, jehož podstavou je pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB. Vysvětlete, proč jsou navzájem kolmé

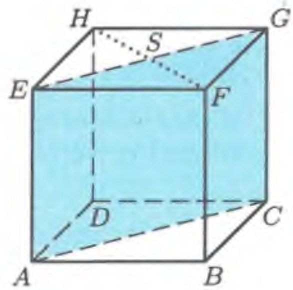
a) přímka AD a rovina DEF,
b) přímka BC a rovina ACF,
c) přímka DF a rovina EBC.



Příklad 2. Dokažte, že stěnová úhlopříčka FH krychle $ABCDEFGH$ je kolmá k rovině ACG.

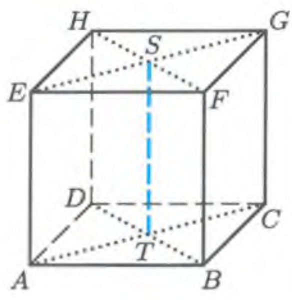


Řešení. Všimněme si nejprve, že rovina ACG obsahuje bod E (přímky AE a CG jsou totiž rovnoběžné). Proto je průsečíkem této roviny s přímkou FH průsečík úseček EG a FH, tedy střed S čtverce $EFGH$. V rovině ACG nalezneme dvě různé přímky, které procházejí bodem S a jsou kolmé k přímce FH.

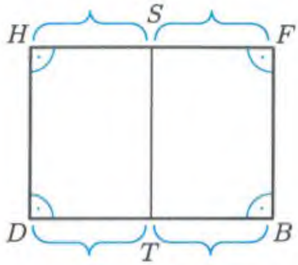


Jednou z hledaných přímek je přímka EG, neboť úsečky EG a FH jsou úhlopříčkami čtverce $EFGH$, a jsou proto navzájem kolmé.

Vysvětlíme, že druhou hledanou přímkou je přímka ST, kde T je střed úsečky AC, tedy střed čtverce $ABCD$. Body B, F, H, D jsou vrcholy rovnoběžníku, který je obdélníkem (přímka BF je kolmá k rovině podstavy ABC, proto je kolmá i k přímce BD, která v ní leží).



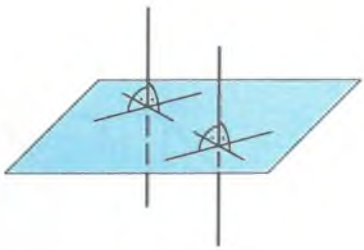
Body S, T jsou středy protějších stran BD, FH obdélníku $BFHD$, proto $ST \perp FH$.

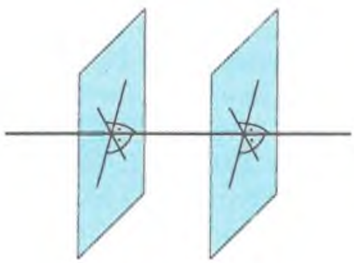


Shrňme výsledky našich úvah: přímky EG a ST jsou kolmé k přímce FH, proto je přímka FH skutečně kolmá k rovině ACG.

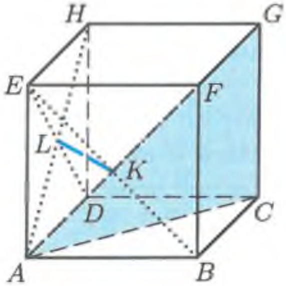
Uveďme nyní několik důležitých poznatků o přímkách kolmých k rovinám:

- Dvě přímky, které jsou kolmé k téže rovině, jsou navzájem rovnoběžné.
- Dvě roviny, které jsou kolmé k téže přímce, jsou navzájem rovnoběžné.
- Rovina, která je kolmá k jedné ze dvou rovnoběžných přímek, je kolmá i k druhé přímce.
- Přímka, která je kolmá k jedné ze dvou rovnoběžných rovin, je kolmá i k druhé rovině.

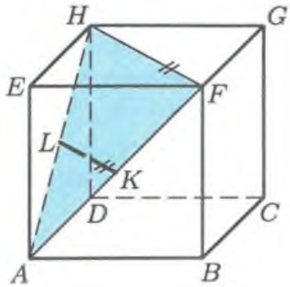




Příklad 3. Je dána krychle $ABCDEFGH$. Označme K střed stěny $ABFE$ a L střed stěny $ADHE$. Dokažte, že přímka KL je kolmá k rovině ACG.

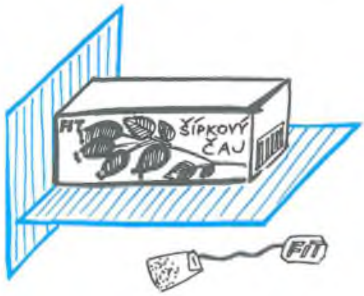


Řešení. Dokážeme, že k rovině ACG je kolmá některá přímka rovnoběžná s přímkou KL. Všimněme si trojúhelníku AFH. Protože bod K je střed úsečky AF a bod L je střed úsečky AH, je úsečka KL střední příčkou trojúhelníku AFH. Proto je přímka KL rovnoběžná s přímkou FH, o níž z příkladu 2 na str. 23 víme, že je k rovině ACG kolmá. Tím je požadovaný důkaz hotov.



2. Body P, R, T jsou po řadě středy hran AE, FG, EH krychle $ABCDEFGH$. Dokažte, že přímka CF je kolmá k rovině PTR.

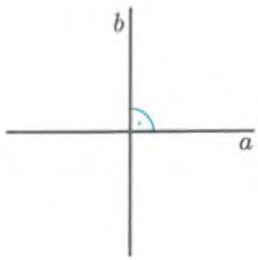
Kdy jsou dvě roviny kolmé?

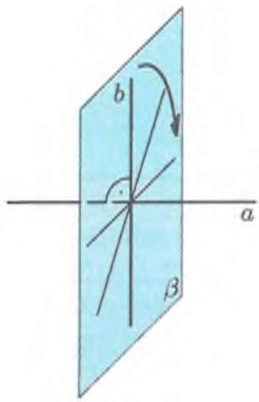


Na předmětech, které každodenně vidíme kolem sebe, můžeme pozorovat příklady kolmých rovin. Naším úkolem nyní bude dát pojmu *kolmé roviny* přesný matematický význam. Nebude to tak obtížné, neboť již víme, co přesně znamená, že k rovině je kolmá přímka.

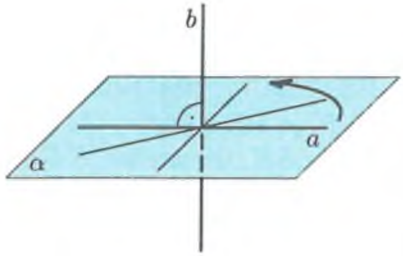
Popíšeme nejdříve, jak je možné vytvořit dvě kolmé roviny pohybem přímek v prostoru.

Vznik roviny β kolmé k přímce a jsme si dříve představili tak, že jsme kolem přímky a otáčeli některou přímku b kolmou k přímce a; body otáčené přímky b vyplnily právě rovinu β.



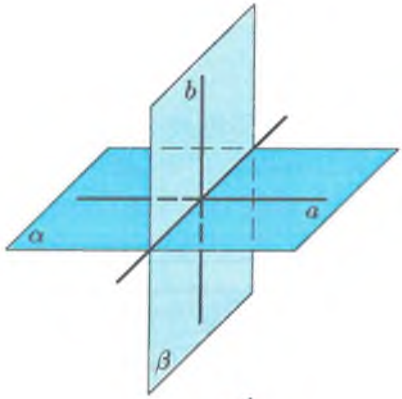


Představme si nyní, že otáčenou přímku b „zastavíme“ (v určité pevné poloze v rovině β) a začneme kolem ní otáčet přímku a. Body otáčené přímky a vyplní novou rovinu α, která je kolmá k přímce b.

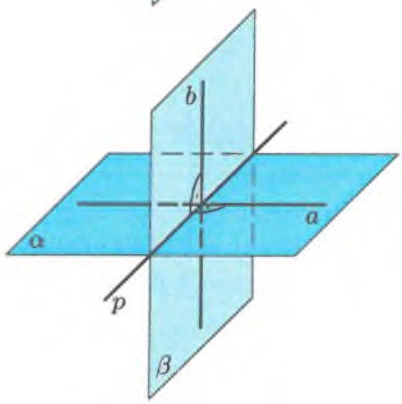


O vzniklých rovinách α, β řekneme, že jsou *navzájem kolmé*.

Zdůrazněme, co je důležité: Rovina α obsahuje přímku kolmou k rovině β (přímku a), rovina β obsahuje přímku kolmou k rovině α (přímku b).



Všimněme si ještě, že průsečnice p rovin α a β je kolmá jak k přímce a (protože leží v rovině β), tak k přímce b (protože leží v rovině α).



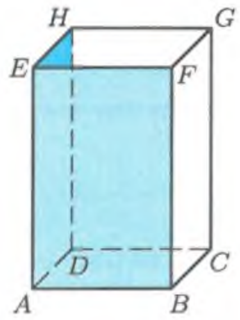
Řekneme, že různoběžné roviny α a β jsou navzájem kolmé (píšeme $\alpha \perp \beta$ nebo $\beta \perp \alpha$), jestliže v rovině α existuje přímka a kolmá k rovině β a zároveň v rovině β existuje přímka b kolmá k rovině α. Průsečnice p rovin α a β je pak kolmá jak k přímce a, tak k přímce b.

Nyní již můžeme přesně zdůvodnit to, co nám dosud bylo zřejmé jen z názoru: Dvě sousední stěny kvádru jsou navzájem kolmé.

Provedeme to například pro stěny $ABFE$ a $ADHE$ kvádru $ABCDEFGH$.

V rovině stěny $ABFE$ leží přímka AB, která je kolmá jak k přímce AD, tak k přímce AE, proto je kolmá i k rovině stěny $ADHE$. V rovině stěny $ADHE$ leží přímka AD, která je kolmá jak k přímce AB, tak k přímce AE, proto je kolmá i k rovině stěny $ABFE$.

Roviny sousedních stěn $ABFE$ a $ADHE$ jsou tedy skutečně navzájem kolmé.

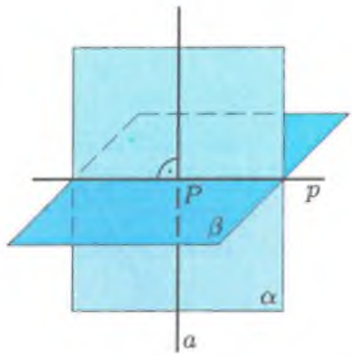


Předchozí zdůvodnění můžeme zkrátit „na polovinu", použijeme-li následující užitečné pravidlo:

> Jestliže rovina α obsahuje přímku a kolmou k rovině β, pak jsou roviny α a β navzájem kolmé.

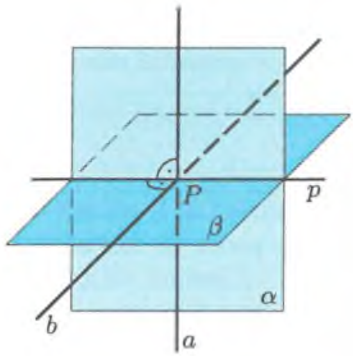
Platnost pravidla zdůvodníme takto:

Protože rovina α obsahuje přímku a kolmou k rovině β, jsou jistě roviny α a β různoběžné. Označme p jejich průsečnici a P společný bod přímek a a p. Protože přímka a je kolmá k rovině β, je kolmá i k přímce p.



Bodem P veďme v rovině β kolmici b k přímce p. Protože $a \perp \beta$, platí rovněž $a \perp b$. Přímka b je tedy kolmá ke dvěma různoběžným přímkám a, p roviny α. Proto je přímka b kolmá i k rovině α. V rovině β jsme tak našli přímku kolmou k rovině α (přímku b).

Proto jsou roviny α a β navzájem kolmé.



□ **3.** Najděte ve třídě příklady dvojic navzájem kolmých rovin.

4. Vysvětlete, proč v krychli $ABCDEFGH$ jsou roviny BCG a EDF navzájem kolmé.

∗**5.** Jsou-li roviny α a β navzájem kolmé a je-li A libovolný bod roviny α, pak kolmice vedená bodem A k rovině β je přímkou roviny α. Dokažte.

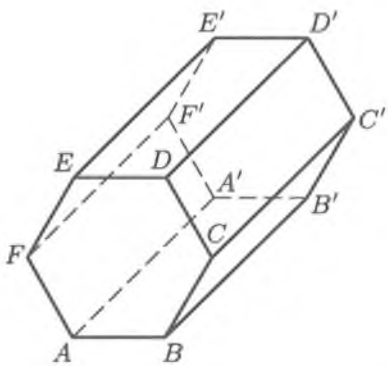
CVIČENÍ 1

1. Znázorněte ve volném rovnoběžném promítání v pravém nadhledu kvádr $ABCDEFGH$ o rozměrech $|AB| = 2\,\text{cm}$, $|BC| = 5\,\text{cm}$, $|BF| = 6\,\text{cm}$. Kvádr znázorněte tak, aby v rovině rovnoběžné s nákresnou ležela stěna

a) $ABFE$, b) $BCGF$, c) $EFGH$.

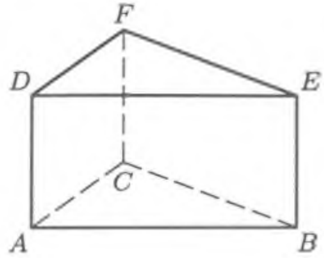
□ **2.** Na obrázku je pravidelný šestiboký hranol $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$. Určete vzájemnou polohu rovin:

a) ABC a $F'D'E'$
b) DCC' a AFF'
c) CDE a $A'BB'$
d) $EE'F'$ a CBC'
e) $A'B'A$ a EDD'
f) ABA' a $CC'D'$



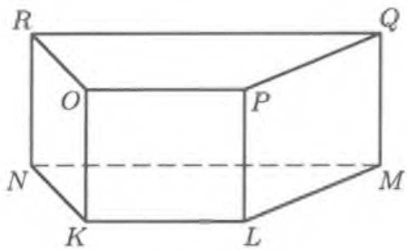
□**3.** Na obrázku je trojboký hranol $ABCDEF$. Určete vzájemnou polohu:

a) přímky CF a roviny ABE
b) přímky AC a roviny BEF
c) přímky EF a roviny ABD
d) přímky BE a roviny DCF

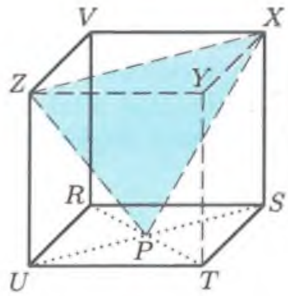


□**4.** Čtyřboký hranol z obrázku má lichoběžníkovou podstavu $KLMN$ ($KL \parallel MN$). Určete vzájemnou polohu přímek:

a) MN a OP b) RO a QP
c) QM a KL d) RN a PL
e) NL a RQ f) KL a RQ
g) NO a OQ h) PR a KM

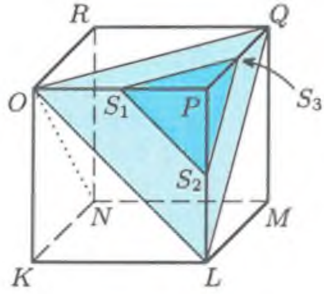


□**5.** Na obrázku je v krychli $RSTUVXYZ$ vyznačena rovina ZPX, kde P je střed čtverce $RSTU$. Dokažte, že každá z přímek RV, SX, TY a UZ je s rovinou ZPX rovnoběžná.



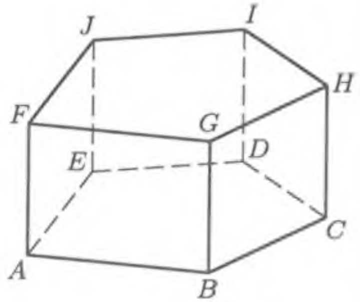
6. Je dána krychle $ABCDEFGH$ a body X, Y, Z, které jsou po řadě středy úseček AH, AB a HG. Dokažte, že přímka XY je rovnoběžná s rovinou ZBG.

7. V krychli $KLMNOPQR$ jsou vyznačeny body S_1, S_2, S_3, které jsou po řadě středy hran OP, PL a PQ. Vysvětlete, proč jsou roviny OQL a $S_1S_2S_3$ rovnoběžné.



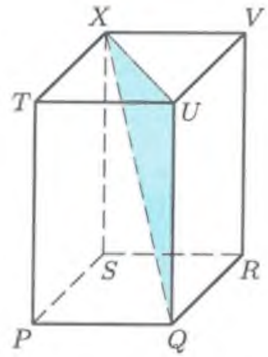
8. Dokažte, že roviny EBG a ACH určené vrcholy krychle $ABCDEFGH$ jsou rovnoběžné.

☐**9.** Na obrázku je pětiboký hranol $ABCDEFGHIJ$. Zdůvodněte, proč je jeho hrana ID kolmá k rovině FGJ.

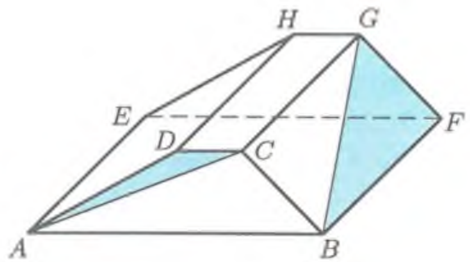


10. Body X, Y jsou po řadě středy hran EF a CD krychle $ABCDEFGH$. Dokažte, že přímka XY je kolmá k rovině ABH.

11. Na obrázku je hranol $PQRSTUVX$. Zdůvodněte, proč je rovina QUX kolmá k rovině jeho podstavy $PQRS$.



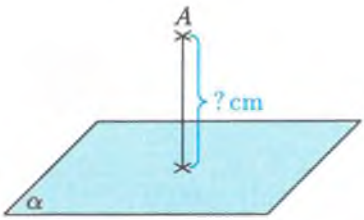
12. Hranol $ABCDEFGH$ z obrázku má lichoběžníkovou podstavu $ABCD$ ($AB \parallel DC$). Zdůvodněte, proč jsou roviny ACD a BFG navzájem kolmé.

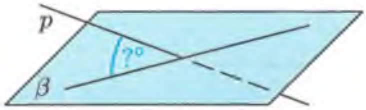


3 VZDÁLENOSTI A ODCHYLKY

V předchozích kapitolách jsme zkoumali vlastnosti bodů, přímek a rovin v prostoru z hlediska jejich vzájemné polohy. Rozhodovali jsme například, zda daný bod leží, či neleží v dané rovině, zda daná přímka je, či není rovnoběžná s danou rovinou. Nyní tyto informace o vzájemné poloze bodů, přímek a rovin budeme doplňovat o důležité *číselné údaje*. Jejich praktický význam přiblížíme dvěma jednoduchými příklady:

– Bod A v rovině α neleží. „Jak daleko“ se od ní nachází?
– Přímka p je s rovinou β různoběžná. „Pod jakým úhlem“ ji protíná?





Jak jsme znázornili na obrázcích, odpovědi na podobné otázky vyjadřujeme pomocí délek jistých úseček a velikostí jistých úhlů. Je důležité, abychom dobře pochopili, o které úsečky a úhly jde. Pomůže nám k tomu tato kapitola, ve které vysvětlíme, jak se různé *vzdálenosti* a *odchylky* prostorových útvarů určují.

Co již víme o *vzdálenosti*?

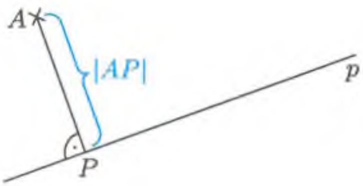
Připomeňme nejdříve známé poznatky o vzdálenostech bodů a přímek při zkoumání útvarů *v rovině*.

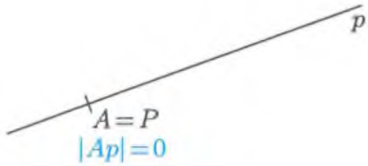
Vzdálenost dvou různých bodů A, B je délka úsečky AB. Jestliže jsou body A, B totožné, pak je jejich vzdálenost rovna 0 (v jakýchkoli jednotkách délky).

$A = B$
$|AB| = 0$

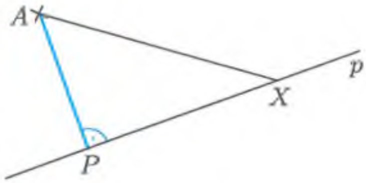
Vzdálenost bodu A od přímky p je vzdálenost bodu A od paty P kolmice vedené z bodu A k přímce p. Označujeme ji $|Ap|$. Platí tedy $|Ap| = |AP|$.

Jestliže bod A leží na přímce p, splývá bod P s bodem A. Proto je vzdálenost bodu A od přímky p v tomto případě rovna nule.

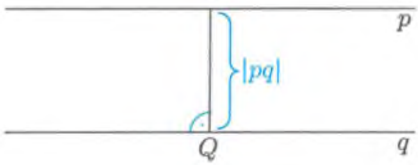




Pomocí obrázku vpravo sami vysvětlete, proč je úsečka AP nejkratší ze všech úseček AX, kde X je libovolný bod přímky p.

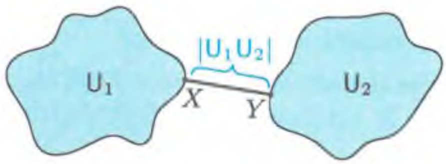


O *vzdálenosti dvou přímek* p, q hovoříme jen tehdy, jsou-li přímky p, q rovnoběžné. Pak je jejich vzdálenost $|pq|$ rovna vzdálenosti libovolného bodu $Q \in q$ od přímky p: $|pq| = |Qp|$.



Vidíme, že vzdálenost dvou rovnoběžek p, q je délka nejkratší úsečky XY, kde $X \in p$ a $Y \in q$. Jsou-li p a q totožné rovnoběžky, je $|pq| = 0$.

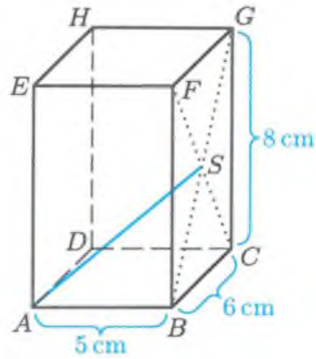
V předchozím krátkém odstavci jsme vlastně naznačili princip, jak se v geometrii často definuje vzdálenost dvou útvarů U_1 a U_2. Je to délka nejkratší „spojnice" útvarů U_1, U_2, tedy délka nejkratší z úseček XY, kde $X \in \mathsf{U}_1$ a $Y \in \mathsf{U}_2$.



Vše, co jsme zopakovali o vzdálenosti dvou bodů, o vzdálenosti bodu od přímky a o vzdálenosti dvou rovnoběžných přímek, zůstává v platnosti i při umístění těchto útvarů *v prostoru*, protože dotyčné dvojice útvarů leží vždy v jedné rovině. Pokud tuto rovinu nalezneme, můžeme v ní provádět známé planimetrické výpočty.

Příklad 1. Je dán kvádr $ABCDEFGH$, $|AB| = 5\,\text{cm}$, $|AD| = 6\,\text{cm}$, $|AE| = 8\,\text{cm}$. Vypočtěte vzdálenost bodu A od průsečíku S stěnových úhlopříček BG a CF.

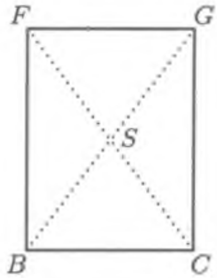
Řešení. Naším úkolem je vypočítat délku úsečky AS. Ta leží v nekonečně mnoha rovinách; pro náš výpočet z nich vybereme jednu vhodnou, např. rovinu ABG. Všimněme si, že úhel ABS je pravý, neboť hrana AB je kolmá k rovině BCG.



V pravoúhlém trojúhelníku ABS známe délku odvěsny AB; hledanou délku přepony AS snadno určíme, když předtím zjistíme délku odvěsny BS.

Užitím Pythagorovy věty pro trojúhelník BCG dostáváme:

$$|BS| = \tfrac{1}{2}|BG| = \tfrac{1}{2}\sqrt{|BC|^2 + |CG|^2} =$$
$$= \left(\tfrac{1}{2}\sqrt{6^2 + 8^2}\right)\text{cm} = \left(\tfrac{1}{2}\sqrt{100}\right)\text{cm} = 5\,\text{cm}$$



Proto platí:

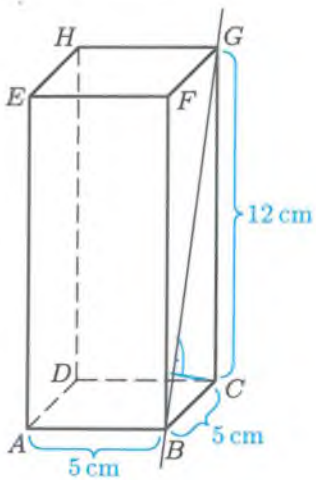
$$|AS| = \sqrt{|AB|^2 + |BS|^2} = \sqrt{5^2 + 5^2}\,\text{cm} =$$
$$= \sqrt{50}\,\text{cm} = \left(5 \cdot \sqrt{2}\right)\text{cm} \doteq 7{,}1\,\text{cm}$$

Vzdálenost bodů A, S je asi 7,1 cm.

Příklad 2. Je dán kvádr $ABCDEFGH$, $|AB| = |AD| = 5\,\text{cm}$, $|AE| = 12\,\text{cm}$. Vypočtěte vzdálenost bodu C od přímky BG.

Řešení. Bod C i přímka BG leží v rovině stěny $BCGF$, kterou si překreslíme do zvláštního obrázku (str. 34).

Hledaná vzdálenost je výškou v z vrcholu C k přeponě BG pravoúhlého trojúhelníku BCG, ve kterém známe délky obou odvěsen: $|BC| = 5\,\text{cm}$, $|CG| = 12\,\text{cm}$.

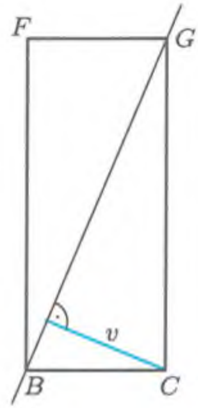


Z Pythagorovy věty vypočteme délku přepony BG:

$$|BG| = \sqrt{|BC|^2 + |CG|^2} = \sqrt{5^2 + 12^2}\,\text{cm} = \sqrt{169}\,\text{cm} = 13\,\text{cm}$$

K výpočtu výšky v použijeme tento „trik“: Vyjádříme dvěma způsoby obsah S trojúhelníku BCG

$$S = \tfrac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |CG|,$$
$$S = \tfrac{1}{2} \cdot |BG| \cdot v$$



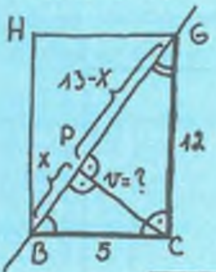
a porovnáním dostaneme:

$$|BC| \cdot |CG| = |BG| \cdot v$$
$$v = \frac{|BC| \cdot |CG|}{|BG|}$$
$$v = \frac{5 \cdot 12}{13}\,\text{cm} \doteq 4{,}6\,\text{cm}$$

Vzdálenost bodu C od přímky BG je asi 4,6 cm.

Kosťa jako my nejprve určil délku přepony BG, pak však místo výpočtu „přes obsah“ využil podobnosti trojúhelníků:

vše v cm:



$$|BG| = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13$$

$$\underbrace{\triangle PBC \sim \triangle CBG \sim \triangle PCG}\ (uu)$$

$$\frac{v}{x} = \frac{|CG|}{|CB|} = \frac{12}{5} \qquad \frac{v}{13-x} = \frac{|CB|}{|CG|} = \frac{5}{12}$$

$$\underbrace{v = \frac{12}{5}x \qquad v = \frac{5}{12}\cdot(13-x)}$$

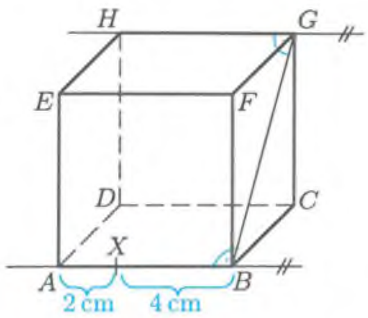
$$\frac{12}{5}x = \frac{5}{12}\cdot(13-x) \qquad /\cdot 60$$
$$144x = 25\cdot(13-x)$$
$$144x = 325 - 25x$$
$$169x = 325 \qquad /:169$$
$$x \doteq 1{,}9$$

$$v = \frac{12}{5}x \doteq \frac{12}{5}\cdot 1{,}9 = 4{,}56 \doteq 4{,}6$$

$$\underline{\underline{v \doteq 4{,}6\,\text{cm}}}$$

Příklad 3. Na hraně AB krychle $ABCDEFGH$ je dán bod X tak, že $|AX| = 2\,\text{cm}$, $|XB| = 4\,\text{cm}$. Vypočtěte vzdálenost bodu X od přímky HG.

Řešení. Protože bod X leží na přímce AB, která je s přímkou HG rovnoběžná, má bod X od přímky HG stejnou vzdálenost jako kterýkoliv jiný bod přímky AB, tedy jako např. bod B. Vzdálenost bodu B od přímky HG je rovna délce úsečky BG, neboť oba úhly ABG a BGH jsou pravé (přímky AB a HG jsou totiž kolmé k rovině BCG).



Hledáme tedy délku stěnové úhlopříčky BG dané krychle. Její hrana má délku $|AX| + |XB| = 6\,\text{cm}$, proto její stěnová úhlopříčka BG měří

$$\sqrt{6^2 + 6^2}\,\text{cm} = \sqrt{72}\,\text{cm} = 6\sqrt{2}\,\text{cm} \doteq 8{,}5\,\text{cm}.$$

Vzdálenost bodu X od přímky HG je asi $8{,}5\,\text{cm}$.

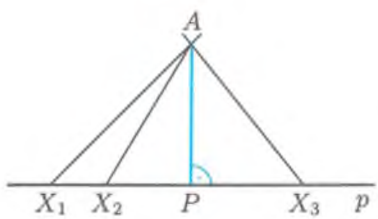
1. Je dána krychle $ABCDEFGH$ o hraně délky $5\,\text{cm}$. Určete vzdálenost vrcholu A od všech jejích zbývajících vrcholů.

2. Vypočtěte vzdálenost průsečíků stěnových úhlopříček dvou sousedních stěn krychle o hraně délky $18\,\text{cm}$.

3. Je dán trojboký hranol $ABCDEF$, jehož podstavou je pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB. Určete vzdálenost středu S hrany DE od přímky CF, je-li $|AD| = 15\,\text{cm}$, $|AC| = 6\,\text{cm}$, $|AB| = 10\,\text{cm}$.

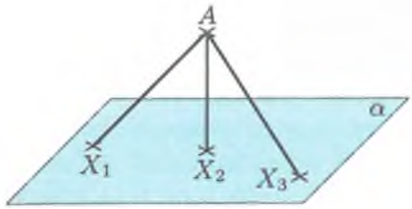
Jak určujeme vzdálenost *bodu od roviny*?

Připomeňme, že vzdálenost bodu A od přímky p je rovna nejmenší ze všech vzdáleností $|AX|$, kde X je libovolný bod přímky p. Jak víme, nejkratší z odpovídajících úseček AX je úsečka AP, kde P je pata kolmice sestrojené z bodu A k přímce P.



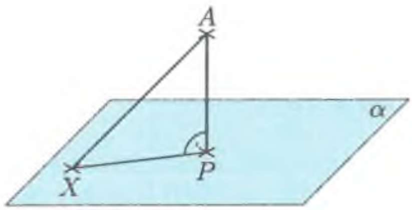
Podobným způsobem budeme nyní definovat vzdálenost bodu od roviny.

Předpokládejme, že v prostoru je dána rovina α a bod A, který v ní neleží. Vzdáleností bodu A od roviny α nazveme délku nejkratší z úseček AX, kde X je libovolný bod roviny α.



Správně asi tušíte, že úsečka AX je nejkratší, když bod X splývá s patou P kolmice sestrojené z bodu A k rovině α.

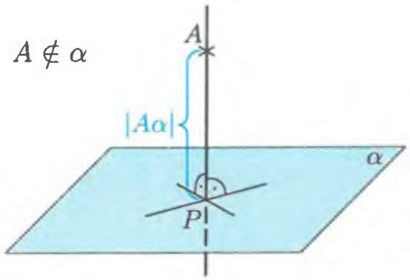
Skutečně, je-li X libovolný bod roviny α různý od bodu P, je přímka AP kolmá k přímce PX, trojúhelník APX má tudíž pravý úhel při vrcholu P. Nejdelší stranou tohoto trojúhelníku je přepona AX, proto platí nerovnost $|AX| > |AP|$.

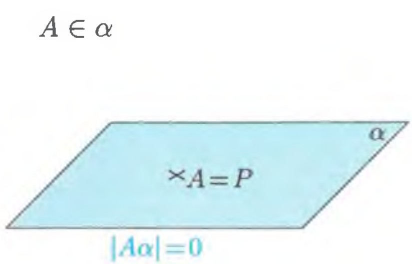


Tak jsme dokázali, že každý bod X roviny α, $X \neq P$, má od bodu A větší vzdálenost než bod P. Bod P se často nazývá *kolmý průmět* bodu A do roviny α.

Vzdálenost bodu A od roviny α je rovna délce úsečky AP, kde bod P je pata kolmice sestrojené z bodu A k rovině α (bodu P též říkáme kolmý průmět bodu A do roviny α).
Vzdálenost bodu A od roviny α značíme $|A\alpha|$.

V případě, kdy bod A leží v rovině α, platí $|A\alpha| = 0$, neboť $A = P$.

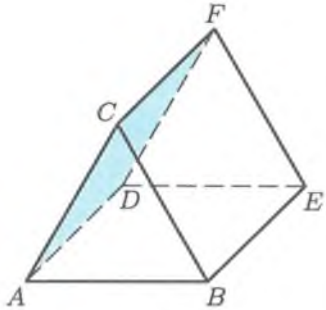




S metodami výpočtu vzdáleností bodů od rovin se seznámíte až ve vyšších ročnících gymnázia. Nyní se omezíme jen na výpočty „na hranolech“.

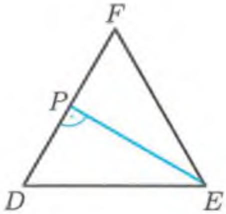
Příklad 4. Je dán pravidelný trojboký hranol $ABCDEF$. Vypočtěte vzdálenost bodu E od roviny ACF, je-li $|AB| = 4\,\text{cm}$, $|AD| = 6\,\text{cm}$.

Řešení. Načrtněme daný hranol tak, aby se jeho podstavy ABC a DEF zobrazily nezkresleně, tj. jako rovnostranné trojúhelníky.



K určení hledané vzdálenosti potřebujeme zjistit patu kolmice sestrojené z bodu E k rovině ACF.

Rovina ACF je rovinou boční stěny hranolu, tudíž je kolmá k rovině podstavy DEF. Proto zmíněná kolmice leží v rovině DEF a její pata P je vlastně patou výšky z vrcholu E ke straně DF rovnostranného trojúhelníku DEF.



Hledaná vzdálenost je tedy délkou úsečky PE, kterou určíme z Pythagorovy věty pro trojúhelník PDE s přeponou DE délky 4 cm a odvěsnou DP délky $\frac{1}{2} \cdot |DF| = 2\,\text{cm}$:

$$|PE| = \sqrt{|DE|^2 - |DP|^2} = \sqrt{4^2 - 2^2}\ \text{cm} = \sqrt{16 - 4}\ \text{cm} =$$
$$= \sqrt{12}\ \text{cm} = 2\sqrt{3}\ \text{cm} \doteq 3{,}5\,\text{cm}$$

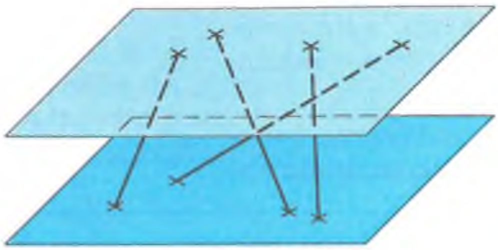
Vzdálenost bodu E od roviny ACF je asi 3,5 cm.

4. Vysvětlete, proč všechny tělesové úhlopříčky AG, BH, CE a DF kvádru $ABCDEFGH$ procházejí týmž bodem S. Pak vypočtěte vzdálenosti bodu S od všech stěn kvádru, je-li $|AB| = 4\,\text{cm}$, $|AD| = 5\,\text{cm}$, $|AE| = 8\,\text{cm}$.

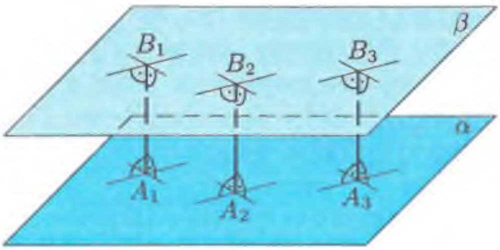
5. Je dán pravidelný čtyřboký hranol $ABCDEFGH$ s podstavnou hranou AB délky 8 cm a výškou $|AE| = 6\,\text{cm}$. Bod M je střed hrany AE. Určete vzdálenost bodu M od roviny BDH.

Co je vzdálenost rovin?

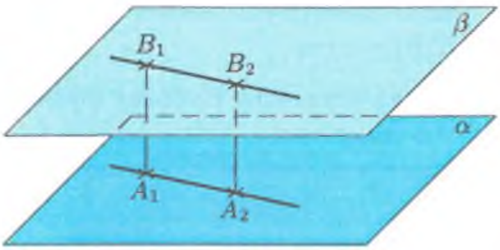
O vzdálenosti dvou rovin hovoříme jen v případě, kdy jsou tyto roviny *rovnoběžné*. Podle předchozích zkušeností se vzdálenostmi bodů od přímek a rovin jistě uhodnete, že vzdálenost dvou rovnoběžných rovin budeme chápat jako délku nejkratší z úseček, které obě roviny „spojují“ (několik úseček „spojujících“ dvě roviny vidíte na obrázku).



Také vás nepřekvapí, že nejkratší „spojnice“ dvou různých rovnoběžných rovin α, β budeme hledat pouze mezi úsečkami, které jsou k oběma rovinám kolmé (zdůvodnit to lze obdobně, jako jsme dříve posuzovali vzdálenost bodu od roviny). Na obrázku jsme vyznačili tři takové úsečky: A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3. Která z nich je nejkratší? Jistě nepochybujete o tom, že všechny tři mají stejnou délku. Vybereme libovolné dvě z nich (označené A_1B_1 a A_2B_2 jako na obrázku) a vysvětlíme, proč $|A_1B_1| = |A_2B_2|$.

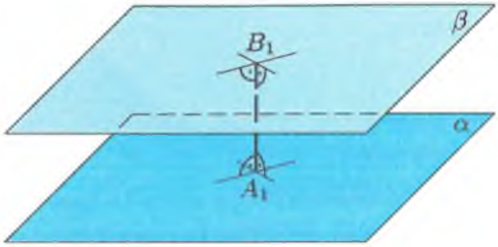


V rovině α sestrojíme přímku A_1A_2, v rovině β přímku B_1B_2. Přímky A_1B_1 a A_2B_2 jsou rovnoběžné, neboť jsou obě kolmé k rovině α (i k rovině β). Ukážeme, že jsou rovnoběžné i přímky A_1A_2 a B_1B_2. Z rovnoběžnosti $A_1B_1 \parallel A_2B_2$ plyne, že body A_1, A_2, B_1 a B_2 leží v jedné rovině, takže přímky A_1A_2 a B_1B_2 jsou buď rovnoběžky, nebo různoběžky. Kdyby šlo o různoběžky, byl by jejich průsečík společným bodem rovin α a β, což není možné, neboť $\alpha \parallel \beta$.

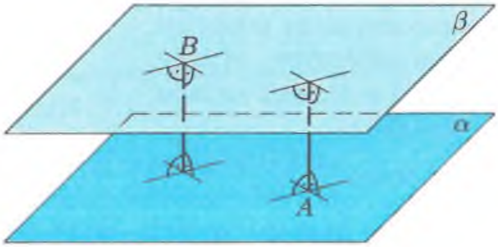


Přímky A_1A_2 a B_1B_2 jsou tedy rovnoběžky, a tak je čtyřúhelník $A_1A_2B_2B_1$ rovnoběžník (dokonce pravoúhelník). Proto platí $|A_1B_1| = |A_2B_2|$. Dokázali jsme, že všechny „kolmé spojnice“ rovin α, β mají stejnou délku.

Znovu nakresleme jednu z těchto spojnic, úsečku s krajními body $A_1 \in \alpha$ a $B_1 \in \beta$. Jaký význam má délka této úsečky? Je to jednak vzdálenost bodu B_1 od roviny α, jednak vzdálenost bodu A_1 od roviny β.



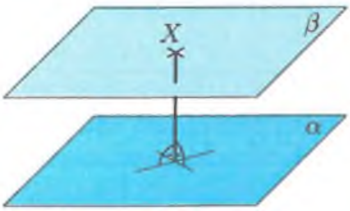
Předchozími úvahami jsme vlastně dokázali, že vzdálenost libovolného bodu A roviny α od roviny β je stejná jako vzdálenost libovolného bodu B roviny β od roviny α. Tuto vzdálenost jako *vzdálenost rovin* α, β značíme $|\alpha\beta|$.



$|A\beta| = |B\alpha| = |\alpha\beta|$

Vzdálenost dvou rovnoběžných rovin je rovna vzdálenosti libovolného bodu jedné roviny od roviny druhé.

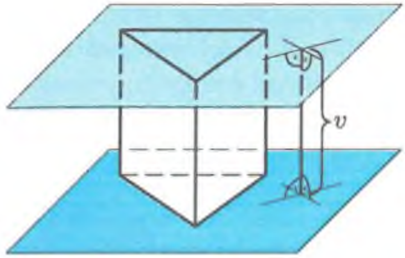
V případě totožných rovin α, β platí $|\alpha\beta| = 0$.



$|\alpha\beta| = |X\alpha|$

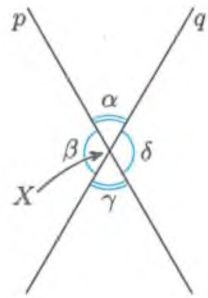
$|\alpha\beta| = 0$

Se vzdáleností dvou rovnoběžných rovin jsme se již setkali v učivu o hranolech. Výška každého hranolu je totiž vzdálenost dvou rovin, ve kterých leží jeho podstavy.



? Co je *odchylka* dvou různoběžek?

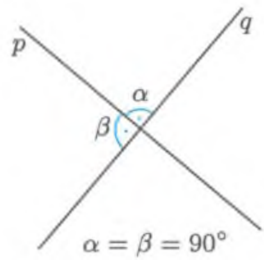
Jak víme, dvě různoběžky jsou dvě přímky, které leží v jedné rovině a mají společný jediný bod (průsečík). Jejich vzájemnou polohu „upřesňujeme“ pomocí úhlu, který tyto přímky svírají. Na obrázku se různoběžky p, q protínají v bodě X a rozdělují rovinu na čtyři úhly α, β, γ, δ. Velikost kterého z nich budeme považovat za odchylku přímek p a q? Předně si uvědomme, že úhly α a γ (stejně jako úhly β a δ) mají stejnou velikost, neboť jsou *vrcholové*:



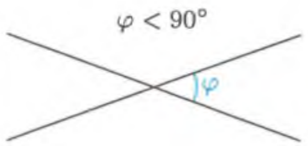
$$\alpha = \gamma, \quad \beta = \delta$$

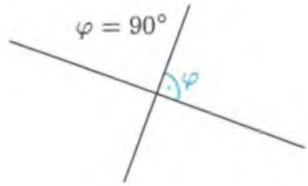
Stačí tedy vybrat z velikostí úhlů α a β. Předpokládejme nejprve, že úhly α a β *nejsou shodné*. Pak z rovnosti $\alpha + \beta = 180°$ plyne, že menší z úhlů α, β je *ostrý* (na předchozím obrázku je to úhel α). Jeho velikost nazveme odchylkou přímek p a q.

Pokud úhly α a β *jsou shodné*, jsou to dva pravé úhly, přímky p, q jsou navzájem kolmé a jejich odchylka je 90°.

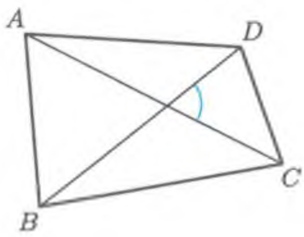


Odchylkou dvou různoběžných přímek rozumíme velikost ostrého nebo pravého úhlu, který tyto přímky svírají.





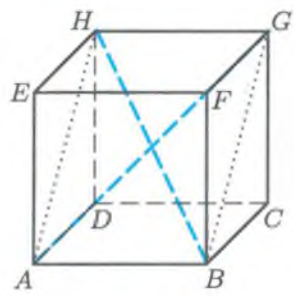
Často hovoříme o odchylce dvou úseček, které mají společný vnitřní bod (např. úhlopříček daného konvexního čtyřúhelníku). Rozumíme jí odchylku přímek, na kterých tyto úsečky leží.



Někdy mluvíme i o odchylce dvou rovnoběžných přímek – říkáme, že dvě rovnoběžky mají odchylku 0°.

Příklad 5. Vypočtěte odchylku tělesových úhlopříček AG a BH krychle $ABCDEFGH$ o hraně délky a.

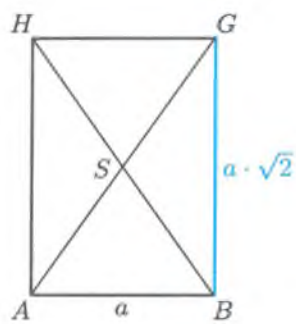
Řešení. Úsečky AG a BH jsou úhlopříčkami obdélníku $ABGH$. Určíme jeho rozměry. Platí $|AB| = a$, délku strany BG určíme jako délku úhlopříčky ve čtverci $BCGF$. Podle Pythagorovy věty



$$|BG|^2 = |BC|^2 + |CG|^2 = a^2 + a^2 = 2a^2,$$

a tak $|BG| = a \cdot \sqrt{2}$.

Obdélník $ABGH$ překreslíme do nového obrázku, v němž vyznačíme i průsečík S úhlopříček AG a BH. Hledaná odchylka je rovna velikosti menšího z vedlejších úhlů ASB, BSG.

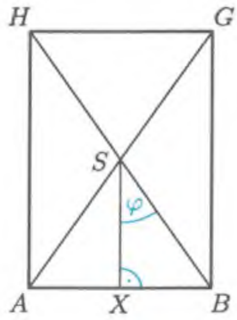


Protože $|AB| < |BG|$, tušíme, že úhel ASB je ostrý a úhel BSG je tupý. Potvrdíme to výpočtem velikosti úhlu ASB, která tak bude hledanou odchylkou přímek AG a BH.

V rovnoramenném trojúhelníku ABS sestrojíme výšku SX k základně AB a vypočteme velikost úhlu $\varphi = \sphericalangle XSB$.

V pravoúhlém trojúhelníku SBX známe délky obou odvěsen:

$$|XB| = \tfrac{1}{2} \cdot |AB| = \tfrac{1}{2} \cdot a$$
$$|XS| = \tfrac{1}{2} \cdot |BG| = \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot \sqrt{2}$$



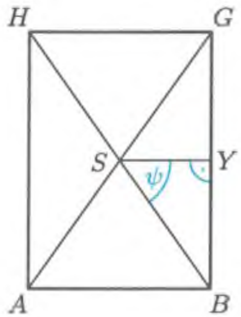
Proto platí:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{|XB|}{|XS|} = \frac{\frac{1}{2} \cdot a}{\frac{1}{2} \cdot a \cdot \sqrt{2}} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \doteq 0{,}707$$

Odtud $\varphi \doteq 35°16'$, takže

$$|\sphericalangle ASB| = 2 \cdot \varphi \doteq 70°32'.$$

Výpočtem jsme ověřili, že $|\sphericalangle ASB| < 90°$, proto jsme skutečně nalezli hledanou odchylku úseček AG a BH. Kdybychom místo velikosti úhlu ASB počítali stejným postupem velikost úhlu BSG, vyšlo by nám (viz obrázek):



$$\operatorname{tg} \psi = \frac{|YB|}{|YS|} = \frac{\frac{1}{2} \cdot a \cdot \sqrt{2}}{\frac{1}{2} \cdot a} =$$
$$= \sqrt{2} \doteq 1{,}414$$
$$\psi \doteq 54°44'$$
$$|\sphericalangle BSG| = 2 \cdot \psi \doteq 109°28'$$

Hledanou odchylku bychom z tupého úhlu BSG určili „dopočítáním“ do 180°:

$$180° - 109°28' = 70°32'$$

Odchylka úhlopříček AG a BH je asi $70°32'$.

K předchozí úloze ještě dodejme, že vypočtená odchylka tělesových úhlopříček nezávisí na velikosti dané krychle. Lze to zdůvodnit i bez výpočtu úvahami o zvětšování a zmenšování útvarů v prostoru. Při takových změnách se totiž zachovávají velikosti úhlů (u rovinných útvarů jsme to podrobně posuzovali v sešitě *Podobnost a funkce úhlu*).

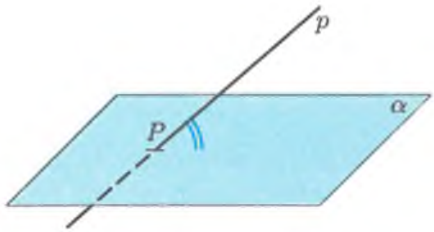
□6. V krychli $ABCDEFGH$ o hraně délky a určete odchylku úseček
a) AB, BC, b) AB, BD, c) AB, BG.

7. V krychli $ABCDEFGH$ o hraně délky a určete odchylku úhlopříček AG, EC.

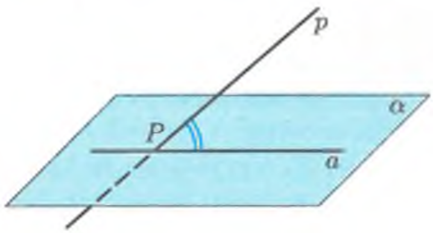
8. Je dán pravidelný čtyřboký hranol $ABCDEFGH$, jehož podstavná hrana a výška jsou v poměru $1 : 2$. Vypočtěte odchylku jeho tělesových úhlopříček CE a DF. (Při výpočtu označte d délku podstavné hrany.)

Co je odchylka přímky od roviny?

Předpokládejme, že přímka p je s rovinou α různoběžná a protíná ji v bodě P. Přemýšlejme nyní, jak vyjádřit, nakolik se přímka p od roviny α „odchyluje". Názorně se zdá, že by to šlo pomocí jistého úhlu, který naznačíme v obrázku:



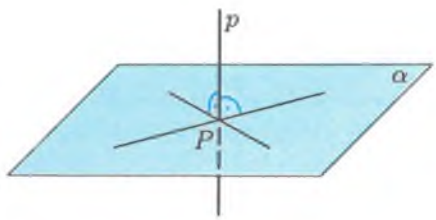
Takový obrázek však není úplný; naznačenému úhlu chybí druhé rameno. To zřejmě leží na některé přímce a, která prochází bodem P a leží v rovině α.



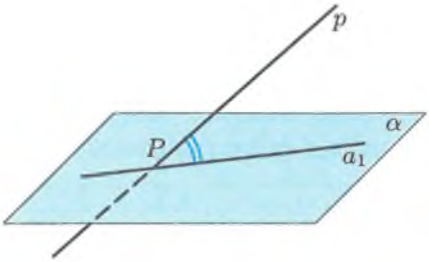
Takových přímek je však nekonečně mnoho. Která z nich je ta „správná"?

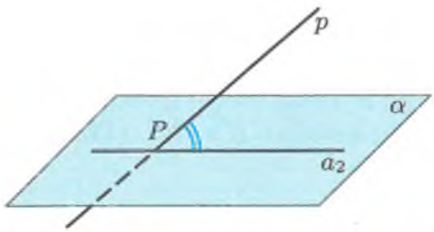
V jednom případě na výběru přímky a nezáleží. Je to tehdy, když je přímka p *kolmá* k rovině α. Pak přímka p svírá úhel 90° s každou přímkou roviny α, která prochází bodem P.

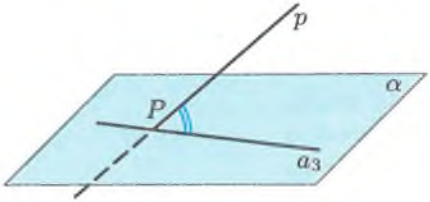
V tomto případě říkáme, že odchylka přímky p od roviny α je 90°.



Hledejme nyní přímku a v situaci, kdy přímka p není k rovině α kolmá. Různé přímky a_1, a_2, a_3, ..., které leží v rovině α a procházejí bodem P, mají od přímky p různé odchylky:

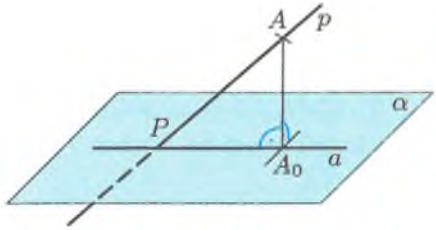






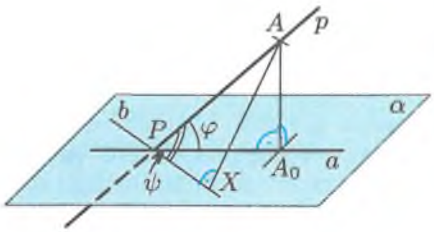
„Správná" je ta přímka a, pro niž je příslušná odchylka *nejmenší.* Jak takovou přímku geometricky popsat?

Zvolme na přímce p libovolný bod A, $A \neq P$, a sestrojme kolmý průmět A_0 bodu A do roviny α. Protože předpokládáme, že přímka p není kolmá k rovině α, je bod A_0 různý od bodu P. Vysvětlíme, že hledaná přímka a prochází bodem A_0, takže $a = \leftrightarrow PA_0$.



Vyberme v rovině α jinou přímku b, která prochází bodem P a není kolmá k přímce p. Pro patu X kolmice z bodu A k přímce b platí $X \neq P$. Dále označme velikosti ostrých úhlů $\varphi = |\sphericalangle APA_0|$ a $\psi = |\sphericalangle APX|$.

Z pravoúhlých trojúhelníků APA_0 a APX dostáváme:

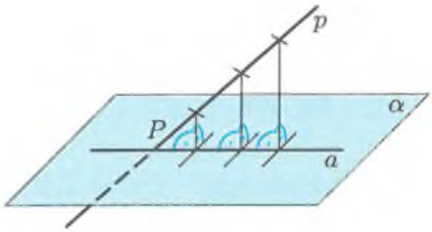


$$\sin\varphi = \frac{|AA_0|}{|AP|}, \quad \sin\psi = \frac{|AX|}{|AP|}$$

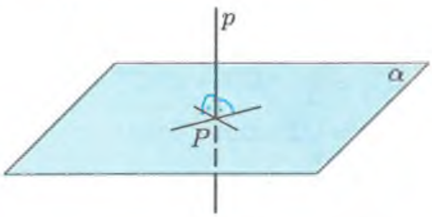
Oba vypsané zlomky mají stejné jmenovatele, větší je proto ten z nich, který má většího čitatele. Protože úsečka AA_0 je nejkratší ze všech úseček, které spojují bod A s body roviny α, platí $|AX| > |AA_0|$. Tak dostáváme nerovnost $\sin\psi > \sin\varphi$, z níž plyne $\psi > \varphi$, neboť funkce sinus je v intervalu $(0°, 90°)$ rostoucí.

Dokázali jsme, že odchylka přímky p od přímky a je menší než odchylka přímky p od přímky b. To znamená, že ze všech přímek roviny α, které procházejí bodem P, má od přímky p nejmenší odchylku právě přímka a.

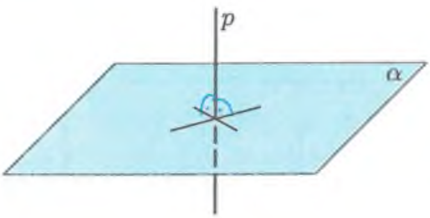
Dodejme, že na přímce a leží kolmé průměty všech bodů přímky p do roviny α. Proto se přímka a nazývá *kolmý průmět přímky p do roviny α.*

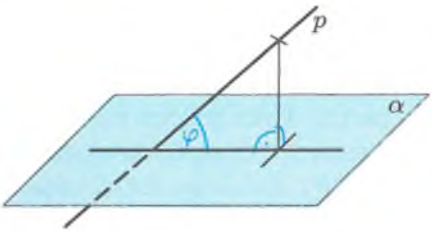


Je-li přímka p k rovině α kolmá, pak kolmé průměty všech bodů přímky p do roviny α splývají s průsečíkem P přímky p s rovinou α. Kolmý průmět přímky p do roviny α je v tomto případě tvořen jediným bodem P.



Je-li přímka p kolmá k rovině α, říkáme, že odchylka přímky p od roviny α je rovna $90°$.
Je-li přímka p různoběžná s rovinou α a není-li k ní kolmá, pak odchylkou přímky p od roviny α rozumíme odchylku přímky p od jejího kolmého průmětu do roviny α.

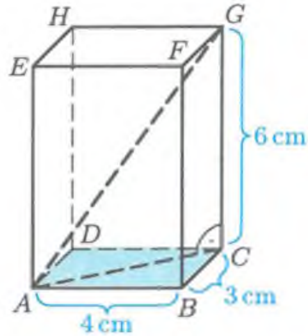




Poznamenejme, že někdy definujeme i odchylku přímky od roviny v případě, kdy daná přímka v dané rovině leží. Tuto odchylku pak klademe rovnu $0°$.

Příklad 6. Je dán kvádr $ABCDEFGH$, kde $|AB| = 4\,\text{cm}$, $|AD| = 3\,\text{cm}$, $|AE| = 6\,\text{cm}$. Vypočtěte odchylku úhlopříčky AG od roviny ABC.

Řešení. Nejprve najdeme kolmý průmět přímky AG do roviny ABC. Bude to některá přímka procházející bodem A. Protože hrana GC je kolmá k rovině ABC, je kolmým průmětem bodu G do roviny ABC bod C; proto kolmým průmětem přímky AG je přímka AC.



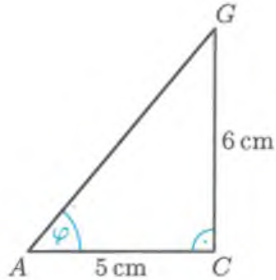
K určení odchylky $\varphi = |\sphericalangle GAC|$ přímky AG od roviny ABC využijeme pravoúhlého trojúhelníku ACG s přeponou AG. Jeho odvěsna CG má délku 6 cm. Délku odvěsny AC určíme z pravoúhlého trojúhelníku ABC:

$$|AC| = \sqrt{|AB|^2 + |BC|^2} = \sqrt{4^2 + 3^2}\,\text{cm} = \\ = \sqrt{25}\,\text{cm} = 5\,\text{cm}$$

Užitím funkce tangens pak vypočteme φ:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{|CG|}{|AC|} = \frac{6\,\text{cm}}{5\,\text{cm}} = 1{,}2$$

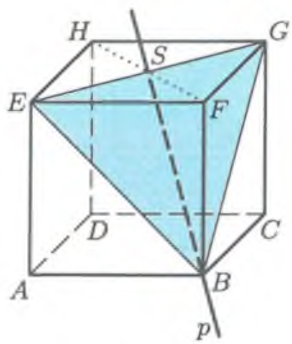
$$\varphi \doteq 50°12'$$



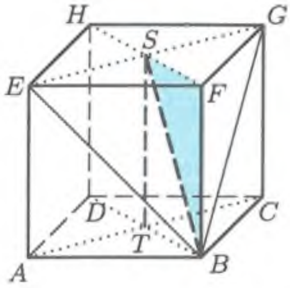
Odchylka přímky AG od roviny ABC je asi $50°12'$.

Příklad 7. V krychli $ABCDEFGH$ určete odchylku hrany BF od roviny BGE.

Řešení. Hledejme nejprve přímku p, která je kolmým průmětem přímky BF do roviny BGE. Jedním jejím bodem je jistě bod B. Určit polohu kolmého průmětu bodu F (druhého krajního bodu úsečky BF) do roviny BGE však není jednoduché. Ukážeme raději rovnou, že kolmým průmětem „celé“ přímky BF do roviny BGE je přímka $p = \leftrightarrow BS$, kde S je průsečík přímek EG a FH.



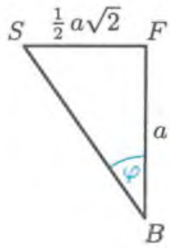
Rovina BGE obsahuje přímku EG, která je kolmá k rovině BFH (EG je kolmá k různoběžkám FH a ST). Proto jsou roviny BGE a BFH navzájem kolmé. Zdůvodněte sami, že jejich průsečnice BS je kolmým průmětem do roviny BGE libovolné přímky, která leží v rovině BFH a není k BS kolmá.



Přímka BS je tedy skutečně kolmým průmětem přímky BF do roviny BGE.

Hledanou odchylku $\varphi = |\sphericalangle FBS|$ určíme z pravoúhlého trojúhelníku BFS. Je-li a délka hrany krychle, platí $|BF| = a$,

$$|FS| = \tfrac{1}{2}|FH| = \tfrac{1}{2}a\sqrt{2}$$



(FH je úhlopříčkou čtverce $EFGH$ o straně délky a). Užitím funkce tangens dostáváme:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{|SF|}{|BF|} = \frac{\frac{1}{2}a\sqrt{2}}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2} \doteq 0{,}707$$

$$\varphi \doteq 35°16'$$

Odchylka hrany BF od roviny BGE je asi $35°16'$.

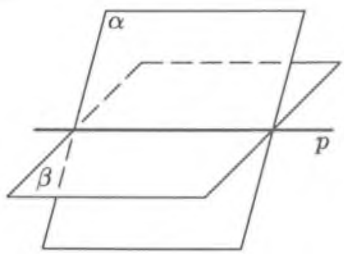
9. V krychli $ABCDEFGH$ určete odchylku přímky BH od roviny ABC.

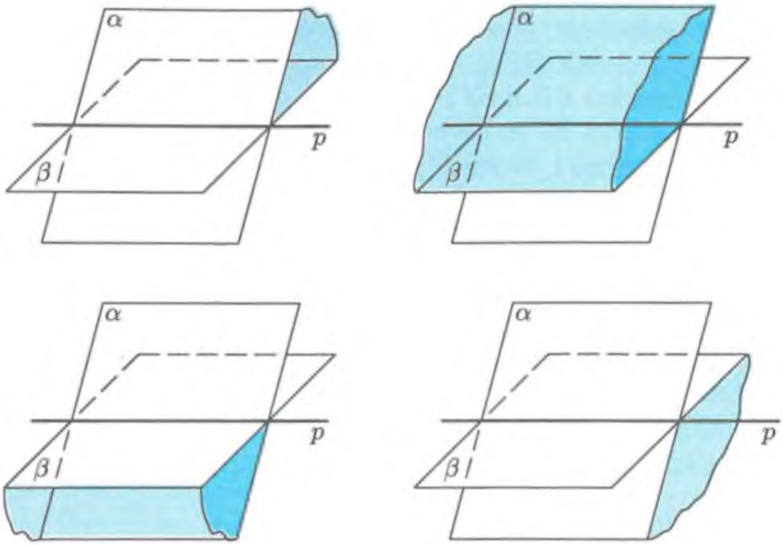
10. Je dán pravidelný čtyřboký hranol $ABCDEFGH$, kde $|AB| = |AD| = 4\,\text{cm}$, $|AE| = 6\,\text{cm}$. Určete odchylku přímky DH od roviny DEG.

Co je odchylka dvou rovin?

Odchylku dvou rovin v prostoru budeme posuzovat podobně, jako jsme dříve posuzovali odchylku dvou přímek v rovině.

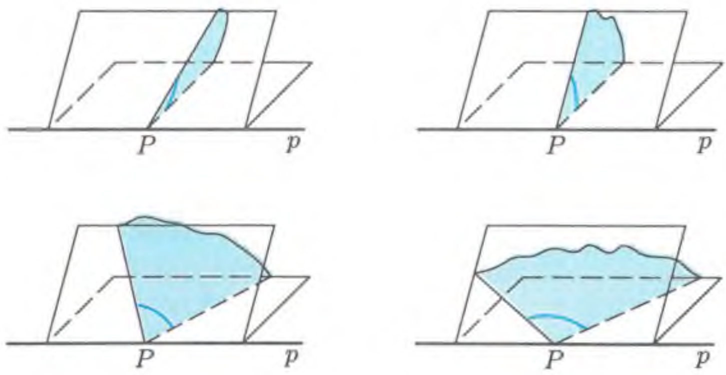
Předpokládejme, že v prostoru jsou dány dvě různoběžné roviny α, β, které nejsou navzájem kolmé, a označme p jejich průsečnici. Tyto roviny rozdělují prostor na čtyři části, které mají tvar „nekonečných klínů“ se společnou hranou p.



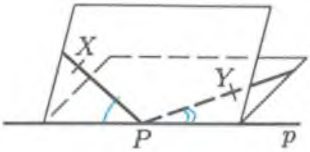


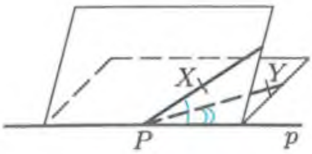
Bez ohledu na to, jak jsou roviny α, β k sobě „nakloněny“, je zřejmé, že dvojice „protějších“ klínů jsou shodné. O libovolných dvou „sousedních“ klínech se společnou stěnou bychom asi řekli, že jeden z nich je „ostrý“ a druhý „tupý“. Dohodneme se, že k měření odchylky vybereme ten, který je ostrý. Jakým úhlem vyjádřit „ostrost“ tohoto klínu?

Je jasné, že půjde o nějaký úhel s vrcholem P na přímce p, jehož ramena leží ve stěnách klínu. I když bod P zvolíme pevně, je zmíněných úhlů nekonečně mnoho a jejich velikosti vyplní celý interval $(0°, 180°)$.

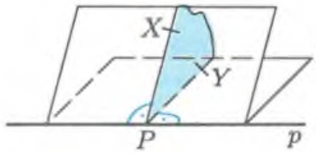


Velikost zkoumaného úhlu XPY je ovlivněna tím, jakým směrem se polopřímky PX, PY k přímce p „naklánějí“ a jaké úhly s ní svírají.

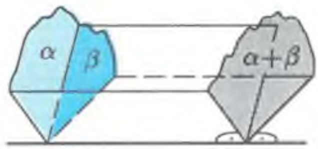




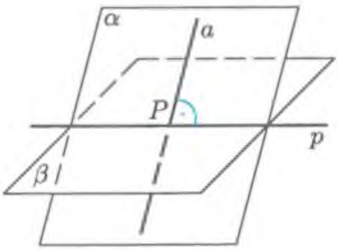
Aby matematici vyloučili vliv „náklonu“ polopřímek PX, PY vzhledem k přímce p, dohodli se, že „ostrost“ klínu budou měřit pomocí úhlu sevřeného těmi polopřímkami PX a PY, které jsou k průsečnici p *kolmé*.

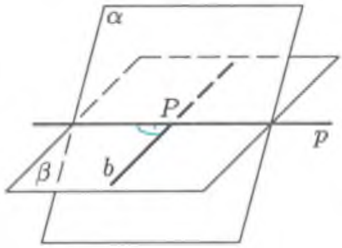


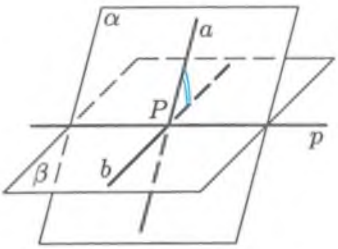
Jistě cítíte, že takové měření je „nejspravedlivější“. Jeho matematická „správnost“ je dána tím, že pokud dva ostré klíny s úhly α a β slepíme k sobě tak, aby měly společnou hranu, dostaneme klín s úhlem $\alpha + \beta$.



Dospěli jsme tak ke způsobu, jak určit odchylku dvou různoběžných rovin α a β. Zvolíme libovolný bod P na průsečnici p rovin α, β. V rovině α vedeme bodem P přímku a kolmou k přímce p. V rovině β vedeme bodem P přímku b kolmou k přímce p. Odchylka různoběžek a, b pak určuje odchylku daných rovin α, β.

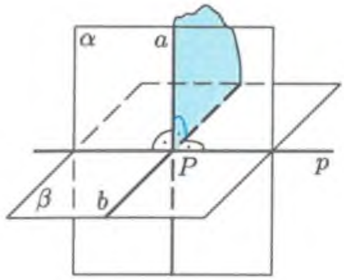






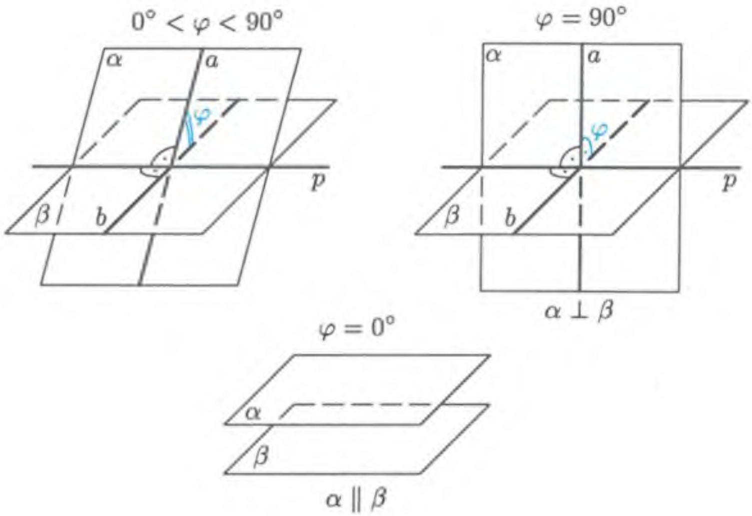
Dodejme, že popsaný způsob je v souladu s tím, co již víme o kolmosti dvou rovin. Jsou-li totiž roviny α a β navzájem kolmé, svírají zmíněné přímky a, b pravý úhel, a tak je odchylka takových rovin α, β rovna 90°.

Je-li naopak odchylka některých dvou rovin 90°, pak jsou tyto roviny navzájem kolmé.



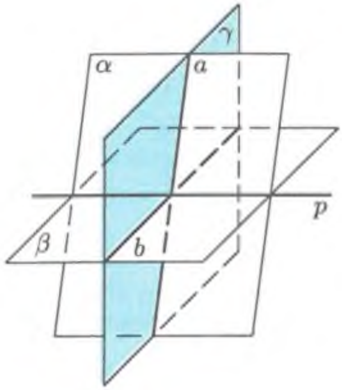
Odchylkou různoběžných rovin α, β rozumíme odchylku dvou různoběžek a, b, které jsou obě kolmé k průsečnici p rovin α a β, přičemž přímka a leží v rovině α a přímka b leží v rovině β.

Někdy mluvíme také o odchylce dvou rovnoběžných rovin, dokonce i v případě, kdy obě roviny splynou. Říkáme, že odchylka dvou rovnoběžných rovin je 0°.



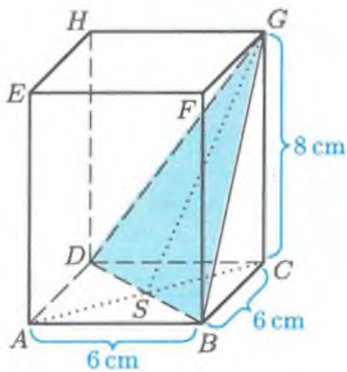
Různoběžky a, b, které jsou kolmé k průsečnici p různoběžných rovin α, β, určují rovinu γ, která je kolmá k přímce p. Proto se často odchylka různoběžných rovin α, β definuje jako odchylka jejich průsečnic s rovinou, která je kolmá k přímce p.

Sami vysvětlete, proč zmíněná rovina γ je kolmá jak k rovině α, tak k rovině β.



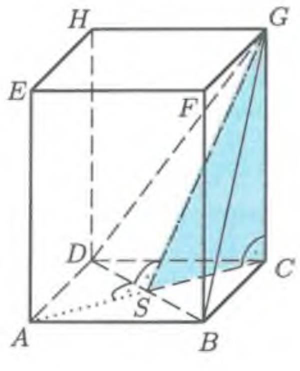
Příklad 8. Je dán pravidelný čtyřboký hranol $ABCDEFGH$, $|AB| = |AD| = 6\,\text{cm}$, $|AE| = 8\,\text{cm}$. Vypočtěte odchylku rovin ABC a BDG.

Řešení. Průsečnicí rovin ABC a BDG je přímka BD. Kolmici k této přímce v rovině ABC určíme snadno – je to např. přímka AC, která prochází středem S úsečky BD (úhlopříčky čtverce jsou totiž navzájem kolmé).



Která přímka roviny BDG prochází bodem S a je kolmá k přímce BD? Je to přímka SG, neboť v trojúhelníku BDG platí $|BG| = |DG|$ (úhlopříčky shodných bočních stěn hranolu), takže úsečka SG spojující střed strany BD s protějším vrcholem G je v rovnoramenném trojúhelníku BDG nejen těžnicí, ale i výškou (k základně BD).

Zdůvodnili jsme, že obě přímky SC i SG jsou kolmé k průsečnici BD rovin ABC a BDG. Proto je odchylka těchto dvou rovin rovna velikosti úhlu CSG (že jde o ostrý úhel, zjistíme za okamžik).



Trojúhelník SCG má pravý úhel při vrcholu C, neboť $GC \perp \leftrightarrow ABC$; délku jeho odvěsny SC nyní vypočteme ze čtverce $ABCD$ a pak určíme velikost ostrého úhlu CSG užitím funkce tangens v trojúhelníku SCG:

$$|SC| = \tfrac{1}{2} \cdot |AC| = \tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{|AB|^2 + |BC|^2} = \left(\tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{6^2 + 6^2}\,\right) \mathrm{cm} =$$
$$= \left(\tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{72}\,\right) \mathrm{cm} = \left(\tfrac{1}{2} \cdot 6\sqrt{2}\,\right) \mathrm{cm} = 3\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$$

$$\mathrm{tg}\,|\sphericalangle CSG| = \frac{|GC|}{|SC|} = \frac{8\,\mathrm{cm}}{3\sqrt{2}\,\mathrm{cm}} = \frac{4\sqrt{2}}{3} \doteq 1{,}886$$
$$|\sphericalangle CSG| \doteq 62°$$

Odchylka rovin ABC a BDG je asi $62°$.

11. Roviny α, β a γ obsahují tutéž přímku p. Určete odchylku rovin α a γ, je-li odchylka rovin α a β rovna $60°$ a odchylka rovin β a γ je rovna $50°$.

12. V krychli $ABCDEFGH$ o hraně délky a určete odchylku rovin BGE a EFH.

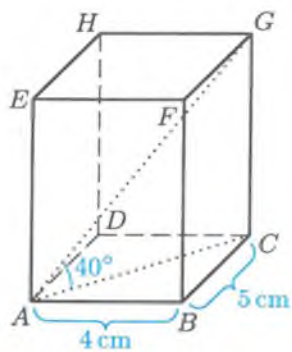
V závěru kapitoly uplatníme poznatky o odchylkách přímek a rovin při řešení úloh o objemu a povrchu hranolu. Jistě si pamatujete, že pro objem V a povrch S hranolu platí vzorce

$$\boxed{V = S_{\mathrm{p}} \cdot v, \qquad S = 2 \cdot S_{\mathrm{p}} + S_{\mathrm{pl}},}$$

kde S_{p} je obsah (jedné) podstavy, S_{pl} obsah pláště a v je výška hranolu.

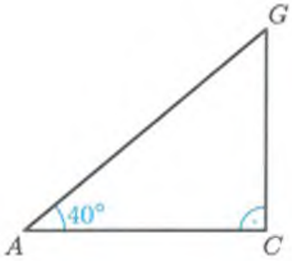
Příklad 9. Podstavou hranolu je obdélník o rozměrech 4 cm a 5 cm, jeho tělesová úhlopříčka má od roviny podstavy odchylku $40°$. Vypočtěte objem a povrch tohoto hranolu.

Řešení. V náčrtku $ABCDEFGH$ daného hranolu ($|AB| = 4\,\mathrm{cm}$, $|BC| = 5\,\mathrm{cm}$) vyznačíme tělesovou úhlopříčku AG. (Zdůrazněme, že všechny čtyři tělesové úhlopříčky AG, BH, CE, DF tohoto hranolu mají od roviny jeho podstavy stejnou odchylku, proto nezáleží na tom, kterou úhlopříčku k výpočtu vybereme.) Protože kolmým průmětem bodu G do roviny ABC je bod C, je odchylka tělesové úhlopříčky AG od roviny podstavy ABC rovna velikosti ostrého úhlu GAC.



V trojúhelníku ACG s pravým úhlem při vrcholu C známe velikost 40° ostrého úhlu GAC, délku přilehlé odvěsny AC určíme z pravoúhlého trojúhelníku ABC:

$$|AC| = \sqrt{|AB|^2 + |BC|^2} = \sqrt{4^2 + 5^2}\,\text{cm} = \\ = \sqrt{41}\,\text{cm} \doteq 6{,}4\,\text{cm}$$



Délku odvěsny GC vypočteme užitím funkce tangens:

$$\operatorname{tg} 40° = \frac{|GC|}{|AC|}, \quad \text{proto} \quad |GC| = |AC| \cdot \operatorname{tg} 40° \doteq 6{,}4\,\text{cm} \cdot 0{,}839 \doteq 5{,}37\,\text{cm}$$

Určili jsme výšku v daného hranolu:

$$v = |GC| \doteq 5{,}37\,\text{cm}$$

Vypočítat obsah podstavy je snadné:

$$S_\text{p} = |AB| \cdot |BC| = 4\,\text{cm} \cdot 5\,\text{cm} = 20\,\text{cm}^2$$

Objem hranolu je tedy roven

$$V = S_\text{p} \cdot v \doteq 20\,\text{cm}^2 \cdot 5{,}37\,\text{cm} \doteq 107\,\text{cm}^3.$$

Plášť hranolu je složen ze dvou dvojic shodných obdélníků:

$$S_\text{pl} = 2 \cdot (|AB| \cdot v + |BC| \cdot v) = 2v \cdot (|AB| + |BC|) \doteq \\ \doteq (2 \cdot 5{,}37 \cdot 9)\,\text{cm}^2 \doteq 96{,}7\,\text{cm}^2$$

Pro povrch S hranolu tak dostáváme:

$$S = 2 \cdot S_\text{p} + S_\text{pl} \doteq 2 \cdot 20\,\text{cm}^2 + 96{,}7\,\text{cm}^2 = 136{,}7\,\text{cm}^2 \doteq 137\,\text{cm}^2$$

Objem hranolu je asi $107\,\text{cm}^3$, jeho povrch je asi $137\,\text{cm}^2$.

13. Vypočtěte objem pravidelného čtyřbokého hranolu $ABCDEFGH$, jehož podstavná hrana AB měří 5 cm a odchylka tělesové úhlopříčky AG od roviny podstavy je 60°.

14. V kvádru $ABCDEFGH$ platí $|AB| = 8\,\text{cm}$, $|AH| = 10\,\text{cm}$ a odchylka rovin ABG a ABC je 30°. Vypočtěte povrch tohoto kvádru.

CVIČENÍ 2

1. Je dán kvádr $ABCDEFGH$, $|AB| = 16\,\text{cm}$, $|AE| = 12\,\text{cm}$, $|AD| = 9\,\text{cm}$. Určete vzdálenosti bodu F od vrcholů A, B, C, H a D.

2. V krychli $ABCDEFGH$ o hraně délky 5 cm určete vzdálenost středu X hrany EF od průsečíku P stěnových úhlopříček FC a GB.

3. Body R, T jsou po řadě středy hran DE a AB pravidelného trojbokého hranolu $ABCDEF$. Vypočtěte vzdálenosti vrcholu F od bodů R a T, má-li podstavná hrana AB délku 4 cm a výška AD hranolu je 10 cm.

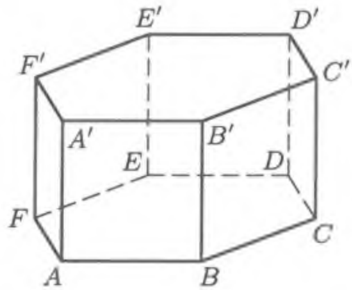
4. Bod Y je středem hrany BC kvádru $ABCDEFGH$ o rozměrech $|AB| = 7\,\text{cm}$, $|AD| = 10\,\text{cm}$, $|AE| = 12\,\text{cm}$. Vypočtěte vzdálenost bodu Y od přímky DH.

*5. Je dán kvádr $ABCDEFGH$, $|AB| = 15\,\text{cm}$, $|AD| = 12\,\text{cm}$, $|AE| = 16\,\text{cm}$. Vypočtěte vzdálenost bodu H od přímky AG.

6. V krychli $ABCDEFGH$ o hraně délky a jsou body M, N, P po řadě středy hran EH, FG, DH. Vypočtěte vzdálenost středu S hrany AE od roviny MNP.

7. Je dán pravidelný čtyřboký hranol $ABCDEFGH$ s podstavnou hranou AB délky 6 cm a výškou $|AE| = 8\,\text{cm}$. Vypočtěte vzdálenost vrcholu F od roviny ABH.

8. Určete vzdálenost rovin $F'FE$ a $CC'B'$ v pravidelném šestibokém hranolu z obrázku, mají-li všechny hrany tohoto tělesa danou délku a.



9. Je dán pravidelný trojboký hranol s podstavnou hranou délky 3 cm a výškou 10 cm. Určete odchylku
   a) jeho podstavných hran,
   b) jeho stěnové úhlopříčky a podstavné hrany (ležících v téže stěně),
   c) jeho stěnové úhlopříčky a boční hrany (ležících v téže stěně).

10. Kvádr $ABCDEFGH$ má rozměry $|AB| = 8\,\text{cm}$, $|BC| = 6\,\text{cm}$, $|BF| = 7\,\text{cm}$. Vypočtěte odchylku jeho tělesových úhlopříček
a) AG a CE, b) BH a DF.

11. Pravidelný šestiboký hranol $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ má podstavnou hranu AB délky 8 cm. Jeho tělesová úhlopříčka AC' měří 15 cm, tělesová úhlopříčka AD' měří 17 cm. Vypočtěte odchylky tělesových úhlopříček AC' a AD' od roviny podstavy.

12. V krychli $ABCDEFGH$ o hraně délky 7 cm jsou body X a Y po řadě středy hran EF a FB. Určete odchylku hrany FG od roviny XYG.

13. V krychli $ABCDA'B'C'D'$ je bod M střed hrany AB. Vypočtěte odchylku rovin MCC' a ACC'.

14. Podstavou kvádru $ABCDEFGH$ je obdélník o rozměrech $|AB| = 20\,\text{cm}$, $|AD| = 12\,\text{cm}$. Tělesové úhlopříčky AG a BH jsou k sobě kolmé. Vypočtěte odchylku rovin ABC a ABG.

15. Pravidelný šestiboký hranol $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ má podstavnou hranu AB délky 3 cm. Odchylka rovin FAB a $F'BC$ je 62°. Vypočtěte objem tohoto hranolu.

16. Pravidelný trojboký hranol $A_1B_1C_1A_2B_2C_2$ má podstavnou hranu A_1B_1 délky 6 cm. Vypočtěte jeho objem a povrch, víte-li, že odchylka rovin $A_1B_1C_1$ a $A_1B_1C_2$ je 45°.

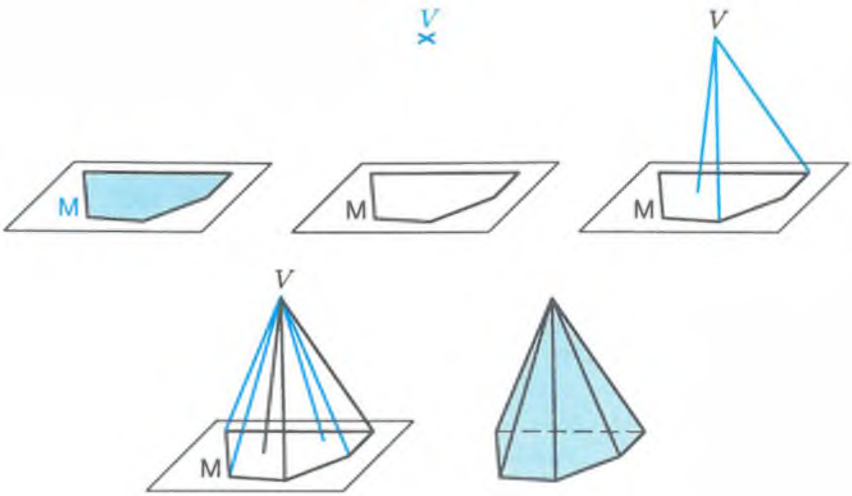
4 JEHLANY

V této kapitole se budeme zabývat *jehlany*. Nejprve připomeneme, jaká jsou to tělesa, dále se budeme věnovat různým vzdálenostem a odchylkám, jež jsou s jehlany spojeny. Poté odvodíme vzorce pro výpočet jejich *povrchů* a *objemů* a ukážeme, jak se tyto vzorce aplikují v praktických situacích.

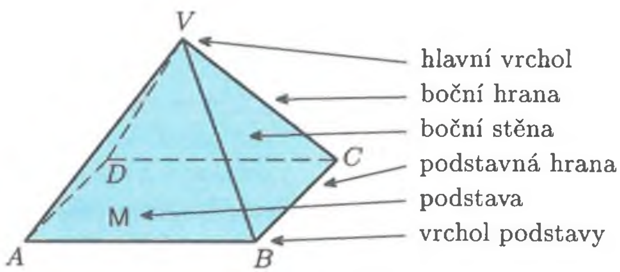
Co již víme o jehlanu?

?

Připomeňme nejprve, jak jehlan vzniká. V dané rovině vybereme konvexní mnohoúhelník M a pak zvolíme bod V, který v této rovině neleží. Bod V spojíme úsečkami se všemi body mnohoúhelníku M. Všechny body těchto úseček vytvoří těleso, které se nazývá **jehlan**.



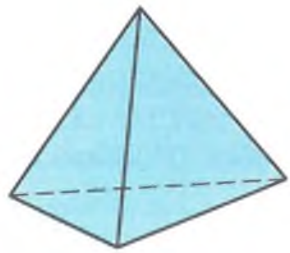
Mnohoúhelník M se nazývá *podstava* jehlanu. K *vrcholům* jehlanu patří jednak bod V (tzv. *hlavní vrchol*), jednak vrcholy mnohoúhelníku M (tzv. *vrcholy podstavy*). Strany mnohoúhelníku M se nazývají *podstavné hrany* jehlanu. Úsečky, které spojují vrcholy podstavy s hlavním vrcholem V, se nazývají *boční hrany*. Každá *boční stěna* jehlanu je trojúhelník, jehož vrcholy jsou hlavní vrchol V a dva sousední vrcholy podstavy. Ke *stěnám* jehlanu počítáme kromě bočních stěn i podstavu.



Dohodneme se, že jehlan z předchozího obrázku zapíšeme $ABCDV$. Při takovém zápisu nejprve vypisujeme vrcholy podstavy (v pořadí vrcholů příslušného mnohoúhelníku), hlavní vrchol zapisujeme až jako poslední.

Podle počtu bočních stěn dělíme jehlany na trojboké, čtyřboké, pětiboké atd. Podstavou n-bokého jehlanu je tedy n-úhelník. Jehlan na předchozím obrázku je čtyřboký.

Stěny trojbokého jehlanu tvoří čtyři trojúhelníky. Každý z nich můžeme považovat za podstavu takového jehlanu. Trojboký jehlan také někdy nazýváme *čtyřstěnem*. Čtyřstěn, jehož stěny jsou shodné rovnostranné trojúhelníky, se nazývá *pravidelný*.



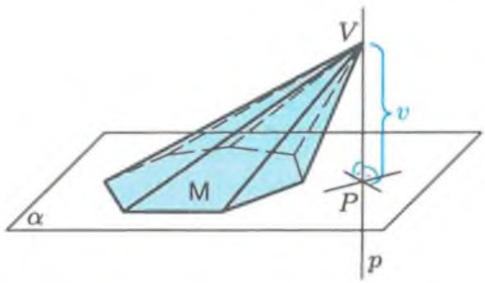
□ **1.** Určete počet vrcholů, hran a stěn n-bokého jehlanu.

Co je *výška* jehlanu?

K důležitým údajům o daném jehlanu patří i informace o tom, jak „vysoko" se nachází hlavní vrchol nad podstavou, přesněji vyjádřeno, jaká je *vzdálenost* hlavního vrcholu od roviny podstavy.

Připomeňme, jak se taková vzdálenost určuje. Pro daný jehlan s hlavním vrcholem V, jehož podstava M leží v rovině α, sestrojíme kolmý průmět P bodu V do roviny α. (Je to průsečík roviny α s přímkou p, která je kolmá k rovině α a prochází bodem V.) Vzdálenost bodu V od roviny α je pak rovna délce úsečky VP.

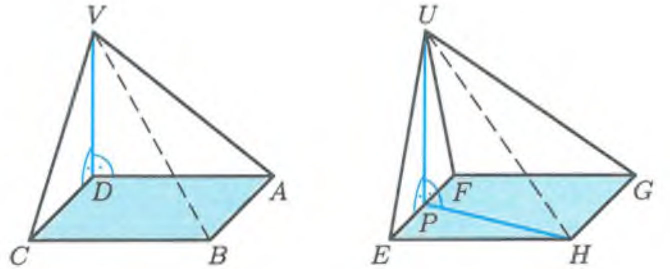
Tuto délku nazýváme *výškou jehlanu* a značíme ji obvykle písmenem v: $v = |VP|$



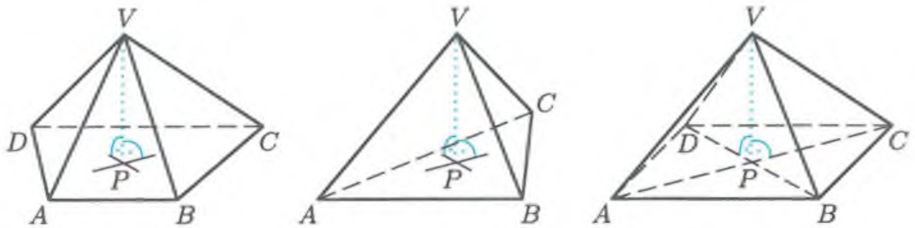
Často však výškou jehlanu rozumíme nejen délku zmíněné úsečky VP, ale i úsečku VP samotnou (vzpomeňte na dvojí význam *výšky trojúhelníku*).

Bod P se pak nazývá *patou výšky* jehlanu. Někdy leží úsečka VP „vně“ jehlanu (tak tomu je i na našem předchozím obrázku).

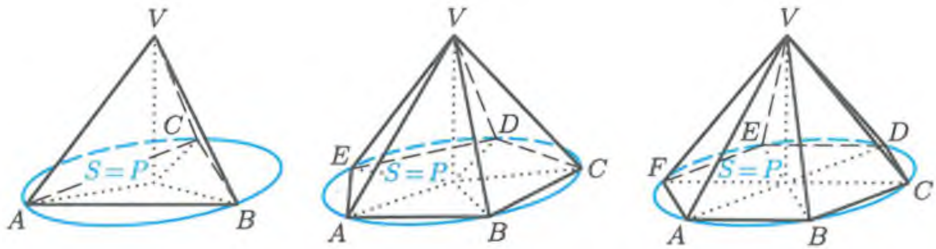
U některých jehlanů splývá výška s jednou z bočních hran (výška VD jehlanu $ABCDV$ na obrázku vlevo), u jiných jehlanů leží výška v boční stěně (výška UP jehlanu $EFGHU$ na obrázku vpravo):



My se však budeme zabývat především takovými jehlany, jejichž výška leží „uvnitř“ tělesa, tedy jehlany, v nichž kolmý průmět P hlavního vrcholu V do roviny podstavy je vnitřním bodem příslušného mnohoúhelníku.

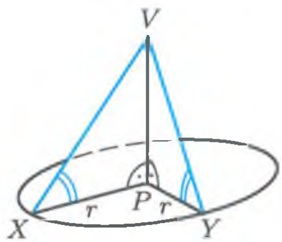


Jehlan na posledním obrázku vpravo je význačný tím, že jeho podstavou je čtverec $ABCD$ a pata P výšky VP splývá s průsečíkem jeho úhlopříček AC a BD. Tento jehlan patří k tzv. *pravidelným* jehlanům, které se v praxi vyskytují nejčastěji. Pravidelný trojboký, pravidelný pětiboký a pravidelný šestiboký jehlan si prohlédněte na dalším obrázku. Všimněte si, že u každého z nich splývá pata P výšky jehlanu se středem S kružnice opsané podstavě. Právě touto vlastností jsou pravidelné jehlany význačné.

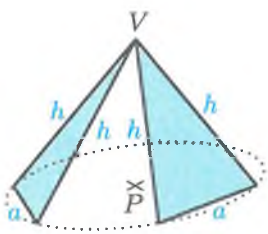


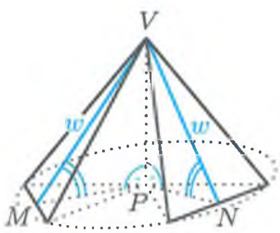
Pravidelný n-boký jehlan je takový jehlan $A_1A_2 \dots A_nV$, jehož podstavou je pravidelný n-úhelník $A_1A_2 \dots A_n$, přičemž střed kružnice opsané tomuto n-úhelníku splývá s patou P výšky VP jehlanu.

Poznamenejme, že všechny boční hrany pravidelného jehlanu jsou shodné. Plyne to z obrázku – pravoúhlé trojúhelníky VPX a VPY jsou shodné podle věty *sus*, a tak $|VX| = |VY|$. Kromě toho $|\sphericalangle VXP| = |\sphericalangle VYP|$, a proto všechny boční hrany pravidelného jehlanu mají od roviny podstavy stejnou odchylku.



Ze shodnosti všech bočních hran a shodnosti všech podstavných hran plyne, že všechny boční stěny pravidelného jehlanu jsou shodné rovnoramenné trojúhelníky (se základnami v rovině podstavy). Dva z nich jsou vybarveny na dalším obrázku vlevo. Vpravo jsou pak zakresleny jejich shodné výšky VM a VN, které jsou zároveň přeponami pravoúhlých trojúhelníků PVM a PVN se společnou odvěsnou VP. Tyto trojúhelníky jsou podle věty *Ssu* shodné, a tak $|\sphericalangle VMP| = |\sphericalangle VNP|$. Roviny všech bočních stěn pravidelného jehlanu tedy mají od roviny jeho podstavy stejnou odchylku.



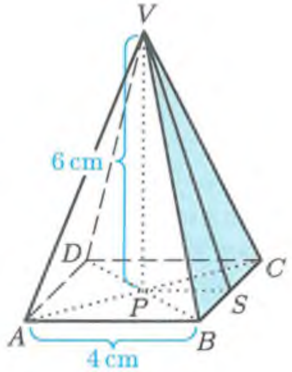


□ **2.** Rozhodněte, zda platí:

a) Každý pravidelný čtyřstěn je pravidelným trojbokým jehlanem.

b) Každý pravidelný trojboký jehlan je pravidelným čtyřstěnem.

Příklad 1. Podstavná hrana pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$ měří 4 cm, jeho výška je 6 cm. Určete odchylku roviny boční stěny BCV od roviny podstavy.



Řešení. Pata P výšky jehlanu je středem čtverce $ABCD$. Označme S střed podstavné hrany BC. Protože $|PB| = |PC|$ a $|VB| = |VC|$, jsou oba trojúhelníky BCP a BCV rovnoramenné (se společnou základnou BC), proto jsou obě přímky PS i VS kolmé k průsečnici BC rovin BCV a ABC.

Odchylka těchto dvou rovin je proto rovna velikosti φ (ostrého) úhlu PSV, kterou určíme z pravoúhlého trojúhelníku PSV. Jeho odvěsny mají délky

$$|PS| = \tfrac{1}{2} \cdot |AB| = 2\,\text{cm},$$
$$|PV| = 6\,\text{cm},$$

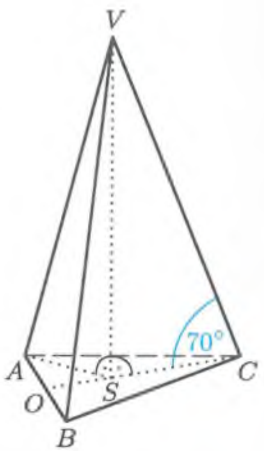
takže

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{|PV|}{|PS|} = \frac{6\,\text{cm}}{2\,\text{cm}} = 3,$$
$$\varphi \doteq 71°34'.$$

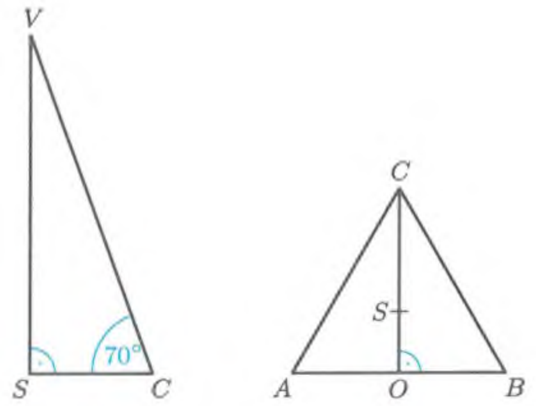
Odchylka roviny boční stěny BCV od roviny podstavy je asi $71°34'$.

Příklad 2. Odchylka boční hrany CV od roviny podstavy pravidelného trojbokého hranolu $ABCV$ je $70°$. Určete jeho výšku, znáte-li délku podstavné hrany $|AB| = 10\,\text{cm}$.

Řešení. Označme S střed kružnice opsané rovnostrannému trojúhelníku ABC. Protože bod S je zároveň patou výšky jehlanu, je přímka CS kolmým průmětem přímky CV do roviny podstavy, a proto je daná odchylka vlastně rovna velikosti ostrého úhlu VCS: $|\sphericalangle VCS| = 70°$



Hledanou výšku $v = |VS|$ určíme z pravoúhlého trojúhelníku VSC. Nejprve vypočteme délku jeho odvěsny CS z těžnice CO rovnostranného trojúhelníku ABC.



Jak víme, bod S je těžištěm rovnostranného trojúhelníku ABC, proto dělí úsečku CO tak, že $|CS| = \frac{2}{3} \cdot |CO|$. Z Pythagorovy věty dostáváme

$$|CO| = \sqrt{|CB|^2 - |OB|^2} = \sqrt{10^2 - 5^2}\,\text{cm} = \sqrt{75}\,\text{cm} = 5\sqrt{3}\,\text{cm},$$

a tak $|CS| = \frac{2}{3} \cdot |CO| = \frac{10}{3}\sqrt{3}\,\text{cm}$.

Z trojúhelníku VSC užitím funkce tangens vychází:

$$\operatorname{tg} 70^\circ = \frac{|VS|}{|CS|} = \frac{v}{|CS|}$$

$$v = |CS| \cdot \operatorname{tg} 70^\circ = \left(\tfrac{10}{3}\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} 70^\circ\right)\text{cm} \doteq 15{,}86\,\text{cm}$$

Výška daného jehlanu je asi 15,86 cm.

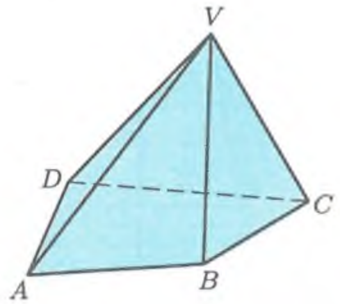
3. Podstavou pravidelného trojbokého jehlanu je trojúhelník o straně délky 5 cm, výška jehlanu je 7 cm. Vypočtěte odchylku boční hrany jehlanu od roviny jeho podstavy.

4. Pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$ má výšku 6 cm, výška trojúhelníku BCV ke straně BC měří 8 cm. Vypočtěte odchylku roviny boční stěny jehlanu od roviny jeho podstavy.

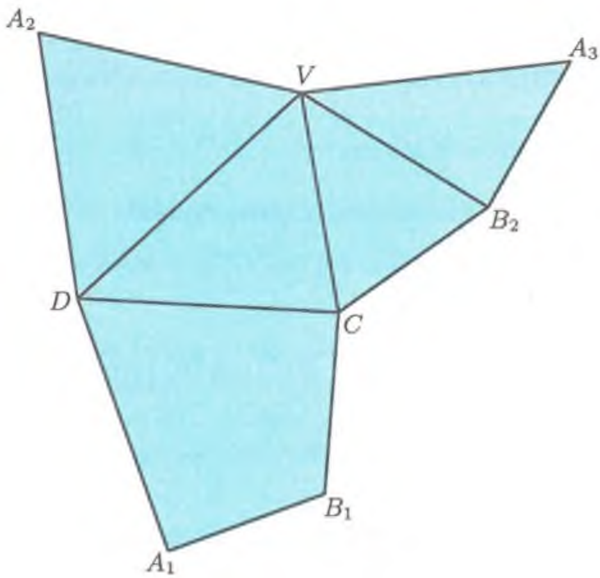
Co je *povrch* jehlanu a jak ho vypočteme?

Z učiva o hranolech a válcích již víte, že termín *povrch tělesa* používáme ve dvou významech. Jednak je to množina všech bodů, které leží na plochách, jež těleso „ohraničují“ (u „hranatých“ těles jsou to stěny), jednak je to součet obsahů těchto ploch.

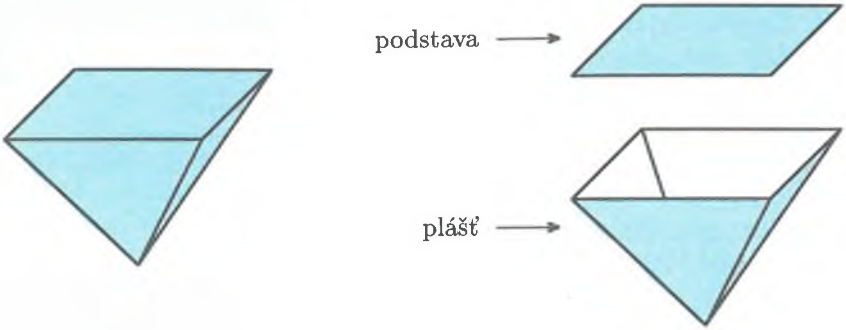
Na obrázku je čtyřboký jehlan $ABCDV$. Jeho povrch je sjednocením čtyřúhelníku $ABCD$ a trojúhelníků ABV, BCV, CDV, DAV. Tuto „prostorovou“ množinu bodů si lépe představíme, když ji „rozvineme“ do roviny tak, že vytvoříme *síť* daného tělesa.



Jednu z možných sítí jehlanu $ABCDV$ vidíte na dalším obrázku:



Povrch jehlanu se skládá ze dvou částí – *podstavy* a *pláště*. Co je podstava jehlanu, již víme; plášť jehlanu je sjednocením všech jeho bočních stěn.

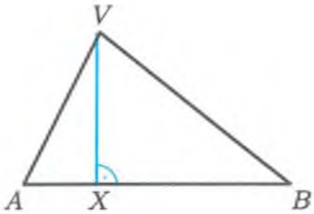


Pro povrch S jehlanu jako součet obsahů všech jeho stěn zřejmě platí vzorec

$$\boxed{S = S_{\mathrm{p}} + S_{\mathrm{pl}}\,,}$$

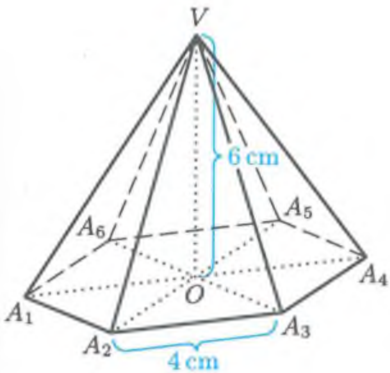
kde S_{p} je obsah podstavy jehlanu (mnohoúhelníku) a S_{pl} je obsah jeho pláště, tedy součet obsahů všech bočních stěn jehlanu (trojúhelníků).

Obsah libovolné boční stěny jehlanu, např. stěny ABV, počítáme zpravidla z délky podstavné hrany AB a z výšky VX ke straně AB trojúhelníku ABV. Úsečce VX (a také její délce) říkáme *stěnová výška* jehlanu.

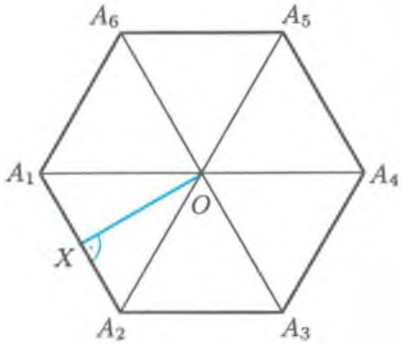


Stěnové výšky jsou tedy vzdálenosti hlavního vrcholu jehlanu od jeho podstavných hran (v jednotlivých bočních stěnách mohou být různé, nejde-li o pravidelný jehlan).

Příklad 3. Je dán pravidelný šestiboký jehlan $A_1A_2A_3A_4A_5A_6V$. Jeho podstavná hrana měří 4 cm, výška jehlanu je 6 cm. Vypočtěte povrch tohoto tělesa.



Řešení. Nejprve vypočteme obsah S_p podstavy jehlanu. Ta je složena z šesti shodných rovnostranných trojúhelníků o straně délky 4 cm. Vypočteme obsah S_1 jednoho z nich, např. trojúhelníku A_1A_2O. Pro jeho výšku $|OX|$ (X je střed strany A_1A_2) platí:



$$|OX| = \sqrt{|OA_1|^2 - |XA_1|^2} = \sqrt{4^2 - 2^2}\,\text{cm} = \sqrt{12}\,\text{cm} = 2\sqrt{3}\,\text{cm}$$

Pro obsah S_1 tak dostáváme

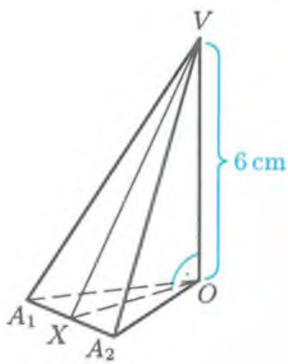
$$S_1 = \tfrac{1}{2} \cdot |A_1A_2| \cdot |OX| = \left(\tfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2\sqrt{3}\right)\text{cm}^2 = 4\sqrt{3}\,\text{cm}^2,$$

takže

$$S_p = 6 \cdot S_1 = \left(6 \cdot 4\sqrt{3}\right)\text{cm}^2 = 24\sqrt{3}\,\text{cm}^2.$$

Nyní určíme obsah S_{pl} pláště jehlanu jako šestinásobek obsahu S_2 jedné z jeho bočních stěn, např. stěny A_1A_2V.

Protože $|VA_1| = |VA_2|$, je stěnovou výškou ve stěně A_1A_2V úsečka VX, kde X je opět střed úsečky A_1A_2.



Délku $|VX|$ určíme z pravoúhlého trojúhelníku VXO:

$$|VX| = \sqrt{|OV|^2 + |OX|^2} = \sqrt{6^2 + \left(2 \cdot \sqrt{3}\right)^2}\,\text{cm} = \sqrt{36 + 12}\,\text{cm} = \sqrt{48}\,\text{cm} = 4\sqrt{3}\,\text{cm}$$

Pro obsah S_2 trojúhelníku A_1A_2V tak dostáváme

$$S_2 = \tfrac{1}{2} \cdot |A_1A_2| \cdot |VX| = \left(\tfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4\sqrt{3}\right)\text{cm}^2 = 8\sqrt{3}\,\text{cm}^2,$$

a proto

$$S_{pl} = 6 \cdot S_2 = \left(6 \cdot 8\sqrt{3}\right)\text{cm}^2 = 48\sqrt{3}\,\text{cm}^2.$$

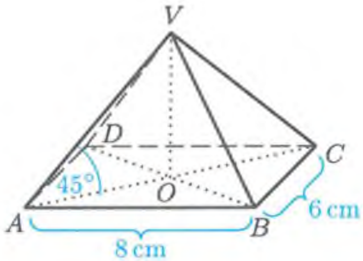
Dohromady pro povrch S jehlanu vychází:

$$S = S_{\mathrm{p}} + S_{\mathrm{pl}} = 24\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2 + 48\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2 = 72\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2 \doteq 124{,}7\,\mathrm{cm}^2$$

Povrch jehlanu je asi $124{,}7\,\mathrm{cm}^2$.

Všimněte si, že jsme při výpočtech v předchozím příkladu zaokrouhlovali jen jednou. Až v samém závěru řešení jsme zaokrouhlili konečný výsledek. „Mezivýsledky“ podobných výpočtů ani vy pokud možno nezaokrouhlujte, abyste získali co nejpřesnější konečné výsledky.

Příklad 4. Podstavou čtyřbokého jehlanu $ABCDV$ je obdélník $ABCD$ s průsečíkem úhlopříček O, úsečka VO je výškou jehlanu. Vypočtěte jeho povrch, víte-li, že $|AB| = 8\,\mathrm{cm}$, $|BC| = 6\,\mathrm{cm}$ a odchylka boční hrany od roviny podstavy je $45°$.



Řešení. Obsah S_{p} podstavy $ABCD$ určíme snadno:

$$S_{\mathrm{p}} = |AB| \cdot |BC| = (8 \cdot 6)\,\mathrm{cm}^2 = 48\,\mathrm{cm}^2$$

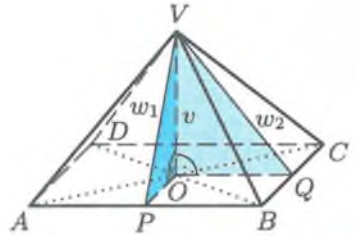
Ze shodnosti trojúhelníků AOV, BOV, COV, DOV (věta *sus*) vyplývá, že boční hrany AV, BV, CV a DV jsou jednak shodné, jednak mají stejnou odchylku od roviny podstavy.

Plášť jehlanu se tedy skládá ze dvou dvojic shodných rovnoramenných trojúhelníků: $\triangle ABV \cong \triangle CDV$, $\triangle BCV \cong \triangle DAV$ (nejsou to však čtyři shodné trojúhelníky, neboť $|AB| \neq |BC|$).

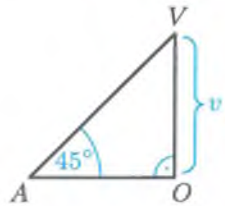
Pro obsah S_{pl} pláště jehlanu platí:

$$S_{\mathrm{pl}} = 2 \cdot (S_{\triangle ABV} + S_{\triangle BCV})$$

K určení obsahů $S_{\triangle ABV}$, $S_{\triangle BCV}$ budeme potřebovat stěnové výšky $w_1 = |VP|$, $w_2 = |VQ|$ ve stěnách ABV a BCV. Vypočteme je z pravoúhlých trojúhelníků POV, QOV z obrázku, ve kterých zatím neznáme délku v odvěsny VO, jež je zároveň výškou jehlanu.



Výšku v zjistíme například z trojúhelníku AOV, jehož úhel při vrcholu A je roven dané odchylce 45°. Délku odvěsny AO vypočteme z trojúhelníku ABC:



$$\begin{aligned}|AO| &= \tfrac{1}{2}\cdot|AC| = \\ &= \tfrac{1}{2}\cdot\sqrt{|AB|^2+|BC|^2} = \\ &= \left(\tfrac{1}{2}\cdot\sqrt{8^2+6^2}\right)\,\text{cm} = \\ &= \left(\tfrac{1}{2}\cdot\sqrt{100}\right)\,\text{cm} = 5\,\text{cm}\end{aligned}$$

Protože $|\sphericalangle VAO| = 45°$, je trojúhelník AOV pravoúhlý a rovnoramenný, a tak $v = |VO| = |AO| = 5\,\text{cm}$.

Z trojúhelníku POV dostáváme

$$w_1 = |VP| = \sqrt{|PO|^2+|VO|^2} = \sqrt{3^2+5^2}\,\text{cm} = \sqrt{34}\,\text{cm},$$

z trojúhelníku QOV obdobně

$$w_2 = |VQ| = \sqrt{|QO|^2+|VO|^2} = \sqrt{4^2+5^2}\,\text{cm} = \sqrt{41}\,\text{cm}.$$

Nyní již můžeme vypočítat obsahy trojúhelníků ABV a BCV:

$$\begin{aligned}S_{\triangle ABV} &= \tfrac{1}{2}\cdot|AB|\cdot w_1 = \left(\tfrac{1}{2}\cdot 8\cdot\sqrt{34}\right)\,\text{cm} = 4\sqrt{34}\,\text{cm} \doteq 23{,}3\,\text{cm}^2,\\ S_{\triangle BCV} &= \tfrac{1}{2}\cdot|BC|\cdot w_2 = \left(\tfrac{1}{2}\cdot 6\cdot\sqrt{41}\right)\,\text{cm} = 3\sqrt{41}\,\text{cm} \doteq 19{,}2\,\text{cm}^2\end{aligned}$$

a určit obsah S_{pl} pláště jehlanu:

$$S_{\text{pl}} = 2\cdot(S_{\triangle ABV}+S_{\triangle BCV}) \doteq 2\cdot(23{,}3+19{,}2)\,\text{cm}^2 = 85\,\text{cm}^2$$

Nakonec sečtením určíme povrch S celého jehlanu:

$$S = S_{\text{p}} + S_{\text{pl}} \doteq 48\,\text{cm}^2 + 85\,\text{cm}^2 = 133\,\text{cm}^2$$

Povrch daného jehlanu je asi $133\,\text{cm}^2$.

5. Vypočtěte povrch pravidelného čtyřstěnu, jehož hrana měří 7 cm.

6. Vypočtěte povrch pravidelného pětibokého jehlanu s výškou 11 cm a podstavnou hranou délky 4 cm.

7. Vypočtěte povrch pravidelného čtyřbokého jehlanu, jehož podstavná hrana měří 6 cm, je-li odchylka roviny boční stěny od roviny podstavy 50°.

∗**8.** Jakou výšku má pravidelný čtyřboký jehlan s povrchem 51 cm^2, když podstavná hrana tohoto jehlanu měří 3 cm?

Jak vypočteme *objem* jehlanu?

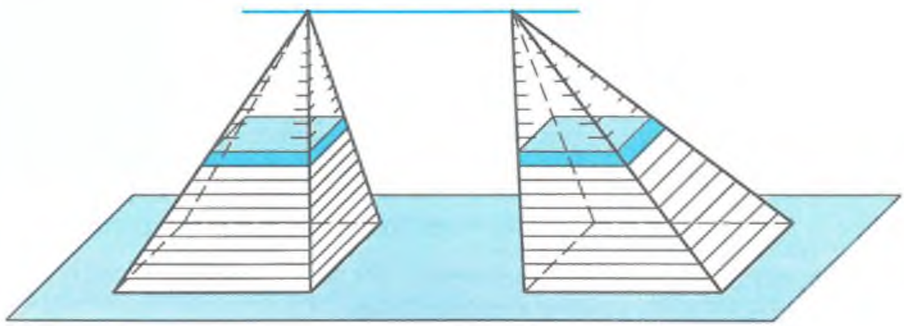
Již dříve jsme se naučili počítat objemy hranolů a válců. Víme, že touto veličinou vyjadřujeme, „kolik místa" dané těleso v prostoru zaujímá. Připomeňme si základní vlastnosti objemu, které již znáte:

- Tělesa, která mají stejný „tvar" a „velikost" (tzn. liší se jen umístěním v prostoru), mají stejný objem.
- Objem tělesa, které je rozděleno na několik částí, se rovná součtu objemů jednotlivých částí.

Tyto vlastnosti nám k odvození vzorce pro objem jehlanu nestačí. Musíme k nim přidat doplňující pravidlo:

- Dva jehlany, které mají shodné podstavy i shodné výšky, mají týž objem.

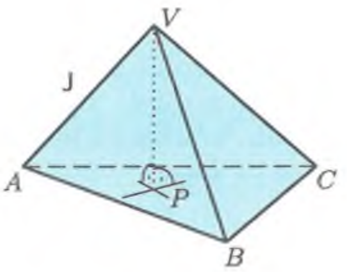
I když uvedené pravidlo nemůžeme přesně zdůvodnit, „ospravedlníme" je alespoň názornou úvahou o dvou jehlanech z následujícího obrázku:

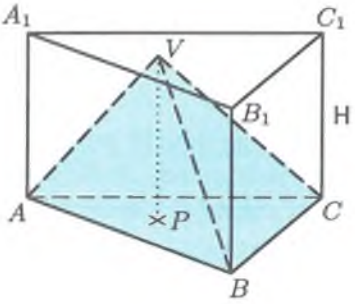


Předpokládejme, že oba jehlany mají shodné podstavy i shodné výšky. Představme si, že jsou složeny ze stejného počtu velmi mnoha tenkých destiček (téže tloušťky). Dvě z nich jsme ve stejné výšce nad společnou rovinou podstav obou jehlanů vybarvili. Čím budou destičky tenčí, tím více se budou svým tvarem podobat hranolům. Obě modré destičky jako „hranoly“ mají shodné podstavy i shodné výšky, mají tedy stejné objemy. Proto jsou stejné i objemy obou uvažovaných jehlanů.

Vzorec pro objem jehlanu odvodíme nejprve pro případ, kdy podstavou jehlanu je „nejjednodušší“ mnohoúhelník – tedy trojúhelník.

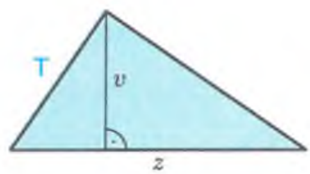
Danému trojbokému jehlanu $\mathsf{J} = ABCV$ „opíšeme“ pomocný trojboký hranol $\mathsf{H} = ABCA_1B_1C_1$:

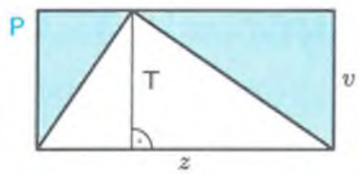




Hranol H je sestrojen tak, že jeho boční hrany AA_1, BB_1, CC_1 jsou shodné s výškou VP jehlanu J, bod V tedy leží v rovině $A_1B_1C_1$.

Zjistíme, jakou částí objemu V_{H} hranolu H je objem V_{J} jehlanu J. Předtím však posoudíme „rovinnou“ obdobu této otázky. Danému trojúhelníku T o základně z a k ní příslušné výšce v „opíšeme“ pravoúhelník P o rozměrech z a v:





I bez znalosti vzorců pro obsahy obou obrazců dobře vidíme, že obsah S_{T} trojúhelníku T je roven polovině obsahu S_{P} pravoúhelníku P:

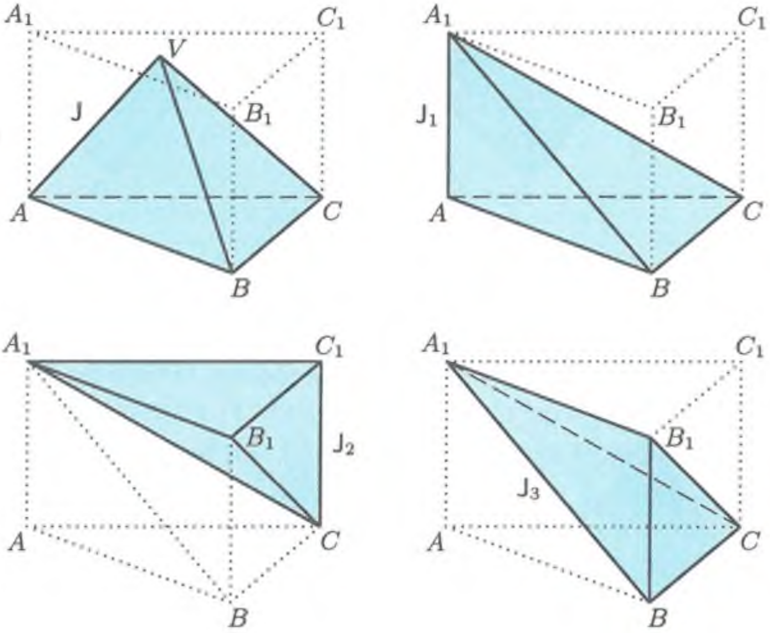
$$S_{\mathsf{T}} = \tfrac{1}{2} \cdot S_{\mathsf{P}}$$

(Ze dvou modrých trojúhelníků, které útvar T doplňují do útvaru P, lze totiž složit trojúhelník shodný s trojúhelníkem T.)

Vraťme se nyní k „prostorové“ situaci. Vysvětlíme, že objem V_{J} jehlanu J *není polovinou* objemu V_{H} „opsaného“ hranolu H, že dokonce platí nerovnost

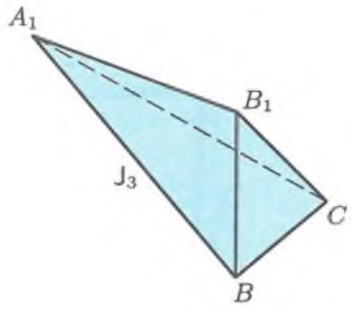
$$V_{\mathsf{J}} < \tfrac{1}{2} \cdot V_{\mathsf{H}}.$$

Dokážeme totiž, že do hranolu H lze umístit dva jehlany tak, aby se nepřekrývaly, aby každý z nich měl objem V_J a aby při tom ještě část hranolu H zůstala oběma jehlany nezaplněna. Takovou dvojici tvoří například jehlany $J_1 = ABCA_1$ a $J_2 = A_1B_1C_1C$:

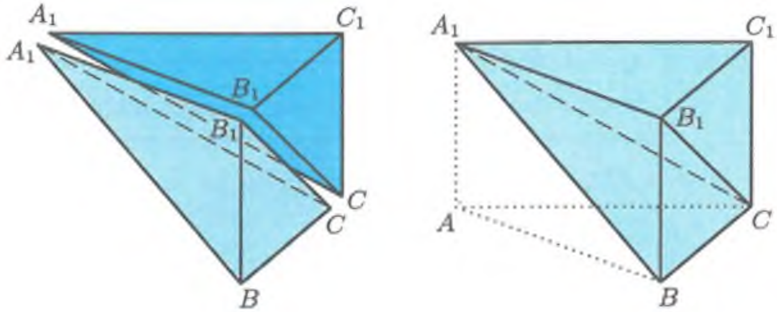


Jehlany J_1 a J_2 se skutečně nepřekrývají, neboť se pouze „stýkají“ ve hraně A_1C. Jehlan J_1 a původní jehlan J mají stejné objemy, neboť jejich podstavy ABC splývají a jejich výšky VP a A_1A jsou shodné. Také objemy jehlanů J a J_2 jsou stejné, neboť podstavy ABC, $A_1B_1C_1$ obou jehlanů jsou shodné trojúhelníky a rovněž jejich výšky VP, CC_1 jsou shodné. Tak jsme zjistili, že objem každého z jehlanů J_1, J_2 je roven V_J.

Odřízneme-li jehlany J_1 a J_2 od hranolu H, zůstane nám z hranolu H část J_3, kterou jsme znovu znázornili na obrázku vpravo. Všimněme si, že těleso J_3 je trojboký jehlan; za jeho podstavu budeme považovat trojúhelník BCB_1 (vrchol A_1 pak bude hlavním vrcholem jehlanu J_3).



Porovnejme nyní jehlany J_2 a J_3:



Prohlásíme-li za podstavu jehlanu J_2 trojúhelník B_1C_1C, mají jehlany J_2 a J_3 stejný hlavní vrchol A_1, shodné podstavy ($\triangle BCB_1 \cong \triangle C_1B_1C$), a tudíž i stejné výšky (rovné vzdálenosti bodu A_1 od roviny stěny BCC_1B_1). Proto mají jehlany J_2 a J_3 stejné objemy, takže objem jehlanu J_3 je roven (stejně jako objem jehlanu J_2) objemu V_J původního jehlanu J.

Z rozdělení hranolu H na tři jehlany J_1, J_2, J_3 plyne rovnost

$$V_\mathsf{H} = 3 \cdot V_\mathsf{J}, \qquad \text{odkud} \qquad V_\mathsf{J} = \tfrac{1}{3} \cdot V_\mathsf{H}.$$

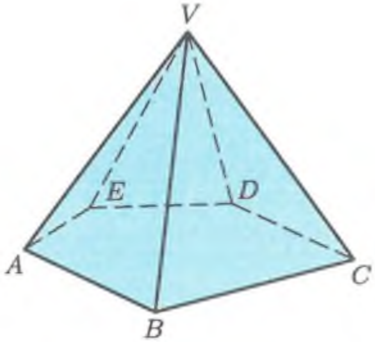
Uvědomme si ještě, že obsah podstavy ABC hranolu H je roven obsahu S_p podstavy ABC jehlanu J a že výška hranolu H je rovna výšce v jehlanu J. Podle vzorce pro objem hranolu proto platí $\mathsf{V}_\mathsf{H} = S_\mathrm{p} \cdot v$, a tak pro objem trojbokého jehlanu vychází vzorec:

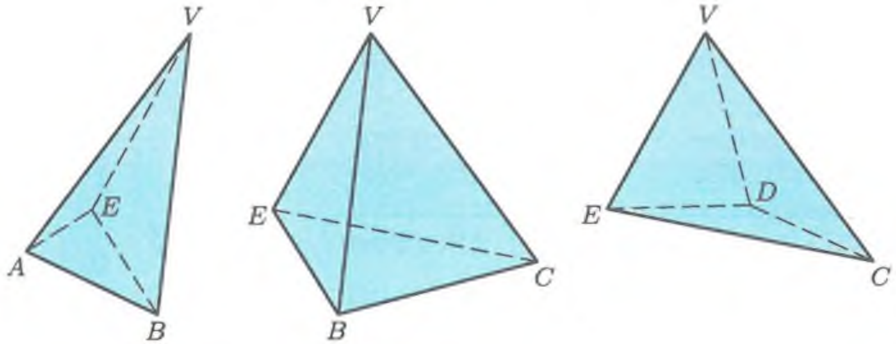
$$\boxed{V_\mathsf{J} = \tfrac{1}{3} \cdot S_\mathrm{p} \cdot v}$$

Vysvětlíme nyní, že vzorec

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_p \cdot v$$

platí i pro objem V jehlanu výšky v, jehož podstavou je *libovolný mnohoúhelník* s obsahem S_p. Ukážeme to například pro pětiboký jehlan $ABCDEV$.





Na obrázku je vidět, že jehlan $ABCDEV$ lze rozdělit na tři trojboké jehlany $ABEV$, $BCEV$ a $CDEV$. Jejich objemy označíme po řadě V_1, V_2 a V_3. Ty již dokážeme vyjádřit:

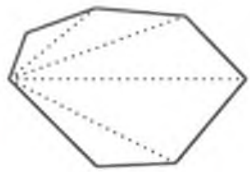
$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABE} \cdot v, \qquad V_2 = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle BCE} \cdot v, \qquad V_3 = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle CDE} \cdot v,$$

kde v značí společnou výšku všech čtyř jehlanů $ABCDEV$, $ABEV$, $BCEV$ a $CDEV$. Podle pravidla o sčítání objemů platí

$$\begin{aligned} V &= V_1 + V_2 + V_3, \\ V &= \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABE} \cdot v + \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle BCE} \cdot v + \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle CDE} \cdot v = \\ &= \frac{1}{3} \cdot (S_{\triangle ABE} + S_{\triangle BCE} + S_{\triangle CDE}) \cdot v = \frac{1}{3} \cdot S_p \cdot v, \end{aligned}$$

neboť pětiúhelník $ABCDE$ je složen z trojúhelníků ABE, BCE a CDE, takže pro jeho obsah S_p skutečně platí $S_p = S_{\triangle ABE} + S_{\triangle BCE} + S_{\triangle CDE}$.

Předchozí úvaha byla založena na tom, že jsme podstavu jehlanu – pětiúhelník $ABCDE$ rozdělili úhlopříčkami BE a CE na tři trojúhelníky ABE, BCE a CDE. Na nepřekrývající se trojúhelníky lze podobným způsobem rozdělit libovolný mnohoúhelník, proto vzorec pro objem odvozený původně pro trojboký jehlan platí pro jehlan s libovolným počtem bočních stěn.



Pro objem V libovolného jehlanu platí vzorec

$$V = \tfrac{1}{3} \cdot S_{\mathrm{p}} \cdot v,$$

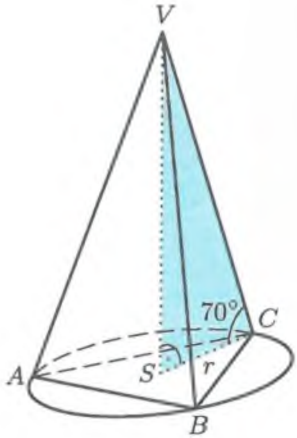
kde S_{p} je obsah podstavy jehlanu a v jeho výška.

Příklad 5. Vypočtěte objem pravidelného trojbokého jehlanu $ABCV$, jehož podstava je vepsána do kružnice o poloměru $r = 6\,\mathrm{cm}$, víte-li, že odchylka boční hrany od roviny podstavy je 70°.

Řešení. Označme S střed kružnice opsané trojúhelníku ABC. K výpočtu objemu jehlanu potřebujeme zjistit obsah S_{p} trojúhelníku ABC a výšku jehlanu $v = |VS|$. Tu určíme z pravoúhlého trojúhelníku SCV:

$$\mathrm{tg}\,70° = \frac{|SV|}{|SC|} = \frac{v}{r}$$

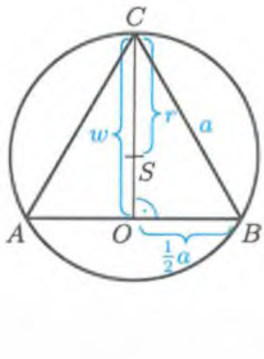
$$v = r \cdot \mathrm{tg}\,70° = 6\,\mathrm{cm} \cdot \mathrm{tg}\,70° \doteq 16{,}5\,\mathrm{cm}$$



K určení obsahu S_{p} rovnostranného trojúhelníku ABC vypočteme nejprve jeho výšku w a pak délku a jeho strany. Protože střed S opsané kružnice je zároveň těžištěm trojúhelníku ABC, platí:

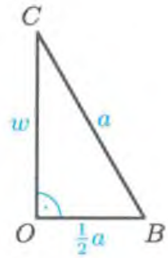
$$|CS| = \tfrac{2}{3} \cdot |CO|, \quad \text{tzn.} \quad r = \tfrac{2}{3} \cdot w$$

$$w = \tfrac{3}{2} \cdot r = \left(\tfrac{3}{2} \cdot 6\right)\mathrm{cm} = 9\,\mathrm{cm}$$



Délku a určíme z pravoúhlého trojúhelníku COB:

$$|CB|^2 = |CO|^2 + |OB|^2$$
$$a^2 = w^2 + \frac{a^2}{4}$$
$$\frac{3a^2}{4} = w^2$$
$$a = \frac{2w}{\sqrt{3}} = \frac{2w \cdot \sqrt{3}}{3} = \frac{2 \cdot 9 \cdot \sqrt{3}}{3}\,\text{cm} = 6\sqrt{3}\,\text{cm}$$



Pro obsah S_p podstavy jehlanu $ABCV$ tak dostáváme

$$S_\text{p} = \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot w = \tfrac{1}{2} \cdot \left(6\sqrt{3} \cdot 9\right)\text{cm}^2 = 27\sqrt{3}\,\text{cm}^2,$$

a objem V daného jehlanu je tudíž roven

$$V = \tfrac{1}{3} \cdot S_\text{p} \cdot v \doteq \tfrac{1}{3} \cdot \left(27\sqrt{3}\right)\text{cm}^2 \cdot 16{,}5\,\text{cm} \doteq 257{,}2\,\text{cm}^3.$$

Objem jehlanu je asi $257{,}2\,\text{cm}^3$.

Příklad 6. Určete délku podstavné hrany pravidelného čtyřbokého jehlanu o výšce 9 cm, jehož objem je $300\,\text{cm}^3$.

Řešení jsme převzali z Tomášova sešitu.

$V = 300\,\text{cm}^3$, $v = 9\,\text{cm}$, $a = ?$

$$\underbrace{V = \frac{1}{3} S_p v = \frac{1}{3} a^2 v}$$
$$a = \sqrt{\frac{3V}{v}}$$
$$a = \sqrt{\frac{3 \cdot 300\,\text{cm}^3}{9\,\text{cm}}} = \sqrt{100\,\text{cm}^2} = \underline{\underline{10\,\text{cm}}}$$

Podstavná hrana jehlanu měří 10 cm.

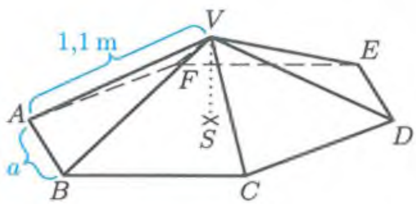
9. Vypočtěte objem pravidelného čtyřstěnu, jehož hrana měří 6 cm.

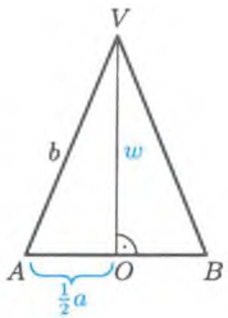
10. Určete výšku pravidelného šestibokého jehlanu o objemu $50\,\text{cm}^3$, jehož podstava je vepsána do kružnice o průměru 10 cm.

V závěru této kapitoly uvedeme ještě dvě úlohy o jehlanech z praxe.

Příklad 7. Plátěná stříška zahradního slunečníku má tvar pláště pravidelného šestibokého jehlanu, jehož boční hrana měří 1,1 m. Obvod okraje stříšky je 6 m. Kolik plátna je zapotřebí na její zhotovení, počítá-li se s 20 % materiálu navíc na lemování a odpad?

Řešení. Stříška slunečníku představuje plášť pravidelného šestibokého jehlanu $ABCDEFV$, jehož obsah S_{pl} máme určit. Platí $S_{pl} = 6 \cdot S_1$, kde S_1 je obsah jedné boční stěny jehlanu, např. stěny ABV. Protože obvod $6 \cdot |AB|$ okraje stříšky je 6 m, má podstavná hrana AB délku $a = 1$ m.





Výšku $w = |VO|$ rovnoramenného trojúhelníku ABV určíme z pravoúhlého trojúhelníku AOV, ve kterém známe délku přepony $b = |AV| = 1{,}1$ m a délku odvěsny $|AO| = \frac{1}{2}a = 0{,}5$ m:

$$w = \sqrt{b^2 - \left(\tfrac{1}{2}a\right)^2} =$$
$$= \sqrt{1{,}1^2 - 0{,}5^2}\,\mathrm{m} \doteq 0{,}98\,\mathrm{m}$$

Platí tedy:

$$S_1 = \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot w \doteq \left(\tfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0{,}98\right)\mathrm{m}^2 = 0{,}49\,\mathrm{m}^2$$
$$S_{pl} = 6 \cdot S_1 \doteq (6 \cdot 0{,}49)\,\mathrm{m}^2 = 2{,}94\,\mathrm{m}^2$$

Vypočtenou hodnotu S_{pl} je podle zadání nutno zvětšit o 20 %, tedy určit její 1,2násobek:

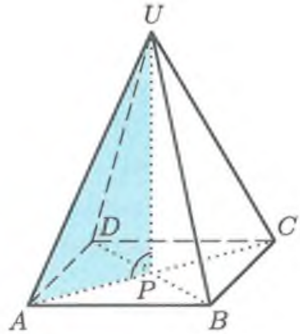
$$1{,}2 \cdot S_{pl} \doteq 1{,}2 \cdot 2{,}94\,\mathrm{m}^2 = 3{,}53\,\mathrm{m}^2$$

Na zhotovení stříšky slunečníku je třeba asi 3,53 m^2 plátna.

Příklad 8. Těžítko má tvar pravidelného čtyřbokého jehlanu s podstavnou hranou délky 3,6 cm a boční hranou délky 6 cm. Je vyrobeno z křemenného skla o hustotě $\varrho = 2\,600\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. Jaká je jeho hmotnost?

Řešení. Hmotnost m těžítka vypočteme ze vzorce

$$m = \varrho \cdot V,$$



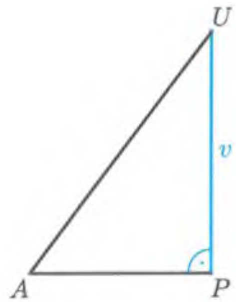
kde ϱ je hustota skla a V objem těžítka, který nyní určíme.

Těžítko má tvar pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABCDU$ s čtvercovou podstavou $ABCD$ o straně AB délky

$$|AB| = a = 3{,}6\,\text{cm}$$

a obsahem

$$S_\text{p} = a^2 = 3{,}6^2\,\text{cm}^2 = 12{,}96\,\text{cm}^2.$$



Označme P patu výšky jehlanu a určeme výšku $v = |UP|$ z pravoúhlého trojúhelníku APU. Známe v něm délku přepony $|AU| = 6\,\text{cm}$, délku odvěsny AP určíme ze čtverce $ABCD$:

$$|AP| = \tfrac{1}{2} \cdot |AC| = \tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot a = \\ = \left(\tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 3{,}6\right)\text{cm} = \left(1{,}8 \cdot \sqrt{2}\right)\text{cm}$$

Proto platí:

$$v = \sqrt{|AU|^2 - |AP|^2} = \sqrt{6^2 - 1{,}8^2 \cdot 2}\,\text{cm} \doteq 5{,}43\,\text{cm}$$

Objem V těžítka je tedy roven

$$V = \tfrac{1}{3} \cdot S_\text{p} \cdot v \doteq \left(\tfrac{1}{3} \cdot 12{,}96 \cdot 5{,}43\right)\text{cm}^3 \doteq 23{,}5\,\text{cm}^3.$$

Objem V nám vyšel v cm^3, proto raději dříve, než dosadíme do vzorce $m = \varrho \cdot V$, vyjádříme hustotu ϱ skla v $\frac{\text{kg}}{\text{cm}^3}$. Protože $1\,\text{cm}^3 = 0{,}000\,001\,\text{m}^3$, platí $\varrho = 2\,600\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 0{,}002\,6\,\frac{\text{kg}}{\text{cm}^3}$, a tudíž

$$m = \varrho \cdot V \doteq 0{,}002\,6\,\frac{\text{kg}}{\text{cm}^3} \cdot 23{,}5\,\text{cm}^3 \doteq 0{,}061\,\text{kg} = 61\,\text{g}.$$

Hmotnost skleněného těžítka je asi 61 gramů.

11. Stříška nad ukazatelem turistických značek má tvar pláště pravidelného čtyřbokého jehlanu s podstavnou hranou délky 40 cm a výškou 30 cm. Kolik plechu bylo třeba na její zhotovení? Připočítejte 15 % na spoje a odpad.

CVIČENÍ 3

□ **1.** Určete počet vrcholů, hran a stěn

a) čtyřstěnu, b) čtyřbokého jehlanu.

2. Některé čtyři hrany pravidelného trojbokého jehlanu jsou shodné. Vyplývá z toho, že jde o pravidelný čtyřstěn?

3. Podstavou pravidelného jehlanu je mnohoúhelník vepsaný do kružnice s průměrem 12 cm, jeho boční hrana měří 10 cm. Vypočtěte výšku jehlanu, je-li jehlan

a) trojboký, b) čtyřboký, c) pětiboký, d) n-boký.

4. Podstavou čtyřbokého jehlanu je obdélník, jehož úhlopříčky mají odchylku 50°. Boční hrana jehlanu měří 20 cm a jeho výška je 16 cm. Vypočtěte rozměry podstavy jehlanu, víte-li, že pata jeho výšky splývá s průsečíkem úhlopříček podstavy.

5. Podstavná hrana pravidelného jehlanu měří 8 cm, jeho výška je 15 cm. Vypočtěte délku boční hrany jehlanu, jde-li o jehlan

a) trojboký, b) čtyřboký, c) šestiboký.

□ **6.** Jaká je odchylka boční hrany od roviny podstavy pravidelného šestibokého jehlanu, jehož výška je rovna délce podstavné hrany?

7. Podstavou čtyřbokého jehlanu je obdélník s rozměry 10 cm a 24 cm, pata výšky jehlanu splývá s průsečíkem úhlopříček podstavy. Vypočtěte odchylku boční hrany jehlanu od roviny podstavy, je-li výška jehlanu

a) 30 cm, b) 2,5 cm.

8. Odchylka roviny boční stěny od roviny podstavy pravidelného čtyřbokého jehlanu je 60°, vrcholy podstavy leží na kružnici o poloměru 4 cm. Vypočtěte délky podstavné a boční hrany a výšku jehlanu.

9. Vypočtěte povrch pravidelného trojbokého jehlanu s podstavnou hranou délky 12 cm a boční hranou délky 10 cm.

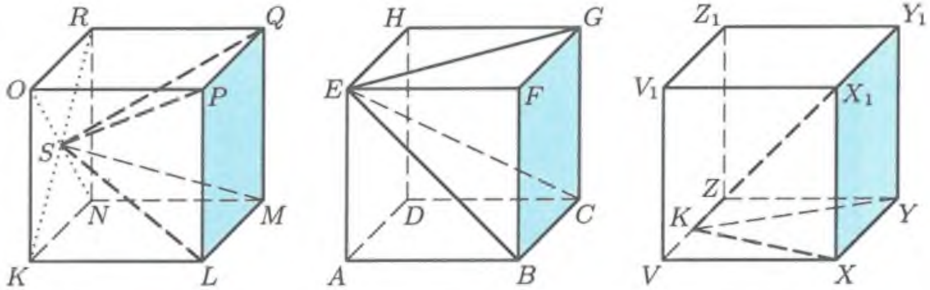
***10.** Čtyřboký jehlan s obdélníkovou podstavou má výšku 19,2 cm, její pata splývá s průsečíkem úhlopříček podstavy. Jednou stěnou jehlanu je rovnoramenný trojúhelník se základnou délky 25 cm a výškou 24 cm. Vypočtěte obsah pláště tohoto jehlanu.

***11.** Vypočtěte obsah pláště pravidelného čtyřbokého jehlanu, který má výšku 11 cm, je-li odchylka jeho protějších bočních hran 60°.

12. Vypočtěte obsah podstavy pravidelného pětibokého jehlanu s boční hranou délky 12 cm, je-li její odchylka od roviny podstavy 60°.

***13.** Vypočtěte povrch pravidelného šestibokého jehlanu s podstavou o obsahu 259,8 cm^2 a stěnovou výškou 16 cm.

□14. Na obrázku jsou tři shodné krychle, do nichž jsou vepsány jehlany $PLMQS$, $BCGFE$ a XYY_1X_1K. Porovnejte podle velikosti jejich objemy.



15. Podstavou čtyřbokého jehlanu je obdélník s rozměry 24 cm a 7 cm, průsečík jeho úhlopříček je zároveň patou výšky jehlanu. Vypočtěte objem jehlanu, svírají-li jeho protější boční hrany úhel 106°.

16. Vypočtěte objem pravidelného trojbokého jehlanu, jehož podstava je vepsána do kružnice o poloměru 8 cm a jehož plášť má obsah 147 cm^2.

■ **17.** Michal slíbil svému učiteli matematiky, že v tatínkově truhlářské dílně zhotoví tři modely pravidelných jehlanů: trojbokého, čtyřbokého a šestibokého. Učitel ho požádal, aby každý model měl výšku 20 cm a aby vrcholy podstavy vždy ležely na kružnici o průměru 12 cm.

a) Jaké budou délky podstavných a bočních hran Michalových modelů?

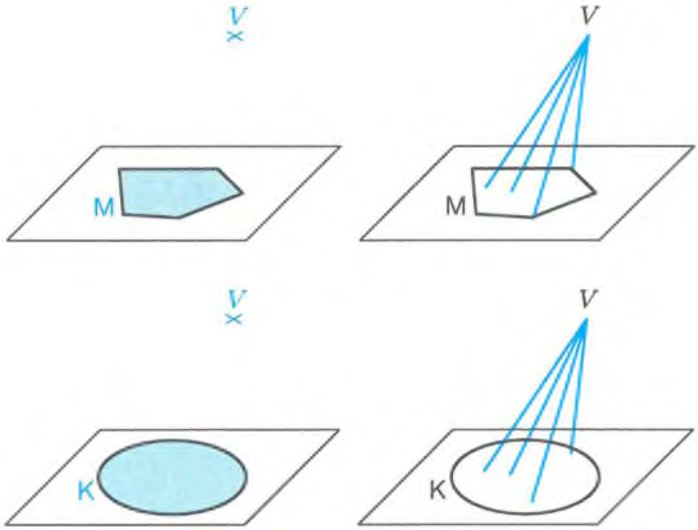
b) Jaké budou hmotnosti modelů, vyrobí-li je Michal z borového dřeva, které má hustotu asi 500 $\frac{kg}{m^3}$?

■ **18.** V egyptské Gíze jsou blízko sebe postaveny tři světoznámé pyramidy, *Cheopsova*, *Chefrénova* a *Mykleinosova*. Pyramidy mají tvar pravidelných čtyřbokých jehlanů. Cheopsova pyramida je 138 m vysoká a její podstavná hrana měří 227,5 m. Výška Chefrénovy pyramidy je 136,6 m, její podstavná hrana měří 210,5 m. Nejmenší, Mykleinosova pyramida má podstavnou hranu délky 108 m a vypíná se do výšky 62 m. Zjistěte, o kolik m^2 se liší povrchy těchto pyramid (považujte je za pláště jehlanů).

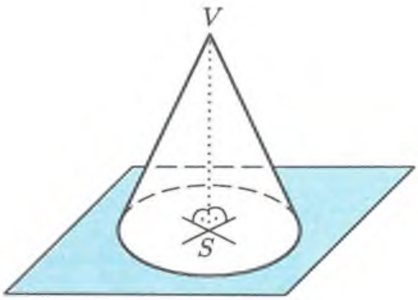
5 KUŽELY

V minulé kapitole jsme se věnovali jehlanům – tělesům, která jsou určena svou mnohoúhelníkovou podstavou M a hlavním vrcholem V. Vzpomeňte si, že jehlan vznikne, když všechny body mnohoúhelníku M spojíme úsečkami s bodem V (který neleží ve stejné rovině jako M).

Zaměníme-li mnohoúhelník M kruhem K a zopakujeme-li celý postup, dostaneme těleso zvané *kužel*. Kruh K se nazývá jeho *podstava*, bod V jeho *vrchol*.

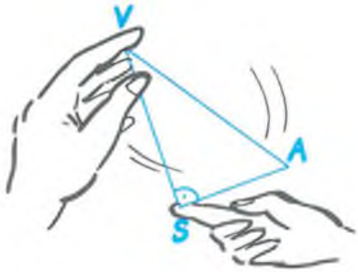


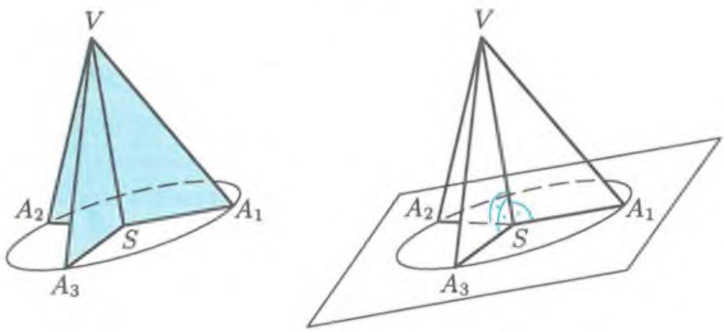
Právě kuželům se budeme věnovat v této kapitole. Naučíme se určovat jejich povrchy a objemy. Budeme však pracovat pouze s kužely, které mají tu vlastnost, že spojnice jejich vrcholu V a středu S jejich podstavy je úsečka *kolmá* k rovině podstavy. Takovým kuželům se někdy říká *rotační* kužely. Za chvíli uvidíme, že jejich vznik můžeme popsat pomocí otáčení (rotace) trojúhelníků v prostoru. Protože jinými než rotačními kužely se vůbec nebudeme zabývat, budeme přívlastek „rotační" v dalším textu vynechávat.



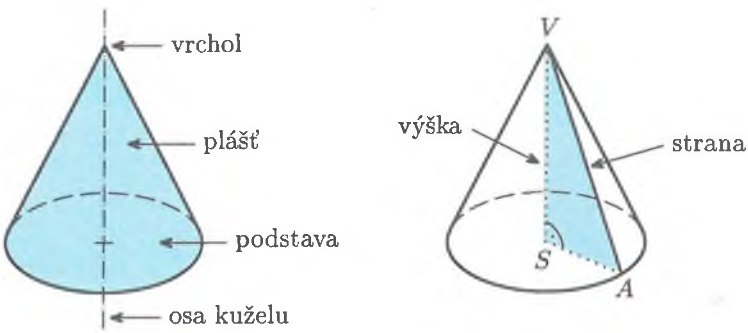
? Co je kužel a co na něm rozeznáváme?

Vystřihněme z papíru pravoúhlý trojúhelník AVS s přeponou AV a otáčejme jím v prostoru kolem odvěsny VS tak, aby se polohy bodů V, S neměnily.



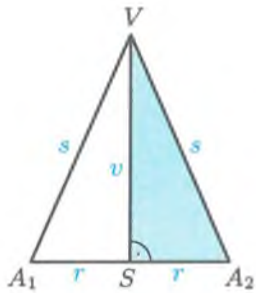


Otáčený trojúhelník vytvoří těleso, kterému říkáme **kužel**. Přímka VS, kolem níž se trojúhelník otáčí, se nazývá *osa kuželu*. Otáčející se odvěsna SA vytvoří kruh K s poloměrem $r = |SA|$. Kruhu K říkáme *podstava* kuželu. Otáčející se přepona VA vytvoří plochu zvanou *plášť* kuželu. Plášť je vyplněn úsečkami VA, kterým říkáme *strany* kuželu. Bod V se jmenuje *vrchol* kuželu, úsečka VS (i její délka $v = |VS|$) se nazývá *výška* kuželu.



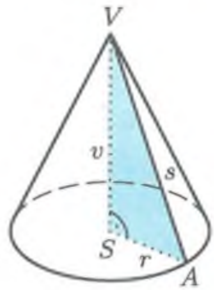
Protože v každé poloze otáčeného trojúhelníku AVS platí $VS \perp SA$, je osa kuželu kolmá k rovině jeho podstavy.

Každá rovina, která prochází osou kuželu, protíná kužel v rovnoramenném trojúhelníku VA_1A_2, který je složen ze dvou kopií otáčeného trojúhelníku AVS. Jedna z nich je na obrázku vybarvena. Trojúhelník VA_1A_2 se nazývá *osový řez* kuželu. Ramena tohoto trojúhelníku jsou strany VA_1 a VA_2 kuželu, jejichž délku značíme obvykle písmenem s. Základnou trojúhelníku VA_1A_2 je průměr A_1A_2 podstavy kuželu, výškou k základně je úsečka VS, která je zároveň výškou kuželu.



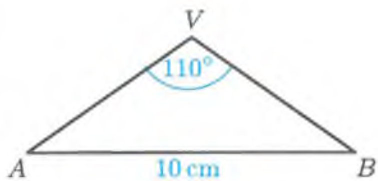
„Velikost" a „tvar" kuželu jsou tedy určeny třemi délkami r, v a s. Jsou to vlastně délky stran pravoúhlého trojúhelníku AVS (jehož otáčením kužel vznikl), takže jsou spolu „svázány" rovností

$$s^2 = v^2 + r^2.$$



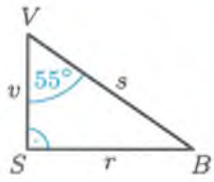
Příklad 1. Osovým řezem kuželu je rovnoramenný trojúhelník, jehož vnitřní úhel při hlavním vrcholu má velikost 110°. Vypočtěte výšku a délku strany kuželu, je-li průměr jeho podstavy 10 cm.

Řešení. Osovým řezem je rovnoramenný trojúhelník ABV s hlavním vrcholem V, ve kterém známe velikost vnitřního úhlu AVB ($|\sphericalangle AVB| = 110°$) a délku základny ($|AB| = 10\,\text{cm}$).



Sestrojme výšku VS trojúhelníku ABV. V pravoúhlém trojúhelníku BVS platí $|\sphericalangle SVB| = 55°$ a $|SB| = r = 5\,\text{cm}$.

Hledanou výšku $v = |VS|$ vypočteme pomocí funkce tangens, hledanou stranu $s = |VB|$ pomocí funkce sinus:



$$\operatorname{tg} 55° = \frac{|BS|}{|VS|} = \frac{r}{v}$$

$$v = \frac{r}{\operatorname{tg} 55°} = \frac{5\,\text{cm}}{\operatorname{tg} 55°} \doteq 3{,}5\,\text{cm}$$

$$\sin 55° = \frac{|BS|}{|VB|} = \frac{r}{s}$$

$$s = \frac{r}{\sin 55°} = \frac{5\,\text{cm}}{\sin 55°} \doteq 6{,}1\,\text{cm}$$

Výška kuželu je asi 3,5 cm, jeho strana měří asi 6,1 cm.

1. Vypočtěte délku strany kuželu s poloměrem podstavy 6 cm a výškou 10 cm.

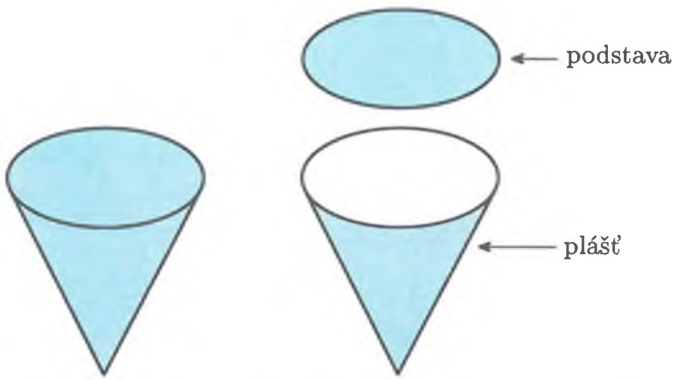
2. Vypočtěte obsah podstavy kuželu, jehož strana měří 13 cm, je-li výška kuželu 5 cm.

3. Strana kuželu měří 25 cm a má od roviny podstavy odchylku 42°. Vypočtěte výšku kuželu.

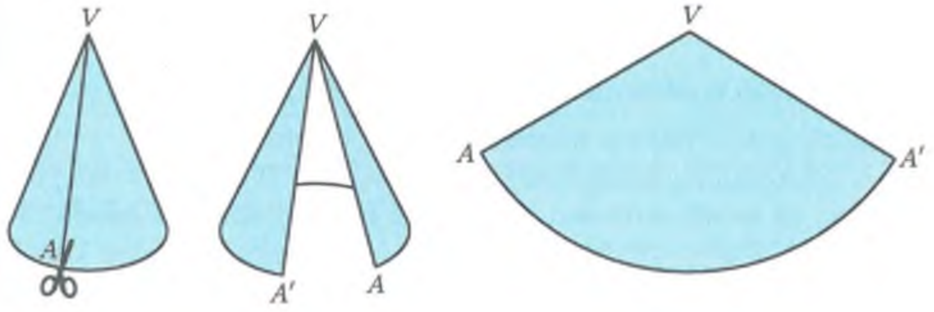
?

Co je *povrch* kuželu a jak ho vypočteme?

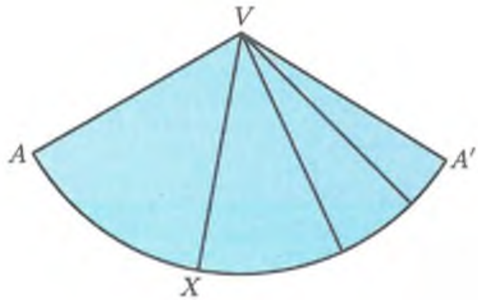
Povrch kuželu se skládá ze dvou ploch. Jednou z nich je kruh – podstava kuželu, druhou „oblá" plocha – plášť. Připomeňme, že plášť je sjednocením všech stran kuželu.



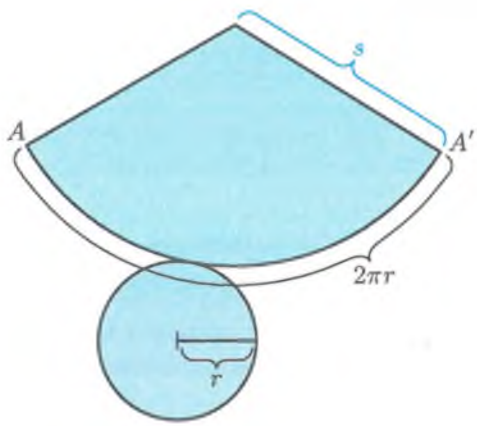
Plášť kuželu rozvineme do roviny tak, že ho nejprve „rozstřihneme“ podle některé strany VA kuželu a pak ho „narovnáme“.



Získáme tak rovinný útvar omezený dvěma shodnými úsečkami VA, VA' a „křivou“ čarou AA'. Vysvětlíme, že tato čára je obloukem, přesněji částí kružnice o středu V a poloměru $s = |VA| = |VA'|$. Každý bod X čáry AA' je totiž krajním bodem úsečky VX, která je stranou původního kuželu, a tak má skutečně délku s.



Jaká je délka oblouku AA'? Uvědomte si podle obrázku vpravo, že oblouk AA' vznikl rozvinutím kružnice omezující podstavu kuželu. Proto je délka oblouku AA' rovna $2\pi r$, kde r je poloměr podstavy kuželu. (Útvar na obrázku vpravo je jedna ze *sítí* kuželu. Různé sítě se liší jen místem, kde se podstava kuželu „stýká“ s rozvinutým pláštěm.)



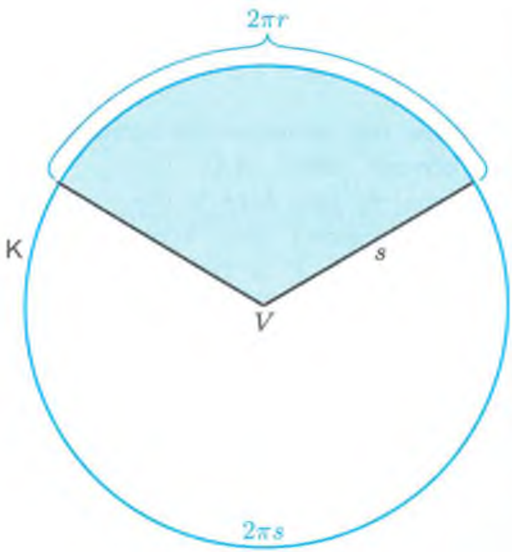
Podobně jako u jiných těles znamená povrch kuželu nejen sjednocení obou ploch, které kužel omezují, ale i součet obsahů obou těchto ploch. V tomto významu pro povrch S kuželu platí vzorec

$$S = S_p + S_{pl},$$

kde S_p je obsah podstavy kuželu a S_{pl} obsah jeho pláště.

Zřejmě $S_p = \pi r^2$, kde r je poloměr podstavy kuželu.

Vzorec pro obsah S_{pl} pláště kuželu nyní odvodíme. Budeme při tom předpokládat, že kromě poloměru r podstavy známe i stranu s kuželu. Víme, že plášť kuželu lze rozvinout do kruhové výseče, která je v kruhu o poloměru s (a obvodu $2\pi s$) omezena obloukem délky $2\pi r$. Protože tento kruh má obsah πs^2, využijeme úměru:



$$\begin{array}{ccc} S_{pl} & \ldots\ldots\ldots\ldots & 2\pi r \\ \pi s^2 & \ldots\ldots\ldots\ldots & 2\pi s \end{array}$$

$$S_{pl} : \pi s^2 = 2\pi r : 2\pi s$$

$$\frac{S_{pl}}{\pi s^2} = \frac{2\pi r}{2\pi s}$$

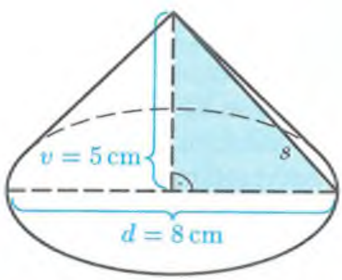
$$S_{pl} = \pi r s$$

Pro povrch S kužele s poloměrem podstavy r a stranou s tedy platí:

$$\boxed{S = S_p + S_{pl} = \pi r^2 + \pi r s = \pi r(r + s)}$$

Příklad 2. Vypočtěte povrch kuželu o výšce 5 cm, jehož podstava má průměr 8 cm.

Řešení. Poloměr r podstavy kuželu je 4 cm, délku s strany kuželu určíme z Pythagorovy věty:



$$s = \sqrt{v^2 + r^2} = \sqrt{5^2 + 4^2}\,\text{cm} = \sqrt{41}\,\text{cm}$$

Nyní již můžeme dosadit do vzorce pro povrch S:

$$S = \pi r(r+s) = \pi \cdot 4 \cdot \left(4 + \sqrt{41}\right)\,\mathrm{cm}^2 \doteq 130{,}7\,\mathrm{cm}^2$$

Povrch kuželu je asi 130,7 cm^2.

Příklad 3. Plášť kuželu o straně 5 cm má obsah $15\pi\,\mathrm{cm}^2$. Kolik je to procent z celého povrchu kuželu?

Řešení uvádíme podle Martinova sešitu:

kužel: $S_{pl} = 15\pi\,cm^2$, $s = 5\,cm$, $r = ?$

$S_{pl} = \pi r s \quad /:\pi s$

$r = \frac{S_{pl}}{\pi s}$

$r = \frac{15\pi\,cm^2}{\pi \cdot 5\,cm} = 3\,cm$

$S_p = \pi r^2 = \pi \cdot 3^2\,cm^2 = 9\pi\,cm^2$

$S = S_p + S_{pl} = 9\pi\,cm^2 + 15\pi\,cm^2 = 24\pi\,cm^2$

$24\pi\,cm^2 \ldots\ldots 100\,\%$

$15\pi\,cm^2 \ldots\ldots\ldots x\,\%$

$15\pi : 24\pi = x : 100$

$x = \frac{15\pi}{24\pi} \cdot 100 = \frac{5}{8} \cdot 100 = \frac{5}{2} \cdot 25 = \frac{125}{2} = \underline{\underline{62{,}5}}$

Obsah pláště je 62,5 % povrchu kužele.

□ **4.** Vysvětlete, proč je obsah podstavy kuželu menší než obsah jeho pláště.

5. Vypočtěte povrch kuželu, jehož osovým řezem je rovnostranný trojúhelník o straně délky 8 cm.

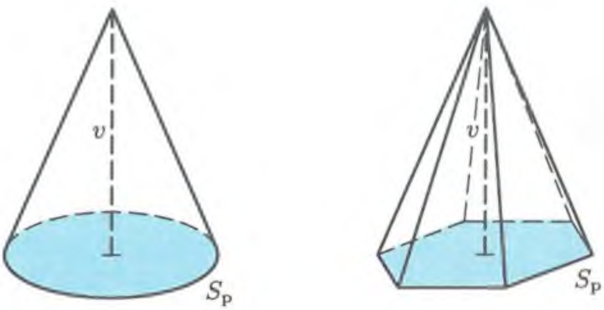
6. Určete výšku kuželu s povrchem 100 cm^2, víte-li, že jeho strana je dvakrát delší než poloměr jeho podstavy.

? Jak vypočítáme *objem* kuželu?

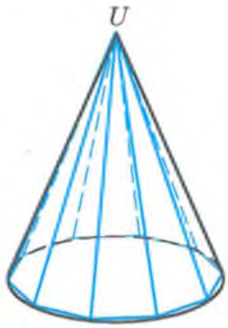
Vysvětlíme, proč pro objem V kuželu s podstavou o obsahu S_p a výškou v platí vzorec

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_p \cdot v.$$

Jistě vám neušlo, že podle stejného vzorce počítáme i objem jehlanu.



Shoda obou vzorců není náhodná. Představme si, že do kuželu K s vrcholem U je vepsán pravidelný „mnohoboký“ jehlan J s hlavním vrcholem U tak, že vrcholy jeho podstavy leží na kružnici, která omezuje podstavu kuželu K.



Protože jehlan J je částí kuželu K, platí pro jejich objemy V_J a V_K nerovnost $V_J < V_K$.

Z názoru je patrné, že když budeme zvětšovat počet bočních stěn pravidelného jehlanu J, bude jehlan J stále více a „těsněji“ zaplňovat kužel K, takže se jeho objem V_J bude jen nepatrně lišit od objemu V_K kuželu K. Zároveň se bude obsah S_J podstavy jehlanu J „neomezeně blížit“ k obsahu S_K podstavy kuželu K.

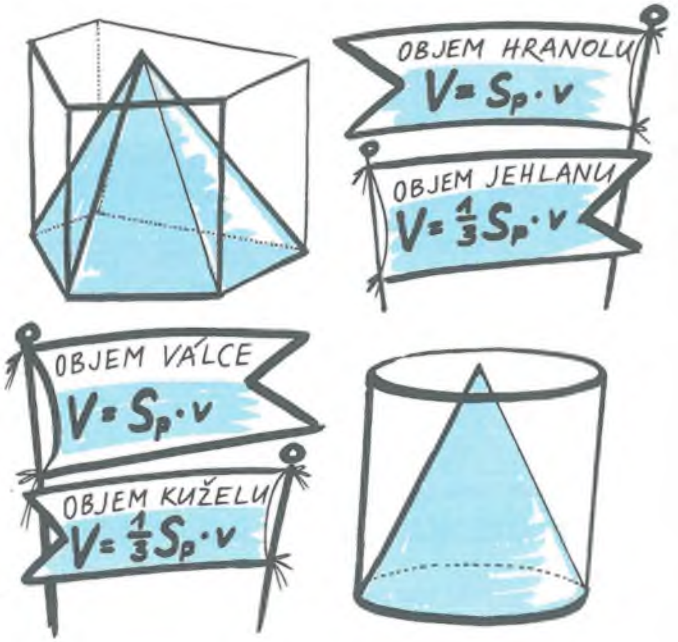
Když tedy ve vzorci $V_J = \frac{1}{3} \cdot S_J \cdot v$ zaměníme obsah S_J podstavy jehlanu J obsahem S_K podstavy kuželu K, vyjde nám vzorec pro objem V_K kuželu:

$$V_K = \frac{1}{3} \cdot S_K \cdot v$$

Kužel s poloměrem podstavy r má obsah podstavy $\pi \cdot r^2$. Proto pro jeho objem V platí

$$\boxed{V = \frac{1}{3}\pi r^2 v,}$$

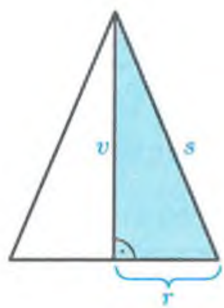
kde v je výška tohoto kuželu.



Příklad 4. Vypočtěte objem kuželu o straně délky 13 cm a výšce 12 cm.

Řešení. Nejprve určíme pomocí Pythagorovy věty poloměr podstavy kuželu:

$$r = \sqrt{s^2 - v^2} = \sqrt{169 - 144}\,\text{cm} =$$
$$= \sqrt{25}\,\text{cm} = 5\,\text{cm}$$



Všechny potřebné údaje k výpočtu objemu V kuželu již známe:

$$V = \tfrac{1}{3} \cdot \pi r^2 v = \left(\tfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot 12\right)\text{cm}^3 = 100\pi\,\text{cm}^3 \doteq 314\,\text{cm}^3$$

Objem kuželu je asi $314\,\text{cm}^3$.

Příklad 5. Osovým řezem kuželu je rovnoramenný trojúhelník s ramenem délky 7 cm, jehož vnitřní úhel při hlavním vrcholu má velikost 100°. Vypočtěte objem tohoto kuželu.

Řešení jsme převzali z Lenčina sešitu.

kužel:

$\sin 50° = \dfrac{v}{7\,\text{cm}}$

$v = \sin 50° \cdot 7\,\text{cm} \doteq 0{,}766 \cdot 7\,\text{cm} \doteq$
$\doteq 5{,}362\,\text{cm} \doteq \boxed{5{,}4\,\text{cm}}$

$\cos 50° = \dfrac{r}{7\,\text{cm}}$

$r = \cos 50° \cdot 7\,\text{cm} \doteq 0{,}6428 \cdot 7\,\text{cm} \doteq$
$\doteq \boxed{4{,}5\,\text{cm}}$

$V = \frac{1}{3}\pi v^2 r \doteq \frac{1}{3}\pi\, 5{,}4^2 \cdot 4{,}5\,\text{cm}^3 \doteq \underline{\underline{137{,}4\,\text{cm}^3}}$

Objem kužele je asi $137{,}4\,\text{cm}^3$.

7. Vypočtěte objem kuželu, jehož osovým řezem je rovnostranný trojúhelník o straně délky 5 cm.

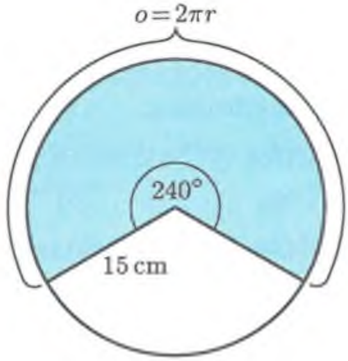
8. Objem kuželu, jehož výška je dvojnásobkem poloměru jeho podstavy, je $18\pi\,\text{cm}^3$. Vypočtěte délku jeho strany.

V závěru kapitoly uvedeme ještě jednu praktickou úlohu.

Příklad 6. Petr zhotovil kornout tak, že nejprve vystřihl z tvrdého papíru kruh o poloměru 15 cm, z něj pak odstřihl kruhovou výseč se středovým úhlem velikosti 240° a její okraje slepil. Jaký objem má kornout, který Petr vyrobil?

Řešení. Kruhová výseč, kterou Petr použil k výrobě kornoutu, je vlastně rozvinutým pláštěm kuželu o straně délky $s = 15$ cm. Obvod jeho podstavy je roven délce o oblouku, který kruhovou výseč omezuje. Protože $240° : 360° = 2 : 3$, je délka o rovna dvěma třetinám délky kružnice o poloměru 15 cm:

$$o = \left(\tfrac{2}{3} \cdot 2\pi \cdot 15\right)\,\text{cm} = 20\pi\,\text{cm}$$



Jak jsme vysvětlili, platí rovnost

$$o = 2\pi r,$$

kde r je poloměr podstavy kuželu. Dosazením dostáváme

$$20\pi\,\text{cm} = 2\pi r,$$

odtud $r = 10\,\text{cm}$.

Ze známé délky strany s a poloměru r podstavy kuželu určíme jeho výšku v:

$$v = \sqrt{s^2 - r^2} = \sqrt{15^2 - 10^2}\,\text{cm} = \sqrt{125}\,\text{cm} = 5\sqrt{5}\,\text{cm}$$

Nyní již snadno vypočteme hledaný objem V kornoutu:

$$V = \tfrac{1}{3}\pi r^2 v = \left(\tfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 10^2 \cdot 5\sqrt{5}\right)\,\text{cm}^3 \doteq 1\,171\,\text{cm}^3$$

Objem kornoutu je asi $1\,171\,\text{cm}^3$.

9. Střecha věže má podobu rotačního kuželu, průměr podstavy je 6 m a výška kuželu je 2,5 m. Kolik m^2 plechu je třeba k pokrytí střechy? (Připočtěte 10 % na spoje a odpad.)

CVIČENÍ 4

□ **1.** Vysvětlete, proč každý kužel vznikne otáčením vhodného rovnoramenného trojúhelníku.

2. Vypočtěte výšku kuželu s poloměrem podstavy 9 cm a stranou délky
a) 41 cm, b) 15 cm, c) 23,4 cm.

3. Vypočtěte průměr podstavy kužele se stranou délky 10 cm, jehož osovým řezem je
a) rovnostranný trojúhelník,
b) pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník.

4. Vypočtěte velikost úhlu při hlavním vrcholu trojúhelníku, který je osovým řezem kuželu s poloměrem podstavy 6 cm a výškou
a) 3 cm, b) 6 cm, c) 12 cm.

5. Vypočtěte povrch kuželu o výšce 24 cm a straně délky 24,4 cm.

6. Kužel má poloměr podstavy 1 dm. Vyjádřete jako násobek $\pi\,\mathrm{dm}^2$ povrch kuželu, má-li jeho strana délku rovnou
a) 2 dm, b) 3 dm, c) 5 dm, d) k dm.

7. Obsah podstavy kuželu je 1 809,56 cm^2, výška kuželu je 32 cm. Vypočtěte povrch kuželu.

8. Kužel s poloměrem podstavy 80 cm má povrch $12\,960 \cdot \pi\,\mathrm{cm}^2$. Vypočtěte výšku a délku strany kuželu.

9. Eva si chce na školní maškarní ples sama vyrobit „šaškovskou“ čepici z papíru vysokou 30 cm. Změřila si obvod hlavy a zjistila, že činí 57 cm. Jaký poloměr a středový úhel má kruhová výseč, ze které si může Eva čepici slepit?

10. Vypočtěte objem a povrch kuželu o výšce 7,2 cm a straně délky 32,8 cm.

11. Vyjádřete jako násobek $\pi\,\mathrm{dm}^3$ objem kuželu s poloměrem podstavy 1 dm a výškou
a) 1 dm, b) 3 dm, c) 1 m, d) 1 cm.

12. Vyjádřete jako násobek $\pi\,\mathrm{dm}^3$ objem kuželu s výškou 1 dm a poloměrem podstavy

a) 1 dm, b) 3 dm, c) 1 m, d) 1 cm.

13. Vypočtěte objem kuželu s průměrem podstavy 16 cm a stranou délky

a) 10 cm, b) 20 cm.

14. Vypočtěte objem kuželu, jehož osovým řezem je pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník

a) s odvěsnou délky 8 cm, b) s přeponou délky 8 cm.

15. Kužel má podstavu o obsahu $25\pi\,\mathrm{cm}^2$ a plášť o obsahu $65\pi\,\mathrm{cm}^2$. Vyjádřete jako násobek $\pi\,\mathrm{cm}^2$ jeho povrch a jako násobek $\pi\,\mathrm{cm}^3$ jeho objem.

***16.** Kužely K_1, K_2 mají stejné objemy. Určete, který z nich má delší stranu, víte-li, že poloměr podstavy kuželu K_1 je roven výšce kuželu K_2.

***17.** Vypočtěte povrch tělesa, které vznikne otáčením pravoúhlého trojúhelníku s odvěsnami o délkách 9 cm a 12 cm kolem jeho přepony.

■ **18.** Kornout na zmrzlinu má v nejširším místě průměr 4 cm, od horního okraje ke špičce měří 8,5 cm. Jaký objem má celá porce zmrzliny, když kornout vyplňují její dvě pětiny?

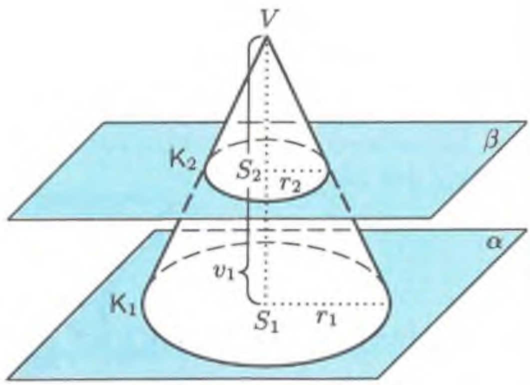
6 KOMOLÉ KUŽELY A JEHLANY

V minulých kapitolách jsme se věnovali jehlanům a kuželům. Vysvětlili jsme, jak vznikají, co na nich rozeznáváme a jak se počítají jejich povrchy a objemy. V této kapitole se blíže seznámíme s tělesy, která z jehlanů nebo kuželů vzniknou, když vhodnými rovinami odřízneme jejich části. Tak z kuželu dostaneme *komolý kužel*, z jehlanu *komolý jehlan*.

? Jak vzniká komolý kužel a co na něm rozeznáváme?

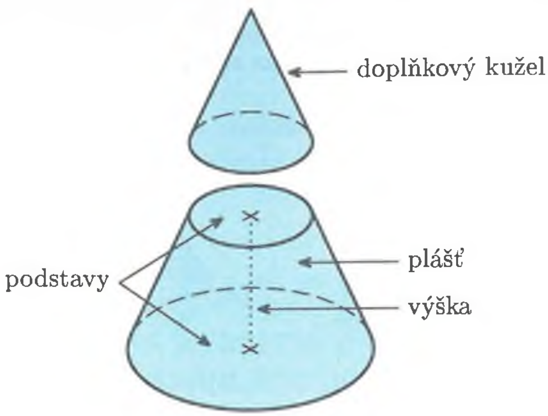
Některá tělesa na následujícím obrázku mají tvar komolého kuželu.

Vysvětlíme, jak komolý kužel vzniká. Na obrázku je kužel s vrcholem V, jehož podstava K_1 leží v rovině α. Střed podstavy K_1 je označen S_1, její poloměr r_1. Zvolme uvnitř úsečky VS_1 libovolný bod S_2 a veďme jím rovinu β rovnoběžnou s rovinou α (a tedy kolmou k přímce VS_1). Rovina β protne kužel v kruhu K_2 se středem v bodě S_2. Poloměr r_2 kruhu K_2 je menší než poloměr r_1 kruhu K_1.

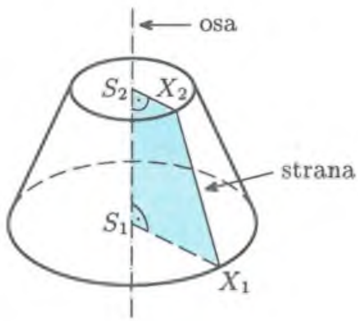


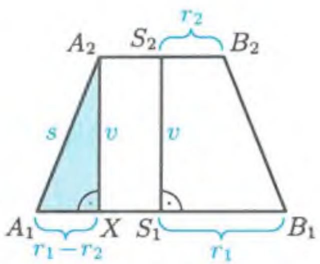
Rovina β rozděluje kužel na dvě části. Jedna z nich obsahuje úsečku VS_2 a je kuželem s vrcholem V. Druhá část obsahuje úsečku S_1S_2 a je tělesem, kterému říkáme **komolý kužel**.

Komolý kužel je omezen dvěma kruhovými *podstavami* a „zakřivenou" plochou zvanou *plášť*. Vzdálenost rovin obou podstav se jmenuje *výška* komolého kuželu a je rovna vzdálenosti středů jeho podstav. „Odstraněnému" kuželu říkáme *doplňkový kužel* k danému komolému kuželu.



Vznik komolého kuželu si můžeme představit také pomocí otáčení pravoúhlého lichoběžníku $S_1X_1X_2S_2$ v prostoru kolem přímky S_1S_2 (zvané *osa* komolého kuželu), která je kolmá k úsečkám S_1X_1 a S_2X_2, základnám otáčeného lichoběžníku. Plášť komolého kuželu je vyplněn úsečkami X_1X_2, kterým říkáme *strany* komolého kuželu. V každé rovině, která prochází osou komolého kuželu, leží dvě kopie $S_1A_1A_2S_2$ a $S_1B_1B_2S_2$ otáčeného lichoběžníku. Jejich sjednocením dostaneme rovnoramenný lichoběžník $A_1B_1B_2A_2$, který se nazývá *osový řez* komolého kuželu. Jeho základnami jsou průměry podstav kuželu (a tak $|A_1B_1| = 2r_1$, $|A_2B_2| = 2r_2$), rameny lichoběžníku jsou strany kuželu A_1A_2, B_1B_2 téže délky s $(s = |A_1A_2| = |B_1B_2|)$, výškou v lichoběžníku je výška kuželu $(v = |S_1S_2|)$. Z pravoúhlého trojúhelníku A_1XA_2 na obrázku je patrné, že délky r_1, r_2, v a s, které určují „velikost“ a „tvar“ komolého kuželu, jsou „svázány“ rovností

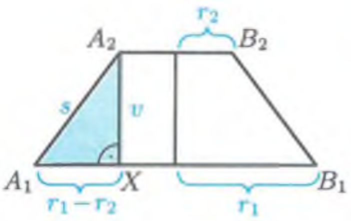




$$s^2 = v^2 + (r_1 - r_2)^2.$$

Příklad 1. Vypočtěte obsah osového řezu komolého kuželu, jehož podstavy mají poloměry 5 cm a 2 cm a jehož strana měří 5 cm.

Řešení. Osovým řezem komolého kuželu je rovnoramenný lichoběžník $A_1B_1B_2A_2$ se základnami A_1B_1 ($|A_1B_1| = 2r_1 = 10\,\text{cm}$), A_2B_2 ($|A_2B_2| = 2r_2 = 4\,\text{cm}$) a ramenem A_1A_2 ($|A_1A_2| = s = 5\,\text{cm}$). Obsah S lichoběžníku vypočteme ze vzorce



$$S = \frac{(|A_1B_1| + |A_2B_2|) \cdot v}{2},$$

ve kterém zatím neznáme výšku v lichoběžníku. Tu určíme z pravoúhlého trojúhelníku A_1XA_2 na obrázku:

$$v = \sqrt{s^2 - (r_1 - r_2)^2} = \sqrt{5^2 - (5-2)^2}\,\text{cm} =$$
$$= \sqrt{25 - 9}\,\text{cm} = \sqrt{16}\,\text{cm} = 4\,\text{cm}$$

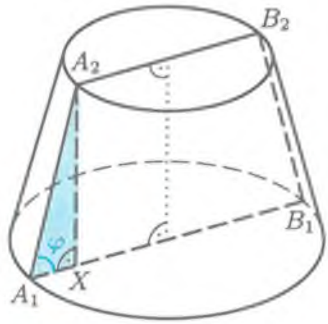
Platí tedy:

$$S = \frac{(|A_1B_1| + |A_2B_2|) \cdot v}{2} = \frac{(10+4) \cdot 4}{2}\,\text{cm}^2 = 28\,\text{cm}^2$$

Osový řez daného komolého kuželu má obsah $28\,\text{cm}^2$.

Příklad 2. Určete odchylku strany komolého kuželu o výšce 12 cm od roviny jeho podstavy, jsou-li poloměry podstav kuželu 6 cm a 9 cm.

Řešení. Hledanou odchylku φ určíme v osovém řezu $A_1B_1B_2A_2$. Kolmý průmět X bodu A_2 do roviny „větší" podstavy totiž padne na úsečku A_1B_1. Z pravoúhlého trojúhelníku A_1XA_2, v němž platí $|A_1X| = (9-6)\,\text{cm} = 3\,\text{cm}$ a $|A_2X| = 12\,\text{cm}$, dostáváme



$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{|A_2X|}{|A_1X|} = \frac{12}{3} = 4,$$
$$\varphi \doteq 75°58' \doteq 76°.$$

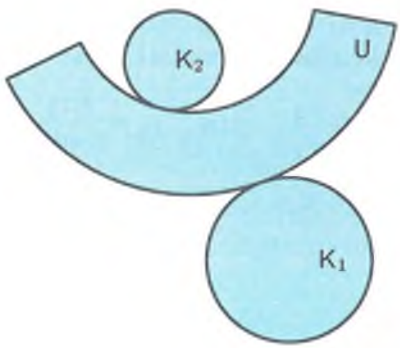
Odchylka strany daného komolého kuželu od roviny jeho podstavy je asi 76°.

1. O kolik cm se liší poloměry podstav komolého kuželu, který má výšku 12 cm a stranu délky 16 cm?

2. Vypočtěte stranu a výšku komolého kuželu, jehož podstavy mají průměry 10 cm a 7 cm, je-li odchylka strany kuželu od roviny podstavy 40°.

Co je *povrch* komolého kuželu a jak ho vypočteme?

Víme již, že komolý kužel je ohraničen dvěma podstavami a pláštěm. Tyto plochy tvoří povrch komolého kuželu. „Odklopíme-li“ obě podstavy od pláště a ten pak po rozstřižení podél strany „rozvineme“ do roviny, získáme *síť* komolého kuželu. Je tvořena dvěma kruhy K_1 a K_2, které se dotýkají rozvinutého pláště U. Útvar U je omezen dvěma oblouky soustředných kružnic a dvěma shodnými úsečkami; jde o jakousi „výseč mezikruží“. Pochopíme to, když si představíme, že jsme plášť komolého kuželu rozvinuli do roviny současně s pláštěm doplňkového kuželu. Podrobněji to posoudíme za chvíli.



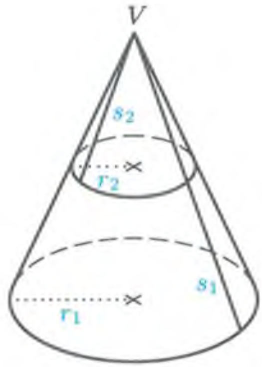
Povrch komolého kuželu znamená nejen sjednocení všech tří ploch, které kužel ohraničují, ale také součet obsahů těchto ploch. V tomto významu pro povrch S komolého kuželu platí vzorec

$$\boxed{S = S_1 + S_2 + S_{\mathrm{pl}},}$$

kde S_1 a S_2 jsou obsahy podstav komolého kuželu a S_{pl} je obsah jeho pláště.

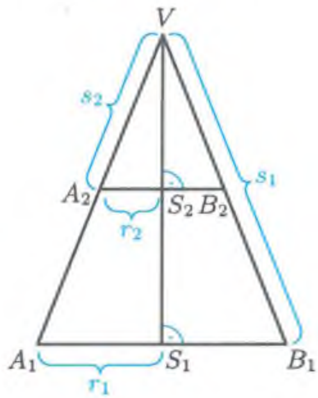
Zřejmě platí $S_1 = \pi r_1^2$ a $S_2 = \pi r_2^2$, kde r_1 a r_2 jsou poloměry podstav komolého kuželu. Vzorec pro obsah S_{pl} pláště nyní odvodíme. Budeme při tom předpokládat, že kromě poloměrů r_1 a r_2 $(r_1 > r_2)$ známe ještě délku s strany komolého kuželu.

Vyjdeme z původního kuželu s vrcholem V, z něhož byl komolý kužel „odříznut". Poloměr podstavy původního kuželu je r_1, jeho stranu označíme s_1. Doplňkový kužel má poloměr podstavy r_2, jeho stranu označíme s_2.

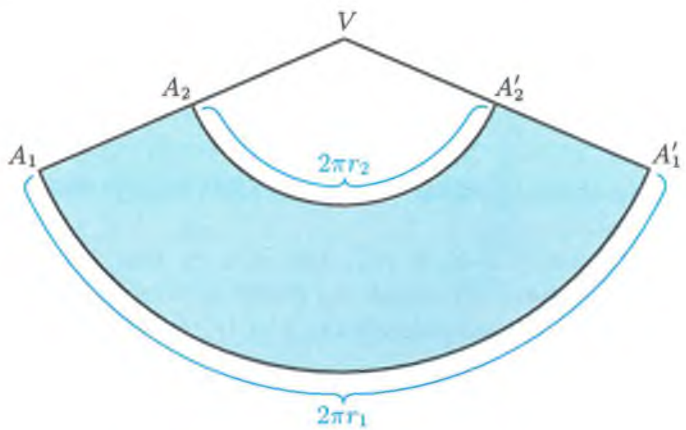


Z podobných trojúhelníků VS_2A_2 a VS_1A_1 v osovém řezu původního kuželu zjistíme, že platí

$$\frac{s_2}{s_1} = \frac{r_2}{r_1}, \quad \text{tzn.} \quad s_2 = \frac{s_1 r_2}{r_1}.$$



Rozvinutý plášť komolého kuželu je omezen oblouky A_1A_1' (délky $2\pi r_1$) a A_2A_2' (délky $2\pi r_2$) a shodnými úsečkami A_1A_2 a $A_1'A_2'$ (délky s). Jeho vznik si můžeme představit tak, že z kruhové výseče VA_1A_1' byla „odstřižena" kruhová výseč VA_2A_2'.



Obsah pláště komolého kuželu je proto roven rozdílu obsahů obou výsečí:

$$S_{pl} = \pi r_1 s_1 - \pi r_2 s_2 = \pi \cdot (r_1 s_1 - r_2 s_2)$$

V tomto vzorci zatím neznáme délky s_1 a s_2. Vyjádříme je pomocí známých délek s, r_1 a r_2. Využijeme při tom zřejmé rovnosti $s_1 = s + s_2$ a odvozeného vztahu $s_2 = \frac{s_1 r_2}{r_1}$:

$$\begin{aligned} s_1 &= s + s_2 \\ s_1 &= s + \frac{s_1 r_2}{r_1} \\ s_1 r_1 &= s r_1 + s_1 r_2 \\ s_1 \cdot (r_1 - r_2) &= s r_1 \\ s_1 &= \frac{s r_1}{r_1 - r_2} \\ s_2 &= \frac{r_2}{r_1} \cdot s_1 = \frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{s r_1}{r_1 - r_2} = \frac{s r_2}{r_1 - r_2} \end{aligned}$$

Vyjádřené délky s_1 a s_2 nyní dosadíme do vzorce pro S_{pl}:

$$S_{pl} = \pi \cdot (r_1 s_1 - r_2 s_2) = \pi \cdot \left(\frac{s r_1^2}{r_1 - r_2} - \frac{s r_2^2}{r_1 - r_2} \right) = \frac{\pi s}{r_1 - r_2} \cdot (r_1^2 - r_2^2) =$$

$$= \pi s \cdot \frac{(r_1 - r_2) \cdot (r_1 + r_2)}{r_1 - r_2} = \pi s \cdot (r_1 + r_2)$$

Tak jsme zjistili, že pro obsah S_{pl} pláště komolého kuželu platí

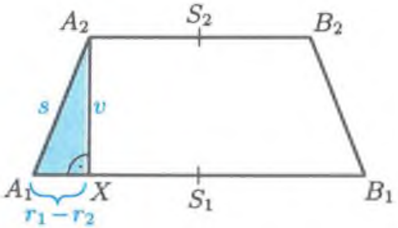
$$S_{pl} = \pi s \cdot (r_1 + r_2).$$

Odtud pro celý povrch S komolého kuželu s poloměry podstav r_1, r_2 a stranou délky s plyne vzorec:

$$\boxed{S = \pi r_1^2 + \pi r_2^2 + \pi s \cdot (r_1 + r_2)}$$

Příklad 3. Vypočtěte povrch komolého kuželu o výšce 10 cm, jehož podstavy jsou kruhy s poloměry 12 cm a 8 cm.

Řešení. Nejprve vypočteme délku s strany komolého kuželu z pravoúhlého trojúhelníku A_1XA_2 v osovém řezu $A_1B_1B_2A_2$. V něm známe obě odvěsny: $|A_1X| = r_1 - r_2 = (12 - 8)\,\text{cm} = 4\,\text{cm}$, $|A_2X| = v = 10\,\text{cm}$.



Platí:

$$s = \sqrt{|A_1X|^2 + |A_2X|^2} = \sqrt{4^2 + 10^2}\,\text{cm} = \sqrt{116}\,\text{cm} \doteq 10{,}77\,\text{cm}$$

Dosadíme do vzorce pro povrch komolého kuželu:

$$S = \pi r_1^2 + \pi r_2^2 + \pi s \cdot (r_1 + r_2) \doteq \pi \cdot \left[12^2 + 8^2 + (12 + 8) \cdot 10{,}77\right] \text{cm}^2 =$$
$$= \pi \cdot (144 + 64 + 215{,}4)\,\text{cm}^2 \doteq 1\,330\,\text{cm}^2$$

Povrch daného komolého kuželu je asi $1\,330\,\text{cm}^2$.

Příklad 4. Určete výšku komolého kuželu, jehož plášť má obsah $143\pi\,\text{cm}^2$ a jehož podstavy mají poloměry 8 cm a 3 cm.

Řešení je uvedeno tak, jak je napsala Katka:

komolý kužel: $S_{pl} = 143\pi\,\text{cm}^2$, $v = ?$

poloměry podstav: $r_1 = 8\,\text{cm}$

$r_2 = 3\,\text{cm}$

$$S_{pl} = \pi s \cdot (r_1 + r_2) \quad /: \pi(r_1 + r_2)$$

$$s = \frac{S_{pl}}{\pi(r_1 + r_2)}$$

$$s = \frac{143\pi\,\text{cm}^2}{\pi \cdot (8+3)\,\text{cm}} = \frac{143\,\text{cm}}{11} = \boxed{13\,\text{cm}}$$

$$v = \sqrt{s^2 - (r_1 - r_2)^2} = \sqrt{13^2 - (8-3)^2}\,\text{cm} =$$
$$= \sqrt{169 - 25}\,\text{cm} = \sqrt{144}\,\text{cm} = \underline{12\,\text{cm}}$$

Komolý kužel má výšku 12 cm.

3. Vypočtěte obsah pláště komolého kuželu, víte-li, že jeho osovým řezem je rovnoramenný lichoběžník se základnami 8 cm a 4 cm a výškou 5 cm.

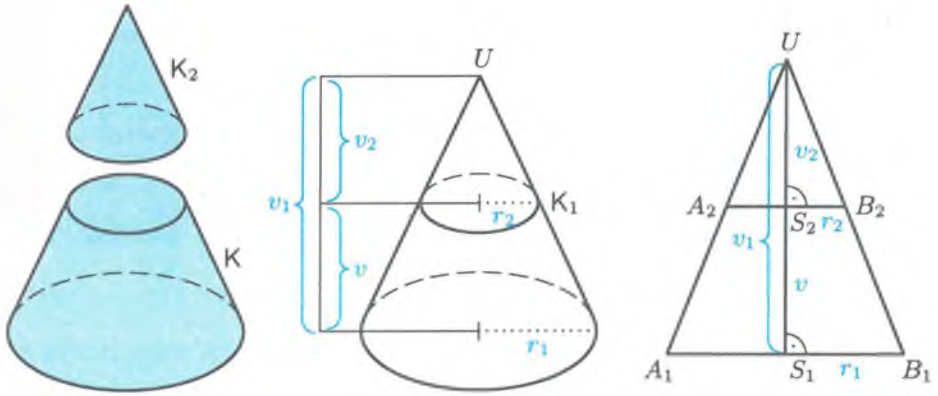
4. Jaký je povrch komolého kuželu, který vznikne otáčením pravoúhlého lichoběžníku $ABCD$ se základnami $|AB| = 14\,\text{cm}$, $|CD| = 7\,\text{cm}$ kolem přímky AD, je-li $|\sphericalangle ABC| = 45°$?

Jak vypočteme *objem* komolého kuželu?

?

Při odvození vzorce pro povrch komolého kuželu se ukázalo užitečné doplnit toto těleso na „celý“ kužel. Stejný obrat použijeme i při hledání vzorce pro objem komolého kuželu.

Ke komolému kuželu K s poloměry podstav r_1, r_2 $(r_1 > r_2)$ a výškou v „přilepíme“ doplňkový kužel K_2 s vrcholem U, poloměrem podstavy r_2 a výškou v_2. Získáme tak kužel K_1 s vrcholem U, poloměrem podstavy r_1 a výškou v_1, pro kterou platí $v_1 = v + v_2$.



Z podobných trojúhelníků US_2A_2 a US_1A_1 v osovém řezu kuželu K_1 plyne rovnost

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{r_2}{r_1}, \quad \text{tzn.} \quad v_2 = \frac{v_1 r_2}{r_1}.$$

Objem V komolého kuželu K vyjádříme jako rozdíl objemu V_1 kuželu K_1 a objemu V_2 kuželu K_2:

$$V = V_1 - V_2 = \tfrac{1}{3}\pi r_1^2 v_1 - \tfrac{1}{3}\pi r_2^2 v_2 = \tfrac{1}{3}\pi \cdot \left(r_1^2 v_1 - r_2^2 v_2\right)$$

Neznámé výšky v_1, v_2 vyjádříme pomocí známých délek r_1, r_2, v. Využijeme při tom již odvozených rovností $v_1 = v + v_2$ a $v_2 = \dfrac{v_1 r_2}{r_1}$:

$$\begin{aligned} v_1 &= v + v_2 \\ v_1 &= v + \frac{v_1 r_2}{r_1} \\ v_1 r_1 &= v r_1 + v_1 r_2 \\ v_1 \cdot (r_1 - r_2) &= v r_1 \end{aligned}$$

$$v_1 = \frac{vr_1}{r_1 - r_2}$$

$$v_2 = \frac{r_2}{r_1} \cdot v_1 = \frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{vr_1}{r_1 - r_2} = \frac{vr_2}{r_1 - r_2}$$

Dosadíme za v_1 a v_2 do vztahu pro objem V:

$$V = \frac{\pi}{3} \cdot \left(r_1^2 v_1 - r_2^2 v_2\right) = \frac{\pi}{3} \cdot \left(r_1^2 \cdot \frac{vr_1}{r_1 - r_2} - r_2^2 \cdot \frac{vr_2}{r_1 - r_2}\right) = \frac{\pi v}{3} \cdot \frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1 - r_2} =$$

$$= \frac{\pi v}{3} \cdot \frac{(r_1 - r_2) \cdot \left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right)}{r_1 - r_2} = \frac{\pi v}{3} \cdot \left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right)$$

V průběhu úprav jsme použili rozklad podle méně známého vzorce

$$A^3 - B^3 = (A - B) \cdot (A^2 + AB + B^2),$$

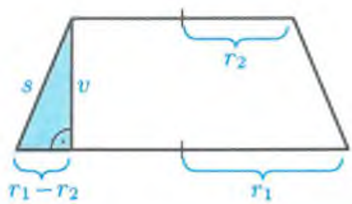
do něhož jsme dosadili $A = r_1$ a $B = r_2$. O platnosti tohoto vzorce se sami přesvědčte roznásobením jeho pravé strany.

Zjistili jsme, že pro objem V komolého kuželu s poloměry podstav r_1, r_2 a výškou v platí vzorec:

$$\boxed{V = \frac{\pi v}{3} \cdot \left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right)}$$

Příklad 5. Vypočtěte objem komolého kuželu, jehož podstavy mají průměry 20 cm a 30 cm a jehož strana měří 13 cm.

Řešení. Poloměry podstav daného komolého kuželu jsou $r_1 = \frac{30}{2}$ cm $=$ $= 15$ cm a $r_2 = \frac{20}{2}$ cm $= 10$ cm. K výpočtu objemu komolého kuželu bude třeba znát jeho výšku v. Určíme ji jako délku odvěsny pravoúhlého trojúhelníku s přeponou délky $s = 13$ cm a druhou odvěsnou délky $r_1 - r_2 = (15 - 10)$ cm $= 5$ cm:



$$v = \sqrt{13^2 - 5^2}\ \text{cm} = \sqrt{144}\ \text{cm} = 12\ \text{cm}$$

Pro objem V komolého kuželu dostáváme:

$$V = \frac{\pi v}{3} \cdot \left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right) = \frac{12\pi}{3} \cdot \left(15^2 + 15 \cdot 10 + 10^2\right)\ \text{cm}^3 =$$

$$= 1\,900\pi\ \text{cm}^3 \doteq 5\,970\ \text{cm}^3$$

Objem daného komolého kuželu je asi $5\,970\ \text{cm}^3$.

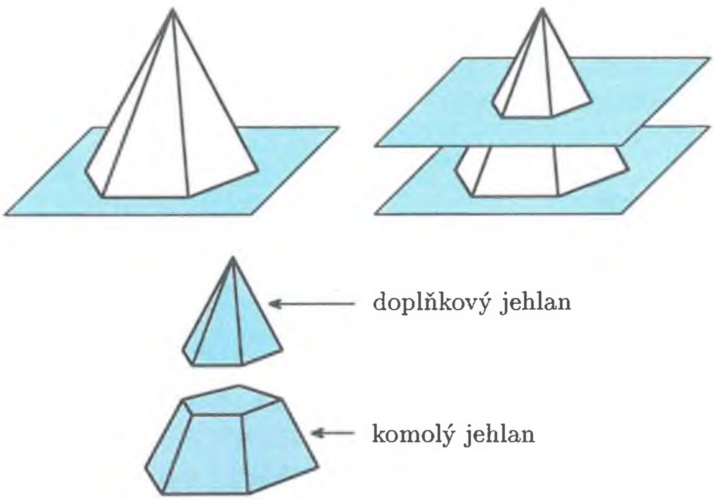
5. Osovým řezem komolého kuželu je rovnoramenný lichoběžník, jehož základny měří 14 cm a 8 cm a rameno 12 cm. Vypočtěte objem tohoto komolého kuželu.
6. Jakou výšku má komolý kužel o objemu $1\,m^3$, jehož podstavy mají obsahy $1\,m^2$ a $0{,}5\,m^2$?

?

Jak vzniká *komolý jehlan* a co na něm rozeznáváme?

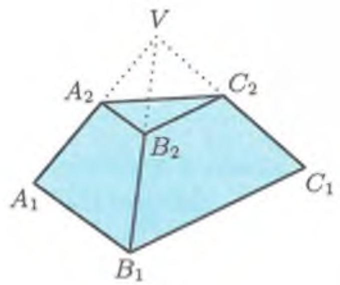
Tělesa na obrázku mají tvar komolého jehlanu.

Na předchozích stránkách jsme popsali, jak z kuželu vzniká komolý kužel. Stejným postupem vznikne z jehlanu komolý jehlan.



Původní jehlan jsme rozdělili rovinou rovnoběžnou s rovinou podstavy na dvě části – menší jehlan a těleso, které nazýváme **komolým jehlanem**. Menšímu jehlanu se říká *doplňkový jehlan* k příslušnému komolému jehlanu.

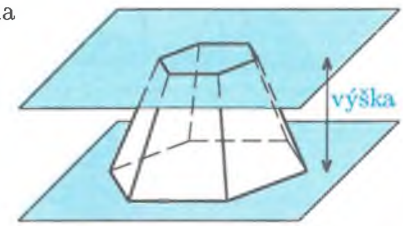
Na obrázku je komolý jehlan $A_1B_1C_1A_2B_2C_2$. Vznikl z trojbokého jehlanu $A_1B_1C_1V$, proto se mu říká *trojboký* komolý jehlan. Trojúhelníky $A_1B_1C_1$ a $A_2B_2C_2$ se nazývají *podstavy* komolého jehlanu. Kromě těchto dvou stěn je náš komolý jehlan omezen ještě třemi *bočními stěnami* $A_1B_1B_2A_2$, $B_1C_1C_2B_2$, $C_1A_1A_2C_2$. Každá z bočních stěn je lichoběžník. Například přímky A_1B_1 a A_2B_2 jsou rovnoběžné (leží totiž v jedné rovině A_1B_1V a nejsou různoběžné), zatímco úsečky A_1A_2 a B_1B_2 leží na různoběžných přímkách A_1V a B_1V.



Podstavy trojbokého komolého jehlanu jsou dva *podobné* trojúhelníky.

Podobnost trojúhelníků $A_1B_1C_1$ a $A_2B_2C_2$ nyní zdůvodníme. Z boční stěny A_1B_1V původního jehlanu zjistíme, že $|A_2B_2| = k \cdot |A_1B_1|$, kde $k = \dfrac{|VA_2|}{|VA_1|} = \dfrac{|VB_2|}{|VB_1|}$. Pro stejné k se podobně z boční stěny A_1C_1V odvodí rovnost $|A_2C_2| = k \cdot |A_1C_1|$ a z boční stěny B_1C_1V rovnost $|B_2C_2| = k \cdot |B_1C_1|$. Trojúhelníky $A_1B_1C_1$ a $A_2B_2C_2$ jsou tudíž podobné podle věty *sss*.

Obdobně z n-bokého jehlanu vzniká n-boký komolý jehlan. Ke *stěnám* n-bokého komolého jehlanu patří dvě *podstavy* (dva podobné n-úhelníky) a *n bočních stěn*. Každá z nich je lichoběžník. Vrcholy těchto lichoběžníků se nazývají *vrcholy* komolého jehlanu, jejich základny jsou tzv. *podstavné hrany*, jejich ramena nazýváme *bočními hranami* komolého jehlanu. Vzdálenost rovin podstav se nazývá *výška* komolého jehlanu.



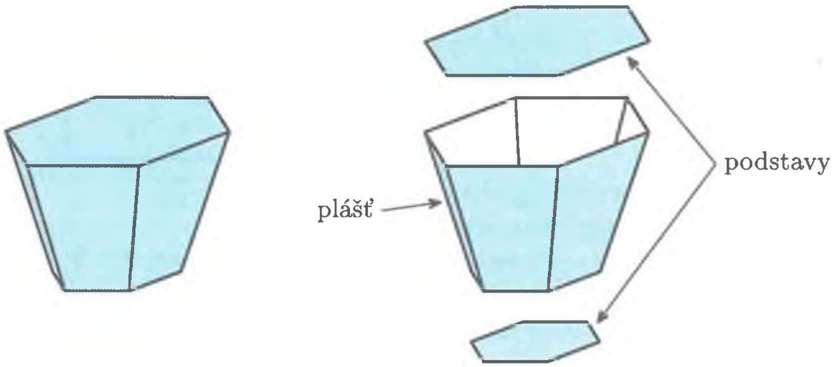
Vznikne-li komolý jehlan z pravidelného jehlanu, nazývá se *pravidelný* komolý jehlan. Jeho boční stěny jsou tvořeny shodnými rovnoramennými lichoběžníky.

7. Určete počet stěn, vrcholů a hran n-bokého komolého jehlanu.

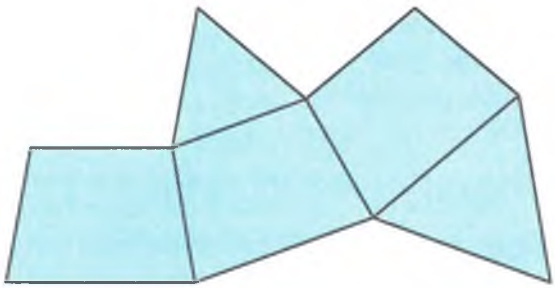
Co je *povrch* komolého jehlanu a jak ho vypočteme?

?

Komolý jehlan je ohraničen dvěma podstavami a bočními stěnami. Sjednocení všech bočních stěn tvoří *plášť* komolého jehlanu. Plášť spolu s oběma podstavami tvoří *povrch* komolého jehlanu.



Jestliže „rozvineme" stěny komolého jehlanu do roviny, získáme jeho *síť*. Jednu ze sítí pravidelného trojbokého komolého jehlanu si prohlédněte na obrázku:

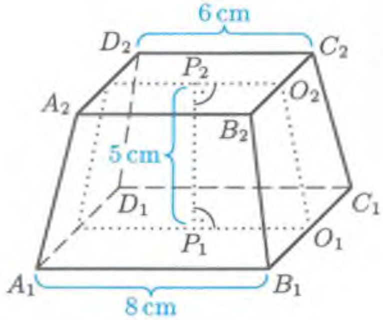


Také u komolého jehlanu znamená termín *povrch* nejen sjednocení všech stěn, které jehlan ohraničují, ale také součet jejich obsahů. V tomto významu povrch označujeme S a počítáme ho ze vzorce

$$\boxed{S = S_1 + S_2 + S_{\mathrm{pl}},}$$

kde S_1, S_2 jsou obsahy podstav komolého jehlanu a S_{pl} obsah jeho pláště.

Příklad 6. Vypočtěte povrch pravidelného čtyřbokého komolého jehlanu, jehož podstavami jsou čtverce o stranách délek 8 cm a 6 cm a jehož výška je 5 cm.

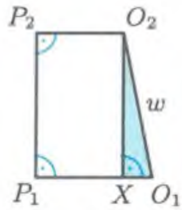


Řešení. Označme vrcholy tělesa jako na obrázku. Vypočítat obsahy podstav je snadné:

$$S_1 = |A_1B_1|^2 = 8^2\,\text{cm}^2 = 64\,\text{cm}^2$$

$$S_2 = |A_2B_2|^2 = 6^2\,\text{cm}^2 = 36\,\text{cm}^2$$

Obsah S_{pl} pláště komolého jehlanu určíme jako čtyřnásobek obsahu S_{b} jedné jeho boční stěny, například rovnoramenného lichoběžníku $B_1C_1C_2B_2$. Známe v něm délky jeho základen, neznáme však jeho výšku. K jejímu určení využijeme pravoúhlého lichoběžníku $P_1O_1O_2P_2$, kde P_1, P_2 jsou po řadě středy podstav komolého jehlanu a O_1, O_2 středy hran B_1C_1 a B_2C_2. Úsečka O_1O_2 je právě výškou lichoběžníku $B_1C_1C_2B_2$, její délku označíme w.



Kolmý průmět X bodu O_2 do roviny „větší“ podstavy padne na úsečku P_1O_1 a vzdálenost bodů O_2 a X je výškou komolého jehlanu, tzn. $|O_2X| = 5\,\text{cm}$. Zjistíme ještě délku druhé odvěsny XO_1 pravoúhlého trojúhelníku XO_1O_2:

$$|XO_1| = |P_1O_1| - |P_2O_2| = \tfrac{1}{2}\cdot(|A_1B_1| - |A_2B_2|) = \tfrac{1}{2}\cdot(8-6)\,\text{cm} = 1\,\text{cm}$$

Pro výšku w lichoběžníku $B_1C_1C_2B_2$ tak dostáváme:

$$w = \sqrt{|O_2X|^2 + |XO_1|^2} = \sqrt{5^2+1^2}\,\text{cm} = \sqrt{26}\,\text{cm}$$

Nyní již můžeme vypočítat nejen obsah S_{b} lichoběžníku $B_1C_1C_2B_2$

$$S_{\text{b}} = \tfrac{1}{2}\cdot(|B_1C_1| + |B_2C_2|)\cdot w = \left[\tfrac{1}{2}\cdot(8+6)\cdot\sqrt{26}\right]\,\text{cm}^2 \doteq 35{,}7\,\text{cm}^2,$$

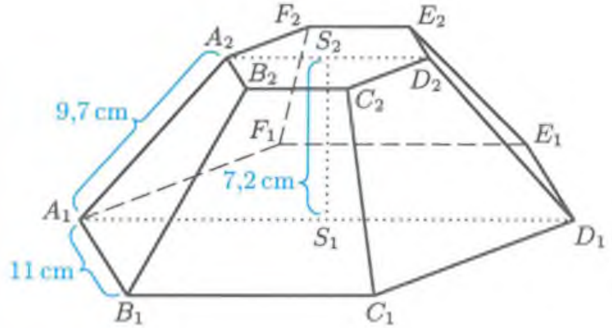
ale i povrch S celého komolého jehlanu:

$$S = S_1 + S_2 + 4\cdot S_{\text{b}} \doteq (64 + 36 + 4\cdot 35{,}7)\,\text{cm}^2 = 242{,}8\,\text{cm}^2$$

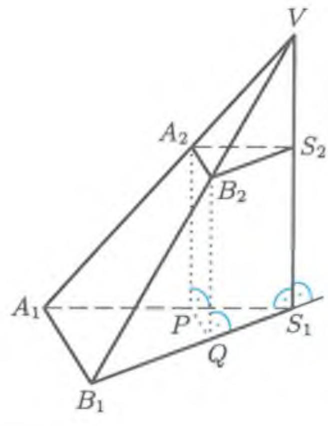
Povrch daného komolého jehlanu je asi $242{,}8\,\text{cm}^2$.

Příklad 7. Vypočtěte obsah pláště pravidelného šestibokého komolého jehlanu, víte-li, že jeho výška je 7,2 cm, boční hrana má délku 9,7 cm a delší podstavná hrana měří 11 cm.

Řešení. Obsah pláště daného komolého jehlanu, jehož vrcholy a středy podstav označíme podle obrázku, je roven šestinásobku obsahu S_b jedné jeho boční stěny. Boční stěna $A_1B_1B_2A_2$ je rovnoramenný lichoběžník s rameny A_1A_2, B_1B_2 délky 9,7 cm a základnou A_1B_1 délky 11 cm. Abychom určili obsah S_b tohoto lichoběžníku, vypočteme nejprve délku jeho kratší základny A_2B_2.



Hlavní vrchol V doplňkového jehlanu leží na přímce S_1S_2, která je kolmá k rovině $A_1B_1S_1$. Proto jsou roviny A_1S_1V a $A_1B_1S_1$ navzájem kolmé, tudíž kolmý průmět P bodu A_2 do roviny $A_1B_1S_1$ leží na úsečce A_1S_1. Obdobně kolmý průmět Q bodu B_2 do roviny $A_1B_1S_1$ leží na úsečce B_1S_1. V pravoúhelníku PQB_2A_2 mají protější strany A_2P a B_2Q délku rovnou výšce 7,2 cm komolého jehlanu. Z pravoúhlého trojúhelníku A_1PA_2 proto vychází:



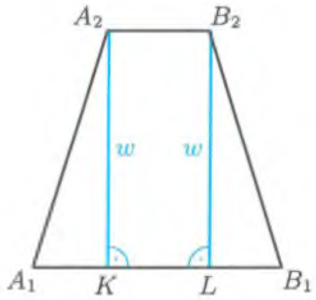
$$|A_1P| = \sqrt{|A_1A_2|^2 - |A_2P|^2} = \sqrt{9{,}7^2 - 7{,}2^2}\,\text{cm} = 6{,}5\,\text{cm}$$

Trojúhelník $A_1B_1S_1$ je rovnostranný a platí $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel PQ$, proto rovněž trojúhelník PQS_1 je rovnostranný a platí rovnosti

$$|A_2B_2| = |PQ| = |PS_1| = |A_1S_1| - |A_1P| = 11\,\text{cm} - 6{,}5\,\text{cm} = 4{,}5\,\text{cm}.$$

Poznamenejme, že délku podstavné hrany A_2B_2 lze určit i jiným postupem, například pomocí rovnoramenného lichoběžníku $A_1D_1D_2A_2$ (vyznačeného na prvním obrázku). Známe totiž jeho výšku $|S_1S_2|$, délku jeho ramen A_1A_2, D_1D_2 i délku delší základny A_1D_1 (rovnou dvojnásobku délky hrany A_1B_1). Proto lze pomocí Pythagorovy věty vypočítat délku kratší základny A_2D_2 (rovnou dvojnásobku délky hrany A_2B_2). Proveďte to sami.

Nyní ze stran lichoběžníku $A_1B_1B_2A_2$ vypočteme jeho výšku w. Vyznačme ji dvěma úsečkami A_2K a B_2L podle obrázku. Protože jsou úsečky A_1K a B_1L shodné, je jejich délka rovna



$$\tfrac{1}{2} \cdot (|A_1B_1| - |KL|) = \tfrac{1}{2} \cdot (|A_1B_1| - |A_2B_2|) =$$
$$= \tfrac{1}{2} \cdot (11\,\text{cm} - 4{,}5\,\text{cm}) = 3{,}25\,\text{cm}.$$

Z pravoúhlého trojúhelníku A_1KA_2 dostáváme:

$$w = \sqrt{|A_1A_2|^2 - |A_1K|^2} = \sqrt{9{,}7^2 - 3{,}25^2}\,\text{cm} \doteq 9{,}14\,\text{cm}$$

Pro obsah S_b lichoběžníku $A_1B_1B_2A_2$ proto platí

$$S_b = \frac{(|A_1B_1| + |A_2B_2|) \cdot w}{2} \doteq \frac{(11 + 4{,}5) \cdot 9{,}14}{2}\,\text{cm}^2 \doteq 70{,}84\,\text{cm}^2,$$

takže obsah pláště uvažovaného komolého jehlanu je roven

$$6 \cdot S_b \doteq 6 \cdot 70{,}84\,\text{cm}^2 \doteq 425\,\text{cm}^2.$$

Obsah pláště daného komolého jehlanu je přibližně $425\,\text{cm}^2$.

8. Vypočtěte obsah pláště pravidelného čtyřbokého komolého jehlanu, jehož podstavné hrany měří 12 cm a 6 cm, jestliže odchylka roviny boční stěny od roviny podstavy je 45°.

**9.* Vypočtěte povrch pravidelného čtyřbokého komolého jehlanu, víte-li, že jeho podstavné hrany mají délky 10 cm a 20 cm a boční hrana má od roviny podstavy odchylku 30°.

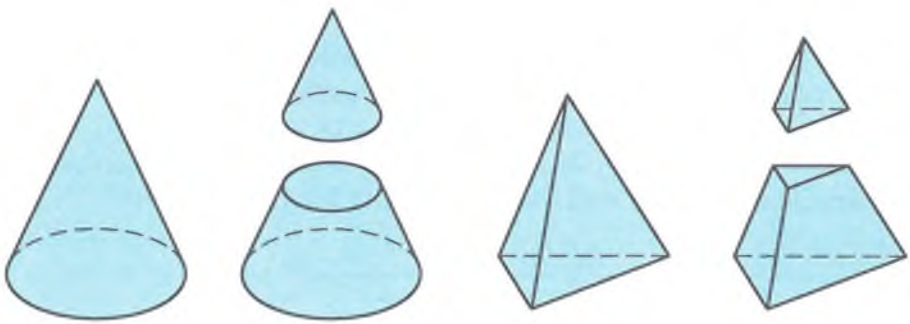
Jak vypočteme *objem* komolého jehlanu? ?

Již dříve jsme zjistili, že objemy kuželů a jehlanů jsou určeny stejným vzorcem

$$V = \tfrac{1}{3} \cdot S_p v,$$

kde S_p značí obsah podstavy tělesa a v jeho výšku.

Víme také, že komolé těleso (kužel i jehlan) vznikne tak, že od „nekomolého" tělesa oddělíme těleso doplňkové:



Proto nás nepřekvapí, že také vzorce pro objemy komolého kuželu i komolého jehlanu lze zapsat ve stejném tvaru. Vzorec pro objem komolého jehlanu nebudeme odvozovat. Místo toho upravíme již známý vzorec pro objem komolého kuželu

$$V = \frac{\pi v}{3} \cdot \left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right)$$

do tvaru, ve kterém místo poloměrů r_1 a r_2 budou vystupovat obsahy podstav $S_1 = \pi r_1^2$ a $S_2 = \pi r_2^2$:

$$V = \frac{\pi v}{3} \cdot \left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right) = \frac{v}{3} \cdot \left(\pi r_1^2 + \pi r_1 r_2 + \pi r_2^2\right) =$$
$$= \frac{v}{3} \cdot \left(S_1 + \sqrt{\pi r_1^2 \cdot \pi r_2^2} + S_2\right) = \frac{v}{3} \cdot \left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2\right)$$

Při úpravě vzorce jsme použili „trik" – člen $\pi r_1 r_2$ jsme zapsali jako druhou odmocninu z výrazu $\pi^2 r_1^2 r_2^2$, který je roven $\left(\pi r_1^2\right) \cdot \left(\pi r_2^2\right)$.

Zjistili jsme, že vzorec pro objem V komolého kuželu lze psát ve tvaru

$$V = \frac{v}{3} \cdot \left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2\right),$$

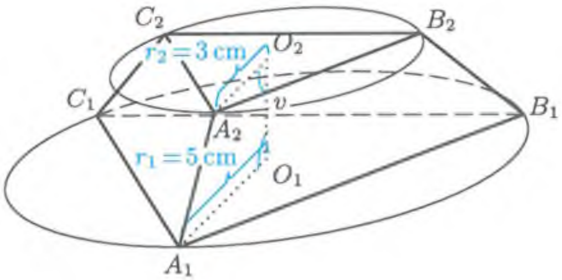
kde v značí výšku komolého kuželu a S_1, S_2 obsahy jeho podstav. Zapamatujte si, že stejný vzorec platí i pro objem komolého jehlanu.

Pro objem V komolého jehlanu s obsahy podstav S_1, S_2 a výškou v platí:

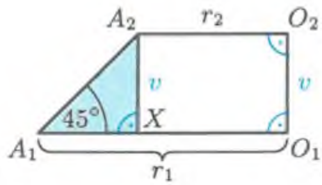
$$\boxed{V = \frac{v}{3} \cdot \left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2\right)}$$

Příklad 8. Kružnice opsané podstavám pravidelného trojbokého komolého jehlanu mají poloměry 5 cm a 3 cm. Odchylka boční hrany od roviny podstavy komolého jehlanu je 45°. Vypočtěte objem tohoto tělesa.

Řešení. Označme vrcholy komolého jehlanu a středy kružnic opsaných podstavám podle obrázku. K výpočtu objemu potřebujeme stanovit obsahy S_1, S_2 podstav a výšku v komolého jehlanu. Tu určíme nejdříve. Výška v je rovna délce ramena O_1O_2 pravoúhlého lichoběžníku $A_1O_1O_2A_2$, jehož základny A_1O_1 a A_2O_2 mají dané délky $r_1 = 5\,\text{cm}$ a $r_2 = 3\,\text{cm}$.



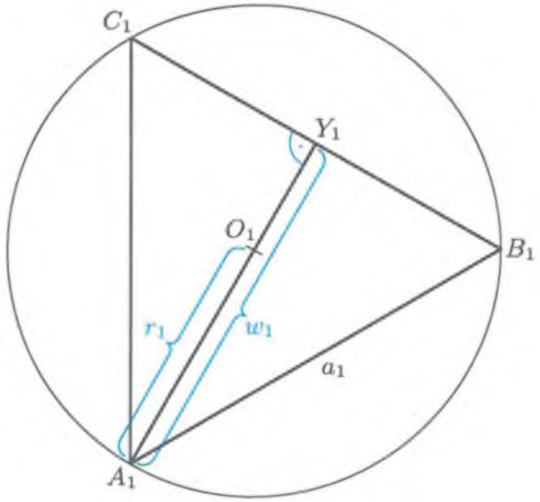
Kolmý průmět X bodu A_2 do roviny větší podstavy padne na úsečku A_1O_1, proto platí $|A_2X| = |O_2O_1| = v$. Velikost úhlu A_2A_1X je rovna dané odchylce 45° boční hrany A_1A_2 od roviny větší podstavy. Trojúhelník A_1XA_2 je proto pravoúhlý a rovnoramenný, tudíž platí



$$v = |A_2X| = |A_1X| = r_1 - r_2 = (5 - 3)\,\text{cm} = 2\,\text{cm}.$$

Nyní určíme obsah S_1 větší podstavy jako obsah rovnostranného trojúhelníku $A_1B_1C_1$ vepsaného do kružnice s poloměrem $r_1 = 5\,\text{cm}$. Pro jeho výšku $w_1 = |A_1Y_1|$ platí $w_1 = \frac{3}{2}r_1$ a z pravoúhlého trojúhelníku $A_1B_1Y_1$ zjistíme, že $a_1 = |A_1B_1| = \dfrac{w_1}{\sin 60°} = r_1 \cdot \sqrt{3}$. Odtud vychází:

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot a_1 w_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3r_1}{2} \cdot r_1\sqrt{3} = \frac{3r_1^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3 \cdot 5^2 \cdot \sqrt{3}}{4}\,\text{cm}^2 = \frac{75\sqrt{3}}{4}\,\text{cm}^2$$



Podobně se vypočítá obsah S_2 menší podstavy:

$$S_2 = \frac{3r_2^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3 \cdot 3^2 \cdot \sqrt{3}}{4}\,\mathrm{cm}^2 = \frac{27\sqrt{3}}{4}\,\mathrm{cm}^2$$

Pro objem V komolého jehlanu dostáváme:

$$V = \frac{v}{3} \cdot \left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2\right) =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{75\sqrt{3}}{4} + \sqrt{\frac{75\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{27\sqrt{3}}{4}} + \frac{27\sqrt{3}}{4}\right)\mathrm{cm}^3 =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{102\sqrt{3}}{4} + \frac{45\sqrt{3}}{4}\right)\mathrm{cm}^3 = \frac{147\sqrt{3}}{6}\,\mathrm{cm}^3 \doteq 42{,}4\,\mathrm{cm}^3$$

Objem daného komolého jehlanu je asi 42,4 cm^3.

10. Vypočtěte hmotnost skleněného těžítka tvaru pravidelného čtyřbokého komolého jehlanu o výšce 3 cm, jehož podstavami jsou čtverce o stranách délek 8 cm a 6 cm. Hustota skla, z něhož je těžítko vyrobeno, je asi 3 000 $\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$.

11. Vypočtěte objem pravidelného čtyřbokého komolého jehlanu, jsou-li délky jeho podstavných hran 20 cm a 15 cm a měří-li jeho boční hrana 12 cm.

CVIČENÍ 5

1. Komolý kužel má průměry podstav 24 cm a 6 cm. Vypočtěte délku jeho strany, je-li její odchylka od roviny podstavy

a) 60°, b) 30°, c) 15°.

2. Vypočtěte výšku komolého kuželu o straně délky 15 cm, jehož větší podstava má poloměr 12 cm, víte-li, že strana doplňkového kuželu má délku 5 cm.

3. Poloměry podstav komolého kuželu jsou 1 cm a 2 cm, výška tohoto komolého kuželu je 3 cm. Vypočtěte jeho

a) délku strany, b) obsah pláště, c) povrch.

4. Obsah pláště komolého kuželu je 267 cm^2, jeho strana měří 5 cm a rozdíl poloměrů podstav je 3 cm. Vypočtěte tyto poloměry.

5. Kužel, komolý kužel i válec z obrázku mají stejnou výšku 4 cm a stejný obsah podstavy 9π cm^2. Obsah menší podstavy komolého kuželu je π cm^2. V jakém poměru jsou povrchy těchto tří těles?

6. Vypočtěte objem komolého kuželu s výškou 1 dm a poloměry podstav 2 cm a 3 cm.

7. Výška komolého kuželu je 3 cm, poloměr jeho větší podstavy je 7 cm a odchylka jeho strany od roviny podstavy je 30°. Vypočtěte objem tohoto komolého kuželu.

■ **8.** Nejprve odhadněte a pak vypočtěte hmotnost korkové zátky tvaru komolého kuželu. Průměry podstav jsou 18 mm a 21 mm, výška zátky je 37 mm, hustota korku je asi 250 $\frac{kg}{m^3}$.

9. Brouzdaliště pro děti má tvar komolého kuželu, jehož podstavy mají průměry 4 m a 3,2 m. Hloubka brouzdaliště je 0,5 m. Kolik litrů barvy je třeba na natření jeho stěn a dna? Počítejte, že 1 litr barvy vystačí na natření 3 m^2 plochy.

10. Délky podstavných hran pravidelného šestibokého komolého jehlanu jsou 1 dm a 4 cm, výška tělesa je 10 cm. Vypočtěte délku boční hrany.

11. Pravidelný čtyřboký komolý jehlan má podstavné hrany délek 22 cm a 12 cm. Odchylka jeho boční hrany od roviny podstavy je 60°. Vypočtěte výšku tohoto komolého jehlanu a délku jeho boční hrany.

12. Vypočtěte obsah pláště pravidelného trojbokého komolého jehlanu, jehož podstavné hrany měří 20 cm a 8 cm a boční hrana měří 15 cm.

13. Vypočtěte povrch pravidelného čtyřbokého komolého jehlanu o výšce 24 cm, jehož podstavy mají obsahy 9 dm^2 a 1 dm^2.

14. Vypočtěte povrch pravidelného čtyřbokého komolého jehlanu, jehož boční stěna je čtyřúhelník o stranách s délkami 5 cm, 5 cm, 6 cm a 7 cm.

15. Vypočtěte povrch pravidelného šestibokého komolého jehlanu, jehož podstavné hrany mají délky 10 cm a 8 cm, je-li odchylka roviny boční stěny od roviny podstavy 30°.

16. Vypočtěte výšku pravidelného trojbokého komolého jehlanu, jehož podstavné hrany měří 9 cm a 4 cm, víte-li, že jeho objem je $103\sqrt{3}\,\text{cm}^3$.

17. Podstavami pravidelného komolého jehlanu jsou čtverce, jejichž strany mají délky 10 cm a 6 cm. Vypočtěte objem tohoto komolého jehlanu, je-li délka jeho boční hrany 8 cm.

18. Vypočtěte objem pravidelného šestibokého komolého jehlanu, jehož podstavné hrany mají délky 6 cm a 3 cm, je-li odchylka boční hrany od roviny podstavy 70°.

∗19. Do komolého kuželu s poloměry podstav r a $2r$ a výškou v je vepsán pravidelný čtyřboký komolý jehlan tak, že vrcholy jeho podstav leží na kružnicích, které omezují podstavy daného komolého kuželu. Vypočtěte poměr objemů obou těles.

7 KOULE

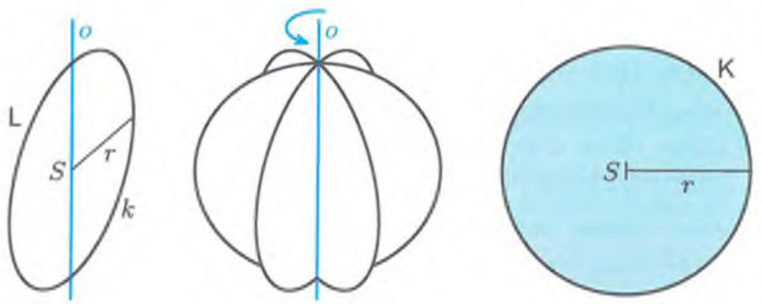
Poslední výkladovou kapitolu tohoto sešitu věnujeme tělesům, se kterými se často setkáváte v běžném životě. Jde o dokonale „oblá" a „pravidelná" tělesa, která se nazývají *koule*.

Vysvětlíme nejprve, jak tato geometrická tělesa vznikají a čím jsou určena, pak popíšeme možné vzájemné polohy koule a roviny. Nakonec se budeme zabývat výpočty objemů a povrchů koulí.

?

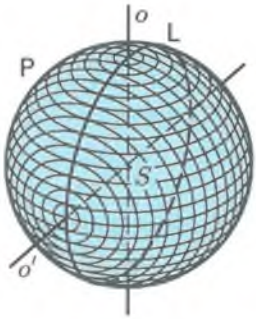
Jak vzniká koule z kruhu?

Na obrázku je znázorněn kruh L omezený kružnicí k se středem S a poloměrem r a přímka o, která prochází bodem S. Budeme-li kruhem L v prostoru otáčet kolem přímky o, vyplní jeho body těleso K zvané **koule**.



Koule K je určena středem S a poloměrem r otáčeného kruhu L. Bod S nazýváme *středem* koule, délku r *poloměrem* koule. Příslušnou kouli značíme $\mathsf{K}(S; r)$.

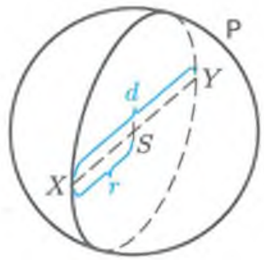
Koule K, jejíž vznik jsme popsali, je omezena „uzavřenou“ plochou P, která je všude stejně „oblá“, takže nemá žádnou hranu ani žádný vrchol či jinak význačný bod. Nejsou jimi ani průsečíky plochy P s osou o, kolem které jsme kruh L otáčeli. Stejná koule K a plocha P totiž vznikne, budeme-li kruh L otáčet kolem *kterékoliv* přímky o' procházející středem S.



Plocha P se nazývá **kulová plocha** se středem S a poloměrem r a označuje se $\mathsf{P}(S;r)$. Tuto plochu P vyplní všechny body otáčené kružnice $k(S;r)$, která omezuje kruh L.

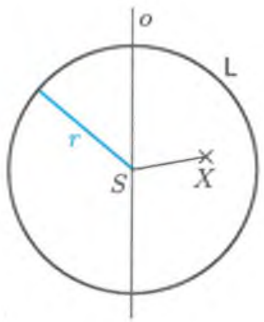
Poloměr kulové plochy $\mathsf{P}(S;r)$ (stejně jako poloměr koule K, kterou kulová plocha P omezuje) znamená nejen délku r každé úsečky SX, kde $X \in \mathsf{P}$, ale i úsečku SX samotnou.

Podobně má dva významy i termín *průměr*. Průměr kulové plochy P je jednak každá úsečka XY se středem S, jejíž krajní body X, Y leží na ploše P, jednak délka d této úsečky, tedy $d = |XY|$. Stejně tak se definuje i průměr koule, kterou kulová plocha omezuje.

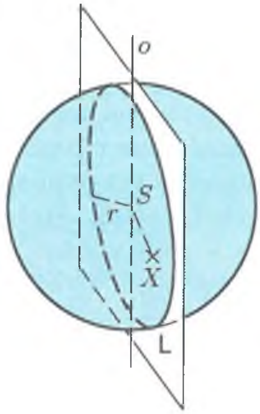


Je jasné, že pro délky d a r platí $d = 2r$.

Kouli i kulovou plochu můžeme popsat jako množiny bodů jistých vlastností. Všimněme si, že pro každý bod X původního kruhu L platí $|SX| \leqq r$. Protože při otáčení kruhu L se vzdálenosti bodů S a X nemění, platí nerovnost $|SX| \leqq r$ pro každý bod X koule K.



Platí i opačné tvrzení. Splňuje-li některý bod X prostoru nerovnost $|SX| \leqq r$, pak bod X v kouli $\mathsf{K}(S;r)$ leží. Pokud $X \in o$, je to zřejmé; v případě, kdy $X \notin o$, „natočíme" kruh L do roviny určené přímkou o a bodem X. Nerovnost $|SX| \leqq r$ pak znamená, že bod X je bodem takto „natočeného" kruhu L.



Podobně se zdůvodní, že kulová plocha $\mathsf{P}(S;r)$ je množinou všech takových bodů X v prostoru, které splňují rovnost $|SX| = r$.

Body X koule $\mathsf{K}(S;r)$, pro které platí ostrá nerovnost $|SX| < r$, se nazývají *vnitřní body* koule K. Jsou to všechny body koule K, které neleží na kulové ploše, jež kouli K omezuje.

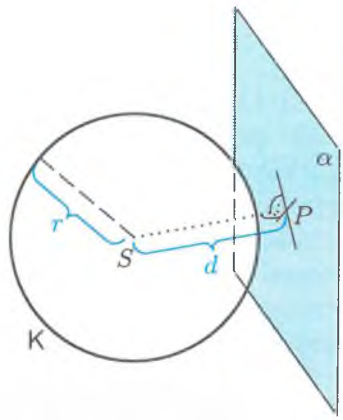
Koule se středem S a poloměrem r je množinou všech bodů v prostoru, jejichž vzdálenosti od bodu S jsou menší nebo rovny délce r. Kulová plocha se středem S a poloměrem r je množinou všech bodů v prostoru, jejichž vzdálenosti od bodu S jsou rovny délce r.

☐ 1. Vysvětlete, že každá koule vznikne otáčením půlkruhu kolem vhodné přímky. Které?

?

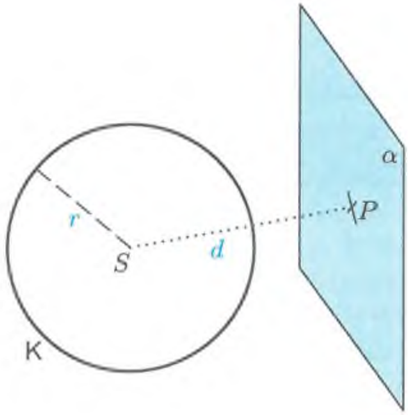
Jaká je vzájemná poloha koule a roviny?

Předpokládejme, že v prostoru je dána koule K se středem S a rovina α. Vysvětlíme, jak závisí vzájemná poloha koule K a roviny α na poloměru r koule K a na vzdálenosti d jejího středu S od roviny α, tedy délce d úsečky SP, kde P je kolmý průmět bodu S do roviny α.



Rozlišíme při tom čtyři případy:

- $d > r$



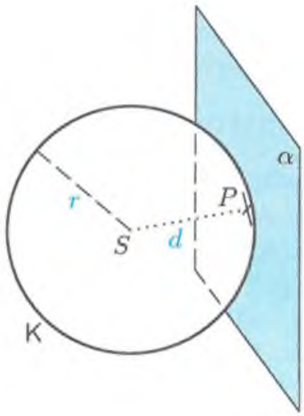
Protože pro každý bod X roviny α platí

$$|SX| \geqq |SP| = d > r,$$

má libovolný bod X roviny α od středu S koule K vzdálenost větší než r, proto v kouli K neleží.

Koule K a rovina α nemají žádný společný bod ($\mathsf{K} \cap \alpha = \emptyset$).

- $d = r$



V tomto případě pro každý bod X roviny α platí

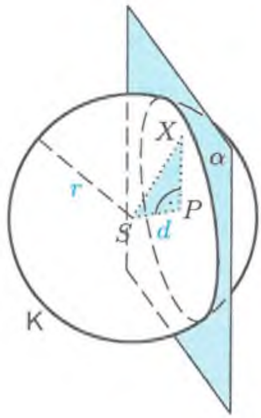
$$|SX| \geqq |SP| = d = r,$$

přitom rovnost nastane, právě když $X = P$.

Koule K má proto s rovinou α společný právě jeden bod, totiž bod P ($\mathsf{K} \cap \alpha = \{P\}$).

Říkáme, že rovina α se koule K *dotýká* v bodě P (tzv. *bodě dotyku*). Rovina α se nazývá *tečná rovina* koule K.

- $0 < d < r$



Z nerovnosti $|SP| = d < r$ plyne, že bod P je vnitřním bodem koule K. Zjistíme, které další body X roviny α ($X \neq P$) patří kouli K. Jsou to právě ty body, pro které platí

$$|SX| \leqq r, \quad \text{tzn.} \quad |SX|^2 \leqq r^2.$$

Z pravoúhlého trojúhelníku SPX plyne

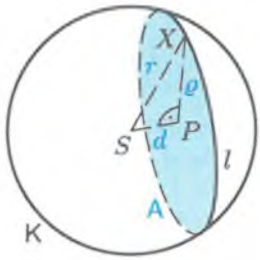
$$|SX|^2 = |SP|^2 + |PX|^2.$$

Dosadíme sem $|SP| = d$ a nerovnici $d^2 + |PX|^2 \leqq r^2$ vyřešíme:

$$|PX|^2 \leqq r^2 - d^2, \quad \text{tzn.} \quad |PX| \leqq \sqrt{r^2 - d^2}$$

Poslední nerovnost splňují právě ty body X, $X \neq P$, roviny α, které leží v kruhu se středem P a poloměrem $\varrho = \sqrt{r^2 - d^2}$. Splňuje ji i bod $X = P$.

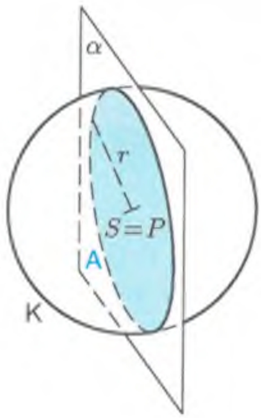
Zjistili jsme, že průnikem koule K a roviny α je kruh A se středem v bodě P a poloměrem $\varrho = \sqrt{r^2 - d^2}$. Všimněme si, že platí $0 < \varrho < r$. Kruh A je omezen kružnicí l tvořenou právě těmi body X roviny α, pro které platí $|SX| = r$. Kružnice l je proto průnikem roviny α a kulové plochy omezující kouli K, říkáme jí *vedlejší kružnice* koule K.



- $d = 0$

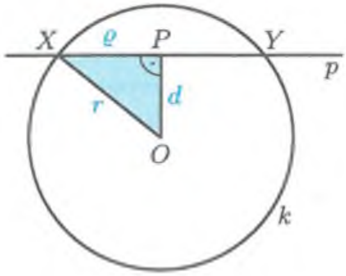
Podmínka $d=0$ znamená, že $S=P$, a tak rovina α prochází středem S koule K. Průnikem koule K a roviny α je proto ten kruh A v rovině α, který má střed v bodě S a poloměr r. Kružnice l, která tento kruh omezuje, se nazývá *hlavní kružnice* koule K.

Rovina α rozděluje kouli K na dvě shodná tělesa, kterým říkáme *polokoule*.



> Průnikem roviny α a koule K$(S; r)$ je buď prázdná množina, nebo jednoprvková množina, nebo kruh s poloměrem ϱ, pro který platí $\varrho \leqq r$. Případ $\varrho = r$ nastane jedině tehdy, prochází-li rovina α středem S koule K.

Příklad 1. Určete obsah kruhu, který je průnikem koule $\mathsf{K}(O; 8\,\mathrm{cm})$ s rovinou α, je-li vzdálenost bodu O od roviny α rovna 5 cm.



Řešení. Označme P kolmý průmět bodu O do roviny α a zachyťme na obrázku řez koule libovolnou rovinou obsahující přímku OP. V tomto řezu se koule K zobrazí jako kruh omezený kružnicí k se středem O a poloměrem $r = 8\,\mathrm{cm}$, rovina α jako přímka p procházející bodem P kolmá k úsečce OP, která má délku $d = 5\,\mathrm{cm}$. Označme X, Y průsečíky přímky p a kružnice k. Úsečka XY je průměrem toho kruhu se středem P, jehož obsah S máme vypočítat. Poloměr ϱ tohoto kruhu je proto roven délce úsečky PX.

Pro hledaný obsah S platí $S = \pi\varrho^2$. Druhou mocninu poloměru ϱ určíme z pravoúhlého trojúhelníku OPX:

$$\varrho^2 = r^2 - d^2 = (8^2 - 5^2)\,\mathrm{cm}^2 = (64 - 25)\,\mathrm{cm}^2 = 39\,\mathrm{cm}^2$$

Proto platí:

$$S = \pi\varrho^2 = (\pi \cdot 39)\,\mathrm{cm}^2 \doteq 122{,}5\,\mathrm{cm}^2$$

Obsah uvažovaného kruhu je asi $122{,}5\,\mathrm{cm}^2$.

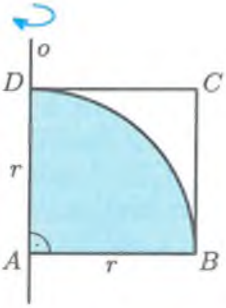
2. Určete poloměr kulové plochy se středem S, na níž rovina α vytíná kružnici s poloměrem 3 cm, víte-li, že bod S má od roviny α vzdálenost 9 cm.

3. Rovina β protíná kouli $\mathsf{K}(S; 10\,\mathrm{cm})$ v kružnici l o poloměru 5 cm. Určete vzdálenost bodu S od roviny β.

Ve zbývající části této kapitoly se budeme zabývat výpočty *objemů* a *povrchů* koulí. Příslušné dva vzorce mají jednoduchý a snadno zapamatovatelný tvar, avšak není snadné je odvodit. Naše dosavadní znalosti k tomu nestačí, s přesným zdůvodněním obou vzorců se seznámíte až ve vyšších ročnících gymnázia.

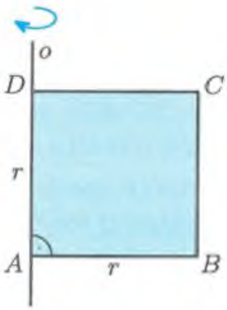
? Jak vypočteme *objem* koule?

Předpokládejme, že je dán čtverec $ABCD$ o straně r. Sestrojme v něm čtvrtkruh omezený úsečkami AB, AD a obloukem BD. Budeme-li tímto čtvrtkruhem otáčet v prostoru kolem osy o procházející body A a D, vznikne polokoule P, jejíž objem označíme V_{P}. Hodnotu V_{P} nyní odhadneme shora i zdola.



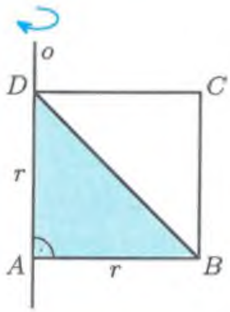
Otáčením celého čtverce $ABCD$ kolem osy o vznikne válec V s poloměrem podstavy $|AB| = r$ a výškou $|AD| = r$. Pro jeho objem V_{V} platí

$$V_{\mathsf{V}} = \pi r^2 \cdot r = \pi r^3.$$



Sestrojme nyní ve čtverci $ABCD$ úhlopříčku BD. Otáčením pravoúhlého trojúhelníku ABD kolem osy o vznikne kužel K s poloměrem podstavy $|AB| = r$, výškou $|AD| = r$ a objemem

$$V_{\mathsf{K}} = \tfrac{1}{3}\pi r^2 \cdot r = \tfrac{1}{3}\pi r^3.$$



Protože polokouli P je kužel K „vepsán“ a válec V „opsán“, platí pro objemy V_{P}, V_{K} a V_{V} nerovnosti $V_{\mathsf{K}} < V_{\mathsf{P}} < V_{\mathsf{V}}$, neboli

$$\tfrac{1}{3}\pi r^3 < V_{\mathsf{P}} < \pi r^3.$$

Je zřejmé, že objem V celé koule s poloměrem r je roven dvojnásobku objemu polokoule P, tedy $V = 2V_{\mathsf{P}}$. Vynásobíme-li poslední nerovnosti dvěma, dostáváme pro objem V koule odhady

$$\tfrac{2}{3}\pi r^3 < V < 2\pi r^3.$$

Bez důkazu uveďme, že „chyby“ obou odhadů jsou stejné, neboť objem V je aritmetickým průměrem obou nalezených hodnot:

$$V = \left(\tfrac{2}{3}\pi r^3 + 2\pi r^3\right) : 2 = \tfrac{4}{3}\pi r^3$$

Objem V koule s poloměrem r je tudíž určen vzorcem

$$\boxed{V = \tfrac{4}{3}\pi r^3 .}$$

Příklad 2. Vypočtěte průměrnou hustotu Země. Považujte při tom Zemi za kouli s poloměrem $\left(6{,}4 \cdot 10^6\right)$m a hmotností $\left(5{,}98 \cdot 10^{24}\right)$ kg.

Řešení. Průměrnou hustotu ϱ Země vypočteme ze vzorce $\varrho = \dfrac{m}{V}$, kde m je hmotnost Země a V její objem, který určíme z daného poloměru r Země:

$$V = \tfrac{4}{3}\pi r^3 = \tfrac{4}{3}\pi \cdot \left(6{,}4 \cdot 10^6\right)^3 \mathrm{m}^3 \doteq \left(1\,098 \cdot 10^{18}\right) \mathrm{m}^3 = \left(1{,}098 \cdot 10^{21}\right) \mathrm{m}^3$$

Pro hustotu ϱ Země platí:

$$\varrho = \frac{m}{V} \doteq \frac{5{,}98 \cdot 10^{24}}{1{,}098 \cdot 10^{21}} \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \doteq \left(5{,}45 \cdot 10^3\right) \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} = 5\,450 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$$

Průměrná hustota Země je asi $5\,450\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$.

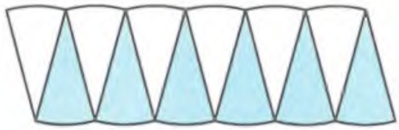
4. Kolik centimetrů měří poloměr koule, která má objem $1\,\mathrm{m}^3$?

5. Vypočtěte objem koule, jejíž hlavní kružnice má délku 8π cm.

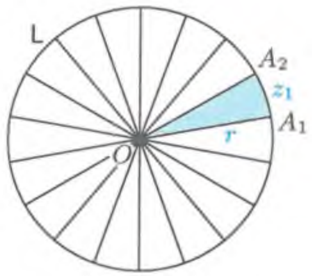
Jak vypočteme *povrch* koule?

Termín povrch koule má, stejně jako u ostatních těles, dva významy. Znamená jednak kulovou plochu, která kouli omezuje, jednak její obsah. Kulovou plochu však (na rozdíl od povrchů mnoha jiných těles) nemůžeme „rozvinout“ do roviny; síť koule tudíž neexistuje. Proto není ani snadné vysvětlit, co vlastně obsah kulové plochy znamená. Představme si alespoň, že celá kulová plocha je rozdělena na velmi malé „kousky“, které jsou již „přibližně“ rovinnými útvary.

Hlavní myšlenku, kterou použijeme při odvození vzorce pro povrch S koule (S je nyní obsah omezující kulové plochy), vysvětlíme nejprve v rovinné situaci. Odvodíme znovu vzorec pro obsah S_{L} kruhu L se středem O a poloměrem r, a to trochu jinak, než jsme postupovali v sešitě *Kruhy a válce*. Tehdy jsme kruh rozdělili na velký počet kruhových výsečí, z nichž jsme sestavili „křivočarý obdélník“ a určili jeho obsah.



Také nyní rozdělíme kruh L na velký počet n shodných kruhových výsečí. Na obrázku je jedna z nich vybarvena. Budeme ji považovat za „rovnoramenný trojúhelník“ s rameny OA_1, OA_2 délky r a s „oblou“ základnou A_1A_2 délky z_1. Čím bude počet n výsečí větší, tím více se bude výška „trojúhelníku“ A_1A_2O „blížit“ délce r a jeho obsah se bude „neomezeně přibližovat“ k hodnotě $\frac{1}{2}z_1r$.



Sečteme-li obsahy všech takových „trojúhelníků“, dostaneme obsah S_{L} kruhu L:

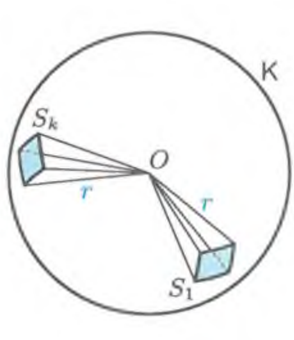
$$S_{\mathsf{L}} = \tfrac{1}{2}z_1r + \tfrac{1}{2}z_2r + \ldots + \tfrac{1}{2}z_nr = \tfrac{1}{2}r \cdot (z_1 + z_2 + \ldots + z_n)$$

Součet $z_1 + z_2 + \ldots + z_n$ délek základen všech „trojúhelníků“ je zřejmě roven obvodu kruhu L, tj. délce $2\pi r$. Platí tedy:

$$S_{\mathsf{L}} = \tfrac{1}{2}r \cdot (z_1 + z_2 + \ldots + z_n) = \tfrac{1}{2}r \cdot 2\pi r = \pi r^2$$

Podobným způsobem odvodíme vzorec pro povrch S koule K s poloměrem r (na základě toho, že již známe vzorec $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ pro její objem V).

Představme si, že kouli $\mathsf{K}(O;r)$ rozdělíme na velký počet n shodných pravidelných čtyřbokých „jehlanů“. Střed O bude jejich společným hlavním vrcholem a jejich malé, mírně zakřivené „čtvercové“ podstavy (s obsahy S_1, S_2, …, S_n) zaplní celý povrch koule, takže $S = S_1 + S_2 + \ldots + S_n$. Čím bude



počet n „jehlanů“ větší, tím víc se bude výška každého z nich „blížit“ poloměru r koule K, a tak se objem k-tého „jehlanu“ bude „neomezeně přibližovat“ k $\frac{1}{3}S_k \cdot r$. Protože objem V celé koule je součtem objemů všech uvažovaných „jehlanů“, platí:

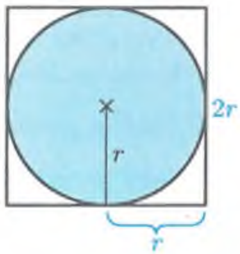
$$\tfrac{4}{3}\pi r^3 = \tfrac{1}{3}S_1 r + \tfrac{1}{3}S_2 r + \ldots + \tfrac{1}{3}S_n r = \tfrac{1}{3}r \cdot (S_1 + S_2 + \ldots + S_n) = \tfrac{1}{3}r \cdot S$$

Z rovnosti $\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{3}r \cdot S$ vychází vzorec pro povrch S koule s poloměrem r:

$$\boxed{S = 4\pi r^2}$$

Příklad 3. Koule K je vepsána do válce V tak, že se dotýká obou jeho podstav i jeho pláště. Vypočtěte poměr povrchů obou těles.

Řešení. Označme r poloměr koule a nakresleme osový řez válce. Tím bude čtverec, neboť vepsaná koule K se zobrazí jako kruh o poloměru r, který se dotýká všech stran tohoto pravoúhelníku. Válec V má tedy poloměr podstavy r a výšku $2r$, pro jeho povrch S_V platí:



$$S_V = 2\pi r(r + 2r) = 2\pi r \cdot 3r = 6\pi r^2$$

Protože povrch S_K koule je roven $4\pi r^2$, dostáváme pro poměr povrchů S_K a S_V rovnost

$$S_K : S_V = (4\pi r^2) : (6\pi r^2) = 4 : 6 = 2 : 3.$$

Poměr povrchů koule a opsaného válce je $2 : 3$.

6. Vypočtěte povrch koule, jejíž průměr je 10 cm.
7. Kolikrát je větší povrch koule než obsah kruhu omezeného hlavní kružnicí této koule?
8. Určete poloměr koule, která má povrch $36\pi\,\mathrm{cm}^2$.
9. Do koule o poloměru r je vepsán válec tak, že kružnice omezující podstavy válce leží na povrchu koule. Osovým řezem válce je čtverec. Vypočtěte poměr povrchů obou těles.

CVIČENÍ 6

1. Vypočtěte délku kružnice, kterou na kulové ploše o poloměru 13 cm vytíná rovina vzdálená 5 cm od středu kulové plochy.

2. Určete poloměr koule, víte-li, že rovina, od níž má střed koule vzdálenost 6 cm, protíná kouli v kruhu o obsahu $64\pi \mathrm{cm}^2$.

3. Rovnoběžné roviny α a β protínají kouli o poloměru 10 cm v kruzích, které mají obsahy $51\pi\,\mathrm{cm}^2$ a $96\pi\,\mathrm{cm}^2$. Určete vzdálenost rovin α a β.

4. Vypočtěte objem a povrch koule, je-li
a) poloměr koule 5 cm,
b) průměr koule 30 cm,
c) obsah kruhu omezeného hlavní kružnicí $169\pi\,\mathrm{cm}^2$.

5. Vypočtěte průměr koule, znáte-li
a) její objem $0{,}036\pi\,\mathrm{m}^3$, b) její povrch $9\pi\,\mathrm{dm}^2$.

6. Vypočtěte objem a povrch koule, víte-li, že rovina α, od níž má střed koule vzdálenost 8 cm, protíná kouli v kruhu o průměru 12 cm.

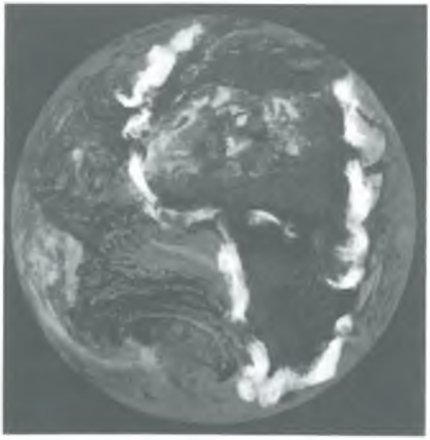
7. Jaký je povrch koule, která má objem $972\pi\,\mathrm{cm}^3$?

8. Jaký je objem koule, která má povrch $2{,}56\pi\,\mathrm{m}^2$?

9. Koule je vepsána do válce tak, že se dotýká obou jeho podstav i pláště. Vypočtěte poměr objemů obou těles.

10. Do koule o poloměru r je vepsán válec tak, že kružnice omezující podstavy válce leží na povrchu koule. Osovým řezem válce je čtverec. Vypočtěte poměr objemů obou těles.

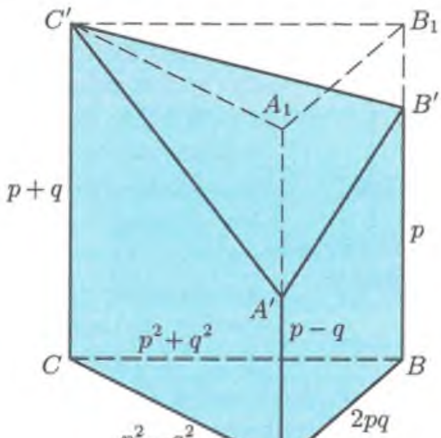
■ **11.** Kolik km^2 zaujímá na Zemi pevnina, jestliže oceán pokrývá 75 % zemského povrchu? (Považujte Zemi za kouli, která má poloměr 6 400 km.)



8 ÚLOHY Z MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

Tato kapitola i následující cvičení jsou věnovány obtížnějším úlohám, které byly zadány v minulých ročnících *matematické olympiády*. Tak jako v předchozích sešitech jsou všechny řešené úlohy v této kapitole opatřeny odkazy na ročník soutěže. Zopakujme, že například zápis „21. r., Z–I–3“ znamená, že úloha byla zadána ve 21. ročníku v kategorii Z v I. (tzn. školním) kole jako úloha číslo 3. Tyto odkazy vám pomohou srovnat vlastní řešení nejen s tím, které uvádíme v této učebnici, ale také s autorským řešením, které můžete najít v příslušné *ročence* matematické olympiády.

Úloha 1 (21. r., Z–I–3)
Jsou dána čísla p, q $(p > q > 0)$. Vypočtěte objem tělesa $ABCA'B'C'$ ohraničeného trojúhelníkem ABC se stranami o délkách $|BC| = p^2 + q^2$, $|CA| = p^2 - q^2$, $|AB| = 2pq$, dále trojúhelníkem $A'B'C'$ a lichoběžníkovými stěnami $ABB'A'$, $BCC'B'$, $CAA'C'$, které jsou kolmé k rovině ABC a mají základny o délkách $|AA'| = p - q$, $|BB'| = p$, $|CC'| = p + q$.



Řešení
Protože $p + q > p > p - q$, můžeme si vznik tělesa $ABCA'B'C'$ představit tak, že od trojbokého hranolu $ABCA_1B_1C'$ odřízneme rovinou $C'A'B'$ čtyřboký jehlan $A'B'B_1A_1C'$.

Jestliže objem hranolu $ABCA_1B_1C'$ označíme V_1 a objem jehlanu $A'B'B_1A_1C'$ označíme V_2, potom pro objem V tělesa $ABCA'B'C'$ platí

$$V = V_1 - V_2.$$

Určeme nyní objemy V_1 a V_2. Všimněme si, že platí

$$\left(p^2+q^2\right)^2=\left(p^2-q^2\right)^2+(2pq)^2,$$

tj. $|BC|^2=|CA|^2+|AB|^2$, proto podstavou hranolu $ABCA_1B_1C'$ je pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou BC, výška tohoto hranolu je $|CC'|=p+q$.

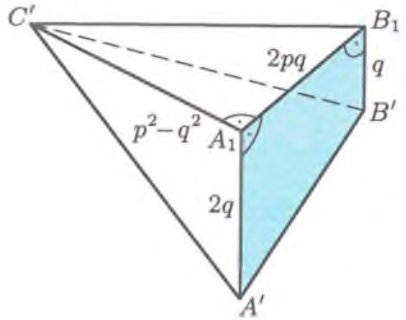
Pro obsah S_1 podstavy hranolu platí

$$S_1=\tfrac{1}{2}\cdot|AB|\cdot|CA|=\tfrac{1}{2}\cdot 2pq\cdot\left(p^2-q^2\right)=pq\cdot\left(p^2-q^2\right),$$

takže

$$V_1=S_1\cdot|CC'|=pq\cdot\left(p^2-q^2\right)\cdot(p+q).$$

Podstavou jehlanu $A'B'B_1A_1C'$ je pravoúhlý lichoběžník $A'B'B_1A_1$ se základnami



$$|A'A_1|=(p+q)-(p-q)=2q,$$
$$|B'B_1|=(p+q)-p=q$$

a výškou

$$|A_1B_1|=|AB|=2pq$$

(takže jeho obsah S_2 snadno vypočteme); výška tohoto jehlanu je

$$|A_1C'|=|AC|=p^2-q^2.$$

Platí tedy:

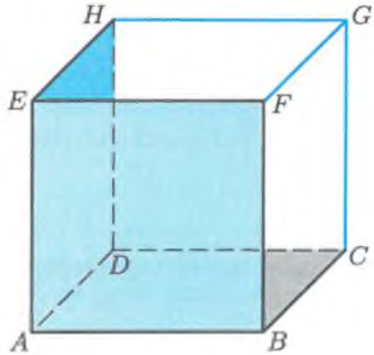
$$S_2=\tfrac{1}{2}\cdot\left(|A'A_1|+|B'B_1|\right)\cdot|A_1B_1|=\tfrac{1}{2}\cdot(2q+q)\cdot 2pq=3pq^2$$
$$V_2=\tfrac{1}{3}\cdot S_2\cdot|A_1C'|=\tfrac{1}{3}\cdot 3pq^2\cdot\left(p^2-q^2\right)=pq^2\cdot\left(p^2-q^2\right)$$

Pro objem V tělesa $ABCA'B'C'$ vychází:

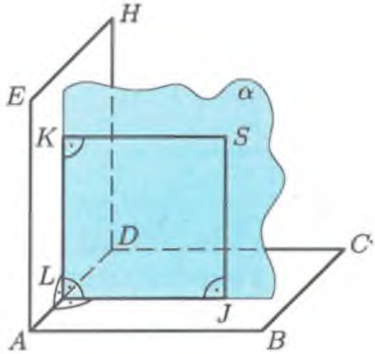
$$V=V_1-V_2=pq\cdot\left(p^2-q^2\right)\cdot(p+q)-pq^2\cdot\left(p^2-q^2\right)=$$
$$=pq\cdot\left(p^2-q^2\right)(p+q-q)=p^2q\cdot\left(p^2-q^2\right)$$

Objem tělesa $ABCA'B'C'$ je $p^2q\cdot(p^2-q^2)$.

Úloha 2 (35. r., C–I–5)
Uvnitř krychle určete středy všech kulových ploch, které se dotýkají jejích tří sousedních stěn se společným vrcholem a tří sousedních hran krychle, které v těchto stěnách neleží.

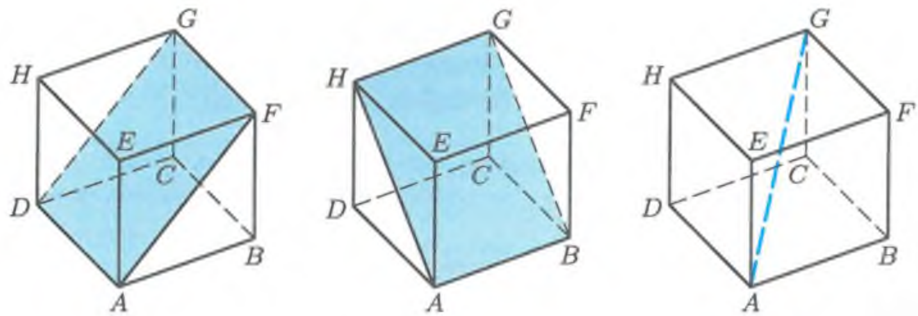


Řešení
Označme danou krychli $ABCDEFGH$. Hledejme střed M koule K, která se dotýká stěn krychle, jež se „stýkají“ ve vrcholu A, tzn. stěn $ABCD$, $ADHE$ a $ABFE$, a hran krychle, jež vycházejí z vrcholu G, tzn. hran GC, GF a GH.

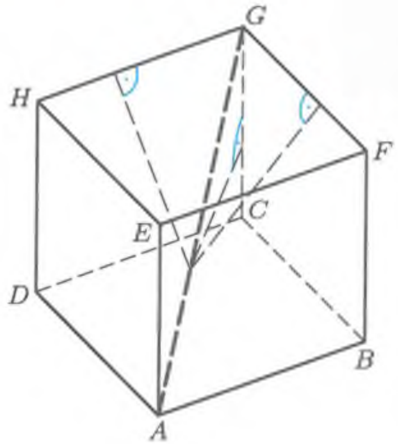


Zjistíme nejprve, kde leží střed S libovolné koule, která se dotýká stěn $ABCD$ a $ADHE$. Vedeme-li bodem S rovinu α kolmou k přímce AD, pak v této rovině bude ležet jak kolmý průmět J bodu S do stěny $ABCD$, tak i kolmý průmět K bodu S do stěny $ADHE$, což jsou body, ve kterých se uvažovaná koule příslušných stěn dotýká, takže platí $|KS| = |JS|$. Označíme-li ještě L průsečík roviny α s přímkou AD, zjistíme, že $KLJS$ je pravoúhelník, jehož sousední strany KS a JS jsou shodné, jde tedy o čtverec. Podle přímek LK, LS a LJ vidíme, že bod S leží v rovině, která obsahuje přímku AD, protíná danou krychli a má stejnou odchylku 45° od rovin stěn $ABCD$ a $ADHE$. Protože v této rovině leží přímky AF a GD, je bod S bodem obdélníku $AFGD$.

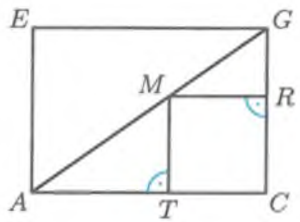
Podobně se ukáže, že středy koulí, které se dotýkají stěn $ABCD$ a $ABFE$, jsou body obdélníku $ABGH$. Průnikem obdélníků $AFGD$ a $ABGH$ je úsečka AG. Proto střed M koule K, který hledáme, je vnitřním bodem úsečky AG. Z úvah o čtverci $KLJS$ plyne, že každý bod úsečky AG má nejen stejnou vzdálenost r od stěn $ABCD$, $ABFE$ a $ADHE$, ale i stejnou vzdálenost $r \cdot \sqrt{2}$ od hran AB, AD a AE. Stejné tvrzení o bodech úsečky AG platí i ve vztahu ke stěnám a hranám krychle, které se „stýkají“ ve vrcholu G.



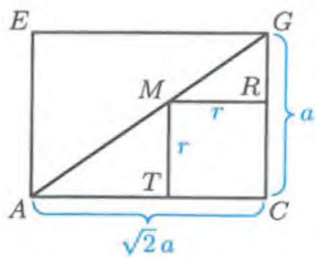
Jak jsme uvedli v poslední větě, má každý vnitřní bod S úsečky AG tu vlastnost, že jeho vzdálenosti od přímek GC, GF a GH jsou stejné. Dotýká-li se proto koule se středem S hrany GC, dotýká se i hran GF a GH.



Shrňme, co jsme dosud zjistili. Hledaný střed M koule K je ten bod úsečky AG, který má stejnou vzdálenost od roviny ABC jako od přímky CG. Protože kolmým průmětem úsečky AG do roviny ABC je stěnová úhlopříčka AC, bude na ní ležet bod T dotyku koule K a roviny ABC. Označme ještě R bod dotyku koule K a hrany GC.



Nyní využijeme toho, že úsečky MT a MR mají stejnou délku (rovnou poloměru r koule K). Označíme-li $|AB| = a$, platí $|AC| = \sqrt{2}\,a$ a z podobnosti trojúhelníků GMR a GAC vyplývá



$$\frac{|GR|}{|MR|} = \frac{|GC|}{|AC|} = \frac{a}{\sqrt{2}\,a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

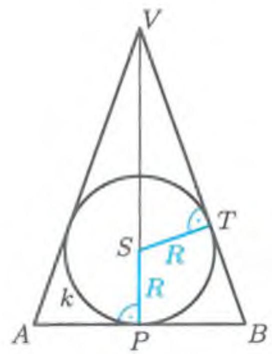
Z podobnosti trojúhelníků GMR a MAT tudíž vychází

$$\frac{|GM|}{|MA|} = \frac{|GR|}{|MT|} = \frac{|GR|}{|MR|} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Bod M tedy dělí úhlopříčku AG v poměru $\sqrt{2} : 1$. Ve stejném poměru dělí úsečku AG i bod M' ($M \neq M'$), který je středem koule, která se dotýká stěn krychle, které se „stýkají" ve vrcholu G, a hran krychle, jež vycházejí z bodu A. Pro danou krychli tedy existuje osm koulí požadovaných vlastností; jejich středy leží na tělesových úhlopříčkách krychle a každý z nich dělí příslušnou úhlopříčku v poměru $\sqrt{2} : 1$.

Úloha 3 (34. r., C–S–3a)
Vypočtěte poměr objemů rotačního kuželu a koule jemu vepsané, jestliže je výška kuželu dvakrát větší než průměr koule.

Řešení
Označme R poloměr zmíněné koule. Pro výšku v opsaného kuželu podle zadání platí $v = 4R$. Abychom vypočetli poměr objemů obou těles, vyjádříme nejprve, jak na poloměru R koule závisí poloměr r podstavy kuželu. Osovým řezem kuželu je rovnoramenný trojúhelník ABV se základnou AB délky $2r$. V tomto řezu se vepsaná koule zobrazí jako kružnice $k(S; R)$ vepsaná trojúhelníku ABV. Označme ještě P patu výšky kuželu ($|VP| = v = 4R$) a T bod dotyku kružnice k se stranou VB.



Poloměr r zjistíme z podobných pravoúhlých trojúhelníků VST a VBP, které mají společný vnitřní úhel při vrcholu V:

$$\frac{|PB|}{|PV|} = \frac{|ST|}{|VT|}, \quad \text{tzn.} \quad |PB| = \frac{|ST| \cdot |PV|}{|VT|} = \frac{R \cdot 4R}{|VT|} = \frac{4R^2}{|VT|}$$

Délku $|VT|$ určíme z pravoúhlého trojúhelníku SVT, v němž známe délku R odvěsny ST a snadno určíme i délku přepony SV:

$$|SV| = |VP| - |SP| = 4R - R = 3R$$

Podle Pythagorovy věty platí

$$|VT| = \sqrt{|SV|^2 - |ST|^2} = \sqrt{9R^2 - R^2} = \sqrt{8R^2} = 2R \cdot \sqrt{2},$$

odtud dostáváme

$$r = |PB| = \frac{4R^2}{|VT|} = \frac{4R^2}{2R \cdot \sqrt{2}} = R \cdot \sqrt{2}.$$

Pro objem V_1 kuželu vychází:

$$V_1 = \tfrac{1}{3} \cdot \pi r^2 v = \tfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(R \cdot \sqrt{2}\right)^2 \cdot 4R = \tfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2R^2 \cdot 4R = \tfrac{8}{3}\pi R^3$$

Protože pro objem V_2 vepsané koule platí

$$V_2 = \tfrac{4}{3}\pi R^3,$$

je hledaný poměr roven

$$V_1 : V_2 = \left(\tfrac{8}{3}\pi R^3\right) : \left(\tfrac{4}{3}\pi R^3\right) = 2 : 1.$$

Daný rotační kužel má dvojnásobný objem než jemu vepsaná koule.

CVIČENÍ 7

1. (29. r., Z–I–2)
Je dán trojboký jehlan $ABCV$. Rovina protíná jeho hrany AB, BC, CV a neprochází žádným z bodů A, B, C, V. Které hrany jehlanu rovina ještě protíná?

2. (34. r., C–I–4)
Od pravidelného čtyřstěnu $ABCD$ o hraně $|AB| = 6\,\text{cm}$ oddělíme pravidelný čtyřstěn $AB'C'D'$ o hraně $|AB'| = 2\,\text{cm}$, kde $B' \in AB$, $C' \in AC$, $D' \in AD$. Vypočtěte povrch tělesa $BCDB'C'D'$. Oč je tento povrch menší než povrch původního čtyřstěnu $ABCD$?

3. (34. r., C–S–3b)
Podstavou čtyřbokého jehlanu je kosočtverec o straně a, bočními stěnami jsou čtyři shodné trojúhelníky o stranách a, b, c. Vypočtěte jeho objem, je-li $a = 5\,\text{cm}$, $b = 6\,\text{cm}$, $c = 7\,\text{cm}$.

4. (12. r., D–I–3)
Kvádr $ABCDA'B'C'D'$ má rozměry $|AB| = a$, $|AD| = b$, $|AA'| = c$. Rovnoběžné roviny BDA' a $CB'D'$ oddělují od daného kvádru dva čtyřstěny $ABDA'$ a $C'CB'D'$. Vyjádřete objem zbylého tělesa pomocí a, b, c. Narýsujte jeho síť pro $a = 4\,\text{cm}$, $b = 3\,\text{cm}$, $c = 5\,\text{cm}$.

5. (13. r., C–II–4)
Kvádr $ABCDA'B'C'D'$ o rozměrech $|AB| = a$, $|AD| = b$, $|AA'| = c$ je zkosen dvěma rovinnými řezy. Na hraně BB' jsou sestrojeny body M, N tak, že $|BM| = |MN| = |NB'| = \frac{1}{3}c$. Zkosení je provedeno rovinami $C'D'M$ a $A'D'N$. Načrtněte ve volném rovnoběžném promítání obraz výsledného tělesa a vypočtěte, jakou částí objemu daného kvádru je objem tohoto tělesa.

6. (35. r., C–S–2)
Vypočtěte poloměr kulové plochy, která leží v krychli o hraně 10 cm, dotýká se tří sousedních stěn této krychle a prochází jejím středem.

7. (32. r., Z–I–6)
Je dána krychle $ABCDA'B'C'D'$ o hraně délky 10 cm. Kulová plocha protíná stěnu $BCC'B'$ v kružnici vepsané čtverci $BCC'B'$ a prochází středem F protější stěny $ADD'A'$. Určete střed a poloměr této kulové plochy.

8. (33. r., C–I–4)
Je dána krychle $ABCDA'B'C'D'$ o hraně délky a. Kulová plocha protíná stěnu $BCC'B'$ v kružnici vepsané čtverci $BCC'B'$ a prochází

a) bodem A,

b) středem úsečky AB.

V obou případech určete střed a poloměr kulové plochy.

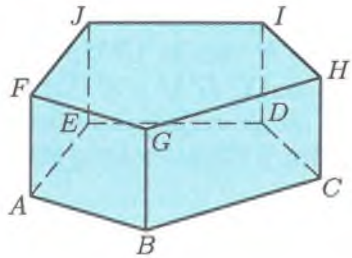
9. (33. r., C–S–2)
Je dána krychle $ABCDA'B'C'D'$ o hraně délky a. Kulová plocha protíná rovinu BCC' v kružnici opsané čtverci $BCC'B'$ a prochází středem M hrany AA'. Určete střed a poloměr této kulové plochy.

10. (34. r., C–II–3b)
Mezi všemi kužely opsanými kouli o poloměru $r = 1$ cm najděte ty, jejichž objem je dvakrát větší než objem dané koule. Které kužely opsané této kouli mají objem menší, než je dvojnásobek objemu koule?

9 SOUHRNNÁ CVIČENÍ

□ **1.** Na obrázku je pětiboký hranol $ABCDEFGHIJ$. Vyjmenujte aspoň dvě dvojice jeho

a) rovnoběžných hran,
b) různoběžných hran,
c) mimoběžných hran.



2. Krychli $ABCDEFGH$ znázorněte ve volném rovnoběžném promítání v pravém podhledu. Pomocí obrázku pak rozhodněte o vzájemné poloze

a) přímky AG a roviny HEF,
b) přímky AH a roviny FBC,
c) přímky CG a roviny EAD,
d) roviny ABD a roviny HFG,
e) roviny ADH a roviny EFB,
f) roviny HGD a roviny CAE.

3. Načrtněte libovolný kvádr $ABCDEFGH$ ve volném rovnoběžném promítání. Pak pomocí obrázku určete průsečnici rovin:

a) ABC a AHE
b) ABC a DGH
c) DFH a BCG
d) EFH a FAD

4. Je dána krychle $ABCDEFGH$ a body M, N, O, které jsou po řadě středy hran BF, BC, AD. Dokažte, že přímka EF je rovnoběžná s rovinou MNO.

5. Jsou dány přímky p, q a roviny α a β. Určete vzájemnou polohu

a) přímek p a q, je-li $p \perp \alpha$ a $q \perp \alpha$,
b) rovin α a β, je-li $p \perp \alpha$ a $p \perp \beta$,
c) přímky q a roviny β, je-li $p \perp \beta$ a $p \parallel q$,
d) přímky p a roviny β, je-li $p \perp \alpha$ a $\alpha \parallel \beta$.

6. Dokažte, že v krychli $ABCDEFGH$ jsou roviny ACE a BDH navzájem kolmé.

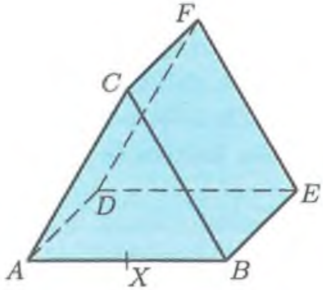
7. Podstavou trojbokého hranolu $ABCDEF$ je pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB délky 13 cm, výška hranolu je 5 cm. Bod S je střed čtvercové boční stěny $BCFE$. Určete vzdálenost bodu S od přímek, ve kterých leží hrany hranolu.

8. V krychli $ABCDEFGH$ o hraně 4 cm je bod S střed hrany AB. Určete vzdálenost vrcholu H

a) od roviny ACG,
b) od roviny SCG.

□ **9.** Délka podstavné hrany pravidelného trojbokého hranolu z obrázku je rovna výšce hranolu, bod X je střed hrany AB. Určete odchylku přímek:

a) AC a CB b) AC a AD
c) AX a CX d) AC a XC
e) CB a BE f) CD a AF



10. Pravidelný čtyřboký hranol má výšku 24 cm a tělesovou úhlopříčku délky 26 cm. Vypočtěte
a) jeho objem,
b) odchylku tělesové úhlopříčky od roviny podstavy.

* **11.** Pravidelný trojboký hranol $ABCDEF$ má výšku dvakrát větší, než je délka jeho podstavné hrany. Vypočtěte odchylku přímky SF od roviny ABE, kde bod S je střed podstavné hrany AB.

12. Dokažte, že pro délku u stěnové úhlopříčky a délku u_t tělesové úhlopříčky krychle o hraně délky a platí vzorce:

$$u = a \cdot \sqrt{2}, \qquad u_t = a \cdot \sqrt{3}$$

Pomocí nich vypočtěte délky stěnové a tělesové úhlopříčky krychle o hraně délky 35 cm.

13. Vypočtěte délku podstavné hrany krychle, znáte-li
a) délku její stěnové úhlopříčky $u = 18{,}4\,\text{cm}$,
b) délku její tělesové úhlopříčky $u_t = 24{,}25\,\text{dm}$,
c) její povrch $S = 13{,}5\,\text{dm}^2$,
d) její objem $V = 4{,}096\,\text{m}^3$.

14. Jaký objem má krychle, jejíž tělesová úhlopříčka měří
a) 10 cm, b) 100 cm?

15. Pro délku u_t tělesové úhlopříčky kvádru o hranách délek a, b, c nejprve odvoďte vzorec

$$u_t = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2},$$

dosazením pak vypočtěte délku u_t pro hodnoty
a) $a = 3\,\text{cm}$, $b = 4\,\text{cm}$, $c = 5\,\text{cm}$,
b) $a = b = 18{,}4\,\text{cm}$, $c = 26\,\text{cm}$.

16. Vypočtěte délku tělesové úhlopříčky a její odchylku od roviny podstavy hranolu o výšce 3 cm, je-li jeho podstavou obdélník o rozměrech 7 cm a 5 cm. Odhadněte, zda pro hranol se stejnou podstavou, ale dvojnásobnou výškou bude uvedená odchylka také dvojnásobná. O správnosti svého úsudku se přesvědčte výpočtem.

17. Vypočtěte objem a povrch pravidelného čtyřbokého hranolu, jehož tělesová úhlopříčka měří 18 cm a má odchylku 52° od roviny podstavy.

18. Vypočtěte objem a povrch kvádru $ABCDEFGH$, jehož rozměry a, b, c jsou v poměru $3:4:5$, víte-li, že stěnová úhlopříčka AC měří 35 cm a má od tělesové úhlopříčky AG odchylku 45°.

19. Vypočtěte objem kvádru, jsou-li jeho dva rozměry 6 cm a 3,6 cm a měří-li jeho tělesová úhlopříčka 9 cm.

20. Podstavou trojbokého hranolu $ABCDEF$ s výškou 20 cm je pravoúhlý trojúhelník s přeponou AB délky 25 cm. Vypočtěte objem a povrch hranolu, víte-li, že odchylka rovin ABD a AFD je 16°.

21. Podstavou čtyřbokého hranolu $ABCDEFGH$ s výškou 8 cm je kosočtverec. Kratší úhlopříčka BD podstavy $ABCD$ měří 10 cm, odchylka rovin FBC a DHG je 60°. Vypočtěte objem hranolu.

∗**22.** Je dán pravidelný pětiboký hranol $ABCDEFGHIJ$. Jeho podstavná hrana AB má délku 20 cm a odchylka tělesové úhlopříčky AH od roviny podstavy je 70°. Vypočtěte objem a povrch hranolu.

23. Objem trojbokého hranolu je 315 cm^3, jeho výška je 7 cm a nejdelší podstavná hrana měří 12 cm. Vypočtěte povrch tohoto hranolu, víte-li, že odchylky rovin jeho bočních stěn jsou v poměru $3:4:5$.

24. Objem kvádru $ABCDEFGH$, pro jehož rozměry platí

$$|AB| : |AD| : |AE| = 4 : 2 : 1,$$

je 216 cm^3. Určete odchylku úhlopříček

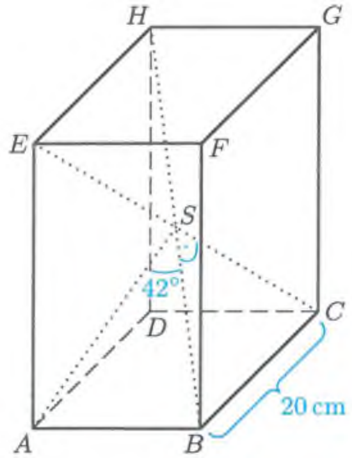
a) AG a BH, b) BH a EC.

$*$**25.** Podle údajů z obrázku vypočtěte objem kvádru $ABCDEFGH$;

S je průsečík úseček BH a CE,

$|\sphericalangle ASB| = 42°$, $|\sphericalangle BSC| = 90°$,

$|BC| = 20\,\text{cm}$.



26. Vypočtěte délku podstavné hrany pravidelného n-bokého jehlanu s výškou 12 cm a boční hranou délky 13 cm v případě:

a) $n = 3$ b) $n = 4$
c) $n = 5$ d) $n = 6$

27. Vypočtěte výšku pravidelného čtyřstěnu, jehož hrana měří:

a) 5 cm b) 10 cm c) 100 cm

28. Vysvětlete, proč je hrana AB pravidelného čtyřstěnu $ABCD$ kolmá k rovině CDS, kde S je střed hrany AB.

29. Podstavě pravidelného n-bokého jehlanu lze opsat kružnici o poloměru r. Odchylka boční hrany jehlanu od roviny podstavy je 45°. Určete výšku jehlanu, je-li:

a) $n = 3$ b) $n = 4$ c) $n = 8$

30. Podstavou pravidelného jehlanu je čtverec o straně délky 6 cm, výška jehlanu měří 5 cm. Určete délky jeho bočních hran a jejich odchylky od roviny podstavy.

31. Vypočtěte odchylku boční stěny od roviny podstavy pravidelného trojbokého jehlanu, jehož boční hrana měří 15 cm a jehož

a) výška je 12 cm, b) podstavná hrana měří 8 cm.

$*$**32.** Dokažte, že pro výšku v pravidelného čtyřstěnu o hraně délky a platí vzorec

$$v = a \cdot \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Pak podle něho vypočtěte výšku pravidelného čtyřstěnu o hraně délky $\sqrt{6}$ cm.

$*$**33.** V pravidelném čtyřstěnu vypočtěte odchylku hrany od roviny stěny, ve které tato hrana neleží.

∗**34.** Vypočtěte odchylku rovin dvou stěn pravidelného čtyřstěnu.

∗**35.** Odchylka boční hrany pravidelného čtyřbokého jehlanu od roviny podstavy je 50°. Vypočtěte odchylku roviny boční stěny od roviny podstavy tohoto jehlanu.

36. Vypočtěte povrch pravidelného čtyřbokého jehlanu s podstavnou hranou délky 24 cm, je-li

a) stěnová výška jehlanu 3 dm,

b) délka boční hrany jehlanu 2 dm,

c) výška jehlanu 0,9 dm.

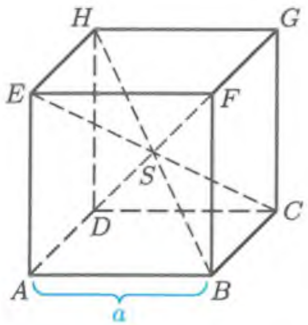
37. Vypočtěte obsah pláště pravidelného čtyřbokého jehlanu, jehož výška je 8 cm, je-li odchylka boční hrany od roviny podstavy 45°.

38. Odchylka boční stěny pravidelného trojbokého jehlanu od roviny podstavy je 60°, stěnová výška jehlanu je 6 cm. Vypočtěte povrch jehlanu.

39. Vypočtěte povrch pravidelného šestibokého jehlanu, jehož boční hrana měří 18 cm a jehož podstava je vepsána do kružnice o průměru 20 cm.

40. Obsah pláště pravidelného pětibokého jehlanu je 382 cm^2, vrcholy jeho podstavy leží na kružnici o poloměru 10 cm. Vypočtěte stěnovou výšku jehlanu.

41. Krychle o hraně délky a z obrázku je rozdělena na 6 shodných čtyřbokých jehlanů s hlavním vrcholem S. Vypočtěte objem a povrch každého z nich.



42. Vypočtěte objem pravidelného osmibokého jehlanu s podstavnou hranou délky 2 cm a výškou 7 cm.

43. Vypočtěte objem pravidelného trojbokého jehlanu, jehož podstava má obsah 6,93 cm^2 a jehož stěnová výška je 6 cm.

44. Pravidelný trojboký jehlan a pravidelný šestiboký jehlan mají stejnou výšku 1 dm a jejich podstavy jsou vepsány do shodných kružnic o poloměru 1 dm. Vypočtěte poměr objemů obou jehlanů.

*45. Vypočtěte objem pravidelného čtyřstěnu, který má povrch $1\,\mathrm{m}^2$.

46. Jehlan J_1 má podstavu o obsahu S_1 a výšku v_1, jehlan J_2 má podstavu o obsahu S_2 a výšku v_2. Určete poměr objemů obou jehlanů, jestliže platí:

a) $v_2 = 2v_1,\ S_2 = S_1$ b) $v_2 = v_1,\ S_2 = 2S_1$

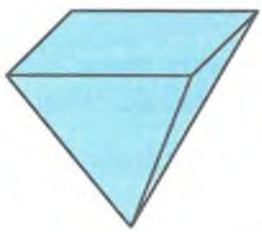
c) $v_2 = 2v_1,\ S_2 = 2S_1$ d) $v_2 = \frac{1}{2}v_1,\ S_2 = 2S_1$

47. Pravidelný pětiboký jehlan má výšku v. Jakou výšku má hranol, který má shodnou podstavu a stejný objem jako zmíněný jehlan?

48. Jaký povrch má pravidelný čtyřboký jehlan o objemu $3\,\mathrm{dm}^3$, jehož výška měří stejně jako

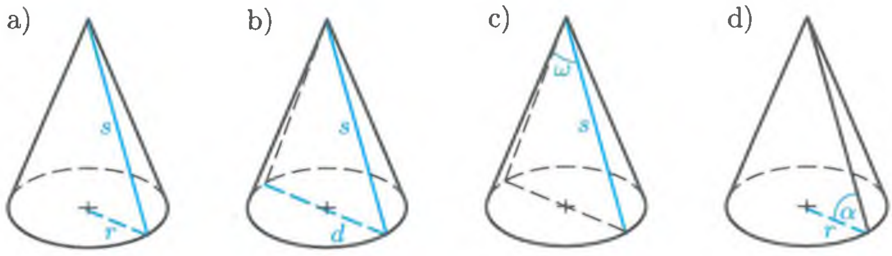
a) jeho podstavná hrana, b) úhlopříčka jeho podstavy?

49. Na polepení bočních stěn modelu pravidelného čtyřbokého jehlanu, jehož podstavná hrana měří stejně jako výška, bylo potřeba $7{,}5\,\mathrm{dm}^2$ papíru. Jaká je hmotnost modelu, je-li hustota dřeva, z něhož byl model vyroben, rovna $500\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$? Hmotnost papíru zanedbejte.



50. Střecha rozhledny má tvar pláště pravidelného osmibokého jehlanu s podstavnou hranou délky 4,6 m, sklon střechy vzhledem k vodorovné rovině je 20°. Kolik litrů barvy je třeba na natření střechy, vystačí-li 1 litr barvy na $2{,}5\,\mathrm{m}^2$ plochy?

51. Vypočtěte výšku kuželu z obrázku podle zadaných údajů (délky jsou v centimetrech).



a) $s = 82$, $r = 18$ b) $s = 101$, $d = 198$ c) $\omega = 50°$, $s = 12$ d) $\alpha = 58°$, $r = 7$

52. Osovým řezem kuželu je rovnoramenný trojúhelník, jehož jeden vnitřní úhel má velikost 120°. Vypočtěte obsah podstavy kuželu, je-li jeho výška 5 cm.

53. Osovým řezem kuželu s poloměrem podstavy 4 cm je rovnostranný trojúhelník. Jakou výšku má tento kužel?

54. Osovým řezem kuželu je rovnostranný trojúhelník. Vypočtěte jeho obsah, je-li

a) výška kuželu 7 cm, b) délka strany kuželu 7 cm.

55. Osovým řezem kuželu je pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník. Vyjádřete průměr d podstavy kuželu a délku s jeho strany v závislosti na výšce v kuželu.

56. Vypočtěte délku strany kuželu, jehož osovým řezem je pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník s obsahem 0,5 m^2.

57. Pravoúhlý trojúhelník má odvěsny délek 9 cm a 4 cm. Rozhodněte, který kužel má větší povrch – zda ten, který vznikne otáčením zmíněného trojúhelníku kolem kratší odvěsny, nebo ten, který vznikne, když se bude daný trojúhelník otáčet kolem delší odvěsny. V jakém poměru jsou délky stran obou kuželů?

58. Podstava kuželu má poloměr r, jeho strana má délku s. Určete poměr povrchu kuželu a obsahu jeho podstavy, jestliže platí:

a) $s = 2r$ b) $s = 3r$ c) $s = 10r$ d) $s = n \cdot r$

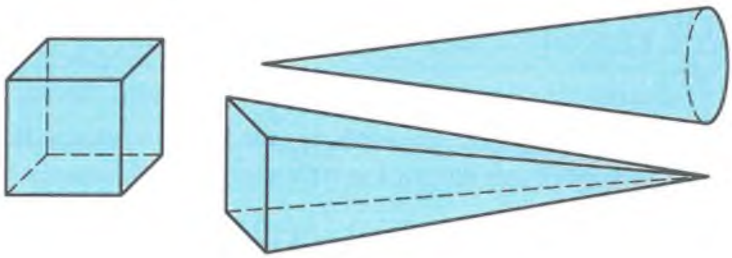
∗**59.** Vypočtěte průměr podstavy kuželu se stranou délky 25 cm, jehož povrch je 224π cm^2.

$*$**60.** Určete povrch kuželu, když rozvinutím jeho pláště do roviny vznikne kruhová výseč s poloměrem 1 dm a středovým úhlem 315°.

61. Vypočtěte objem kuželu, jehož strana má délku 6 cm a svírá s rovinou podstavy úhel o velikosti 60°.

62. Vypočtěte objem a povrch kuželu o průměru podstavy 1 dm a výšce 12 cm.

63. Na obrázku je krychle s hranou délky a, pravidelný čtyřboký jehlan s podstavnou hranou délky a a výškou v a kužel s poloměrem podstavy r a výškou v. Uspořádejte podle velikosti jejich objemy, je-li $v = 4a$ a $a = 2r$.



64. Tři kužely K_1, K_2 a K_3 mají stejné objemy, obsahy jejich podstav jsou v poměru 2 : 3 : 5. Výška kuželu K_2 je 21 cm. Vypočtěte výšky kuželů K_1 a K_3.

65. Vypočtěte objem kuželu, jestliže kruhová výseč, která vznikne rozvinutím jeho pláště do roviny, má středový úhel o velikosti 216° a obsah 7,54 cm^2.

$*$**66.** Vypočtěte objem a povrch tělesa, které vznikne otáčením čtverce s obsahem 1 dm^2 kolem jeho úhlopříčky.

$*$**67.** Vypočtěte objem a povrch tělesa, které vznikne otáčením pravoúhlého trojúhelníku s odvěsnami o délkách 3 cm a 4 cm kolem jeho přepony.

■ **68.** Jirka si v obchodě se suvenýry koupil „tlustou“ dřevěnou tužku. Odhadl její objem na dvacetinu decimetru krychlového. Když si doma potřebné údaje změřil a objem tužky vypočítal, zjistil, že jeho odhad byl o několik cm^3 menší než vypočtený výsledek. Zjistěte o kolik, víte-li, že tužka má průměr 2 cm, část tužky, která má tvar válce, má délku 17,5 cm a celá tužka měří 21 cm.

69. Vypočtěte obsah osového řezu komolého kuželu s výškou 7 cm, poloměrem menší podstavy 10 cm a stranou, která má odchylku 52° od roviny podstavy.

70. Výška komolého kuželu je 25 cm, poloměry jeho podstav jsou 20 cm a 13 cm. Vypočtěte délku strany tohoto komolého kuželu a její odchylku od roviny podstavy.

71. Komolý kužel má výšku 8 cm, průměry jeho podstav jsou 6 cm a 20 cm. Vypočtěte obsah jeho pláště.

72. Vypočtěte povrch komolého kuželu, jehož podstavy mají poloměry 8 cm a 2 cm, víte-li, že jeho strana má od roviny podstavy odchylku 45°.

73. Vypočtěte obsah pláště komolého kuželu, jehož výška je 12 cm a jehož podstavy mají obsah $25\pi\,\mathrm{cm}^2$ a $100\pi\,\mathrm{cm}^2$.

74. Vypočtěte povrch komolého kuželu o výšce 12 cm, jehož větší podstava má poloměr 10 cm, víte-li, že výška doplňkového kuželu je 3 cm.

75. Vypočtěte objem komolého kuželu s poloměry podstav 2,6 cm a 4 cm, jehož strana má od roviny podstavy odchylku 48°.

76. Jakou výšku má komolý kužel s podstavami o poloměrech 1 cm a 7 cm a objemem $477{,}5\,\mathrm{cm}^3$?

77. Vypočtěte objem a povrch tělesa, které vznikne otáčením rovnoramenného lichoběžníku kolem jeho osy souměrnosti. Základny lichoběžníku měří 6 cm a 8,2 cm, délka jeho ramen je 6,1 cm.

78. Ze smrkové klády délky 4 m, která měla přibližně tvar komolého kuželu s průměry podstav 40 cm a 30 cm, vyřezali na pile trám s obdélníkovým průřezem o rozměrech 20 cm a 15 cm. Kolik procent činil odpad?

∗79. Sklenička má tvar komolého kuželu o výšce 8 cm. Vnitřní průměr jejího okraje je 8 cm, vnitřní průměr dna je 4,6 cm. Kolik tekutiny je ve skleničce, když je naplněna 3 cm pod okraj? (Tloušťku dna zanedbejte.)

80. Pravidelný čtyřboký komolý jehlan má podstavy o obsazích 100 cm^2 a 16 cm^2 a výšku 1 dm. Vypočtěte délku jeho boční hrany a její odchylku od roviny podstavy.

81. Pravidelný čtyřboký komolý jehlan má podstavné hrany délek 10 cm a 6 cm. Jeho boční stěna svírá s rovinou podstavy úhel 50°. Vypočtěte výšku daného komolého jehlanu a délku jeho boční hrany.

82. Boční stěna pravidelného trojbokého komolého jehlanu je lichoběžník se základnami délek 4 cm a 11 cm a ramenem délky 5 cm. Vypočtěte povrch jehlanu.

83. Vypočtěte povrch pravidelného šestibokého komolého jehlanu o výšce 5 cm, jehož podstavy jsou vepsány do kružnic o poloměrech 6 cm a 4 cm.

84. Vypočtěte povrch pravidelného čtyřbokého komolého jehlanu, jehož podstavné hrany měří 16 cm a 12 cm, je-li odchylka boční hrany od roviny podstavy 60°.

85. Kolik m^2 látky bylo třeba k výrobě stínítka lampy? Látka pokrývá menší podstavu a plášť pravidelného osmibokého komolého jehlanu. Potřebné rozměry jsou na obrázku uvedeny v centimetrech. (Připočtěte 10 % látky na odpad, otvor pro přívodní šňůru zanedbejte.)

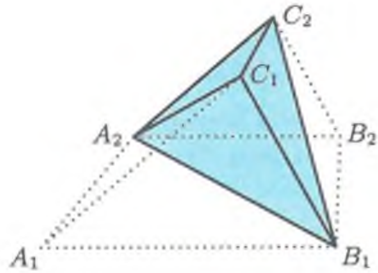
86. Vypočtěte výšku pravidelného čtyřbokého komolého jehlanu, jehož podstavné hrany měří 16 cm a 9 cm, víte-li, že jeho objem je 3 685 cm^3.

87. Boční stěna pravidelného trojbokého komolého jehlanu je lichoběžník se základnami délek 6 cm a 12 cm a výškou 8 cm. Vypočtěte objem tohoto komolého jehlanu.

88. Podstavami pravidelného komolého jehlanu jsou čtverce o stranách délek 20 cm a 15 cm. Vypočtěte objem jehlanu, je-li odchylka roviny jeho boční stěny od roviny podstavy 70°.

$*$89. Do komolého kuželu s poloměry podstav r a $2r$ a výškou v byl vepsán pravidelný šestiboký komolý jehlan tak, že vrcholy jeho podstav leží na kružnicích, které omezují podstavy komolého kuželu. Vypočtěte poměr objemů obou těles.

$ $90.** Je dán trojboký komolý jehlan $A_1B_1C_1A_2B_2C_2$. Označme v jeho výšku, S_1 obsah podstavy $A_1B_1C_1$ a S_2 obsah podstavy $A_2B_2C_2$. Pomocí veličin v, S_1 a S_2 vyjádřete objem trojbokého jehlanu $B_1C_1A_2C_2$.



91. Vypočtěte obsah kruhu, který na kouli o průměru 20 cm vytíná rovina, jež je vzdálena 8 cm od středu koule.

92. Na poloměru SX koule $\mathsf{K}(S;r)$ jsou dány body A, B tak, že $|SA| = |AB| = |BX|$. Bodem A je vedena rovina α kolmá k přímce SX, bodem B je vedena rovina β rovnoběžná s rovinou α. Průnikem roviny α a koule K je kruh A, průnikem roviny β a koule K je kruh B. Vypočtěte poměr obvodů a poměr obsahů kruhů A, B.

93. Poloměry dvou koulí jsou v poměru $1 : 3$. V jakém poměru jsou jejich
a) povrchy, b) objemy?

94. Vypočtěte objem a povrch koule, která je vepsána do krychle o hraně délky a tak, že se dotýká všech jejích stěn.

95. Vypočtěte objem a povrch koule, která je opsána krychli o hraně délky a tak, že každý vrchol krychle leží na povrchu koule.

$*$96. Do koule o poloměru r je vepsán kužel tak, že jeho vrchol i kružnice omezující podstavu kuželu leží na povrchu koule. Osovým řezem kuželu je rovnostranný trojúhelník. Vypočtěte poměr objemů a poměr povrchů těchto dvou těles.

∗**97.** Kouli o poloměru r je opsán kužel tak, že koule se dotýká podstavy i pláště kuželu. Osovým řezem kuželu je rovnostranný trojúhelník. Vypočtěte poměr objemů a poměr povrchů těchto dvou těles.

■∗**98.** Pomeranč má tvar koule, která má průměr 15 cm. Kolik procent celého objemu pomeranče zaujímá pevná část dužniny, jestliže kůra má tloušťku 5 mm a pomeranč obsahuje 150 ml šťávy?

VÝSLEDKY PRŮBĚŽNÝCH ÚKOLŮ

1 Přímky a roviny v prostoru

1. a) Obr. A-1; b) obr. A-2. **2.** Dané roviny jsou a) rovnoběžné; b) různoběžné; c) různoběžné. **3.** Daná přímka je s danou rovinou a) rovnoběžná; b) různoběžná; c) různoběžná; d) rovnoběžná a leží v ní. **4.** Dané přímky jsou a) rovnoběžné; b) různoběžné; c) mimoběžné; d) mimoběžné. **5.** Jak přímka AB, tak přímka HG je rovnoběžná např. s přímkou EF. **6.** V rovině SHC leží přímka SS_1 (S_1 je střed čtverce $CDHG$), která je s přímkou AG rovnoběžná (obr. A-3). Zdůvodněte to úvahami o trojúhelníku ADG. **7.** V rovině PTU leží dvě různoběžky UT a PT, z nichž každá je rovnoběžná s rovinou XSR (obr. A-4).

2 Kolmost přímek a rovin

1. a) Přímka AD je kolmá jak k přímce DF, tak k přímce DE; b) přímka BC je kolmá jak k přímce CF, tak k přímce CA; c) přímka DF je kolmá jak k přímce CF, tak k přímce EF. **2.** V rovině PTR leží i střed U hrany BF (obr. A-5). Označme X průsečík úseček CF a RU (je jasné, že X je střed úsečky RU), dále označme Y střed úsečky PT. Protože čtyřúhelník $FXYE$ je obdélník, platí $CF \perp XY$. Protože $CF \perp RU$, je přímka CF kolmá ke dvěma různoběžkám XY a RU roviny PTR, proto je kolmá i k rovině PTR. **4.** V rovině DEF leží přímka EF, která je kolmá ke dvěma různoběžkám BF a GF roviny BCG (obr. A-6), a tedy i k rovině BCG. **5.** V rovině α vedeme bodem A přímku a kolmou k průsečnici p rovin α, β (obr. A-7). Označíme P průsečík přímek a, p a v rovině β vedeme bodem P přímku b kolmou k přímce p. Z $\alpha \perp \beta$ plyne $a \perp b$. Přímka a je tedy kolmá ke dvěma různoběžkám p, b roviny β, a tedy i k rovině β.

3 Vzdálenosti a odchylky

1. $|AB| = |AD| = |AE| = 5\,\mathrm{cm}$, $|AC| = |AF| = |AH| = 5\sqrt{2}\,\mathrm{cm} \doteq 7{,}1\,\mathrm{cm}$, $|AG| = 5\sqrt{3}\,\mathrm{cm} \doteq 8{,}7\,\mathrm{cm}$. **2.** Označme S_1, S_2 středy stěnových úhlopříček BE a BG (obr. A-8). Úsečka S_1S_2 je střední příčkou trojúhelníku BGE, proto $|S_1S_2| = \frac{1}{2}|EG| = 9\sqrt{2}\,\mathrm{cm} \doteq 12{,}7\,\mathrm{cm}$. **3.** 5 cm. **4.** Protože $ABGH$ je rovnoběžník, protínají se jeho úhlopříčky AG a BH v bodě S, který každou z nich půlí. Podobně se zdůvodní, že tímto bodem S prochází jak úhlopříčka CE rovnoběžníku $BCHE$, tak i úhlopříčka DF rovnoběžníku $ADGF$ (obr. A-9). Vzdálenost bodu S od stěn $ABCD$ i $EFGH$ je 4 cm, vzdálenost bodu S od stěn $ADHE$ i $BCGF$ je 2 cm, vzdálenost bodu S od stěn $ABEF$ i $DCGH$ je 2,5 cm. **5.** $4\sqrt{2}\,\mathrm{cm} \doteq 5{,}7\,\mathrm{cm}$. **6.** a) 90°; b) 45°; c) 90°. **7.** Asi 70°32′. **8.** Podle obr. A-10 platí $\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{5}\sqrt{5}$, tzn. $\frac{1}{2}\varphi \doteq 24°6'$, proto je hledaná odchylka asi 48°12′. **9.** $\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\varphi \doteq 35°16'$ (obr. A-11). **10.** $\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{1}{3}\sqrt{2}$, $\varphi \doteq 25°14'$ (obr. A-12). **11.** Dvě řešení: buď 10°, nebo 70°. **12.** $\mathrm{tg}\,\varphi = \sqrt{2}$, $\varphi \doteq 54°44'$ (obr. A-13). **13.** Asi 306,2 cm^3. **14.** Asi 305,2 cm^2.

4 Jehlany

1. $(n+1)$ vrcholů, $2n$ hran, $(n+1)$ stěn. **2.** a) Ano; b) ne. **3.** Asi 67°35′. **4.** Asi 48°35′. **5.** Asi 84,9 cm^2. **6.** Asi 140,9 cm^2. **7.** Asi 92 cm^2. **8.** Asi 6,8 cm. **9.** Asi 25,5 cm^3. **10.** Asi 2,3 cm. **11.** Asi 33,17 dm^2.

5 Kužely

1. Asi 11,7 cm. 2. Asi 452,4 cm^2. 3. Asi 16,7 cm. 4. Z nerovnosti $r < s$ plyne nerovnost $\pi r^2 < \pi rs$. 5. Asi 150,8 cm^2. 6. Asi 5,6 cm. 7. Asi 28,3 cm^3. 8. Asi 6,7 cm. 9. Na pokrytí střechy je třeba téměř 41 m^2 plechu.

6 Komolé kužely a jehlany

1. Liší se asi o 10,6 cm. 2. Strana měří asi 2 cm, výška asi 1,3 cm. 3. Asi 101,5 cm^2. 4. Asi 1 422,8 cm^2. 5. Asi 1 131,6 cm^3. 6. Asi 1,36 m. 7. $(n+2)$ stěn, $2n$ vrcholů a $3n$ hran. 8. Asi 152,7 cm^2. 9. Asi 887,3 cm^2. 10. Hmotnost těžítka je asi 444 g. 11. Asi 3 535,8 cm^3.

7 Koule

1. Jde o přímku, na které leží průměr, který půlkruh omezuje. 2. Asi 9,5 cm. 3. Asi 8,7 cm. 4. Asi 62 cm. 5. Asi 268,1 cm^3. 6. Asi 314,2 cm^2. 7. Čtyřikrát. 8. 3 cm. 9. Průměr podstavy válce i jeho výška jsou $r\sqrt{2}$, povrch válce je $3\pi r^2$. Poměr povrchů koule a válce je $4:3$.

VÝSLEDKY CVIČENÍ

Cvičení 1

1. a) Obr. B-1; b) obr. B-2; c) obr. B-3. 2. Dané roviny jsou a) rovnoběžné; b) rovnoběžné; c) různoběžné; d) rovnoběžné; e) rovnoběžné; f) různoběžné. 3. Daná přímka je s danou rovinou a) rovnoběžná; b) různoběžná; c) různoběžná; d) rovnoběžná. 4. Dané přímky jsou a) rovnoběžné; b) různoběžné; c) mimoběžné; d) rovnoběžné; e) mimoběžné; f) rovnoběžné; g) různoběžné; h) mimoběžné. 6. Přímka XY leží v rovině ZBG (obr. B-4). 7. V rovině $S_1S_2S_3$ leží dvě různoběžky S_1S_2 a S_1S_3, z nichž každá je rovnoběžná s rovinou OQL. 8. V rovině ACH leží dvě různoběžky AC a AH, z nichž každá je rovnoběžná s rovinou EBG (obr. B-5). 9. Přímka ID je kolmá ke dvěma různoběžkám IJ a IH roviny FGJ. 10. Přímka XY je rovnoběžná s přímkou ED, která je kolmá ke dvěma různoběžkám AH a KL roviny ABH (obr. B-6). 11. V rovině QUX leží přímka QU, která je kolmá ke dvěma různoběžkám QP a QR roviny PQR. 12. V rovině BFG leží přímka BF, která je kolmá ke dvěma různoběžkám AB a BC roviny ABD.

Cvičení 2

1. $|FA| = 20$ cm, $|FB| = 12$ cm, $|FC| = 15$ cm, $|FH| = \sqrt{337}$ cm $\doteq 18{,}4$ cm, $|FD| = \sqrt{481}$ cm $\doteq 21{,}9$ cm. 2. $|XP| = \frac{5}{2}\sqrt{3}$ cm $\doteq 4{,}3$ cm (obr. B-7). 3. $|FR| = 2\sqrt{3}$ cm $\doteq 3{,}5$ cm, $|FT| = 4\sqrt{7}$ cm $\doteq 10{,}6$ cm (obr. B-8). 4. $\sqrt{74}$ cm $\doteq 8{,}6$ cm (obr. B-9). 5. 12 cm (obr. B-10). 6. $\frac{1}{2}\sqrt{2}a \doteq 0{,}7a$ (obr. B-11). 7. 4,8 cm (obr. B-12).

8. $\sqrt{3}\,a \doteq 1{,}7a$ (obr. B-13). **9.** a) 60°; b) asi 73°18′; c) asi 16°42′. **10.** a) Asi 70°; b) asi 70°. **11.** $\cos\varphi = \frac{8}{15}\sqrt{3}$, $\varphi \doteq 22°31'$; $\cos\psi = \frac{16}{17}$, $\psi \doteq 19°45'$ (obr. B-14). **12.** Označme Z kolmý průmět bodu F do roviny XYG (obr. B-15). Bod Z je střed úsečky XY a platí $|FZ| = \frac{7}{4}\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$. Proto $\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{1}{4}\sqrt{2}$, $\varphi \doteq 19°28'$. **13.** Platí $\varphi = 45° - \psi$ (obr. B-16), kde $\mathrm{tg}\,\psi = \frac{1}{2}$, proto $\psi \doteq 26°34'$ a $\varphi \doteq 18°26'$. **14.** Čtyřúhelník $ABGH$ je čtverec, proto $|BG| = |AB|$ (obr. B-17); $\cos\varphi = \frac{12}{20}$, $\varphi \doteq 53°8'$. **15.** Z trojúhelníku BFF' dostáváme $\mathrm{tg}\,62° = \dfrac{|FF'|}{3\sqrt{3}\ \mathrm{cm}}$, takže $|FF'| = \left(\mathrm{tg}\,62° \cdot 3\sqrt{3}\right)\mathrm{cm} \doteq 9{,}8\,\mathrm{cm}$ (obr. B-18). Obsah podstavy je asi $23{,}4\,\mathrm{cm}^2$, objem hranolu asi $229\,\mathrm{cm}^3$. **16.** Označme S střed hrany A_1B_1 (obr. B-19). Trojúhelník SC_1C_2 je pravoúhlý a rovnoramenný, proto $|C_1C_2| = |C_1S| = \frac{6}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{cm} \doteq 5{,}2\,\mathrm{cm}$. Povrch hranolu je asi $124{,}7\,\mathrm{cm}^2$, jeho objem je $81\,\mathrm{cm}^3$.

Cvičení 3

1. a) 4 vrcholy, 6 hran, 4 stěny; b) 5 vrcholů, 8 hran, 5 stěn. **2.** Ano. **3.** Ve všech případech 8 cm. **4.** Rozměry podstavy jsou $(24 \cdot \sin 25°)\,\mathrm{cm} \doteq 10{,}1\,\mathrm{cm}$ a $(24 \cdot \cos 25°)\,\mathrm{cm} \doteq 21{,}8\,\mathrm{cm}$. **5.** a) Asi 15,7 cm; b) asi 16 cm; c) 17 cm. **6.** 45°. **7.** a) Asi 66°34′; b) asi 10°53′. **8.** Délka podstavné hrany je 5,7 cm, výška je asi 4,9 cm, boční hrana má délku asi 6,3 cm. **9.** Asi $206{,}4\,\mathrm{cm}^2$. **10.** Asi $1\,260\,\mathrm{cm}^2$. **11.** Asi $213{,}4\,\mathrm{cm}^2$. **12.** Asi $85{,}6\,\mathrm{cm}^2$. **13.** Asi $739{,}8\,\mathrm{cm}^2$. **14.** Objemy všech jehlanů jsou stejné. **15.** Asi $527{,}5\,\mathrm{cm}^3$. **16.** Asi $160\,\mathrm{cm}^3$. **17.** a) Boční hrany modelů všech jehlanů jsou stejné a měří asi 20,9 cm, podstavná hrana modelu trojbokého jehlanu měří asi 10,4 cm, modelu čtyřbokého jehlanu asi 8,5 cm, modelu šestibokého jehlanu 6 cm. b) Hmotnost modelu trojbokého jehlanu je asi 156 g, modelu čtyřbokého jehlanu je asi 240 g, modelu šestibokého jehlanu je asi 312 g. **18.** Povrch Cheopsovy pyramidy je asi $81\,370\,\mathrm{m}^2$, což je asi o $8\,770\,\mathrm{m}^2$ více než povrch Chefrénovy pyramidy a asi o $63\,610\,\mathrm{m}^2$ více než povrch Mykleinesovy pyramidy.

Cvičení 4

2. a) 40 cm; b) 12 cm; c) 21,6 cm. **3.** a) 10 cm; b) $10\sqrt{2}\,\mathrm{cm} \doteq 14{,}1\,\mathrm{cm}$. **4.** a) Asi 126°52′; b) 90°; c) asi 53°8′. **5.** Asi $398\,\mathrm{cm}^2$. **6.** a) $3\pi\,\mathrm{dm}^2$; b) $4\pi\,\mathrm{dm}^2$; c) $6\pi\,\mathrm{dm}^2$; d) $(k+1)\pi\,\mathrm{dm}^2$. **7.** Asi $4\,825{,}5\,\mathrm{cm}^2$. **8.** Výška je 18 cm, strana měří 82 cm. **9.** Poloměr kruhové výseče je asi 31,3 cm, středový úhel asi 104°12′. **10.** Objem je asi $7\,721\,\mathrm{cm}^3$, povrch asi $6\,514\,\mathrm{cm}^2$. **11.** a) $\frac{1}{3}\pi\,\mathrm{dm}^3$; b) $\pi\,\mathrm{dm}^3$; c) $\frac{10}{3}\pi\,\mathrm{dm}^3$; d) $\frac{1}{30}\pi\,\mathrm{dm}^3$. **12.** a) $\frac{1}{3}\pi\,\mathrm{dm}^3$; b) $3\pi\,\mathrm{dm}^3$; c) $\frac{100}{3}\pi\,\mathrm{dm}^3$; d) $\frac{1}{300}\pi\,\mathrm{dm}^3$. **13.** a) $128\pi\,\mathrm{cm}^3 \doteq 402{,}1\,\mathrm{cm}^3$; b) asi $1\,228{,}5\,\mathrm{cm}^3$. **14.** a) Asi $189{,}6\,\mathrm{cm}^3$; b) asi $67\,\mathrm{cm}^3$. **15.** Povrch je $90\pi\,\mathrm{cm}^2$, objem $100\pi\,\mathrm{cm}^3$. **16.** Ten, který má větší výšku a menší poloměr podstavy. (Jsou-li r_1, r_2 poloměry podstav kuželů, v_1, v_2 jejich výšky a s_1, s_2 délky jejich stran, platí $r_1 = v_2$ a z rovnosti objemů plyne $r_2 = \sqrt{v_1v_2}$. Pak $s_1 = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$ a $s_2 = \sqrt{v_1v_2 + v_2^2}$. Je-li $v_1 > v_2$, je $r_1 < r_2$ a $s_1 > s_2$.) **17.** Otáčením trojúhelníku ABC kolem přepony AB (obr. B-20) vznikne „dvojkužel“ slepený z kuželů se společnou podstavou o poloměru $|CX| = r$. Obsah trojúhelníku ABC je roven jednak $\frac{1}{2} \cdot 9\,\mathrm{cm} \cdot 12\,\mathrm{cm}$, jednak $\frac{1}{2} \cdot 15\,\mathrm{cm} \cdot r$, odkud plyne $r = 7{,}2\,\mathrm{cm}$. Povrch S „dvojkuželu“ je roven součtu obsahů plášťů obou kuželů, proto $S = \pi \cdot 7{,}2 \cdot (12 + 9)\,\mathrm{cm}^2 \doteq 475\,\mathrm{cm}^2$. **18.** Objem porce zmrzliny je asi $86{,}5\,\mathrm{cm}^3$, tj. asi 86,5 ml.

Cvičení 5

1. a) 18 cm; b) asi 10,4 cm; c) asi 9,3 cm. **2.** 12 cm. **3.** a) Asi 3,2 cm; b) asi 29,8 cm^2; c) asi 45,5 cm^2. **4.** Větší poloměr je asi 10 cm, menší poloměr asi 7 cm. **5.** $12 : \left(5 + 4\sqrt{5}\right) : 21$. **6.** Asi 199 cm^3. **7.** Asi 204 cm^3. **8.** Hmotnost zátky je asi 2,77 g. **9.** Je třeba asi 5,1 l barvy. **10.** Asi 11,7 cm. **11.** Výška je asi 12,2 cm; délka boční hrany je asi 14,1 cm. **12.** Asi 577,4 cm^2. **13.** 30,8 dm^2. **14.** Asi 214,3 cm^2. **15.** Asi 534,1 cm^2. **16.** Asi 9,3 cm. **17.** Asi 489 cm^3. **18.** Asi 449,7 cm^3. **19.** Objem komolého kuželu je $\frac{1}{3} \cdot 7\pi r^2 v$, objem komolého jehlanu $\frac{14}{3} r^2 v$ (obr. B-21). Poměr objemů je $\pi : 2$.

Cvičení 6

1. Asi 75,4 cm. **2.** 10 cm. **3.** Dvě řešení: buď 5 cm, nebo 9 cm (obr. B-22). **4.** a) Objem je asi 523,6 cm^3, povrch asi 314,2 cm^2; b) objem je asi 14 137,2 cm^3, povrch asi 2 827,4 cm^2; c) objem je asi 9 202,8 cm^3, povrch asi 2 123,7 cm^2. **5.** a) 0,6 m; b) 3 dm. **6.** Objem je asi 4 188,8 cm^3, povrch asi 1 256,6 cm^2. **7.** Asi 1 017,9 cm^2. **8.** Asi 2,1 m^3. **9.** Poměr objemů válce a koule je $3 : 2$ (obr. B-23). **10.** Poměr objemů válce a koule je $3 : 4\sqrt{2}$ (obr. B-24). **11.** Pevnina pokrývá asi $1{,}3 \cdot 10^8$ km^2 zemského povrchu.

Cvičení 7

1. Daná rovina dělí prostor na dva opačné poloprostory. Hrana čtyřstěnu $ABCV$ je jí proťata, právě když její koncové body leží v opačných poloprostorech. Protože hrany AB, BC, CV jsou proťaty, leží v jednom poloprostoru vrcholy A, C a ve druhém vrcholy B, V (obr. B-25). Ze zbývajících hran jehlanu tedy rovina protíná pouze hranu AV. **2.** Povrch S_1 čtyřstěnu $ABCD$ je roven čtyřnásobku obsahu rovnostranného trojúhelníku o straně 6 cm, tj. $36\sqrt{3}$ cm^2. Povrch S_2 tělesa $BCDB'C'D'$ dostaneme z povrchu S_1 tak, že odečteme obsahy trojúhelníků $AB'C'$, $AC'D'$, $AD'B'$ a přičteme obsah trojúhelníku $B'C'D'$ (obr. B-26). Všechny zmíněné trojúhelníky jsou rovnostranné o straně 2 cm a obsahu $S_3 = \sqrt{3}$ cm^2. Proto $S_2 = S_1 - 2S_3 = 34\sqrt{3}$ cm^2. Povrch tělesa $BCDB'C'D'$ je $34\sqrt{3}$ cm^2, je tedy o $2\sqrt{3}$ cm^2 menší než povrch čtyřstěnu $ABCD$. **3.** Označme $ABCDU$ daný jehlan a S průsečík úhlopříček kosočtvercové podstavy. Je-li označení vrcholů kosočtverce zvoleno tak, že $|AU| = b$, platí $|BU| = c$, $|CU| = a$ a $|DU| = c$ (obr. B-27). Protože $|AU| = |CU|$ a $|BU| = |DU|$, je úsečka US kolmá jak ke straně AC trojúhelníku ACU, tak ke straně BD trojúhelníku BDU, a tak je úsečka US výškou jehlanu. Označme $x = |AS|$, $y = |BS|$ a $v = |US|$. Pro objem V jehlanu pak platí $V = \frac{1}{3} \cdot 2xy \cdot v$. Z pravoúhlých trojúhelníků ASB, ASU a BSU plynou po řadě rovnice $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + v^2 = b^2$ a $y^2 + v^2 = c^2$. Řešením této soustavy dostáváme $x^2 = \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2 - c^2\right)$, $y^2 = \frac{1}{2}\left(a^2 + c^2 - b^2\right)$ a $v^2 = \frac{1}{2}\left(b^2 + c^2 - a^2\right)$, proto

$$V = \frac{2}{3}xyv = \frac{1}{6}\sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 - c^2} \cdot \sqrt{a^2 + c^2 - b^2} \cdot \sqrt{b^2 + c^2 - a^2},$$

což je pro hodnoty $a = 5$ cm, $b = 6$ cm a $c = 7$ cm rovno $4\sqrt{95}$ cm^3. **4.** Protože objemy čtyřstěnů $ABDA'$ a $C'CB'D'$ jsou stejné, platí pro objem V zbylého tělesa, jímž je osmistěn $BDCB'A'D'$, $V = V_1 - 2V_2$, kde V_1 je objem kvádru a V_2 objem čtyřstěnu $ABDA'$ (obr. B-28). Protože $V_1 = abc$ a $V_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot ab \cdot c = \frac{1}{6}abc$ (neboť podstavou jehlanu $ABDA'$ je pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami a, b a výška tohoto jehlanu je c), je $V = abc - 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot abc = \frac{2}{3}abc$. Jedna z možných sítí osmistěnu $BDCB'A'D'$ je na obr. B-29. **5.** Obraz výsledného tělesa T ve volném rovnoběžném promítání je na obr. B-30, kde jsou též označeny některé význačné body. Těleso T rozdělíme na kvádr $ABCDQMST$ o objemu $V_1 = \frac{1}{3}abc$ a pětistěn $\mathsf{P} = QMSTRPD'$. Tento pětistěn si můžeme představit tak, že od trojbokého hranolu $QTD'MSC'$ odřízneme rovinou RPD' čtyřstěn $RPC'D'$. Objem V_2 hranolu $QTD'MSC'$ je roven polovině objemu kvádru $QTD'A'MSC'B'$, tzn. $V_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot abc = \frac{1}{3}abc$. Podstavou jehlanu $RPC'D'$ je pravoúhlý trojúhelník RPC' s odvěsnami $|RP| = \frac{1}{2}b$ a $|PC'| = \frac{1}{3}c$, výška jehlanu $RPC'D'$ je $|D'C'| = a$. Pro jeho objem V_3 platí $V_3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot |RP| \cdot |PC'| \cdot |D'C'| = \frac{1}{36}abc$. Pro objem V_4 pětistěnu P tak vychází $V_4 = V_2 - V_3 = \frac{1}{3}abc - \frac{1}{36}abc = \frac{11}{36}abc$. Objem V tělesa T je roven součtu objemů V_1 a V_4:

$$V = V_1 + V_4 = \tfrac{1}{3}abc + \tfrac{11}{36}abc = \tfrac{23}{36}abc$$

Objem tělesa T je $\frac{23}{36}$ objemu daného kvádru. **6.** Střed M kulové plochy, která se dotýká stěn $ABCD$, $ABFE$ a $ADHE$ krychle $ABCDEFGH$, leží na tělesové úhlopříčce AG (obr. B-31). Má-li být kulová plocha částí krychle a procházet jejím středem S (který je současně středem úsečky AG), musí být bod M vnitřním bodem úsečky AS. Kolmý průmět T bodu M do roviny ABC je bodem dotyku kulové plochy a roviny ABC a leží na úsečce AC. Je-li hrana krychle a, platí $|AG| = \sqrt{3}a$. Z podobnosti trojúhelníků ACG a ATM zjistíme, že $|AM| : |MT| = |AG| : |GC| = \sqrt{3} : 1$, tzn. $|AM| = \sqrt{3}r$, kde $r = |MT| = |MS|$ je hledaný poloměr kulové plochy. Dosazením do rovnosti $|AM| + |MS| = |AS|$ dostaneme $\sqrt{3}r + r = \frac{1}{2}\sqrt{3}a$, odkud $r = \dfrac{\sqrt{3}a}{2(\sqrt{3}+1)} = \dfrac{(3-\sqrt{3})a}{4}$. Pro $a = 10\,\text{cm}$ je $r \doteq 3{,}2\,\text{cm}$.

7. Označme M střed uvažované kulové plochy a r její poloměr. Protože kulová plocha protíná stěnu $BCC'B'$ v kružnici vepsané čtverci $BCC'B'$, leží její střed M na přímce, která prochází středem E čtverce $BCC'B'$ a je kolmá ke stěně $BCC'B'$. Tato přímka protíná stěnu $ADD'A'$ v bodě F (jenž je středem čtverce $ADD'A'$), v němž se této stěny uvažovaná kulová plocha dotýká, takže $|MF| = r$ (obr. B-32). Označme ještě T střed hrany BC; zmíněná kulová plocha bodem T prochází, proto $|MT| = r$. V pravoúhlém trojúhelníku MTE platí $|MT| = r$, $|ET| = \frac{1}{2}a$, $|ME| = |FE| - |FM| = a - r$. Z Pythagorovy věty $r^2 = (a-r)^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2$ po úpravách vychází $r = \frac{5}{8}a$; pro $a = 10\,\text{cm}$ je $r = 6{,}25\,\text{cm}$. Bod M leží na úsečce EF ve vzdálenosti 6,25 cm od bodu F. **8.** Označme M střed uvažované kulové plochy a r její poloměr. Protože kulová plocha protíná stěnu $BCC'B'$ v kružnici vepsané čtverci $BCC'B'$, leží její střed M na přímce, která prochází středem E čtverce $BCC'B'$ a je kolmá ke stěně $BCC'B'$. Tato přímka protíná stěnu $ADD'A'$ v bodě F, jenž je středem čtverce $ADD'A'$. Označme ještě T střed hrany BC; zmíněná kulová plocha tímto bodem prochází, proto $|MT| = r$. a) Označme $|ME| = x$, pak $|MF| = a - x$. Protože kulová plocha prochází bodem A, platí $|MA| = r$ (obr. B-33). Z pravoúhlého trojúhelníku MFA plyne $(a-x)^2 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}a\right)^2 = r^2$, z pravoúhlého trojúhelníku MET pak $x^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = r^2$. Porovnáním levých stran obou rovnic dostáváme $x = \frac{5}{8}a$, a tak $r = \frac{1}{8}\sqrt{41}a$. Střed M kulové plochy leží na polopřímce EF ve vzdálenosti $\frac{5}{8}a$ od bodu E, poloměr kulové plochy je $\frac{1}{8}\sqrt{41}a$. b) Nechť S je střed krychle (a tedy i úsečky EF), L střed hrany AB (obr. B-34). Označme $|ME| = y$, pak $|SM| = \left|\frac{1}{2}a - y\right|$ (nevíme, na které z úseček SE, SF bod M leží, tedy která z délek y, $\frac{1}{2}a$ je větší). Z pravoúhlého trojúhelníku MSL plyne $\left(\frac{1}{2}a - y\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}a\right)^2 = r^2$ (tato rovnost platí i v případě, kdy $M = S$), z pravoúhlého trojúhelníku MET pak $y^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = r^2$. Odtud vychází $y = \frac{1}{2}a$, což znamená, že bod M splývá s bodem S.

Pak $r = \frac{1}{2}\sqrt{2}a$. Střed kulové plochy tedy splývá se středem krychle, její poloměr je $\frac{1}{2}\sqrt{2}a$. **9.** Označme S střed uvažované kulové plochy a r její poloměr. Protože kulová plocha protíná rovinu BCB' v kružnici opsané čtverci $BCC'B'$, leží její střed S na přímce, která prochází středem E čtverce $BCC'B'$ a je kolmá ke stěně $BCC'B'$. Tato přímka protíná stěnu $ADD'A'$ v bodě F, který je středem čtverce $ADD'A'$. Označme $|SE| = x$, pak $|SF| = a - x$ (obr. B-35). Uvažovaná kulová plocha prochází body M a B, a tak platí $|SM| = |SB| = r$. Z pravoúhlého trojúhelníku MSF plyne $(a-x)^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = r^2$, z pravoúhlého trojúhelníku SEB pak $x^2 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}a\right)^2 = r^2$. Odtud vychází $x = \frac{3}{8}a$ a $r = \frac{1}{8}\sqrt{41}a$. Střed S kulové plochy leží na polopřímce EF ve vzdálenosti $\frac{3}{8}a$ od bodu E, poloměr kulové plochy je $\frac{1}{8}\sqrt{41}a$. **10.** Označme S střed dané koule, $v = |VO|$ výšku jí opsaného kužele, $x = |AO|$ poloměr jeho podstavy a T dotykový bod koule a strany VA kuželu (obr. B-36). Platí $|SO| = |ST| = r$. Z podobných trojúhelníků VST a VAO vyplývá

$$\frac{|ST|}{|SV|} = \frac{|AO|}{|VA|}, \qquad \text{tzn.} \qquad \frac{r}{v-r} = \frac{x}{\sqrt{v^2+x^2}},$$

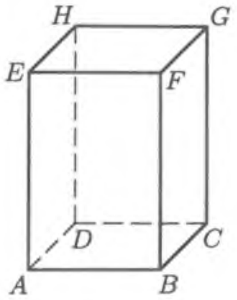
odtud po úpravách $x^2 = \dfrac{r^2v}{v-2r}$. Objem V_1 koule je roven $\frac{4}{3}\pi r^3$, pro objem V_2 opsaného kuželu platí $V_2 = \frac{1}{3}\pi x^2 v = \dfrac{\pi r^2 v^2}{3(v-2r)}$. Z podmínky $V_2 = 2V_1$ dostáváme rovnici $\dfrac{\pi r^2 v^2}{3(v-2r)} = \frac{8}{3}\pi r^3$, kterou lze upravit do tvaru $(v-4r)^2 = 0$. Jediným řešením této rovnice je $v = 4r = 4\,\text{cm}$, pak $x = \sqrt{2}r \doteq 1{,}4\,\text{cm}$. Uvažovaný kužel má poloměr podstavy asi 1,4 cm a výšku 4 cm. Nerovnost $V_1 < 2V_2$ lze upravit do tvaru $(v-4r)^2 < 0$. Poslední nerovnost neplatí pro žádné v, proto žádný kužel opsaný kouli nemá objem menší, než je dvojnásobek objemu této koule.

VÝSLEDKY SOUHRNNÝCH CVIČENÍ

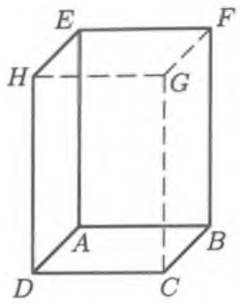
2. Obr. C-1; a) přímka je s rovinou různoběžná; b) přímka je s rovinou rovnoběžná; c) přímka je s rovinou rovnoběžná; d) roviny jsou rovnoběžné; e) roviny jsou různoběžné; f) roviny jsou různoběžné. **3.** a) Přímka AD; b) přímka CD; c) přímka BF; d) přímka FG. **4.** Protože $NO \parallel AB$ a $AB \parallel EF$, je přímka EF rovnoběžná s přímkou NO roviny MNO, tedy i s rovinou MNO (obr. C-2). **5.** a) $p \parallel q$; b) $\alpha \parallel \beta$; c) $q \perp \beta$; d) $p \perp \beta$. **6.** Označme S_1 průsečík přímek AC a BD, S_2 průsečík přímek EG a FH (obr. C-3). Rovina BDH obsahuje přímku BD, která je kolmá ke dvěma různoběžkám AC a S_1S_2 roviny ACE, proto je kolmá k rovině ACE. **7.** Vzdálenost bodu S od přímek AB, AC, DE, DF je $\frac{5}{2}\sqrt{2}\,\text{cm}$, tj. asi 3,5 cm; vzdálenost bodu S od přímek BC, CF, BE, EF je 2,5 cm; vzdálenost bodu S od přímky AD je $\frac{1}{2}\sqrt{601}\,\text{cm}$, tj. asi 12,3 cm (obr. C-4). **8.** a) $v = |HX| = 2\sqrt{2}\,\text{cm} \doteq 2{,}8\,\text{cm}$ (obr. C-5); b) $|GM| \cdot v = |HG| \cdot |HM|$, kde $|HG| = 4\,\text{cm}$, $|HM| = 2 \cdot 4\,\text{cm} = 8\,\text{cm}$, $|GM| = \sqrt{4^2+8^2}\,\text{cm} = 4\sqrt{5}\,\text{cm}$ (obr. C-6); $v = \dfrac{|HG|\cdot|HM|}{|GM|} = \dfrac{8\sqrt{5}}{5}\,\text{cm} \doteq 3{,}6\,\text{cm}$. **9.** a) 60°; b) 90°; c) 90°; d) 30°; e) 90°; f) 90°. **10.** a) 1 200 cm; b) asi 67°23′.

11. Označme Z střed hrany DE (obr. C-7). FZ je výškou rovnostranného trojúhelníku DEF, proto $|ZF| = \frac{1}{2}\sqrt{3}a$. Platí $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{|ZF|}{|ZS|} = \frac{1}{4}\sqrt{3}$, $\varphi \doteq 23°25'$. **12.** Nechť v krychli $ABCDEFGH$ platí $|AB| = a$, $|AC| = u$ a $|AG| = u_t$. Z trojúhelníku ABC plyne $u^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$, z trojúhelníku ACG plyne $u_t^2 = u^2 + a^2 = 2a^2 + a^2 = 3a^2$. Stěnová úhlopříčka měří asi 49,5 cm, tělesová úhlopříčka asi 60,6 cm. **13.** a) Asi 13 cm; b) asi 14 cm; c) 1,5 dm; d) 1,6 m. **14.** a) Asi 192,45 cm^3; b) asi 192 450 cm^3. **15.** Nechť v kvádru $ABCDEFGH$ platí $|AB| = a$, $|BC| = b$, $|CG| = c$, $|AC| = u$ a $|AG| = u_t$. Z trojúhelníku ACG plyne $u_t^2 = u^2 + c^2$, kde $u^2 = a^2 + b^2$ z trojúhelníku ABC; a) $u_t \doteq 7{,}1$ cm; b) $u_t \doteq 36{,}8$ cm. **16.** Délka je asi 9,1 cm, odchylka je asi 19°14′. Pro zmíněný hranol s dvojnásobnou výškou je příslušná odchylka asi 34°54′. **17.** Objem hranolu je asi 871 cm^3, jeho povrch je asi 567,4 cm^2. **18.** Objem hranolu je 20 580 cm^3, jeho povrch je 4 606 cm^2. **19.** Objem kvádru je asi 122,3 cm^3. **20.** $|AC| = |AB| \cdot \cos 16° \doteq 24$ cm, $|BC| = |AB| \cdot \sin 16° \doteq 6{,}9$ cm (obr. C-8). Objem kvádru je asi 1 656 cm^3, jeho povrch je asi 1 284 cm^2. **21.** $|AB| = |AD| = 10$ cm (obr. C-9). Objem hranolu je asi 693 cm^3. **22.** $|AC| = 2 \cdot |AB| \cdot \sin 54° \doteq 32{,}4$ cm, $|CH| = |AC| \cdot \operatorname{tg} 70° \doteq 88{,}9$ cm (obr. C-10). Pro obsah S_p podstavy $ABCDE$ platí $S_p = \frac{5}{2} \cdot |AB| \cdot |SO|$, kde $|SO| = \dfrac{|AB|}{2 \operatorname{tg} 36°} \doteq 13{,}8$ cm; proto $S_p \doteq 688$ cm^2. Objem hranolu je asi 61 187 cm^3, jeho povrch je asi 10 267 cm^2. **23.** Pro obsah S_p podstavy ABC platí $S_p = \dfrac{V}{v} = 45$ cm^2. Jsou-li vrcholy trojúhelníku ABC označeny tak, že platí $|AC| = 12$ cm, pak $\alpha = 60°$, $\beta = 75°$, $\gamma = 45°$ (obr. C-11); pro výšku $v_1 = |BP|$ platí $v_1 = \dfrac{2S_p}{|AC|} = 7{,}5$ cm. Potom $|AB| = v_1 \cdot \sin 60° \doteq 6{,}5$ cm, $|BC| = v_1 \cdot \sin 45° \doteq 5{,}3$ cm. Povrch hranolu je asi 256,6 cm^2. **24.** a) Asi 58°25′; b) asi 51°45′. **25.** Čtyřúhelník $BCHE$ je čtverec, proto $|BE| = |BC| = 20$ cm, $u_t = |BH| = 20\sqrt{2}$ cm $\doteq 28{,}3$ cm (obr. C-12). Z obdélníku $ABGH$ plyne $|AB| = u_t \cdot \sin 21° \doteq 10{,}1$ cm. Dále platí $|AE| = \sqrt{|BE|^2 - |AB|^2} \doteq 17{,}2$ cm. Objem kvádru je asi 3 495 cm^3. **26.** a) Asi 8,7 cm; b) asi 7,1 cm; c) asi 5,9 cm; d) 5 cm. **27.** a) Asi 4,1 cm; b) asi 8,2 cm; c) asi 82 cm. **28.** Úsečky DS a CS jsou výšky v rovnostranných trojúhelnících, proto $DS \perp AB$ a $CS \perp AB$. **29.** a) r; b) r; c) r. **30.** Boční hrany mají délku asi 6,6 cm a odchylku asi 49°41′ od roviny podstavy. **31.** Pro hledanou odchylku φ platí $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{2\sqrt{3}\,v}{a}$, kde a je délka podstavné hrany a v je výška uvažovaného jehlanu. Pro délku b jeho boční hrany platí $b^2 = \frac{1}{3}a^2 + v^2$. a) $\operatorname{tg}\varphi = \frac{8}{3}$, $\varphi \doteq 69°27'$; b) $\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{4}\sqrt{611}$, $\varphi \doteq 80°48'$. **32.** 2 cm. **33.** $\sin\varphi = \dfrac{v}{a} = \frac{1}{3}\sqrt{6}$ $\left(v = \frac{1}{3}\sqrt{6}a\right)$, $\varphi \doteq 54°44'$ (obr. C-13). **34.** $\cos\varphi = \left(\frac{1}{3}w\right) : w = \frac{1}{3}$, $\varphi \doteq 70°32'$ (obr. C-14). **35.** $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{2v}{a}$, kde $v = \frac{1}{2}\sqrt{2}a \cdot \operatorname{tg} 50°$, $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{2} \cdot \operatorname{tg} 50°$, $\varphi \doteq 59°19'$ (obr. C-15). **36.** a) 20,16 dm^2; b) asi 9,35 dm^2; c) 12,96 dm^2. **37.** Asi 221,7 cm^2. **38.** Asi 140,3 cm^2. **39.** Asi 778,6 cm^2. **40.** Asi 13 cm. **41.** Objem je $\frac{1}{6}a^3$, povrch $a^2 + a^2 \cdot \sqrt{2} = a^2 \cdot (1 + \sqrt{2})$. **42.** Asi 26,4 cm^3. **43.** Asi 9,6 cm^3. **44.** $V_1 : V_2 = S_1 : S_2 = 1 : 2$, kde V_1 je objem a S_1 obsah podstavy trojbokého jehlanu, V_2 je objem a S_2 obsah podstavy šestibokého jehlanu. **45.** Asi 0,052 m^3. **46.** a) 1 : 2; b) 1 : 2; c) 1 : 4; d) 1 : 1. **47.** $\frac{1}{3}v$. **48.** a) Asi 14 cm^2; b) asi 13,7 cm^2. **49.** Hmotnost modelu je asi 1,024 kg. **50.** Plocha střechy je asi 108,7 m^2, na její natření bude potřeba téměř 43,5 l barvy. **51.** a) 80 cm; b) 20 cm; c) asi 10,9 cm; d) asi

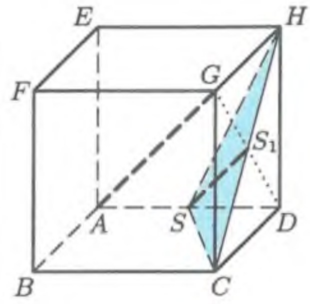
11,2 cm. **52.** Asi 235,6 cm^2. **53.** Asi 6,9 cm. **54.** a) Asi 28,3 cm^2; b) 21,2 cm^2. **55.** $d = 2s$, $s = \sqrt{2}v$. **56.** 1 m. **57.** Větší povrch má ten kužel, který má menší výšku, strany obou kuželů jsou shodné. **58.** a) 3 : 1; b) 4 : 1; c) 11 : 1; d) $(n+1) : 1$. **59.** 14 cm. **60.** Asi 5,15 dm^2. **61.** Asi 49 cm^3. **62.** Objem je asi 314,2 cm^3, povrch je asi 282,7 cm^2. **63.** Protože $3 < \pi < 4$, má nejmenší objem krychle, největší jehlan. **64.** Kužel K_1 má výšku 35 cm, kužel K_3 má výšku 14 cm. **65.** Asi 2,4 cm^3. **66.** Objem tělesa je asi 0,74 dm^3, povrch je asi 4,44 dm^2 (obr. C-16). **67.** Podle obr. C-17 platí $3^2 - x^2 = 4^2 - (5-x)^2$, odtud $x = 1{,}8$ a $r = \sqrt{3^2 - x^2}\,\mathrm{cm} = 2{,}4\,\mathrm{cm}$. Pro objem V tělesa platí $V = \left(\frac{1}{3}\pi \cdot 2{,}4^2 \cdot 5\right)\mathrm{cm}^3 \doteq 30{,}2\,\mathrm{cm}^3$, pro jeho povrch S dostáváme $S = \pi \cdot 2{,}4 \cdot (3+4)\,\mathrm{cm}^2 \doteq 52{,}8\,\mathrm{cm}^2$. **68.** Objem tužky je asi 58,6 cm^3, což je asi o 8,6 cm^3 více, než byl Jirkův odhad. **69.** Asi 178,3 cm^2. **70.** Strana měří asi 26 cm, její odchylka od roviny podstavy je asi 74°21′. **71.** Asi 434,1 cm^2. **72.** Asi 480,2 cm^2. **73.** Asi 612,6 cm^2. **74.** Asi 870,4 cm^2. **75.** Asi 54 cm^3. **76.** Asi 8 cm. **77.** Objem je asi 239,5 cm^3, povrch asi 217,1 cm^2. **78.** Odpad činil asi 69 %. **79.** Ve skleničce je asi 1,27 dl tekutiny. **80.** Strana měří asi 10,9 cm, její odchylka od roviny podstavy je asi 67°. **81.** Výška je asi 2,4 cm, boční hrana měří asi 3,7 cm. **82.** Asi 139,7 cm^2. **83.** Asi 293,8 cm^2. **84.** Asi 696,3 cm^2. **85.** Je třeba asi 788 cm^2 látky. **86.** Asi 23 cm. **87.** Asi 284,1 cm^2. **88.** Asi 2 117,8 cm^3. **89.** Poměr objemů komolého kuželu a komolého jehlanu je $2\pi : 3\sqrt{3}$. **90.** Jehlan $B_1C_1A_2C_2$ vznikne z původního komolého jehlanu oddělením jehlanů $A_1B_1C_1A_2$ a $A_2B_2C_2B_1$, jejichž objemy jsou $\frac{1}{3}vS_1$ a $\frac{1}{3}vS_2$. Proto je objem jehlanu $B_1C_1A_2C_2$ roven $\frac{1}{3}v\sqrt{S_1S_2}$. **91.** Asi 113,1 cm^2. **92.** Poměr obvodů je $\sqrt{8} : \sqrt{5}$, poměr obsahů je 8 : 5. **93.** Poměr povrchů je 1 : 9, poměr objemů je 1 : 27. **94.** Objem je $\frac{1}{6}\pi a^3$, povrch je πa^2. **95.** Objem je $\frac{1}{2}\sqrt{3}\pi a^3$, povrch je $3\pi a^2$. **96.** Poměr objemů koule a kuželu je 32 : 9, poměr jejich povrchů je 16 : 9. **97.** Poměr objemů koule a kuželu je 4 : 9, poměr jejich povrchů je také 4 : 9. **98.** Pevná část dužniny zaujímá asi 73 % objemu pomeranče.



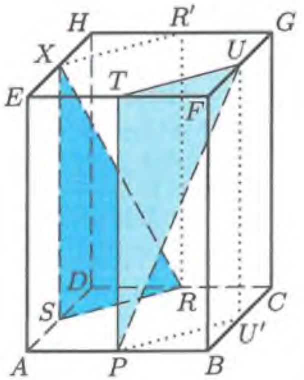
A-1



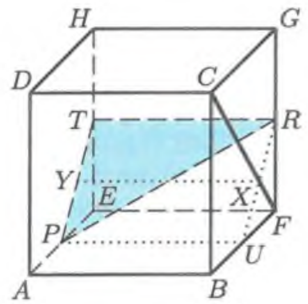
A-2



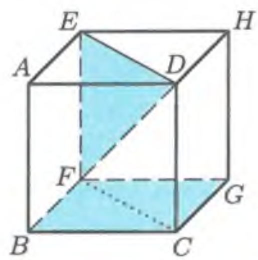
A-3



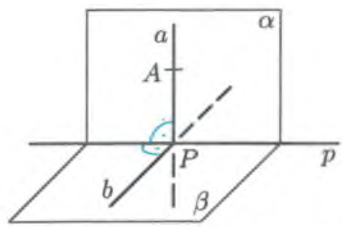
A-4



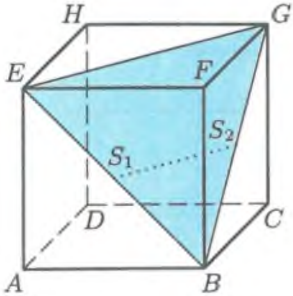
A-5



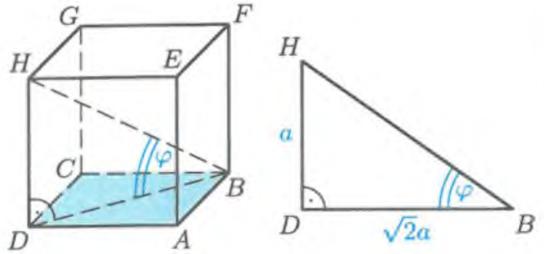
A-6



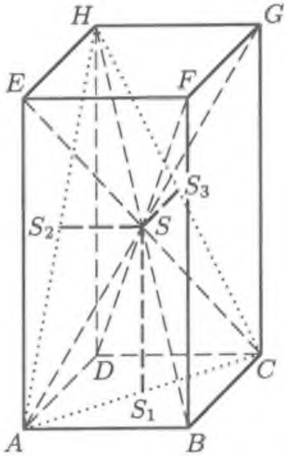
A-7



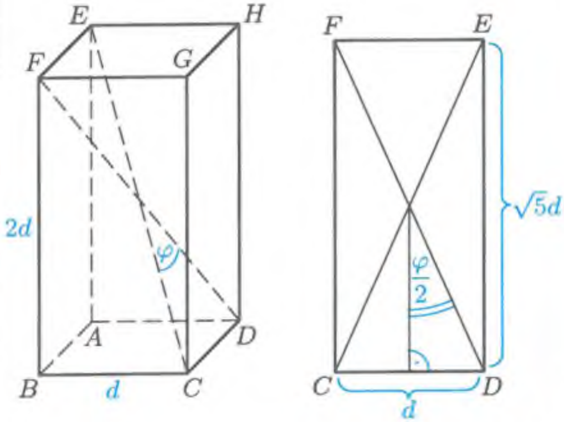
A-8



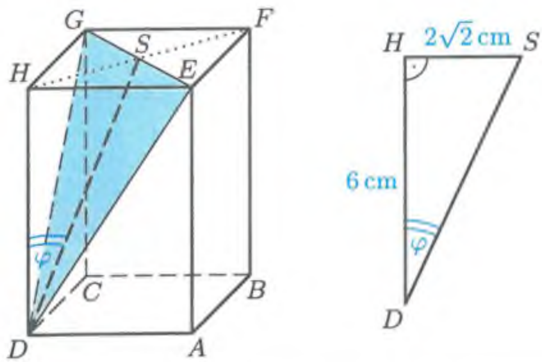
A-11



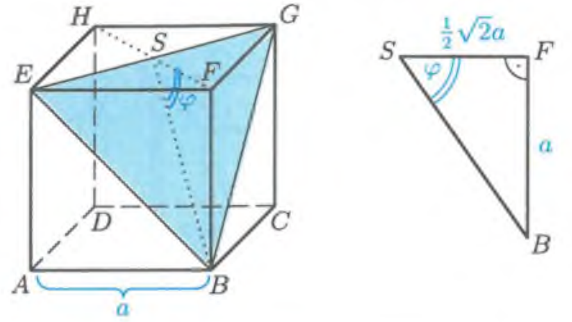
A-9



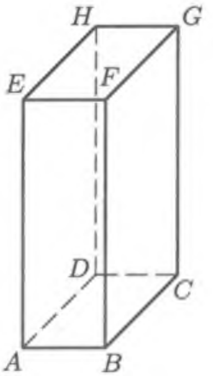
A-10



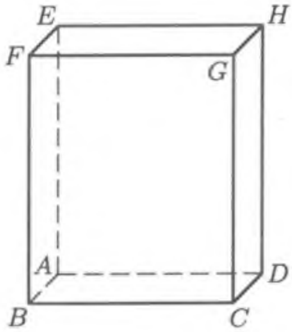
A-12



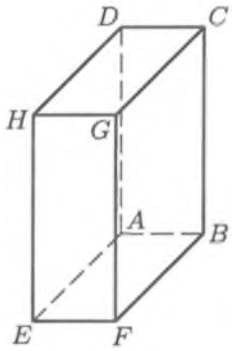
A-13



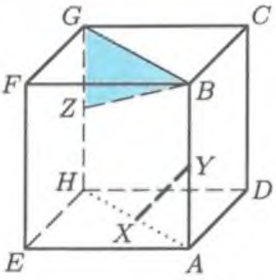
B-1



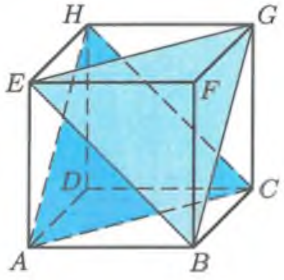
B-2



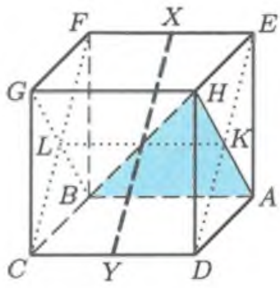
B-3



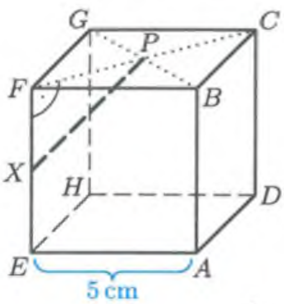
B-4



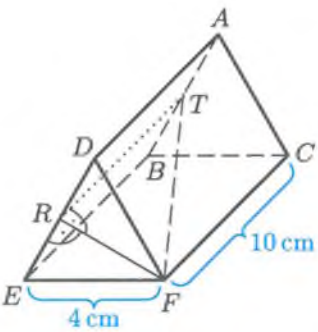
B-5



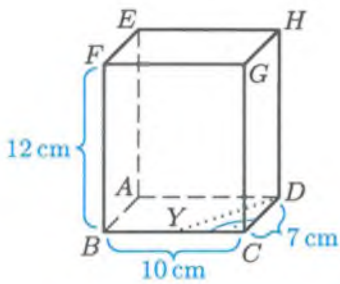
B-6



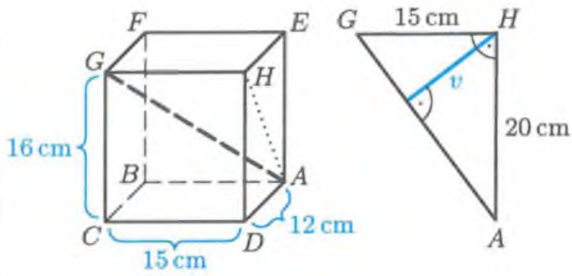
B-7



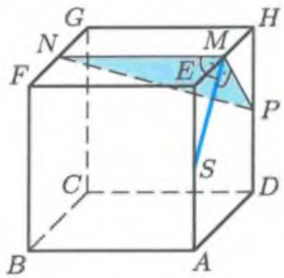
B-8



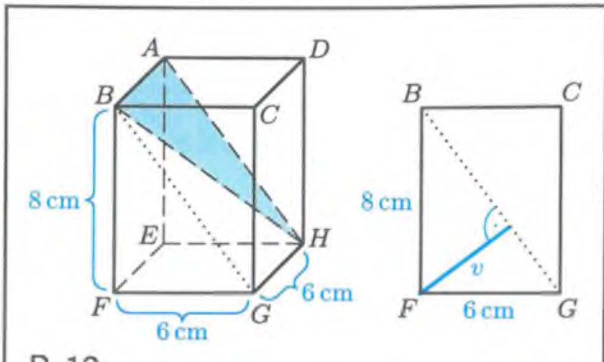
B-9



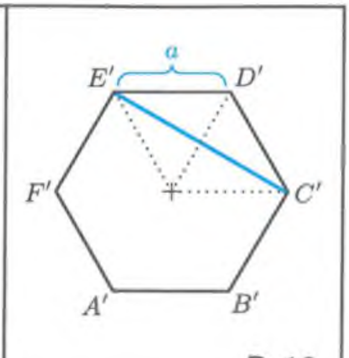
B-10



B-11

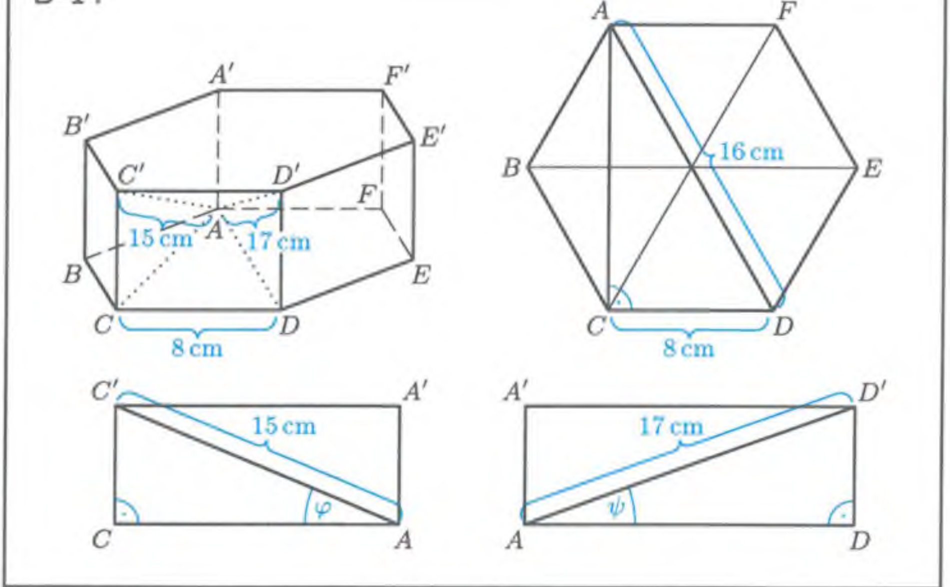


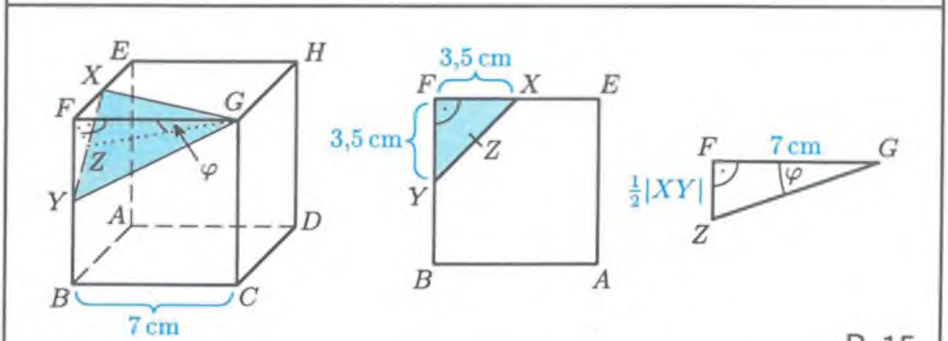
B-12



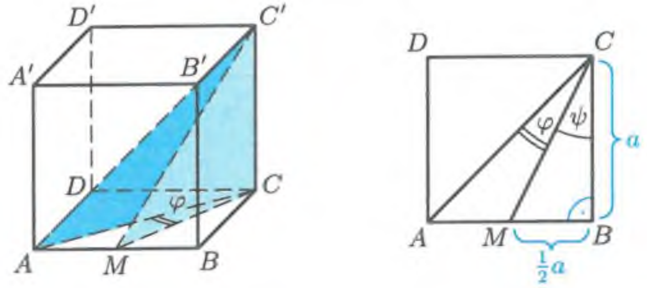
B-13

B-14



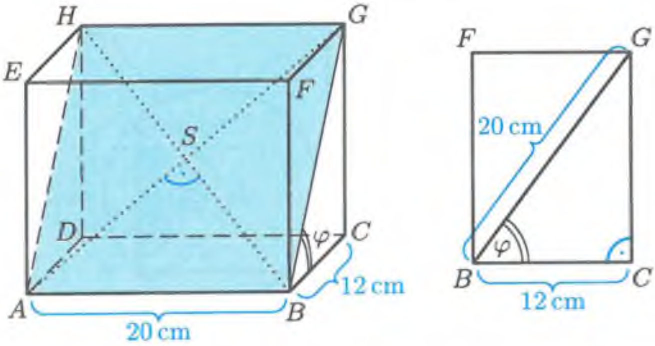


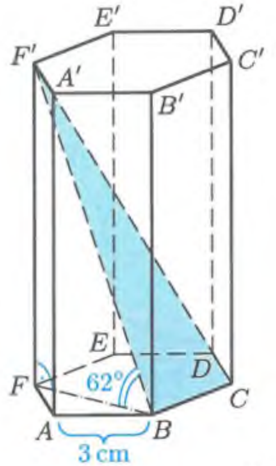
B-15



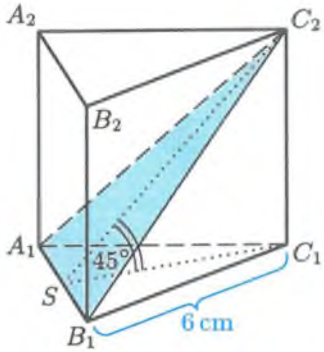
B-16

B-17

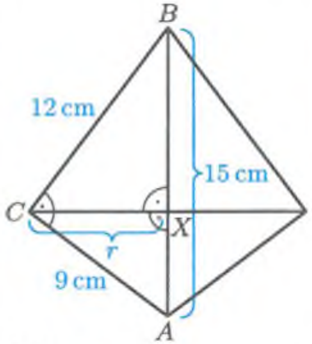




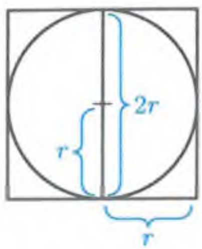
B-18



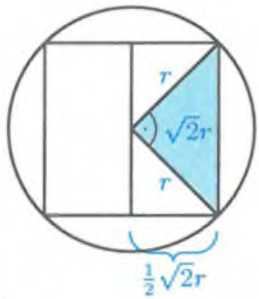
B-19



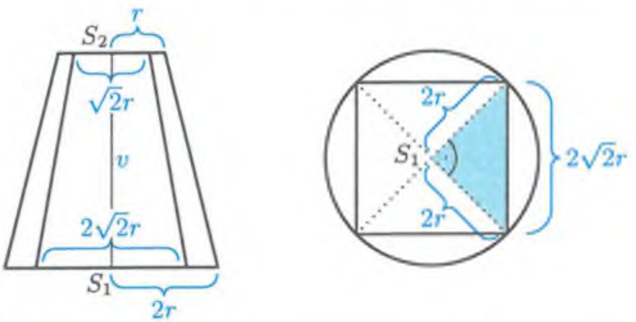
B-20



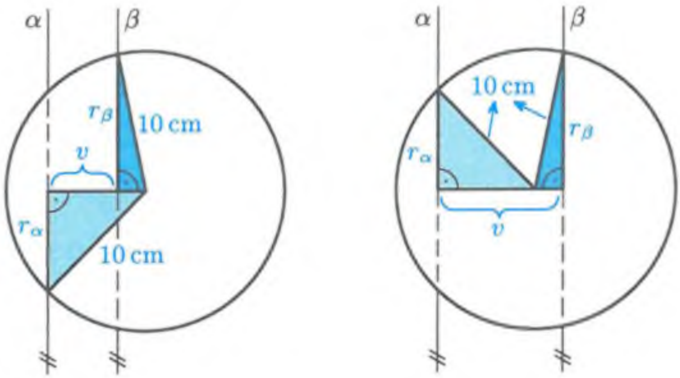
B-23



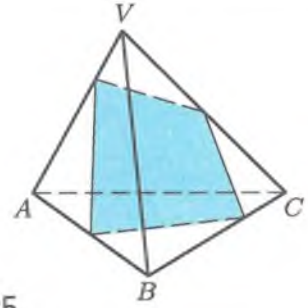
B-24



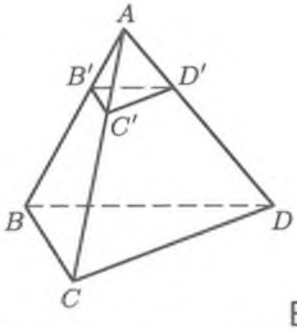
B-21



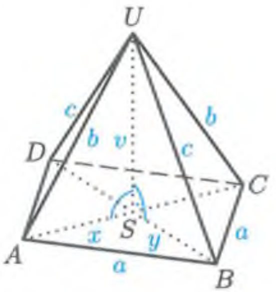
B-22



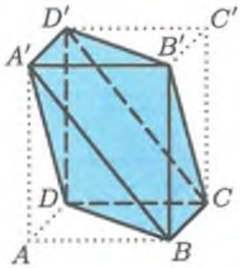
B-25



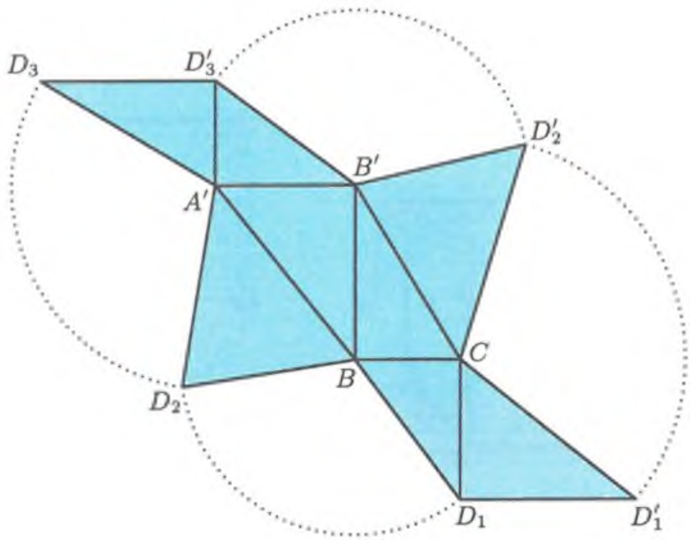
B-26



B-27

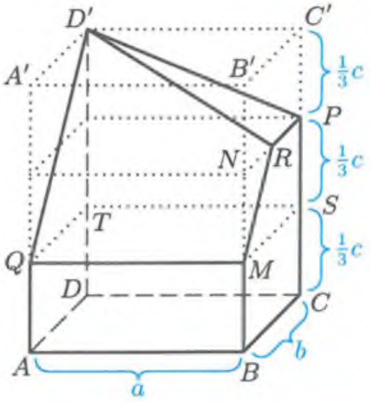


B-28

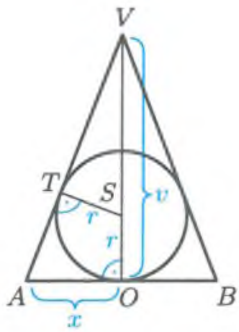


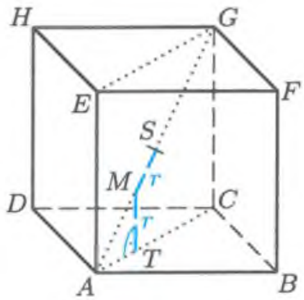
B-29

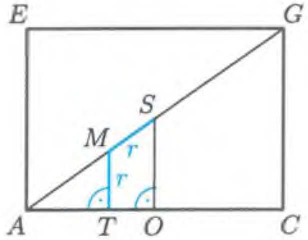
B-30



B-36

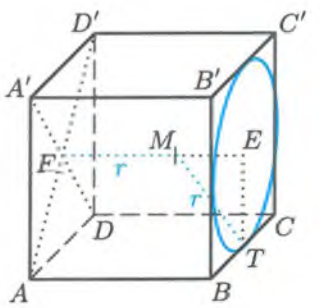


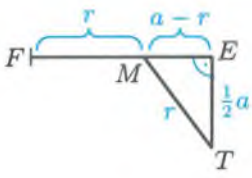




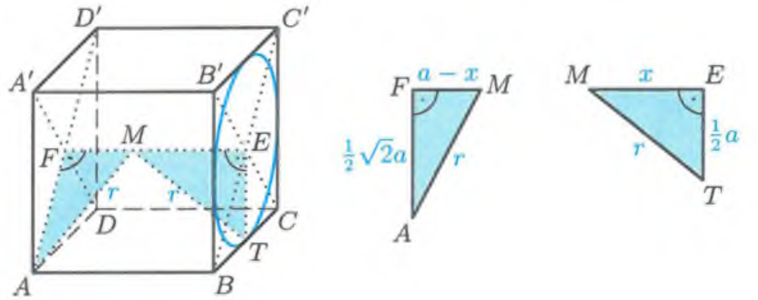
B-31

B-32



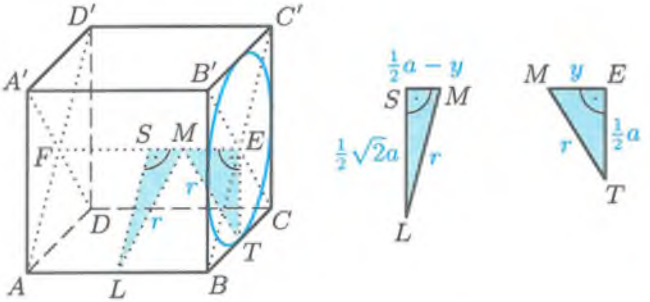


B-33



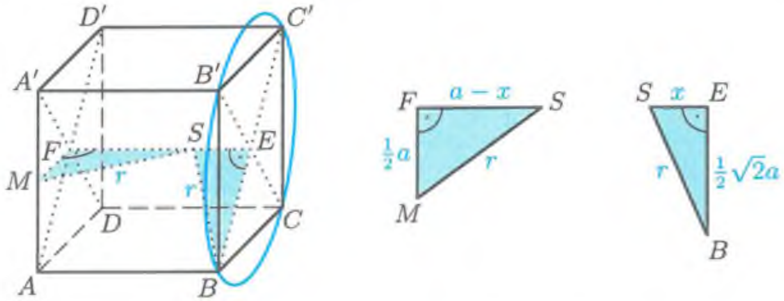
D′
C′
A′
B′
M
F
E
r
r
D
C
T
A
B
F
a − x
M
½√2a
r
A
M
x
E
½a
r
T

B-34

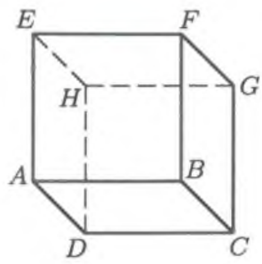


D′
C′
A′
B′
S
M
F
E
r
D
r
C
T
A
L
B
½a − y
S
M
½√2a
r
L
M
y
E
r
½a
T

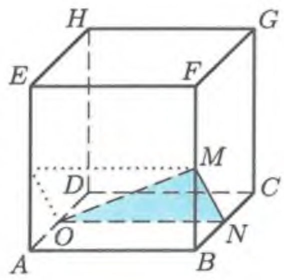
B-35



D′
C′
A′
B′
S
F
E
M
r
r
D
C
A
B
F
a − x
S
½a
r
M
S
x
E
r
½√2a
B

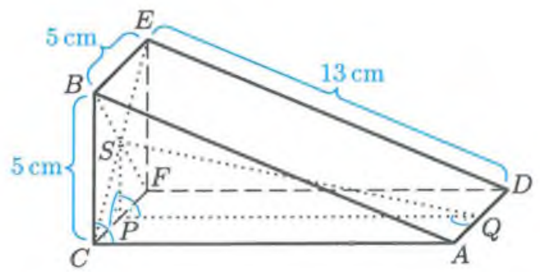

E
F
H
G
A
B
D
C

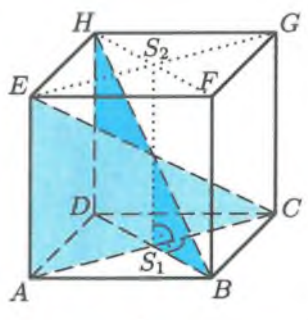
C-1


H
G
E
F
M
D
C
O
N
A
B

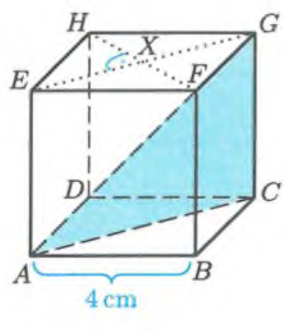
C-2

C-4

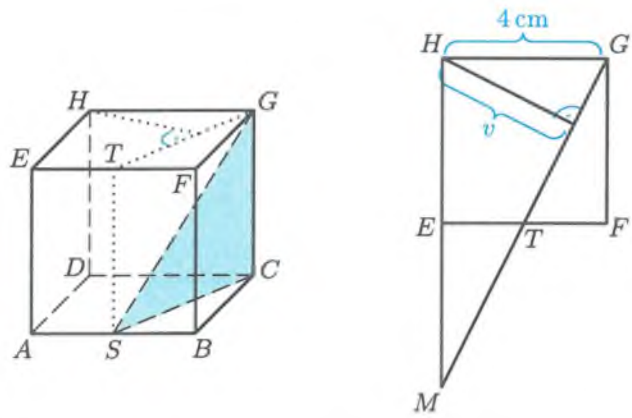

5 cm
E
13 cm
B
S
5 cm
F
D
P
Q
C
A


H
S_2
G
E
F
D
C
S_1
A
B

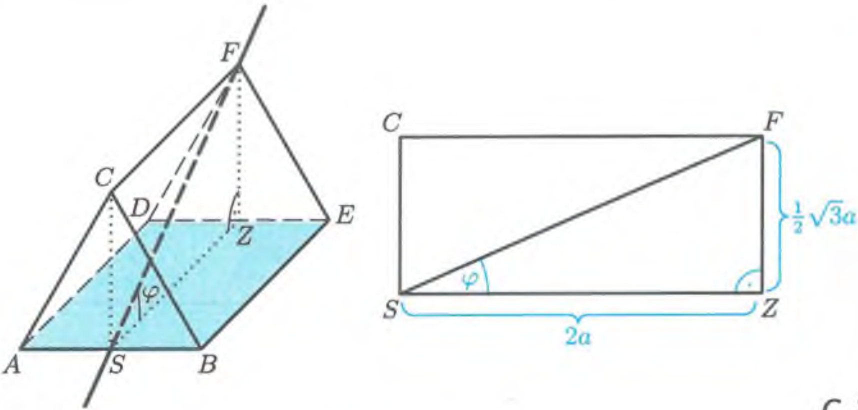
C-3


H
X
G
E
F
D
C
A
B
4 cm

C-5

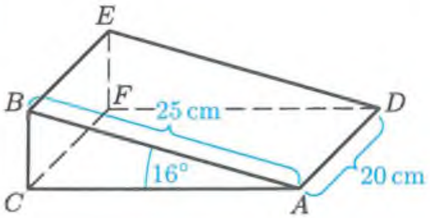

H
G
E
T
F
D
C
A
S
B
4 cm
v
M

C-6

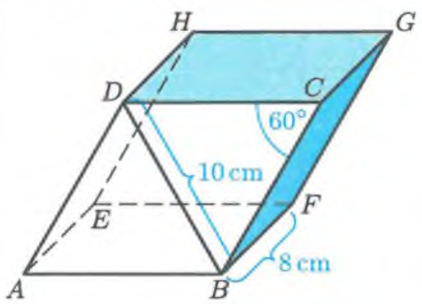

F
C
D
E
Z
φ
A
S
B
$\frac{1}{2}\sqrt{3}a$
2a

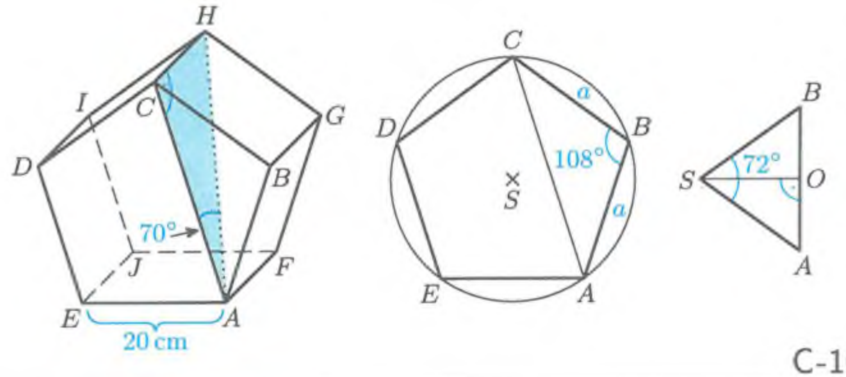
C-7

C-8


E
B
F
25 cm
D
16°
20 cm
C
A

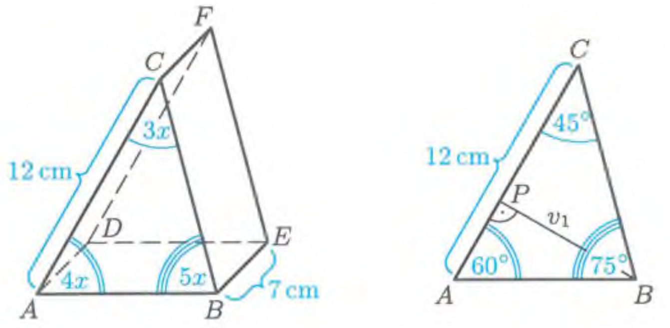
C-9

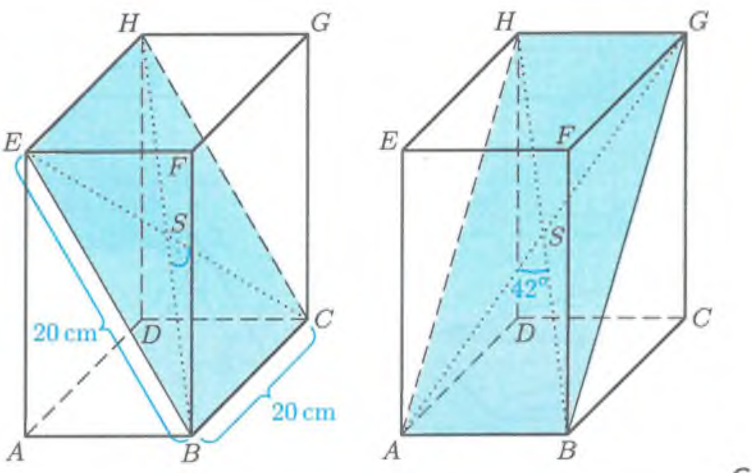

H
G
D
C
60°
10 cm
E
F
8 cm
A
B


H
I
C
G
D
B
70°
J
F
E
A
20 cm
C
a
D
B
108°
S
a
E
A
B
72°
S
O
A

C-10

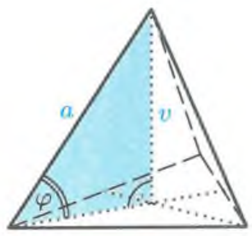
C-11


F
C
3x
12 cm
D
E
4x
5x
A
B
7 cm
C
45°
12 cm
P
v_1
60°
75°
A
B

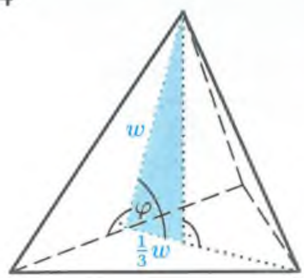

H
G
E
F
S
20 cm
D
C
20 cm
A
B
H
G
E
F
S
42°
D
C
A
B

C-12

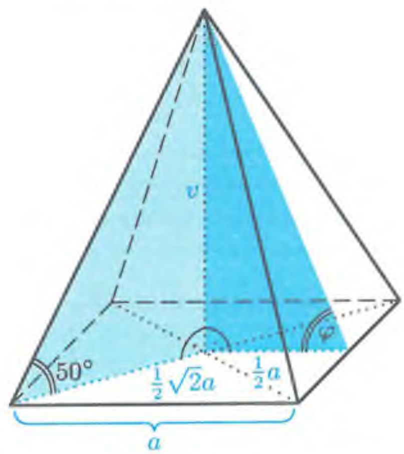
C-13

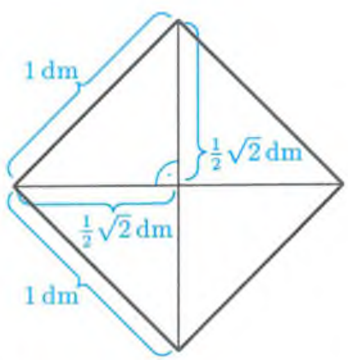


C-14

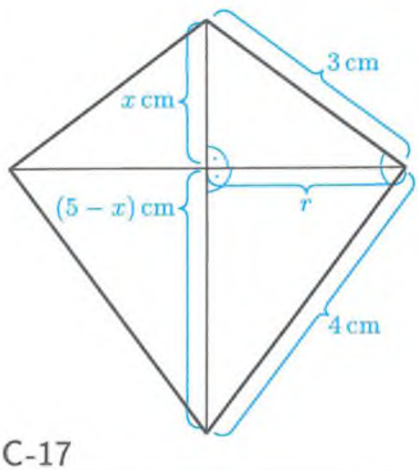


C-15



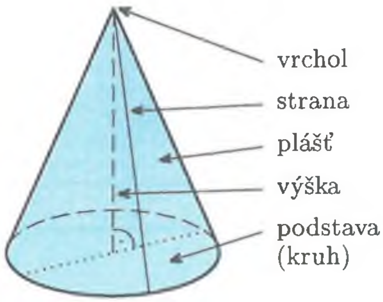


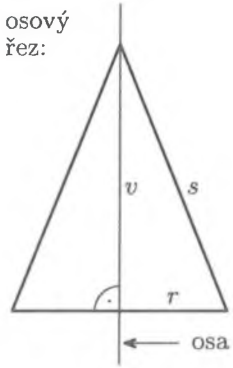
C-16



C-17

KUŽEL





Povrch kuželu:

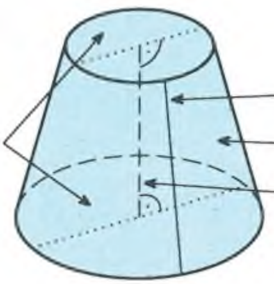
$$\boxed{S = S_\mathrm{p} + S_\mathrm{pl} = \pi r^2 + \pi r s}$$

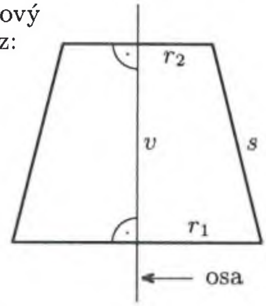
Objem kuželu:

$$\boxed{V = \tfrac{1}{3} S_\mathrm{p} \cdot v = \tfrac{1}{3} \pi r^2 v}$$

S_p .... obsah podstavy
S_pl .... obsah pláště
v .... výška
s .... délka strany
r .... poloměr podstavy

KOMOLÝ KUŽEL





Povrch komolého kuželu:

$$\boxed{S = S_1 + S_2 + S_{pl} = \pi r_1^2 + \pi r_2^2 + \pi s (r_1 + r_2)}$$

Objem komolého kuželu:

$$\boxed{V = \frac{1}{3} \pi v \left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right)}$$

S_1, S_2	....	obsahy podstav
S_{pl}	....	obsah pláště
v	....	výška
s	....	délka strany
r_1, r_2	....	poloměry podstav

RNDr. Jiří Herman, Ph. D.
PaedDr. Vítězslava Chrápavá
Mgr. Eva Jančovičová
Doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc.

Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií
Jehlany a kužely

Obálku navrhl Miloš Jirsa
Ilustrovala Lucie Voráčková
Vydalo nakladatelství Prometheus, spol. s r. o.,
Čestmírova 10, 140 00 Praha 4,
roku 2003
tel./fax: 241 740 283
e-mail: info@prometheus-nakl.cz
http://www.prometheus-nakl.cz
Edice Učebnice pro základní školy
Odpovědná redaktorka Marie Nováková
Sazbu a obrázky programy TEX a METAPOST
připravili Jura Charvát a Pavel Charvát
Vytiskly Tiskárny Havlíčkův Brod, a. s.,
Husova 1881, 580 01 Havlíčkův Brod

Dotisk 1. vydání

PROMETHEUS
9511197

ISBN 80-7196-225-2
9 788071 962250