PROMETHEUS

Prima
Sekunda
Tercie
Kvarta

Matematika

Funkce

Jč
m+f

FUNKCE f

závisle proměnná $\longrightarrow \boxed{y = f(x)}$

$\uparrow$ nezávisle proměnná

DEFINIČNÍ OBOR FUNKCE

$\mathsf{D} = \mathsf{D}(f)$ ... množina všech hodnot nezávisle proměnné

Každé hodnotě $x \in \mathsf{D}$ je funkcí f přiřazena jediná hodnota y.

NEJČASTĚJŠÍ ZADÁNÍ FUNKCE

$\swarrow$ $\downarrow$ $\searrow$

vzorcem

$f:\ y = 4x^2 - 7$

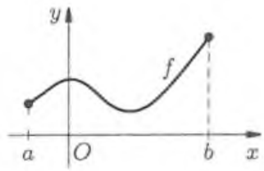
$\mathsf{D} = \mathsf{R}$

tabulkou

x	-2	3	5
$f(x)$	1	7	-2

$\mathsf{D} = \{-2, 3, 5\}$

grafem



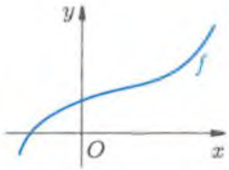
$\mathsf{D} = \langle a, b \rangle$

ZÁKLADY STATISTIKY

statistický soubor	zkoumaná skupina
statistická jednotka	prvek statistického souboru
rozsah souboru	počet statistických jednotek
znak	sledovaná informace
četnost dané hodnoty znaku	počet jednotek statistického souboru, které mají tuto hodnotu znaku
relativní četnost dané hodnoty znaku	podíl četnosti dané hodnoty znaku a rozsahu statistického souboru
aritmetický průměr	podíl součtu všech hodnot znaku a rozsahu souboru

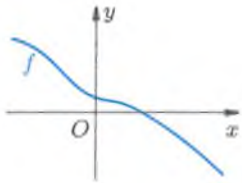
FUNKCE ROSTOUCÍ

Pro každá x_1, x_2 z definičního oboru, pro která $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) < f(x_2)$.



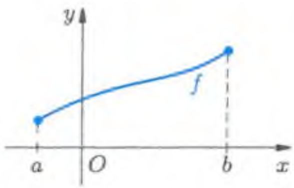
FUNKCE KLESAJÍCÍ

Pro každá x_1, x_2 z definičního oboru, pro která $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) > f(x_2)$.



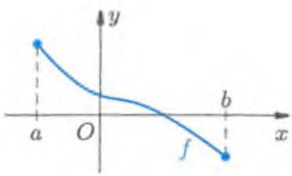
FUNKCE ROSTOUCÍ V INTERVALU $\langle a, b \rangle$

Pro každá x_1, x_2 z intervalu $\langle a, b \rangle$, pro která $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) < f(x_2)$.



FUNKCE KLESAJÍCÍ V INTERVALU $\langle a, b \rangle$

Pro každá x_1, x_2 z intervalu $\langle a, b \rangle$, pro která $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) > f(x_2)$.



RNDr. Jiří HERMAN, Ph.D.
PaedDr. Vítězslava CHRÁPAVÁ
Mgr. Eva JANČOVIČOVÁ
Doc. RNDr. Jaromír ŠIMŠA, CSc.

Prima
Sekunda
Tercie
Kvarta

Matematika

Funkce

PROMETHEUS

Publikace byla připravena ve spolupráci s JČMF.

Lektorovali RNDr. Jura Charvát, CSc., a RNDr. Milan Ryšavý.

Koordinátor učebnic matematiky pro nižší třídy víceletých gymnázií
doc. RNDr. Jindřich Bečvář, CSc.

Revizi výsledků provedl RNDr. Jura Charvát, CSc.

Schválilo MŠMT ČR, č. j. 10231/2000–22, dne 17. 1. 2000 k zařazení do seznamu učebnic pro základní školy a víceletá gymnázia jako součást ucelené řady učebnic pro vyučovací předmět matematika s dobou platnosti šest let.

1. vydání

ISBN 80-7196-182-5

OBSAH

Na vysvětlenou ... 6

Úvod ... 8

1 Funkce jako matematický pojem ... 9

Cvičení 1 ... 25

2 Přímá úměrnost ... 29

Cvičení 2 ... 37

3 Lineární funkce ... 38

Cvičení 3 ... 49

4 Absolutní hodnota ... 52

Cvičení 4 ... 59

5 Kvadratická funkce ... 60

Cvičení 5 ... 66

6 Nepřímá úměrnost ... 67

Cvičení 6 ... 75

7 Grafické řešení rovnic ... 76

Cvičení 7 ... 86

8 Slovní úlohy ... 87

Cvičení 8 ... 94

9 Diagramy ... 95

Cvičení 9 ... 99

10 Základy statistiky ... 102

Cvičení 10 ... 109

11 Souhrnná cvičení ... 111

Výsledky průběžných úkolů ... 122

Výsledky cvičení ... 124

Výsledky souhrnných cvičení ... 126

Na vysvětlenou …

Patnáctý sešit z řady učebnic matematiky pro nižší třídy víceletých gymnázií a pro třídy základních škol s rozšířenou výukou matematiky, který právě dostáváte do rukou, je věnován základním poznatkům o *funkcích*.

Připomínáme, že cílem našeho projektu je vytvořit ve formě řady 17 sešitů úplnou a soběstačnou pomůcku pro výuku matematiky v prvních čtyřech ročnících víceletého gymnázia. Proto jsou sešity sestaveny tak, aby je bylo možno použít jak při výkladu nové látky či jejím procvičování ve vyučovacích hodinách, tak i při domácí přípravě žáků. Kromě toho věříme, že bohatý příkladový materiál usnadní učitelům zadávání domácích úkolů a umožní žákům důkladně si probrané učivo procvičit. Zvídaví žáci také najdou mezi příklady řadu obtížnějších úloh.

Zmíněné cíle ovlivnily rozsah i formu textu. Zopakujme stručně, jakým způsobem:

Výklad nového učiva je zpravidla uveden motivující otázkou (značenou otazníkem na okraji stránky). Nové pojmy, poznatky a pravidla jsou pak podrobně vysvětlovány a zdůvodňovány tak, aby je žák v případě potřeby mohl zvládnout samostatným studiem. Nezakrýváme, že naše učebnice jsou psány pro žáky s hlubším zájmem o matematiku a další přírodovědné předměty. Těm jsou určeny i drobnějším písmem (petitem) tištěné pasáže, které přesahují standardní rámec učiva.

U řešených příkladů někdy uvádíme více různých postupů vedoucích k cíli, aby je žáci mohli sami porovnat. Tak se je pokoušíme naučit tomu, co je pro práci v matematice zásadní: umět se podívat na jednu situaci z různých hledisek. Rovněž považujeme za důležité, aby se žáci naučili vlastní řešení srozumitelně a přehledně zapisovat. Proto jsme do učebnice zařadili ukázky „opsané“ ze žákovských sešitů, které by mohly žákům posloužit jako vzory takových zápisů.

Důležité výsledky výkladu jsou shrnuty ve *větách*, které jsou graficky vyznačeny *rámečky*. Nejedná se nám v žádném případě o signál k bezduchému memorování, ale o výzvu, aby se žáci nad obsahem těchto vět důkladně zamysleli a správně je pochopili. To lze kontrolovat *průběžnými úkoly*, v textu značenými ➡. Ke kontrole zvládnutí větších celků jsou určena *cvičení* uváděná za každou kapitolou. Závěrečná *souhrnná cvičení* tvoří vlastně sbírku úloh k tématu celého sešitu.

Ve srovnání s ostatními sešity naší řady jsme tentokrát vynechali kapitolu *Úlohy z matematické olympiády*. Úlohy o funkcích jsou sice do této soutěže zařazovány často, avšak výhradně do vyšších kategorií určených studentům maturitních a předmaturitních ročníků. K zvládnutí takových úloh jsou potřebné znalosti, které žáci získají až ve vyšších ročnících gymnázia, kdy se k tematice funkcí ještě vrátí.

Většina úkolů, cvičení i souhrnných cvičení je na konci sešitu opatřena výsledky, které jsou často doprovázeny obrázky grafů funkcí. Jejich „tvar“ podstatně závisí na volbě jednotek délky na souřadnicových osách, proto se mohou od grafických řešení žáků lišit.

Příklady určené k samostatné práci žáků označujeme někdy (pro lepší orientaci) těmito symboly s uvedenými významy:

□ – lze řešit zpravidla zpaměti
$*$ – obtížnější příklad
$**$ – velmi obtížný příklad
■ – zajímavý příklad (podle našeho názoru)

Na závěr připojujeme přehled titulů všech sešitů naší řady:

Prima

Úvodní opakování
Kladná a záporná čísla
Dělitelnost
Osová a středová souměrnost

Sekunda

Racionální čísla. Procenta
Trojúhelníky a čtyřúhelníky
Hranoly
Výrazy 1

Tercie

Rovnice a nerovnice
Kruhy a válce
Úměrnosti
Geometrické konstrukce
Výrazy 2

Kvarta

Rovnice a jejich soustavy
Funkce
Podobnost a funkce úhlu
Jehlany a kužely

ÚVOD

Možná jste se v prvních letech školní docházky někdy zamysleli nad otázkou, co vás čeká v hodinách matematiky o několik ročníků výše. Budou to jen náročnější výpočty s velkými čísly a rýsování složitějších útvarů v rovině? Nyní se zase můžete ptát, jaké matematické problémy řeší maturanti nebo studenti vysokých škol. A o čem vlastně bádají lidé, pro které se matematika stala životní profesí? Jaké hranice oddělují matematiku od ostatních vědních oborů?

Odpovědi na poslední otázky nejsou jednoduché. V hodinách matematiky se naše představy o tomto předmětu rozšiřují postupně, vždy když se seznámíme s některým novým základním pojmem nebo přístupem. První z důležitých „proměn" matematiky jsme již poznali, když jsme od výpočtů s konkrétními čísly přešli k *symbolickým výpočtům* s písmeny. (Písmena v roli *neznámých čísel* nám pak umožnila řešit řadu úloh metodou rovnic.)

V tomto sešitě se začneme věnovat druhému, ještě důležitějšímu průlomu hranic, které až do 16. století vymezovaly svět matematiky. Je jím přechod ke studiu *proměnných veličin*, přesněji *závislostí* mezi nimi. Nebudeme nyní tuto změnu ve vývoji matematiky podrobně popisovat, přirovnejme ji pouze k proměně fotografického přístroje, který zachycuje *jednotlivé okamžiky* světa v hledáčku, ve filmovou kameru, jež zaznamenává *průběh* změn v čase (pohyb). Toto přirovnání je přiléhavé i tím, že jedním z prvních úspěchů „nové" matematiky byla metoda anglického fyzika *Isaaca Newtona* (1642–1727), kterou lze stanovit okamžitou rychlost pohybujícího se bodu ze vzorců pro závislosti jeho souřadnic na čase (dnes říkáme, že takové souřadnice jsou *funkce* času). Newton tak vyřešil jeden z důležitých úkolů, které před matematiku 17.–18. století postavil bouřlivý rozvoj přírodních věd, zejména mechaniky a astronomie. Mnohé z nich vedly k následujícím otázkám: jak početně určit tečnu k dané křivce v daném bodě, jak vypočítat obsah rovinného útvaru ohraničeného danými křivkami, jak vypočítat objem tělesa ohraničeného danými plochami (předpokládá se, že zmíněné křivky a plochy jsou dány rovnicemi popisujícími závislost souřadnic bodů, které tyto křivky a plochy vytvářejí). K největším průkopníkům „matematiky závislých veličin" kromě I. Newtona patřili *G. W. Leibniz*, *bratři Bernoulliové*, *J. L. Lagrange* a *L. Euler*.

1 FUNKCE JAKO MATEMATICKÝ POJEM

Podle starořeckého učence *Aristotela* (384 – 322 př. Kr.) je funkcí jazyka vyjadřovat myšlenky lidí. Z hodin biologie zase víme, jaké funkce zastávají v lidském těle srdce, mozek a jiné orgány. V matematice má slovo *funkce* jiný význam. V této kapitole se s tímto (patrně nejvýznamnějším) pojmem novověké matematiky poprvé seznámíme. Jeho dílčí stránky budeme odkrývat postupně. Nejprve připomeneme, co již víme o veličinách a jejich závislostech.

Co je závislost veličin?

?

V sešitě *Úměrnosti* jsme posuzovali, co je *závislost* veličin. Ilustrovali jsme to nejdříve na příkladech z běžného života:

- Cena autobusové jízdenky závisí na délce trasy, kterou jedete.
- Dráha, kterou urazíte při pohybu stálou rychlostí, závisí na době, po kterou se pohybujete.
- Výška rtuťového sloupce teploměru závisí na okolní teplotě.
- Délka noci závisí na ročním období.
- Doba, za kterou uběhnete stometrovou trať, závisí na vaší kondici a úsilí, které vynaložíte.

Vysvětlili jsme, že každá taková závislost vyjadřuje vzájemný vztah dvou nebo více veličin. Některé veličiny můžeme zachytit jen přibližně, jiné je možné *změřit* – tzn. vyjádřit čísly v určitých jednotkách. Právě takovým veličinám a jejich závislostem se v matematice věnujeme.

Jednoduché příklady závislostí měřitelných veličin již dobře znáte. Jsou to *přímá úměrnost* a *nepřímá úměrnost*.

Přímo úměrné jsou například:

- délka strany čtverce a jeho obvod
- ujetá dráha a doba jízdy při pohybu stálou rychlostí

Nepřímo úměrné jsou například:

- rychlost auta a čas potřebný k překonání dané vzdálenosti
- počet pracovníků a doba, kterou potřebují ke splnění určitého úkolu, pracují-li všichni se stejnou výkonností

Přímá a nepřímá úměrnost jsou případy závislostí, kdy je jedna veličina závislá na *jediné* jiné veličině. V tomto sešitě budeme studovat rozmanité závislosti veličin. Vždy však bude jedna veličina záviset na jediné jiné veličině. Seznámíme se při tom s jazykem, který matematikové při studiu takových závislostí používají. Objasníme, co vše k zadání *funkce* patří.

? Jak se funkce určuje a zapisuje vzorcem?

Podívejme se nyní podrobněji na závislost mezi obvodem o čtverce a délkou a jeho strany. Jak víme, tuto závislost popisujeme vzorcem

$$o = 4a.$$

Tento vzorec je zapsán tak, že přímo vyjadřuje, jak závisí veličina o na veličině a. Budeme-li za a dosazovat různé délky, vypočteme z uvedeného vzorce snadno příslušné obvody o. Říkáme, že délka a je *nezávisle proměnná* (můžeme ji měnit libovolně), zatímco obvod o je *závisle proměnná* (mění se v závislosti na změně veličiny a).

V matematice obvykle „odhlížíme“ od geometrické nebo fyzikální podstaty proměnných veličin a všímáme si pouze, jak si odpovídají jejich číselné hodnoty. (Jsou to vyjádření zkoumaných veličin v určitých geometrických nebo fyzikálních jednotkách.) Nezávisle proměnnou pak nejčastěji značíme písmenem x a závisle proměnnou písmenem y. Hodnoty x a y jsou tedy *čísla*. Například čtverec o straně délky x centimetrů má obvod y centimetrů.

Skutečnost, že proměnná y závisí na proměnné x (hodnota y je určena hodnotou x), vyjadřujeme rčením: „Proměnná y je *funkcí* proměnné x“, stručněji „y je funkcí x“.

Zmíněná závislost číselné hodnoty y obvodu čtverce ($o = y\,\mathrm{cm}$) na číselné hodnotě x délky jeho strany ($a = x\,\mathrm{cm}$) je funkce určená vzorcem

$$y = 4x.$$

Jiné funkce jsou určeny například vzorci:

$$y = 2x + 3, \quad y = x^2 - 2, \quad y = \frac{3}{x}$$

V takových zápisech stojí na levé straně závisle proměnná, na pravé straně výraz s nezávisle proměnnou.

Obecně zapisujeme

$$y = f(x)$$

a čteme „ypsilon se rovná ef iks.“

Písmeno f je označení dané funkce. Označuje také vzorec (pravidlo, předpis) pro výpočet hodnoty y z hodnoty x. Například:

$$f(x) = 2x + 3, \quad f(x) = x^2 - 2, \quad f(x) = \frac{3}{x}$$

Pracujeme-li najednou s několika funkcemi, můžeme pro jejich označení použít i jiná písmena nebo je rozlišit indexy. Například:

$$g(x) = x - 3, \quad h(x) = \frac{x^2}{x-1}, \quad f_1(x) = 1 - x^2, \quad f_2(x) = -5x$$

Kulaté závorky jsme až dosud v aritmetice a algebře používali při zápisech složitějších výrazů, kde určovaly pořadí prováděných početních operací. V geometrii jsme zase používali kulaté závorky například při zápisu $k(S; r)$ kružnice k se středem S a poloměrem r. V zápisu $y = f(x)$ je role závorek jiná. Vyznačují místo, kam zapisujeme nezávisle proměnnou. Můžeme tam zapsat písmeno označující tuto proměnnou, ale také konkrétní hodnotu této proměnné. Tak například pro funkci $f(x) = 2x + 3$ hodnotě $x = 2$ odpovídá hodnota $f(2) = 2 \cdot 2 + 3 = 7$.

Říkáme, že číslo 7 *je hodnota* dané funkce f v čísle 2, nebo také, že funkce f *nabývá* v čísle 2 *hodnoty* 7. Můžeme také říci, že číslu 2 funkce f *přiřazuje* číslo 7 (číslu 2 *je přiřazeno* číslo 7).

Vypočtěme ještě několik hodnot zmíněné funkce f:

$$\begin{aligned} x = 0: &\quad f(0) = 2 \cdot 0 + 3 = 3 \\ x = 7: &\quad f(7) = 2 \cdot 7 + 3 = 17 \\ x = -3: &\quad f(-3) = 2 \cdot (-3) + 3 = -3 \\ x = \tfrac{1}{2}: &\quad f\left(\tfrac{1}{2}\right) = 2 \cdot \tfrac{1}{2} + 3 = 4 \end{aligned}$$

Vypočtené funkční hodnoty přehledně zapíšeme do tabulky:

x	2	0	7	-3	$\frac{1}{2}$
$f(x)$	7	3	17	-3	4

V každém sloupci této tabulky je pod hodnotou nezávisle proměnné x zapsána odpovídající funkční hodnota $f(x)$.

Ze vzorce $f(x) = 2x + 3$ snadno zjistíme, ve kterém čísle x nabývá funkce f dané hodnoty, například 15. Stačí totiž vyřešit rovnici

$$2x + 3 = 15.$$

Jejím jediným řešením je $x = 6$. To znamená, že $f(6) = 15$ a $f(x) \neq 15$ pro každé $x \neq 6$.

Obecný zápis $y = f(x)$ používáme obvykle tehdy, když vzorec pro výpočet y pomocí x neznáme nebo když není v dané chvíli důležitý. Pokud však funkci (např. $f(x) = 2x + 3$) právě zadáváme, dáváme přednost zápisu

$$f:\ y = 2x + 3$$

(čteme „funkce ef je dána vzorcem: ypsilon se rovná ...“). Tento zápis funkce má oproti vzorci $f(x) = 2x + 3$ tu výhodu, že určuje také označení závisle proměnné (v našem případě písmeno y).

Někdy se funkce zadává zápisem

$$f:\ x \mapsto 2x + 3$$

(čteme „funkce ef přiřazuje proměnné iks hodnotu dvě iks plus tři“).

☐ **1.** Vypočtěte $f(3)$, je-li:

a) $f:\ y = x + 2$ b) $f:\ y = 2 - 3x$ c) $f:\ y = x^2$

d) $f:\ y = 3x^2 - 1$ e) $f:\ y = \dfrac{1}{x}$ f) $f:\ y = \sqrt{x+1}$

2. Je dána funkce $g:\ y = x^2 + 5$. Vypočtěte:

a) $g(0)$ b) $g(1)$ c) $g(5)$ d) $g(-1)$

e) $g(-5)$ f) $g\left(\frac{1}{3}\right)$ g) $g\left(-\frac{1}{2}\right)$ h) $g(-\sqrt{2})$

3. Je dána funkce $f:\ y = 3x + 5$. Určete, pro které x platí:

a) $f(x) = 8$ b) $f(x) = 0$ c) $f(x) = -2$ d) $f(x) = \frac{1}{2}$

4. Doplňte tabulku

x	-1	0	1			
$f(x)$				-1	0	1

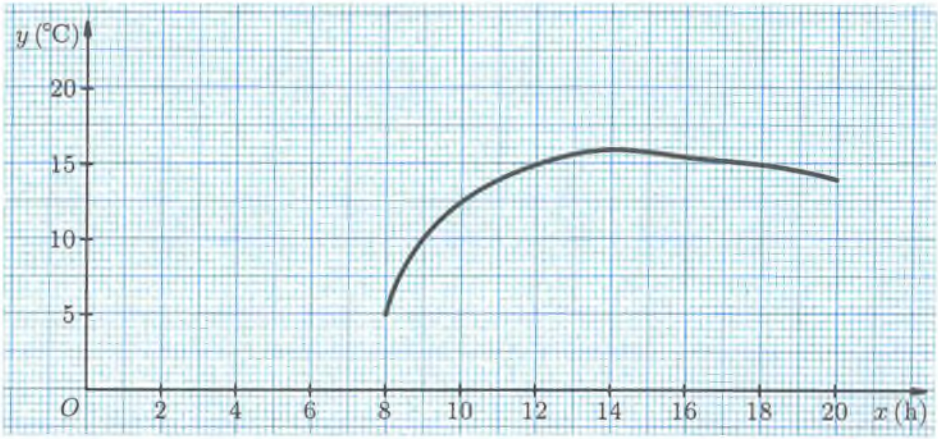
pro funkci $f:\ y = 4 - 3x$.

5. Zapište vzorcem $y = f(x)$ funkci f vyjadřující, že čtverec o straně x metrů má obvod y centimetrů.

Jaké jsou jiné způsoby zadání funkce?

?

V životě se běžně setkáváme se závislostmi veličin, které neumíme vyjádřit vzorcem. Na obrázku je zachyceno, jak se jednoho dne od 8 do 20 hodin v Brně měnila teplota vzduchu:



Za nezávisle proměnnou zde považujeme čas v hodinách vyjádřený číslem x z intervalu $\langle 8, 20\rangle$. Závisle proměnnou je teplota ve stupních Celsia vyjádřená číslem y ležícím v intervalu $\langle 5, 16\rangle$, jak jsme vyčetli z grafu.

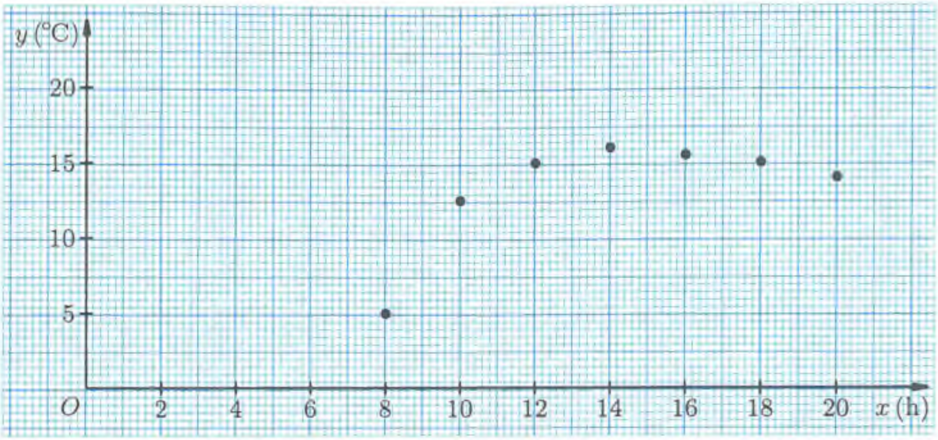
Skutečnost, že proměnná y je funkcí proměnné x, v této situaci znamená, že každému číslu $x \in \langle 8, 20\rangle$ je přiřazena jediná hodnota $y \in \langle 5, 16\rangle$. (S jistou dávkou přesnosti ji můžeme vyčíst z grafu.) Proto i v tomto případě píšeme

$$y = f(x),$$

i když tuto funkci f neumíme zapsat vzorcem, tj. neznáme pravidlo, jak z čísla x vypočítat funkční hodnotu $f(x)$.

Teplotu ovzduší ovlivňuje řada faktorů. Denní doba, která je určena polohou daného místa na zeměkouli vůči Slunci, je pouze jedním z nich.
Mezi časem a teplotou ovzduší proto neexistuje zákonitost, kterou by bylo možno vyjádřit matematickým vzorcem. Přesto jde o závislost ve významu matematické funkce: z hlediska fyziky totiž nelze připustit, že by v některém časovém okamžiku na zkoumaném místě teplota vzduchu vůbec neexistovala nebo měla více než jednu hodnotu.

Předchozí obrázek byl pořízen na základě údajů získaných pomocí přístroje zvaného *termograf*, který měří a zapisuje teplotu „spojitě", tj. v každém okamžiku. Kdybychom měřili teplotu jen každou celou sudou hodinu, dostali bychom „chudší" obrázek:



I tento obrázek určuje funkci. Ta se od předchozí funkce f liší tím, že proměnná x nabývá pouze sedmi různých hodnot: $x \in \{8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$. U funkce f bylo hodnot x nekonečně mnoho, tvořily celý interval $\langle 8, 20 \rangle$. Proto novou, „chudší" funkci označíme jiným písmenem, například g, a celou ji zachytíme tabulkou:

x	8	10	12	14	16	18	20
$g(x)$	5	12,5	15	16	15,5	15	14

(Funkci f jsme tabulkou zachytit nemohli, musela by mít nekonečně mnoho sloupců.)

Vysvětlili jsme, že v případech, kdy funkce není určena vzorcem, může k jejímu zadání posloužit graf nebo tabulka. Takové zadání funkce však s sebou přináší určitá praktická omezení. U funkce zadané grafem můžeme funkční hodnoty určovat obvykle jen s jistou přesností. Pouhou tabulkou je možné zadat funkci jen tehdy, je-li množina hodnot nezávisle proměnné konečná (a má „málo" prvků).

? Co je *definiční obor* funkce?

U příkladu s měřením teploty ovzduší jsme vysvětlili, že pojem funkce zahrnuje nejen to, jak si odpovídají hodnoty závisle a nezávisle proměnné, ale i to, kolik různých hodnot nezávisle proměnné k dané funkci patří a jakou množinu tvoří.

Prvnímu obrázku odpovídala funkce

$$y = f(x), \quad x \in \langle 8, 20 \rangle,$$

zatímco druhému obrázku (podle občasného měření) funkce

$$y = g(x), \quad x \in \{8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}.$$

Interval $\langle 8, 20 \rangle$ se nazývá *definiční obor* funkce f. Definičním oborem funkce g je sedmiprvková množina $\{8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$. Protože se tyto definiční obory liší (jsou to různé množiny čísel), považujeme funkce f a g za různé (a proto jsme je již dříve označili různými písmeny f a g).

Zdůrazněme, že rovnost $f(x) = g(x)$ má smysl jen pro $x \in \{8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$, tedy ne například pro $x = 9$, neboť $x = 9$ nepatří do definičního oboru funkce g.

Již dříve jsme vysvětlili, že závislost číselné hodnoty obvodu čtverce na číselné hodnotě délky jeho strany popisuje funkce $y = 4x$. Jejím definičním oborem je interval $(0, \infty)$, neboť pro každé $x > 0$ existuje čtverec o straně x cm. Proto „úplný“ zápis dané funkce bude vypadat takto:

$$y = 4x, \quad x \in (0, \infty)$$

K zadání funkce $y = f(x)$ patří také určení množiny všech hodnot nezávisle proměnné x. Tuto množinu nazýváme **definiční obor** funkce f a značíme ji obvykle písmenem D. Pro $x \in \mathsf{D}$ také říkáme, že funkce f **je definována** v čísle x.

Chceme-li zdůraznit, že množina D je definiční obor funkce f, píšeme někdy místo pouhého písmena D podrobněji $\mathsf{D}(f)$, popř. D_f. Obecně tedy funkci f zapisujeme

$$y = f(x), \quad x \in \mathsf{D},$$

nebo

$$y = f(x), \quad x \in \mathsf{D}(f).$$

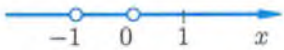
U funkce $y = f(x)$ dané vzorcem definiční obor často neuvádíme. V takovém případě platí dohoda, že se za definiční obor považuje množina všech takových reálných čísel x, která lze do příslušného vzorce $y = f(x)$ dosadit.

Tak například u funkce $f_1 \colon\ y = \dfrac{1}{x}$ můžeme za x dosadit každé reálné číslo kromě čísla 0. Proto platí:

$$\mathsf{D}(f_1) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$$

Možná vás takový zápis definičního oboru trochu překvapil. Obrázek číselné osy však potvrzuje, že když z množiny R všech reálných čísel vyloučíme číslo 0, bude „zbytek“ množiny R tvořen dvěma intervaly $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$.

Funkce $f_2 \colon\ y = \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{x+1}$ je definována pro všechna reálná čísla x s výjimkou čísel $x = 0$ a $x = -1$.



Definičním oborem funkce f_2 je tedy sjednocení tří intervalů:

$$\mathsf{D}(f_2) = (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, \infty)$$

Připomeňme ještě, že výraz $\sqrt{x}$ je definován jen pro ta reálná čísla x, která jsou nezáporná (větší nebo rovna nule). Proto funkce $f_3 \colon\ y = \sqrt{x}$ má za definiční obor interval:

$$\mathsf{D}(f_3) = \langle 0, \infty)$$

Příklad 1. Určete definiční obor funkce:

a) $f \colon\ y = \dfrac{1}{x^2 - 3x - 4}$ b) $f \colon\ y = \sqrt{7 - 3x}$

Řešení jsme převzali z Petřina sešitu:

a) $f\colon y = \dfrac{1}{x^2 - 3x - 4}$

$x^2 - 3x - 4 \neq 0$

$x^2 - 3x - 4 = 0$

$(x+1)(x-4) = 0$

$\boxed{x_1 = -1}$ $\boxed{x_2 = 4}$

$x \neq -1$

$x \neq 4$

$$\underline{\underline{\mathcal{D}(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; 4) \cup (4; \infty)}}$$

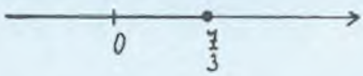
b) $f\colon y = \sqrt{7 - 3x}$

$7 - 3x \geqq 0$

$-3x \geqq -7 \quad / \cdot (-1)$

$3x \leqq 7 \quad / : 3$

$x \leqq \frac{7}{3}$



$$\underline{\underline{\mathcal{D}(f) = \left(-\infty; \tfrac{7}{3}\right\rangle}}$$

6. Určete definiční obor funkce:

a) $f\colon y = \dfrac{2}{x+3}$

b) $f\colon y = 2x + 3$

c) $f\colon y = \dfrac{1}{2x+1} + \dfrac{1}{2-x}$

d) $f\colon y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 4x + 4}$

e) $f\colon y = \dfrac{1}{5x^2 + 6x}$

f) $f\colon y = \dfrac{3x - 4}{x^2 - 5x + 6}$

g) $f\colon y = \sqrt{x - 7}$

h) $f\colon y = \sqrt{8 - 3x}$

Často je definiční obor funkce vymezen okolnostmi, za kterých tuto funkci zkoumáme, například geometrickým nebo fyzikálním významem proměnných. Příkladem je funkce

$$f:\ y = 4x, \quad x \in (0, \infty),$$

která vyjadřuje závislost obvodu čtverce na délce jeho strany. Uvedený definiční obor $(0, \infty)$ je „chudší" než množina *všech* čísel x, která můžeme do vzorce $y = 4x$ dosadit. (Je to množina všech reálných čísel.)

Jiným příkladem je funkce g, která vyjadřuje, že x rohlíků stojí y Kč (za předpokladu, že 1 rohlík stojí 1,40 Kč):

$$g:\ y = 1{,}4 \cdot x, \quad x \in \mathsf{N}$$

Připomeňme, že písmenem N označujeme množinu všech přirozených čísel $\{1, 2, 3, \dots\}$. I když do vzorce $y = 1{,}4 \cdot x$ můžeme dosadit libovolné $x \in \mathsf{R}$, počet rohlíků je vždy vyjádřen přirozeným číslem.

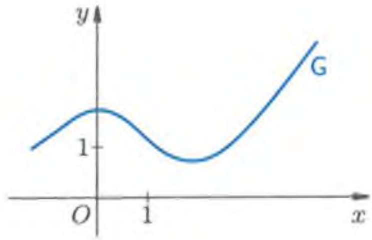
Příkladem funkce s konečným definičním oborem je funkce

$$h:\ y = 20 - x, \quad x \in \{0, 1, 2, \dots, 20\}.$$

Tato funkce vyjadřuje počet y bonbonů, které zůstanou v sáčku s 20 bonbony, když z něho x bonbonů sníme nebo rozdáme.

? Co je *graf* funkce?

Při zkoumání funkce je výhodné umět si představit, jak se při změnách nezávisle proměnné mění závisle proměnná, někdy říkáme „jak funkce probíhá". K tomu slouží *graf funkce*. Může vypadat tak, jak je znázorněn na obrázku:

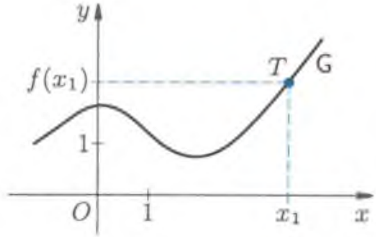


Vidíte modrou čáru G, zakreslenou v pravoúhlé soustavě souřadnic. Je to množina bodů v rovině, která je grafem jisté funkce

$$y = f(x), \quad x \in \mathsf{D}.$$

Které body do množiny G patří? Právě ty body $[x, y]$, pro které $x \in \mathsf{D}$ a zároveň $y = f(x)$.

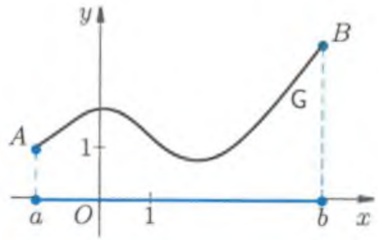
Bod T z obrázku má x-ovou souřadnici rovnu číslu x_1, y-ovou souřadnici rovnu číslu $f(x_1)$. Bod $T[x_1, f(x_1)]$ je tedy bodem grafu funkce f. Graf G této funkce má nekonečně mnoho bodů.



Z dalšího obrázku vyčteme, že definičním oborem D funkce f je interval $\langle a, b\rangle$:

$$\mathsf{D} = \langle a, b\rangle$$

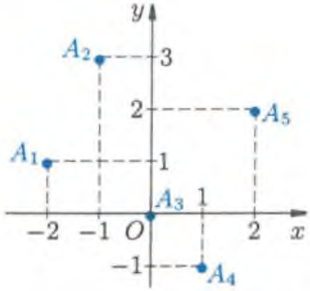
Je to množina x-ových souřadnic všech bodů grafu G funkce f.



Chceme-li zvýraznit, že „krajní“ body A, B do grafu funkce f patří, vyznačíme je plnými puntíky (podobně jako jsme to dělali při znázorňování uzavřených intervalů na číselné ose).

Je-li definičním oborem D dané funkce konečná množina, je také graf této funkce konečná množina (která má tolik bodů, kolik prvků má množina D). Sestrojme například graf G funkce g dané tabulkou:

x	-2	-1	0	1	2
$g(x)$	1	3	0	-1	2

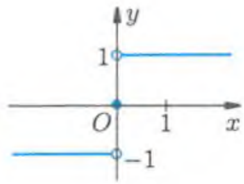


$$\mathsf{G} = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$$

V dané pravoúhlé soustavě souřadnic je grafem funkce $y = f(x)$, $x \in \mathrm{D}$, množina všech bodů $[x, f(x)]$, kde $x \in \mathrm{D}$.

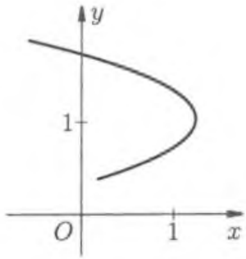
Matematici často pracují s funkcemi, které mají nekonečné definiční obory, avšak jejich grafy nejsou „souvislé“ čáry. Příkladem je funkce $y = s(x)$, která má tři různé funkční hodnoty:

- $s(x) = -1$ pro každé $x < 0$
- $s(x) = 0$ pro $x = 0$
- $s(x) = 1$ pro každé $x > 0$

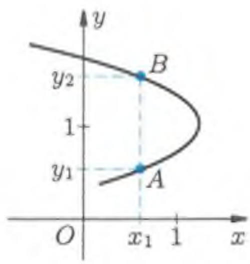


Graf funkce s je znázorněn na obrázku. Prázdnými kroužky je vyznačeno, že body $[0, -1]$ a $[0, 1]$ do grafu nepatří.

Na dalším obrázku vidíte čáru, která *není grafem žádné funkce*.



Vysvětlíme nyní proč. Na této čáře totiž leží body $A[x_1, y_1]$ a $B[x_1, y_2]$, které mají tutéž x-ovou souřadnici x_1 a různé y-ové souřadnice $y_1 \neq y_2$. Kdyby tato čára byla grafem některé funkce $y = f(x)$, muselo by platit $y_1 = f(x_1)$ a zároveň $y_2 = f(x_1)$. To by znamenalo, že hodnotě x_1 odpovídají dvě různé funkční hodnoty y_1 a y_2.



S takovou situací jsme se dosud nesetkali. U funkce $y = f(x)$ dané vzorcem je každému $x \in \mathrm{D}(f)$ tímto vzorcem přiřazena *jediná* funkční hodnota. (Dosadíte-li dvakrát do téhož výrazu $f(x)$ stejné číslo x a vyjdou-li vám dva různé výsledky, určitě jste někde udělali chybu.)

Také u grafického znázornění závislosti teploty na čase nebylo možné, aby v jednom časovém okamžiku byly v daném místě naměřeny dvě odlišné teploty.

Dospěli jsme k jedné z nejdůležitějších vlastností, kterou matematici vložili do pojmu funkce:

Každé hodnotě nezávisle proměnné (z definičního oboru) je funkcí přiřazena **jediná** *hodnota závisle proměnné (zvaná funkční hodnota).*

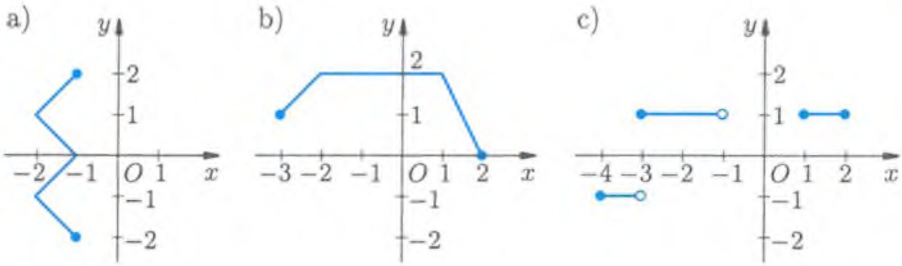
Proto například tabulka

x	-1	2	0	4	2
y	0	3	0	1	-1

neodpovídá žádné funkci $y = f(x)$. Hodnotě $x = 2$ jsou totiž přiřazeny dvě různé hodnoty y: $y = 3$ a $y = -1$.

I když nebudeme uvádět příklady, poznamenejme, že grafy některých funkcí jsou natolik „složité“ množiny, že je vůbec nedokážeme znázornit. Grafem funkce je totiž libovolná neprázdná množina G bodů roviny, která má s každou přímkou rovnoběžnou s osou y společný *nejvýše jeden* bod.

7. Rozhodněte, zda na obrázku je graf některé funkce:



□ **8.** Rozhodněte, zda daná tabulka zadává funkci:

a)

x	4	5	6	7
y	8	8	8	8

b)

x	2	-2	$\sqrt{4}$	$-\frac{4}{2}$	0
y	1	-1	3	-2	5

Praktický význam grafů funkcí je tak veliký, že se v matematice na střední i vysoké škole budete často věnovat otázce, *jak znázornit graf funkce dané vzorcem*. Pro nejjednodušší vzorce, jako jsou například

$$y = 2x, \quad y = \frac{3}{x}, \quad y = -x^2,$$

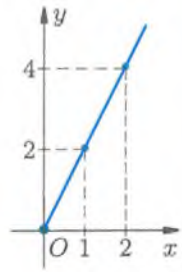
se to naučíte už v dalších kapitolách tohoto sešitu.

Domluvíme se, že kvůli stručnému vyjadřování budeme místo „funkce daná vzorcem $y = \dots$" někdy říkat „funkce $y = \dots$".

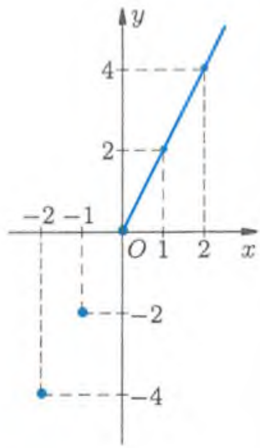
O grafu funkce $y = 2x$ se podrobně zmíníme již nyní. V sešitě *Úměrnosti* jsme vysvětlili, že grafem přímé úměrnosti

$$y = 2x, \quad x \in \langle 0, \infty)$$

je polopřímka s počátkem $[0, 0]$. Je tvořena body $[x, 2x]$ pro nezáporné hodnoty x. Je jasné, že celý graf (celou polopřímku) nemůžeme do obrázku nakreslit.

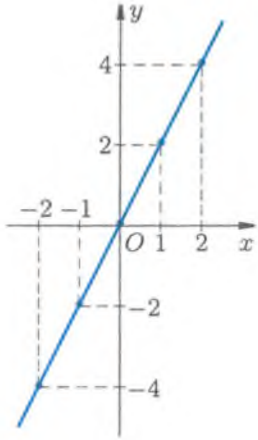


Do vzorce $y = 2x$ však můžeme dosazovat i záporné hodnoty proměnné x. Například pro $x = -1$ vychází $y = -2$, pro $x = -2$ vychází $y = -4$. Příslušné dva body $[-1, -2]$ a $[-2, -4]$ doplníme do obrázku.

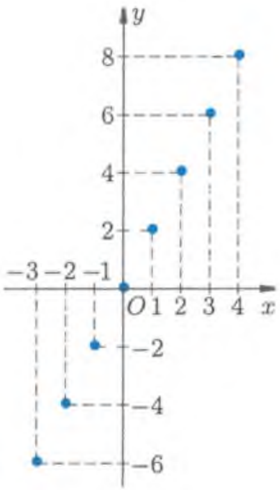


Doplníme-li k předchozí polopřímce body $[x, 2x]$ pro všechny záporné hodnoty x, získáme celou přímku, která je grafem funkce

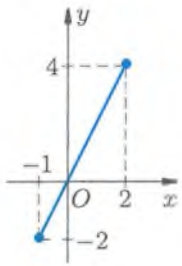
$$y = 2x, \quad x \in \mathsf{R}.$$



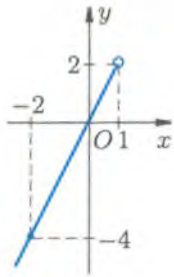
Podívejte se, jak vypadají grafy funkcí daných stejným vzorcem $y = 2x$ s různými definičními obory:



$y = 2x, \quad x \in \mathsf{Z}$



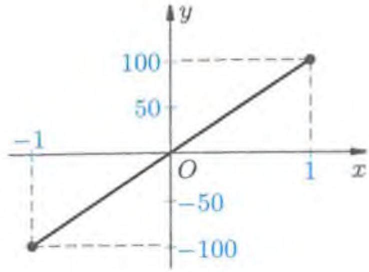
$y = 2x, \quad x \in \langle -1, 2 \rangle$



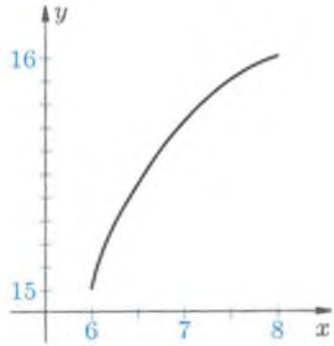
$y = 2x, \quad x \in (-\infty, 1)$

Grafy některých funkcí je výhodné kreslit v takových pravoúhlých soustavách souřadnic, které mají na osách různé jednotky délky. Na obrázku vpravo si prohlédněte graf funkce

$$f:\ y = 100x, \quad x \in \langle -1, 1 \rangle.$$



Někdy jsou souřadnicové osy od grafu funkce „příliš daleko". V takových případech místo souřadnicových os nakreslíme „poblíž grafu" přímky, které jsou s osami rovnoběžné. Na nich vyznačíme některé hodnoty souřadnic (podobně jako to děláme na souřadnicových osách). Pro lepší orientaci připíšeme k těmto přímkám názvy x, y proměnných a šipky ve směru jejich růstu (i když nejde o souřadnicové osy).



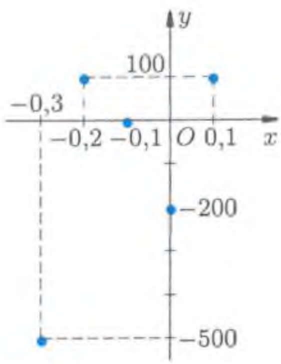
9. Nakreslete graf funkce:

a) $f:\ y = \frac{1}{2}x + 1, \quad x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

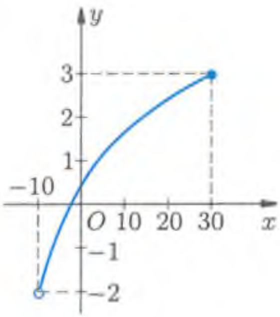
b) $f:\ y = x^2 - x + 2, \quad x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

□ **10.** Z grafu funkce vyčtěte její definiční obor:

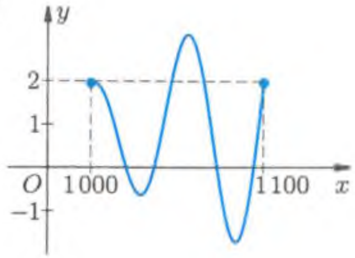
a)



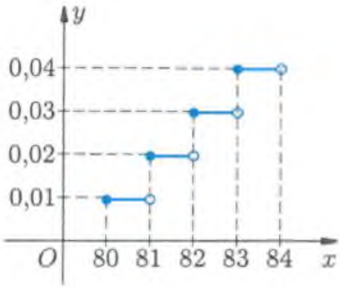
b)



c)



d)



V této kapitole jsme se seznámili s matematickým významem termínu funkce. Shrňme na závěr to nejpodstatnější, co jsme se dověděli.

Předpokládejme, že je dána neprázdná množina D reálných čísel. Říkáme, že f je **funkce** s definičním oborem D, je-li každému číslu x z množiny D přiřazeno (obvykle vzorcem, grafem nebo tabulkou) *jediné* reálné číslo y. Toto číslo y se nazývá hodnota funkce f v čísle x a značí se $f(x)$.
Funkci f s definičním oborem D obecně zapisujeme

$$y = f(x), \quad x \in \mathsf{D}.$$

CVIČENÍ 1

1. Zapište vzorcem $y = f(x)$ funkci vyjadřující, že
   a) čtverec o straně x mm má obsah y mm^2,
   b) každému reálnému číslu x je přiřazeno číslo y o 7 větší, než je trojnásobek čísla x,
   c) každému reálnému číslu x je přiřazeno číslo y, které je pětinásobkem jeho druhé mocniny.

2. Je dána funkce $f\colon\ y = 7x - 1$. Vypočtěte její hodnotu v čísle:
   a) $x = 40$ b) $x = 13$ c) $x = 7$ d) $x = -1$
   e) $x = \frac{1}{7}$ f) $x = -\frac{1}{7}$ g) $x = \frac{1}{3}$ h) $x = -\frac{1}{3}$

3. Je dána funkce

$$f:\ y = \frac{5-x}{x+2}.$$

Určete její hodnoty v číslech $x \in \{0, 5, 10, -1, -5, -7\}$ a zapište je do tabulky.

4. Je dána funkce $g:\ y = 7 - 5x$. Zjistěte, pro která x platí:

a) $g(x) = -8$ b) $g(x) = 5$ c) $g(x) = 12$ d) $g(x) = 22$

5. Zapište definiční obor funkce, která je dána tabulkou:

a)

x	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4
y	7	6	4	4	6	7

b)

x	-8	-4	-1	3
y	16	-8	-2	6

6. Určete vzorec a definiční obor funkce, která určuje závislost hodnoty y objemu krychle (v cm^3) na hodnotě x délky její hrany (v cm).

7. Určete definiční obor funkce dané vzorcem:

a) $y = 5x - 6$ b) $y = \dfrac{6}{5x}$ c) $y = \dfrac{1}{5x-6}$

d) $y = \dfrac{5x}{6}$ e) $y = \dfrac{5x-6}{6x-5}$ f) $y = \dfrac{1}{6}x - \dfrac{1}{5x}$

8. Určete definiční obor funkce:

a) $f:\ y = \sqrt{x}$ b) $f:\ y = \sqrt{x+2}$ c) $f:\ y = \sqrt{x} + 2$

d) $f:\ y = \sqrt{2x-1}$ e) $f:\ y = \sqrt{2x} - 1$ f) $f:\ y = \sqrt{4-5x}$

9. Určete, která čísla x nepatří do definičního oboru funkce:

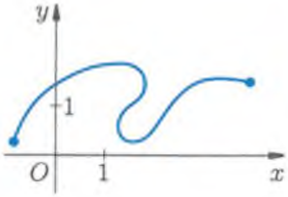
a) $g:\ y = \dfrac{1}{x^2}$ b) $g:\ y = \dfrac{1}{5x \cdot (x-1)}$

c) $g:\ y = \dfrac{1}{x^2+9x}$ d) $g:\ y = \dfrac{3x}{25-4x^2}$

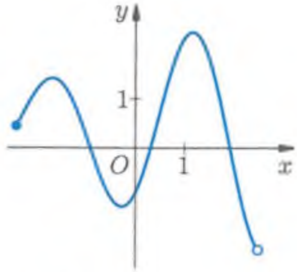
e) $g:\ y = \dfrac{x+2}{x^2+3x-10}$ f) $g:\ y = \dfrac{5-2x}{x^3-5x^2+6x}$

□ **10.** Rozhodněte, zda na obrázku je graf některé funkce:

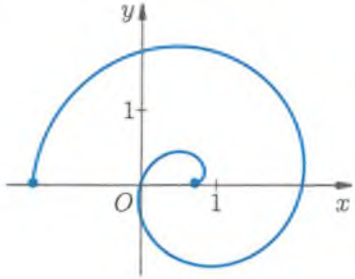
a)



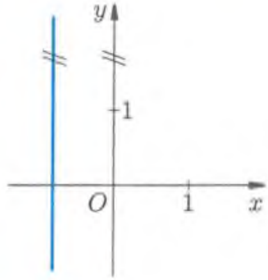
b)



c)

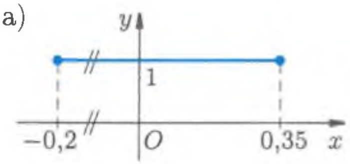


d)

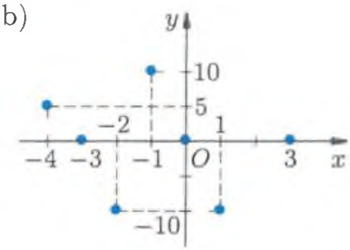


□ **11.** Z grafu funkce vyčtěte její definiční obor:

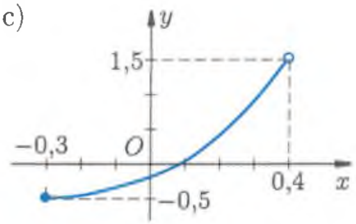
a)



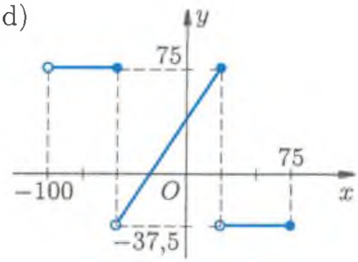
b)



c)



d)



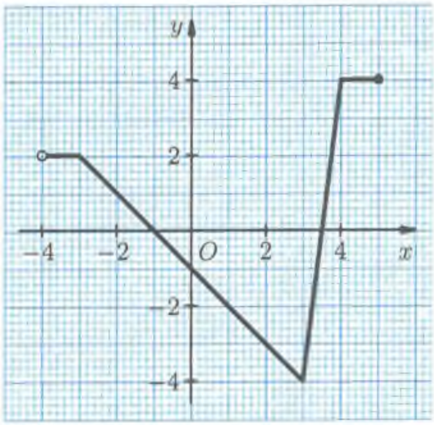
12. Nakreslete graf funkce:

a) $f: y = x^2 - 3x, \quad x \in \{-1, -\frac{1}{2}, 0, 1, \frac{3}{2}\}$

b) $f: y = \dfrac{3x - 1}{x + 1}, \quad x \in \{-2, 1, 2, 4, 7\}$

c) $f: y = x^2 + 2, \quad x \in \{-5, -3, -1, 0, 4, 5\}$

13. Na obrázku je grafem zadána funkce $y = f(x)$:



Určete

a) její definiční obor,

b) souřadnice průsečíků jejího grafu s osou x,

c) hodnoty funkce pro $x \in \{-3, -1, 0, 1, 4, 5\}$,

d) souřadnice průsečíku jejího grafu s osou y,

e) pro která celá čísla x nabývá hodnoty 2, 1, −1, −2, −3,

f) všechna celá čísla x, pro která jsou hodnoty funkce f záporné.

2 PŘÍMÁ ÚMĚRNOST

V minulé kapitole jsme vysvětlili, co znamená slovo funkce v matematice. V této i dalších kapitolách budeme podrobně studovat jednotlivé druhy nejjednodušších funkcí. Začneme funkcí, které říkáme *přímá úměrnost*.

Co je přímá úměrnost?

?

V sešitě *Úměrnosti* jsme se zabývali závislostí mezi kladnými veličinami, které jsme říkali *přímá úměrnost*. Vysvětlili jsme tam, že tato závislost veličin x a y se řídí pravidlem „kolikrát se zvětší x, tolikrát se zvětší y“ nebo „kolikrát se zmenší x, tolikrát se zmenší y“. Znamená to, že podíl $\frac{y}{x}$ odpovídajících si hodnot y a x je stálý; je tedy roven některému kladnému číslu k. Proto je přímá úměrnost dána vzorcem

$$y = kx.$$

Číslo k se nazývá *koeficient* přímé úměrnosti.

Nyní se na tuto závislost podíváme jako na funkci danou vzorcem. Do vzorce $y = kx$ můžeme za nezávisle proměnnou x dosadit libovolné reálné číslo. Proto za definiční obor funkce $f:\ y = kx$ budeme považovat množinu R:

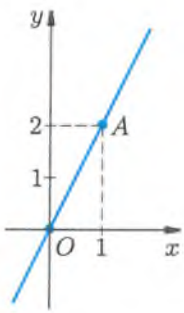
$$f:\ y = kx, \quad x \in \mathsf{R}$$

Takové funkci budeme rovněž říkat *přímá úměrnost* s kladným *koeficientem k*.

V minulé kapitole jsme se již s jedním příkladem takové funkce setkali. Šlo o funkci

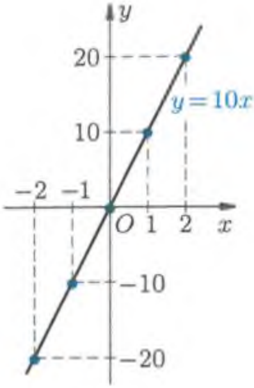
$$y = 2x, \quad x \in R.$$

Vysvětlili jsme, že jejím grafem je přímka procházející bodem $O[0,0]$ a bodem $A[1,2]$. Připomeňte si tento graf na obrázku vpravo.



Na dalším obrázku je sestrojen graf přímé úměrnosti

$$g:\ y = 10x.$$



Souřadnice modře vyznačených bodů grafu jsme nejdříve zapsali do následující tabulky:

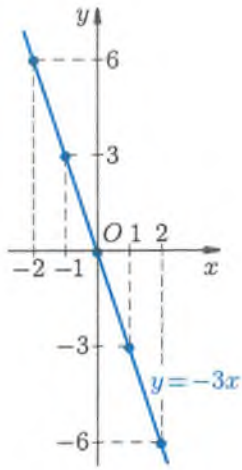
x	-2	-1	0	1	2
y	-20	-10	0	10	20

Také v tomto případě je grafem přímé úměrnosti přímka, která prochází bodem $O[0,0]$.

V obou uvedených příkladech byl koeficient přímé úměrnosti kladný ($k = 2$ a $k = 10$). Funkci $y = kx$ však říkáme přímá úměrnost i tehdy, je-li číslo k záporné. Tak například funkce

$$f:\ y = -3x, \quad x \in \mathsf{R},$$

je přímá úměrnost s koeficientem -3. Podívejme se, jak vypadá její graf.



Nejdříve vypočtěme několik funkčních hodnot a zapišme je do tabulky:

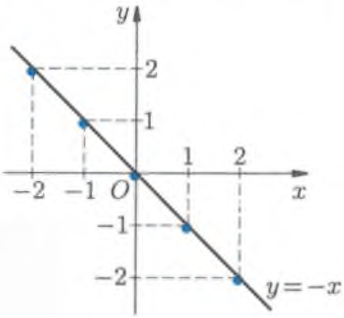
x	-2	-1	0	1	2
y	6	3	0	-3	-6

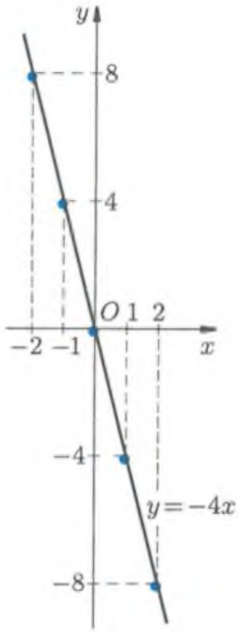
Také v tomto případě leží odpovídající body grafu funkce f na přímce procházející bodem $O[0,0]$. Lze zdůvodnit, že *každý* bod této přímky je bodem grafu funkce f, tzn. je bodem $[x, -3x]$ pro některé $x \in \mathsf{R}$.

Na dalších obrázcích si prohlédněte grafy přímých úměrností $y = -x$ a $y = -4x$. Modře jsou na nich vyznačeny body, jejichž souřadnice jsme zapsali do následujících tabulek:

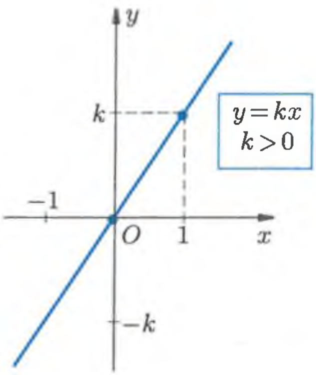
x	-2	-1	0	1	2
y	2	1	0	-1	-2

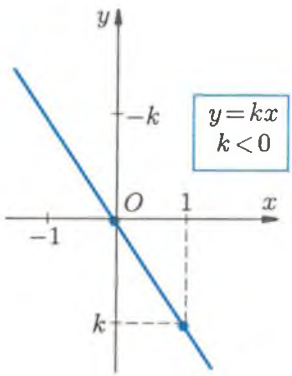
x	-2	-1	0	1	2
y	8	4	0	-4	-8





Uvedené příklady ilustrují obecný poznatek: také pro $k < 0$ je grafem přímé úměrnosti $y = kx$ přímka procházející počátkem soustavy souřadnic.





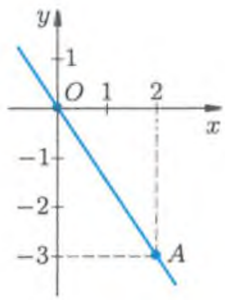
Neposuzovali jsme ještě závislost $y = kx$ v případě $k = 0$. Funkce daná vzorcem $y = 0 \cdot x$ přiřazuje každému reálnému číslu x stejnou funkční hodnotu, a to číslo 0. Taková funkce je příkladem tzv. *konstantní funkce*; dohodneme se, že ji nebudeme považovat za přímou úměrnost. Ke konstantním funkcím se podrobněji vrátíme v příští kapitole.

Přímou úměrností nazýváme funkci $f\colon\ y = kx,\ x \in \mathsf{R}$, kde k je nenulové reálné číslo zvané **koeficient** přímé úměrnosti f.
Grafem přímé úměrnosti je přímka procházející počátkem soustavy souřadnic.

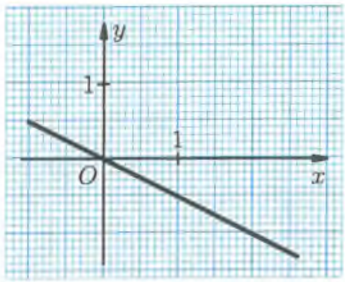
? Jak sestrojíme graf přímé úměrnosti?

Protože grafem každé přímé úměrnosti je přímka, která vždy prochází bodem $O[0,0]$, stačí k jejímu sestrojení najít ještě jeden jiný bod této přímky.

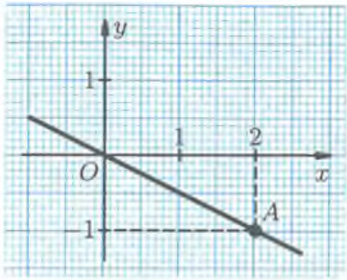
Například funkce $f\colon\ y = -\frac{3}{2}x$ má v bodě $x = 2$ hodnotu $f(2) = -\frac{3}{2} \cdot 2 = -3$. Proto je jejím grafem přímka procházející body $O[0,0]$ a $A[2,-3]$. Je narýsována na obrázku vpravo.



Řešme nyní „opačnou“ otázku – jak z grafu přímé úměrnosti určit její vzorec (za předpokladu, že kromě bodu $[0,0]$ je na grafu ještě další bod, jehož souřadnice jsou dány nebo je dokážeme z grafu na milimetrovém papíře vyčíst). Provedeme to pro přímku z obrázku:



Pohledem na obrázek zjistíme, že bod s „jednoduchými“ (celočíselnými) souřadnicemi $x = 2$ a $y = -1$ leží na dané přímce (nebo „těsně“ mimo ni). Za předpokladu, že bod $A[2, -1]$ skutečně leží na dané přímce, můžeme koeficient k příslušné přímé úměrnosti určit tak, že do vzorce $y = k \cdot x$ dosadíme souřadnice bodu A, tedy čísla $x = 2$ a $y = -1$. Dostaneme $-1 = k \cdot 2$, odkud $k = -\frac{1}{2}$.



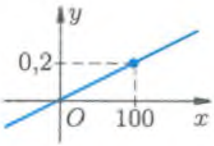
Daná přímka je tedy grafem přímé úměrnosti $y = -\frac{1}{2}x$. (Zopakujme: za předpokladu, že bod A na dané přímce leží.)

1. Narýsujte graf přímé úměrnosti dané vzorcem:

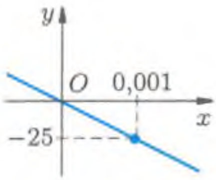
a) $y = 3x$ b) $y = -4x$ c) $y = \frac{3}{4}x$ d) $y = -\frac{1}{3}x$

2. Nalezněte vzorec přímé úměrnosti z jejího grafu:

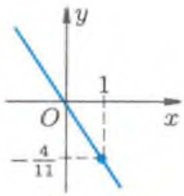
a)



b)



c)



3. Nalezněte vzorec přímé úměrnosti, jejíž graf prochází bodem

a) $[3, -1]$, b) $[-5, 3]$, c) $\left[-\frac{1}{3}, -\frac{2}{5}\right]$, d) $\left[0{,}02; -\frac{1}{5}\right]$.

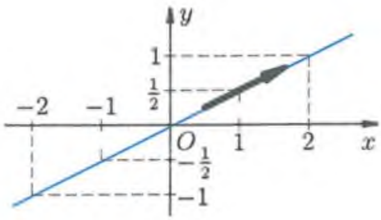
Co je *rostoucí* a *klesající* funkce?

Nyní si budeme všímat, jak se funkční hodnoty přímé úměrnosti mění, roste-li hodnota proměnné x. Nejprve prozkoumáme funkci $f\colon y = \frac{1}{2}x$. Několik jejích hodnot vypíšeme do tabulky:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1

Všimněte si, že hodnoty této funkce „narůstají“. Porovnáme-li funkční hodnoty ve dvou libovolných číslech, zjistíme, že ve *větším* čísle nabývá tato funkce *větší* hodnoty. Dobře je to patrné z jejího grafu: když se po něm pohybuje bod vyznačeným směrem, zvětšuje se jak jeho x-ová, tak i y-ová souřadnice.

Funkce $f\colon\ y = \frac{1}{2}x$ patří k funkcím, kterým říkáme *rostoucí*.

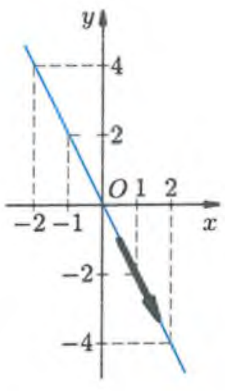


Nyní se zabývejme přímou úměrností $f\colon\ y = -2x$. Také pro ni sestavíme tabulku několika funkčních hodnot:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	4	2	0	-2	-4

Hodnoty této funkce „klesají“. Ve *větším* čísle nabývá tato funkce *menší* hodnoty. Když se totiž po grafu funkce pohybuje bod vyznačeným směrem, jeho x-ová souřadnice se zvětšuje, zatímco y-ová souřadnice se zmenšuje.

Funkce $f\colon\ y = -2x$ je příkladem *klesající funkce*.



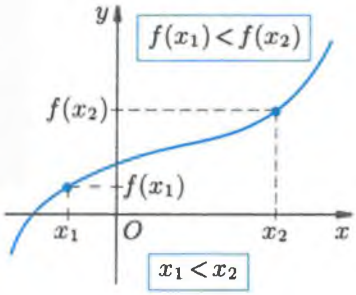
Funkce f se nazývá **rostoucí**, pokud pro každá dvě čísla x_1, x_2 z definičního oboru $\mathrm{D}(f)$ platí:

$$\text{jestliže } x_1 < x_2, \quad \text{pak } f(x_1) < f(x_2).$$

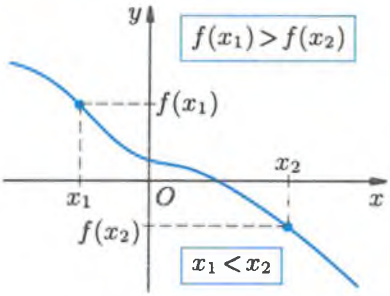
Funkce f se nazývá **klesající**, pokud pro každá dvě čísla x_1, x_2 z definičního oboru $\mathrm{D}(f)$ platí:

$$\text{jestliže } x_1 < x_2, \quad \text{pak } f(x_1) > f(x_2).$$

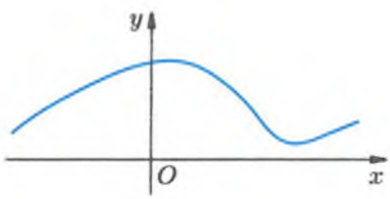
Rostoucí funkce



Klesající funkce



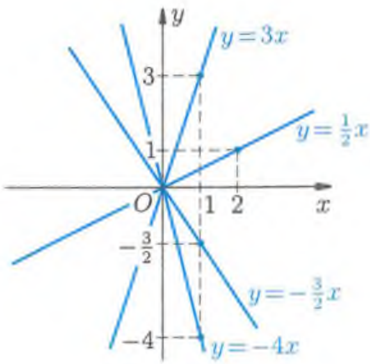
Na dalším obrázku vidíte graf funkce, která není ani rostoucí, ani klesající:



I když znázorněná funkce není „celkově“ ani rostoucí, ani klesající, možná byste řekli, že funkce ve dvou „úsecích“ roste a v jednom klesá. K takovému posuzování se vrátíme později. Zdůrazněme, že prozatím přívlastky *rostoucí* a *klesající* hodnotíme „průběh“ funkce v *celém definičním oboru*.

? Kdy je přímá úměrnost rostoucí a kdy klesající?

Na následujícím obrázku je v jedné soustavě souřadnic znázorněno několik grafů přímých úměrností s různými koeficienty.



Obrázek nám napovídá, že přímá úměrnost je rostoucí tehdy, je-li její koeficient kladný; klesající je v případě, kdy je její koeficient záporný.

Nyní tuto domněnku dokážeme. Předpokládejme, že je dána přímá úměrnost $f:\ y = kx$. Zvolíme libovolně dvě hodnoty nezávisle proměnné x_1 a x_2 tak, že $x_1 < x_2$, a vyjádříme rozdíl $f(x_2) - f(x_1)$:

$$f(x_2) - f(x_1) = kx_2 - kx_1 = k \cdot (x_2 - x_1)$$

Podle volby čísel x_1 a x_2 je činitel $x_2 - x_1$ kladný, proto o znaménku čísla $f(x_2) - f(x_1)$ rozhoduje znaménko koeficientu k:

- Je-li $k > 0$, je také $f(x_2) - f(x_1) > 0$, tedy $f(x_1) < f(x_2)$. Proto je taková funkce f *rostoucí*.
- Je-li $k < 0$, je také $f(x_2) - f(x_1) < 0$, tedy $f(x_1) > f(x_2)$. Proto je taková funkce f *klesající*.

Je-li koeficient k přímé úměrnosti $y = kx$ kladný, je tato přímá úměrnost rostoucí funkce, je-li koeficient k záporný, je tato přímá úměrnost klesající funkce.

□ **4.** Rozhodněte, zda je daná přímá úměrnost rostoucí, nebo klesající:

a) $y = -5x$ b) $y = \frac{2}{3}x$ c) $y = -\frac{1}{14}x$ d) $y = 0{,}001 \cdot x$

CVIČENÍ 2

1. Několik hodnot přímo úměrných veličin x a y je zapsáno v tabulce. Určete koeficient této přímé úměrnosti, zapište její vzorec a doplňte do tabulky chybějící údaje:

x		-3	-2			1	2	
y	28		14	7	0			-21

□ **2.** Rozhodněte, zda tabulka odpovídá přímé úměrnosti proměnných x a y:

a)

x	-1	0	1
y	-2	1	4

b)

x	-2	-1	3
y	4	2	-6

c)

x	-5	0	1
y	-15	0	-5

d)

x	$-\frac{1}{2}$	0	2
y	3	0	-12

3. Narýsujte graf přímé úměrnosti dané vzorcem $y = -250x$. Na grafu pak ukažte, pro která x nabývá tato funkce záporných hodnot.

4. Do jednoho obrázku narýsujte grafy přímých úměrností $f_1\colon y = \frac{1}{2}x$, $f_2\colon y = 2x$, $f_3\colon y = -\frac{1}{2}x$, $f_4\colon y = -2x$. Pro které z těchto funkcí platí, že jejich grafy jsou přímky souměrně sdružené

a) podle osy x, b) podle osy y?

5. Narýsujte graf přímé úměrnosti:

a) $y = 40x, \quad x \in \langle 1, 6 \rangle$ b) $y = -\frac{2}{3}x, \quad x \in (-3, 6)$

c) $y = \frac{5}{7}x, \quad x \in (-7, 0\rangle$

□ **6.** Je dána funkce:

a) $f\colon\ y = -5x$ b) $f\colon\ y = 7x$

c) $f\colon\ y = 0{,}06x$ d) $f\colon\ y = -\frac{2}{5}x$

Pro které hodnoty proměnné x jsou hodnoty funkce f záporné?

7. Najděte vzorec přímé úměrnosti, jejíž graf prochází bodem

a) $[-4, 40]$, b) $[7, 91]$, c) $[-\frac{2}{3}, -\frac{4}{5}]$, d) $[\frac{3}{14}, -\frac{1}{6}]$.

□ **8.** Rozhodněte, zda je daná přímá úměrnost g rostoucí, nebo klesající:

a) $g\colon\ y = 9x$ b) $g\colon\ y = \frac{2}{3}x$ c) $g\colon\ y = -4x$ d) $g\colon\ y = 0{,}003x$

9. Graf přímé úměrnosti obsahuje bod

a) $[-3, 4]$, b) $[-3, -4]$, c) $[3, -4]$, d) $[3, 4]$.

Načrtněte graf této úměrnosti a určete z něho, zda jde o funkci rostoucí, nebo klesající.

3 LINEÁRNÍ FUNKCE

V této kapitole se budeme zabývat dalším druhem funkcí, kterým říkáme *lineární*. Vysvětlíme také původ tohoto slova, které už znáte ze spojení *lineární rovnice*. Nazývali jsme tak každou rovnici $ax + b = 0$ s neznámou x za předpokladu, že číslo a bylo různé od nuly.

? Co je lineární funkce?

Představme si následující situaci. Auto se pohybuje přímým směrem od místa A stálou rychlostí $60\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Na začátku pohybu bylo od místa A vzdáleno 20 km. Vypočteme vzdálenost auta od místa A v několika časových okamžicích:

Doba pohybu	Ujetá dráha	Vzdálenost od místa A
0 h	0 km	20 km
1 h	60 km	(60 + 20) km = 80 km
2 h	120 km	(120 + 20) km = 140 km
3 h	180 km	(180 + 20) km = 200 km

Zaznamenejme vypočtené hodnoty do nové tabulky. V jejím prvním řádku budou hodnoty x (v hodinách) doby pohybu auta, ve druhém řádku pak odpovídající hodnoty y (v kilometrech) vzdálenosti auta od místa A:

x (h)	0	1	2	3
y (km)	20	80	140	200

Zjistíme, jakým vzorcem se tato závislost řídí. Kdyby pohyb auta začal z místa A, byla by jeho vzdálenost y' km od tohoto místa za x h jízdy dána vzorcem

$$y' = 60x.$$

Protože však na začátku pohybu bylo již auto vzdáleno 20 km od místa A, je v každém okamžiku skutečná vzdálenost o 20 km větší:

$$y = y' + 20$$
$$y = 60x + 20$$

Zjistili jsme, že závislost veličin x a y představuje funkci

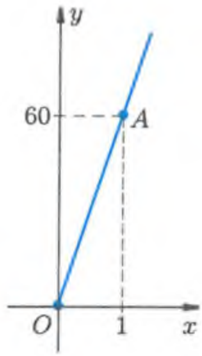
$$f:\ y = 60x + 20, \quad x \in \langle 0, \infty).$$

Popsanou závislost teď znázorníme graficky.

Využijeme při tom grafu přímé úměrnosti

$$g:\ y = 60x, \quad x \in \langle 0, \infty),$$

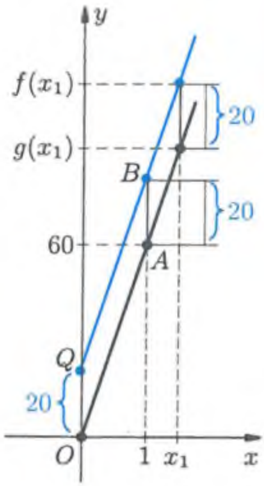
kterým je polopřímka OA (její počátek je bod $O[0,0]$, vnitřní bod $A[1,60]$).



Protože pro každé $x_1 \in \langle 0, \infty)$ platí

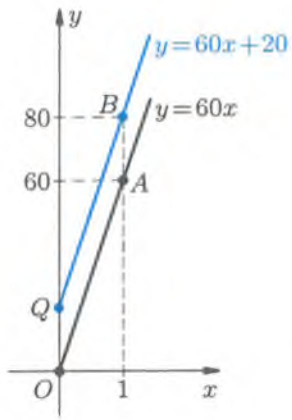
$$f(x_1) = 60x_1 + 20 = g(x_1) + 20,$$

dostaneme graf funkce f z grafu funkce g tak, že každý bod polopřímky OA posuneme o 20 jednotek „vzhůru" ve směru osy y. Vznikne tak polopřímka QB, která je obrazem polopřímky OA v posunutí $P(AB)$, kde bod Q má souřadnice $x = 0$ a $y = 20$. Bod B jako obraz bodu A má souřadnice $x = 1$ a $y = 80$.



Polopřímka QB je tedy hledaným grafem funkce

$$f: \ y = 60x + 20, \quad x \in \langle 0, \infty).$$



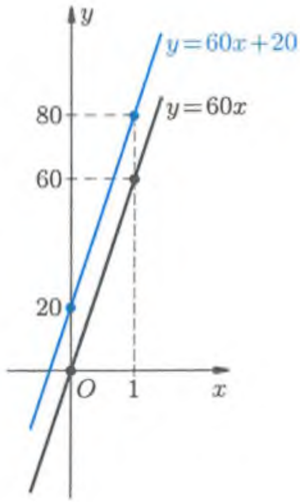
Odhlédneme-li od konkrétní situace, kterou jsme popsali funkcí

$$f: \ y = 60x + 20, \quad x \in \langle 0, \infty),$$

(šlo o pohyb auta stálou rychlostí), můžeme do vzorce této funkce dosazovat za proměnnou x libovolné reálné číslo. Grafem funkce

$$h: \ y = 60x + 20, \quad x \in \mathsf{R},$$

je modrá přímka znázorněná na dalším obrázku. Dostali jsme ji posunutím přímky, která je grafem přímé úměrnosti $y = 60x$, $x \in \mathsf{R}$.



Funkce $h: \ y = 60x + 20$ je příkladem *lineární funkce* Grafem každé lineární funkce je přímka.

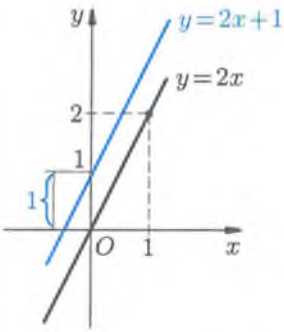
Přímka se latinsky řekne *linea recta* (čti „linea rekta“), což v přesném překladu znamená *přímá čára*.

Jiné lineární funkce jsou dány například vzorci

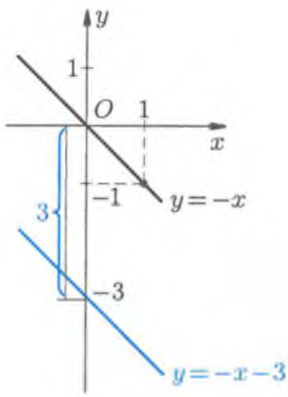
$$y = 2x + 1, \quad y = -x - 3, \quad y = -\tfrac{2}{3}x + 2.$$

Na následujících obrázcích jsou jejich grafy. Získali jsme je vhodnými posunutími grafů odpovídajících přímých úměrností

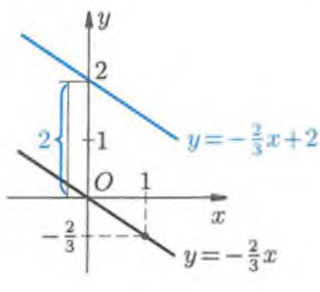
$$y = 2x, \quad y = -x, \quad y = -\tfrac{2}{3}x.$$



$y = 2x + 1$



$y = -x - 3$



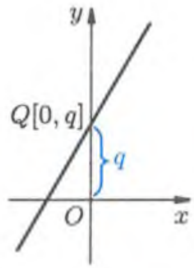
$y = -\frac{2}{3}x + 2$

Každá funkce daná vzorcem

$$y = kx + q,$$

kde $k \neq 0$ a q jsou konkrétní čísla, se nazývá *lineární funkce* s *koeficienty* k a q. Číslo k se nazývá *koeficient lineárního členu*, číslo q se jmenuje *absolutní člen* (dané lineární funkce).

Vysvětlíme nyní geometrický význam koeficientů k a q. Již dříve jsme si všimli, že koeficient k ovlivňuje „sklon" přímky, která je grafem přímé úměrnosti $y = kx$, vzhledem k souřadnicovým osám. Tento „sklon" se při přechodu od funkce $y = kx$ k funkci $y = kx + q$, kterému, jak víme, odpovídá posunutí grafu, nezmění. Absolutní člen q lineární funkce $y = kx + q$ zase udává y-ovou souřadnici průsečíku grafu této funkce s osou y.



Zmiňme se ještě o průsečíku grafu lineární funkce $y = kx + q$ s osou x. Takový bod má y-ovou souřadnici rovnu nule. Proto jeho x-ová souřadnice je řešením rovnice $0 = kx + q$, tedy $x = -\dfrac{q}{k}$.

Lineární funkcí nazýváme funkci

$$f\colon\ y = kx + q, \quad x \in \mathsf{R}.$$

Čísla $k \neq 0$ a q se nazývají **koeficienty** lineární funkce f.
Grafem funkce f je přímka procházející bodem $[0, q]$.

Absolutní člen q ve vzorci lineární funkce $y = kx + q$ může být (na rozdíl od koeficientu k) roven nule. K lineárním funkcím proto patří i každá přímá úměrnost $y = kx$. Přímá úměrnost je tedy zvláštním případem lineární funkce. Je to taková lineární funkce, jejíž graf prochází bodem $[0, 0]$, tedy počátkem soustavy souřadnic.

□ **1.** Určete souřadnice bodu, ve kterém graf funkce $y = 3x + 12$ protíná

a) osu y, b) osu x.

?

Jak sestrojíme graf lineární funkce?

Jeden způsob, jak sestrojit graf lineární funkce

$$f: \ y = kx + q, \quad x \in \mathsf{R},$$

jsme již vlastně vysvětlili. Stačí sestrojit přímku, která je grafem přímé úměrnosti $g: \ y = kx$, a tu pak posunout „o q jednotek ve směru osy y".

Můžeme však postupovat i jinak. Víme totiž, že grafem každé lineární funkce je přímka. Abychom ji sestrojili, stačí nalézt dva její různé body.

Sestrojíme například graf funkce $f: \ y = 2x - 3$.

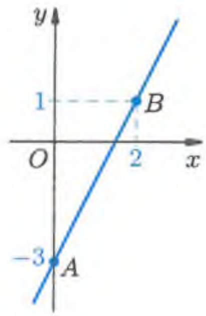
Zvolíme dvě různé hodnoty x, např. $x = 0$ a $x = 2$, a vypočteme příslušné funkční hodnoty:

$f(0) = 2 \cdot 0 - 3 = -3$ a $f(2) = 2 \cdot 2 - 3 = 1$

Proto je grafem funkce f přímka procházející body $A[0, -3]$ a $B[2, 1]$.

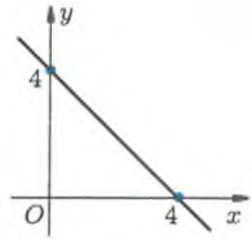
Nalezené body $[0, -3]$ a $[2, 1]$ nebylo nutné popisovat písmeny, místo toho stačilo zapsat jejich souřadnice do tabulky:

x	0	2
$y = 2x - 3$	-3	1



Na dalším obrázku je sestrojen graf funkce $g: \ y = -x + 4$. Je to přímka určená dvěma vyznačenými body, jejichž souřadnice jsme zapsali do tabulky:

x	0	4
$y = -x + 4$	4	0



□ **2.** Určete koeficienty lineární funkce:

a) $y = 6x - 4$ b) $y = 7 - 8x$

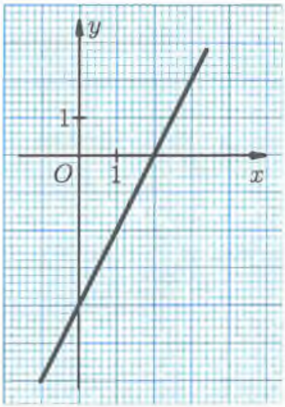
c) $y = 3 \cdot (5x + 6)$ d) $y = \frac{1}{5} \cdot (70 - 25x)$

3. Narýsujte graf funkce dané vzorcem:

a) $y = 5x - 6$ b) $y = \frac{1}{2}x + 1$ c) $y = -3x + 4$

? Jak najdeme vzorec lineární funkce z jejího grafu?

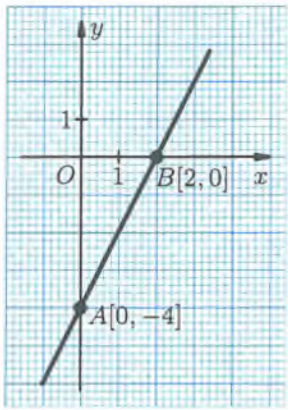
Nyní budeme hledat vzorec lineární funkce určené grafem. Budeme při tom předpokládat, že souřadnice některých bodů grafu jsou v obrázku popsány nebo že graf je sestrojen na milimetrovém papíru, přičemž některé body grafu mají „čitelné“ celočíselné souřadnice.



Určíme nejprve vzorec lineární funkce, jejíž graf je přímka na obrázku vlevo. K tomu je nutné správně vyčíst souřadnice dvou bodů, které na grafu funkce leží. V našem případě vybereme průsečíky grafu se souřadnicovými osami. Oba body mají totiž „čitelné“ obě souřadnice (nulové souřadnice navíc zjednoduší výpočet).

Jsou to body $A[0,-4]$ a $B[2,0]$. Po dosazení souřadnic $x=0$ a $y=-4$ bodu A do vzorce $y=kx+q$ zjistíme, že $q=-4$. Koeficient k vypočteme pomocí bodu B. Do rovnice $y=kx-4$ dosadíme $y=0$ a $x=2$:

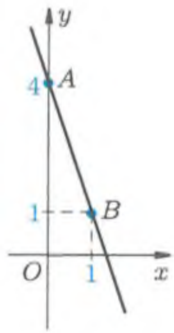
$$0 = k \cdot 2 - 4$$
$$2k = 4$$
$$k = 2$$



Daný graf má tedy funkce se vzorcem $y=2x-4$.

(Přesvědčte se zpaměti, že pro $x=0$ vyjde $y=-4$ a pro $x=2$ vyjde $y=0$.)

Příklad 1. Nalezněte vzorec lineární funkce, jejíž graf je přímka z obrázku, která prochází body s vyznačenými souřadnicemi.



Řešení. Hledáme vzorec $y = kx + q$ té lineární funkce, jejíž graf prochází body $A[0, 4]$ a $B[1, 1]$. Po dosazení souřadnic $x = 0$ a $y = 4$ bodu A do vzorce $y = kx + q$ zjistíme, že $q = 4$.

Nyní pomocí souřadnic $x = 1$ a $y = 1$ bodu B vypočteme koeficient k:

$$\begin{aligned} 1 &= k \cdot 1 + 4 \\ 1 - 4 &= k \\ k &= -3 \end{aligned}$$

Funkce je tedy dána vzorcem $y = -3x + 4$.

Příklad 2. Určete vzorec lineární funkce, jejíž graf prochází body $X[-2, 2]$ a $Y[1, 4]$.

Řešení. Hledaný vzorec má tvar

$$y = kx + q,$$

naším úkolem je vypočítat neznámé koeficienty k a q.

Po dosazení souřadnic $x = -2$ a $y = 2$ bodu X dostaneme:

$$2 = k \cdot (-2) + q$$

Podobně pro souřadnice $x = 1$ a $y = 4$ bodu Y musí platit:

$$4 = k \cdot 1 + q$$

Získali jsme soustavu dvou lineárních rovnic s neznámými k a q:

$$\begin{aligned} -2k + q &= 2 \\ k + q &= 4 \end{aligned}$$

Tuto soustavu vyřešíme například sčítací metodou. Odečteme-li od druhé rovnice první rovnici, „zmizí“ neznámá q:

$$
\begin{aligned}
k + q - (-2k + q) &= 4 - 2 \\
3k &= 2 \\
k &= \tfrac{2}{3}
\end{aligned}
$$

$$q = 4 - k = 4 - \tfrac{2}{3} = \tfrac{10}{3}$$

Zjistili jsme, že $k = \frac{2}{3}$ a $q = \frac{10}{3}$. Proto je hledaný vzorec $y = \frac{2}{3}x + \frac{10}{3}$. (Pro kontrolu dosaďte zpaměti $x = -2$ a $x = 1$.)

Příklad 3. Která lineární funkce má graf, jenž prochází body $A[-6, 1]$ a $B[2, -3]$?

Řešení jsme převzali ze Sandřina sešitu.

$y = kx + q$

pro bod $A[-6;1]$: $1 = k \cdot (-6) + q$

pro bod $B[2;-3]$: $-3 = k \cdot 2 + q$

řeším soustavu:

$-6k + q = 1 \quad /\cdot(-1)$

$2k + q = -3$

$8k = -4$

$\boxed{k = -\frac{1}{2}}$

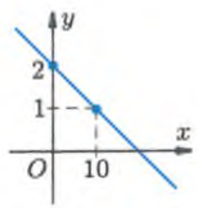
$q = -3 - 2k = -3 + 2 \cdot \frac{1}{2} = -2$

$\boxed{q = -2}$

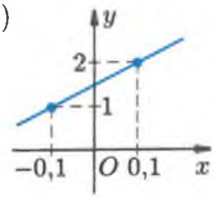
$f: y = -\frac{1}{2}x - 2$

4. Nalezněte vzorec lineární funkce, jejíž graf je na obrázku:

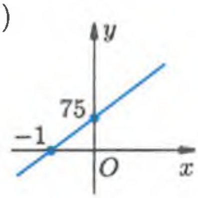
a)



b)



c)



5. Určete vzorec lineární funkce, jejíž graf prochází body:

a) $K[0,3]$, $L\left[\frac{1}{2},0\right]$ b) $K[-1,-11]$, $L[3,5]$

c) $K[-3,2]$, $L[0,4]$ d) $K[-5,1]$, $L[10,6]$

6. Sestrojte graf a nalezněte vzorec lineární funkce g, je-li:

a) $g(-3)=9$, $g(4)=-5$ b) $g(-2)=1$, $g(6)=3$

Co je *konstantní funkce*?

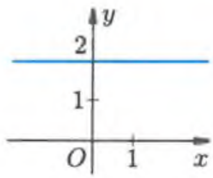
V celé kapitole jsme předpokládali, že ve vzorci $y=kx+q$ je koeficient k různý od nuly. Pak je tímto vzorcem určena lineární funkce.

Co se stane, když ve vzorci $y=kx+q$ položíme $k=0$? Pak pro každé x bude $y=kx+q=0\cdot x+q=q$.

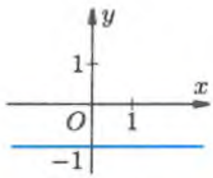
Znamená to, že každému číslu x bude takovým vzorcem přiřazena *stejná* funkční hodnota q. Funkci danou vzorcem $y=q$, kde q je konkrétní reálné číslo, nazýváme ***konstantní funkcí.***

Konstantní funkci nepovažujeme za zvláštní případ lineární funkce, podobně jako konstantní funkci $y=0$ nepovažujeme za zvláštní případ přímé úměrnosti $y=kx$.

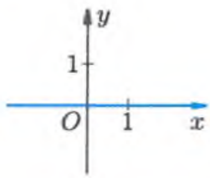
Grafem konstantní funkce je přímka rovnoběžná s osou x. Na následujících obrázcích si prohlédněte grafy tří různých konstantních funkcí:



$y=2$



$y=-1$



$y=0$

Konstantní funkce není ani rostoucí, ani klesající.

> **Konstantní funkcí** nazýváme funkci $f\colon y=q$, $x\in\mathrm{R}$, kde q je dané reálné číslo.
> Grafem konstantní funkce je přímka rovnoběžná s osou x.

7. Narýsujte graf funkce dané vzorcem:

a) $y = -3$ b) $y = \frac{1}{5}$ c) $y = 0 \cdot x + 100$

8. Které přímky v rovině s danou soustavou souřadnic nejsou grafem žádné lineární funkce?

Kdy je lineární funkce rostoucí a kdy klesající?

Připomeňme, co jsme již dříve zjistili o přímé úměrnosti:

- přímá úměrnost $y = kx$ je rostoucí, pokud $k > 0$
- přímá úměrnost $y = kx$ je klesající, pokud $k < 0$

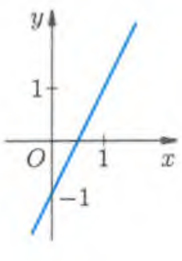
Těchto výsledků můžeme využít i při zkoumání toho, kdy je rostoucí a kdy klesající funkce $f\colon\ y = kx + q$, kde $k \neq 0$. Víme již, že pro tuto funkci a jí odpovídající přímou úměrnost $g\colon\ y = kx$ platí:

$$f(x_1) = g(x_1) + q \quad \text{a} \quad f(x_2) = g(x_2) + q \quad \text{pro libovolná } x_1, x_2 \in \mathsf{R}$$

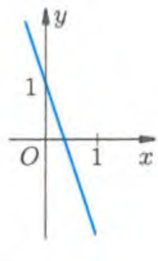
Proto porovnání hodnot $f(x_1)$ a $f(x_2)$ dopadne stejně jako porovnání odpovídajících hodnot $g(x_1)$ a $g(x_2)$. (Nerovnost mezi dvěma čísly se zachová, když k oběma číslům přičteme stejné číslo q.)

Proto je lineární funkce $y = kx + q$ rostoucí právě tehdy, když je rostoucí přímá úměrnost $y = kx$, tedy když $k > 0$. Lineární funkce $y = kx + q$ je klesající právě tehdy, když je klesající přímá úměrnost $y = kx$, tzn. pokud $k < 0$.

Prohlédněte si grafy jedné rostoucí a jedné klesající lineární funkce:



$f_1\colon\ y = 2x - 1$



$f_2\colon\ y = -3x + 1$

> Je-li koeficient k lineární funkce $y = kx + q$ kladný, je tato funkce rostoucí, je-li koeficient k záporný, je tato funkce klesající.

Dokážeme nyní předchozí tvrzení pro lineární funkci $f: y = kx + q$ přímo. Zvolme libovolná čísla x_1, x_2 tak, aby $x_1 < x_2$. Platí $f(x_1) = kx_1 + q$ a $f(x_2) = kx_2 + q$. Vypočteme rozdíl $f(x_2) - f(x_1)$:

$$f(x_2) - f(x_1) = (kx_2 + q) - (kx_1 + q) = kx_2 - kx_1 = k \cdot (x_2 - x_1)$$

Protože $x_2 - x_1 > 0$, platí:

- je-li $k > 0$, je také $f(x_2) - f(x_1) > 0$, tedy $f(x_1) < f(x_2)$, proto je funkce f *rostoucí*
- je-li $k < 0$, je také $f(x_2) - f(x_1) < 0$, tedy $f(x_1) > f(x_2)$, proto je funkce f *klesající*

□ **9.** Rozhodněte, zda je daná funkce rostoucí, nebo klesající:

a) $y = -12x + 1$　　b) $y = \frac{1}{3}$

c) $y = \frac{1}{5}x + 4$　　d) $y = 3 - 7x$

CVIČENÍ 3

□ **1.** Rozhodněte, zda daný vzorec určuje lineární funkci:

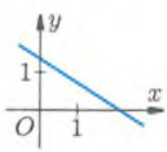
a) $y = 2x^2 - 3x + 4$　　b) $y = \frac{1}{2} + x$　　c) $y = x^2 - 7$

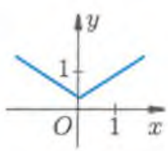
d) $y = -\frac{3}{4}x$　　e) $y = 5$　　f) $y = \dfrac{5}{x - 4}$

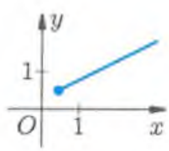
2. Doplňte tabulku lineární funkce dané vzorcem $y = -4x + 9$:

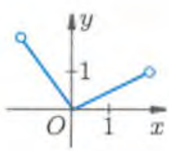
x	-4				2	
y		21	14	9		15

□ **3.** Rozhodněte, zda část grafu lineární funkce může vypadat takto:

a)


b)


c)


d)


4. Narýsujte graf funkce $f: y = -2x + 1$. S jeho pomocí určete, pro která čísla x jsou hodnoty funkce f

a) kladné,　　b) záporné,　　c) větší než 1.

5. Určete, které z bodů $A\left[2, \frac{1}{2}\right]$, $B\left[\frac{1}{2}, 2\right]$, $C\left[-\frac{3}{2}, -8\right]$, $D\left[-8, -\frac{3}{2}\right]$ leží na grafu funkce dané vzorcem $y = 5x - \frac{1}{2}$.

6. Narýsujte graf funkce:

a) $f_1\colon\ y = x$ b) $f_2\colon\ y = -x$

c) $f_3\colon\ y = -1$ d) $f_4\colon\ y = 0$

7. V téže soustavě souřadnic narýsujte grafy funkcí

$$f_1\colon\ y = x, \quad f_2\colon\ y = x + 5, \quad f_3\colon\ y = x - 5.$$

Jakou vzájemnou polohu mají přímky, které jsou grafy daných funkcí?

8. V téže soustavě souřadnic sestrojte grafy funkcí

$$f_1\colon\ y = 2x + 3, \quad f_2\colon\ y = -\tfrac{1}{2}x + 3.$$

Jakou vzájemnou polohu mají přímky, které jsou grafy daných funkcí?

□ **9.** Vyberte funkce, jejichž grafy jsou rovnoběžné přímky:

$$f_1\colon\ y = 3x + 2, \quad f_2\colon\ y = 5 - x, \quad f_3\colon\ y = 3x - 1,$$
$$f_4\colon\ y = -5 + x, \quad f_5\colon\ y = 4 - x$$

□ **10.** Určete vzorec lineární funkce $y = kx + q$, víte-li, že $k = 8$ a graf této funkce protíná osu y v bodě s y-ovou souřadnicí rovnou číslu

a) 0, b) -6, c) $\frac{2}{3}$.

11. Graf lineární funkce $f\colon\ y = kx - 3$ prochází bodem $C[-6, 1]$. Určete koeficient k.

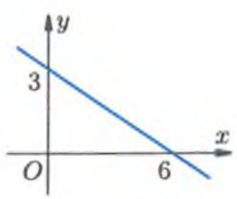
12. Graf lineární funkce $f\colon\ y = -5x + b$ prochází bodem $D\left[-\frac{4}{5}, -2\right]$. Určete koeficient b.

□ **13.** Nalezněte vzorec lineární funkce, jejíž graf je přímka rovnoběžná s přímkou, jež je grafem funkce $f\colon\ y = 12x - 1$, a prochází bodem:

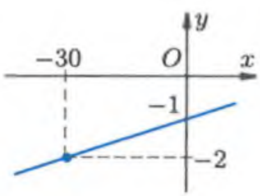
a) $X[0, 0]$ b) $X[0, 12]$ c) $X[0, -8]$

14. Určete vzorec lineární funkce, jejíž graf vidíte na obrázku:

a)



b)



15. Nalezněte vzorec lineární funkce, jejíž graf prochází body

a) $[0,3]$ a $[2,4]$, b) $[2,0]$ a $[0,-1]$,
c) $[-2,-1]$ a $[0,0]$, d) $[0,-5]$ a $[4,-3]$.

16. Nalezněte vzorec lineární funkce f, pro kterou platí:

a) $f(3) = -2,\ f(-1) = 6$ b) $f(5) = 5,\ f(4) = -12$

□ **17.** Rozhodněte, zda je daná funkce rostoucí, nebo klesající:

a) $y = -9x + 4$ b) $y = 0{,}005x + 6$ c) $y = -7x$
d) $y = -3$ e) $y = \frac{3}{5}x - 1$ f) $y = -x + \frac{3}{7}$

18. Rozhodněte, zda je rostoucí (nebo zda je klesající) lineární funkce, jejíž graf prochází body

a) $[4,-5]$ a $\left[-\frac{5}{2},8\right]$, b) $[4,-1]$ a $[0,0]$,
c) $[0,3]$ a $[3,0]$, d) $\left[-\frac{3}{2},3\right]$ a $[-3,-9]$.

19. Určete souřadnice průsečíků grafu lineární funkce $y = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$ s osami soustavy souřadnic. Řešte početně i graficky.

20. Určete souřadnice průsečíků grafu funkce f s osami soustavy souřadnic, je-li:

a) $f\colon\ y = -\frac{4}{5}x + 1$ b) $f\colon\ y = \frac{1}{2}x + 2$

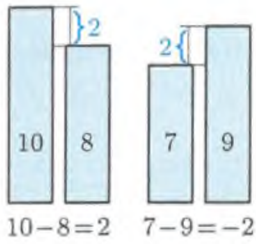
21. Grafem funkce g je přímka procházející body $A[-35,21]$ a $B[14,-28]$. Určete souřadnice průsečíků grafu funkce g s osami soustavy souřadnic.

■ **22.** Jsou dány lineární funkce $f_1\colon\ y = k_1x + q_1$, $f_2\colon\ y = k_2x + q_2$. Určete vzájemnou polohu přímek, které jsou grafy funkcí f_1, f_2, je-li:

a) $k_1 = k_2,\ q_1 \neq q_2$ b) $k_1 = k_2,\ q_1 = q_2$ c) $k_1 \neq k_2,\ q_1 = q_2$

4 ABSOLUTNÍ HODNOTA

Čísla 10 a 8 se liší o 2. O stejnou hodnotu se liší také čísla 7 a 9. Kdybychom chtěli zapsat výrazem, o kolik se liší čísla označená písmeny a a b, potřebovali bychom vědět, které z nich je větší a které menší. Podle toho bychom zapsali $a - b$, nebo $b - a$. Dodejme slovy, co ještě neumíme matematicky zapsat: čísla a a b se liší o hodnotu, kterou dostaneme, když vypočteme rozdíl $a - b$ a ve výsledku „zakryjeme“ znaménko.



Jsou i jiné situace, kdy při matematických výpočtech „zakrýváme“ číslům znaménka. (Vzpomeňte si na písemné násobení čísel s libovolnými znaménky.) Proto si tento úkon, který například čísla

$$-5, \quad -3, \quad -\tfrac{1}{2}, \quad 0, \quad 2, \quad 8$$

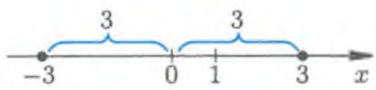
převádí po řadě na čísla

$$5, \quad 3, \quad \tfrac{1}{2}, \quad 0, \quad 2, \quad 8,$$

zasluhuje vlastní název i označení.

? Co je *absolutní hodnota* čísla?

Dobře víte, kterým číslům říkáme *navzájem opačná*. Jsou to například čísla 3 a −3. Tato čísla se liší pouze svými znaménky. Jejich obrazy na číselné ose mají stejné vzdálenosti od obrazu čísla 0 rovné třem jednotkám délky. Tento počet jednotek nazýváme *absolutní hodnotou* každého z čísel 3 a −3 a značíme dvojicí svislých čárek:



$$|3| = 3 \quad \text{a} \quad |-3| = 3$$

Podobně platí:

$$|-12| = 12, \quad |1{,}02| = 1{,}02, \quad \left|-\tfrac{7}{2}\right| = \tfrac{7}{2}, \quad |0| = 0, \quad |\sqrt{5}\,| = \sqrt{5}$$

Absolutní hodnotu čísla tedy dostaneme, když v jeho číslicovém zápisu „zakryjeme“ případné znaménko „minus“ (znaménko „plus“ zakrývat nemusíme). Proto je absolutní hodnota každého reálného čísla *nezáporné číslo*.

Je-li číslo x kladné, platí $|x| = x$. Tato rovnost platí i pro $x = 0$.

Je-li však číslo x záporné, je absolutní hodnota čísla x rovna číslu, které je k číslu x opačné: $|x| = -x$

Například:

$$|-3| = -(-3) = 3, \quad |-\tfrac{1}{2}| = -(-\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}, \quad |-\sqrt{5}\,| = -(-\sqrt{5}\,) = \sqrt{5}$$

Připomeňme, že znaménko „minus“ v zápise $-x$ není znakem „zápornosti“ čísla $-x$, ale znamená, že jde o číslo *opačné* k číslu x. Znovu si uvědomte, že číslo opačné k zápornému číslu je číslo kladné.

Absolutní hodnotou čísla x nazýváme:

- číslo x, je-li $x > 0$
- číslo 0, je-li $x = 0$
- číslo $-x$, je-li $x < 0$

Absolutní hodnotu čísla x značíme $|x|$.

□ **1.** Určete absolutní hodnoty čísel 2, 0, -4, $-\frac{2}{3}$, $0{,}001$, $-0{,}3$, $\frac{4}{5}$, $-\sqrt{2}$.

□ **2.** Vypočtěte:

a) $\lvert 5-2 \rvert$	b) $\lvert -2+5 \rvert$	c) $\lvert 2+5 \rvert$
d) $\lvert -2-5 \rvert$	e) $\lvert 12-5 \rvert$	f) $\lvert -12+5 \rvert$

3. Vypočtěte:

a) $\lvert 5-(3-8) \rvert$	b) $5-\lvert 3-8 \rvert$
c) $\lvert 5-3 \rvert - 8$	d) $5-(3-\lvert -8 \rvert)$

4. Zapište rovnicí, že čísla x^2 a $4x+1$ se liší o 4. Pak se přesvědčte dosazením, že čísla -1, 1, 3 a 5 jsou kořeny sestavené rovnice.

Co je funkce absolutní hodnota a jak vypadá její graf?

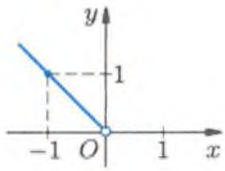
Budeme nyní zkoumat funkci f, která přiřazuje každému reálnému číslu jeho absolutní hodnotu:

$$f:\ y = |x|, \quad x \in \mathsf{R}$$

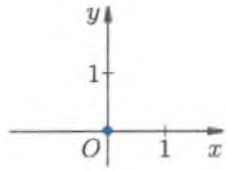
Podle definice absolutní hodnoty platí:

$$\begin{aligned} f(x) &= -x && \text{pro} \quad x \in (-\infty, 0) \\ f(x) &= 0 && \text{pro} \quad x = 0 \\ f(x) &= x && \text{pro} \quad x \in (0, \infty) \end{aligned}$$

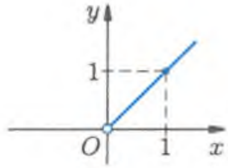
Podívejme se, jak vypadá graf funkce f. Rozdělíme ho na tři části podle toho, jak jsme na třech řádcích rozepsali pravidlo výpočtu absolutní hodnoty.



$f(x) = -x, \ x \in (-\infty, 0)$

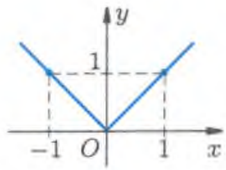


$f(0) = 0$



$f(x) = x, \ x \in (0, \infty)$

„Spojením“ těchto tří grafů do jednoho obrázku dostaneme celý graf funkce $f\colon\ y = |x|$.



Tento graf je tvořen dvojicí polopřímek se společným počátkem $O[0, 0]$. To odpovídá tomu, že funkci f můžeme popsat „na dvou řádcích“:

$$\begin{aligned} f(x) &= -x && \text{pro} \quad x \in (-\infty, 0\rangle \\ f(x) &= x && \text{pro} \quad x \in \langle 0, \infty) \end{aligned}$$

Hodnotu $f(0)$ můžeme vypočítat jak podle prvního řádku, tak i podle řádku druhého. V obou případech totiž vyjde stejná hodnota $f(0) = 0 = -0$. Můžete se také setkat se zápisem

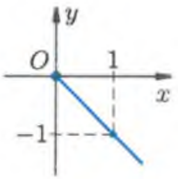
$$\begin{aligned} f(x) &= -x && \text{pro} \quad x \in (-\infty, 0), \\ f(x) &= x && \text{pro} \quad x \in \langle 0, \infty), \end{aligned}$$

při kterém je hodnota $x = 0$ „zahrnuta“ jen do intervalu v druhém řádku.

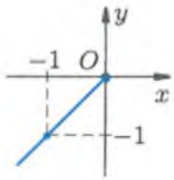
Příklad 1. Narýsujte graf funkce $g\colon\ y = -|x|$.

Řešení. Vzorec funkce g zjednodušíme odděleně v případech, kdy $x \geqq 0$ a $x \leqq 0$:
Je-li $x \in \langle 0, \infty)$, platí $|x| = x$, a tedy $g(x) = -|x| = -x$.
Je-li $x \in (-\infty, 0\rangle$, platí $|x| = -x$, a tedy $g(x) = -|x| = -(-x) = x$.

Obě části grafu nejdříve zakreslíme odděleně:

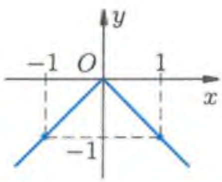


$g(x) = -x,\quad x \in \langle 0, \infty)$



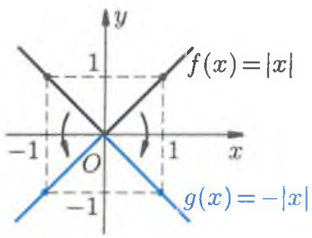
$g(x) = x,\quad x \in (-\infty, 0\rangle$

Nakonec obě části grafu funkce g „spojíme“:



$g(x) = -|x|,\quad x \in \mathsf{R}$

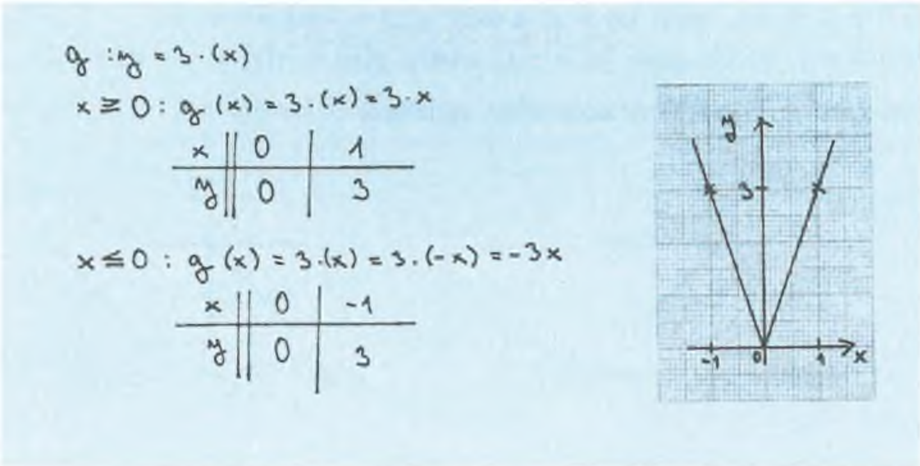
Výsledný graf funkce $g\colon\ y = -|x|$ porovnáme s grafem funkce $f\colon\ y = |x|$:



Šipkami je naznačeno, že graf funkce g lze získat z grafu funkce f jeho „překlopením“ kolem osy x. Oba grafy jsou totiž souměrně sdružené podle osy x, neboť pro každé reálné číslo x platí $g(x) = -f(x)$.

Příklad 2. Narýsujte graf funkce $g\colon\ y = 3|x|$.

Řešení jsme převzali z Janina sešitu. Jana graf narýsovala na milimetrový papír.

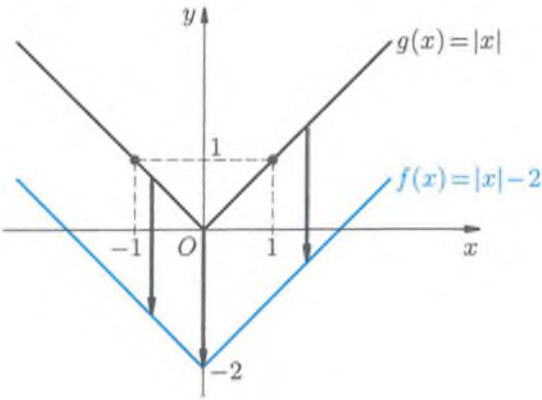


Příklad 3. Narýsujte graf funkce $f\colon\ y = |x| - 2$.

Řešení. Vyjdeme ze známého grafu funkce $g\colon\ y = |x|$. Protože pro každé x platí

$$f(x) = g(x) - 2,$$

dostaneme graf funkce f z grafu funkce g tak, že každý bod grafu funkce g posuneme o 2 jednotky „dolů" ve směru osy y.



Graf funkce f je tedy tvořen dvojicí polopřímek se společným počátkem, bodem $[0, -2]$.

5. Narýsujte graf funkce:

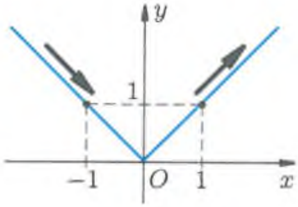
a) $f\colon\ y = |2x|$ b) $f\colon\ y = -3|x|$

c) $f\colon\ y = |x| + 3$ d) $f\colon\ y = -|x| + 1$

?

Je funkce absolutní hodnota rostoucí, nebo klesající?

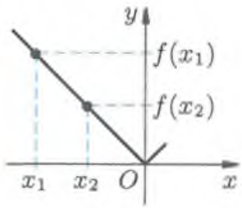
Při pohledu na známý obrázek grafu funkce $f\colon\ y = |x|$ si možná řeknete, že „průběh“ této funkce se „mění“. S růstem proměnné x funkční hodnoty nejprve klesají, poté rostou. Znamená to, že funkce f *není ani rostoucí, ani klesající*.



Přesto poznatek, že funkce f „nejprve klesá a pak roste“, je významný. Budeme říkat, že funkce f je *klesající v intervalu* $(-\infty, 0\rangle$ a že je *rostoucí v intervalu* $\langle 0, \infty)$. Zapišme nerovnostmi, co tato rčení znamenají.

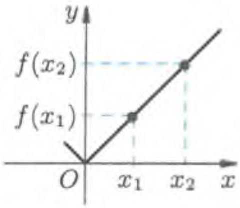
Pro každá dvě čísla $x_1, x_2 \in (-\infty, 0\rangle$ platí:

jestliže $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) > f(x_2)$.



Pro každá dvě čísla $x_1, x_2 \in \langle 0, \infty)$ platí:

jestliže $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) < f(x_2)$.



Funkce f se nazývá **rostoucí v intervalu** I, je-li interval I podmnožinou definičního oboru D(f) a pro každá dvě čísla $x_1, x_2 \in$ I platí:

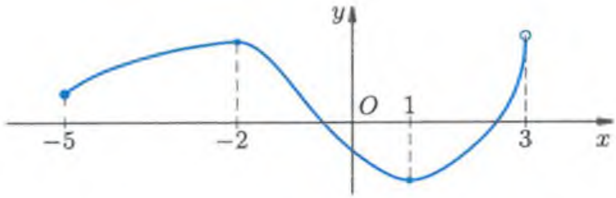
jestliže $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) < f(x_2)$.

Funkce f se nazývá **klesající v intervalu** I, je-li interval I podmnožinou definičního oboru D(f) a pro každá dvě čísla $x_1, x_2 \in$ I platí:

jestliže $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) > f(x_2)$.

Vraťme se k funkci $f\colon\ y = |x|$. Kromě intervalu $\langle 0, \infty)$ existují i jiné intervaly, ve kterých je tato funkce rostoucí, například intervaly $(3, 5)$, $\langle 1, 8\rangle$, $(0, \infty)$. Interval $\langle 0, \infty)$ je z nich však „nejvýznamnější", neboť obsahuje všechny ostatní.

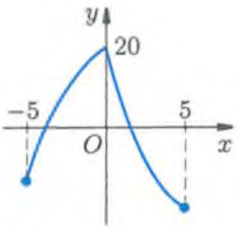
Při zkoumání „průběhu" dané funkce zpravidla hledáme takové „maximální" intervaly, ve kterých je funkce klesající, nebo rostoucí. Tak o funkci, jejíž graf vidíte na obrázku, řekneme obvykle, že je rostoucí v každém z intervalů $\langle -5, -2\rangle$, $\langle 1, 3)$ a klesající v intervalu $\langle -2, 1\rangle$.



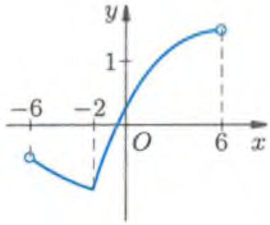
V předchozích kapitolách jsme mluvili o rostoucích a klesajících funkcích, aniž jsme uváděli, kde se tyto funkce takto chovají. Tehdy jsme posuzovali „průběh" funkce v celém jejím definičním oboru.

6. Podle obrázku určete intervaly, ve kterých je daná funkce rostoucí a ve kterých klesající:

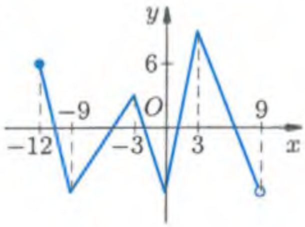
a)



b)



c)



7. Určete intervaly, ve kterých je daná funkce rostoucí a ve kterých klesající:

a) $f\colon\ y = -|x|$ b) $f\colon\ y = 2|x|$ c) $f\colon\ y = |x| - 4$

CVIČENÍ 4

1. Vypočtěte:

a) $|-12| - |-10| + |36 - 19| - |15 + 42|$

b) $-|12 - 25| + |3 - 9| - |-8| \cdot |-5 - 2|$

c) $\left[-|6 \cdot (-11)| : |12 - 34|\right] + |-13| \cdot |65 : (-5)| - \left[|16 - 100| : (-12)\right]$

d) $\dfrac{|-12|}{|-18|} - \dfrac{-9}{|-18|} + \dfrac{|-20|}{-|16|}$

e) $-\left|-\dfrac{3}{8}\right| - \dfrac{|8 - 13|}{-|16 - 22|} + \dfrac{-|17 - 18|}{18 - 22}$

2. Zapište číselný výraz a pak vypočtěte jeho hodnotu:

a) absolutní hodnota součtu čísel 7 a -15

b) součet absolutních hodnot čísel 7 a -15

c) absolutní hodnota rozdílu čísel 7 a -15

d) rozdíl absolutních hodnot čísel 7 a -15

3. Narýsujte do jednoho obrázku grafy funkcí

$$f\colon\ y = |x|, \qquad g\colon\ y = 2 \cdot |x|, \qquad h\colon\ y = 4 \cdot |x|.$$

4. Narýsujte do jednoho obrázku grafy funkcí

$$f_1\colon\ y = -2 \cdot |x|, \qquad f_2\colon\ y = -3 \cdot |x|.$$

5. Pomocí grafu funkce $f\colon\ y = |x|$ narýsujte do jednoho obrázku grafy funkcí

$$f_1\colon\ y = |x| + \tfrac{3}{2}, \qquad f_2\colon\ y = |x| - 1.$$

$*$**6.** Narýsujte graf funkce $f\colon\ y = |x - 1|$. Určete průsečíky tohoto grafu s osami soustavy souřadnic.

$*$**7.** Narýsujte graf funkce $f\colon\ y = |x + 1|$. Určete průsečíky tohoto grafu s osami soustavy souřadnic.

8. Určete intervaly, ve kterých je funkce $y = 7 \cdot |x|$ rostoucí a ve kterých klesající.

9. Určete, zda je funkce $y = |x| + 5$ rostoucí v intervalu:

a) $\langle 3, 8\rangle$ b) $(-1, 0\rangle$ c) $(5, 12)$

d) $(0, 1\rangle$ e) $(-2, 3\rangle$ f) $\langle -7, -2\rangle$

10. Určete, zda je funkce f klesající v intervalu $\langle -10, -1\rangle$, je-li:

a) $f\colon\ y = -2 \cdot |x|$ b) $f\colon\ y = |x| - 5$

c) $f\colon\ y = 5 \cdot |x| + 8$ d) $f\colon\ y = -3 \cdot |x| + 4$

e) $f\colon\ y = 7 \cdot |x|$ f) $f\colon\ y = -2 \cdot |x| - 7$

5 KVADRATICKÁ FUNKCE

Až dosud jsme studovali funkce, jejichž grafy byly sestaveny z „přímých čar“ (přímek, polopřímek, úseček). Takové grafy jsme dokázali pomocí pravítka narýsovat. Nyní přejdeme k funkcím, jejichž grafy jsou „křivé čáry“. Důležitým příkladem je křivka zvaná *parabola*. Seznámíme se s ní jako s grafem *kvadratické funkce*.

? Co je funkce druhá mocnina a jak vypadá její graf?

Budeme zkoumat funkci f, která přiřazuje každému reálnému číslu jeho druhou mocninu:

$$f:\ y = x^2, \quad x \in \mathsf{R}$$

Dobře víme, že druhá mocnina každého čísla je nezáporné číslo. Proto je každá hodnota funkce f nezáporná:

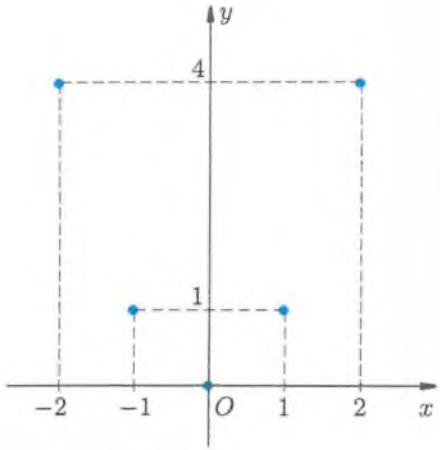
$$f(x) = x^2 \geqq 0 \quad \text{pro každé} \quad x \in \mathsf{R}$$

Víme také, že $x^2 = 0$ jen pro $x = 0$. Proto bude celý graf funkce f s výjimkou bodu $O[0,0]$ ležet „nad osou x“.

Sestavme tabulku funkce $f:\ y = x^2$ pro několik celočíselných hodnot nezávisle proměnné x:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = x^2$	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25

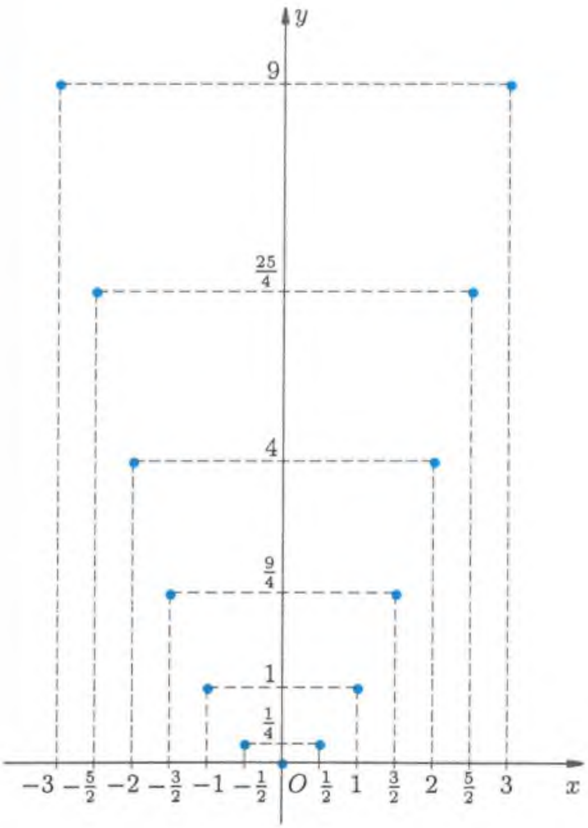
Kdybychom příslušné body chtěli vyznačit v kartézské soustavě souřadnic, museli bychom zvolit jednotku délky „malou“, neboť rozpětí hodnot proměnné y je „velké“. Do obrázku obvyklé velikosti se nám vejde jen několik bodů:



Vyznačených bodů je poměrně málo. Nemůžeme podle nich graf funkce věrně nakreslit. Proto například v intervalu $\langle -3, 3\rangle$ zvolíme několik dalších hodnot proměnné x. Vypočteme příslušné hodnoty x^2 a zapíšeme je do nové tabulky. Ještě předtím si však uvědomíme, že druhé mocniny navzájem opačných čísel se rovnají: $x^2 = (-x)^2$. Proto bude graf funkce $f\colon\ y = x^2$ souměrný podle osy y. V tabulce se tedy omezíme jen na nezáporné hodnoty proměnné x:

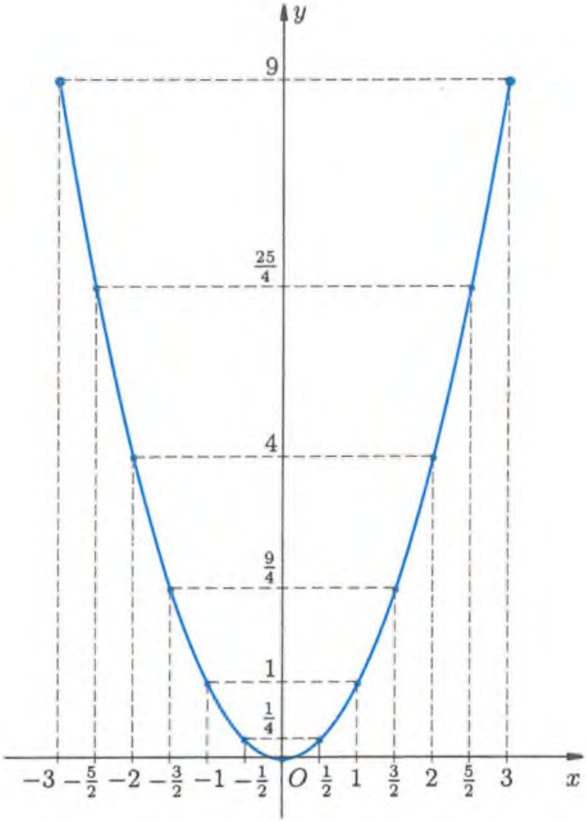
x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3
$y = x^2$	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{9}{4}$	4	$\frac{25}{4}$	9

Do obrázku zakreslíme i odpovídající body se zápornými x-ovými souřadnicemi.



Ani tento počet bodů k narýsování grafu funkce f nestačí. I když je vyznačených bodů více, nevíme, jak přesně graf mezi nimi „probíhá“. (Jistě tušíme, že graf funkce f nedostaneme, když „sousední“ body spojíme úsečkami!)

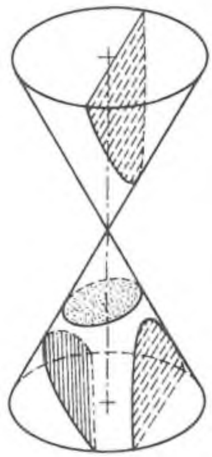
Graf funkce $f\colon\ y = x^2,\ x \in \langle -3, 3\rangle$, je znázorněn na následujícím obrázku. Vidíte na něm „hladkou“ křivku (bez „zlomů“ a přímých úseků), kterou nelze sestrojit pravítkem a kružítkem.



Grafem funkce $f\colon\ y = x^2$ je křivka, která se nazývá **parabola**. Je souměrná podle osy y. Bod $O[0,0]$ se nazývá **vrchol** této paraboly.

Do svých sešitů budete parabolu kreslit jen „od ruky“. Můžete si však při tom pomoci různými křivítky či šablonami. Na str. 121 je počítačovým programem sestrojen graf funkce $f\colon\ y = x^2,\ x \in \langle -4{,}1; 4{,}1\rangle$, s jednotkou délky 1 cm na obou osách. Pomocí něj si můžete šablonu pro kreslení paraboly sami vyrobit.

Parabolu řadíme mezi křivky zvané *kuželosečky*. Jsou to křivky, které vzniknou, když plášť kužele „rozřízneme" rovinou. Mezi kuželosečky patří také *kružnice*, *elipsa* a *hyperbola*.



Obrázek paraboly napovídá, že funkce $f\colon\ y = x^2$ je klesající v intervalu $(-\infty, 0\rangle$ a rostoucí v intervalu $\langle 0, \infty)$.

Můžeme to ověřit i nezávisle na obrázku následujícím výpočtem:

$$f(x_1) - f(x_2) = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2) \cdot (x_1 + x_2)$$

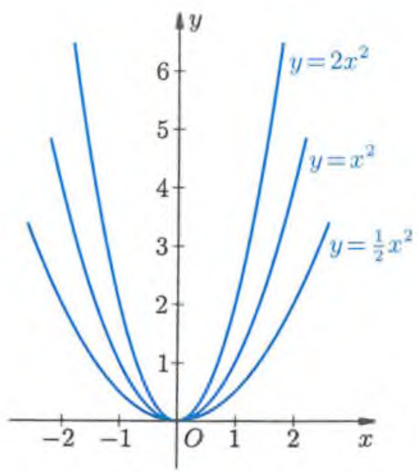
Je-li $x_1 < x_2 \leqq 0$, je každý z činitelů $x_1 - x_2$ a $x_1 + x_2$ záporný, jejich součin je tedy kladný. Proto je kladný rozdíl $f(x_1) - f(x_2)$, a tedy $f(x_1) > f(x_2)$. To znamená, že funkce f je v intervalu $(-\infty, 0\rangle$ skutečně klesající.

Je-li $0 \leqq x_1 < x_2$, je činitel $x_1 - x_2$ záporný a činitel $x_1 + x_2$ kladný, takže jejich součin je záporný. Proto je záporný i rozdíl $f(x_1) - f(x_2)$, a tedy $f(x_1) < f(x_2)$. To znamená, že funkce f je v intervalu $\langle 0, \infty)$ opravdu rostoucí.

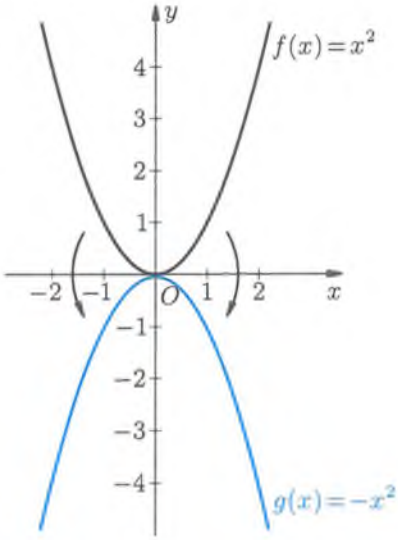
Co je *kvadratická funkce*?

?

Parabolu jsme zatím poznali jen jako graf funkce $f\colon\ y = x^2$. Všechny křivky, kterým říkáme paraboly, však nejsou shodné. Navzájem se liší tím, jak se „rychle rozevírají". Jsou to grafy funkcí $y = kx^2$ pro různá kladná čísla k, nejenom pro $k = 1$ jako dosud. Pro srovnání zakreslíme do jednoho obrázku grafy funkcí $y = kx^2$ pro $k = \frac{1}{2}$, $k = 1$ a $k = 2$.



Zmiňme se ještě o grafech funkcí $y = kx^2$ se zápornými koeficienty k. Například pro $k = -1$ jde o funkci $g\colon\ y = -x^2$. Její graf dostaneme, když graf funkce $f\colon\ y = x^2$ „překlopíme“ kolem osy x:



Grafy funkcí f a g jsou souměrně sdružené podle osy x.

□ **1.** Co je grafem funkce $f\colon\ y = kx^2$ v případě, kdy $k = 0$?

2. Načrtněte graf funkce:

a) $y = \frac{2}{3}x^2,\ \ x \in \langle -3, 3 \rangle$ b) $y = -2x^2,\ \ x \in \langle -2, 2 \rangle$

3. Ve vzorci $y = kx^2$ funkce f určete koeficient k, víte-li, že její graf prochází bodem $A\left[-\frac{1}{2}, 2\right]$.

Funkce dané vzorci tvaru $y = kx^2$ $(k \neq 0)$ nejsou jediné funkce, jejichž grafy jsou paraboly. Patří k nim také funkce s obecnějšími vzorci

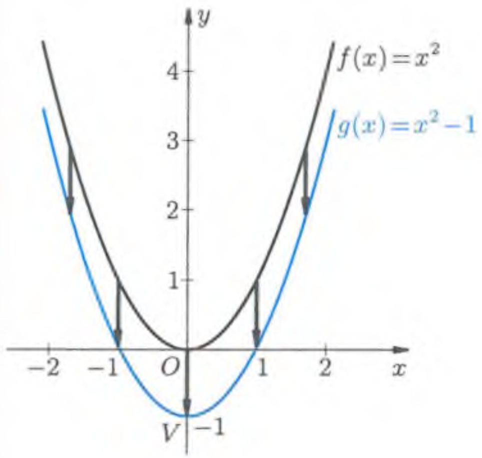
$$y = kx^2 + px + q,$$

kde $k \neq 0$, p a q jsou reálná čísla. Nazývají se **kvadratické funkce**.

Grafy kvadratických funkcí budete podrobně zkoumat ve vyšších ročnících. Nyní se zaměříme jen na kvadratické funkce „bez lineárního členu“, tedy na funkce zadané vzorcem

$$y = kx^2 + q \quad (k \neq 0).$$

Příkladem takové funkce je funkce $g\colon\ y = x^2 - 1$. K sestrojení jejího grafu využijeme graf funkce $f\colon\ y = x^2$ a uplatníme pravidlo, které jsme poznali již v kapitolách věnovaných lineárním funkcím a absolutním hodnotám. Protože pro každé $x \in \mathsf{R}$ platí $g(x) = f(x) - 1$, stačí graf funkce f posunout o 1 jednotku „dolů“ ve směru osy y:



Grafem funkce g je parabola s vrcholem $V[0,-1]$. Je to obraz vrcholu $O[0,0]$ původní paraboly ve zmíněném posunutí. Z našeho obrázku také vidíme, že graf funkce g protíná osu x ve dvou bodech. Jsou to body $[-1,0]$ a $[1,0]$. Bez obrázku určíme oba průsečíky tak, že do vzorce $y = x^2 - 1$ dosadíme $y = 0$. Dostaneme tak rovnici $x^2 - 1 = 0$, která má skutečně kořeny $x_1 = -1$ a $x_2 = 1$.

Zkušenost s posunutím paraboly můžeme zobecnit následujícím způsobem: Graf funkce $g\colon\ y = kx^2 + q$ dostaneme, když graf funkce $f\colon\ y = kx^2$ posuneme o $|q|$ jednotek ve směru osy y („nahoru“ v případě $q > 0$, „dolů“ v případě $q < 0$).

□ **4.** Určete souřadnice vrcholu paraboly, která je grafem funkce:

a) $y = x^2 + 3$ b) $y = -x^2 + 4$

5. Nakreslete graf funkce:

a) $y = x^2 + 2$ b) $y = -x^2 + 2$ c) $y = -x^2 - 2$

6. Určete intervaly, ve kterých je daná funkce rostoucí a ve kterých klesající:

a) $f\colon\ y = -2x^2$ b) $f\colon\ y = x^2 - 3$ c) $f\colon\ y = -x^2 + 4$

7. Určete průsečíky grafu funkce $y = -x^2 + 25$ s osou x.

8. Určete čísla k a q, víte-li, že graf funkce $f\colon\ y = kx^2 + q$ prochází body $A[0,-1]$ a $B[-1,2]$.

CVIČENÍ 5

1. V téže soustavě souřadnic nakreslete grafy funkcí

$$f:\ y = x^2, \qquad g:\ y = x^2 + 1.$$

Určete souřadnice průsečíku grafu funkce g s osou y.

2. V téže soustavě souřadnic nakreslete grafy funkcí

$$f:\ y = 3x^2, \qquad g:\ y = -3x^2.$$

Jaká je jejich vzájemná poloha? Pro každou z funkcí f, g určete „maximální" interval, ve kterém je daná funkce rostoucí.

3. Nakreslete graf funkce $f:\ y = x^2 - 2$. Určete, pro které hodnoty x platí:

a) $f(x) = 0$ b) $f(x) > 0$ c) $f(x) \leqq 0$

4. Nakreslete graf funkce $f:\ y = -x^2 + 1,\ x \in \langle -3, 3 \rangle$.

a) Určete souřadnice vrcholu paraboly, která je grafem funkce f.
b) Ve kterém intervalu je funkce f rostoucí?
c) Ve kterém intervalu je funkce f klesající?

5. V téže soustavě souřadnic nakreslete grafy funkcí

$$f:\ y = -x^2 - 1, \qquad g:\ y = -x^2 + 3.$$

6. Určete číslo k ze vzorce funkce $f:\ y = kx^2$, jestliže platí:

a) $f(2) = 12$ b) $f(-5) = -100$ c) $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6}$

7. Určete čísla k a q, víte-li, že graf funkce $f:\ y = kx^2 + q$ prochází body $C[1, -2]$ a $D[-2, 7]$.

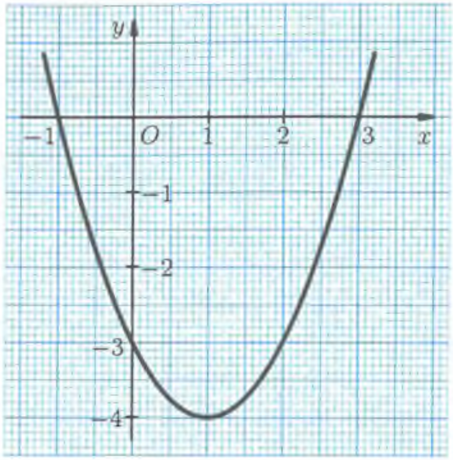
8. Vypočtěte souřadnice průsečíků grafu funkce $y = 5x^2 - 20$ s osami soustavy souřadnic.

$*$**9.** Na obrázku na str. 67 je sestrojena parabola, která je grafem funkce

$$f:\ y = x^2 - 2x - 3.$$

Z obrázku vyčtěte souřadnice

a) vrcholu paraboly, b) průsečíku paraboly s osou y,
c) průsečíků paraboly s osou x.



6 NEPŘÍMÁ ÚMĚRNOST

V sešitě *Úměrnosti* jsme poznali závislost kladných veličin, kterou jsme nazvali *nepřímou úměrností*. Tento druh funkcí nyní prozkoumáme podrobněji.

Co je *nepřímá úměrnost*?

?

Nepřímá úměrnost kladných veličin x, y se řídí pravidly „kolikrát se zvětší x, tolikrát se zmenší y“ nebo „kolikrát se zmenší x, tolikrát se zvětší y“. Znamená to, že součin $x \cdot y$ odpovídajících si hodnot x a y je stálý, je tedy roven některému kladnému číslu k.

Z rovnosti $x \cdot y = k$ plyne vzorec nepřímé úměrnosti $y = \frac{k}{x}$, číslo k se nazývá její *koeficient*.

Nyní se na tuto závislost podíváme jako na funkci. Do vzorce $y = \frac{k}{x}$ můžeme za nezávisle proměnnou x dosadit libovolné reálné číslo s výjimkou čísla $x = 0$. Proto za definiční obor funkce $f\colon\ y = \frac{k}{x}$ budeme považovat množinu všech nenulových (kladných i záporných) reálných čísel:

$$f\colon\ y = \frac{k}{x}, \quad x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$$

Této funkci budeme říkat **nepřímá úměrnost** s *koeficientem* k.

Domluvíme se, že za nepřímou úměrnost budeme považovat funkci danou vzorcem $y = \frac{k}{x}$ i v případě, kdy bude číslo k záporné. Půjde o nepřímou úměrnost se záporným koeficientem k. (Případ $k = 0$ vylučujeme, neboť odpovídá konstantní funkci $y = 0$.)

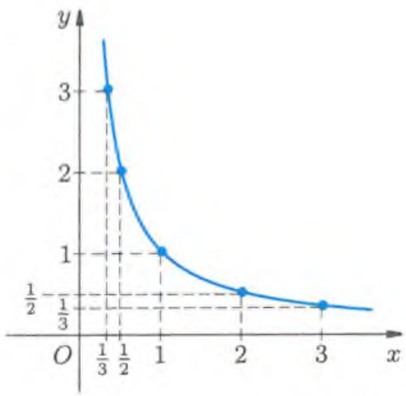
? Jak vypadá graf nepřímé úměrnosti?

Definiční obor funkce $f\colon y = \frac{1}{x}$ je složen ze dvou intervalů $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$. Celý graf funkce f rozdělíme na dvě části, kterými budou grafy funkcí

$$f_-\colon y = \frac{1}{x}, \quad x \in (-\infty, 0), \qquad \text{a} \qquad f_+\colon y = \frac{1}{x}, \quad x \in (0, \infty).$$

Za indexy jsme zvolili znaménka „plus“ a „minus“, která napovídají, jak vypadá definiční obor každé z obou funkcí.

Graf funkce f_+ jsme kreslili již v tercii:



Na obrázku není znázorněn celý graf funkce f_+. Jak pokračuje modrá čára za oběma „konci“? „Velkým“ hodnotám proměnné x odpovídají „malé“ (ale kladné) hodnoty proměnné y a naopak. Proto modrá čára žádnou ze souřadnicových os neprotne, i když se k nim „neomezeně přibližuje“.

Přejděme nyní k otázce, jak vypadá graf funkce f_-. Vypočtěme funkční hodnoty v číslech -3, -2, -1, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$ a zapišme je do tabulky:

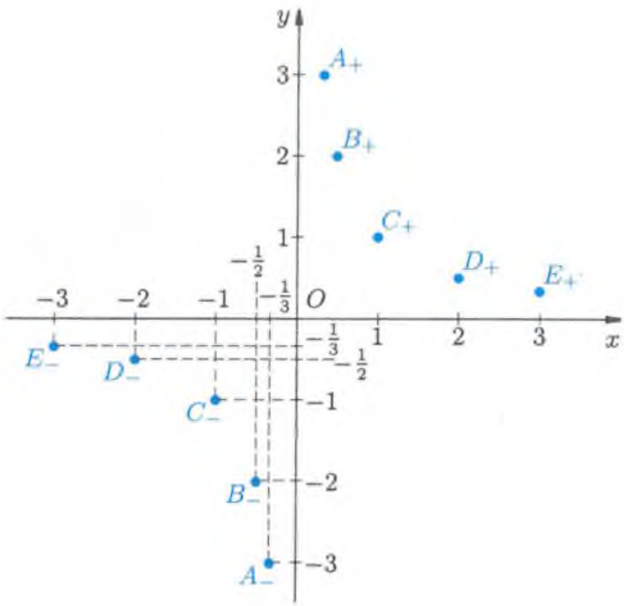
x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$
$f_-(x) = \frac{1}{x}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-3

Hodnoty x, které jsme zvolili, jsou čísla opačná k číslům, která byla vyznačena na ose x v grafu funkce f_+.

Vidíme, že platí:

$$f_-(-3) = -\tfrac{1}{3} = -f_+(3)$$
$$f_-(-2) = -\tfrac{1}{2} = -f_+(2)$$
$$f_-(-1) = -1 = -f_+(1)$$
$$f_-\left(-\tfrac{1}{2}\right) = -2 = -f_+\left(\tfrac{1}{2}\right)$$
$$f_-\left(-\tfrac{1}{3}\right) = -3 = -f_+\left(\tfrac{1}{3}\right)$$

Odpovídající si body obou grafů funkcí f_+ a f_- jsme v obrázku označili stejnými písmeny, která jsme opět rozlišili indexy „plus“ a „minus“.

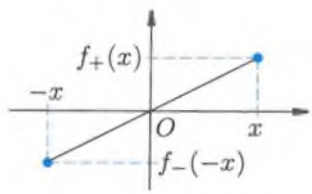


Všimněte si, že body $A_+\left[\frac{1}{3}, 3\right]$ a $A_-\left[-\frac{1}{3}, -3\right]$ jsou souměrně sdružené podle středu $O[0,0]$. Totéž platí o dvojicích B_+ a B_-, C_+ a C_-, D_+ a D_-, E_+ a E_-.

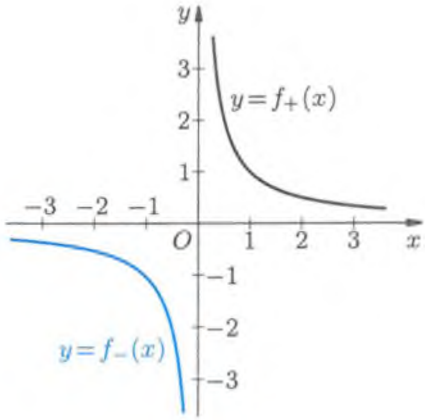
Předchozí pozorování můžeme zobecnit. Rovnost

$$\frac{1}{-x} = -\frac{1}{x}, \quad \text{neboli} \quad f_-(-x) = -f_+(x),$$

platí pro každé kladné číslo x. Proto jsou grafy funkcí f_+ a f_- *souměrně sdružené podle středu* $O[0,0]$.

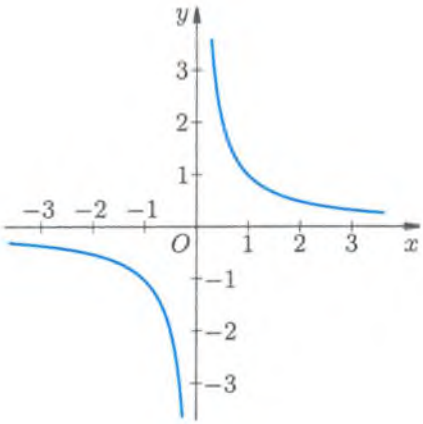


Graf funkce f_- je tedy křivka, kterou již známe. Je to obraz grafu funkce f_+ ve středové souměrnosti se středem $O[0,0]$.



„Spojením" grafů funkcí f_+ a f_- dostaneme celý graf funkce

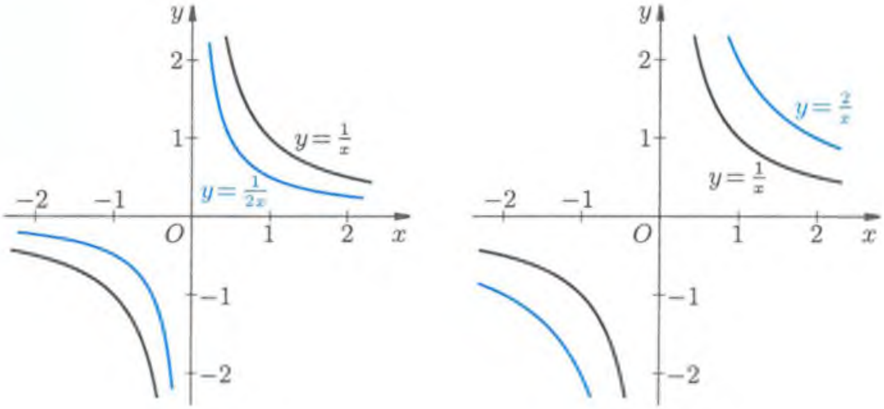
$$f:\ y = \frac{1}{x}, \quad x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty).$$



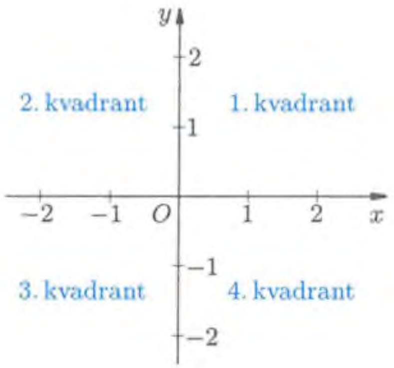
Tento graf je křivka zvaná **hyperbola**. Zdůrazněme, že je to *jedna* křivka složená ze dvou shodných souvislých částí. Říkáme jim **větve** hyperboly.

Všechny křivky, kterým říkáme hyperboly, nejsou shodné. Liší se navzájem tím, jak se „rychle přibližují" k souřadnicovým osám. Jsou to grafy funkcí se vzorci $y = \dfrac{k}{x}$ pro různá kladná čísla k. (V předchozím textu jsme se podrobně zabývali případem $k = 1$.)

Prohlédněte si grafy funkcí $y = \frac{2}{x}$ $(k = 2)$ a $y = \frac{1}{2x}$ $(k = \frac{1}{2})$ ve srovnání s grafem funkce $y = \frac{1}{x}$:



Pro určování poloh větví hyperboly v soustavě souřadnic je výhodné pojmenovat čtyři pravé úhly, na něž je rovina rozdělena souřadnicovými osami. Říkáme jim **kvadranty** a číslujeme je způsobem patrným z obrázku:



1. kvadrant: $x \geqq 0$, $y \geqq 0$
2. kvadrant: $x \leqq 0$, $y \geqq 0$
3. kvadrant: $x \leqq 0$, $y \leqq 0$
4. kvadrant: $x \geqq 0$, $y \leqq 0$

Nyní můžeme říci, že pro každé $k > 0$ je grafem funkce $y = \frac{k}{x}$ hyperbola, jejíž větve leží v prvním a ve třetím kvadrantu. Z rovnosti $xy = k > 0$ totiž plyne, že souřadnice x, y libovolného bodu této hyperboly jsou buď obě kladné, nebo obě záporné.

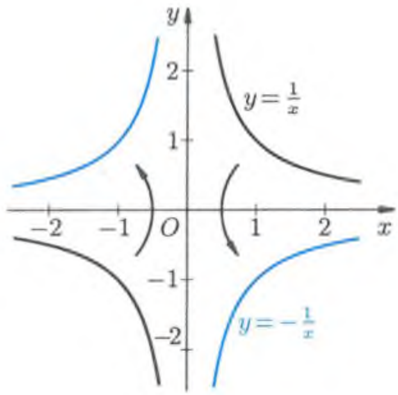
Odpovězme nyní na otázku, jak vypadá graf nepřímé úměrnosti $y = \frac{k}{x}$ se záporným koeficientem k. Začneme nejjednodušším případem, kdy $k = -1$. Najdeme tedy graf funkce

$$g\colon\ y = -\frac{1}{x}, \qquad x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty).$$

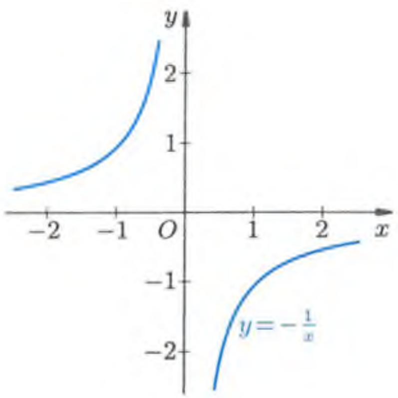
Pomůžeme si grafem funkce $f\colon\ y = \frac{1}{x}$ se stejným definičním oborem. Vzorce funkcí f a g se liší jenom znaménkem. Pro každé $x \neq 0$ platí:

$$g(x) = -f(x)$$

Jak již víme, znamená to, že grafy funkcí f a g jsou *souměrně sdružené podle osy x*.



Graf funkce g jsme získali tak, že jsme hyperbolu, která je grafem funkce f, „překlopili“ kolem osy x. Výsledkem je hyperbola, jejíž větve leží ve druhém a ve čtvrtém kvadrantu.



Nepřímou úměrností nazýváme funkci

$$f\colon\ y = \frac{k}{x}, \quad x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty),$$

kde k je nenulové reálné číslo zvané **koeficient** nepřímé úměrnosti f.
Grafem nepřímé úměrnosti je hyperbola.
Je-li $k > 0$, leží větve této hyperboly v 1. a ve 3. kvadrantu.
Je-li $k < 0$, leží větve této hyperboly ve 2. a ve 4. kvadrantu.

1. Načrtněte graf funkce $f\colon\ y = \dfrac{3}{x}$.

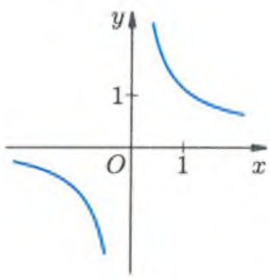
2. Načrtněte graf funkce $f\colon\ y = \dfrac{1}{3x}$. Pak jej využijte k nakreslení grafu funkce $g\colon\ y = -\dfrac{1}{3x}$.

3. Napište vzorec nepřímé úměrnosti, jejíž graf prochází bodem $A[-2, 5]$.

Jaký „průběh" má nepřímá úměrnost?

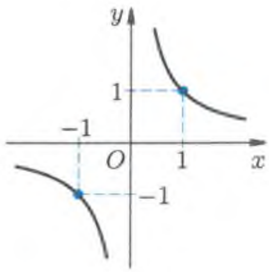
Dozvěděli jsme se, že grafem každé nepřímé úměrnosti je hyperbola. Její umístění v soustavě souřadnic závisí na tom, zda je koeficient k nepřímé úměrnosti $y = \dfrac{k}{x}$ kladný, nebo záporný.

Posuďme nejprve případ $k > 0$. Větve hyperboly leží v 1. a 3. kvadrantu. Vidíme, že funkce $f\colon\ y = \dfrac{k}{x}$ je *klesající* jak v intervalu $(-\infty, 0)$, tak v intervalu $(0, \infty)$.

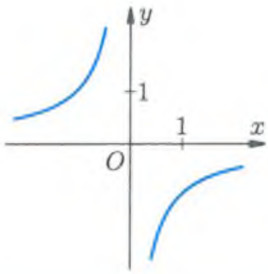


Funkce f však není klesající (v celém definičním oboru). Potvrzuje to například dvojice bodů, které jsou vyznačeny na grafu funkce f:

$$\text{ačkoliv} \quad -1 < 1, \quad \text{platí} \quad f(-1) < f(1).$$



Je-li $k < 0$, je z obrázku hyperboly patrné, že funkce $f\colon\ y = \dfrac{k}{x}$ je *rostoucí* jak v intervalu $(-\infty, 0)$, tak v intervalu $(0, \infty)$. Sami vysvětlete, proč o funkci f nemůžeme říci, že je rostoucí (v celém definičním oboru).



Je-li koeficient k nepřímé úměrnosti $y = \dfrac{k}{x}$ kladný, je tato funkce klesající jak v intervalu $(-\infty, 0)$, tak v intervalu $(0, \infty)$.

Je-li koeficient k nepřímé úměrnosti $y = \dfrac{k}{x}$ záporný, je tato funkce rostoucí jak v intervalu $(-\infty, 0)$, tak v intervalu $(0, \infty)$.

□ **4.** Najděte intervaly, ve kterých je funkce f rostoucí a ve kterých je klesající, je-li:

a) $f\colon\ y = \dfrac{4}{x}$ b) $f\colon\ y = -\dfrac{2}{x}$ c) $f\colon\ y = \dfrac{2}{5x}$ d) $f\colon\ y = \dfrac{-3}{8x}$

CVIČENÍ 6

1. Nakreslete graf funkce $f\colon\ y = \dfrac{5}{2x}$. Rozhodněte, zda je funkce f v celém svém definičním oboru rostoucí, nebo klesající. Určete intervaly, ve kterých je funkce f klesající.

2. Nakreslete graf funkce $f\colon\ y = -\dfrac{3}{x}$. Rozhodněte, zda je funkce f v celém svém definičním oboru rostoucí, nebo klesající. Určete intervaly, ve kterých je funkce f rostoucí.

3. Nakreslete graf funkce $f\colon\ y = \dfrac{1}{2x}$ a pak ho využijte k nakreslení grafu funkce $g\colon\ y = -\dfrac{1}{2x}$.

4. Je dána funkce $f\colon\ y = \dfrac{-10}{x}$. Aniž byste kreslili její graf, rozhodněte,

a) která křivka je grafem funkce f a kterými kvadranty prochází,

b) pro které hodnoty proměnné x platí $f(x) > 0$,

c) pro které hodnoty proměnné x platí $f(x) < 0$.

5. Určete, zda je rostoucí v intervalu $\langle -2, -10\rangle$ funkce

a) $f\colon\ y = \dfrac{3}{x}$, b) $f\colon\ y = \dfrac{5}{4x}$, c) $f\colon\ y = -\dfrac{7}{9x}$, d) $f\colon\ y = \dfrac{-4}{5x}$.

6. Rozhodněte, které z bodů $A\left[\frac{1}{4}, \frac{2}{3}\right]$, $B\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{2}\right]$, $C\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$, $D\left[\frac{1}{3}, \frac{8}{9}\right]$, $E\left[\frac{1}{3}, \frac{9}{8}\right]$ leží na grafu funkce $y = \dfrac{3}{8x}$.

7. Určete vzorec nepřímé úměrnosti, jejíž graf prochází bodem $N\left[-4, -\frac{3}{2}\right]$.

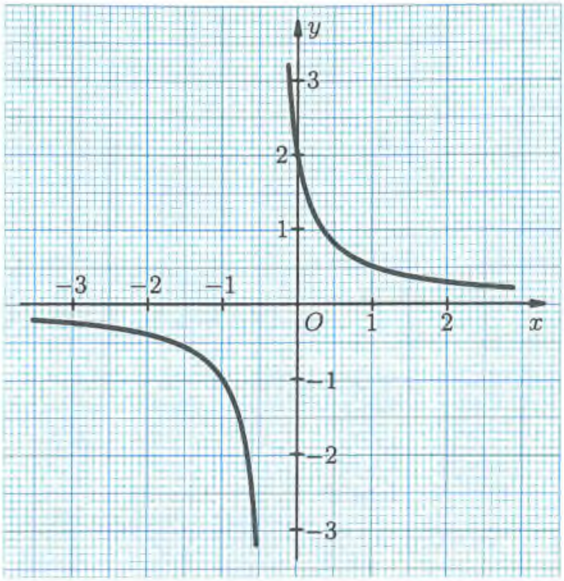
8. Body $A[1,2]$, $B[1,-2]$, $C[2,-1]$, $D[-1,2]$, $E[2,1]$ a $F[-2,1]$ leží na grafech dvou nepřímých úměrností f a g. Určete obě funkce vzorci a rozhodněte, který bod leží na kterém grafu.

∗9. Hyperbola na obrázku na str. 76 je grafem funkce $f\colon\ y = \dfrac{2}{3x+1}$.

a) Určete definiční obor funkce f.

b) Určete, ve kterých intervalech je funkce f rostoucí a ve kterých klesající.

c) Určete souřadnice průsečíku grafu funkce f s osou y.



7 GRAFICKÉ ŘEŠENÍ ROVNIC

Poznatky o grafech funkcí, jež jsme získali v minulých kapitolách, nyní využijeme k novému pohledu na téma *řešení rovnic a jejich soustav*, které již dobře známe. Dosud jsme rovnice řešili algebraickými úpravami a aritmetickými výpočty. Nyní se budeme věnovat *grafickému řešení* rovnic, kdy úpravy a výpočty nahrazujeme rýsováním a čtením souřadnic bodů.

Nezapomeňte, že tento postup nemusí vést k *přesným* výsledkům, zejména pokud řešeními rovnic nejsou celá čísla. V každém případě se vyplatí ověřit nalezená řešení *zkouškou* dosazením.

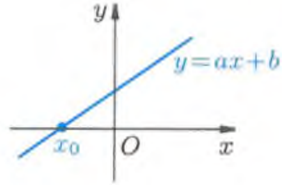
? Jak graficky řešíme lineární rovnice?

Připomeňme, že lineární rovnicí nazýváme každou rovnici tvaru

$$ax + b = 0,$$

kde x je neznámá, $a \neq 0$ a b jsou daná čísla.

Levá strana takové rovnice určuje lineární funkci $f\colon\ y = ax + b$. Jejím grafem je přímka, kterou jsme se již naučili rýsovat. Řešit rovnici $ax + b = 0$ vlastně znamená určit, ve kterém čísle x_0 nabývá funkce f hodnoty 0, tedy zjistit x-ovou souřadnici průsečíku grafu funkce f s osou x.



$$ax_0 + b = 0$$

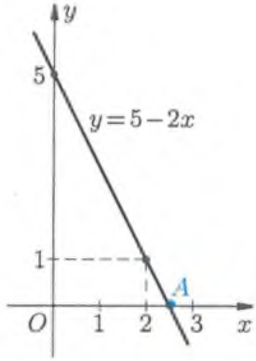
Vyřešíme například rovnici

$$5 - 2x = 0.$$

Je zřejmé, že tato rovnice má jediný kořen $x = \frac{5}{2}$.

Nyní tuto hodnotu „objevíme" grafickou cestou. Sestrojíme graf funkce $f\colon\ y = 5 - 2x$.

x	0	2
$y = 5 - 2x$	5	1



Vidíme, že přímka, která je grafem funkce f, protíná osu x v bodě $A[2{,}5; 0]$. Proto je řešením dané rovnice číslo $x = 2{,}5 = \frac{5}{2}$.

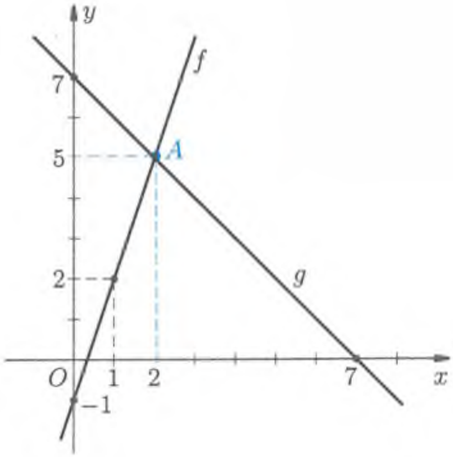
Příklad 1. Řešte graficky rovnici $3x - 1 = 7 - x$.

Řešení. Danou rovnici nebudeme upravovat na tvar $ax + b = 0$ (i když je to snadné). Ukážeme jiný postup. Výrazy $3x - 1$ a $7 - x$, které jsou na levé a pravé straně této rovnice, určují dvě lineární funkce $f\colon\ y = 3x - 1$ a $g\colon\ y = 7 - x$. Řešit rovnici $3x - 1 = 7 - x$ vlastně znamená najít ty hodnoty nezávisle proměnné x, pro které funkce f a g nabývají stejných hodnot, tzn. platí $f(x) = g(x)$. Provedeme to graficky.

Sestrojíme přímky, které jsou grafy funkcí f a g a najdeme jejich průsečík.

x	0	1
$f(x) = 3x - 1$	-1	2

x	0	7
$g(x) = 7 - x$	7	0



Rýsováním jsme zjistili, že grafy funkcí f a g jsou přímky, které se protínají v bodě $A[2,5]$. To znamená, že pro $x = 2$ platí $f(x) = g(x) = 5$. Pro každé $x \neq 2$ platí $f(x) \neq g(x)$, konkrétně $f(x) < g(x)$ pro $x < 2$ a $f(x) > g(x)$ pro $x > 2$. Proto $x = 2$ je jediným řešením rovnice $3x - 1 = 7 - x$. Ověřte to sami přímým výpočtem.

1. Řešte graficky rovnici:

a) $2x + 4 = 0$ b) $4x - 1 = 0$

2. V pravoúhlé soustavě souřadnic s vhodně zvolenými jednotkami na osách řešte graficky rovnici:

a) $3x + 2 = 2x + 1$ b) $2x - 5 = x - 3$

? Jak graficky řešíme soustavy rovnic?

Postup, který používáme při grafickém řešení soustav rovnic, vysvětlíme na příkladu soustavy

$$x + y = 1,$$
$$2x - y = -4.$$

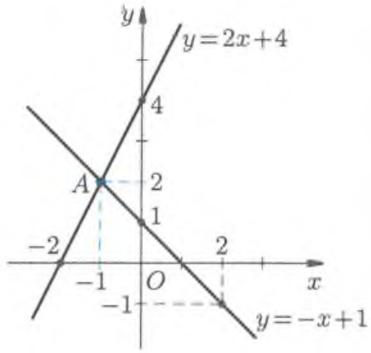
Každá z obou rovnic soustavy udává závislost proměnných x a y. Vyjádříme v obou případech, jak y závisí na x:

$$y = -x + 1$$
$$y = 2x + 4$$

Vidíme, že obě závislosti jsou lineární funkce. Jejich grafy zakreslíme do jednoho obrázku, abychom zjistili, pro které x nabývají obě funkce stejné hodnoty.

x	0	2
$y = -x + 1$	1	-1

x	-2	0
$y = 2x + 4$	0	4



Zjišťujeme, že narýsované přímky jsou různoběžky, které se protínají v bodě A o souřadnicích $x = -1$ a $y = 2$. Proto je řešením dané soustavy jediná dvojice čísel $x = -1$, $y = 2$.

Pomocí metody, kterou jsme nyní vyložili, můžeme názorně vysvětlit, proč některé soustavy nemají *žádné* řešení, jiné jich naopak mají *nekonečně mnoho*. Řešme graficky například soustavu

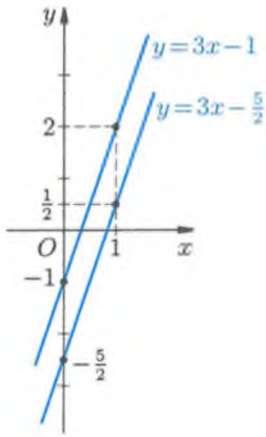
$$\begin{aligned} 3x - y &= 1, \\ 6x - 2y &= 5. \end{aligned}$$

Z obou rovnic vyjádříme neznámou y a sestrojíme grafy příslušných lineárních funkcí:

$$y = 3x - 1 \qquad\qquad y = \frac{6x-5}{2} = 3x - \frac{5}{2}$$

x	0	1
$y = 3x - 1$	-1	2

x	0	1
$y = 3x - \frac{5}{2}$	$-\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$



Narýsované přímky jsou (různé) rovnoběžky. To znamená, že dané dvě funkce nemají pro žádné x stejnou hodnotu. Proto daná soustava nemá žádné řešení.

Při rýsování někdy nepoznáme, zda dvě přímky jsou skutečně rovnoběžné, či nikoliv (jejich průsečík může totiž ležet „daleko" od místa, kde je rýsujeme). To, že rovnice $y = 3x - 1$ a $y = 3x - \frac{5}{2}$ určují skutečně rovnoběžné přímky, však již umíme vysvětlit. Obě přímky jsou totiž rovnoběžné s přímkou, jež je grafem přímé úměrnosti $y = 3x$.

Nakonec ještě ukážeme, jak dopadne grafické řešení soustav rovnic, které mají nekonečně mnoho řešení.

Vyřešme soustavu

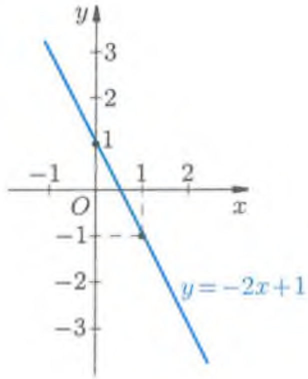
$$\begin{aligned} 2x + y &= 1, \\ 4x + 2y &= 2. \end{aligned}$$

Z obou rovnic plyne stejné vyjádření neznámé y:

$$y = -2x + 1, \qquad y = \frac{-4x + 2}{2} = -2x + 1$$

V tomto případě hledáme společné body přímek, které splývají v jednu (jsou totožné). Souřadnice *každého* bodu této přímky jsou řešením dané soustavy:

x	0	1
$y = -2x + 1$	1	−1



Z grafu můžeme vyčíst některá řešení této soustavy. Kromě hodnot x, y z tabulky jsou to například dvojice čísel $x_1 = -1,\ y_1 = 3$ a $x_2 = 2,\ y_2 = -3$. (Příslušné body ukažte na grafu sami.)

Připomeňme ještě, jak jsme všechna řešení takové soustavy zapisovali. Položili jsme $x = t$ a „dopočítali“ y: $y = -2t + 1$. Naše soustava má nekonečně mnoho řešení

$$x = t, \quad y = -2t + 1, \quad \text{kde} \quad t \in \mathsf{R},$$

a žádná jiná.

Shrňme poznatky, které jsme získali při grafickém řešení soustav dvou rovnic, z nichž každá má tvar

$$ax + by = c,$$

kde x a y jsou neznámé, $a \neq 0$, $b \neq 0$ a c jsou daná čísla. Taková soustava

- má *jediné* řešení, pokud grafy odpovídajících funkcí jsou dvě *různoběžky*,
- nemá *žádné* řešení, pokud grafy odpovídajících funkcí jsou dvě *různé rovnoběžky*,
- má *nekonečně mnoho* řešení, pokud grafy odpovídajících funkcí jsou dvě *totožné přímky*.

3. V pravoúhlé soustavě souřadnic s vhodně zvolenými jednotkami na osách řešte graficky soustavu rovnic:

a) $2x + y = -4$
$\quad x - y = 1$

b) $2x + y = -2$
$\quad 4x - 2y = 8$

4. Grafickou metodou zdůvodněte, proč daná soustava nemá řešení:

a) $3x - 2y = 4$
$\quad 9x - 6y = 6$

b) $8x - 6y = 3$
$\quad 4x - 3y = 3$

5. Potvrďte graficky, že daná soustava má nekonečně mnoho řešení:

a) $x - 2y = 1$
$3x - 6y = 3$

b) $4x - 8y = 6$
$2x - 4y = 3$

? Jak řešíme graficky kvadratické rovnice?

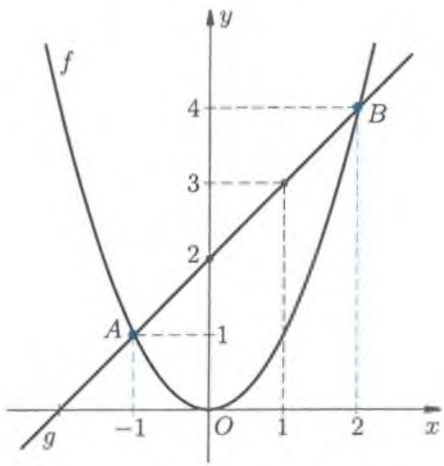
Vysvětleme nyní, jak se graficky řeší například rovnice $x^2 - x - 2 = 0$. Na levé straně rovnice nejprve „osamostatníme" kvadratický člen:

$$x^2 = x + 2$$

Levá strana určuje kvadratickou funkci $f\colon\ y = x^2$, pravá strana lineární funkci $g\colon\ y = x + 2$. Sestrojíme grafy obou funkcí a nalezneme jejich průsečíky.

Graf funkce f nakreslíme podle šablony, graf funkce g podle dvou bodů, jejichž souřadnice jsou uvedeny v tabulce:

x	0	1
$g(x) = x + 2$	2	3



Grafy obou funkcí se protínají v bodech $A[-1, 1]$ a $B[2, 4]$, jejichž x-ové souřadnice jsou řešeními rovnice $x^2 = x + 2$. Tato rovnice má tedy dva kořeny: $x_1 = -1$ a $x_2 = 2$.

Dodejme, že v úvodu řešení jsme člen x^2 osamostatnili, protože ještě neumíme kreslit grafy obecných kvadratických funkcí $y = ax^2 + bx + c$.

Příklad 2. Řešte graficky rovnici $3x^2 - 5x - 2 = 0$.

Řešení. Danou rovnici nejprve upravíme na tvar

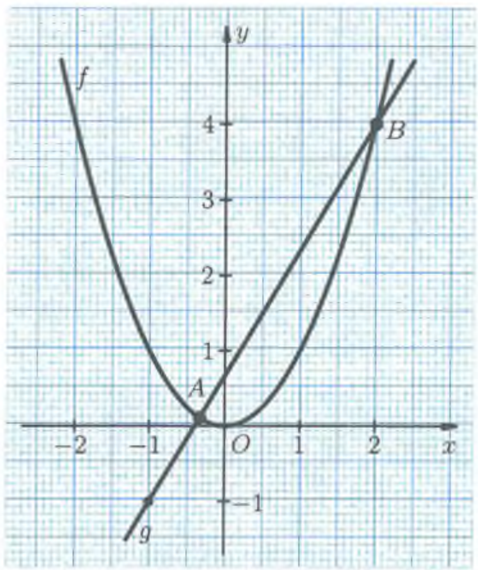
$$3x^2 = 5x + 2.$$

Abychom mohli využít šablony s grafem funkce $y = x^2$, vydělíme obě strany rovnice číslem 3:

$$x^2 = \tfrac{5}{3}x + \tfrac{2}{3}$$

Podle šablony sestrojíme graf funkce $f\colon\ y = x^2$, pomocí tabulky určíme dva body grafu lineární funkce $g\colon\ y = \frac{5}{3}x + \frac{2}{3}$:

x	-1	2
$y = \frac{5}{3}x + \frac{2}{3}$	-1	4



Oba grafy se protínají ve dvou bodech, které jsme na obrázku označili písmeny A a B. Zatímco souřadnice $x_B = 2$ a $y_B = 4$ bodu B lze z grafů vyčíst „přesně“, souřadnice $[x_A, y_A]$ bodu A je možné jen odhadnout: $x_A \doteq -\frac{1}{3}$, $y_A \doteq \frac{1}{10}$.

Přesné hodnoty souřadnic bodu A lze zjistit výpočtem: $x_A = -\frac{1}{3}$, $y_A = \frac{1}{9}$.

Dosazením ověříme, že nalezené hodnoty $x_1 = -\frac{1}{3}$ a $x_2 = 2$ jsou skutečně kořeny dané rovnice:

$$x = -\tfrac{1}{3}$$
$$L = 3x^2 - 5x - 2 = 3 \cdot \left(-\tfrac{1}{3}\right)^2 - 5 \cdot \left(-\tfrac{1}{3}\right) - 2 = 3 \cdot \tfrac{1}{9} + 5 \cdot \tfrac{1}{3} - 2 =$$
$$= \tfrac{1}{3} + \tfrac{5}{3} - 2 = 0$$
$$P = 0$$
$$L = P$$

$$x = 2$$
$$L = 3x^2 - 5x - 2 = 3 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 - 2 = 12 - 10 - 2 = 0$$
$$P = 0$$
$$L = P$$

Připomeňme, že kvadratické rovnice se záporným diskriminantem nemají žádný kořen. Tak například rovnice

$$x^2 - x + 1 = 0$$

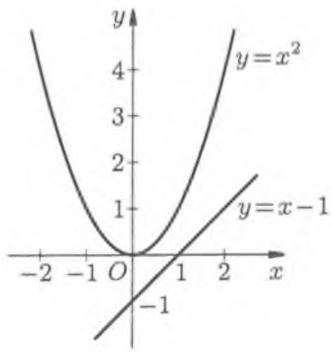
má diskriminant

$$D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3.$$

Řešme tuto rovnici graficky. Upravme ji na tvar

$$x^2 = x - 1$$

a nakresleme grafy funkcí $y = x^2$ a $y = x - 1$:



Vidíme, že grafy nemají žádný společný bod. Tak jsme graficky potvrdili, že rovnice $x^2 - x + 1 = 0$ nemá žádný kořen.

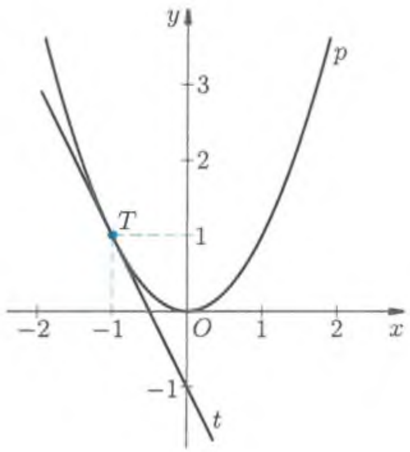
Na závěr se ještě zmíníme o tom, jak se na grafech projeví, když má kvadratická rovnice *jeden* (dvojnásobný) kořen. Příkladem je rovnice

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

s kořenem $x_1 = x_2 = -1$. Úpravou dané rovnice dostáváme

$$x^2 = -2x - 1.$$

Do jedné soustavy souřadnic nakreslíme parabolu p, která je grafem funkce $y = x^2$, a přímku t, jež je grafem funkce $y = -2x - 1$.



Přímka t má s parabolou p jediný společný bod $T[-1, 1]$. Znamená to, že číslo $x_T = -1$ je jediným kořenem rovnice $x^2 + 2x + 1 = 0$.

6. Řešte graficky kvadratickou rovnici:

a) $x^2 + x - 2 = 0$ b) $x^2 - 4x + 3 = 0$

c) $2x^2 - x - 1 = 0$ d) $2x^2 + 5x - 3 = 0$

7. Potvrďte graficky, že daná rovnice nemá žádný kořen:

a) $x^2 + x + 1 = 0$ b) $2x^2 - x + 2 = 0$

8. Řešte graficky kvadratickou rovnici:

a) $x^2 - 2x + 1 = 0$ b) $4x^2 + 4x + 1 = 0$

CVIČENÍ 7

1. V pravoúhlé soustavě souřadnic s vhodně zvolenými jednotkami na osách řešte graficky rovnici:

a) $4x + 16 = 0$ b) $-7x - 14 = 0$

2. V pravoúhlé soustavě souřadnic s vhodně zvolenými jednotkami na osách řešte graficky rovnici:

a) $2x - 1 = -x + 5$ b) $-3x + 5 = x + 9$

c) $2x = 5x + 15$ d) $3x - 6 = -6 + 8x$

3. Řešte početně i graficky soustavu rovnic:

a) $\begin{aligned} 2x - y &= 1 \\ -3x - y &= -4 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} 3x - 2y - 10 &= 0 \\ 2x + y - 9 &= 0 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} -x - 3y &= 9 \\ x - 2y &= 1 \end{aligned}$ d) $\begin{aligned} -1 - 6x &= -y \\ 2x + y &= -3 \end{aligned}$

4. Grafickou metodou ilustrujte, že následující soustava nemá řešení:

a) $\begin{aligned} 2x - y &= 3 \\ 4x - 2y &= -7 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} 4x + y &= -1 \\ 12x + 3y &= 2 \end{aligned}$

5. Řešte graficky danou kvadratickou rovnici:

a) $x^2 + x - 6 = 0$ b) $x^2 - x - 2 = 0$ c) $2x^2 - 5x + 2 = 0$ x +

6. Řešte výpočtem i graficky danou kvadratickou rovnici:

a) $x^2 + 2x = 0$ b) $x^2 - 4 = 0$ c) $x^2 - x - 6 = 0$

7. Ověřte graficky, že daná rovnice nemá žádný kořen:

a) $x^2 - 2x + 2 = 0$ b) $x^2 + 3x + 4 = 0$

8 SLOVNÍ ÚLOHY

V minulé kapitole jsme graficky řešili rovnice a jejich soustavy. Dobře víme, že rovnice jsou vhodným prostředkem k řešení rozmanitých slovních úloh. Sestavujeme je ze známých a neznámých údajů, které příslušné situace ze zadání slovních úloh popisují.

V této kapitole ukážeme, že některé slovní úlohy o lineárních závislostech lze řešit graficky. Mnohdy se tak vyhneme sestavování rovnic, ovšem získané výsledky musíme „brát s rezervou". Mohou být totiž ovlivněny nepřesnostmi, kterých se při rýsování a čtení z grafů dopouštíme. Proto „grafické" výsledky jednotlivých úloh budeme vždy srovnávat s přesnými výsledky získanými výpočty.

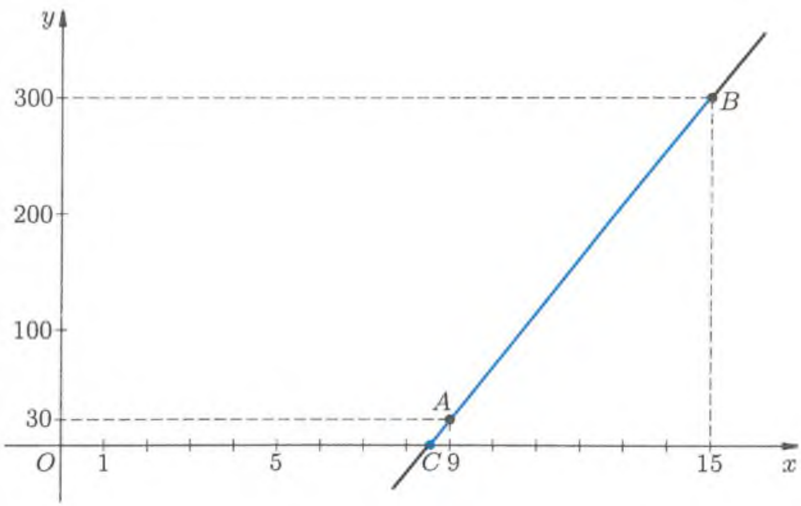
Příklad 1. Zahradní bazén se rovnoměrně napouštěl jedním čerpadlem. V 9 hodin dopoledne v něm bylo 30 hl vody, v 15 hodin odpoledne téhož dne obsahoval 300 hl vody a byl právě zcela zaplněn.

a) Zjistěte, v kolik hodin se začal (prázdný) bazén napouštět.

b) Určete, kolik vody bylo v bazénu ve 14 hodin.

Řešení. Průběh napouštění bazénu znázorníme grafem funkce, která vyjadřuje, že v x hodin bylo v bazénu y hl vody.

Víme, že hodnotě $x = 9$ odpovídá hodnota $y = 30$, hodnotě $x = 15$ odpovídá hodnota $y = 300$. Známe tedy dva body $A[9, 30]$ a $B[15, 300]$ zkoumaného grafu. Protože se bazén napouštěl rovnoměrně, budou všechny body $[x, y]$ grafu funkce ležet na téže přímce. Tu můžeme pomocí bodů A a B narýsovat:

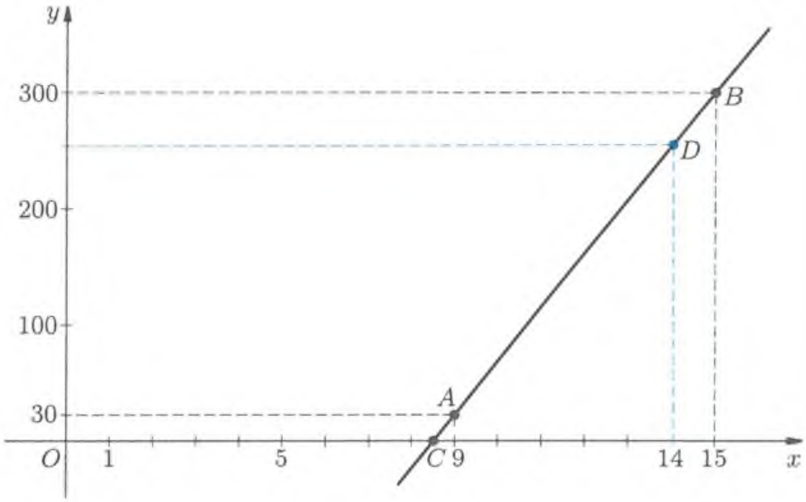


Při napouštění bazénu narůstalo množství vody od 0 hl (prázdný bazén) do 300 hl (plný bazén). Proto jsme z celé přímky AB modře vyznačili pouze její část – úsečku CB. Ta je tvořena právě těmi body, jejichž souřadnice y splňují nerovnosti

$$0 \leqq y \leqq 300.$$

Bod C odpovídá okamžiku, kdy se bazén začínal napouštět. Z grafu vyčteme jeho x-ovou souřadnici $x_C \doteq 8{,}3$. To znamená, že se bazén začal napouštět asi v 8 h 18 min.

Tak jsme našli odpověď na otázku a) naší úlohy. Pomohli jsme si grafem, který můžeme využít i při řešení části b). Stavu bazénu ve 14 hodin totiž odpovídá takový bod D grafu, jehož x-ová souřadnice je 14.



Z grafu určíme $y_D \doteq 260$. Proto ve 14 hodin bylo v bazénu asi 260 hl vody.

Přesnost „grafických" výsledků nyní ověříme úsudkem.

Protože $300 - 30 = 270$ a $15 - 9 = 6$, přiteklo do bazénu 270 hl vody za 6 hodin, tedy za 1 hodinu to bylo $\frac{270}{6}$ hl, tj. 45 hl vody. Proto napuštění prvních 30 hl trvalo $\frac{30}{45}$ hodiny, tedy 40 minut; napouštění tedy začalo v 8 hodin 20 minut. Za dobu od 9 hodin do 14 hodin do bazénu nateklo $5 \cdot 45\,\text{hl} = 225\,\text{hl}$ vody, takže ve 14 hodin bylo v bazénu $(30 + 225)\,\text{hl} = 255\,\text{hl}$ vody.

Najdeme ještě vzorec příslušné lineární funkce

$$y = ax + b,$$

která vyjadřuje závislost zkoumaných veličin x a y. Podle bodů $A[9, 30]$,

$B[15, 300]$ usoudíme, že neznámé koeficienty a, b jsou řešením soustavy rovnic

$$30 = 9a + b,$$

$$300 = 15a + b.$$

Odečtením těchto rovnic dostaneme $270 = 6a$, takže $a = 45$, a proto

$$b = 30 - 9a = 30 - 9 \cdot 45 = 30 - 405 = -375.$$

Hledaný vzorec má tedy tvar

$$y = 45x - 375.$$

Položíme-li $y = 0$, dostaneme rovnici $45x = 375$, která má řešení $x = 8\frac{1}{3}$. Pro $x = 14$ vychází $y = 45 \cdot 14 - 375 = 630 - 375 = 255$.

Napouštění bazénu začalo v 8 h 20 min; ve 14 h v něm bylo 255 hl vody.

1. Z předchozího grafu vyčtěte:

a) kolik vody bylo v bazénu v poledne

b) v kolik hodin byl bazén zaplněn do poloviny

Výsledky získané graficky zkontrolujte výpočtem.

2. Pro lineární funkci f platí $f(1) = -2$, $f(5) = 10$. Sestrojte její graf a vyčtěte z něj:

a) $f(2)$ b) $f(7)$

c) pro které x je $f(x) = 0$ d) pro které x je $f(x) = -11$

Výsledky získané graficky zkontrolujte výpočtem.

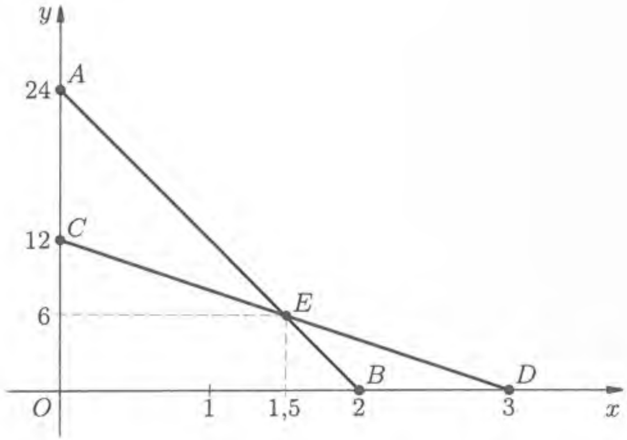
3. Plná cisterna se prvním čerpadlem zcela vyprázdní za 6 hodin, druhým, výkonnějším, za 3 hodiny. Znázorněte graficky do jednoho obrázku průběh vyprazdňování cisterny jednotlivými čerpadly. Pak do tohoto obrázku nakreslete, jak by probíhalo vyprazdňování cisterny oběma čerpadly současně.

Příklad 2. Petr zapálil současně dvě svíčky. Jedna z nich měřila 24 cm a dohořela za 2 hodiny. Druhá, kratší a silnější, měřila původně 12 cm a dohořela za 3 hodiny. Určete, ve kterém okamžiku měly obě hořící svíčky stejnou délku. Předpokládáme, že svíčky se zkracovaly rovnoměrně.

Řešení. Do jednoho obrázku narýsujeme, jak se měnily délky obou svíček v závislosti na době jejich hoření. Přesněji řečeno, pro každou svíčku znázorníme právě ty body $[x, y]$, kdy za x hodin hoření měřila svíčka y cm.

Protože první svíčka původně měřila 24 cm a dohořela za 2 hodiny, bude příslušným grafem úsečka s krajními body $A[0, 24]$ a $B[2, 0]$.

Druhá svíčka původně měřila 12 cm a dohořela za 3 hodiny. Příslušným grafem je tedy úsečka CD, kde $C[0, 12]$ a $D[3, 0]$.



Obě úsečky se protínají v bodě E, jehož x-ová souřadnice udává čas (v hodinách), ve kterém měly obě svíčky stejnou délku, a ta je (v centimetrech) vyjádřena y-ovou souřadnicí bodu E. Z grafu určíme, že $x_E \doteq 1{,}5$ a $y_E \doteq 6$.

Obě svíčky měly stejnou délku přibližně po jedné a půl hodině hoření, kdy každá z nich měřila asi 6 cm.

O tom, že tentokrát jsme z grafu vyčetli přesné hodnoty, se nyní přesvědčíme výpočtem. Napíšeme vzorce lineárních funkcí f_1 a f_2, které popisují hoření první a druhé svíčky.

Koeficienty a_1, b_1 lineární funkce $f_1\colon\ y = a_1x + b_1$ určíme pomocí bodů $A[0, 24]$, $B[2, 0]$, které leží na grafu funkce f_1:

$$24 = a_1 \cdot 0 + b_1$$
$$0 = a_1 \cdot 2 + b_1$$

Z první rovnice vychází $b_1 = 24$, po dosazení do druhé pak $0 = 2a_1 + 24$, tzn. $a_1 = -12$. Průběh hoření první svíčky tedy popisuje funkce

$$f_1\colon\ y = -12x + 24, \quad x \in \langle 0, 2 \rangle.$$

Podobně pomocí bodů $C[0,12]$ a $D[3,0]$ nalezneme neznámé koeficienty a_2, b_2 ve vzorci $y = a_2x + b_2$ funkce f_2 pro hoření druhé svíčky:

$$\begin{aligned} 12 &= a_2 \cdot 0 + b_2 \\ 0 &= a_2 \cdot 3 + b_2 \end{aligned}$$

Z první rovnice vychází $b_2 = 12$, po dosazení do druhé pak $0 = 3a_2 + 12$, tzn. $a_2 = -4$. Hoření druhé svíčky je popsáno funkcí

$$f_2\colon\ y = -4x + 12, \qquad x \in \langle 0, 3 \rangle.$$

Obě svíčky budou mít stejnou délku po x hodinách hoření, pokud bude platit $f_1(x) = f_2(x)$. Řešme proto rovnici:

$$\begin{aligned} -12x + 24 &= -4x + 12 \\ 8x &= 12 \\ x &= \tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

Pro $x = \frac{3}{2}$ platí:

$$f_1\left(\tfrac{3}{2}\right) = -12 \cdot \tfrac{3}{2} + 24 = 6, \qquad f_2\left(\tfrac{3}{2}\right) = -4 \cdot \tfrac{3}{2} + 12 = 6$$

Výpočtem jsme potvrdili, že obě svíčky měly stejnou délku 6 cm po jedné a půl hodině hoření.

4. Z grafu v řešení předchozí úlohy určete:
a) jaký byl rozdíl délek svíček po jedné hodině hoření
b) za jak dlouho shořely právě dvě třetiny každé svíčky

5. Pro lineární funkce f_1, f_2 platí $f_1(0) = 2$, $f_1(2) = 0$, $f_2(0) = -2$, $f_2(6) = 0$. Do jednoho obrázku sestrojte grafy obou funkcí a pak z něj vyčtěte:
a) pro které x platí $f_1(x) = f_2(x)$
b) $f_1(-1) - f_2(-1)$

6. Menší rybník se otevřeným stavidlem vyprázdní za 9 dní. Větší rybník, který obsahuje dvojnásobné množství vody, se vyprázdní za 6 dní. Jednoho dne byla otevřena stavidla obou rybníků současně.
a) Za jak dlouho bude v obou rybnících stejné množství vody?
b) Z jaké části bude v tuto chvíli větší rybník naplněn?

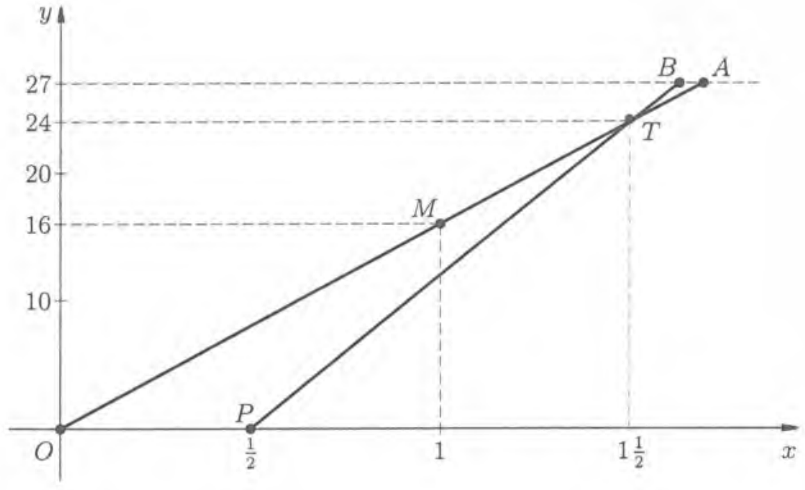
Úlohu řešte graficky a získané výsledky ověřte výpočtem.

Nyní vyřešíme graficky dvě úlohy o pohybu, které jsme v sešitě *Rovnice a nerovnice* řešili výpočtem.

Příklad 3. Martin bydlí v Břeclavi a jeho babička v Mikulově, který leží 27 km od Břeclavi. V sobotu jel Martin k babičce na návštěvu na kole rychlostí 16 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Tatínek za ním vyjel také na kole o půl hodiny později rychlostí 24 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Dohonil tatínek Martina ještě před Mikulovem? Jestliže ano, jak daleko od Mikulova to bylo?

Řešení. Do grafu nejprve znázorníme, že za x hodin jízdy byl Martin od Břeclavi vzdálen y km. Grafem této závislosti bude polopřímka OM, kde $O[0,0]$ a $M[1,16]$.

Do téhož grafu znázorníme i jízdu tatínka. Bude jí odpovídat nějaká polopřímka PT. Protože tatínek vyjel o půl hodiny později než Martin, je jejím počátkem P bod $\left[\frac{1}{2},0\right]$. Protože za hodinu jízdy tatínek urazil 24 km, můžeme za bod T vybrat bod $\left[1\frac{1}{2},24\right]$.



Protože z Mikulova do Břeclavi je 27 km, nebudou nás zajímat celé polopřímky OM a PT, ale jen jejich části – úsečky OA a PB, kde $y_A = 27$ a $y_B = 27$.

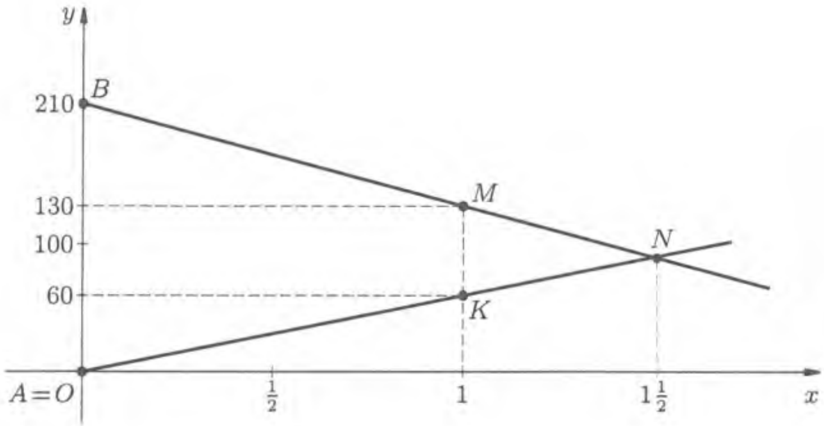
Tatínek Martina před Mikulovem dohoní, neboť úsečky OA a PB mají společný bod. Při rýsování nám vyšlo, že je to patrně právě bod $T\left[1\frac{1}{2},24\right]$. Protože $27 - 24 = 3$, zjistili jsme, že tatínek Martina dohonil asi 3 km před Mikulovem. Je to přesná hodnota, neboť Martin za $1\frac{1}{2}$ h jízdy ujel právě $\left(16 \cdot \frac{3}{2}\right)$ km, tj. 24 km.

Příklad 4. Vzdálenost z města A do města B po silnici je 210 km. Z obou měst současně proti sobě vyjela dvě auta. Nákladní automobil jede z města A průměrnou rychlostí $60\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, osobní automobil z města B průměrnou rychlostí $80\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Kdy se budou obě auta míjet?

Řešení. Vybereme jedno z míst, například A, a do jednoho obrázku znázorníme, jak daleko od místa A bude každé z aut po x hodinách jízdy (bude to y km). Význam osy y si můžeme představit také tak, že cesta z A do B je na ní znázorněna úsečkou s krajními body $A[0,0]$ a $B[0,210]$.

Nákladní automobil vyjel z města A průměrnou rychlostí $60\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, proto odpovídajícím grafem bude polopřímka AK, kde $A[0,0]$, $K[1,60]$.

Osobní automobil vyjel z města B průměrnou rychlostí $80\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Na počátku byl tedy od města A vzdálen 210 km, po 1 hodině jízdy pak $(210 - 80)$ km, tj. 130 km. Proto odpovídajícím grafem je polopřímka BM, kde $B[0,210]$ a $M[1,130]$.



Obě polopřímky se protínají v bodě N. Z obrázku vyčteme, že $x_N \doteq 1\frac{1}{2}$, takže auta se budou míjet přibližně po jedné a půl hodině jízdy.

Přesvědčme se výpočtem, že oba automobily se budou míjet přesně za 1,5 hodiny. Za tuto dobu ujede nákladní automobil $\left(60 \cdot \frac{3}{2}\right)$ km, tj. 90 km; osobní automobil ujede $\left(80 \cdot \frac{3}{2}\right)$ km, tedy 120 km. Zbývá dodat, že $90 + 120 = 210$.

Oba automobily se budou míjet za 1 h 30 min od okamžiku, kdy vyjely.

7. Určete, co na posledním obrázku udává vzdálenost bodů M a K měřená v jednotkách osy y.

8. Honza vyšel v 7 hodin ráno z domu rychlostí 4,8 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ na návštěvu k tetě do sousední vesnice vzdálené 6 km. O půl osmé za ním vyběhl bratr Karel rychlostí 12 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Pohyby obou chlapců znázorněte graficky a zjistěte:
   a) v kolik hodin Karel Honzu dostihl
   b) jak daleko od domu to bylo

∗9. Z letiště vzlétlo letadlo a letělo rychlostí 300 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Když bylo vzdáleno 50 km od letiště, vzlétla za ním stíhačka, která letěla rychlostí 550 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Za jak dlouho stíhačka dostihne letadlo? Řešte graficky.

10. Ze dvou zastávek, které jsou od sebe na trati vzdáleny 88 km, vyjely přesně v 8^{00} proti sobě dva vlaky. Jeden jede rychlostí 50 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, druhý rychlostí 60 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Určete graficky, kdy se budou míjet.

CVIČENÍ 8

1. V rekreačním zařízení používají k ohřevu vody tři kotle „na noční proud“. Všechny tři začnou vždy hodinu před půlnocí ohřívat vodu o teplotě 11 °C. Když voda v kotli dosáhne teploty 60 °C, ohřev se zastaví, teplota vody se pak pouze udržuje na dosažené hodnotě. Jeden kotel je seřízen tak, že každých 5 minut ohřeje vodu o 2 °C, ve druhém kotli se teplota vody zvýší o 3 °C za každých 5 minut a třetí za tutéž dobu ohřeje vodu o 4 °C. Do jednoho grafu znázorněte teplotu vody v jednotlivých kotlích od začátku ohřívání do 5 hodin ráno.

2. Jeden obchodník prodává prací prášek po 35 Kč za jedno balení, přitom má na něm zisk 4 Kč. Jiný obchodník prodává totéž balení pracího prášku za 33,50 Kč při zisku 2,50 Kč. Kolik kusů balení tohoto prášku musí druhý obchodník prodat, aby měl přinejmenším stejný zisk jako první obchodník, který již prodal
   a) 9 balení, b) 20 balení, c) 33 balení?
   Úlohu řešte graficky.

3. Na trasu dlouhou 192 km vyjela proti sobě současně dvě auta. Jedno jede stálou rychlostí 60 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, druhé stálou rychlostí 48 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Určete graficky, kdy a kde se budou obě auta míjet, jakou část trasy budou mít za sebou a jak dlouho ještě pojede pomalejší auto od okamžiku, kdy rychlejší dorazí do cíle.

9 DIAGRAMY

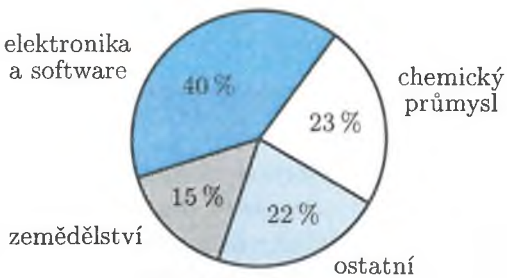
V sešitě *Úměrnosti* jsme se naučili číst a vytvářet jednoduché *diagramy* – obrázky, kterými „zviditelňujeme“ různé číselné údaje. Podle způsobu znázornění jsme rozeznávali diagramy *sloupkové* a *kruhové*. Oba tyto druhy si nyní připomeneme a pak je doplníme dalším druhem diagramů, kterým říkáme *spojnicové*.

Co víme o kruhovém diagramu?

?

Z novin jsme převzali kruhový diagram, který znázorňuje strukturu vývozu Irské republiky v roce 1998:

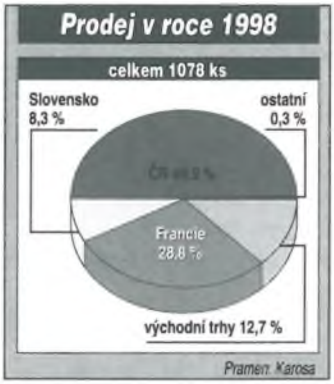
Tento diagram není proveden jako kruh, ale jako „koláč“, tj. válec s „malou“ výškou v pohledu, který kruhovou podstavu „deformuje“ na elipsu. Takové obrázky se snadno pořizují pomocí počítačových programů. My je takto kreslit nebudeme, naše kruhové diagramy budou skutečné kruhy. Překreslíme proto i první diagram:



Kruh na obrázku je rozdělen na čtyři výseče, které odpovídají jednotlivým druhům vyváženého zboží. Středové úhly těchto výsečí jsou úměrné počtům procent, která z celkového vývozu připadají na jednotlivé druhy zboží. Tyto středové úhly musíme před rýsováním vždy vypočítat. V našem příkladě:

100 %	360°
1 %	3,6°
40 %	$40 \cdot 3{,}6° = 144°$
23 %	$23 \cdot 3{,}6° \doteq 83°$
22 %	$22 \cdot 3{,}6° \doteq 79°$
15 %	$15 \cdot 3{,}6° = 54°$

1. Kruhový diagram znázorňuje, do kterých zemí byly prodány autobusy vyrobené firmou KAROSA Vysoké Mýto v roce 1998. Vypočtěte, jaké středové úhly odpovídají jednotlivým výsečím diagramu.

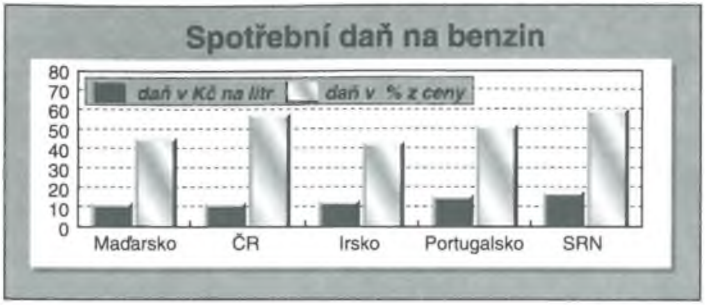


2. Sestrojte kruhový diagram, který znázorňuje prospěch z matematiky ve vaší třídě za poslední pololetí.

Co víme o sloupkovém diagramu?

Kruhové diagramy, které jsme připomněli, používáme zpravidla v situacích, kdy chceme porovnat části určitého celku.

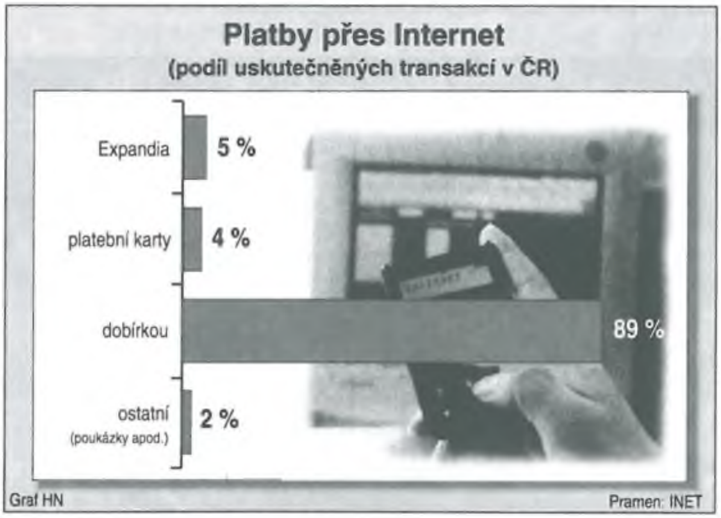
V případech, kdy údaje, které chceme znázornit, spolu žádný celek netvoří, je výhodnější použít tzv. *sloupkové diagramy*. Prohlédněte si, jakou spotřební daň za benzin platili řidiči několika evropských zemí v roce 1998 a kolik procent z celkové ceny benzinu tato daň činila:



Svislá osa diagramu je opatřena měřítkem s dvěma významy. V tmavších sloupečcích jde o daň za 1 litr benzinu vyjádřenou v českých korunách, ve světlejších sloupečcích jde o počet procent, která tvořila daň z celkové ceny benzinu. Na vodorovné ose jsou v pravidelných odstupech rozmístěny názvy hodnocených zemí.

Z diagramu například vyčteme, že v Maďarsku zaplatili řidiči za 1 litr benzinu spotřební daň ve výši asi 11 Kč, což činilo asi 45 % z prodejní ceny.

V příkladu s benzinem byly sloupky diagramu „postaveny svisle". V novinách však také naleznete mnohé sloupkové diagramy s vodorovnými sloupky:



I když na předchozím diagramu není vodorovná osa vyznačena, délky jednotlivých sloupků jsou úměrné počtům procent, která znázorňují. Podle nejdelšího sloupku, který měří asi 56 mm, zjistíme, že diagram byl sestaven tak, aby 1 % plateb odpovídal sloupek délky asi $\frac{56}{89}$ mm, tj. asi 0,63 mm.

3. Z diagramu spotřební daně za benzin vyčtěte potřebné údaje a sestavte nový sloupkový diagram, ve kterém porovnáte přibližné prodejní ceny 1 litru benzinu v uvedených pěti zemích.

4. Sloupkový diagram o platbách přes internet překreslete jako diagram kruhový.

Co je *spojnicový* diagram?

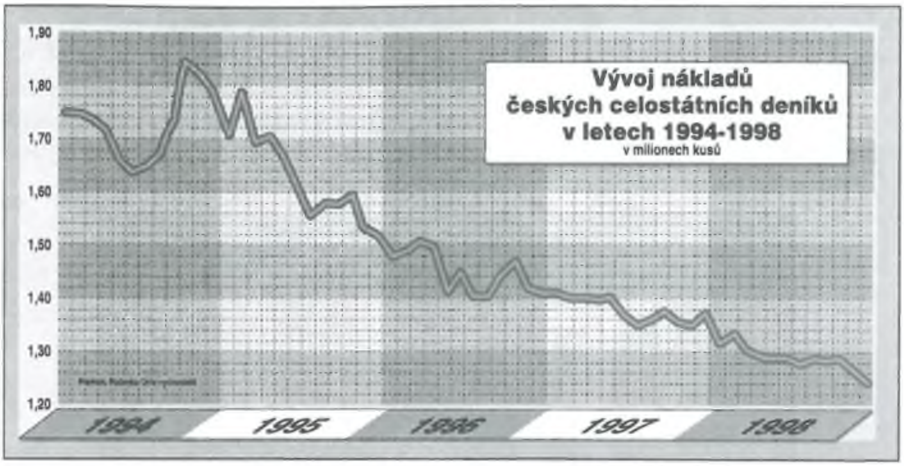
Některými diagramy chceme vyjádřit, jak se určitý sledovaný údaj vyvíjel v jistém časovém období. Prohlédněte si tabulku počtu zaměstnanců Českých drah v letech 1989 až 1999:

rok	1989	1990	1991	1992	1993	1994
počet zaměstnanců (v tis.)	162,7	162,5	152,6	133,3	116,1	107,4
rok	1995	1996	1997	1998	1999	
počet zaměstnanců (v tis.)	104,0	101,4	97,4	91,8	89,2	

I když bychom podle této tabulky mohli sestavit sloupkový diagram, v novinách dali přednost následujícímu znázornění:

Na vodorovné ose jsou znázorněna jednotlivá léta. Nad každým rokem je puntík, jehož „svislá“ souřadnice odpovídá příslušnému počtu zaměstnanců. Sousední puntíky jsou spojeny úsečkami, které vytvářejí lomenou čáru. Tak vznikl *spojnicový diagram*. Ten ve srovnání se sloupkovým diagramem výrazněji vystihuje, jak se počet zaměstanců v průběhu času měnil. Podle sklonu jednotlivých úseček hned vidíme, v kterých obdobích počet zaměstnanců nejvíce klesal.

Sestrojená lomená čára sugestivně zdůrazňuje „dynamiku“ změn. Ještě výrazněji je to vidět na následujícím spojnicovém diagramu o vývoji nákladů českých novin v letech 1994 až 1998.



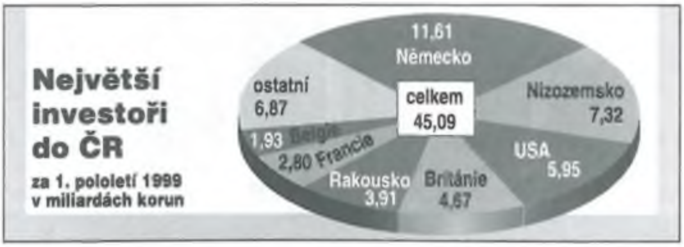
Všimněte si přirozené zákonitosti – nejméně se noviny kupují v období letních prázdnin.

5. Ze spojnicového diagramu o zaměstnancích Českých drah vyčtěte období jednoho roku, kdy došlo k největšímu a kdy k nejmenšímu poklesu počtu zaměstnanců.

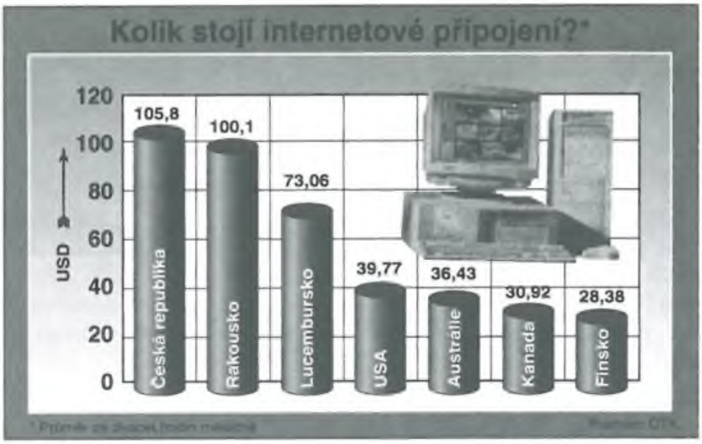
6. Z údajů o nákladech českých deníků sestavte nový spojnicový diagram, v kterém porovnáte náklady deníků v lednu každého roku.

CVIČENÍ 9

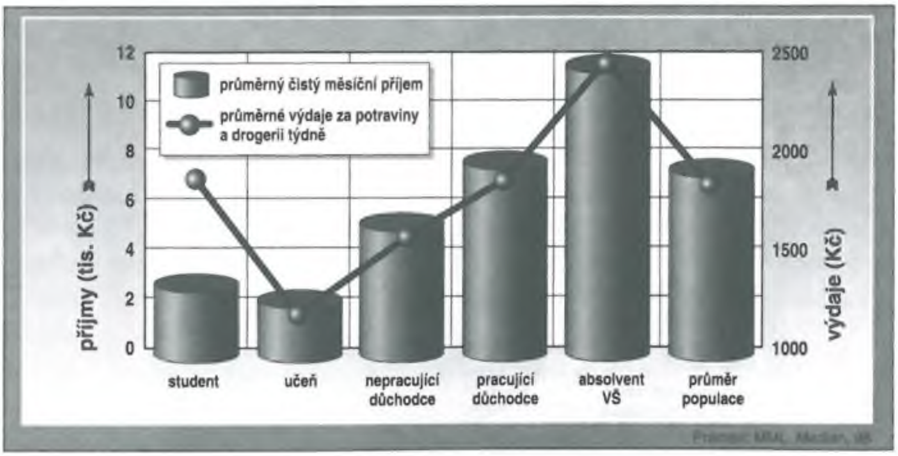
1. Uvedené země uspořádejte podle velikosti investic a kruhový diagram z obrázku překreslete jako sloupkový.



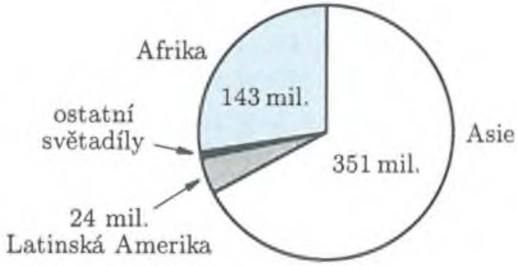
2. Přepočtěte na české koruny uvedené ceny internetového připojení, jestliže v den sestavení diagramu byl úřední kurs 33,966 Kč za 1 USD. Pak vezměte za základ cenu internetového připojení v ČR a vypočtěte, kolik procent této částky se zaplatí za připojení v ostatních vyjmenovaných zemích.



3. Z diagramů vyčtěte
   a) jaký je průměrný čistý měsíční příjem uvedených skupin obyvatel,
   b) jaké jsou jejich průměrné týdenní výdaje za potraviny a drogistické zboží,
   c) jaké procento měsíčního platu vydají tyto skupiny obyvatel za potraviny a drogistické zboží (počítejte útratu za 4 týdny).



4. Diagram na obrázku udává současné rozložení negramotných lidí v celosvětové populaci.



Na celém světě neumí
číst a psát 520 milionů lidí.

a) Jaké procento z celkového počtu negramotných připadá na Asii, jaké na Afriku a jaké na Latinskou Ameriku?

b) V které z uvedených tří oblastí světa je podíl negramotných v celkové populaci největší? V Africe žije asi 642 milionů lidí, v Asii přibližně 3,25 miliardy lidí a v Latinské Americe asi 441 milionů lidí.

5. Při řešení následujících úkolů použijte údajů z tabulky:

POČET OHROŽENÝCH ŽIVOČICHŮ

	Svět		Evropa	
Skupina živočichů	Celkový počet druhů	% ohrožených druhů	Celkový počet druhů	% ohrožených druhů
savci	4 327	16	250	42
ptáci	9 672	11	520	15
plazi	6 550	3	199	45
obojživelníci	4 000	2	71	30
sladkovodní ryby	8 400	4	227	52

a) Sloupkovým diagramem znázorněte současně celkový počet i počet ohrožených druhů jednotlivých skupin živočichů žijících v Evropě.

b) U každé skupiny živočichů zjistěte, jaké procento z celosvětového počtu ohrožených druhů tvoří počet příslušný Evropě.

6. Zjistěte svůj průměrný prospěch v jednotlivých pololetích primy, sekundy a tercie. Znázorněte jeho vývoj spojnicovým diagramem.

10 ZÁKLADY STATISTIKY

V závěrečné kapitole tohoto sešitu uvedeme několik základních pojmů z *matematické statistiky*. Je to disciplína, která se zabývá zpracováním často velkého množství (stovek, tisíců, ...) údajů získaných například:

- při opakovaném měření sledovaných veličin
- při výzkumech veřejného mínění
- při hodnocení nehodovosti na silnicích
- při průzkumech zdravotního stavu či životní úrovně obyvatelstva

Každému takovému zkoumání se říká *statistické šetření*. S jeho výsledky se setkáváme doslova na každém kroku (v tisku, rozhlase či televizi). Proto se základům statistických šetření budeme nyní „teoreticky“ věnovat.

? Co je statistický *soubor*, *jednotka* a *znak*?

Seznámíme se nejprve s ustáleným názvoslovím, které se při statistickém šetření obvykle používá. Jako příklad zvolíme „statistický miniprůzkum“, při kterém Jirka zjišťoval u svých sedmi spolužáků následující údaje:

- čas strávený cestou do školy
- členství ve sportovním oddíle
- výši měsíčního kapesného

	Doba cesty do školy (min)	Členství ve sport. oddíle	Měsíční kapesné (Kč)
Adam	5	ano	50
Bedřich	60	ne	150
David	25	ano	200
Jan	15	ne	100
Karel	10	ano	100
Martin	35	ano	100
Luděk	20	ano	80

Zkoumané skupině chlapců říkáme **statistický soubor**. Obecně je to množina předmětů, osob, věcí, událostí apod., na které pozorujeme, měříme či jinak zkoumáme informace různého druhu, tzv. **znaky**. V našem případě to byly 3 znaky. Dva z nich (doba cesty do školy a výše kapesného) jsou vyjádřeny čísly (v určitých jednotkách). Takovým znakům říkáme *kvantitativní*. (Slovo „kvantita" znamená množství.) Třetí znak – členství ve sportovním oddíle – je příkladem *kvalitativního* znaku. (Další kvalitativní znaky by mohly být barva vlasů, oblíbená hudební skupina, znalost cizích jazyků, ...)

Jednotlivé prvky statistického souboru se nazývají **statistické jednotky**, jejich počet nazýváme **rozsahem** tohoto souboru.

Ve zkoumané situaci je statistickou jednotkou každý jednotlivý chlapec, rozsah souboru je 7.

Statistická šetření se často neprovádějí na celém souboru, ale pouze na jeho části, tzv. *výběrovém souboru*. (Při zkoumání sledovanosti televizních pořadů se nezjišťuje, zda daný pořad sledoval každý občan České republiky, ale jen podle přesných kritérií vybraná skupina osob. Podobně předvolební průzkumy šancí jednotlivých politických stran se provádějí jen na vybraných skupinách voličů.) Úkolem statistiky je pak propočítat, jaké rozdělení určitého znaku v celém souboru je možné očekávat, jestliže známe rozdělení tohoto znaku ve výběrovém souboru. S těmito metodami se někteří z vás seznámí až na vysoké škole.

Údaje z naší tabulky můžeme nyní různými způsoby zpracovávat a třídit. Nalezneme tak odpovědi například na otázky:

- Kolik chlapců cestuje do školy déle než 30 minut?
- Jaké je pořadí chlapců podle doby cesty do školy?
- Kolik procent chlapců aktivně sportuje?
- Jaký je rozdíl mezi nejvyšším a nejnižším kapesným?
- Jaká je nejčastější výše měsíčního kapesného?

☐ **1.** Odpovězte na otázky z konce předchozího odstavce.

☐ **2.** Navrhněte, jaké další údaje lze zjistit z Jirkova „průzkumu", a určete je.

Co je *četnost*?

Petr házel dvacetkrát hrací kostkou a zapisoval, jaké číslo mu v každém hodu padlo:

$$1,\ 6,\ 4,\ 4,\ 3,\ 2,\ 4,\ 1,\ 3,\ 3,\ 6,\ 1,\ 5,\ 1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 3,\ 5,\ 6$$

Když skončil, zajímalo ho, kolikrát se které číslo opakovalo.

Výsledek zaznamenal do tabulky:

Hozené číslo	Počet hodů
1	4
2	1
3	5
4	4
5	3
6	3

Podívejme se na tuto situaci z hlediska statistiky. Statistickým souborem je množina všech dvaceti hodů kostkou, každý jednotlivý hod je jeho jednotkou. Zkoumaným znakem je číslo, které při daném hodu padlo. Tento znak má tedy šest různých hodnot. To, že jednotlivé *hodnoty znaku* (čísla 1, 2, ..., 6) jsou zastoupeny v různých počtech, vyjadřujeme pomocí statistického pojmu *četnost*.

Z předchozí tabulky vyčteme, že číslo 1 má četnost 4, číslo 2 četnost 1, číslo 3 četnost 5, číslo 4 četnost 4, číslo 5 četnost 3 a číslo 6 četnost 3.

Četností dané hodnoty znaku tedy nazýváme počet jednotek daného statistického souboru, kterým tato hodnota přísluší. Určíme ji tak, že spočítáme, kolikrát se tato hodnota mezi hodnotami všech jednotek souboru vyskytuje.

Sečteme-li četnosti všech hodnot daného znaku, dostaneme počet všech jednotek souboru, tedy jeho rozsah. (Zkontrolujte, že součet čísel ve druhém sloupci Petrovy tabulky je skutečně 20.)

Když Petr házel kostkou, padlo mu nejčastěji číslo 3, které má tedy největší četnost. Číslo 3 padlo v pěti z celkového počtu 20 hodů. Hodnotu poměru $5 : 20$ (zlomek $\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$, desetinné číslo 0,25) nazýváme *relativní četností* této hodnoty znaku (čísla 3).

Vypočtěme relativní četnosti ostatních hodnot a zapišme je do tabulky:

Hodnota znaku	Četnost	Relativní četnost
1	4	0,20
2	1	0,05
3	5	0,25
4	4	0,20
5	3	0,15
6	3	0,15

Relativní četnost dané hodnoty znaku určíme jako podíl četnosti této hodnoty a rozsahu celého statistického souboru.

Sami vysvětlete, proč součet relativních četností všech hodnot znaku je roven 1.

Relativní četnosti často určujeme, pokud chceme porovnat stejný znak u několika různých statistických souborů, které se zpravidla liší svými rozsahy.

Ukážeme to na následující situaci:

Hodnocení žáků z matematiky na konci školního roku ve dvou terciích gymnázia v městě B je zachyceno v následující tabulce:

Známka z matematiky	Četnost ve 3.A	Četnost ve 3.B
1	7	6
2	12	10
3	10	6
4	1	3
5	0	0
Celkem žáků	30	25

I když je „jedničkářů“ ve 3.A více než ve 3.B, z tabulky relativních četností zjistíme, že se „jedničkáři“ ve 3.A vyskytují „vzácněji“ než ve 3.B:

Známka	Relativní četnost ve 3.A	Relativní četnost ve 3.B
1	0,23	0,24
2	0,40	0,40
3	0,33	0,24
4	0,03	0,12
5	0	0

(Relativní četnosti ve 3.A jsou zaokrouhleny na setiny, proto se součet zaokrouhlených čísel nerovná 1.)

3. Proveďte aspoň třicet hodů hrací kostkou a pro jejich výsledky sestavte tabulku četností a relativních četností.

4. Představte si, že házíte mincí a při každém hodu sledujete, zda padla „hlava", nebo „orel". Odhadněte relativní četnosti hodnot znaku „strana mince" za předpokladu, že mincí hodíte „mnohokrát".

5. Jednotkami statistického souboru jsou jednotlivé skupiny deseti čísel $1-10$, $11-20$, …, $91-100$. Na tomto souboru zkoumejme znak, kterým je počet prvočísel v dané statistické jednotce (tj. skupině deseti čísel). Určete všechny hodnoty tohoto znaku a vypočtěte jejich četnosti a relativní četnosti.

Vraťme se znovu ke známkám žáků tercií a vysvětleme, co je pro statistiku typické. Zatímco pro konkrétního žáka je jistě velmi podstatné, zda měl z matematiky jedničku, dvojku, trojku nebo čtyřku, z pohledu statistiky je důležité jenom to, kolik kterých známek bylo v celé třídě. Z tohoto hlediska podává statisticky úplnou informaci o zkoumaném znaku tabulka četností jeho hodnot. V některých situacích je taková podrobná informace zbytečná. Tehdy celou škálu možných hodnot kvantitativního znaku „zjednodušujeme" jedinou hodnotou. Bývá to nejčastěji *aritmetický průměr*, méně často *modus* nebo *medián*.

? Jak se počítá *aritmetický průměr*?

Pojem aritmetický průměr jste dobře poznali již v primě. Snadno sami vypočtete průměr n_A známek z matematiky v tercii A i průměr n_B známek z matematiky v tercii B:

$$n_A = \frac{7 \cdot 1 + 12 \cdot 2 + 10 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 5}{30} = \frac{65}{30} \doteq 2{,}17$$

$$n_B = \frac{6 \cdot 1 + 10 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 0 \cdot 5}{25} = \frac{56}{25} = 2{,}24$$

Všimněte si, že místo abychom například v tercii A sčítali všech 30 známek, sečetli jsme jednotlivé známky vynásobené jejich četnostmi.

Místo „aritmetický průměr hodnot daného znaku" často říkáme „průměrná hodnota znaku". Tak v tercii A byla průměrná známka z matematiky 2,17; v tercii B dosáhli žáci z matematiky průměrné známky 2,24.

6. Zjistěte průměrnou známku ve vaší třídě při poslední písemné práci z matematiky.

7. Zjistěte průměrnou výšku všech žáků vaší třídy, pak průměrnou výšku všech chlapců a průměrnou výšku všech dívek.

8. Vypočtěte průměrnou výši měsíčního kapesného chlapců z Petrova „miniprůzkumu" z úvodu kapitoly.

Co je *modus* a *medián*?

Na jednom příkladě vysvětlíme dva nové statistické pojmy.

V následující tabulce jsou uvedeny počty žáků v každé z devíti tříd jednoho „nižšího" gymnázia:

Třída	1.A	1.B	2.A	2.B	3.A	3.B	4.A	4.B	4.C
Počet žáků	30	31	31	32	31	32	29	30	31

Pro znak „počet žáků ve třídě" sestavíme tabulku četností:

Počet žáků ve třídě	Počet tříd
29	1
30	2
31	4
32	2

Z tabulky snadno určíme průměrný počet žáků v jedné třídě:

$$\frac{1 \cdot 29 + 2 \cdot 30 + 4 \cdot 31 + 2 \cdot 32}{9} \doteq 30{,}78$$

Aritmetický průměr však nemusí být v dané situaci nejdůležitější informací. Někdy nás může více zajímat, která hodnota znaku se mezi všemi hodnotami vyskytuje nejčastěji, tzn. má největší četnost. Tato hodnota se nazývá **modus** zkoumaného znaku. V našem případě je to počet 31. Můžeme říci, že číslo 31 je nejčastější počet žáků ve třídách našeho gymnázia.

U některých statistických souborů má největší četnost ne jedna, ale více hodnot jednoho znaku. V takovém případě považujeme za modus každou z těchto hodnot.

Uspořádejme nyní počty žáků v jednotlivých třídách od nejmenšího k největšímu (každý počet zapíšeme tolikrát, kolikrát se v původní tabulce opakuje):

$$29,\ 30,\ 30,\ 31,\ \underline{31},\ 31,\ 31,\ 32,\ 32$$

V této řadě devíti čísel jsme podtrhli *prostřední*. Tato hodnota se nazývá **medián** daného znaku.

Uvedeným způsobem je medián určen, pokud má statistický soubor lichý počet jednotek.

Je-li rozsah statistického souboru sudý, určuje se medián takto:

Vybereme prostřední dvě hodnoty a vypočteme jejich aritmetický průměr.

Jsou-li například hodnoty daného znaku (na souboru s rozsahem 6)

$$12,\ 15,\ 9,\ 15,\ 6,\ 24,$$

uspořádáme je nejprve podle velikosti

$$6,\ 9,\ \underline{12},\ \underline{15},\ 15,\ 24$$

a z podtržených „prostředních“ hodnot vypočteme aritmetický průměr:

$$\frac{12 + 15}{2} = 13{,}5$$

Mediánem je v tomto případě číslo 13,5.

9. Vypočtěte aritmetický průměr, modus a medián znaku, jehož všechny hodnoty na jednotlivých jednotkách souboru jsou:

7, 11, 12, 7, 8, 7, 6, 11, 6, 12, 8, 7, 8, 10, 5

10. Přijímací zkoušku z matematiky do jednoho gymnázia konalo 72 uchazečů. Jejich bodové zisky jsou uvedeny v tabulce:

Počet bodů	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
Počet uchazečů	10	8	7	10	11	10	4	2	4	3	3

Vypočtěte aritmetický průměr, určete modus a medián znaku „počet získaných bodů při přijímací zkoušce z matematiky“ na souboru všech uchazečů.

CVIČENÍ 10

1. Sestavte tabulku četností a relativních četností počtu dnů v jednotlivých měsících nepřestupného roku.

2. Zjistěte ve vaší třídě, které světadíly vaši spolužáci navštívili. Sestavte tabulku četností a relativních četností počtu žáků, kteří navštívili jednotlivé světadíly.

3. Zjistěte počet žáků v každé třídě vaší školy. Pak pro tento znak určete aritmetický průměr, modus a medián.

4. Navrhněte a proveďte ve vaší třídě další statistická šetření, jejichž výsledky by mohly vás i vaše spolužáky zajímat.

■ 5. Vyberte delší odstavec nějakého českého textu a zjistěte v něm četnosti výskytů jednotlivých krátkých samohlásek. Zapište je do tabulky a zjistěte modus zkoumaného znaku. Pak proveďte totéž pro nějaký text z učebnice cizího jazyka, který ve škole studujete. (Má smysl u tohoto kvalitativního znaku zjišťovat aritmetický průměr nebo medián?)

6. Ve fyzikálním cvičení změřil Jarek desetkrát délku a průměr válečku:

Číslo měření	1	2	3	4	5
Délka (mm)	105,0	105,1	105,0	104,9	105,0
Průměr (mm)	23,48	23,50	23,46	23,50	23,47
Číslo měření	6	7	8	9	10
Délka (mm)	105,1	104,8	104,9	105,0	104,9
Průměr (mm)	23,47	23,49	23,50	23,50	23,47

Zjistěte aritmetický průměr, medián a modus každé z obou měřených veličin.

11 SOUHRNNÁ CVIČENÍ

1. Zapište funkci f vyjadřující, že

a) krychle o hraně x m má objem $y\,\mathrm{mm}^3$,

b) každému kladnému reálnému číslu x je přiřazeno číslo y, které je o 3 menší než 75 % z čísla x,

c) každému nezápornému reálnému číslu x je přiřazeno číslo y, které je sedminásobkem jeho druhé odmocniny.

2. Pro funkci $f\colon\ y = \dfrac{5-x}{2}$ vypočtěte:

a) $f(-5)$ b) $f(-3)$ c) $f(-1)$

d) $f(2)$ e) $f(5)$ f) $f(10)$

3. Sestavte tabulku funkce $g\colon\ y = \dfrac{2-x}{(1-x)^2}$ pro $x \in \{-3, -1, 0, 2, 4\}$.

4. Sestavte tabulku funkce $h\colon\ y = x^2 - 4x + 1$ pro $x \in \left\{-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right\}$.

5. Je dána funkce $f\colon\ y = \dfrac{3x-4}{2x}$. Určete, pro která x platí:

a) $f(x) = 2$ b) $f(x) = \frac{13}{6}$ c) $f(x) = -\frac{9}{2}$ d) $f(x) = -\frac{3}{2}$

6. Určete definiční obor funkce f dané vzorcem:

a) $y = \dfrac{3}{4x-1}$ b) $y = 12x + 7$ c) $y = \sqrt{x-9}$

d) $y = 9x^2 - 36$ e) $y = \sqrt{2x+5}$ f) $y = \dfrac{1}{x^2-6x+9}$

g) $y = \dfrac{x}{6x-12}$ h) $y = \dfrac{8x+1}{x^2-9x+14}$ i) $y = \dfrac{x+2}{2x^2+8x+8}$

7. Nakreslete graf funkce:

a) $f\colon\ y = x^2 + 10,\quad x \in \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1\}$

b) $f\colon\ y = -\dfrac{100}{x},\quad x \in \{-5, -4, 1, 2, 4, 5\}$

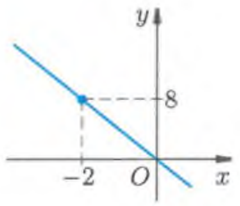
8. V jedné soustavě souřadnic sestrojte grafy přímých úměrností

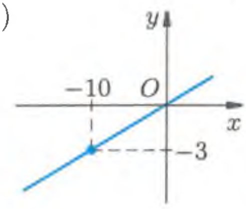
$$f_1\colon\ y = \tfrac{1}{3}x, \qquad f_2\colon\ y = x, \qquad f_3\colon\ y = 3x,$$

$$f_4\colon\ y = -\tfrac{1}{3}x, \qquad f_5\colon\ y = -x, \qquad f_6\colon\ y = -3x.$$

(Při rýsování můžete využít osové souměrnosti.)

9. Najděte vzorec přímé úměrnosti zadané grafem:

a) 

b) 

10. Určete vzorec přímé úměrnosti, jejíž graf prochází bodem

a) $P[-\frac{1}{2}, 6]$, b) $Q[\frac{1}{2}, -5]$, c) $R[-3, -12]$,

a rozhodněte, zda je tato funkce rostoucí, nebo klesající.

□ **11.** Rozhodněte, zda daný vzorec určuje lineární funkci:

a) $y = 7 - \dfrac{2}{3}x$ b) $y = \dfrac{3}{x} - \dfrac{5}{7}$ c) $y = \dfrac{x}{3} - \dfrac{7}{5}$

d) $y = \dfrac{3x}{5}$ e) $y = \dfrac{2x}{5} - x^2$ f) $y = 5$

12. Sestrojte graf funkce $f\colon\ y = 4x + 8$. Změřte souřadnice jeho průsečíku X s osou x a průsečíku Y s osou y. Výsledky měření zkontrolujte výpočtem.

13. Do jednoho obrázku narýsujte grafy tří funkcí

$$f_1\colon\ y = 3x - 2, \qquad f_2\colon\ y = -2, \qquad f_3\colon\ y = -2x - 2.$$

Jakou vzájemnou polohu mají nakreslené přímky?

14. Narýsujte grafy funkcí

$$f\colon\ y = -\tfrac{1}{2}x, \qquad g\colon\ y = -\tfrac{1}{2}x + 2, \qquad h\colon\ y = -\tfrac{1}{2}x - 1.$$

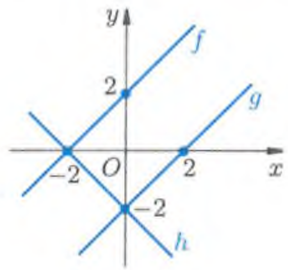
Jakou vzájemnou polohu mají tyto přímky?

15. Jsou dány body $X[2, -9]$, $Y[-3, 11]$. Rozhodněte, zda přímka XY je grafem funkce

a) $f\colon\ y = -5x + 1$, b) $f\colon\ y = -2x - 5$,

c) $f\colon\ y = -6x + 3$, d) $f\colon\ y = -4x - 1$.

16. Nalezněte vzorce lineárních funkcí f, g, h, jejichž grafy jsou na obrázku.



17. Nalezněte vzorec lineární funkce, jejíž graf prochází body

a) $E[0,-9]$ a $F[1,-2]$,
b) $E\left[\frac{1}{4},-2\right]$ a $F[0,0]$,
c) $E[-1,11]$ a $F[1,1]$,
d) $E[0,0]$ a $F[36,8]$,
e) $E\left[\frac{1}{8},2\right]$ a $F\left[\frac{1}{40},1\right]$,
f) $E[2,-20]$ a $F[1,40]$.

18. Nalezněte souřadnice průsečíků souřadnicových os s grafem funkce dané vzorcem:

a) $y=-x+4$
b) $y=1{,}5x+6$
c) $y=18x$
d) $y=-7$
e) $y=-3x-8$
f) $y=2x-7$

□ **19.** Řekněte, zda je rostoucí funkce:

a) $f\colon\ y=\frac{2}{3}x+1$
b) $f\colon\ y=-9x-11$
c) $f\colon\ y=-7$
d) $f\colon\ y=-3x+19$
e) $f\colon\ y=3-\frac{5}{6}x$
f) $f\colon\ y=x-100$

20. Narýsujte graf funkce dané vzorcem:

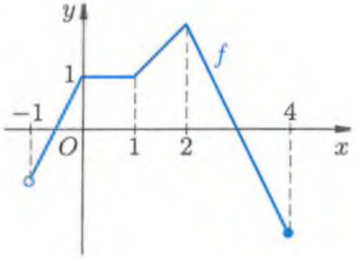
a) $y=3\cdot|x|$
b) $y=3\cdot|x|-1$
c) $y=3\cdot|x|+\frac{5}{2}$

21. Narýsujte graf funkce dané vzorcem:

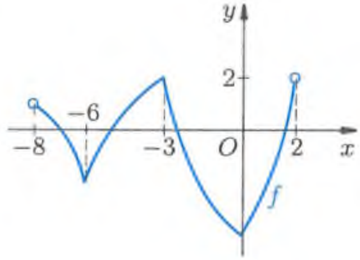
a) $y=-2\cdot|x|$
b) $y=-2\cdot|x|+1$
c) $y=-2\cdot|x|-\frac{3}{2}$

22. Podle obrázku určete („maximální“) intervaly, ve kterých je funkce f rostoucí a ve kterých klesající:

a)



b)



23. Rozhodněte, zda je funkce $f\colon\ y = -3 \cdot |x| + 9$ klesající v intervalu:

a) $(7, 10)$ b) $\langle -5, -4 \rangle$ c) $(-3, 1\rangle$ d) $\langle 2, 6 \rangle$

24. Využijte graf funkce $y = x^2$ k nakreslení grafu funkce:

a) $y = x^2 + \frac{5}{2}$ b) $y = x^2 - \frac{1}{2}$ c) $y = x^2 - 4$

25. Do téže soustavy souřadnic nakreslete grafy funkcí

$$f\colon\ y = 4x^2 + 1, \qquad g\colon\ y = -4x^2 - 1.$$

Pro každou z funkcí f, g určete „maximální" interval, ve kterém je tato funkce klesající.

26. Nakreslete graf funkce $f\colon\ y = -x^2 - \frac{1}{2}$, $x \in (-2, 2)$. Z grafu vyčtěte

a) ve kterém intervalu je funkce f rostoucí,
b) ve kterém intervalu je funkce f klesající,
c) pro které x nabývá funkce f největší hodnoty,
d) pro která x nabývá funkce f kladných hodnot.

27. Zjistěte, zda na grafu funkce $y = -3x^2 - 16$ leží bod

a) $[-2, -4]$, b) $[-2, -28]$, c) $[-3, -43]$, d) $[3, -43]$.

28. Nakreslete graf funkce $f\colon\ y = -2x^2 + 1$. Pak vypočtěte, pro které hodnoty proměnné x platí:

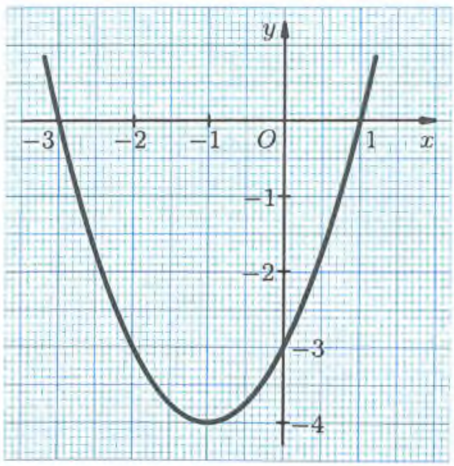
a) $f(x) = 0$ b) $f(x) < 0$ c) $f(x) \leqq 0$

∗29. Parabola na obrázku je grafem funkce

$$f\colon\ y = x^2 + 2x - 3.$$

Z obrázku vyčtěte

a) souřadnice vrcholu paraboly,
b) souřadnice průsečíku paraboly s osou y,
c) souřadnice průsečíků paraboly s osou x,
d) intervaly, ve kterých je funkce f rostoucí a ve kterých je klesající.



30. Do pravoúhlé soustavy souřadnic s vhodně zvolenými jednotkami na osách nakreslete grafy funkcí $f_1\colon\ y = \dfrac{64}{x}$ a $f_2\colon\ y = -\dfrac{64}{x}$.

31. Nakreslete graf nepřímé úměrnosti g, pro kterou platí $g\left(\frac{1}{2}\right) = -5$. Určete, kde je funkce g rostoucí a kde klesající.

32. Zapište vzorcem funkci, jejíž graf je souměrně sdružený podle osy x s grafem funkce

a) $y = \dfrac{7}{4x}$, b) $y = -\dfrac{5}{3x}$, c) $y = \dfrac{-4}{9x}$.

33. Určete vzorec nepřímé úměrnosti, jejíž graf prochází bodem

a) $\left[3, \frac{4}{3}\right]$, b) $\left[\frac{2}{7}, -\frac{5}{2}\right]$, c) $\left[-2, \frac{3}{5}\right]$, d) $\left[-\frac{1}{4}, -14\right]$.

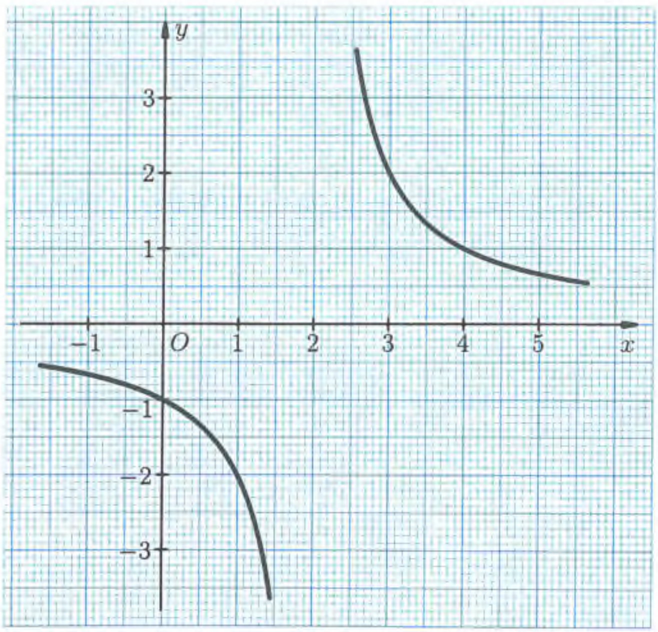
34. Určete, které z bodů $P[1,4]$, $Q[-1,4]$, $R[4,1]$, $S[4,-1]$, $T[-4,1]$, $U[-4,-1]$ leží na grafu funkce $y = -\dfrac{4}{x}$.

$*$**35.** Hyperbola na obrázku je grafem funkce $f\colon\ y = \dfrac{2}{x-2}$.

a) Určete definiční obor funkce f.

b) Určete, ve kterých intervalech je funkce f rostoucí a ve kterých klesající.

c) Vypočtěte souřadnice průsečíku grafu funkce f s osou y.



36. V pravoúhlé soustavě souřadnic s vhodně zvolenými jednotkami na osách řešte graficky rovnici:

a) $x - 4 = 2x - 6$ b) $-2x + 1 = 4x + 4$

c) $3 - x = 2x - 9$ d) $5 - 6x = 4x - 20$

37. Řešte graficky soustavu rovnic:

a) $3x + y = 7$
$5x - 3y = -7$

b) $x - 2y = 3$
$2x + y = -4$

38. Danou soustavu rovnic řešte nejprve graficky, pak početně:

a) $x - \frac{4}{3} = \frac{1}{3}y$
$y + 4 = 3x$

b) $y - 3 = -2x$
$2y + 4x = -1$

39. Řešte výpočtem i graficky kvadratickou rovnici:

a) $x^2 - 3x = 0$ b) $x^2 - 9 = 0$ c) $x^2 + 2x + 4 = 0$

40. Řešte graficky kvadratickou rovnici:

a) $x^2 - 3x + 2 = 0$ b) $2x^2 - 5x - 3 = 0$

c) $x^2 - 5x + 7 = 0$ d) $2x^2 - 3x - 2 = 0$

41. Nádrž tvaru kvádru má obdélníkové dno s rozměry 4 m a 2,2 m, její výška je 1,2 m. Tato nádrž má být do tří čtvrtin naplněna vodou. Jak dlouho to bude trvat, bude-li napouštěna potrubím, kterým proteče za každou minutu 0,4 hl vody? Řešte zčásti výpočtem, zčásti graficky.

42. Pavel bydlí v Liptákově a jeho kamarád Tomáš ve Smrži. Oba se na kole často navštěvují. Pavlovi trvá cesta z Liptákova do Smrže 32 minut, Tomášovi v opačném směru 46 minut. Určete graficky, za jak dlouho se potkají, jestliže vyjedou ze svých bydlišť současně.

43. Jana se vydala z domu na cestu 32 km dlouhou, aby navštívila svou kamarádku Petru. Jela na kole stálou rychlostí 20 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ a po hodině jízdy zatelefonovala z mobilního telefonu Petře, aby jí šla naproti. Petra vyrazila okamžitě a šla stálou rychlostí 4 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Určete početně i graficky, za jak dlouho se od okamžiku, kdy Petra vyšla, obě dívky potkají a v jaké vzdálenosti od domu, v němž Petra bydlí, to bude.

44. Dvořákovi chtějí nakoupit brambory na zimní uskladnění. Tatínek zjistil, že pojede-li koupit brambory do Rapotína, kde prodávají metrický cent brambor za 420 Kč, utratí za benzin 180 Kč. Pojede-li pro brambory do nedaleké vesnice Lipová, projede za benzin sice jen 40 Kč, ale 1 q brambor tam prodávají za 480 Kč. Určete graficky, kolik brambor musí tatínek v Rapotíně (místo v Lipové) koupit, aby se mu cesta vyplatila.

45. Každý živočich žije buď v suchozemském, nebo sladkovodním, nebo mořském prostředí. Zastoupení těchto prostředí (podle podílu na rozloze Země) znázorněte kruhovým diagramem. Pak sestrojte druhý kruhový diagram a v něm tato prostředí srovnejte podle počtu druhů živočichů, kteří v nich žijí.

Prostředí	Podíl na rozloze Země v %	Počet druhů
mořské	70,8	160 000
sladkovodní	0,3	65 000
suchozemské	28,9	900 000
celkem	100,0	1 125 000

46. Nakreslete sloupkový diagram, který současně znázorňuje průměrnou i maximální hloubku jednotlivých oceánů.

Oceán	Plocha km^2	Průměrná hloubka m	Maximální hloubka m	Maximální hloubka místo
Tichý	179 680 000	3 780	10 924	Marianský příkop
Atlantský	91 655 000	3 597	9 219	Portorický příkop
Indický	76 170 000	3 710	7 102	příkop Diamantina
Severní ledový	13 950 000	1 328	5 450	Barentsova plošina

47. Následujcící tabulka zachycuje podíl obyvatelstva žijícího ve městech nad 1 milion obyvatel. Údaje z tabulky zpracujte do sloupkového diagramu.

Světadíl	%
Evropa	20,2
Asie	12,8
z toho Čína	9,3
Indie	9,6
Japonsko	39,0
Afrika	11,9
Severní Amerika	36,9
Latinská Amerika	29,7
Austrálie a Oceánie	36,2
svět	16,4

48. Tabulka udává průměrné měsíční teploty vzduchu (ve °C), které byly v období 1901 – 1950 naměřeny u meteorologických stanic na Kleti (1 084 m n. m.) a v Českých Budějovicích (383 m n. m.). Do jednoho obrázku sestrojte příslušné spojnicové diagramy a vyčtěte z nich

a) v kterých měsících byla průměrná teplota u jednotlivých stanic největší a v kterých nejmenší,

b) v kterém měsíci se průměrné teploty u obou stanic navzájem nejvíce lišily.

	XII	I	II	III	IV	V
Kleť [°C]	−2,9	−4,2	−3,2	0,2	3,7	9,2
České Budějovice [°C]	−0,7	−2,1	−1,1	3,1	7,5	12,8
	VI	VII	VIII	IX	X	XI
Kleť [°C]	12,0	13,7	13,2	10,2	5,0	0,4
České Budějovice [°C]	15,8	17,4	16,6	13,0	7,8	2,9

49. Zjistěte, v kterém měsíci mají narozeniny žáci vaší třídy. Sestavte tabulku četností a relativních četností jednotlivých měsíců. Určete modus zkoumaného znaku.

50. V tabulce je uveden počet obyvatel a počet domů v letech 1890, 1930 a 1970 ve vybraných obcích okresu Blansko:

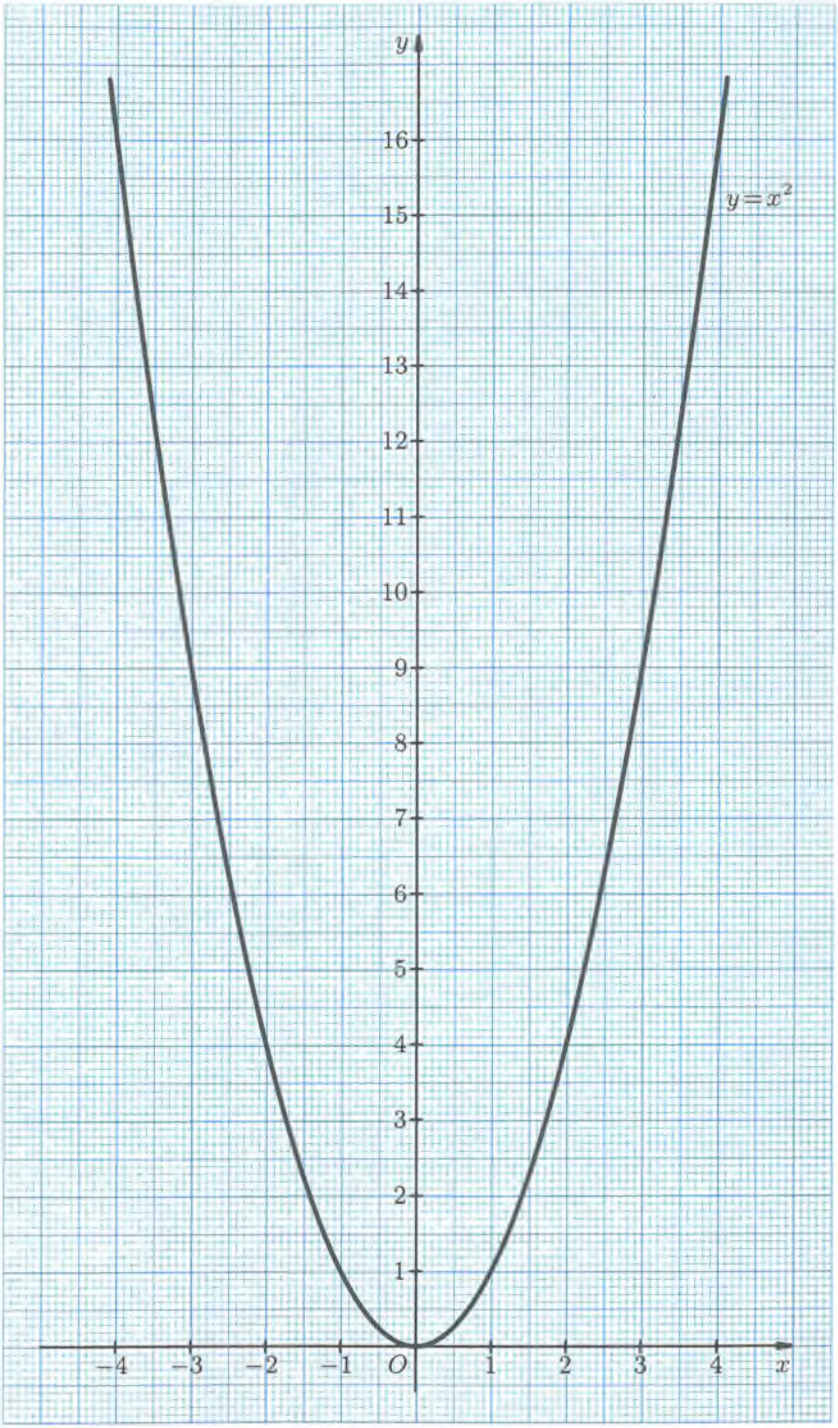
	Počet obyvatel			Počet domů		
	1890	1930	1970	1890	1930	1970
Bačov	121	117	93	21	24	23
Bedřichov	402	444	311	65	86	92
Brusná	148	109	84	21	22	25
Bukovina	439	393	323	64	90	92
Bukovinka	449	387	442	66	89	116
Crhov	272	265	224	46	54	52
Hluboké Dvory	217	184	140	38	42	37
Hodonín	318	267	244	42	49	52
Jasinov	262	278	204	44	53	52
Krasová	339	305	329	42	51	80
Kunčina Ves	301	214	122	37	41	37
Kunice	233	197	127	38	41	33
Lazinov	354	334	237	42	61	69
Lhota u Lysic	219	202	191	38	42	41
Louka	280	261	159	34	41	35
Makov	196	209	155	34	37	37
Noviči	160	185	124	35	37	36
Osiky	291	284	232	42	48	54

a) Pro daný soubor obcí a pro každý z roků 1890, 1930 a 1970 vypočtěte průměrný počet obyvatel v obci.

b) Pro daný soubor obcí a pro každý z roků 1890, 1930 a 1970 vypočtěte aritmetický průměr, medián a modus počtu domů v obci.

c) Podle počtu obyvatel v roce 1970 rozdělte uvedené obce do 4 kategorií – do 100 obyvatel, 101 – 200 obyvatel, 201 – 300 obyvatel, nad 300 obyvatel. Sestavte tabulku četností a relativních četností těchto 4 kategorií.

d) Porovnejte počty domů v uvedených obcích v letech 1930 a 1970. Zjistěte četnosti a relativní četnosti těch faktů, že počet domů v obci klesl, resp. nezměnil se, resp. vzrostl.


y
16
15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
$y = x^2$
−4
−3
−2
−1
O
1
2
3
4
x

VÝSLEDKY PRŮBĚŽNÝCH ÚKOLŮ

1 Funkce jako matematický pojem

1. a) 5; b) −7; c) 9; d) 26; e) $\frac{1}{3}$; f) 2. **2.** a) 5; b) 6; c) 30; d) 6; e) 30; f) $\frac{46}{9}$; g) $\frac{21}{4}$; h) 7. **3.** a) $x = 1$; b) $x = -\frac{5}{3}$; c) $x = -\frac{7}{3}$; d) $x = -\frac{3}{2}$. **4.** První řádek: $\frac{5}{3}$, $\frac{4}{3}$, 1; druhý řádek: 7, 4, 1. **5.** $f\colon y = 400x$. **6.** a) $(-\infty, -3) \cup (-3, \infty)$; b) R; c) $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, 2\right) \cup (2, \infty)$; d) $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$; e) $\left(-\infty, -\frac{6}{5}\right) \cup \left(-\frac{6}{5}, 0\right) \cup (0, \infty)$; f) $(-\infty, 2) \cup (2, 3) \cup (3, \infty)$; g) $\langle 7, \infty)$; h) $\left(-\infty, \frac{8}{3}\right\rangle$. **7.** a) Ne; b) ano; c) ano. **8.** a) Ano; b) ne. **9.** a) Obr. A-1; b) obr. A-2. **10.** a) $\{-0{,}3; -0{,}2; -0{,}1; 0; 0{,}1\}$; b) $(-10, 30\rangle$; c) $\langle 1\,000, 1\,100\rangle$; d) $\langle 80, 84)$.

2 Přímá úměrnost

1. a) Obr. A-3; b) obr. A-4; c) obr. A-5; d) obr. A-6. **2.** a) $y = 0{,}002x$; b) $y = -25\,000x$; c) $y = -\frac{4}{11}x$. **3.** a) $y = -\frac{1}{3}x$; b) $y = -\frac{3}{5}x$; c) $y = \frac{6}{5}x$; d) $y = -10x$. **4.** a) Klesající; b) rostoucí; c) klesající; d) rostoucí.

3 Lineární funkce

1. a) $[0, 12]$; b) $[-4, 0]$. **2.** a) $k = 6$, $q = -4$; b) $k = -8$, $q = 7$; c) $k = 15$, $q = 18$; d) $k = -5$, $q = 14$. **3.** a) Obr. A-7; b) obr. A-8; c) obr. A-9. **4.** a) $y = -\frac{1}{10}x + 2$; b) $y = 5x + \frac{3}{2}$; c) $y = 75x + 75$. **5.** a) $y = -6x + 3$; b) $y = 4x - 7$; c) $y = \frac{2}{3}x + 4$; d) $y = \frac{1}{3}x + \frac{8}{3}$. **6.** a) Obr. A-10, $y = -2x + 3$; b) obr. A-11, $y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$. **7.** a) Obr. A-12; b) obr. A-13; c) obr. A-14. **8.** Přímky, které jsou rovnoběžné buď s osou x, nebo s osou y. **9.** a) Klesající; b) ani rostoucí, ani klesající; c) rostoucí; d) klesající.

4 Absolutní hodnota

1. 2, 0, 4, $\frac{2}{3}$, 0,001, 0,3, $\frac{4}{5}$, $\sqrt{2}$. **2.** a) 3; b) 3; c) 7; d) 7; e) 7; f) 7. **3.** a) 10; b) 0; c) −6; d) 10. **4.** $\left|x^2 - (4x + 1)\right| = 4$. **5.** a) Obr. A-15; b) obr. A-16; c) obr. A-17; d) obr. A-18. **6.** a) Rostoucí v intervalu $(-5, 0\rangle$, klesající v intervalu $\langle 0, 5)$; b) klesající v intervalu $(-6, -2\rangle$, rostoucí v intervalu $\langle -2, 6)$; c) rostoucí v intervalech $\langle -9, -3\rangle$ a $\langle 0, 3\rangle$, klesající v intervalech $\langle -12, -9\rangle$, $\langle -3, 0\rangle$ a $\langle 3, 9)$. **7.** a) Rostoucí v intervalu $(-\infty, 0\rangle$, klesající v intervalu $\langle 0, \infty)$; b) rostoucí v intervalu $\langle 0, \infty)$, klesající v intervalu $(-\infty, 0\rangle$; c) rostoucí v intervalu $\langle 0, \infty)$, klesající v intervalu $(-\infty, 0\rangle$.

5 Kvadratická funkce

1. Osa x. **2.** a) Obr. A-19; b) obr. A-20. **3.** $k = 8$. **4.** a) $[0, 3]$; b) $[0, 4]$. **5.** a) Obr. A-21; b) obr. A-22; c) obr. A-23. **6.** a) Rostoucí v intervalu $(-\infty, 0\rangle$, klesající v intervalu $\langle 0, \infty)$; b) rostoucí v intervalu $\langle 0, \infty)$, klesající v intervalu $(-\infty, 0\rangle$; c) rostoucí v intervalu $(-\infty, 0\rangle$, klesající v intervalu $\langle 0, \infty)$. **7.** $[-5, 0]$ a $[5, 0]$. **8.** $k = 3$, $q = -1$.

6 Nepřímá úměrnost

1. Obr. A-24. 2. Obr. A-25. 3. $y = -\frac{10}{x}$. 4. a) Klesající v intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$; b) rostoucí v intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$; c) klesající v intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$; d) rostoucí v intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$.

7 Grafické řešení rovnic

1. a) Obr. A-26, $x = -2$; b) obr. A-27, $x = \frac{1}{4}$. 2. a) Obr. A-28, $x = -1$; b) obr. A-29, $x = 2$. 3. a) Obr. A-30, $x = -1$, $y = -2$; b) obr. A-31, $x = \frac{1}{2}$, $y = -3$. 4. a) Obr. A-32; b) obr. A-33. 5. a) Obr. A-34; b) obr. A-35. 6. a) Obr. A-36, $x_1 = -2$, $x_2 = 1$; b) obr. A-37, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$; c) obr. A-38, $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 1$; d) obr. A-39, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -3$. 7. a) Obr. A-40; b) obr. A-41. 8. a) Obr. A-42, $x_1 = x_2 = 1$; b) obr. A-43, $x_1 = x_2 = -\frac{1}{2}$.

8 Slovní úlohy

1. a) 160 hl; b) v 11 hodin 40 minut. 2. Obr. A-44; a) 1; b) 16; c) $\frac{5}{3}$; d) -2. 3. Obr. A-45, kde C_1 je graf pro první čerpadlo, C_2 pro druhé čerpadlo a C je graf pro obě čerpadla dohromady. 4. a) 4 cm; b) delší svíčka za 1 h 20 minut, kratší za 2 hodiny. 5. Obr. A-46; a) $x \doteq 3$; b) asi 5,5. 6. Obr. A-47; a) za 4,5 hodiny; b) čtvrtina. 7. Vzdálenost obou automobilů po 1 hodině jízdy. 8. Obr. A-48; a) v 7 hod 50 min; b) 4 km. 9. Obr. A-49; stíhačka poletí 12 minut (podle přesného výpočtu). 10. Obr. A-50; v 8 h 48 min.

9 Diagramy

1. ČR asi 180°, Francie asi 104°, Slovensko asi 30°, vých. trhy asi 46°, ostatní asi 1°. 3. Obr. A-51. 4. Obr. A-52. 5. Největší pokles v období 1991–1992, nejmenší v období 1989–1990. 6. Obr. A-53.

10 Základy statistiky

4. Relativní četnosti obou hodnot se budou blížit číslu 0,50. 5. Hodnoty znaku jsou číslo 4 (4 prvočísla jsou ve skupinách 1–10 a 11–20), číslo 3 (3 prvočísla jsou ve skupinách 41–50 a 71–80), číslo 2 (2 prvočísla jsou ve skupinách 21–30, 31–40, 51–60, 61–70 a 81–90), číslo 1 (1 prvočíslo je ve skupině 91–100). Hodnoty 4 a 3 mají četnosti 2 a relativní četnosti 0,2, hodnota 2 má četnost 5 a relativní četnost 0,5, hodnota 1 má četnost 1 a relativní četnost 0,1. 8. Asi 111,40 Kč. 9. Aritmetický průměr asi 8,33, modus 7, medián 8. 10. Aritmetický průměr asi 6,21, modus 6, medián 6.

VÝSLEDKY CVIČENÍ

Cvičení 1

1. a) $y = x^2$; b) $y = 3x + 7$; c) $y = 5x^2$. **2.** a) 279; b) 90; c) 48; d) -8; e) 0; f) -2; g) $\frac{4}{3}$; h) $-\frac{10}{3}$. **3.** Druhý řádek: $\frac{5}{2}$, 0, $-\frac{5}{12}$, 6, $-\frac{10}{3}$, $-\frac{12}{5}$. **4.** a) $x = 3$; b) $x = \frac{2}{5}$; c) $x = -1$; d) $x = -3$. **5.** a) $\mathsf{D} = \{0{,}9; 0{,}8; 0{,}7; 0{,}6; 0{,}5; 0{,}4\}$; b) $\mathsf{D} = \{-8, -4, -1, 3\}$. **6.** $f\colon y = x^3$, $\mathsf{D}(f) = (0, \infty)$. **7.** a) R; b) $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$; c) $\left(-\infty, \frac{6}{5}\right) \cup \left(\frac{6}{5}, \infty\right)$; d) R; e) $\left(-\infty, \frac{5}{6}\right) \cup \left(\frac{5}{6}, \infty\right)$; f) $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. **8.** a) $\langle 0, \infty)$; b) $\langle -2, \infty)$; c) $\langle 0, \infty)$; d) $\left\langle \frac{1}{2}, \infty\right)$; e) $\langle 0, \infty)$; f) $\left(-\infty, \frac{4}{5}\right\rangle$. **9.** a) $x = 0$; b) $x = 0$ a $x = 1$; c) $x = 0$ a $x = -9$; d) $x = \frac{5}{2}$ a $x = -\frac{5}{2}$; e) $x = 2$ a $x = -5$; f) $x = 0$ a $x = 2$ a $x = 3$. **10.** a) Ne; b) ano; c) ne; d) ne. **11.** a) $\langle -0{,}2; 0{,}35\rangle$; b) $\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 3\}$; c) $\langle -0{,}3; 0{,}4)$; d) $(-100, 75\rangle$. **12.** a) Obr. B-1; b) obr. B-2; c) obr. B-3. **13.** a) $(-4, 5\rangle$; b) $[-1, 0]$ a $[3{,}5; 0]$; c) $f(-3) = 2$, $f(-1) = 0$, $f(0) = -1$, $f(1) = -2$, $f(4) = 4$, $f(5) = 4$; d) $[0, -1]$; e) $2 = f(-3)$, $1 = f(-2)$, $-1 = f(0)$, $-2 = f(1)$, $-3 = f(2)$; f) $x \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Cvičení 2

1. $k = -7$, $y = -7x$, první řádek: -4, -1, 0, 3, druhý řádek: 21, -7, -14. **2.** a) Ne; b) ano; c) ne; d) ano. **3.** Obr. B-4, pro $x > 0$. **4.** Obr. B-5; a) f_1 a f_3, f_2 a f_4; b) f_1 a f_3, f_2 a f_4. **5.** a) Obr. B-6; b) obr. B-7; c) obr. B-8. **6.** a) $x > 0$; b) $x < 0$; c) $x < 0$; d) $x > 0$. **7.** a) $y = -10x$; b) $y = 13x$; c) $y = \frac{6}{5}x$; d) $y = -\frac{7}{9}x$. **8.** a) Rostoucí; b) rostoucí; c) klesající; d) rostoucí. **9.** a) Klesající; b) rostoucí; c) klesající; d) rostoucí.

Cvičení 3

1. a) Ne; b) ano; c) ne; d) ano; e) ne; f) ne. **2.** První řádek: -3, $-\frac{5}{4}$, 0, $-\frac{3}{2}$; druhý řádek: 25, 1. **3.** a) Ano; b) ne; c) ano; d) ne. **4.** Obr. B-9; a) $x < \frac{1}{2}$; b) $x > \frac{1}{2}$; c) $x < 0$. **5.** Body B a C. **6.** a) Obr. B-10; b) obr. B-11; c) obr. B-12; d) obr. B-13. **7.** Obr. B-14, jde o rovnoběžné přímky. **8.** Obr. B-15, jde o kolmé přímky. **9.** f_1 a f_3, f_2 a f_5. **10.** a) $y = 8x$; b) $y = 8x - 6$; c) $y = 8x + \frac{2}{3}$. **11.** $k = -\frac{2}{3}$. **12.** $b = -6$. **13.** a) $y = 12x$; b) $y = 12x + 12$; c) $y = 12x - 8$. **14.** a) $y = -\frac{2}{3}x + 4$; b) $y = \frac{1}{30}x - 1$. **15.** a) $y = \frac{1}{2}x + 3$; b) $y = \frac{1}{2}x - 1$; c) $y = \frac{1}{2}x$; d) $y = \frac{1}{2}x - 5$. **16.** a) $y = -2x + 4$; b) $y = 17x - 80$. **17.** a) Klesající; b) rostoucí; c) klesající; d) ani rostoucí, ani klesající; e) rostoucí; f) klesající. **18.** a) Klesající; b) klesající; c) klesající; d) rostoucí. **19.** Bod $X[1, 0]$ je průsečík s osou x, bod $Y\left[0, \frac{3}{2}\right]$ je průsečík s osou y; obr. B-16. **20.** a) Bod $X\left[\frac{5}{4}, 0\right]$ je průsečík s osou x, bod $Y[0, 1]$ je průsečík s osou y; b) bod $X[-4, 0]$ je průsečík s osou x, bod $Y[0, 2]$ je průsečík s osou y. **21.** Bod $X[-14, 0]$ je průsečík s osou x, bod $Y[0, -14]$ je průsečík s osou y. **22.** a) Různé rovnoběžky; b) totožné přímky; c) různoběžky s průsečíkem $Q[0, q_1]$.

Cvičení 4

1. a) -38; b) -63; c) 173; d) $-\frac{1}{12}$; e) $\frac{17}{24}$. **2.** a) $|7+(-15)| = 8$; b) $|7|+|-15| = 22$; c) $|7-(-15)| = 22$; d) $|7|-|-15| = -8$. **3.** Obr. B-17. **4.** Obr. B-18. **5.** Obr. B-19. **6.** Obr. B-20, bod $X[1,0]$ je průsečík s osou x, bod $Y[0,1]$ je společný bod s osou y. **7.** Obr. B-21, bod $X[-1,0]$ je společný bod s osou x, bod $Y[0,1]$ je průsečík s osou y. **8.** Rostoucí v intervalu $\langle 0,\infty)$, klesající v intervalu $(-\infty,0\rangle$. **9.** a) Ano; b) ne; c) ano; d) ano; e) ne; f) ne. **10.** a) Ne; b) ano; c) ano; d) ne; e) ano; f) ne.

Cvičení 5

1. Obr. B-22; $[0,1]$. **2.** Obr. B-23; oba grafy jsou souměrně sdružené podle osy x; f je rostoucí v intervalu $\langle 0,\infty)$, g v intervalu $(-\infty,0\rangle$. **3.** Obr. B-24; a) $x_1 = -\sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2}$; b) $x \in (-\infty,-\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2},\infty)$; c) $x \in \langle -\sqrt{2},\sqrt{2}\rangle$. **4.** Obr. B-25; a) $[0,1]$; b) $\langle -3,0\rangle$; c) $\langle 0,3\rangle$. **5.** Obr. B-26. **6.** a) $k=3$; b) $k=-4$; c) $k=\frac{2}{3}$. **7.** $k=3$, $q=-5$. **8.** Průsečíky s osou x jsou $X_1[-2,0]$ a $X_2[2,0]$, průsečík s osou y je $Y[0,-20]$. **9.** a) $V[1,-4]$; b) $Y[0,-3]$; c) $X_1[-1,0]$, $X_2[3,0]$.

Cvičení 6

1. Obr. B-27; ani rostoucí, ani klesající; klesající v intervalech $(-\infty,0)$ a $(0,\infty)$. **2.** Obr. B-28; ani rostoucí, ani klesající; rostoucí v intervalech $(-\infty,0)$ a $(0,\infty)$. **3.** Obr. B-29. **4.** a) Hyperbola s větvemi ve 2. a 4. kvadrantu; b) $x \in (-\infty,0)$; c) $x \in (0,\infty)$. **5.** a) Ne; b) ne; c) ano; d) ano. **6.** Body B, C a E. **7.** $y = \dfrac{6}{x}$. **8.** Na grafu funkce $f\colon y = \dfrac{2}{x}$ leží body A a E; na grafu funkce $g\colon y = -\dfrac{2}{x}$ leží body B, C, D a F. **9.** a) $(-\infty,-\frac{1}{3}) \cup (-\frac{1}{3},\infty)$; b) klesající v intervalech $(-\infty,-\frac{1}{3})$ a $(-\frac{1}{3},\infty)$; c) průsečík s osou y je $Y[0,2]$.

Cvičení 7

1. a) Obr. B-30, $x=-4$; b) obr. B-31, $x=-2$. **2.** a) Obr. B-32, $x=2$; b) obr. B-33, $x=-1$; c) obr. B-34, $x=-5$; d) obr. B-35, $x=0$. **3.** a) Obr. B-36, $x=1$, $y=1$; b) obr. B-37, $x=4$, $y=1$; c) obr. B-38, $x=-3$, $y=-2$; d) obr. B-39, $x=-\frac{1}{2}$, $y=-2$. **4.** a) Obr. B-40; b) obr. B-41. **5.** a) Obr. B-42, $x_1=2$, $x_2=-3$; b) obr. B-43, $x_1=-1$, $x_2=2$; c) obr. B-44, $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=2$. **6.** a) Obr. B-45, $x_1=0$, $x_2=-2$; b) obr. B-46, $x_1=2$, $x_2=-2$; c) obr. B-47, $x_1=3$, $x_2=-2$. **7.** a) Obr. B-48; b) obr. B-49.

Cvičení 8

1. Obr. B-50. **2.** Obr. B-51; a) 15 balení; b) 32 balení; c) 53 balení. **3.** Obr. B-52; auta se potkají asi po 1 hodině a 50 minutách, kdy rychlejší auto urazí asi 105 km; pomalejší auto pojede ještě asi 45 minut.

Cvičení 9

1. Německo, Nizozemsko, USA, Británie, Rakousko, Francie, Belgie; obr. B-53. **2.** Přibližné ceny v korunách: ČR 3 594, Rakousko 3 400, Lucembursko 2 482, USA 1 351, Austrálie 1 237, Kanada 1 050, Finsko 964; procenta z ceny v ČR: Rakousko asi 94,6, Lucembursko asi 69,1, USA asi 37,6, Austrálie asi 34,4, Kanada asi 29,2, Finsko asi 26,8. **3.** a) Studenti asi 3 000 Kč, učni asi 2 500 Kč, nepracující důchodci asi 5 500 Kč, pracující důchodci asi 8 000 Kč, absolventi VŠ asi 11 800 Kč, průměr populace asi 7 500 Kč; b) studenti asi 1 850 Kč, učni asi 1 200 Kč, nepracující důchodci asi 1 600 Kč, pracující důchodci asi 1 850 Kč, absolventi VŠ asi 2 400 Kč, průměr populace asi 1 850 Kč; c) studenti asi 247 %, učni asi 192 %, nepracující důchodci asi 116 %, pracující důchodci asi 93 %, absolventi VŠ asi 82 %, průměr populace asi 99 %. **4.** a) Asie asi 67,5 %, Afrika asi 27,5 %, Latinská Amerika asi 4,6 %; b) v Africe. **5.** a) Obr. B-54; b) savci asi 15,2 %, ptáci asi 7,3 %, plazi asi 45,6 %, obojživelníci asi 26,6 %, sladkovodní ryby asi 35,1 %.

Cvičení 10

1.

Počet dnů v měsíci	Četnost	Relativní četnost
28	1	asi 0,08
30	4	asi 0,33
31	7	asi 0,58

6. Délka válečku: aritmetický průměr 104,97 mm, modus 105,0 mm, medián 105,0 mm; průměr válečku: aritmetický průměr 23,484 mm, modus 23,50 mm, medián 23,485 mm.

VÝSLEDKY SOUHRNNÝCH CVIČENÍ

1. a) $y = 10^9 \cdot x^3$, $\mathrm{D} = (0, \infty)$; b) $y = \frac{3}{4}x - 3$, $\mathrm{D} = (0, \infty)$; c) $y = 7\sqrt{x}$, $\mathrm{D} = \langle 0, \infty)$. **2.** a) 5; b) 4; c) 3; d) $\frac{3}{2}$; e) 0; f) $-\frac{5}{2}$. **3.** Druhý řádek: $\frac{5}{16}$, $\frac{3}{4}$, 2, 0, $-\frac{2}{9}$. **4.** Druhý řádek: $\frac{69}{4}$, $\frac{37}{4}$, $-\frac{3}{4}$, $-\frac{11}{4}$, $-\frac{11}{4}$. **5.** a) $x = -4$; b) $x = -3$; c) $x = \frac{1}{3}$; d) $x = \frac{2}{3}$. **6.** a) $(-\infty, \frac{1}{4}) \cup (\frac{1}{4}, \infty)$; b) R; c) $\langle 9, \infty)$; d) R; e) $\langle -\frac{5}{2}, \infty)$; f) $(-\infty, 3) \cup (3, \infty)$; g) $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$; h) $(-\infty, 2) \cup (2, 7) \cup (7, \infty)$; i) $(-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$. **7.** a) Obr. C-1; b) obr. C-2. **8.** Obr. C-3. **9.** a) $y = -4x$; b) $y = \frac{3}{10}x$. **10.** a) $y = -12x$, klesající; b) $y = -10x$, klesající; c) $y = 4x$, rostoucí. **11.** a) Ano; b) ne; c) ano; d) ano; e) ne; f) ne. **12.** Obr. C-4, $X[-2, 0]$, $Y[0, 8]$. **13.** Obr. C-5, jde o různoběžné přímky procházející bodem $Q[0, -2]$. **14.** Obr. C-6, jde o rovnoběžné přímky. **15.** a) Ne; b) ne; c) ne; d) ano. **16.** $f\colon y = x + 2$, $g\colon y = x - 2$, $h\colon y = -x - 2$. **17.** a) $y = 7x - 9$; b) $y = -8x$; c) $y = -5x + 6$; d) $y = \frac{2}{9}x$; e) $y = 10x + \frac{3}{4}$; f) $y = -60x + 100$. **18.** a) $X[4, 0]$, $Y[0, 4]$; b) $X[-4, 0]$, $Y[0, 6]$; c) $X[0, 0] = Y$; d) $Y[0, -7]$, průsečík s osou x neexistuje; e) $X\left[-\frac{8}{3}, 0\right]$, $Y[0, -8]$;

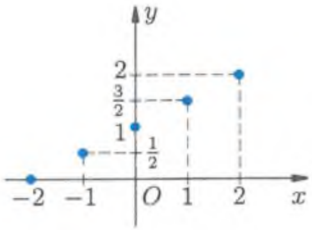
f) $X\left[\frac{7}{2},0\right]$, $Y[0,-7]$. **19.** a) Ano; b) ne; c) ne; d) ne; e) ne; f) ano. **20.** a) Obr. C-7; b) obr. C-8; c) obr. C-9. **21.** a) Obr. C-10; b) obr. C-11; c) obr. C-12. **22.** a) Rostoucí v intervalech $(-1,0\rangle$ a $\langle 1,2\rangle$, klesající v intervalu $\langle 2,4\rangle$; b) rostoucí v intervalech $\langle -6,-3\rangle$ a $\langle 0,2)$, klesající v intervalech $(-8,-6\rangle$ a $\langle -3,0\rangle$. **23.** a) Ano; b) ne; c) ne; d) ano. **24.** a) Obr. C-13; b) obr. C-14; c) obr. C-15. **25.** Obr. C-16; funkce f v intervalu $(-\infty,0\rangle$, funkce g v intervalu $\langle 0,\infty)$. **26.** Obr. C-17; a) $(-2,0\rangle$; b) $\langle 0,2)$; c) $x=0$; d) pro žádné x. **27.** a) Ne; b) ano; c) ano; d) ano. **28.** Obr. C-18; a) $x_1=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x_2=\frac{1}{\sqrt{2}}$; b) $x\in\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cup\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\infty\right)$; c) $x\in\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right\rangle\cup\left\langle\frac{1}{\sqrt{2}},\infty\right)$. **29.** a) $[-1,-4]$; b) $[0,-3]$; c) $[-3,0]$ a $[1,0]$; d) rostoucí v intervalu $\langle -1,\infty)$, klesající v intervalu $(-\infty,-1\rangle$. **30.** Obr. C-19. **31.** Obr. C-20; rostoucí v intervalech $(-\infty,0)$ a $(0,\infty)$. **32.** a) $y=-\dfrac{7}{4x}$; b) $y=\dfrac{5}{3x}$; c) $y=\dfrac{4}{9x}$. **33.** a) $y=\dfrac{4}{x}$; b) $y=-\dfrac{5}{7x}$; c) $y=-\dfrac{6}{5x}$; d) $y=\dfrac{7}{2x}$. **34.** Body Q, S a T. **35.** a) $(-\infty,2)\cup(2,\infty)$; b) klesající v každém z intervalů $(-\infty,2)$ a $(2,\infty)$; c) $[0,-1]$. **36.** a) Obr. C-21, $x=2$; b) obr. C-22, $x=-\frac{1}{2}$; c) obr. C-23, $x=4$; d) obr. C-24, $x=\frac{5}{2}$. **37.** a) Obr. C-25, $x=1$, $y=4$; b) obr. C-26, $x=-1$, $y=-2$. **38.** a) Obr. C-27, nekonečně mnoho řešení tvaru $x=t$, $y=3t-4$, $t\in\mathrm{R}$; b) obr. C-28, žádné řešení. **39.** a) Obr. C-29, $x_1=0$, $x_2=3$; b) obr. C-30, $x_1=-3$, $x_2=3$; c) obr. C-31, žádné řešení. **40.** a) Obr. C-32, $x_1=1$, $x_2=2$; b) obr. C-33, $x_1=-\frac{1}{2}$, $x_2=3$; c) obr. C-34, žádné řešení; d) obr. C-35, $x_1=-\frac{1}{2}$, $x_2=2$. **41.** Obr. C-36; asi 3 h 20 min. **42.** Obr. C-37; asi za 19 minut. **43.** Obr. C-38; za půl hodiny ve vzdálenosti 2 km od domu, v němž Petra bydlí. **44.** Obr. C-39; více než asi 235 kg. **45.** Obr. C-40. **46.** Obr. C-41. **47.** Obr. C-42. **48.** Obr. C-43; a) u obou stanic byly nejvyšší průměrné teploty v červenci, nejnižší v lednu; b) v dubnu a v červnu. **50.** a) V roce 1890 asi 277,8, v roce 1930 257,5, v roce 1970 asi 207,8; b) pro rok 1870 průměr asi 41,6, modus 42, medián 40, pro rok 1930 průměr asi 50,4, modus 41, medián 45, pro rok 1970 průměr 53,5, modus 37 a 52, medián 46,5;

c)

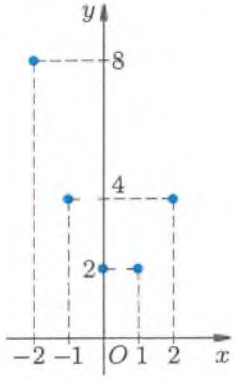
Počet obyvatel	Četnost	Relativní četnost
do 100	2	asi 0,11
101–200	7	asi 0,39
201–300	5	asi 0,28
nad 300	4	asi 0,22

d)

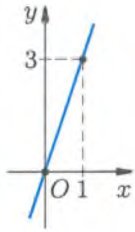
Změna počtu domů	Četnost	Relativní četnost
pokles	9	0,50
žádná změna	1	asi 0,06
vzrůst	8	asi 0,44



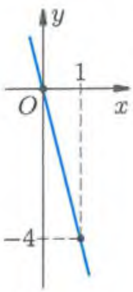
A-1



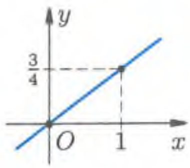
A-2



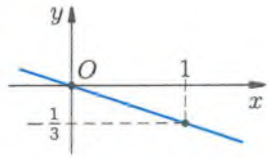
A-3



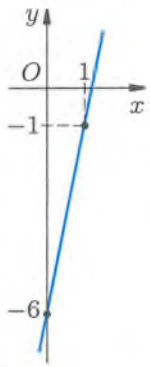
A-4



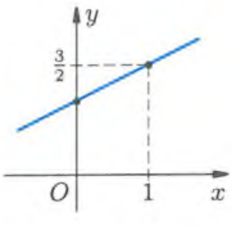
A-5



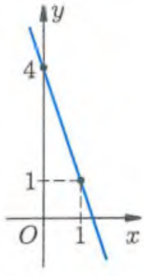
A-6



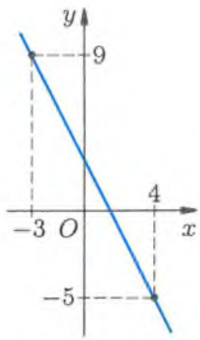
A-7



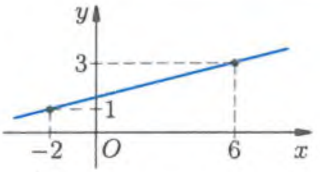
A-8



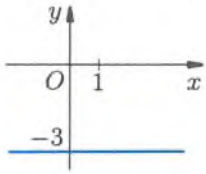
A-9



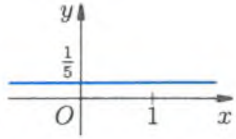
A-10



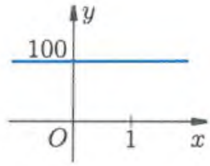
A-11



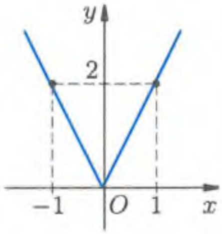
A-12



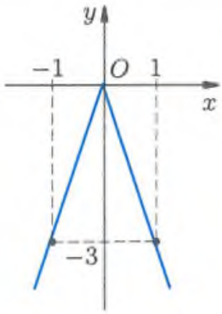
A-13



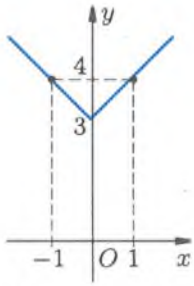
A-14



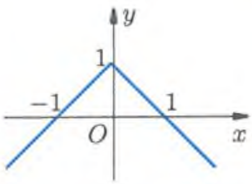
A-15



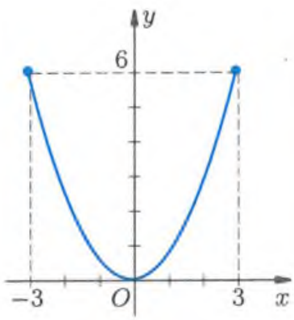
A-16



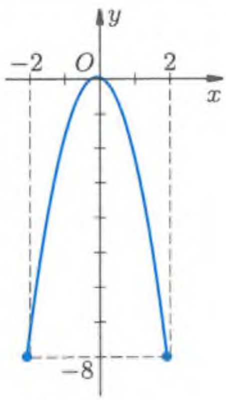
A-17



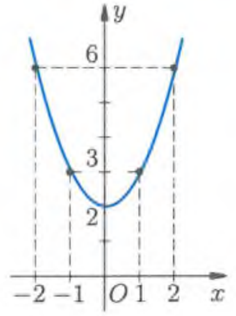
A-18



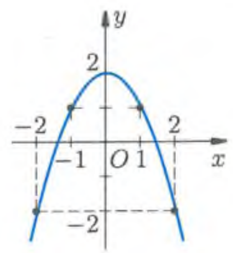
A-19



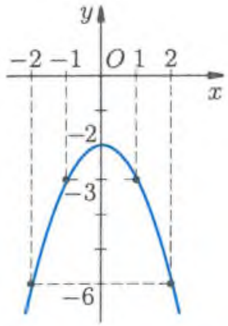
A-20



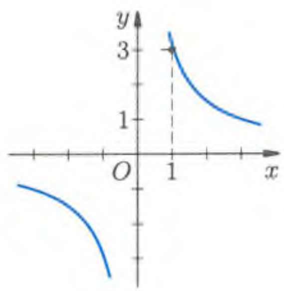
A-21



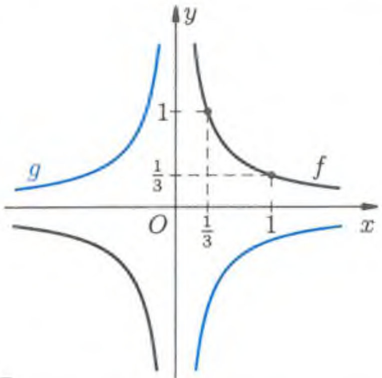
A-22



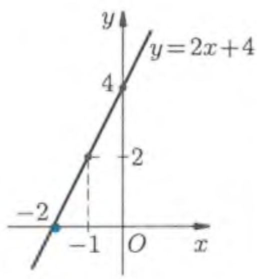
A-23



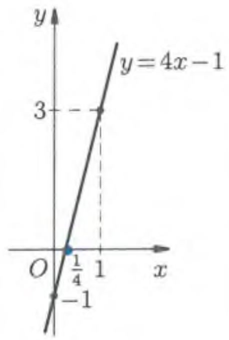
A-24



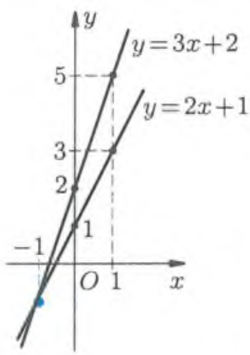
A-25



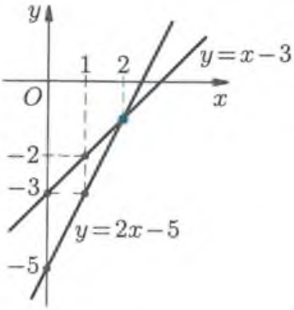
A-26



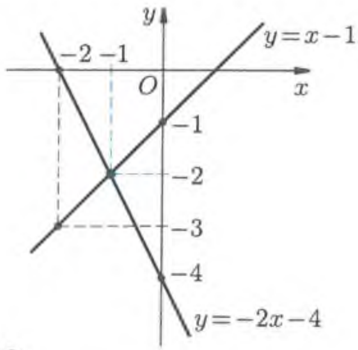
A-27



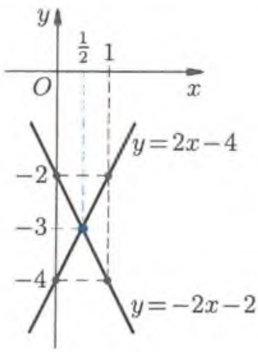
A-28



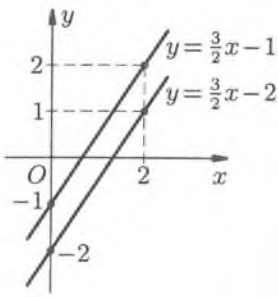
A-29



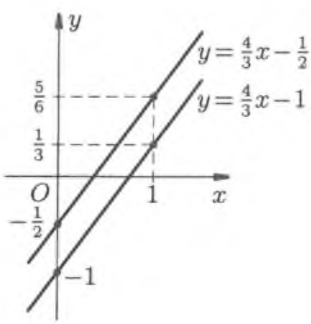
A-30



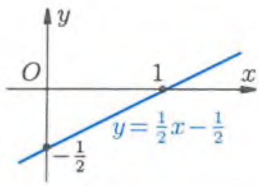
A-31



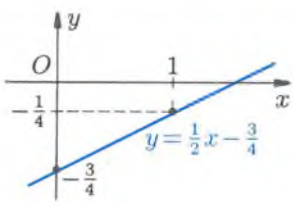
A-32



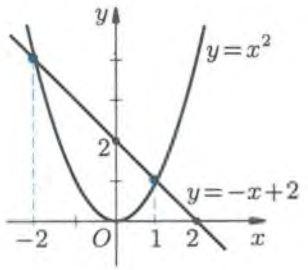
A-33



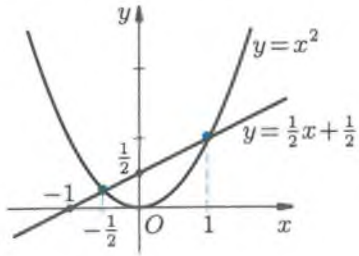
A-34



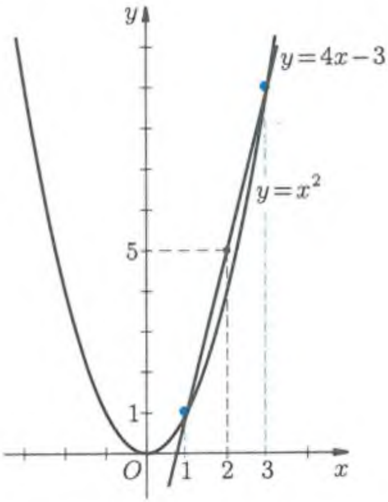
A-35



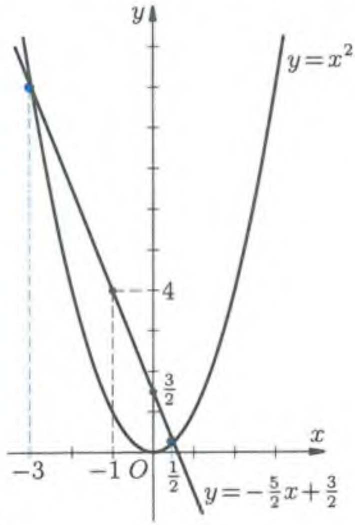
A-36



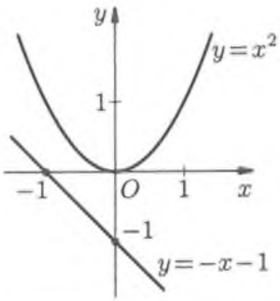
A-38



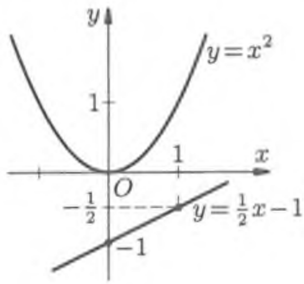
A-37



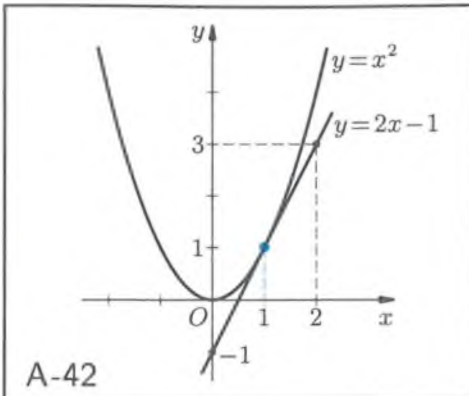
A-39



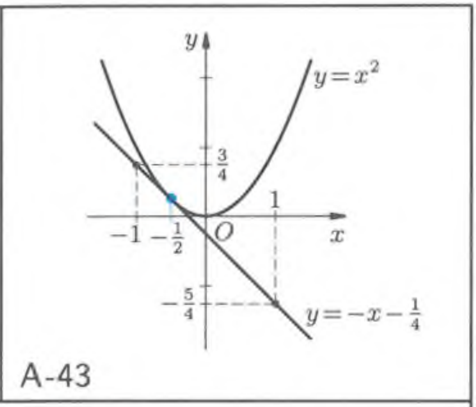
A-40



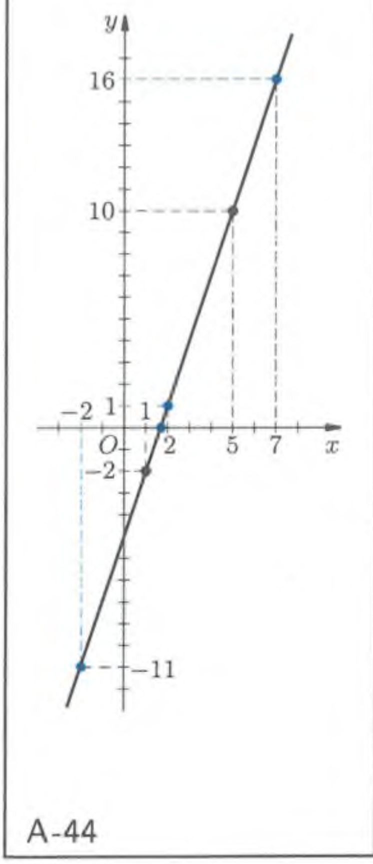
A-41



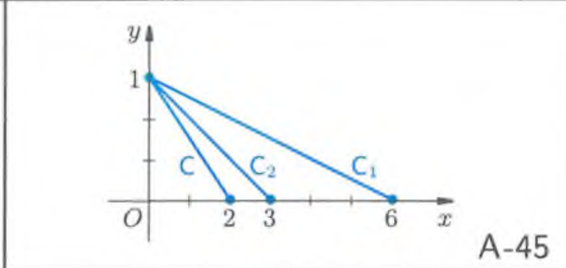
A-42



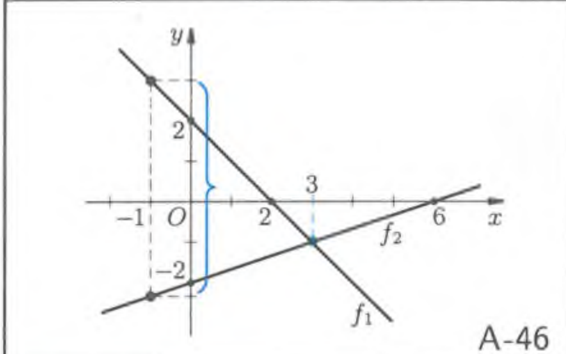
A-43



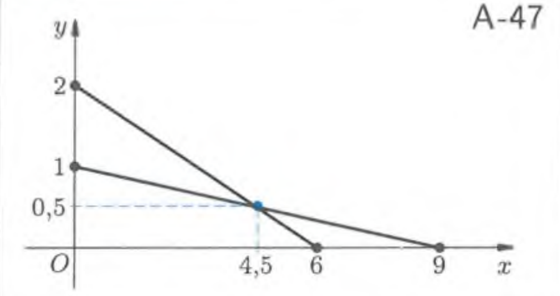
A-44

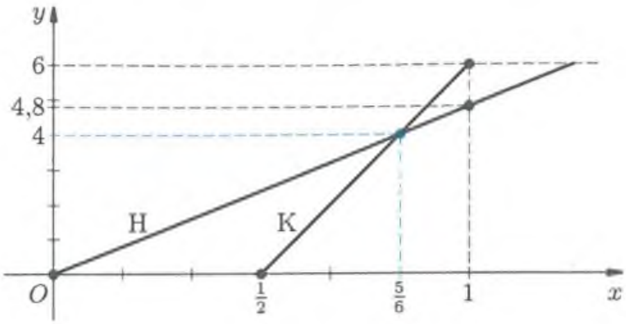


A-45

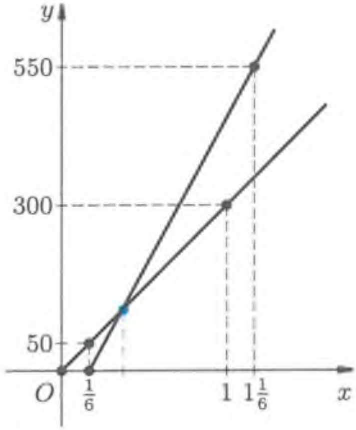


A-46

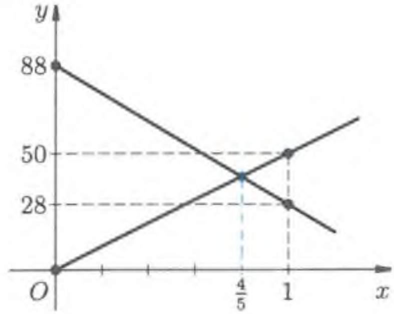
A-47




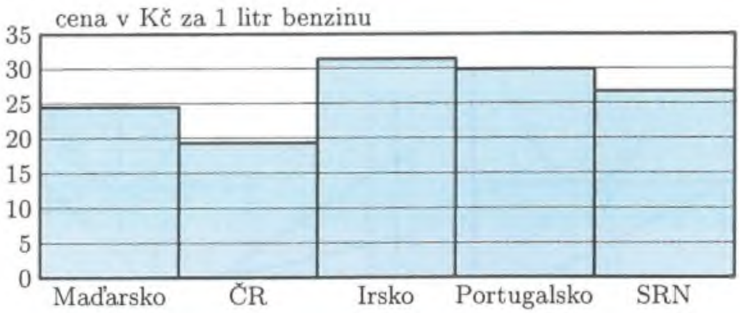
A-48



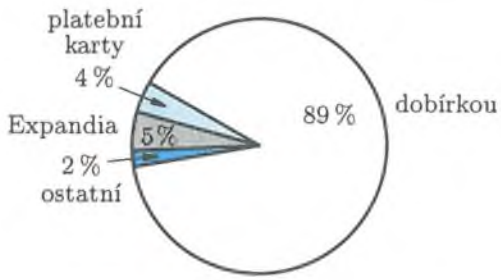
A-49



A-50



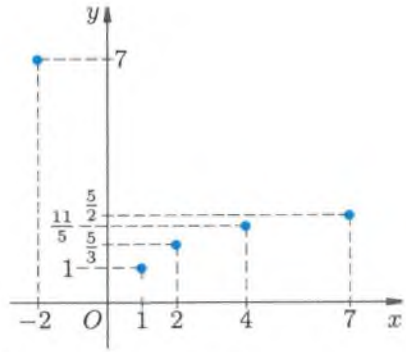
A-51


platební
karty
4 %
Expandia
5 %
2 %
ostatní
89 %
dobírkou

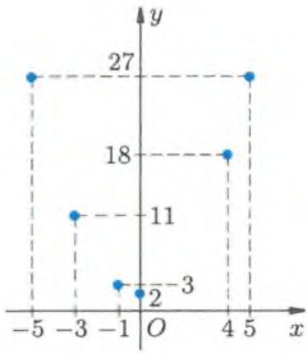
A-52


VÝVOJ NÁKLADŮ ČESKÝCH DENÍKŮ V LEDNU
v milionech kusů
1,8
1,7
1,6
1,5
1,4
1,3
1,2
1994 1995 1996 1997 1998

A-53

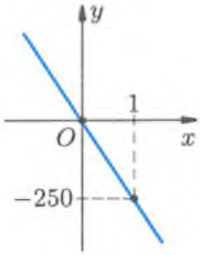


B-2

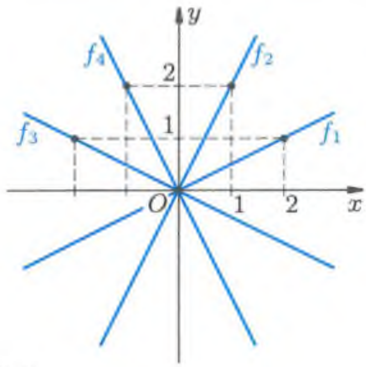


B-3

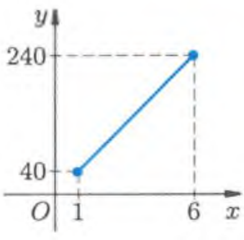
B-1



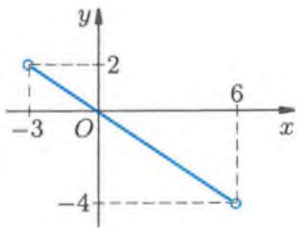
B-4



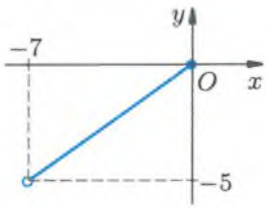
B-5



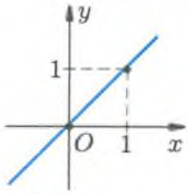
B-6



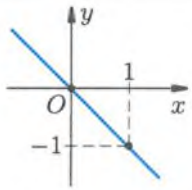
B-7



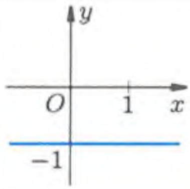
B-8



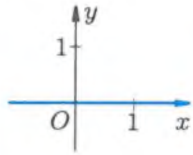
B-10



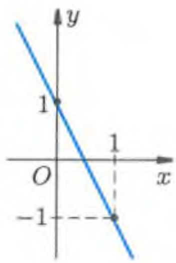
B-11



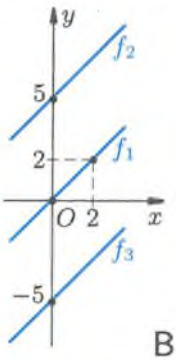
B-12



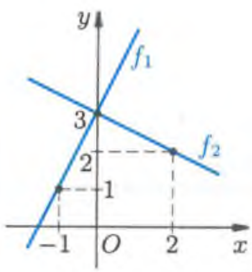
B-13



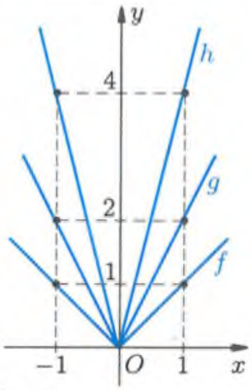
B-9



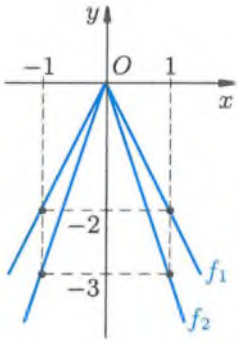
B-14



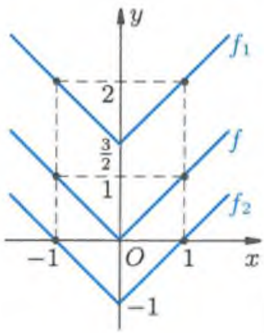
B-15



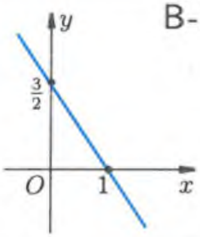
B-17



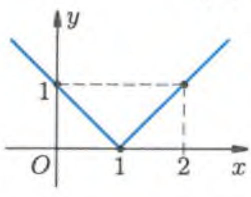
B-18



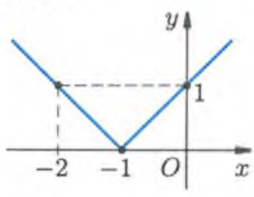
B-19



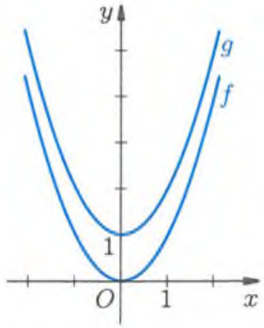
B-16



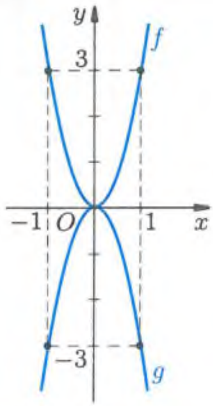
B-20



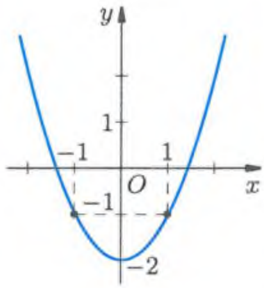
B-21



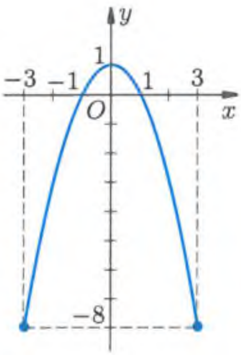
B-22



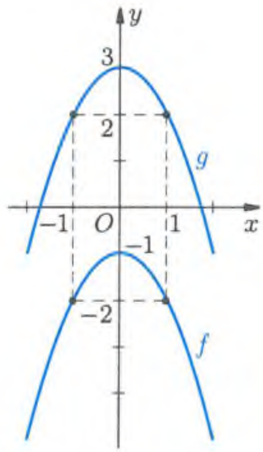
B-23



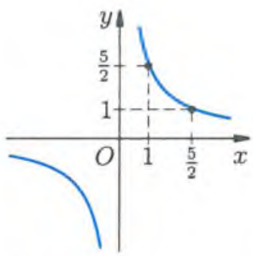
B-24



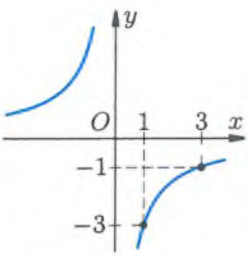
B-25



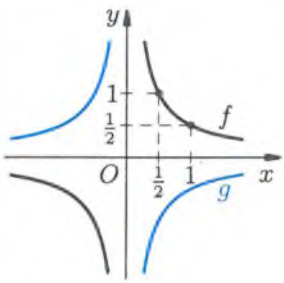
B-26



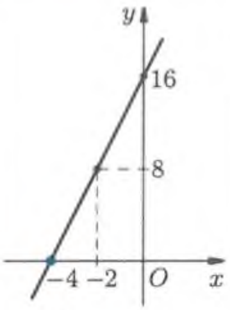
B-27



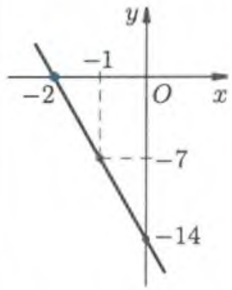
B-28



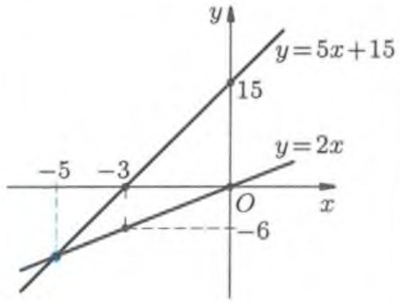
B-29



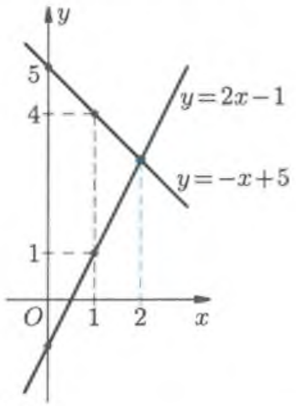
B-30



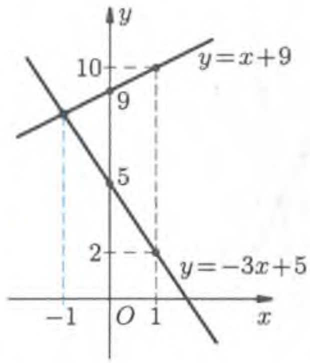
B-31



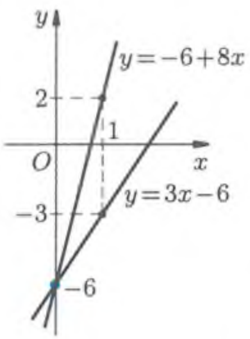
B-34



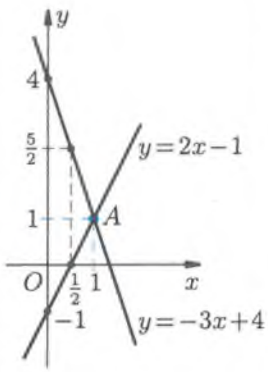
B-32



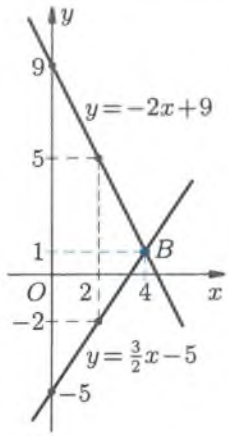
B-33



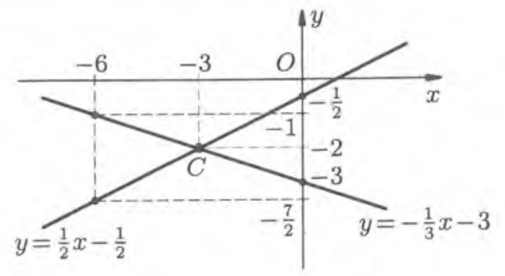
B-35



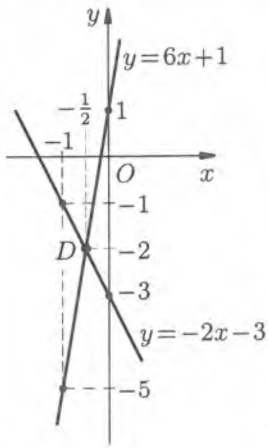
B-36



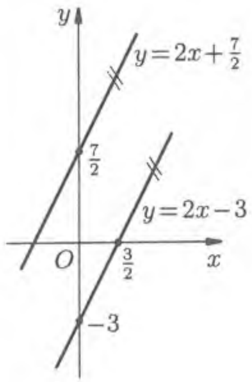
B-37



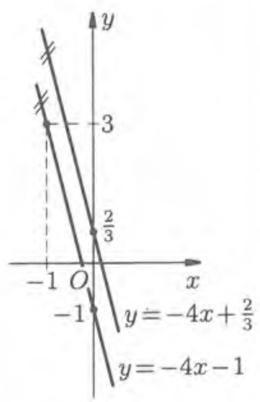
B-38



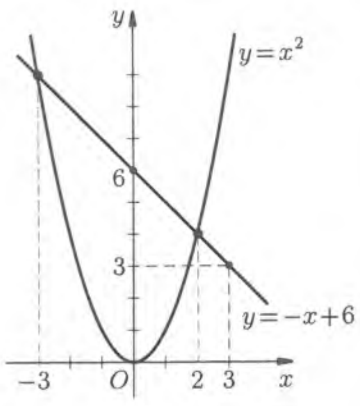
B-39



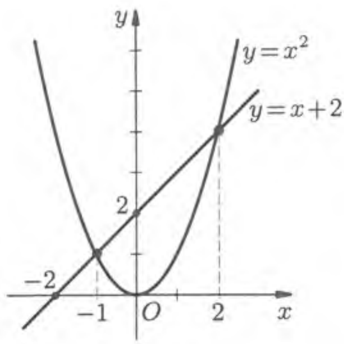
B-40



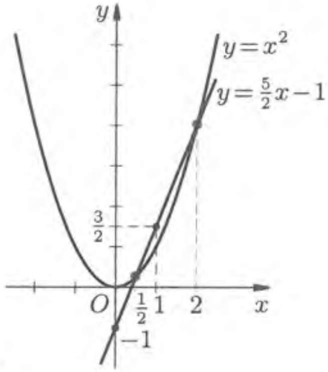
B-41



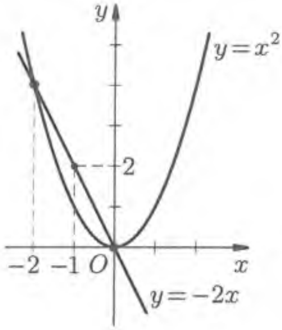
B-42



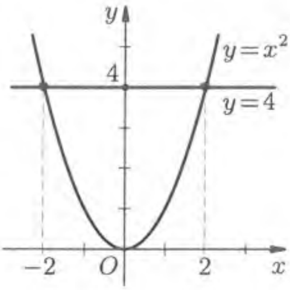
B-43



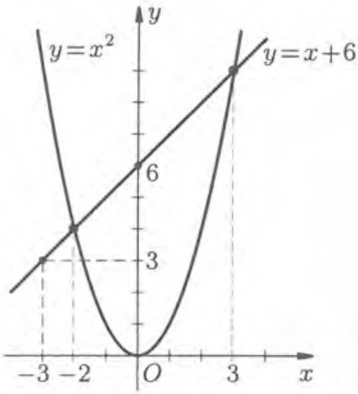
B-44



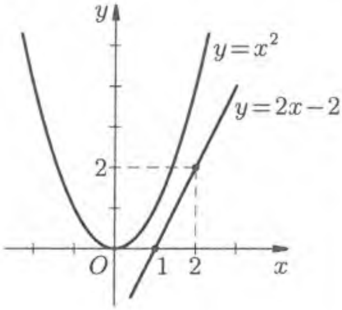
B-45



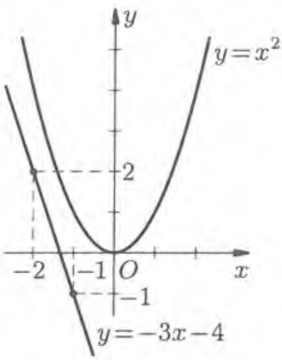
B-46



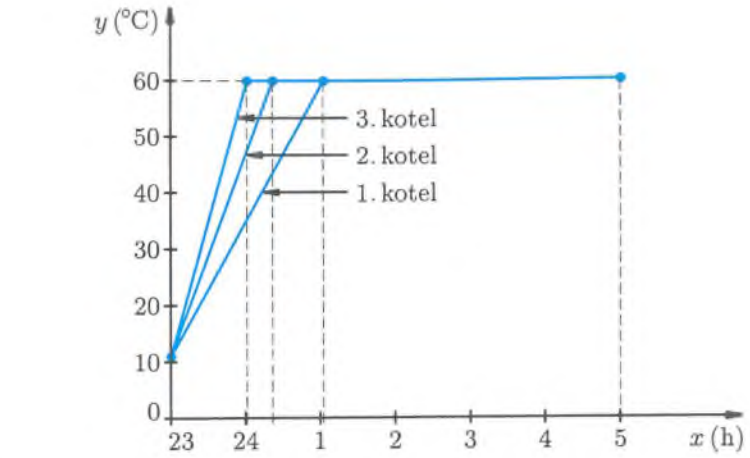
B-47



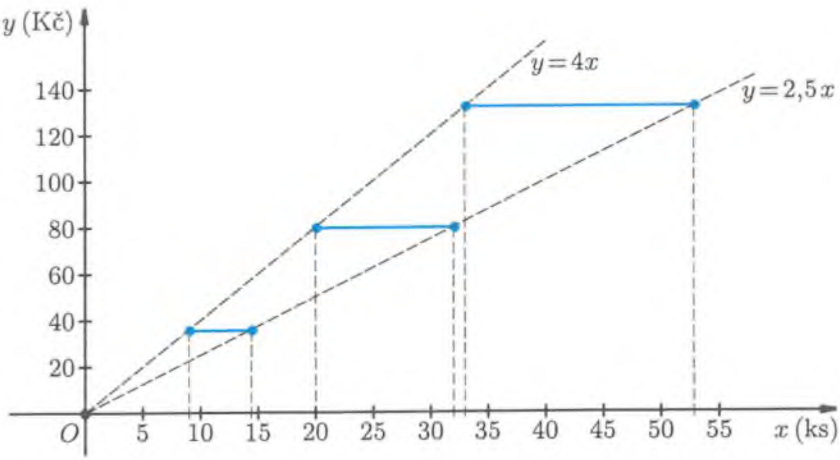
B-48



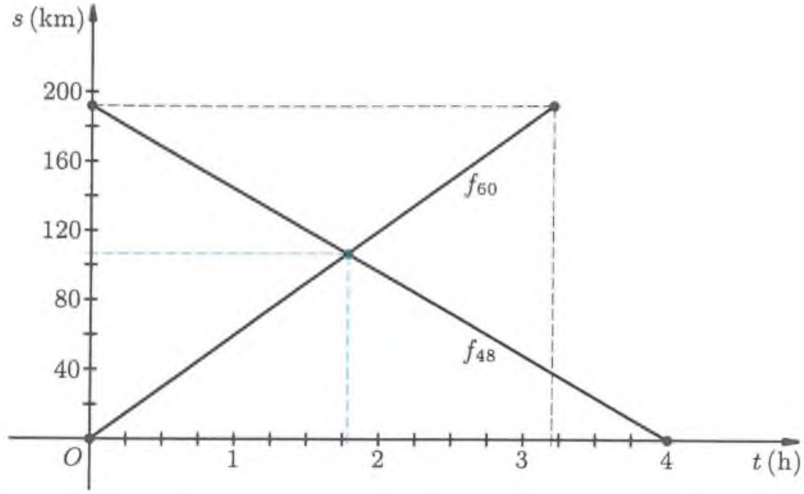
B-49


y (°C)
60
50
40
30
20
10
0
3. kotel
2. kotel
1. kotel
23
24
1
2
3
4
5
x (h)

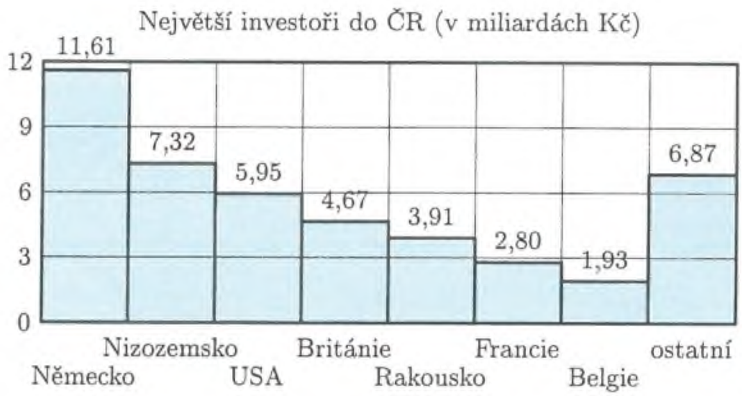
B-50


y (Kč)
140
120
100
80
60
40
20
y=4x
y=2,5x
O
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
55
x (ks)

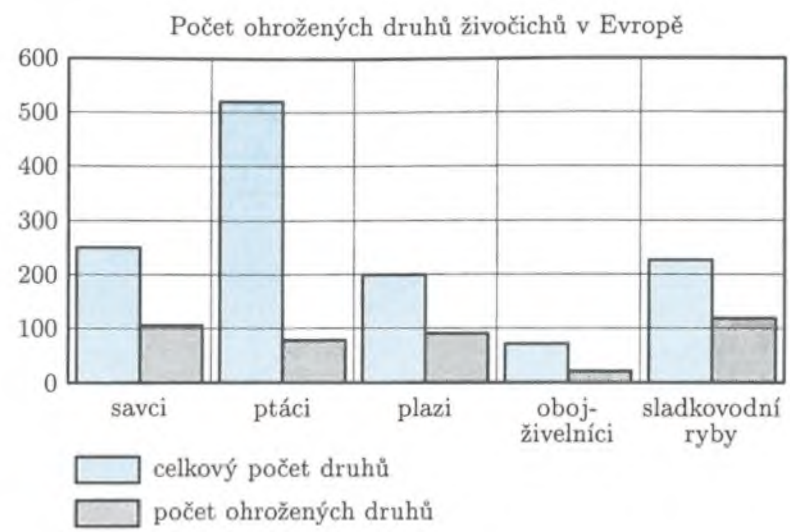
B-51


s (km)
200
160
120
80
40
O
1
2
3
4
t (h)
f_{60}
f_{48}

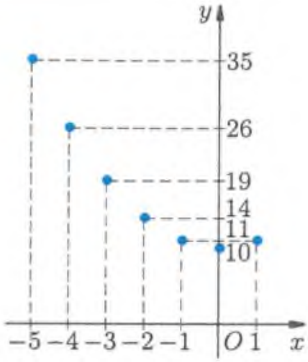
B-52


Největší investoři do ČR (v miliardách Kč)
12
9
6
3
0
11,61
7,32
5,95
4,67
3,91
2,80
1,93
6,87
Německo
Nizozemsko
USA
Británie
Rakousko
Francie
Belgie
ostatní

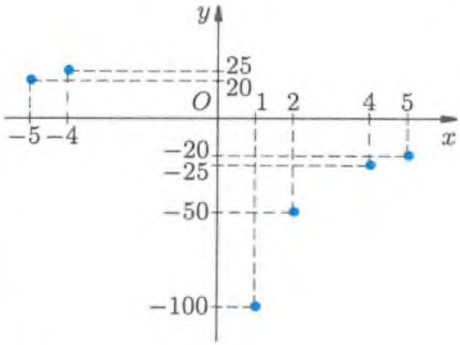
B-53


Počet ohrožených druhů živočichů v Evropě
600
500
400
300
200
100
0
savci
ptáci
plazi
oboj-živelníci
sladkovodní ryby
celkový počet druhů
počet ohrožených druhů

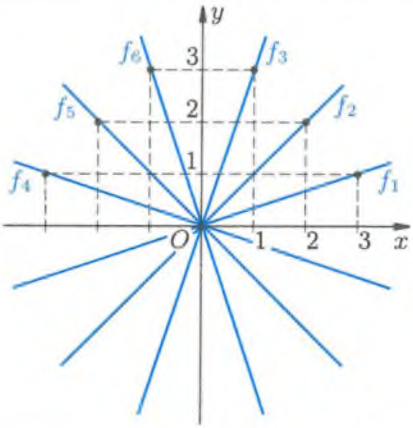
B-54



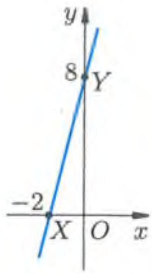
C-1



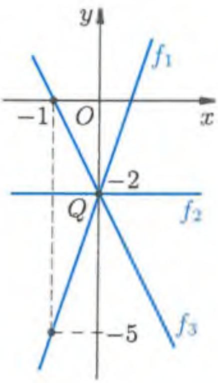
C-2



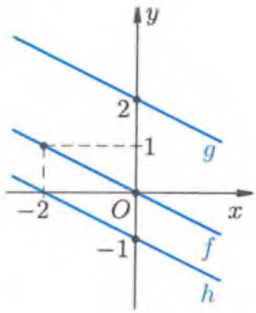
C-3



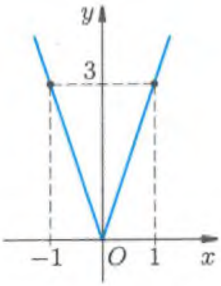
C-4



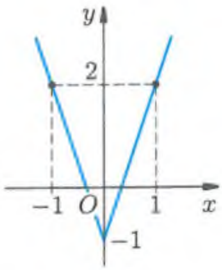
C-5



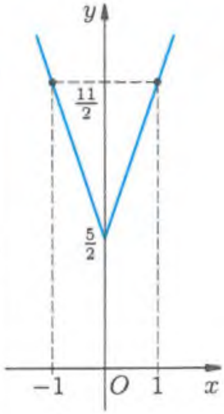
C-6



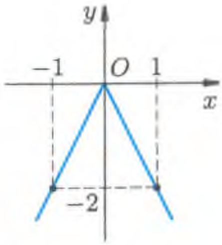
C-7



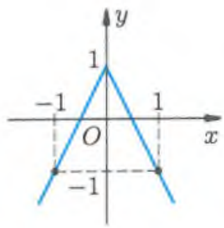
C-8



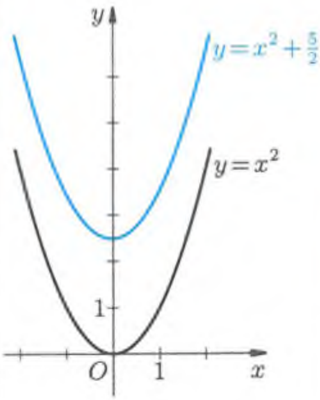
C-9



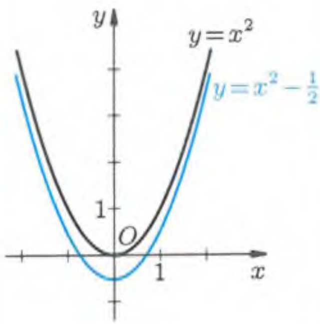
C-10



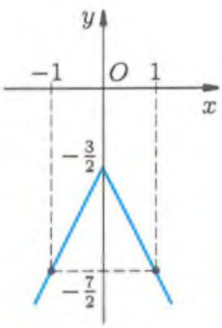
C-11



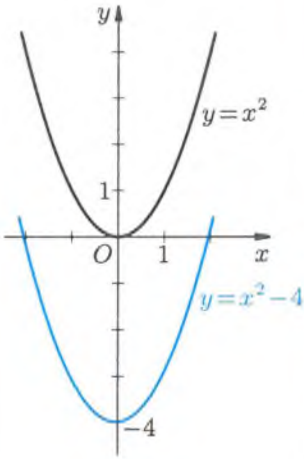
C-13



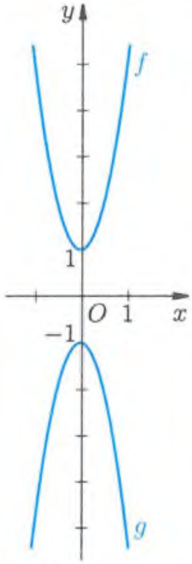
C-14



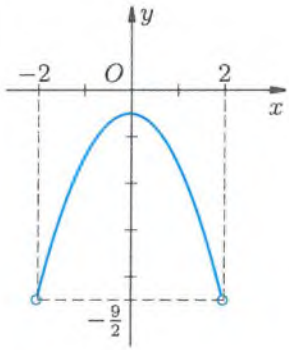
C-12



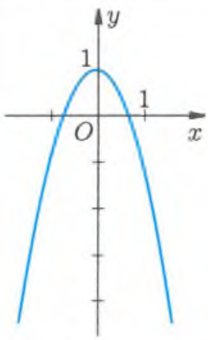
C-15



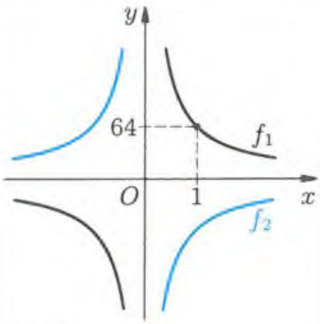
C-16



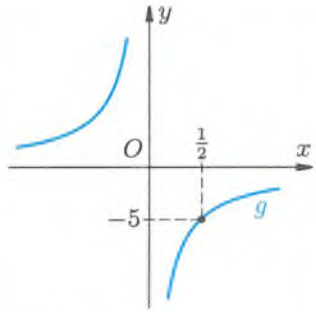
C-17



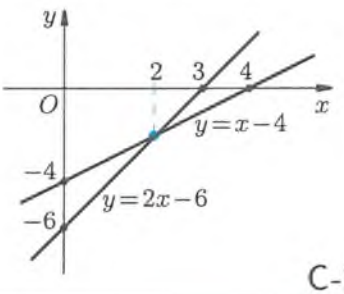
C-18



C-19

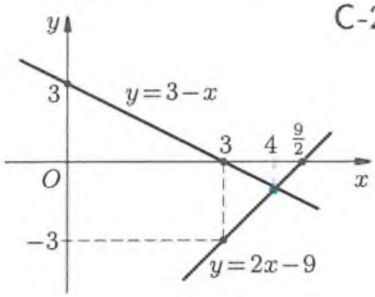


C-20

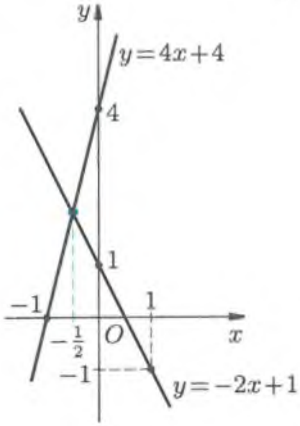


C-21

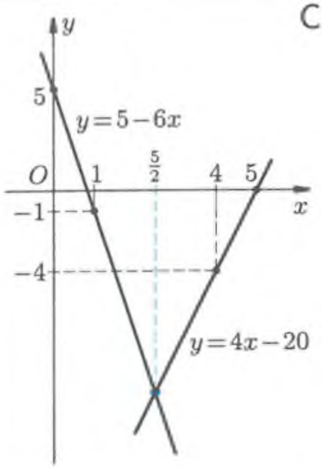
C-23



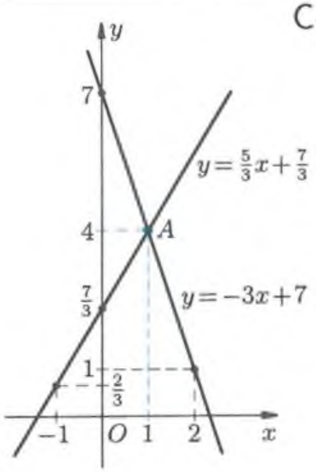
C-22



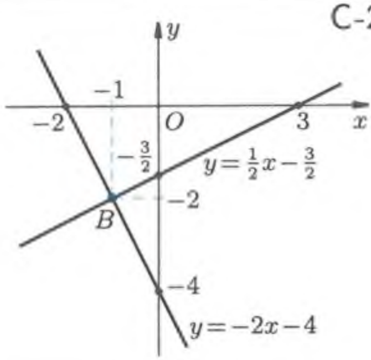
C-24



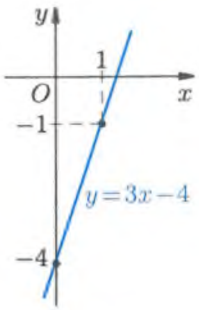
C-25



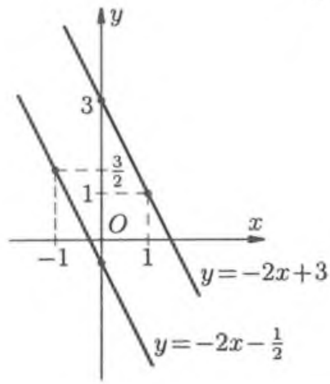
C-26

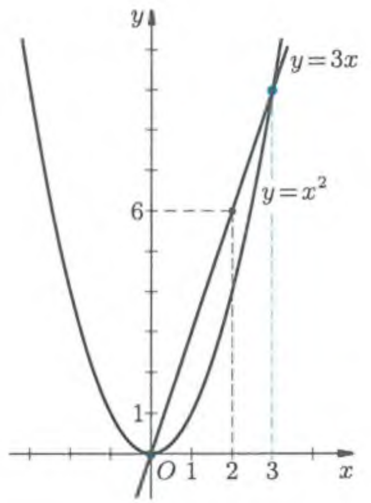


C-27

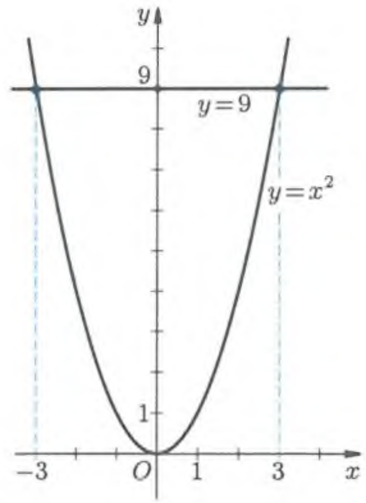


C-28

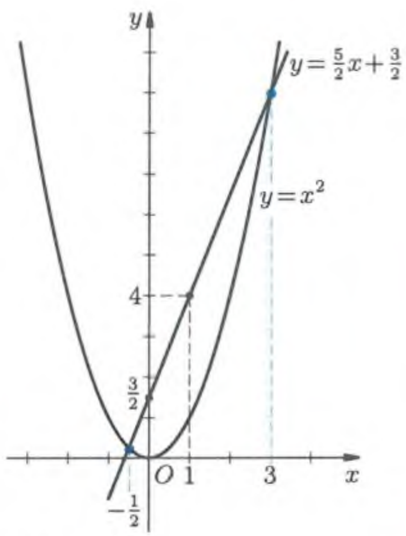




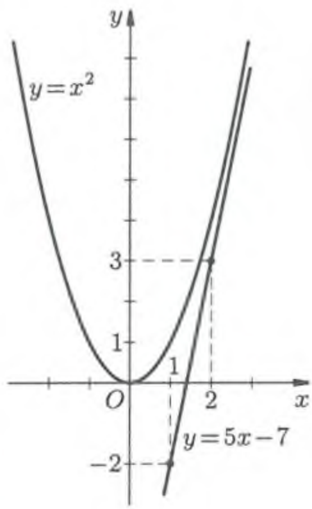
C-29



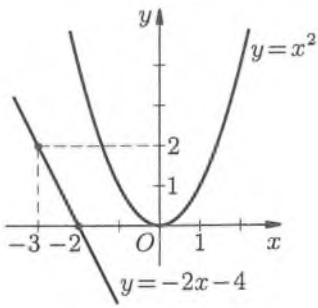
C-30



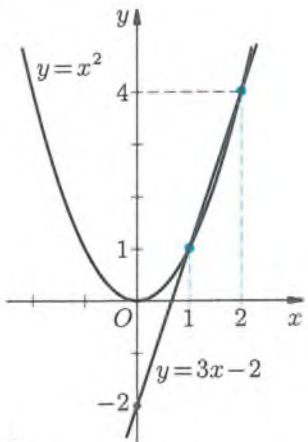
C-33



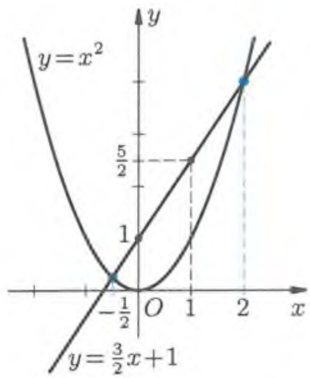
C-34



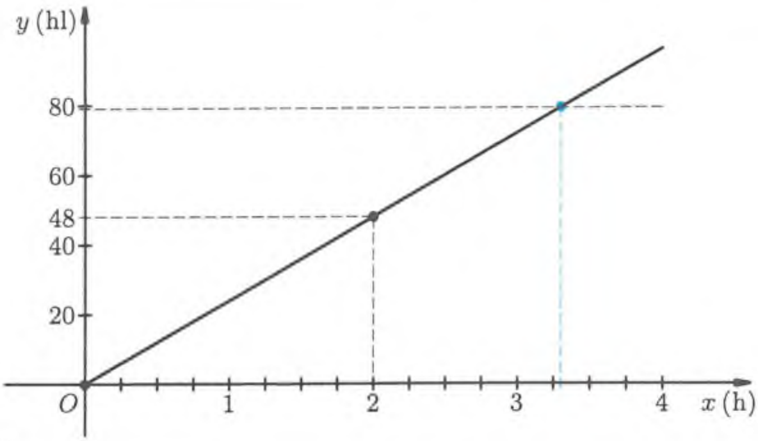
C-31



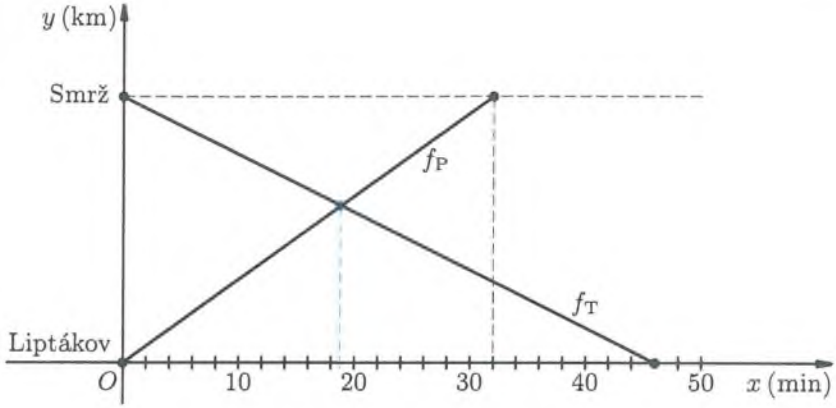
C-32



C-35

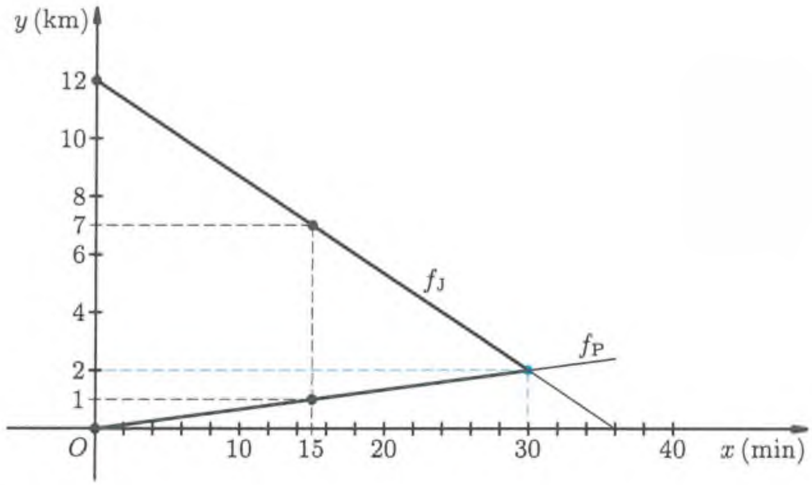


C-36



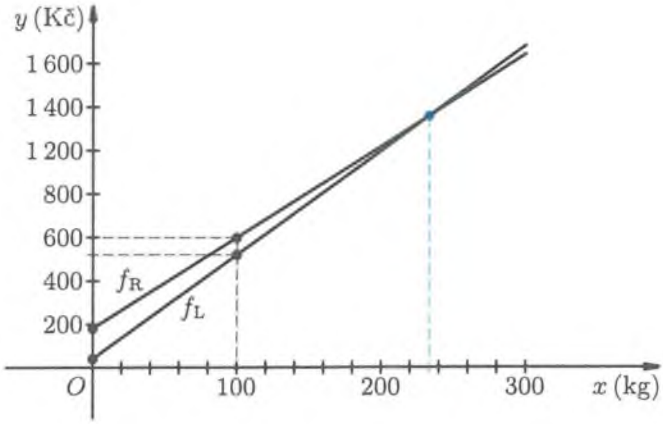
y (km)
Smrž
Liptákov
f_P
f_T
O
10
20
30
40
50
x (min)

C-37



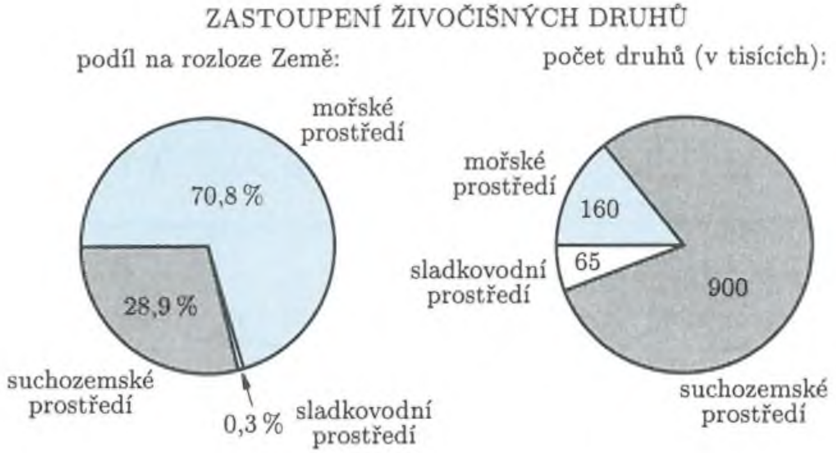
y (km)
12
10
8
7
6
4
2
1
f_J
f_P
O
10
15
20
30
40
x (min)

C-38



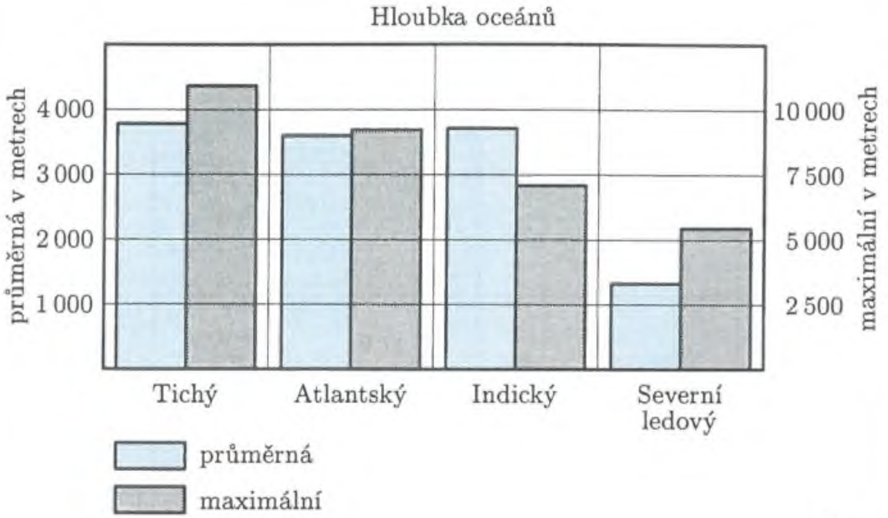
y (Kč)
1 600
1 400
1 200
800
600
400
200
f_R
f_L
O
100
200
300
x (kg)

C-39



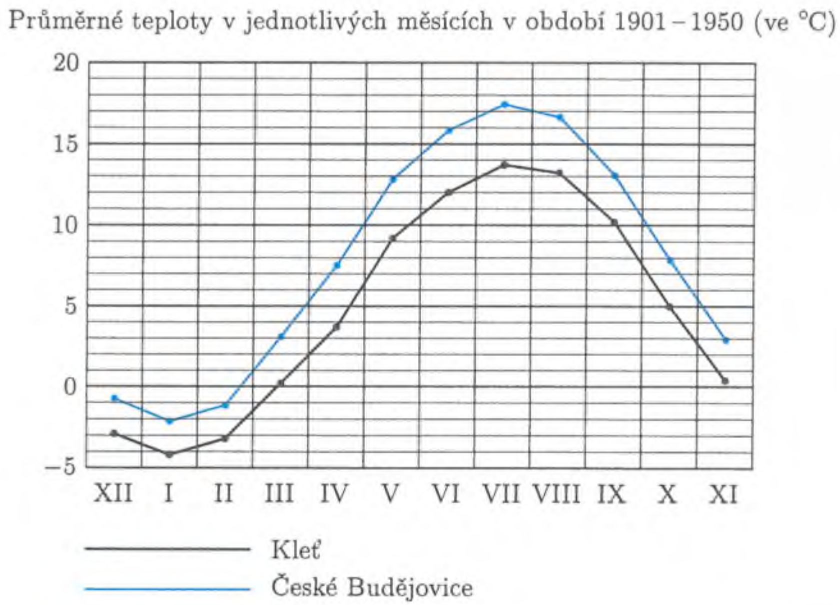
ZASTOUPENÍ ŽIVOČIŠNÝCH DRUHŮ
podíl na rozloze Země:
počet druhů (v tisících):
mořské prostředí
70,8 %
28,9 %
suchozemské prostředí
0,3 %
sladkovodní prostředí
mořské prostředí
160
65
sladkovodní prostředí
900
suchozemské prostředí

C-40



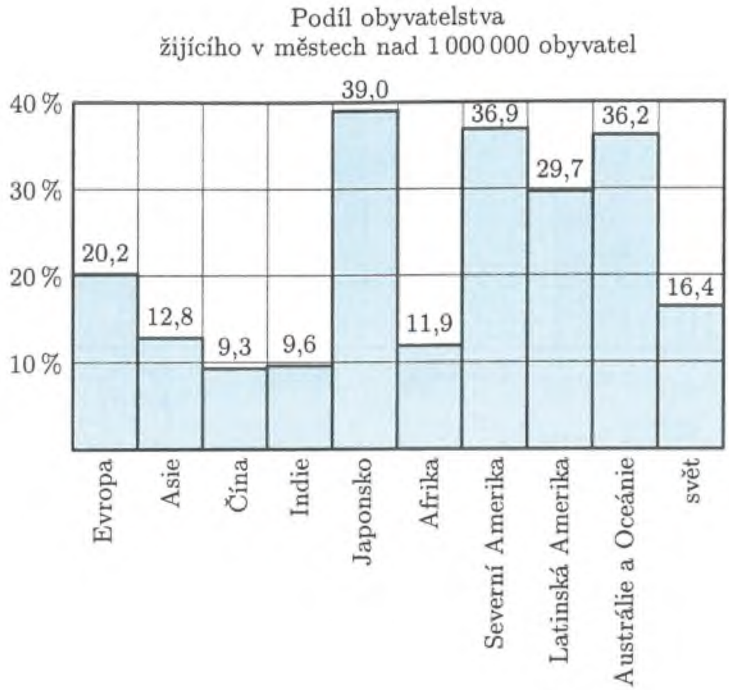
Hloubka oceánů
průměrná v metrech
4 000
3 000
2 000
1 000
10 000
7 500
5 000
2 500
maximální v metrech
Tichý
Atlantský
Indický
Severní ledový
průměrná
maximální

C-41



Průměrné teploty v jednotlivých měsících v období 1901 – 1950 (ve °C)
20
15
10
5
0
−5
XII I II III IV V VI VII VIII IX X XI
Kleť
České Budějovice

C-43


Podíl obyvatelstva
žijícího v městech nad 1 000 000 obyvatel
40 %
30 %
20 %
10 %
20,2
12,8
9,3
9,6
39,0
11,9
36,9
29,7
36,2
16,4
Evropa
Asie
Čína
Indie
Japonsko
Afrika
Severní Amerika
Latinská Amerika
Austrálie a Oceánie
svět

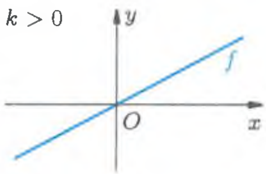
C-42

PŘÍMÁ ÚMĚRNOST

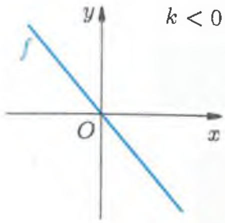
$$\boxed{f:\ y = k \cdot x} \qquad x \in \mathsf{R}$$

k ... koeficient přímé úměrnosti, $k \neq 0$

Grafem je přímka procházející bodem $[0, 0]$:



rostoucí funkce



klesající funkce

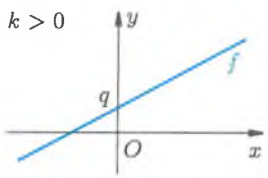
LINEÁRNÍ FUNKCE

$$\boxed{f:\ y = k \cdot x + q} \qquad x \in \mathsf{R}$$

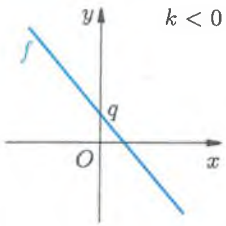
k ... koeficient lineárního členu, $k \neq 0$
q ... absolutní člen

(Pro $q = 0$ jde o přímou úměrnost.)

Grafem je přímka procházející bodem $[0, q]$:



rostoucí funkce

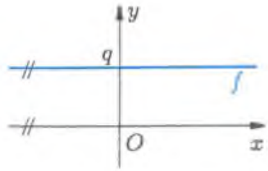


klesající funkce

KONSTANTNÍ FUNKCE

$$\boxed{f:\ y = q}$$

Grafem je přímka rovnoběžná s osou x procházející bodem $[0, q]$:



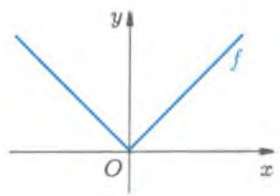
Pro každá $x_1, x_2 \in \mathsf{R}$ platí $f(x_1) = f(x_2)$.

FUNKCE ABSOLUTNÍ HODNOTA

$$\boxed{f:\ y = |x|} \qquad x \in \mathsf{R}$$

$$|x| = \begin{cases} x & \text{pro} \quad x > 0 \\ 0 & \text{pro} \quad x = 0 \\ -x & \text{pro} \quad x < 0 \end{cases}$$

Grafem je lomená čára osově souměrná podle osy y:



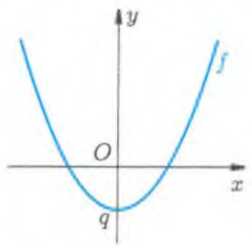
KVADRATICKÁ FUNKCE (bez lineárního členu)

$$\boxed{f:\ y = k \cdot x^2 + q} \qquad x \in \mathsf{R}$$

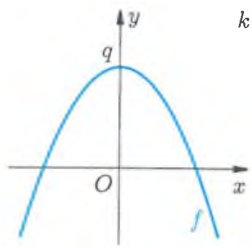
k ... koeficient kvadratického členu, $k \neq 0$
q ... absolutní člen

Grafem je parabola osově souměrná podle osy y s vrcholem v bodě $[0, q]$:

$k > 0$



$k < 0$



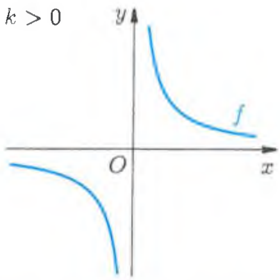
NEPŘÍMÁ ÚMĚRNOST

$$\boxed{f:\ y = \frac{k}{x}} \qquad x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$$

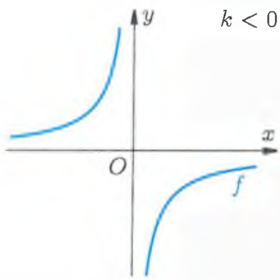
k ... koeficient nepřímé úměrnosti, $k \neq 0$

Grafem je hyperbola tvořená dvěma větvemi:

$k > 0$



$k < 0$



RNDr. Jiří Herman, Ph. D.
PaedDr. Vítězslava Chrápavá
Mgr. Eva Jančovičová
Doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc.

Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií
Funkce

Obálku navrhl Miloš Jirsa
Ilustrovala Lucie Voráčková
Vydalo nakladatelství Prometheus, spol. s r. o.,
Žitná 25, 117 01 Praha 1,
roku 2000
Edice Učebnice pro základní školy
Odpovědná redaktorka Marie Nováková
Sazbu programem TEX a pérové obrázky
připravil Jura Charvát
Vytiskly Moravské tiskárny, a. s.,
Tiskárna Olomouc, Studentská 5, 771 64 Olomouc

1. vydání

PROMETHEUS

9511195

ISBN 80-7196-182-5