PŘEHLED středoškolské matematiky

Josef Polák

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\int_0^1 x\,\mathrm{d}x$$

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

PROMETHEUS®

PŘEHLED středoškolské matematiky

Josef Polák

PROMETHEUS

Zpracoval doc. RNDr. Josef Polák, CSc.
Lektorovali prof. Emil Kraemer a RNDr. Jiří Mikulčák, CSc.
Úpravy 9. vydání lektoroval RNDr. Jiří Ditrich

9. přepracované vydání

ISBN 978-80-7196-356-1

Obsah

Předmluva

Vážení čtenáři,

Přehled středoškolské matematiky, který se vám dostává do rukou, vychází již v 9. upraveném vydání. V tomto novém vydání je upraven a doplněn text knihy, zdokonalena je i její grafická podoba s použitím dvoubarevného tisku. Kniha obsahově i metodicky navazuje na učebnice matematiky pro gymnázia a střední odborné školy. Na rozdíl od těchto učebnic nesleduje však didaktický systém učiva s cyklickým řazením témat, ale podává ucelený přehled jednotlivých oborů středoškolské matematiky i jejich vztahů. Při psaní knihy i úpravách jsem vycházel ze svých zkušeností z přípravných kurzů pro vysokou školu, z výuky, z přijímacích i dalších zkoušek na VŠSE a ZČU v Plzni a též z poznatků získaných v matematické olympiádě ve funkci předsedy KV MO.

Pro zdůraznění základního učiva a zvýraznění přehlednosti je kniha rozdělena do těchto deseti oddílů:
1. Základní poznatky z logiky a teorie množin. 2. Číselné obory. 3. Základní poznatky z algebry. 4. Funkce. 5. Rovnice a nerovnice. 6. Posloupnosti a řady. 7. Kombinatorika, počet pravděpodobnosti, statistika. 8. Matematická analýza. 9. Geometrie (planimetrie a stereometrie). 10. Analytická geometrie.

Studium knihy lze doporučit jak studentům maturitních ročníků středních škol, tak i studentům prvních semestrů vysokých škol, zejména matematicko-fyzikálního a technického zaměření. Optimální ovšem bude, když se student naučí s knihou pracovat již v průběhu svého středoškolského studia, nejlépe od 1. ročníku. Kniha může být užitečná i tomu, kdo učivo středoškolské matematiky v podstatě zná a chce se podívat třeba jen na některé úseky, které buď pozapomněl, nebo které se v době, kdy studoval, na střední škole neprobíraly. Takový čtenář najde při čtení kapitoly, která ho zajímá, i potřebné odkazy na to, co pro studium zvoleného tématu potřebuje znát z jiných kapitol. Ještě lepší pomůckou mu však bude rejstřík na konci knihy, podle něhož potřebné pojmy snadno vyhledá. Rejstřík bude samozřejmě užitečný i pro čtenáře, který bude studovat postupně celou knihu, neboť je v povaze matematiky, že spolu souvisí a prolínají se různé její disciplíny. Tradiční dělení na aritmetiku, algebru, matematickou analýzu, geometrii atd. nikterak neznamená, že tyto celky jsou samy v sobě uzavřené. Velmi významným rysem změn ve vyučování matematice v současné době je široké uplatnění moderní výpočetní techniky, kalkulátorů a počítačů. Informatika, počítače a programování se nyní studují na středních školách v samostatných předmětech a jejich náplň přesahuje rámec této knihy. Do ní jsem zařadil především učivo povinné středoškolské matematiky; z nepovinné matematiky (cvičení) pouze některé důležité poznatky, které na ně bezprostředně navazují. Mou snahou je, aby Přehled byl vhodným předstupněm dalšího studia matematické literatury v průběhu středoškolského studia a na vysoké škole.

Při práci s knihou je vhodné, aby měl čtenář k dispozici kalkulátor s funkcemi a Matematické, fyzikální a chemické tabulky a vzorce pro střední školy.

K terminologii a označování použitým v knize je nutné uvést, že vycházím z posledního vydání Názvů a značek školské matematiky (Praha, SPN 1988).

Čtenářům Přehledu středoškolské matematiky, kteří mají zájem o rozšíření počtu řešených a neřešených úloh, doporučuji k použití dvoudílnou publikaci Polák, J. *Středoškolská matematika v úlohách I, II*, kterou vydalo nakladatelství Prometheus Praha. Publikace úzce navazuje na tento Přehled a obsahuje velké množství řešených úloh a dalších úloh k samostatné práci s podrobnými výsledky.

Závěrem rád zdůrazňuji, že jsem velkým díkem zavázán oběma původním lektorům knihy, profesoru Emilu Kramerovi a RNDr. Jiřímu Mikulčákovi, CSc., kteří mi velmi pomohli cennými náměty a připomínkami, jež podstatně ovlivnily konečnou podobu knihy. Neméně děkuji také lektorovi jejího 9. vydání RNDr. Jiřímu Dittrichovi za podnětné připomínky. Dále můj dík patří Ing. Miloši Brejchovi za náročnou počítačovou sazbu 9. vydání knihy, jakož i Ing. Michaele Brožové a PaedDr. Přemyslu Šedivému za pěkné počítačové nakreslení obrázků. Velice si též vážím dlouholeté vzorné spolupráce nakladatelství Prometheus v Praze. Za obětavou podporu při veškeré mé práci na knize srdečně děkuji manželce Mileně i oběma dcerám Andree a Ireně.

V Plzni 19. června 2008 — Autor

1 Základní poznatky z logiky a teorie množin

1.1 Matematická logika

Vyjadřovacími prostředky matematiky, s nimiž se setkáváme v učebnicích a dalších matematických textech, jsou především běžný spisovný jazyk, speciální jazyk (terminologie a symbolika) logiky a matematiky, grafy, diagramy, schémata a tabulky.

Symboly, konstanty a proměnné

Velmi významné je pro matematiku užití **symbolů (znaků)**, jež umožňuje stručné vyjadřování matematických poznatků ve formě symbolických zápisů, vzorců apod. Tak např. uvažovaným objektům (prvkům množin) se přiřazuje kromě **názvu (jména) objektu** také **symbol objektu**, který ho zastupuje ve stručném vyjádření (v symbolických zápisech). Symbol objektu může být dvojího druhu:

a) **Konstanta** je symbol, který označuje určitý (jediný) objekt z dané množiny objektů. Např. 4 (označuje číslo čtyři), π (označuje Ludolfovo číslo).

b) **Proměnná** je symbol, který označuje kterýkoli objekt z dané množiny objektů. Zpravidla je to písmeno x, y apod.

Množina konstant, jež zastupuje proměnná, se nazývá **obor proměnné**. Prvky oboru proměnné se nazývají **hodnoty proměnné**. Nahrazení proměnné konstantou z oboru proměnné v nějakém výraze se říká **dosazení konstanty za proměnnou do daného výrazu**.

Výroky a jejich pravdivostní hodnoty

Základním pojmem logiky užívaným v matematice je pojem výrok.

Výrokem nazýváme jazykový výraz (sdělení), u něhož má smysl otázka, zda je **pravdivý**, anebo **nepravdivý**, přičemž může nastat jen jedna z těchto možností.

Gramaticky má výrok vždy formu oznamovací věty vyjádřené buď slovně, nebo symbolicky (pomocí matematických, logických, event. dalších symbolů). Je-li **výrok pravdivý**, říká se také, že **výrok platí**, je-li **výrok nepravdivý**, říká se také, že **výrok neplatí**.

Mezi výroky se zařazují i taková sdělení, o jejichž pravdivosti, resp. nepravdivosti nemůžeme v současnosti rozhodnout, ale principiálně právě jedna z těchto možností musí nastat. Jde zejména o výroky, jejichž pravdivost, resp. nepravdivost je časově nebo místně podmíněna, o výroky vztahující se k budoucnosti, ale především o **hypotézy (domněnky)** vyslovované v různých vědních oborech.

Příklady výroků

a) *Pravdivé výroky*: Bedřich Smetana je autorem hudby k opeře Prodaná nevěsta. Číslo 10 je sudé.

b) *Nepravdivé výroky*: Král Karel IV. nebyl korunován císařem. Každé prvočíslo je liché.

c) *Výroky s časově nebo místně podmíněnou pravdivostí*: Prší. Jsme ve škole. Vyšetřujeme vlastnosti daných posloupností.

d) *Výroky vztahující se k budoucnosti*: Zítra bude pršet. Půjdeme do kina. Daným bodem Q sestrojíme přímku q kolmou k dané přímce p.

e) *Hypotézy*: Některé druhy rakoviny jsou virového původu. Každé sudé číslo větší než dvě lze rozložit na součet dvou prvočísel.

Příklady jazykových výrazů, jež nejsou výroky
Názvy, např. středoškolská matematika. Výrazy typu: $2 + 3$. Rozkazovací a tázací věty. Výrazy obsahující proměnné, např.: Číslo x je sudé.

K označení výroků se obvykle používají malá písmena p, q nebo a, b aj. (V literatuře se lze však setkat též s označením velkými písmeny.)

Výrokům se přiřazují **pravdivostní hodnoty výroků** takto: Je-li výrok pravdivý, přiřazuje se mu **pravdivostní hodnota pravda** označovaná symbolem (číslicí) 1; v literatuře se lze setkat též s jejím označením P. Je-li výrok nepravdivý, přiřazuje se mu **pravdivostní hodnota nepravda** označovaná symbolem (číslicí) 0; v literatuře se lze setkat též s jejím označením N. O daném výroku se pak stručně říká, že **má pravdivostní hodnotu 1, resp. 0**.

Poznámka. Je třeba si uvědomit, že symboly 1 a 0 neznamenají číselné hodnoty výroků, ale pouhá stručná označení jejich pravdivosti a nepravdivosti.

Tabulky, v jejichž prvním řádku jsou symboly výroků p, q, ... a v dalších řádcích jsou všechny možnosti jejich pravdivostních hodnot, se nazývají **tabulky pravdivostních hodnot výroků** (nebo stručněji **pravdivostní tabulky výroků**).

Příklady tabulek pravdivostních hodnot výroků (pro libovolný výrok p, libovolnou dvojici výroků p, q a libovolnou trojici výroků p, q, r) jsou v tabulce 1.1.

Základní typy tabulek pravdivostních hodnot výroků Tab. 1.1

a)

p
1
0

b)

p	q
1	1
1	0
0	1
0	0

c)

p	q	r
1	1	1
1	1	0
1	0	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0
0	0	1
0	0	0

Logické spojky, složené výroky, logické operace

Logické spojky jsou jazykové částice (spojky), jimiž se v logice a v matematice vytvářejí z daných výroků tzv. **složené výroky**. Příslušné operace se nazývají **logické operace**.

Na rozdíl od větných spojek užívaných v běžném jazyce, logické spojky mají stanoven jazykový význam jednoznačně. **Nejdůležitější logické spojky** jsou uvedeny v tabulce 1.2. V matematice se zpravidla označují symboly $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\veebar$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$. (V logice se však lze setkat i s jejich jinými označeními.)

Významné logické spojky Tab. 1.2

Logická spojka (symbol)	Čtení (jazykový význam)	Ekvivalentní čtení (jazykové ekvivalenty)	Čtení cizího (latinského) původu
$\neg$	*není pravda, že...*	*neplatí*, *ne-* (předpona) *není* (záměna za je)	*non*
$\wedge$	*a* [ve významu slučovacím]	*a zároveň* (pro zdůraznění slučovacího významu)	*et*
$\vee$	*nebo* [ve významu nevylučovacím, tj. ve smyslu alespoň jeden]	*popřípadě* (zkratka popř.) *eventuálně* (zkratka event.)	*vel*
$\veebar$	*buď..., nebo* (*anebo*) [ve významu vylučovacím, tj. ve smyslu právě jeden]	*jen..., nebo jen...*	*aut*
$\Rightarrow$	*jestliže..., pak* (*potom*)...	*když..., pak...* *je-li..., pak...*	*implikuje*
$\Leftrightarrow$	*právě když...*	*tehdy a jen tehdy, když...* *když a jen když...* *právě tehdy, když...*	*je ekvivalentní s*

Základní typy složených výroků vytvářené pomocí logických spojek z tabulky 1.2 viz v tabulce 1.3.

Poznámka. Z hlediska logiky lze vytvářet složené výroky ze zcela libovolných výroků, tj. nejen z výroků, které spolu po věcné (obsahové) stránce souvisejí. V běžném životě se však s takovými výroky zpravidla nesetkáváme a také v matematice i dalších vědních oborech se ve složené výroky spojují výroky věcně (obsahově) spolu související.

K přesnému (jednoznačnému) pojetí logických spojek uvedených v tabulce 1.2 a příslušných složených výroků základních typů podle tabulky 1.3 jsou v logice stanoveny **definiční podmínky pro pravdivost složených výroků základních typů**. Jejich slovní vyjádření je obsaženo v tabulce 1.4; příslušné snadněji zapamatovatelné symbolické vyjádření ve tvaru **tabulky pravdivostních hodnot složených výroků základních typů** je v tabulce 1.5. Pro určité (konstantní) výroky p, q a příslušné složené výroky jsou odpovídající pravdivostní hodnoty vždy v jednom řádku tabulky 1.5.

Složené výroky základních typů Tab. 1.3

Název složeného výroku	Jeho symbolické označení	Čtení (slovní vyjádření) [Další viz tab. 1.2.]
Negace výroku p	$\neg p$	*není pravda, že p*
Konjunkce výroků p, q	$p \wedge q$	*p a q*
Disjunkce výroků p, q	$p \vee q$	*p nebo q*
Úplná (ostrá) disjunkce výroků p, q	$p \veebar q$	*buď p, anebo q*
Implikace výroků p, q (v tomto pořadí, tj. **implikace výroku** q **výrokem** p)	$p \Rightarrow q$	*jestliže p, pak q*
Ekvivalence výroků p, q	$p \Leftrightarrow q$	*p, právě když q*

Poznámka. V implikaci $p \Rightarrow q$ se výrok p nazývá **předpoklad implikace** a výrok q se nazývá **závěr (tvrzení) implikace**. Kromě slovních vyjádření implikace $p \Rightarrow q$ podle tabulky 1.2 a tabulky 1.3 se též užívá často čtení: **Z** p **plyne (vyplývá)** q, anebo: q **plyne (vyplývá) z** p. Používání těchto slovních vyjádření implikace $p \Rightarrow q$ je však vhodné jen tehdy, když mezi výroky p, q existuje věcná (obsahová) souvislost.

Definiční podmínky pravdivosti složených výroků základních typů Tab. 1.4

Složený výrok a jeho definiční podmínky pravdivosti	
Negace $\neg p$	*je pravdivý výrok*, právě když výrok p je nepravdivý
Konjunkce $p \wedge q$	*je pravdivý výrok*, právě když **oba** výroky p, q jsou pravdivé
Disjunkce $p \vee q$	*je pravdivý výrok*, právě když alespoň jeden z výroků p, q je pravdivý
Úplná disjunkce $p \veebar q$	*je pravdivý výrok*, právě když jeden z výroků p, q je pravdivý a druhý nepravdivý
Implikace $p \Rightarrow q$	*je pravdivý výrok*, právě když buď oba výroky p, q jsou pravdivé, anebo výrok p je nepravdivý a výrok q je jakýkoliv (pravdivý, anebo nepravdivý)
Ekvivalence $p \Leftrightarrow q$	*je pravdivý výrok*, právě když výroky p, q jsou oba pravdivé, anebo oba nepravdivé

Poznámka. *Implikace* $p \Rightarrow q$ *je tedy nepravdivá* tehdy a jen tehdy, když výrok p je **pravdivý a** výrok q je nepravdivý.

Tabulka pravdivostních hodnot složených výroků základních typů Tab. 1.5

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \veebar q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1	0
0	0	1	0	0	0	1	1

Příklady složených výroků a jejich pravdivostní hodnoty

Z daných pravdivých výroků p: Číslo 12 je dělitelné čtyřmi, q: Číslo 12 je sudé, vytvořte složené výroky $\neg p$, $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \veebar q$, $p \Rightarrow q$, $p \Leftrightarrow q$ a určete jejich pravdivostní hodnoty.

Řešení

Užitím poznatků z tabulek 1.3 až 1.5 dostáváme:

$\neg p$: Číslo 12 není dělitelné čtyřmi (nepravdivý výrok).
$p \wedge q$: Číslo 12 je dělitelné čtyřmi a je sudé (pravdivý výrok).
$p \vee q$: Číslo 12 je dělitelné čtyřmi nebo je sudé (pravdivý výrok).
$p \veebar q$: Číslo 12 je buď dělitelné čtyřmi, anebo je sudé (nepravdivý výrok).
$p \Rightarrow q$: Jestliže je číslo 12 dělitelné čtyřmi, pak je sudé (pravdivý výrok).
$p \Leftrightarrow q$: Číslo 12 je dělitelné čtyřmi, právě když je sudé (pravdivý výrok).

Poznámka. Definiční podmínky pravdivosti složených výroků základních typů (uvedené v tabulkách 1.4 a 1.5) jsou z velké části zcela přirozené a dobře pochopitelné, neboť odpovídají významu, ve kterém jsou používány v běžném jazyce. Jisté problémy však bývají s pochopením vhodnosti a účelnosti definičních podmínek pro pravdivostní hodnoty implikace. K jejich objasnění proto uvedeme dva typové motivační příklady (jeden z běžného života a druhý z matematiky).

Příklady motivující (objasňující) vhodnost volby definičních podmínek pro pravdivostní hodnoty implikace výroků

a) Příkladem z běžného života je příslib vedoucího zaměstnanci ve tvaru implikace: „Jestliže zvýšíte intenzitu práce, pak dostanete prémie." Mohou nastat 4 případy:
   1. Zaměstnanec zvýší intenzitu práce, vedoucí mu přidělí prémie. Implikace je pravdivá (vedoucí splní slib).
   2. Zaměstnanec zvýší intenzitu práce, vedoucí mu nedá prémie. Implikace je nepravdivá (vedoucí nesplní příslib).
   3. Zaměstnanec nezvýší intenzitu práce, vedoucí mu přesto dá prémie (vezme v úvahu jiné zásluhy zaměstnance). Implikace je pravdivá (není v rozporu se slibem vedoucího).
   4. Zaměstnanec nezvýší intenzitu práce, vedoucí mu neudělí prémie. Implikace je pravdivá (vedoucí příslib neporušil).

b) Uvažujme příklad matematické věty ve tvaru implikace (viz závěrečnou část této kapitoly o logické výstavbě matematiky): „Je-li přirozené číslo n dělitelné čtyřmi, pak je sudé." Tato věta platí *pro každé* přirozené číslo n, a tedy např. pro $n = 12, 14, 15$ jsou pravdivé tyto tři implikace (odpovídající 1., 3. a 4. řádku tabulky 1.5):
   Je-li číslo 12 dělitelné čtyřmi (pravdivý výrok), pak číslo 12 je sudé (pravdivý výrok).
   Je-li číslo 14 dělitelné čtyřmi (nepravdivý výrok), pak číslo 14 je sudé (pravdivý výrok).
   Je-li číslo 15 dělitelné čtyřmi (nepravdivý výrok), pak číslo 15 je sudé (nepravdivý výrok).
   Situace odpovídající 2. řádku tabulky 1.5 není možná (číslo n dělitelné čtyřmi, ale liché neexistuje).

Symboly p, q apod. mohou představovat nejen určité (konstantní) výroky, ale obecně též **výrokové proměnné** zastupující výroky. Výrazy vytvořené z konečného počtu výrokových proměnných, logických spojek a popř. závorek se nazývají **výrokové formule**. Vyjadřují sled logických operací.

Pro zápisy výrokových formulí platí tato *úmluva*: Logické operace v závorkách mají přednost před logickými operacemi vně závorek. Pokud přednost logické operace není vyznačena závorkou, pak z logických spojek $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ v uvedeném pořadí má přednost každá spojka předcházející před všemi následujícími.

Příklady výrokových formulí (s výrokovými proměnnými p, q, r)
p, q, r; $\neg p$, $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \veebar q$, $p \Rightarrow q$, $p \Leftrightarrow q$ (přičemž *pro výrokové formule těchto základních typů se užívají obdobné názvy jako pro příslušné složené výroky*, viz tabulka 1.5); $p \vee \neg q$, $(p \vee q) \wedge r$, $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$.

Pravdivostním ohodnocením výrokové formule se rozumí zjištění jejích pravdivostních hodnot v závislosti na zvolených pravdivostních hodnotách výrokových proměnných. Obvykle se provádí užitím **tabulky pravdivostních hodnot** (krátce někdy zvané **pravdivostní tabulka**) dané výrokové formule.

Jejím významným *základním případem* je **tabulka pravdivostních hodnot výrokových formulí základních typů složených výroků** (tabulka 1.5), z níž se zpravidla vychází při sestavování pravdivostních tabulek pro složitější výrokové formule.

Podle pravdivostního ohodnocení výrokových formulí je lze rozdělit na *výrokové formule tří typů*:

1. **Někdy pravdivé výrokové formule**, tj. takové výrokové formule, jež pro některé pravdivostní hodnoty výrokových proměnných nabývají pravdivostní hodnoty 1 a pro některé pravdivostní hodnoty 0.

Příklady
Výrokové formule základních typů $\neg p$, $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \veebar q$, $p \Rightarrow q$, $p \Leftrightarrow q$ (viz tabulka 1.4), $q \Rightarrow p$, $\neg q \Rightarrow \neg p$, $\neg q \vee q$.

2. **Tautologicky pravdivé (vždy pravdivé) výrokové formule** (krátce **tautologie**)

Tautologie jsou takové výrokové formule, které pro libovolné pravdivostní hodnoty výrokových proměnných nabývají pravdivostní hodnoty 1. Tyto výrokové formule mají v logice zásadní význam – vyjadřují tzv. *zákony výrokové logiky*.

Příklady
Tautologie $\neg(p \wedge \neg p)$ vyjadřuje tzv. *zákon sporu*, tautologie $p \vee \neg p$ vyjadřuje tzv. *zákon vyloučeného třetího* (*vyloučené třetí možnosti*), důsledkem obou je tautogie $p \veebar \neg p$. Také výrokové formule $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$, $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$, $(p \veebar q) \Leftrightarrow (q \veebar p)$ jsou zřejmě tautologie. Zvláště významné tautologie budou uvedeny v tabulkách 1.6 a 1.8.

3. **Kontradiktoricky nepravdivé (vždy nepravdivé) výrokové formule** (**krátce kontradikce**), tj. takové výrokové formule, které pro libovolné pravdivostní hodnoty výrokových proměnných nabývají pravdivostní hodnoty 0.

Příklady
$p \wedge \neg p$, $(p \Rightarrow q) \wedge (p \wedge \neg q)$, $(p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \wedge q)$.

Mnoho důležitých a často užívaných tautologií má tvar $V_1 \Leftrightarrow V_2$, kde V_1, V_2 jsou výrokové formule s týmiž výrokovými proměnnými.

Každé dvě výrokové formule V_1, V_2 týchž výrokových proměnných takové, že mají stejné pravdivostní ohodnocení, a tedy jejich ekvivalence je tautologií, se nazývají **logicky ekvivalentní výrokové formule**.

Příklady logicky ekvivalentních výrokových formulí
Prověřte, které z dvojic výrokových formulí $p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow p$, $\neg q \Rightarrow \neg p$, $\neg p \vee q$ jsou logicky ekvivalentní výrokové formule.

Řešení
Užitím tabulky pravdivostních hodnot složených výroků základních typů (tabulka 1.5) dostáváme pro dané výrokové formule pravdivostní ohodnocení:

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \Rightarrow \neg p$	$\neg p \vee q$
1	1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0	0
0	1	1	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1

Dvojice výrokových formulí $p \Rightarrow q$ a $q \Rightarrow p$ nemají stejná pravdivostní ohodnocení, a tedy *nejsou logicky ekvivalentní*. Dvojice výrokových formulí $p \Rightarrow q$ a $\neg q \Rightarrow \neg p$, $p \Rightarrow q$ a $\neg p \vee q$ mají stejná pravdivostní ohodnocení, a tedy tyto dvojice výrokových formulí *jsou logicky ekvivalentní*. Jejich ekvivalence mají pravdivostní hodnoty všechny rovny 1, tj. jsou tautologie (uvedené v tabulce 1.6).

Tautologie vyjadřující logickou ekvivalenci výrokových formulí Tab. 1.6
$p \Rightarrow q$, $\neg q \Rightarrow \neg p$, $\neg p \vee q$

Logicky ekvivalentní výrokové formule		Tautologie
$p \Rightarrow q$	$\neg q \Rightarrow \neg p$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$
	$\neg p \vee q$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$

Každé dva složené výroky v_1, v_2, jež se získají dosazením konstantních výroků za výrokové proměnné do logicky ekvivalentních výrokových formulí V_1, V_2, se nazývají **logicky ekvivalentní složené výroky**. Oba takové výroky v_1, v_2 mají sice různý tvar, avšak věcně vyjadřují naprosto totéž.

Příklady logicky ekvivalentních složených výroků
Z předchozích příkladů víme, že jsou-li p, q výrokové proměnné, pak dvojice výrokových formulí $p \Rightarrow q$, $\neg q \Rightarrow \neg p$ a $p \Rightarrow q$, $\neg p \vee q$ představují logicky ekvivalentní výrokové formule. Odtud podle uvedené definice plyne, že dosadíme-li do nich za výrokové proměnné konstantní výroky, dostaneme logicky ekvivalentní složené výroky. Např. k pravdivé implikaci $p \Rightarrow q$: Jestliže v městě prší, pak ulice města jsou mokré, je logicky ekvivalentní implikace $\neg q \Rightarrow \neg p$: Jestliže ulice města nejsou mokré, pak v městě neprší a také disjunkce $\neg p \vee q$: V městě neprší nebo ulice města jsou mokré.

Pro výrokové formule $p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow p$, $\neg q \Rightarrow \neg p$, $\neg p \vee q$ s výrokovými proměnnými p, q a pro příslušné složené výroky s konstantními výroky p, q se zavádějí názvy, jež jsou uvedeny v tabulce 1.7.

Názvy a vlastnosti výrokových formulí (spec. složených výroků) Tab. 1.7

$p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow p$, $\neg q \Rightarrow \neg p$, $\neg p \vee q$

Výroková formule, resp. složený výrok	Název	Vlastnosti
$p \Rightarrow q$	**Implikace** výroků p, q	Viz tabulka 1.2 a 1.5.
$q \Rightarrow p$	**Obrácená implikace** k implikaci $p \Rightarrow q$	*Implikace $p \Rightarrow q$ a obrácená implikace $q \Rightarrow p$ nejsou logicky ekvivalentní.*
$\neg q \Rightarrow \neg p$	**Obměněná implikace** k implikaci $p \Rightarrow q$ (**obměna implikace** $p \Rightarrow q$)	*Implikace $p \Rightarrow q$ a obměněná implikace $\neg q \Rightarrow \neg p$ jsou logicky ekvivalentní.*
$\neg p \vee q$	Vyjádření (náhrada) implikace $p \Rightarrow q$ disjunkcí	*Implikace $p \Rightarrow q$ a disjunkce $\neg p \vee q$ jsou logicky ekvivalentní.*

Negování jednoduchých výroků a složených výroků

Negováním výroku p se rozumí vytvoření jeho negace $\neg p$ (viz tabulka 1.3 a 1.2). Podle definičních podmínek pro pravdivost negace výroku p (viz tabulky 1.4 a 1.5) se pravdivosti výroků p a $\neg p$ navzájem vylučují.

Platí proto následující *základní pravidlo negování výroků:*

Jestliže platnost výroku p vyjadřuje, že nastane několik (jeden nebo více) z možných případů, pak jeho negace $\neg p$ musí vyjadřovat, že nastanou všechny ostatní možné případy a žádné jiné.

Každý výrok p lze negovat užitím slovního spojení „není pravda“, že p (tabulka 1.3). Zpravidla se však užívají gramaticky vhodnější tvary „neplatí p“, resp. „ne p“ apod. (tabulka 1.2). Prakticky se ovšem tento základní postup negování výroků používá pouze při *negování jednoduchých (nesložených) výroků.*

Příklady negování jednoduchých výroků

Pro výrok „Dané číslo $a \in \mathsf{R}$ je záporné“, negací není výrok: „Dané číslo $a \in \mathsf{R}$ je kladné“, nýbrž výrok: „Dané číslo $a \in \mathsf{R}$ je nezáporné“ (protože pouze ten zahrnuje všechny ostatní možnosti). Pro výrok „Daný bod A leží na dané přímce m“, negaci představuje výrok: „Daný bod A neleží na dané přímce m“.

Při *negování složených výroků* kromě uvedeného základního pravidla se používají logicky ekvivalentní výrokové formule, resp. příslušné tautologie uvedené v tabulce 1.8. Jejich odvození lze snadno provést užitím tabulky pravdivostních hodnot pro složené výroky základních typů (tabulka 1.5).

Příklady negování složených výroků

Pro dané složené výroky utvoříme jejich negace podle tabulky 1.8:

a) $p \wedge q$: „Stačím se připravit na vyučování a také jít ven“, $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$: „Nestačím se připravit na vyučování nebo nestačím jít ven“.

b) $p \vee q$: „Bod P leží na dané přímce a nebo na dané přímce b“. $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$: „Bod P neleží na dané přímce a ani na dané přímce b“.

c) $p \Rightarrow q$: „Jestliže bod P leží na dané přímce a, pak leží na dané přímce b“. $\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q)$: „Bod P leží na dané přímce a a neleží na dané přímce b“.

Výrokové formule pro negování složených výroků základních typů Tab. 1.8

Výroková formule	Logicky ekvivalentní výroková formule	Příslušná tautologie
$\neg(\neg p)$	p	$\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$
$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \vee \neg q$	$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$
$\neg(p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
$\neg(p \veebar q)$	$p \Leftrightarrow q$	$\neg(p \veebar q) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)$
$\neg(p \Rightarrow q)$	$p \wedge \neg q$	$\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q)$
$\neg(p \Leftrightarrow q)$	$p \veebar q$	$\neg(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \veebar q)$

Poznámka. Tautologie uvedené v tabulce 1.8 vyjadřují významné *zákony výrokové logiky.* **Např.** tautologie v 1. řádku vyjadřuje tzv. *zákon dvojité negace* a tautologie ve 2. a 3. řádku vyjadřují tzv. *de Morganovy zákony výrokové logiky.* Říká se jim po řadě *1. a 2. de Morganova formule výrokové logiky.*

Výrokové formy

Ze základních pojmů matematické logiky mají v matematice velký význam kromě výroků také tzv. **výrokové formy** (nazývané též **predikáty**).

Výroková forma je jazykový výraz, který obsahuje jednu nebo více objektových (resp. názvových) proměnných x, y, ... a který po dosazení konstant, tj. určitých objektů (resp. jejich názvů) za proměnné, se stává výrokem (pravdivým, nebo nepravdivým).

Výroková forma o jedné proměnné x se značí $v(x)$, $p(x)$ apod. Vyjadřují se jí *vlastnosti* prvků x dané množiny M. Výroková forma o dvou proměnných x, y se značí $v(x, y)$, $p(x, y)$ apod., ..., obecně výroková forma o n proměnných x_1, x_2, ..., x_n se značí $v(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ apod. Výrokové formy o více proměnných vyjadřují *vztahy* mezi prvky daných množin.

Při zadávání výrokové formy jedné nebo více proměnných je nutnou součástí **stanovení oborů proměnných**, tj. množin, ze kterých lze dosazovat do výrokové formy za proměnné konstanty (hodnoty proměnných). Speciálně v případě výrokové formy $v(x)$ jedné proměnné x se množina všech přípustných hodnot proměnné x nazývá též **definiční obor proměnné** x a značí se D (popř. M). Množina všech takových hodnot proměnné x, jejichž dosazením do výrokové formy $v(x)$ dostáváme pravdivé výroky, se nazývá **obor pravdivosti výrokové formy** $v(x)$ a značí se P. Tyto dva pojmy lze definovat i pro výrokové formy o dvou a více proměnných (viz tabulka 1.3).

Poznámka. Nezaměňujte názvy výroková forma a výroková formule! Jsou to názvy dvou zcela odlišných pojmů. Ve výrokové formě jsou obsaženy objektové (názvové) proměnné, kdežto ve výrokové formuli vystupují výrokové proměnné.

Příklady výrokových forem o jedné proměnné

a) $v(x)$: Osoba x je současný český spisovatel (obor proměnné x je množina všech žijících Čechů).

b) $v(y)$: Naše spolužačka y je blondýna (obor proměnné y je množina všech našich spolužaček).

c) $v(z)$: Živočich z je savec (obor proměnné z je množina všech živočichů).

d) $v(n)$: n je přirozené číslo dělitelné pěti (obor proměnné n je množina všech přirozených čísel N.

e) $v(k)$: k je sudé číslo (obor proměnné k je množina všech celých čísel Z).

f) $v(x)$: x je reálné číslo, pro které platí $x^2 \leqq 1$ (obor proměnné x je množina všech reálných čísel R).

g) $v(X)$: X je bod roviny ϱ, který leží na dané kružnici k (obor proměnné X je rovina ϱ).

Příklady výrokových forem o více proměnných

a) $v(x, y)$: Pan x a dáma y jsou manželé (obory proměnných x, y jsou dané množiny mužů a žen).

b) $v(m, n)$: m, n jsou přirozená čísla, pro která platí $m > n$ (oborem proměnných m, n je množina všech přirozených čísel N.

c) $v(x, y, z)$: x, y, z jsou reálná čísla taková, že $x + y = z$ (oborem proměnných x, y, z je množina všech reálných čísel R).

Obdobně jako se vytvářejí složené výroky, lze také spojovat logickými spojkami výrokové formy s týmiž obory proměnných. Mluvíme o **logických operacích s výrokovými formami**, jejichž výsledkem jsou **složené výrokové formy**. Základní typy složených výrokových forem uvádí tabulka 1.9 analogická k tabulce 1.3 pro složené výroky základních typů (čtení je obdobné jako v tabulce 1.3).

Složené výrokové formy základních typů Tab. 1.9

($p(x)$, $q(x)$ jsou dané výrokové formy s týmž definičním oborem D)

Název složené výrokové formy	Její symbolický zápis
Negace výrokové formy $p(x)$	$\neg p(x)$
Konjunkce výrokových forem $p(x)$, $q(x)$	$p(x) \wedge q(x)$
Disjunkce výrokových forem $p(x)$, $q(x)$	$p(x) \vee q(x)$
Úplná (ostrá) disjunkce výrokových forem $p(x)$, $q(x)$	$p(x) \veebar q(x)$
Implikace výrokových forem $p(x)$, $q(x)$ (v uvedeném pořadí)	$p(x) \Rightarrow q(x)$
Ekvivalence výrokových forem $p(x)$, $q(x)$	$p(x) \Leftrightarrow q(x)$

Kvantifikátory, kvantifikované výroky

V běžném jazyce a zejména v matematice se často vyskytují jazykové výrazy zvané **kvantifikátory**, jimiž se vymezují počty (kvanta) uvažovaných objektů, obvykle prvků daných množin. Nejčastěji užívané kvantifikátory jsou uvedeny v tabulce 1.10.

Kvantifikátory Tab. 1.10

Slovní spojení	Význam (smysl)
každý objekt (*všechny* objekty)	libovolný z objektů [prvků dané množiny]
alespoň *jeden* objekt	jeden nebo více objektů
nejvýše *jeden* objekt	jeden nebo žádný objekt
právě *jeden* objekt	jediný objekt (jeden a jen jeden objekt)
alespoň n objektů ($n \in \mathsf{N}$, $n > 1$)	n nebo více objektů ($n + 1$, $n + 2$, ... objektů)
nejvýše n objektů ($n \in \mathsf{N}$, $n > 1$)	n nebo méně objektů ($n - 1$, ... , 0 objektů)
právě n objektů ($n \in \mathsf{N}$, $n > 1$)	n objektů a ne více ani méně
žádný objekt	0 objektů

Speciálně v logice a v matematice se především uplatňují tzv. **základní kvantifikátory**, jejichž názvy, symbolická označení a jazykový význam jsou uvedeny v tabulce 1.11.

Základní kvantifikátory Tab. 1.11

Název kvantifikátoru	Označení	Čtení (jazykový význam)
Obecný kvantifikátor	$\forall$	*pro každé, pro všechna*
Existenční kvantifikátor	$\exists$	*existuje* (alespoň jedno), *pro alespoň jedno*
Kvantifikátor jednoznačné existence	$\exists!$	*existuje právě jedno, pro právě jedno*

Poznámka. Symbol $\forall$ je obrácené počáteční velké písmeno A z angl. slova all = všechna, každý. Symbol $\exists$ je převrácené počáteční velké písmeno E z angl. slova exists = existuje.

Výroky, ve kterých se vyskytují kvantifikátory, se nazývají **kvantifikované výroky (výroky s kvantifikátory)**.

Příklady kvantifikovaných výroků

a) **Každý** z nás poznává v nouzi přítele.

b) **Žádný** z nás nepřišel pozdě.

c) **Alespoň** jeden z žáků má domácí cvičení správně.

d) **Právě** dva naši spolužáci jsou starší než ostatní.

V matematické logice a v matematice se kvantifikované výroky vytvářejí zpravidla z daných výrokových forem tak, že se pomocí kvantifikátorů provede **kvan-**

tifikace proměnných, tj. vymezení počtu hodnot proměnných (z oborů proměnných), pro něž daná výroková forma platí (tj. jejichž dosazením do ní dostáváme pravdivý výrok).

Poznámka. Existují tedy dva způsoby, jak lze z dané výrokové formy vytvořit výroky:

a) *dosazením konstant (hodnot proměnných)* za všechny proměnné z oboru proměnných do výrokové formy dostaneme tzv. *individuální výroky,*

b) *kvantifikací všech proměnných* ve výrokové formě dostáváme *kvantifikované výroky.*

Užitím základních kvantifikátorů ke kvantifikaci proměnné x dané výrokové formy $v(x)$ dostáváme **základní kvantifikované výroky**, jejichž názvy, slovní a symbolické vyjádření jsou uvedeny v tabulce 1.12.

Základní kvantifikované výroky s jednou kvantifikovanou proměnnou $x \in \mathsf{D}$ (kde D je definiční obor výrokové formy $v(x)$) Tab. 1.12

Název kvantifikovaného výroku	Slovní vyjádření	Symbolický zápis
Obecný výrok	Pro každé $x \in \mathsf{D}$ platí $v(x)$.	$\forall x \in \mathsf{D}$: $v(x)$
Existenční výrok	Existuje (alespoň jedno) $x \in \mathsf{D}$, pro které platí $v(x)$.	$\exists x \in \mathsf{D}$: $v(x)$
Výrok o existenci a unicitě (jednoznačnosti)	Existuje právě jedno $x \in \mathsf{D}$, pro které platí $v(x)$.	$\exists! x \in \mathsf{D}$: $v(x)$

Příklady základních kvantifikovaných výroků s jednou kvantifikovanou proměnnou

a) *Obecný výrok* – Pro každé $x \in \mathsf{R}$ platí $x^2 \geqq 0$ (pravdivý výrok). Jeho symbolický zápis je $\forall x \in \mathsf{R}$: $x^2 \geqq 0$.

b) *Existenční výrok* – Existuje $x \in \mathsf{R}$, pro které platí $x^2 = 2$ (pravdivý výrok). Symbolicky zapsáno $\exists x \in \mathsf{R}$: $x^2 = 2$.

c) *Výrok o existenci a unicitě* – Existuje právě jedno $x \in \mathsf{R}$, pro které platí $x^2 = 2$ (nepravdivý výrok). Symbolicky zapsáno $\exists! x \in \mathsf{R}$: $x^2 = 2$.

Obdobně jako při vytváření základních kvantifikovaných výroků z výrokové formy jedné proměnné x (viz tabulka 1.12) lze postupovat při vytváření základních kvantifikovaných výroků z výrokových forem s více proměnnými užitím kvantifikace těchto proměnných základními kvantifikátory. Přitom typ získaného základního kvantifikovaného výroku závisí na pořadí použitých základních kvantifikátorů: Je-li první kvantifikátor obecný, dostáváme *obecný výrok.* Je-li první kvantifikátor existenční, získáváme *existenční výrok.*

Příklady základních kvantifikovaných výroků se dvěma kvantifikovanými proměnnými

a) *Obecný výrok* – Pro každé $x \in \mathsf{R}$ existuje takové $y \in \mathsf{R}$, že platí $x < y$ (pravdivý výrok). Symbolicky $\forall x \in \mathsf{R}\ \exists y \in \mathsf{R}$: $x < y$.

b) *Existenční výrok* – Existuje takové $y \in \mathsf{R}$, že pro každé $x \in \mathsf{R}$ platí $x < y$ (nepravdivý výrok). Symbolicky $\exists y \in \mathsf{R}\ \forall x \in \mathsf{R}$: $x < y$.

Poznámka. Do kvantifikovaných výroků nelze dosazovat za kvantifikované proměnné jejich hodnoty – říkáme, že *proměnná je vázaná kvantifikátorem.*

Negování kvantifikovaných výroků

I v případě kvantifikovaných výroků bychom mohli vytvářet jejich negace užitím slovního spojení „není pravda, že“, event. pomocí ekvivalentních způsobů podle tabulky 1.2 a 1.3. Prakticky se však negování kvantifikovaných výroků provádí užitím gramaticky vhodnějších formulací, které lze získat na základě následujícího *důsledku základního pravidla negování výroků:*

Jestliže platnost kvantifikovaného výroku p vyjadřuje, že jistý počet objektů má danou vlastnost, pak jeho negace $\neg p$ musí být vyslovena jako takový kvantifikovaný výrok, jehož platnost zahrnuje všechny možné případy, kdy výrok p neplatí.

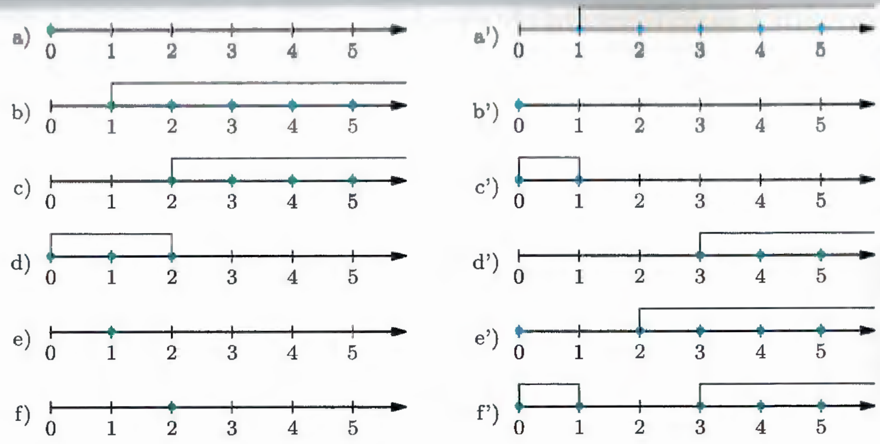
Pro *negování jednoduchých kvantifikovaných výroků* (s kvantifikátory podle tabulky 1.10) tak dostáváme tabulku 1.13.

Negace jednoduchých kvantifikovaných výroků Tab. 1.13
(*Prvky x* se v tabulce rozumějí *prvky dané množiny*)

Kvantifikovaný výrok	Jeho negace
a) *Každý* prvek x *má* danou vlastnost $v(x)$.	a') *Alespoň jeden* prvek x *nemá* danou vlastnost $v(x)$.
b) *Alespoň jeden* prvek x *má* danou vlastnost $v(x)$.	b') *Žádný* prvek x *nemá* danou vlastnost $v(x)$.
c) *Alespoň* n prvků x *má* danou vlastnost $v(x)$.	c') *Nejvýše* $n-1$ prvků x *má* danou vlastnost $v(x)$.
d) *Nejvýše* n prvků x *má* danou vlastnost $v(x)$.	d') *Alespoň* $n+1$ prvků *má* danou vlastnost $v(x)$.
e) *Právě jeden* prvek x *má* danou vlastnost $v(x)$.	e') *Žádný* prvek x *nemá* danou vlastnost $v(x)$ nebo *alespoň dva* prvky x mají vlastnost $v(x)$.
f) *Právě* n prvků x *má* danou vlastnost $v(x)$.	f') *Nejvýše* $n-1$ prvků x má danou vlastnost $v(x)$ nebo *alespoň* $n+1$ prvků x *má* vlastnost $v(x)$.

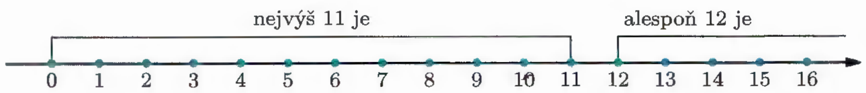
Údaje o počtech prvků daných množin v kvantifikovaných výrocích a jejich negacích můžeme vyjádřit přirozenými čísly nebo nulou a *znázornit geometricky na číselné poloose* $+x$. Pro kvantifikované výroky z tabulky 1.13 a jejich negace je to provedeno v obr. 1.1. Počty prvků vyjádřené kvantifikátory ve výrocích a) až f) a jejich negacích a') až f') jsou zobrazeny na obr. 1.1 a) až f) a a') až f') body vyznačenými barevně. (V obr. 1.1 c) až f) a c') až f') je voleno $n = 2$.)

Poznámka. V případě kvantifikovaného výroku a) je třeba si uvědomit, že tento obecný výrok je ekvivalentní s výrokem: Počet všech prvků x, pro které neplatí $v(x)$, je roven nule.



Obr. 1.1

Příklad negování jednoduchého kvantifikovaného výroku
Pro třídu (množinu) se 32 žáky uvažujeme kvantifikovný výrok: „Dnes přišlo alespoň 12 žáků pozdě“. Jeho negací není výrok: „Dnes nepřišlo alespoň 12 žáků pozdě“, neboť oba tyto výroky mohou být zároveň pravdivé, např. když v důsledku dopravní kalamity přišlo 15 žáků pozdě a 17 žáků nepřišlo pozdě. Negací daného kvantifikovaného výroku je podle tabulky 1.13 výrok: „Dnes přišlo nejvýše 11 žáků pozdě“. Názorné zdůvodnění podává obr. 1.2.



Obr. 1.2

V matematice je zejména důležité *negování kvantifikovaných výroků s kvantifikátory* ∀, ∃. Speciálně pro negování výroků s právě jedním z kvantifikátorů ∀, ∃ podle prvních dvou řádků tabulky 1.13 plyne tabulka 1.14.

Negace výroků s jediným kvantifikátorem ∀, ∃ Tab. 1.14
(V tabulce je $v(x)$ daná výroková forma proměnné x s definičním oborem D)

Kvantifikovaný výrok	Jeho negace
Obecný výrok $\forall x \in \mathsf{D}\colon v(x)$ Pro každé $x \in \mathsf{D}$ platí $v(x)$.	*Existenční výrok* $\exists x \in \mathsf{D}\colon \neg v(x)$. Existuje $x \in \mathsf{D}$, pro které neplatí $v(x)$.
Existenční výrok $\exists x \in \mathsf{D}\colon v(x)$. Existuje $x \in \mathsf{D}$, pro které platí $v(x)$.	*Obecný výrok* $\forall x \in \mathsf{D}\colon \neg v(x)$. Pro žádné $x \in \mathsf{D}$ neplatí $v(x)$.

Negování kvantifikovaných výroků podle tabulky 1.14 lze zobecnit pro libovolný počet kvantifikátorů ∀, ∃. Řídí se následujícími pravidly.

Pravidla negování výroků s kvantifikátory ∀, ∃

a) V negovaném kvantifikovaném výroku zaměníme každý kvantifikátor ∀ kvantifikátorem ∃ a naopak každý kvantifikátor ∃ kvantifikátorem ∀.
b) Výrokovou formu v negovaném kvantifikovaném výroku nahradíme její negací.

Příklady negací výroků s kvantifikátory ∀, ∃
Negujte kvantifikované výroky
a) $\forall x \in \mathsf{R}\colon x^2 + x > 0$, b) $\exists x \in \mathsf{R}\colon x^2 = -2$,
c) $\forall a, b, c \in \mathsf{R},\ a \neq 0,\ \exists x \in \mathsf{R}\colon ax^2 + bx + c = 0$.
Řešení
Podle uvedených pravidel negování výroků s kvantifikátory ∀, ∃ jsou negace daných (vesměs nepravdivých) výroků:
a) $\exists x \in \mathsf{R}\colon x^2 + x \leqq 0$, b) $\forall x \in \mathsf{R}\colon x^2 \neq -2$,
c) $\exists a, b, c \in \mathsf{R},\ a \neq 0,\ \forall x \in \mathsf{R}\colon ax^2 + bx + c \neq 0$.

Negování složených kvantifikovaných výroků se provádí kombinací negování jednoduchých kvantifikovaných výroků podle tabulek 1.13 a 1.14, popř. pravidel negování kvantifikovaných výroků s kvantifikátory ∀ a ∃, a negování složených výroků ...ultím výrokových formulí uvedených v tabulce 1.8.

Příklad negování složeného kvantifikovaného výroku
Máme negovat kvantifikovaný výrok: „Daná rovnice $f(x) = 0$ má alespoň jeden kladný nebo záporný kořen“, tj. v symbolickém zápise: Pro danou rovnici $f(x) = 0$ platí, že $\exists x > 0\colon f(x) = 0 \vee \exists x < 0\colon f(x) = 0$. Negováním pomocí tabulek 1.8 a 1.9 dostáváme výrok: Pro danou rovnici platí, že $\forall x > 0\colon \neg(f(x) = 0) \wedge \forall x < 0\colon \neg(f(x) = 0)$. Negací daného kvantifikovaného výroku je tedy výrok: „Daná rovnice $f(x) = 0$ nemá žádný kladný a žádný záporný kořen“ či stručněji vyjádřeno: „Daná rovnice nemá žádný kladný ani záporný kořen“.

Logická výstavba matematiky (axiomy, definice, věty, důkazy)

Jedním z hlavních rysů soudobé matematiky je **axiomatická logická výstavba matematických teorií** v jednotlivých jejich disciplínách. Jejím základem jsou **axiomy (postuláty)** – výchozí matematické výroky, které se prohlásí za pravdivé bez dokazování. Obsahují **základní (primitivní) pojmy**, které se nedefinují, ale pokládají se za zavedené (úplně charakterizované) právě soustavou axiomů.

Přitom soustava axiomů musí mít tyto vlastnosti: *bezespornost* (ze soustavy axiomů není možné odvodit nějaký výrok a zároveň jeho negaci), *úplnost* (ze soustavy axiomů je možné odvodit pravdivost, nebo nepravdivost libovolného výroku budované teorie, který není axiomem) a *nezávislost* axiomů (nelze odvodit kterýkoli axiom soustavy z axiomů ostatních). Ve školské matematice se však pro metodické zjednodušení upouští od požadavku nezávislosti axiomů a říká se jim pak **základní věty**.

Další matematické pojmy se zavádějí pomocí definic.

… pojmu a vymezuje podstatné (charakteristické) vlastnosti pojmu pomocí dříve definovaných nebo primitivních pojmů.

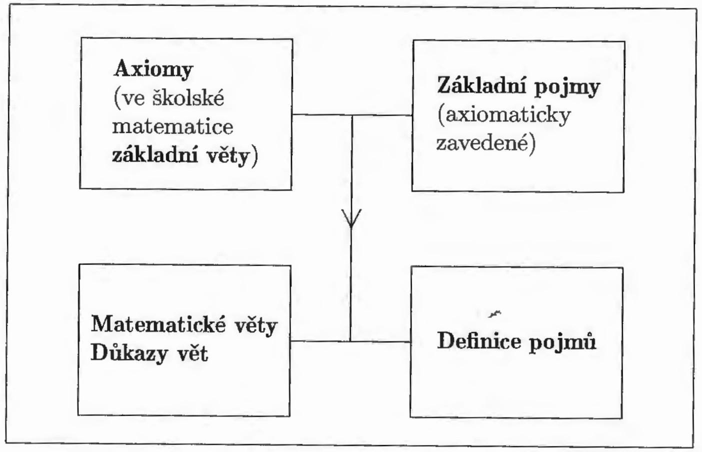
Příklad různých forem definice pojmu

Uvedeme některé formulace definice čtverce: „Rovnoběžník, který má všechny strany shodné a všechny vnitřní úhly pravé, se nazývá čtverec“. „Rovnoběžníku, jehož všechny strany jsou shodné a všechny vnitřní úhly pravé, se říká čtverec.“ „Čtverec je rovnoběžník, jehož všechny strany jsou shodné a všechny vnitřní úhly pravé.“

Své výsledky formuluje matematická teorie v tzv. matematických větách.

Matematická věta (poučka, teorém) je pravdivý matematický výrok, který má význam v matematické teorii nebo její aplikaci a dá se dokázat (logicky odvodit) z axiomů, definic a dříve dokázaných vět. Věty, které obsahují návod k provedení výpočtu nebo konstrukce, se nazývají též **pravidla**. Pro pomocné věty se v matematické literatuře používá název **lemma**.

Schéma logické výstavby matematických disciplín Tab. 1.15



Druhy matematických vět

Většina matematických vět má tvar kvantifikovaného výroku (obecného výroku, popř. existenčního výroku). Jen výjimečně mají matematické věty tvar individuálního výroku. Přesto se právě o těchto větách zmíníme nejdříve, protože jsou formálně jednodušší než věty ve tvaru kvantifikovaného výroku.

Matematické věty ve tvaru individuálního výroku (tzv. **individuální věty**) lze z hlediska jejich stavby rozdělit na *jednoduché výroky* a na *složené výroky* zpravidla tvaru *implikace*, popř. *ekvivalence*.

Příklady individuálních matematických vět

a) *Jednoduché výroky:* Číslo $\sqrt{2}$ je iracionální. Číslo $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ je větší než číslo π. Daný čtyřúhelník $ABCD$ je čtverec. Trojúhelník ABC, jehož strany mají délky $a = 3\,\mathrm{cm}$, $b = 4\,\mathrm{cm}$, $c = 5\,\mathrm{cm}$, je pravoúhlý.

b) *Implikace:* Je-li součet všech číslic daného přirozeného čísla dělitelný třemi, pak dané číslo je dělitelné třemi. Jestliže trojúhelník ABC má strany délek $a = 3\,\mathrm{cm}$, $b = 4\,\mathrm{cm}$, $c = 5\,\mathrm{cm}$, pak je pravoúhlý.

c) *Ekvivalence:* Dané přirozené číslo je dělitelné šesti, právě když je dělitelné dvěma a třemi. Daný čtyřúhelník $ABCD$ je rovnoběžník, právě když platí $AB \parallel DC$ a $AD \parallel BC$.

Matematické věty ve tvaru kvantifikovaného výroku jsou v matematice nejvýznamnější. Jejich základní typy jsou uvedeny v tabulce 1.16.

Základní typy vět ve tvaru kvantifikovaného výroku Tab. 1.16

$v(x)$, $p(x)$, $q(x)$ jsou zde výrokové formy proměnné x s definičním oborem D)

Druh věty (její název)	Slovní vyjádření	Symbolický zápis
Věta ve tvaru obecného výroku (někdy zvaná **obecná věta**)	Pro každé (všechna) $x \in$ D platí $v(x)$.	$\forall x \in$ D: $v(x)$
Speciální případy:		
Věta tvaru implikace (s **výrokovou** formou ve tvaru **implikace**)	Pro každé (všechna) $x \in$ D platí: Jestliže platí $p(x)$, pak platí $q(x)$.	$\forall x \in$ D: $p(x) \Rightarrow q(x)$
Věta tvaru ekvivalence (s **výrokovou** formou ve tvaru **ekvivalence**)	Pro každé (všechna) $x \in$ D platí $p(x)$, právě když platí $q(x)$.	$\forall x \in$ D: $p(x) \Leftrightarrow q(x)$
Věta ve tvaru existenčního výroku (tzv. **existenční věta**)	Existuje $x \in$ D, pro které platí $v(x)$.	$\exists x \in$ D: $v(x)$
Věta ve tvaru výroku o jednoznačné existenci (tzv. **věta o existenci a unicitě**)	Existuje právě jedno $x \in$ D, pro které platí $v(x)$.	$\exists! x \in$ D: $v(x)$

Poznámka. V tabulce 1.16 lze obecněji uvažovat namísto výrokových forem $v(x)$, $p(x)$, $q(x)$ **výrokové** formy $v(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kvantifikovaných některými z kvantifikátorů $\forall$, $\exists$, $\exists!$.

Příklady matematických vět ve tvaru kvantifikovaných výroků

a) *Věty ve tvaru obecného výroku*

Pro každé reálné číslo x platí $x^2 \geqq 0$. (Symbolicky $\forall x \in$ R: $x^2 \geqq 0$.)

Pro každé reálné číslo x platí $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. (Symbolicky $\forall x \in$ R: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.)

Pro všechna reálná čísla a, b platí $|ab| = |a| \cdot |b|$. (Symbolicky $\forall a, b \in$ R: $|ab| = |a| \cdot |b|$.)

V každém pravoúhlém $\triangle ABC$ o odvěsnách délek a, b a přeponě délky c platí $a^2 + b^2 = c^2$. (*Pythagorova věta.*)

Speciálně: *Věty ve tvaru implikace*

Pro každé přirozené číslo n platí: Je-li n sudé číslo, pak také n^2 je sudé číslo. (Symbolicky $\forall n \in$ N: n je sudé $\Rightarrow n^2$ je sudé.)

Pro každý $\triangle ABC$ platí: Je-li $\triangle ABC$ pravoúhlý s odvěsnami délek a, b a přeponou délky c, pak platí $a^2 + b^2 = c^2$. (*Pythagorova věta ve tvaru implikace.*)
Speciálně: *Věty ve tvaru ekvivalence*
Pro každá dvě komplexní čísla a, b platí: Součin $ab = 0$, právě když $a = 0$ nebo $b = 0$. (Symbolicky $\forall a, b \in \mathsf{C}$: $ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$.)
Pro každý $\triangle ABC$ platí: $\triangle ABC$ je pravoúhlý s pravým úhlem u vrcholu C, právě když pro délky jeho stran a, b, c platí $a^2 + b^2 = c^2$. (*Pythagorova věta a obrácená věta k Pythagorově větě.*)

b) *Existenční věty*
Existuje (alespoň jedno) komplexní číslo z, pro které platí $z^2 + 1 = 0$. (Symbolicky $\exists z \in \mathsf{C}$: $z^2 + 1 = 0$.)
Existuje právě jedno prvočíslo p, pro které je $p^2 + 2$ též prvočíslem. (Symbolicky $\exists! p \in \mathsf{P}$: $p^2 + 2 \in \mathsf{P}$, kde P je množina všech prvočísel, tj. přirozených čísel $p > 1$ dělitelných právě jen 1 a p.)

Předpoklad a tvrzení věty (postačující podmínka a nutná podmínka), obměna věty a obrácená věta

Má-li matematická věta tvar implikace, tj. individuálního výroku typu $p \Rightarrow q$ nebo častěji obecného výroku ve tvaru $\forall x \in \mathsf{D}$: $p(x) \Rightarrow q(x)$, potom výrok p, resp. výroková forma $p(x)$ se nazývá **předpoklad věty** a výrok q, resp. výroková forma $q(x)$ se nazývá **závěr** nebo **tvrzení věty**.

Poznámka. U složitějších matematických vět (např. v matematické analýze), kde předpoklad věty se skládá z několika částí a obdobně závěr (tvrzení) věty, je obvyklé formulovat větu takto: *Nechť* platí předpoklady… *Pak (potom)* platí závěr (tvrzení)…

Z definičních podmínek pro pravdivost implikace $p \Rightarrow q$ (viz tabulky 1.4 a 1.5) plyne: Pravdivost předpokladu p je **postačující podmínkou** pro pravdivost závěru (tvrzení) q pravdivé implikace $p \Rightarrow q$ a pravdivost závěru (tvrzení) q je **nutnou podmínkou** pro pravdivost předpokladu p pravdivé implikace $p \Rightarrow q$. (Přitom se mezi oběma podmínkami předpokládá *věcná (obsahová) souvislost.*)

Obdobné názvy se užívají také pro předpoklad $p(x)$ a závěr (tvrzení) $q(x)$ matematické věty ve tvaru obecného výroku $\forall x \in \mathsf{D}$: $p(x) \Rightarrow q(x)$ (která představuje pro každé $x \in \mathsf{D}$ pravdivou implikaci).

Pro matematickou větu ve tvaru implikace $p \Rightarrow q$, resp. $\forall x \in \mathsf{D}$: $p(x) \Rightarrow q(x)$ dále *definujeme*:

a) **Obměněnou větou (obměnou věty)** nazýváme matematickou větu ve tvaru obměněné implikace $\neg q \Rightarrow \neg p$, resp. $\forall x \in \mathsf{D}$: $\neg q(x) \Rightarrow \neg p(x)$, která je s danou matematickou větou logicky ekvivalentní (viz tabulka 1.7).
b) **Obrácenou větou** nazýváme matematický výrok ve tvaru implikace $q \Rightarrow p$, resp. $\forall x \in \mathsf{D}$: $q(x) \Rightarrow p(x)$, který nemusí být s danou matematickou větou logicky ekvivalentní (viz tabulka 1.7).

Poznámka. Platí-li určitá matematická věta, pak nemusí platit věta obrácená. Větu i větu k ní obrácenou je nutné vždy samostatně dokázat.

Platí-li věta ve tvaru implikace $p \Rightarrow q$, resp. $\forall x \in \mathsf{D}$: $p(x) \Rightarrow q(x)$ a také věta obrácená $q \Rightarrow p$, resp. $\forall x \in \mathsf{D}$: $q(x) \Rightarrow p(x)$, pak obě tyto věty můžeme vyjádřit společně jedinou větou ve tvaru ekvivalence $p \Leftrightarrow q$, resp. $\forall x \in \mathsf{D}$: $p(x) \Leftrightarrow q(x)$. O předpokladu této věty pak říkáme, že jeho platnost je **nutnou a postačující podmínkou** pro platnost závěru (tvrzení) věty.

Důkazy matematických vět

V běžném životě se zpravidla ověřuje pravdivost, resp. nepravdivost výroků na základě zkušenosti. Obdobně v přírodních vědách ve všech případech, kdy se studují reálné objekty a jevy, se pravdivost výroků (přírodních zákonů) prokazuje na základě experimentů. V matematice však těmito způsoby nelze postupovat při ověřování pravdivosti, resp. nepravdivosti matematických výroků, neboť se netýkají reálných objektů, ale *abstraktních matematických pojmů.*

Důkazem výroku v matematické logice a v matematice se rozumí důkaz (logické odůvodnění) pravdivosti výroku. Vychází se z již známých pravdivých výroků a užitím zákonů výrokové logiky (tautologií) se odvodí, že logickým důsledkem jejich pravdivosti je pravdivost dokazovaného výroku. Speciálně **důkazem matematické věty** nazýváme logický proces, kterým ověřujeme její platnost, přičemž vycházíme z definic, axiomů a dříve dokázaných vět.

Poznámka. Důkaz nepravdivosti výroku se nazývá *vyvrácení výroku.*

Každý důkaz výroku a speciálně matematické věty se skládá z jednoho nebo zpravidla z více tzv. logických úsudků. **Logickým úsudkem** (též **správným úsudkem**) je nazýván logický postup, kterým se z několika daných pravdivých výroků (zvaných **předpoklady** nebo **premisy úsudku**) odvodí, že jako jejich důsledek plyne nějaký další pravdivý výrok (zvaný **závěr úsudku**). Nejčastěji užívané logické úsudky jsou uvedeny v tabulce 1.17. Vycházejí z *tautologií založených na vlastnostech implikace.*

Základní typy logických úsudků Tab. 1.17

Výchozí tautologie	Schéma úsudku	Pravidlo logického úsudku
$[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$	$\begin{array}{c} p \\ p \Rightarrow q \\ \hline q \end{array}$	1. *úsudkové pravidlo*: Je-li pravdivý výrok p a platí-li implikace $p \Rightarrow q$, pak je pravdivý i výrok q.
$[\neg q \wedge (\neg q \Rightarrow \neg p)] \Rightarrow \neg p$	$\begin{array}{c} \neg q \\ \neg q \Rightarrow \neg p \\ \hline \neg p \end{array}$	2. *úsudkové pravidlo*: Když platí výrok $\neg q$ a platí implikace $\neg q \Rightarrow \neg p$, pak platí výrok $\neg p$.
$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$	$\begin{array}{c} p \Rightarrow q \\ q \Rightarrow r \\ \hline p \Rightarrow r \end{array}$	3. *úsudkové pravidlo*: Když platí implikace $p \Rightarrow q$ a $q \Rightarrow r$, pak platí i implikace $p \Rightarrow r$.

První z nich lze odvodit užitím tabulky pravdivostních hodnot pro implikaci a konjunkci výroků (tabulka 1.5). Druhá tautologie plyne z první na základě lo-

tranzitivnost implikace.

Poznámka. V tabulce 1.17 uvedené 1. úsudkové pravidlo se v tradiční logice nazývalo latinsky *modus ponens* a česky *pravidlo odloučení*, 2. úsudkové pravidlo mělo latinský název *modus tollens* a 3. úsudkové pravidlo reprezentuje *řetězový úsudek* (*řetězec implikací*).

Důkazy matematických vět ve tvaru obecného výroku

Velmi důležité a časté jsou **důkazy matematických vět ve tvaru obecného výroku**: Pro každé $x \in \mathsf{D}$ platí $v(x)$ [symbolicky zapsáno $\forall x \in \mathsf{D}$: $v(x)$], kde $v(x)$ je výroková forma s definičním oborem D. (Speciálně $v(x)$ může mít tvar implikace $p(x) \Rightarrow q(x)$, resp. ekvivalence $p(x) \Leftrightarrow q(x)$).

Matematické věty tohoto typu se obvykle dokazují takto: Namísto proměnné x zvolíme *libovolný určitý (konstantní) prvek*, označíme jej např. a. Pro něj dokazujeme platnost výroku $v(a)$ (speciálně platnost implikace $p(a) \Rightarrow q(a)$, resp. ekvivalence $p(a) \Leftrightarrow q(a)$). Převádíme tak důkaz matematické věty ve tvaru obecného výroku s kvantifikátorem $\forall$ na *důkazy výroků bez kvantifikátorů*. Základní typy takových důkazů uvádíme přehledně v tabulkách 1.18 a 1.19.

Typy důkazů matematických vět ve tvaru jednoduchého výroku v Tab. 1.18

Typ důkazu	Schéma důkazu	Použitá úsudková pravidla
Přímý důkaz věty ve tvaru jednoduchého výroku v	Víme (známe): platí p Dokážeme (zjistíme): platí $p \Rightarrow v$ Závěr (uzavřeme): platí v	1. úsudkové pravidlo z tabulky 1.17 a při důkazu implikace $p \Rightarrow v$ se obvykle užívá 3. úsudkové pravidlo (řetěz implikací)
Důkaz sporem věty ve tvaru jednoduchého výroku v	Předpokládáme: platí $\neg v$ Dokážeme (zjistíme): platí $\neg v \Rightarrow z$ Víme (známe): neplatí z (*spor*) Závěr (uzavřeme): neplatí $\neg v$, tj. platí v	2. úsudkové pravidlo z tabulky 1.17 a při důkazu implikace $\neg v \Rightarrow z$ se obvykle užívá 3. úsudkové pravidlo (řetězec implikací)

Příklady důkazů matematických vět ve tvaru jednoduchého výroku

1. Dokažte *větu*: Pro každé $x \in \mathsf{R}$ platí, že $x^2 \geqq 0$. (Symbolicky $\forall x \in \mathsf{R}$: $x^2 \geqq 0$.)

   Přímý důkaz
   Nechť a je libovolně zvolené reálné číslo. Víme: Je-li $a > 0$ nebo $a < 0$, pak $a^2 > 0$; je-li $a = 0$, pak $a^2 = 0$. Odtud plyne: Je-li $a \in \mathsf{R}$, pak $a^2 \geqq 0$. $[(a > 0 \vee a < 0 \Rightarrow a^2 > 0) \wedge (a = 0 \Rightarrow a^2 = 0) \Rightarrow (a \in \mathsf{R} \Rightarrow a^2 \geqq 0).]$ Závěr: Pro každé $x \in \mathsf{R}$ je $x^2 \geqq 0$.

2. Dokažte *větu*: Každý pravoúhelník (obdélník, popř. čtverec) má shodné úhlopříčky.

Zvolme libovolný pravoúhelník $ABCD$. Víme: Protože čtyřúhelník $ABCD$ je pravoúhelník, jsou trojúhelníky ABC a BAD shodné pravoúhlé trojúhelníky s pravými úhly ABC a BAD. Odtud plyne: Úsečky AC a BD jsou shodné. Závěr: Každý pravoúhelník $ABCD$ má shodné úhlopříčky AC, BD.

3. Dokažte *větu*: Pro každou kružnici k se středem S a každý její bod A platí, že přímka p vedená bodem A a kolmá k přímce SA má s kružnicí k jediný společný bod A. (Tj. je tečnou kružnice k s dotykovým bodem A.)

   Důkaz sporem
   Zvolme libovolnou kružnici k se středem S a na ní libovolný bod A. Předpokládejme, že přímka p procházející bodem A a kolmá k přímkce SA má s kružnicí ještě další společný bod X. Odtud plyne, že $\triangle SAX$ je rovnoramenný trojúhelník se základnou AX, a protože $\sphericalangle SAX$ je pravý, musí být také $\sphericalangle AXS$ pravý. V $\triangle SAX$ nemohou však být dva pravé úhly, tj. dospěli jsme ke *sporu*. Závěr: Neplatí tedy, že přímka p má s kružnicí kromě bodu A další společný bod X, tj. má s ní jediný společný bod A.

Typy důkazů matematických vět se tvaru implikace, resp. ekvivalence Tab. 1.19

Typ důkazu	Schéma důkazu	
Přímý důkaz věty ve tvaru implikace $p \Rightarrow q$	Předpokládáme: platí p Dokážeme: platí $(p \Rightarrow p_1) \wedge (p_1 \Rightarrow q)$ Závěr (uzavřeme): platí $p \Rightarrow q$	Je založen na řetězci implikací (obvykle rozsáhlejším, tj. $(p \Rightarrow p_1) \wedge (p_1 \Rightarrow p_2) \wedge \ldots \wedge$ $\wedge\ (p_n \Rightarrow q))$
Důkaz sporem věty ve tvaru implikace $p \Rightarrow q$	Předpokládáme: platí $p \wedge \neg q$ Dokážeme: platí $(p \wedge \neg q) \Rightarrow$ platí z Víme: neplatí z Závěr: neplatí $p \wedge \neg q$, tj. platí $p \Rightarrow q$	Je založen na známé tautologii $\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$ a dále se postupem jako v tabulce 1.18 dospívá ke *sporu*
Nepřímý důkaz věty ve tvaru implikace $p \Rightarrow q$	Předpokládáme: platí $\neg q$ Dokážeme: platí $\neg q \Rightarrow q_1 \wedge q_1 \Rightarrow \neg p$ Závěr: platí $\neg q \Rightarrow \neg p$, tj. platí $p \Rightarrow q$	Jde o přímý důkaz obměněné implikace $\neg q \Rightarrow \neg p$ na základě známé tautologie $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$
Důkaz věty ve tvaru ekvivalence $p \Leftrightarrow q$	Dokážeme: platí $p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow p$ Závěr: platí $p \Leftrightarrow q$	Je založen na tautologii $(p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow p) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)$

Příklady důkazů matematických vět ve tvaru implikace, resp. ekvivalence

1. Dokažte *větu*: Pro každé $n \in \mathsf{N}$ platí: Je-li n sudé, pak je n^2 také sudé. (Symbolicky zapsáno $\forall n \in \mathsf{N}$: n je sudé $\Rightarrow n^2$ je sudé.)

Přímý důkaz
Nechť n je libovolné přirozené číslo. Vyjdeme z předpokladu: n je sudé. Odtud plyne (podle definice sudého čísla), že $\exists k \in \mathsf{N}$: $n = 2k$. Dále sestavíme řetězec implikací: $n = 2k \Rightarrow n^2 = 4k^2 = 2 \cdot 2k^2 = 2k'$, kde $k' = 2k^2 \in \mathsf{N}$ a $n^2 = 2k' \Rightarrow n^2$ je sudé.

2. Dokažte *obrácenou větu* k větě z příkladu 1: Pro každé $n \in \mathsf{N}$ platí: Je-li n^2 sudé, pak je n sudé. (Symbolicky zapsáno $\forall n \in \mathsf{N}$: n^2 je sudé $\Rightarrow n$ je sudé.)

Důkaz sporem
Nechť n je libovolné přirozené číslo. Předpokládejme, že pro ně platí negace implikace n^2 je sudé $\Rightarrow n$ je sudé, tj. platí pro ně konjunkce n^2 je sudé $\wedge$ n není sudé, čili je liché. Z toho, že n je liché, plyne (podle definice lichého čísla), že $\exists k \in \mathsf{N}$: $n = 2k+1$. Sestavíme řetězec implikací: $n = 2k+1 \Rightarrow n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2k' + 1$, kde $k' = 2k^2 + 2k$ a $n^2 = 2k' + 1 \Rightarrow n^2$ je liché, což je *spor* s předpokladem, že n^2 je sudé.

3. Dokažte *větu ve tvaru ekvivalence*: Pro každé $n \in \mathsf{N}$ platí: n^2 je sudé, právě když n je sudé. (Symbolicky zapsáno $\forall n \in \mathsf{N}$: n^2 je sudé $\Leftrightarrow n$ je sudé.)

Důkaz
Plyne z platnosti věty v příkladu 1 a věty k ní obrácené v příkladu 2.

4. Dokažte *větu*: V každém trojúhelníku ABC platí pro každý vnitřní bod M: $|\sphericalangle AMB| > |\sphericalangle ACB|$.

Přímý důkaz
Zvolme libovolný $\triangle ABC$ a v něm libovolný vnitřní bod M. Označme $\omega = |\sphericalangle AMB|$ a $\gamma = |\sphericalangle ACB|$. Dále označme γ_1 a α_1 po řadě vnitřní úhly v $\triangle ACM$ při vrcholech C a A, γ_2 a β_2 vnitřní úhly v $\triangle MCB$ při vrcholech C a B, ω_1, ω_2 úhly, na něž rozděluje přímka CM úhel ω. Platí: $\omega = \omega_1 + \omega_2 = \gamma_1 + \alpha_1 + \gamma_2 + \beta_2 = \gamma_1 + \gamma_2 + \alpha_1 + \beta_2 = \gamma + \alpha_1 + \beta_2 \Rightarrow \omega > \gamma$, což jsme měli dokázat.

5. Dokažte *větu*: Pro každé tři přímky a, b, c v rovině ϱ platí: Jsou-li přímky a, c spolu rovnoběžné a přímky b, c spolu rovnoběžné, pak také přímky a, b jsou navzájem rovnoběžné. [Symbolicky vyjádřeno $\forall a, b, c \in \varrho$: $(a \parallel c \wedge b \parallel c) \Rightarrow a \parallel b$; vyjadřuje vlastnost zvanou *tranzitivnost rovnoběžnosti přímek*.]

Důkaz sporem
Pro libovolné přímky a, b, c v rovině ϱ dokazujeme implikaci $p \Rightarrow q$, kde p: $(a \parallel c \wedge b \parallel c)$, q: $a \parallel b$. Při důkazu sporem vyjdeme z předpokladu, že platí $p \wedge \neg q$. Z toho, že platí $\neg q$: $a \nparallel b$, plyne, že přímky a, b v rovině ϱ jsou různoběžky s průsečíkem P, a z výroku p vyplývá, že tímto bodem P tedy jsou vedeny dvě různé rovnoběžky a, b s přímkou c. Toto tvrzení je však ve *sporu* se základní větou (axiomem) eukleidovské geometrie: Daným bodem lze vést k dané přímce jedinou rovnoběžku. Neplatí proto $p \wedge \neg q$, a tedy platí dokazovaná implikace $p \Rightarrow q$.

6. Dokažte *větu*: Pro každé tři přímky a, b, c v rovině ϱ platí: Jsou-li přímky a, b spolu rovnoběžné a přímka c je různoběžná s přímkou a, pak přímka c je také různoběžná s přímkou b. [Symbolicky vyjádřeno $\forall a, b, c \in \varrho$: $(a \parallel b \wedge c \nparallel a) \Rightarrow c \nparallel b$.]

Nepřímý důkaz implikace $p \Rightarrow q$, kde p: $(a \parallel b \wedge c \nparallel a)$, q: $(c \nparallel b)$, spočívá v přímém důkazu obměněné implikace $\neg q \Rightarrow \neg p$. Z předpokladu $\neg q$: $c \parallel b$ pro $a \parallel b$ plyne z věty v příkladu 5, že také $c \parallel a$, a tedy platí $\neg p$, což jsme měli dokázat.

Důkaz matematickou indukcí

Kromě uvedených typů důkazů matematických vět ve tvaru obecného výroku je velmi významná specifická metoda důkazu, která se nazývá **důkaz matematickou indukcí**. Užívá se při důkazech matematických vět ve tvaru obecného výroku, v nichž vystupuje proměnná n s oborem N: Pro každé přirozené číslo n (popř. pro každé přirozené číslo $n \geqq n_0$) platí $v(n)$, kde $v(n)$ je daná výroková forma proměnné $n \in \mathsf{N}$, která vyjadřuje určitou vlastnost přirozených čísel a n_0 je dané přirozené číslo.

Symbolicky se věty tohoto tvaru zapisují $\forall n \in \mathsf{N}$: $v(n)$ (popř. $\forall n \in \mathsf{N}$, $n \geqq n_0$: $v(n)$). Důkaz matematickou indukcí je složen ze dvou částí (zvaných kroky), jež jsou popsány v tabulce 1.20.

Schéma důkazu matematickou indukcí Tab. 1.20

Postup (kroky) důkazu matematickou indukcí	
matematické věty $\forall n \in \mathsf{N}$: $v(n)$	matematické věty $\forall n \in \mathsf{N}$, $n \geqq n_0$: $v(n)$
I. krok. Dokážeme platnost $v(n)$ pro $n = 1$, tj. ověříme pravdivost výroku $v(1)$.	*I. krok.* Dokážeme platnost $v(n)$ pro $n = n_0$, tj. ověříme pravdivost výroku $v(n_0)$.
II. krok. Dokážeme, že pro libovolné (libovolně zvolené) $k \in \mathsf{N}$ je pravdivá implikace: Jestliže platí $v(k)$, pak platí $v(k+1)$. [Symbolicky zapsáno $\forall k \in \mathsf{N}$: $v(k) \Rightarrow v(k+1)$.]	*II. krok.* Dokážeme, že pro libovolné (libovolně zvolené) $k \in \mathsf{N}$, $k \geqq n_0$ je pravdivá implikace: Jestliže platí $v(k)$, pak platí $v(k+1)$. [Symbolicky zapsáno $\forall k \in \mathsf{N}$, $k \geqq n_0$: $v(k) \Rightarrow v(k+1)$.]

II. krok důkazu matematickou indukcí se nazývá **indukční krok**, větě v něm dokazované se říká **indukční přechod** a její předpoklad $v(k)$ se nazývá **indukční předpoklad**.

Poznámka. Důkaz matematickou indukcí zaujímá zvláštní postavení mezi metodami důkazů matematických vět. Je to dáno tím, že nevyplývá z žádného obecného logického principu, nýbrž je založen na tzv. **principu matematické indukce**, který vyjadřuje jednu ze základních vlastností přirozených čísel (viz kap. 2.2). V jeho důsledku, když podle I. kroku důkazu matematickou indukcí platí $v(n)$ pro $n = 1$ (popř. $n = n_0$) a podle indukčního kroku platí $v(n)$ též pro $n = 2, 3, \ldots$ (popř. $n = n_0 + 1, n_0 + 2, \ldots$), platí $v(n)$ pro všechna přirozená čísla n (popř. všechna $n \geqq n_0$).

Příklady důkazů vět matematickou indukcí

1. Dokažte, že pro každé $n \in \mathsf{N}$ platí rovnost

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n+1).$$

Dokazovanou rovnost označíme $v(n)$ a součet na její levé straně s_n. Dokazujeme tedy, že $\forall n \in \mathsf{N}$: $s_n = \frac{1}{2}n(n+1)$.

I. krok – ověření platnosti rovnosti $v(1)$: Pro $n = 1$ dokazovaná rovnost platí:

$$1 = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2 \text{ čili } s_1 = \frac{1}{2}\cdot 1 \cdot 2 = 1.$$

II. krok – důkaz platnosti implikace $v(k) \Rightarrow v(k+1)$ pro každé $k \in \mathsf{N}$:

Předpokládejme, že dokazovaná rovnost $v(n)$ platí pro nějaké $n = k \in \mathsf{N}$, tj. platí $1 + 2 + \ldots + k = \frac{1}{2}k(k+1)$ čili $s_k = \frac{1}{2}k(k+1)$. Máme dokázat, že za tohoto předpokladu dokazovaná rovnost $v(n)$ platí také pro $n = k+1$, tj. platí $1 + 2 + \ldots + k + (k+1) = \frac{1}{2}(k+1)(k+2)$ čili $s_{k+1} = \frac{1}{2}(k+1)(k+2)$.

Ověření: $s_{k+1} = s_k + (k+1) = \frac{1}{2}k(k+1) + (k+1) = (k+1)\left(\frac{1}{2}k+1\right) = \frac{1}{2}(k+1)(k+2)$.

2. Dokažte, že pro každé přirozené číslo $n > 2$ platí nerovnost

$$2^n > 2n+1.$$

Důkaz matematickou indukcí
Dokazovanou nerovnost označíme $v(n)$.

I. krok – ověření platnosti dokazované nerovnosti pro $n = n_0 = 3$:

$$2^3 > 2\cdot 3 + 1.$$

II. krok – důkaz implikace $v(k) \Rightarrow v(k+1)$ pro každé $k \in \mathsf{N}$, $k \geqq 3$:

Předpokládejme, že nerovnost $v(n)$ platí pro nějaké $k \in \mathsf{N}$, $k \geqq 3$, tj. že platí $2^k > 2k+1$. Dokážeme, že pak platí také pro $k+1$, tj. že platí $2^{k+1} > 2k+3$. Skutečně z předpokladu plyne: $2^{k+1} > (2k+1)\cdot 2 > 2k+6 > 2k+3$, neboť $(2k+1)\cdot 2 = 2k + 2(k+1)$ a pro $k \geqq 3$ je $k+1 > 3$ čili $2(k+1) > 6$.

3. Dokažte, že pro každé $n \in \mathsf{N}$ je číslo $6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n$ dělitelné číslem 11. [Symbolicky lze dokazovanou větu zapsat $\forall n \in \mathsf{N}$: $11 | 6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n$. (Symbol $b|a$ značí: číslo b dělí číslo a, tj. číslo a je dělitelné číslem b, viz kap. 2.2.)]

Důkaz matematickou indukcí
I. krok – ověření platnosti věty pro $n = 1$:

$$6^2 + 3^3 + 3^1 = 6\cdot 11 \Rightarrow 11 | 6^2 + 3^3 + 3^1$$

II. krok – důkaz platnosti implikace

$$11|6^{2k} + 3^{k+2} + 3^k \Rightarrow 11|6^{2(k+1)} + 3^{k+3} + 3^{k+1}$$

pro každé $k \in \mathsf{N}$:

$$6^{2(k+1)} + 3^{k+3} + 3^{k+1} = 6^{2k}\cdot 36 + 3^{k+2}\cdot 3 + 3^k\cdot 3 = 3\cdot(6^{2k} + 3^{k+2} + 3^k) + 33\cdot 6^{2k}$$

je číslo dělitelné jedenácti, neboť je součtem dvou čísel dělitelných jedenácti.

4. Dokažte, že každých n různých přímek roviny, které procházejí jedním společným bodem, rozděluje rovinu na $2n$ částí.

Důkaz matematickou indukcí
I. krok – ověření platnosti věty pro $n = 1$: Skutečně jedna přímka rozděluje rovinu na dvě části.

II. krok – *indukční krok*: Předpokládejme, že k různých přímek roviny, které procházejí daným bodem, rozděluje rovinu na $2k$ částí. Potom $(k+1)$-ní přímka, která je vedena daným bodem, půlí dvě z těchto částí, a tedy celkově bude rovina rozdělena na $2k+2 = 2(k+1)$ částí.

Existenční důkazy

Důkazy existenčních matematických vět se stručně nazývají **existenční důkazy**. Rozlišují se tyto základní **druhy (typy) existenčních důkazů**: 1. **konstrukční důkazy**, 2. **ryze (čistě) existenční důkazy** a) **přímé**, b) **sporem**.

V tabulce 1.21 jsou uvedeny postupy těchto typů důkazů pro existenční větu ve tvaru: **Existuje** (alespoň jeden) objekt $x \in \mathsf{D}$, pro který platí (který má vlastnost) $v(x)$. [Symbolicky zapsáno $\exists x \in \mathsf{D}$: $v(x)$, kde $v(x)$ je výroková forma proměnné x s definičním oborem D.]

Základní typy existenčních důkazů Tab. 1.21

Typ existenčního důkazu	Jeho postup pro větu $\exists x \in \mathsf{D}$: $v(x)$
Konstrukční důkaz	*Stačí určit (sestrojit) příklad* jednoho objektu x_1 předepsané vlastnosti $v(x_1)$.
Ryze (čistě) existenční důkaz	Spočívá v tom, že *bez přímého určení se dokáže existence* objektu x_1 dané vlastnosti $v(x_1)$.
a) Přímý ryze existenční důkaz	Vychází ze známého pravdivého výroku (známé matematické věty) a postupuje se logickými úvahami podle schématu *přímého důkazu* z tabulky 1.18.
b) Ryze existenční důkaz sporem	Předpokládá se neexistence objektu x_1 dané vlastnosti $v(x_1)$ a logickými úsudky se odtud dospěje ke *sporu*.

Poznámka. Při přímých ryze existenčních důkazech se často vychází z tzv. **Dirichletova (přihrádkového) principu**: Rozdělíme-li daných $m > n$ objektů (předmětů), tj. $n+1$ nebo více objektů do n skupin (oddělených přihrádek), pak alespoň v jedné z těchto skupin (přihrádek) jsou alespoň dva objekty. Dirichletův princip má kombinatorický charakter.

Příklady existenčních důkazů

1. Přirozená čísla $p > 1$, která jsou dělitelná pouze číslem 1 a sama sebou, se nazývají *prvočísla*. Ukažte, která prvočísla jsou sudá a která lichá.

   Konstrukční existenční důkaz
   Z uvedené definice prvočísel p bezprostředně plyne, že jediným sudým prvočíslem je číslo 2, takže všechna ostatní prvočísla 3, 5, ... jsou lichá.

2. Dokažte, že existuje prvočíslo p, pro něž číslo $p^2 + 4$ je také prvočíslo.

   Konstrukční existenční důkaz
   Pro prvočíslo $p = 3$ je $p^2 + 4 = 13$, což je také prvočíslo. Existují i další prvočísla p této vlastnosti, např. pro $p = 5$ je $p^2 + 4 = 29$, tj. též prvočíslo.

3. Chovatel ušlechtilých holubů má 8 holubníků a 12 holubů. Dokažte, že alespoň v jednom jeho holubníku jsou alespoň dva holubi.

   a) *Přímý ryze existenční důkaz*
   Pravdivost dokazovaného existenčního výroku plyne z Dirichletova (přihrádkového) principu pro $n = 8$, $m = 12 > n$.

   b) *Ryze existenční důkaz sporem*
   Předpokládejme, že dokazovaný výrok není pravdivý, tj. platí jeho negace: V každém holubníku jsou méně než dva holubi (tedy žádný nebo jeden holub). Odtud ovšem vyplývá, že ve všech holubnících je nejvýše 8 holubů, což je spor s tím, že v nich musí být 12 holubů. Neplatí tedy negace dokazovaného výroku čili platí tento výrok samotný.

4. Víme, že Praha má více než 1 milion obyvatel, a z antropologie je známo, že žádný člověk nemá více vlasů než 500 tisíc. Dokažte, že v důsledku toho jsou v Praze alespoň dva lidé se stejným počtem vlasů na hlavě.

   a) *Přímý ryze existenční důkaz*
   Počet obyvatel Prahy označíme písmenem m, $m > 1\,000\,000$. Všech m obyvatel Prahy rozdělíme do $n = 500\,001$ skupin („přihrádek“), přičemž v k-té skupině budou ti z nich, kteří mají právě k vlasů ($k = 0, 1, \dots, 500\,000$). (V 0-té skupině jsou holohlaví obyvatelé Prahy.) Protože je $m > n$, podle Dirichletova (přihrádkového) principu musí alespoň v jedné skupině být alespoň dva Pražané, tj. existují alespoň dva obyvatelé Prahy se stejným počtem vlasů.

   b) *Ryze existenční důkaz sporem*
   Předpokládejme, že dokazovaný výrok není pravdivý, tj. platí jeho negace: V Praze neexistují dva obyvatelé se stejným počtem vlasů neboli všichni mají různý počet vlasů. Z toho však vyplývá, že počet obyvatel Prahy je menší nebo roven 500 001 (jeden může být holohlavý), což je *spor* s předpokladem, že počet obyvatel Prahy je větší než 1 milion.

Důkazy jednoznačné existence (existence a unicity)

Máme provést **důkaz věty o existenci a unicitě (jednoznačnosti)** ve tvaru: **Existuje** právě jeden objekt $x \in \mathsf{D}$, pro který platí (který má vlastnost) $v(x)$. [Symbolicky zapsáno $\exists! x \in \mathsf{D}$: $v(x)$.] Její důkaz se provádí ve *dvou krocích*:

I. Provedeme **důkaz existenční věty**: Existuje (*alespoň jeden*) objekt $x \in \mathsf{D}$, pro který platí (který má vlastnost) $v(x)$. [Symbolicky zapsáno $\exists x \in \mathsf{D}$: $v(x)$.] Tento důkaz může být buď *konstrukční*, anebo *ryze existenční* (viz tabulka 1.21).

II. Provedeme **důkaz unicity** objektu $x \in \mathsf{D}$, pro který platí $v(x)$, tj. dokážeme, že kromě jednoho objektu x_1 vlastnosti $v(x_1)$ již žádné další objekty této vlastnosti neexistují. Tento důkaz může být buď *přímý*, anebo může jít o *důkaz sporem* (viz tabulka 1.18). Sporem se dokazuje *věta*: Existuje *nejvýše jeden* objekt $x \in \mathsf{D}$, pro který platí $v(x)$. (Výrok „existuje právě jeden... “ je konjunkcí výroků „existuje alespoň jeden... “ a „existuje nejvýše jeden... “.) Vyjdeme z předpokladu platnosti *negace této věty*: Existují alespoň dva různé objekty $x_1, x_2 \in \mathsf{D}$, pro něž platí $v(x_1)$ a $v(x_2)$. Logickými úsudky se pak odvodí, že platí implikace $(v(x_1) \wedge v(x_2)) \Rightarrow x_1 = x_2$, což je *spor* s předpokladem, že x_1, x_2 jsou různé objekty.

Příklady důkazů jednoznačné existence (existence a unicity)

1. Dokažte, že existuje právě jedno řešení lineární rovnice $ax + b = 0$, kde $a, b \in \mathsf{R}$ (resp. C), $a \neq 0$.

   I. *Konstrukční existenční důkaz*
   Daná rovnice má řešení $x_1 = -\dfrac{b}{a}$.

   Zkouška: $L(x_1) = -a \cdot \dfrac{b}{a} + b = -b + b = 0$, $P(x_1) = 0$, a tedy $L(x_1) = P(x_1)$.

   II. *Důkaz unicity* řešení
   Provedeme *důkaz sporem.* Předpokládejme, že existují alespoň dvě řešení x_1, x_2, která jsou různá ($x_1 \neq x_2$). Pro ně platí $ax_1 + b = 0$ a $ax_2 + b = 0$. Odečtením obou těchto rovností dostáváme pro $a \neq 0$: $a(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$, což je *spor* s předpokladem, že $x_1 \neq x_2$.

2. Dokažte, že existuje právě jedno prvočíslo p, pro něž platí, že a) $p^2 + 1$, b) $p^2 + 2$, c) $p^2 + 3$ je také prvočíslo.

   I. *Konstrukční existenční důkaz*

   a) Pro $p = 2$ je $p^2 + 1 = 5$, tj. také prvočíslo.

   b) Pro $p = 3$ je $p^2 + 2 = 11$, tj. též prvočíslo.

   c) Pro $p = 2$ je $p^2 + 3 = 7$, tj. také prvočíslo.

   II. *Přímý důkaz unicity*

   a) Výraz $p^2 + 1$ upravíme na tvar $p^2 + 1 = p^2 - 1 + 2 = (p+1)(p-1) + 2$. Každé prvočíslo $p \neq 2$ je liché, takže čísla $p + 1$ a $p - 1$ jsou obě sudá, a tedy $p^2 + 1 = (p+1)(p-1) + 2$ je pro každé prvočíslo $p \neq 2$ sudé číslo větší než 2, tj. není prvočíslem.

Ze tří po sobě následujících čísel $p-1, p, p+1$ je vždy právě jedno dělitelné třemi. Pro každé prvočíslo $p \neq 3$ platí, že není dělitelné třemi, takže musí pro ně být dělitelné třemi buď $p-1$, anebo $p+1$, a tedy také číslo $p^2+2 = (p+1)(p-1)+3$ je dělitelné třemi, tj. není prvočíslem.

c) Výraz p^2+3 upravíme na tvar $p^2+3 = p^2-1+4 = (p+1)(p-1)+4$. Každé prvočíslo $p \neq 2$ je liché, takže čísla $p+1$ a $p-1$ jsou obě sudá, a tedy $p^2+3 = (p+1)(p-1)+4$ je pro každé prvočíslo $p \neq 2$ sudé číslo větší než 2, tj. není prvočíslem.

3. Dokažte, že každé dvě různé přímky v rovině nebo v prostoru mají nejvýše jeden společný bod.

Důkaz věty sporem

Předpokládejme, že dvě různé přímky p_1, p_2 mají alespoň dva různé společné body P, Q $(P \neq Q)$. Pak však podle základní věty (axiomu) geometrie, že dvěma různými body je určena právě jedna přímka, přímky p_1, p_2 jsou splývající (totožné). Dospěli jsme tak ke *sporu* s předpokladem, že přímky p_1, p_2 jsou různé.

Poznámka. Obdobnými způsoby jako se dokazují věty o jednoznačné existenci, obecněji se dokazují *matematické výroky (věty) o existenci právě n objektů daných vlastností*, resp. *o existenci nekonečně mnoha objektů daných vlastností.*

Důkazy individuálních vět

V podstatě jsou možné dva způsoby **důkazů individuální věty**: buď ji odvodíme vhodnou *substitucí* z obecné věty (věty ve tvaru obecného výroku), anebo provedeme *samostatný důkaz*, obvykle *důkaz sporem.*

Příklady důkazů individuálních vět

1. Dokažte *větu*: Trojúhelník, který má délky stran 3 dj, 4 dj, 5 dj (vyjádřené v daných délkových jednotkách dj), je pravoúhlý.

Důkaz

Tuto individuální větu získáme *substitucí* $a = 3$ dj, $b = 4$ dj, $c = 5$ dj z obecné věty – obrácené Pythagorovy věty: Jestliže pro trojúhelník se stranami o délkách a, b, c $(c > a, c > b)$ platí $c^2 = a^2 + b^2$, pak je tento trojúhelník pravoúhlý.

2. Dokažte *větu*: Reálné číslo $\sqrt{2}$ je iracionální.

Důkaz sporem

Vyjdeme z předpokladu platnosti negace dokazované věty: Reálné číslo $\sqrt{2}$ je racionální. Sestavíme řetězec implikací:

$\sqrt{2}$ je kladné racionální číslo $\Rightarrow \sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$, kde $p, q \in \mathsf{N}$ jsou nesoudělná čísla,

$\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$, $p, q \in \mathsf{N} \Rightarrow p^2 = 2q^2$, $p^2 = 2q^2 \Rightarrow p, q$ jsou sudá, tj. soudělná čísla.

Tento závěr je však ve *sporu* s předpokladem, že čísla p, q jsou nesoudělná.

Matematická hypotéza může mít tvar obecného, existenčního nebo individuálního výroku, který se v těchto případech nazývá **obecná, existenční**, resp. **individuální hypotéza.**

Důkazem hypotézy nazýváme důkaz její pravdivosti, tj. ověření, že představuje platnou matematickou větu.

Vyvrácením hypotézy nazýváme důkaz, že hypotéza není pravdivá, tj. že platí její negace.

Základní metody vyvracení hypotéz jsou tyto:

Vyvrácení obecné hypotézy tvaru $\forall x \in \mathsf{D}$: $v(x)$ spočívá v důkazu její negace čili (viz tabulka 1.14) existenčního výroku $\exists x \in \mathsf{D}$: $\neg v(x)$. Tento důkaz lze provést nalezením jednoho $x_1 \in \mathsf{D}$, pro které neplatí $v(x_1)$; říkáme, že jsme nalezli protipříklad vyvracející obecnou hypotézu.

Vyvrácení existenční hypotézy tvaru $\exists x \in \mathsf{D}$: $v(x)$ [neboli **důkaz neexistence** objektu $x \in \mathsf{D}$, pro který platí $v(x)$] spočívá v důkazu negace této hypotézy čili (viz tabulka 1.14) obecného výroku $\forall x \in \mathsf{D}$: $\neg v(x)$. Může jít o *přímý důkaz*, častěji o *důkaz sporem.*

Vyvrácení individuální hypotézy spočívá v důkazu její negace, zpravidla jde o *důkaz sporem.*

Příklady důkazů a vyvracení matematických hypotéz

1. Vyvraťte obecnou hypotézu, že pro každé $n \in \mathsf{N}$ je n^2+n+41 prvočíslo.

Vyvrácení obecné hypotézy: Pro všechna přirozená čísla $n < 40$ je n^2+n+41 prvočíslo. Avšak pro $n = 40$ je $n^2+n+41 = 40^2+40+41 = 40 \cdot 41 + 41$, což je přirozené číslo dělitelné 41, a tedy není prvočíslem. Tento *protipříklad* vyvrací vyslovenou obecnou hypotézu.

2. Vyvraťte existenční hypotézu, že existuje prvočíslo p, pro které je p^2+5 také prvočíslo.

Vyvrácení existenční hypotézy provedeme tak, že dokážeme platnost její negace: Pro každé prvočíslo p není číslo p^2+5 prvočíslo. Skutečně pro $p = 2$ je $p^2+5 = 4+5 = 9$, což není prvočíslo, a pro každé prvočíslo $p \neq 2$ je $p^2+5 = p^2-1+6 = (p+1)(p-1)+6$, přičemž p je liché, takže obě čísla $p+1$ a $p-1$ jsou sudá, a tedy $p^2+5 = (p+1)(p-1)+6$ je sudé číslo větší než 2, tj. není prvočíslem.

3. Dokažte platnost existenční hypotézy: Existuje nekonečně mnoho prvočísel.

Důkaz existenční hypotézy provedeme tak, že vyvrátíme její negaci: Existuje pouze konečný počet prvočísel. Označme je $p_1, p_2, \ldots, p_k$, kde k je jejich počet. Pak přirozené číslo $m = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k + 1$ není dělitelné žádným z prvočísel p_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ (neboť při dělení je zbytek 1), takže je prvočíslem různým od všech prvočísel p_i. To je však ve *sporu* s předpokladem o konečném počtu prvočísel, a tedy všech prvočísel je nutně nekonečně mnoho.

Poznámka. Tento důkaz sporem uvedl již starověký řecký matematik *Eukleides* ve svém významném spise „*Základy*“.

Axiomatická výstavba teorie v matematice představuje z hlediska logiky **deduktivní metodu** zkoumání, kterou se z daných tvrzení (předpokladů) dospívá na základě pravidel logiky k novým tvrzením (závěrům, důsledkům). Její podstatou je **dedukce**, tj. přechod od obecného k zvláštnímu. Obrácenou metodou zkoumání z hlediska logiky je **induktivní metoda**. Její podstatou je **indukce (zobecnění)**, tj. přechod od zvláštního k obecnému. Zobecnění na základě vyšetření všech možných (konečně mnoha) dílčích případů se nazývá **úplná indukce**. Představuje jednu z *forem důkazu* a je prakticky použitelná zejména při malém počtu všech možností. Ve fyzice i v dalších přírodních vědách se užívá k odvozování, resp. ověřování přírodních zákonů též **neúplná indukce**, tj. zobecnění na základě některých dílčích případů (získaných na základě experimentů). Avšak v matematice vzhledem k ryze abstraktnímu charakteru matematických objektů ji nelze v žádném případě považovat za formu důkazu. Může být pouze zdrojem motivace a inspirace pro *formulaci hypotéz*, jež se poté exaktně dokáží, resp. vyvrátí.

Poznámka. V souvislosti s pojmy indukce a dedukce si uvědomme, že výše uvedená forma důkazu **matematickou indukcí** má sice název zdánlivě podobný s úplnou indukcí, avšak na rozdíl od ní se týká nekonečného počtu případů a její podstata je zcela odlišná: na základě obecného principu matematické indukce se odvozuje platnost dokazované věty. Matematická indukce stejně jako jiné důkazové metody obecných vět má tedy *deduktivní charakter*.

1.2 Množiny

Kromě jednotlivých objektů se v matematice často zabýváme také jejich *soubory (souhrny, skupinami)*. Na názorné představě souboru objektů jako jednoho určitého celku je založeno *intuitivní pojetí pojmu množina:*

Množina je soubor libovolných navzájem různých objektů, jenž je chápán jako jeden celek. Množinu pokládáme za určenou, je-li možno o každém objektu jednoznačně rozhodnout, zda do ní patří, či nikoli. Každý z objektů, který patří do množiny, se nazývá **prvek (element) množiny**.

K označování množin se zpravidla používají velká písmena latinské abecedy A, B, M apod. a k označování jejich prvků malá písmena a, b, x apod. V některých případech však existují výjimky z tohoto způsobu označování, např. v tradiční symbolice geometrie.

Patří-li jistý objekt a do množiny A, vyjadřujeme to zápisem

$$a \in \mathsf{A},$$

který čteme: a **je prvkem (elementem) množiny** A. Nepatří-li jistý objekt b do množiny A, vyjadřujeme to zápisem

$$b \notin \mathsf{A},$$

který čteme: b **není prvkem (elementem) množiny** A.

Jestliže množina obsahuje alespoň jeden prvek (tj. jeden nebo více prvků), nazývá se **neprázdná množina**. Intuitivní pojetí množiny je účelné doplnit o tzv. **prázdnou množinu**, jež neobsahuje žádný prvek; označuje se symbolem $\emptyset$.

Příklady neprázdných množin

Množina přirozených čísel od 1 do 10, tj. {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, množina všech přirozených čísel, množina všech reálných čísel, přímka p, úsečka AB, kružnice k, množina všech českých králů, množina studentů v určitém ročníku, množina tanečníků na tanečním parketu, množina všech učebnic matematiky pro gymnázia.

Příklady prázdné množiny

Množina všech přirozených čísel menších než 1, množina všech reálných čísel x, pro která platí $x^2 + 1 = 0$.

Množina, která má konečný počet prvků (tj. buď je prázdná, anebo počet jejích prvků je dán přirozeným číslem), se nazývá **konečná množina**. Počet prvků konečné množiny A budeme označovat symbolem |A|. Každá množina, která není konečná, se nazývá **nekonečná množina**.

Způsoby určení (zadání) množin

Množinu můžeme zadat různými způsoby. Velmi časté jsou *dva způsoby jejího zadání*:

a) **Výčtem prvků**, tj. uvedením (vyjmenováním) všech prvků množiny, což je možné jen pro konečné množiny. Zápis zadání množiny M výčtem prvků:

$$\mathsf{M} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

Čteme: „M je množina prvků (množina s prvky) x_1, x_2, atd. až x_n".

Poznámka. Obdobný zápis se někdy používá i v případech některých nekonečných množin. Tak např. množina všech přirozených (celých kladných) čísel se často zapisuje takto:

$$\mathsf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

U zápisů tohoto typu je třeba si uvědomit, že zde nejde o zadání množiny výčtem prvků, nýbrž o symbolický zápis nekonečné množiny.

b) **Charakteristickou vlastností**, tj. takovou vlastností, kterou mají právě jen prvky zadávané množiny. Přitom zjišťování uvažované vlastnosti se provádí v tzv. **základní (univerzální) množině** U, která obsahuje všechny objekty, jež nás v dané situaci zajímají. Zápis zadání množiny M charakteristickou vlastností:

$$\mathsf{M} = \{x \in \mathsf{U};\ v(x)\}$$

(Místo středníku se v literatuře někdy užívá dvojtečka nebo svislý pruh |) čteme „M je množina *všech* x z množiny U, pro které platí (která mají vlastnost) $v(x)$".

Množinové vztahy a operace

Mějme dánu základní množinu U. Prvky všech dalších uvažovaných množin A, B atd. budeme vybírat z prvků základní množiny U. Množiny A, B atd. mohou být navzájem v různých **vztazích**, jejich základní typy jsou definovány v tabulce 1.22.

Definice inkluze a rovnosti množin Tab. 1.22

Název a symbolické označení	Definice (slovní a symbolické vyjádření)
Inkluze množin A, B; množina A je **podmnožinou (částí) množiny** B Symbolický zápis: $A \subset B$	Množina A je **podmnožinou** množiny B, právě když platí, že každý prvek množiny A je zároveň prvkem množiny B. Tedy: $A \subset B \Leftrightarrow (\forall x \in U;\ x \in A \Rightarrow x \in B)$
Rovnost množin A, B; množina A se **rovná množině** B Symbolický zápis: $A = B$	Množiny A, B jsou si **rovny**, právě když platí, že $A \subset B$ a zároveň $B \subset A$ (tj. všechny prvky množin A, B jsou tytéž). Tedy: $A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$ čili $A = B \Leftrightarrow (\forall x \in U;\ x \in A \Leftrightarrow x \in B)$
Ostrá inkluze množin A, B; množina A je **vlastní podmnožinou množiny** B Symbolický zápis: $A \subsetneqq B$	Množina A je **vlastní podmnožinou množiny** B, právě když je $A \subset B$ a zároveň $A \neq B$. Tedy: $A \subsetneqq B \Leftrightarrow A \subset B \wedge A \neq B$

Poznámka. V literatuře se lze setkat též s tím, že zápis $A \subset B$ se užívá pro ostrou inkluzi množin A, B. V naší školské matematice se však dosud užívá ve významu uvedeném v tabulce 1.22. Není-li množina A podmnožinou množiny B, vyjadřujeme to zápisem $A \not\subset B$ (místo $\neg(A \subset B)$; nejsou-li si množiny A, B rovny, píšeme $A \neq B$ (místo $\neg(A = B)$).

Základními množinovými operacemi s množinami $A \subset U$, $B \subset U$ (kde U je daná základní množina) rozumíme vytvoření jejich **sjednocení** $A \cup B$, **průniku** $A \cap B$, **rozdílu** $A \setminus B$, tj. množin, jejichž definice jsou uvedeny v tabulce 1.23.

Definice sjednocení, průniku a rozdílu množin $A \subset U$, $B \subset U$ Tab. 1.23

Název a symbolické označení	Definice (slovní a symbolické vyjádření)
Sjednocení množin A, B označované $A \cup B$	**Sjednocení** $A \cup B$ množin A, B je množina všech prvků ze základní množiny U, které patří alespoň do jedné z množin A, B. Tedy: $A \cup B = \{x \in U;\ x \in A \vee x \in B\}$
Průnik množin A, B označovaný $A \cap B$	**Průnik** $A \cap B$ množin A, B je množina všech prvků ze základní množiny U, které patří do množiny A a zároveň do množiny B. Tedy: $A \cap B = \{x \in U;\ x \in A \wedge x \in B\}$
Rozdíl množin A, B označovaný $A \setminus B$	**Rozdíl** $A \setminus B$ množin A, B je množina všech prvků ze základní množiny U, které patří do množiny A a zároveň nepatří do množiny B. Tedy: $A \setminus B = \{x \in U;\ x \in A \wedge x \notin B\}$

Množiny A, B, pro jejichž průnik platí $A \cap B = \emptyset$ (tj. jež nemají žádný společný prvek), se nazývají **disjunktní množiny**.

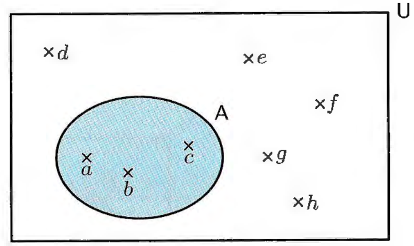
V případě množin A, B takových, že $A \subset B$, se zavádí pro jejich rozdíl $B \setminus A$ speciální název **doplněk množiny A v množině B** a značí se A'_B. Je tedy pro $A \subset B$: $A'_B = B \setminus A = \{x \in B;\ x \notin A\}$. Je-li přitom $B = U$ (základní množina), pak se doplněk $U \setminus A$ je stručně nazýván **doplněk množiny** A, namísto doplněk množiny A v základní množině U, a značí se A' namísto A'_U. Pro $A \subset U$ je tedy $A' = U \setminus A = \{x \in U;\ x \notin A\}$.

Příklady množinových vztahů a operací s množinami

Pro množiny $A = \{a, c, e, g\}$, $B = \{b, c, d, e\}$ prvků ze základní množiny $U = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ je $A \subset U$, $B \subset U$, $A \not\subset B$, $B \not\subset A$ $(A \neq B)$, $A \cup B = \{a, b, c, d, e, g\}$, $A \cap B = \{c, e\}$ (tj. $A \cap B \neq \emptyset$, tedy množiny A, B nejsou disjunktní), $A \setminus B = \{a, g\}$, $B \setminus A = \{b, d\}$, $A' = U \setminus A = \{b, d, f\}$, $B' = U \setminus B = \{a, f, g\}$.

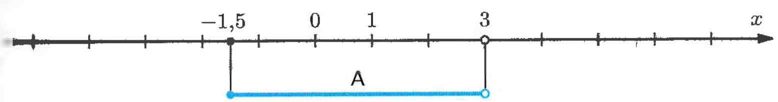
Grafické znázornění množin

K názorné představě o množinách a problémech popsaných pomocí množin se užívá grafické znázornění množin v rovině, tzv. **množinové diagramy**: Množiny, např. A, B, jež obsahují některé z prvků uvažované základní množiny U, se znázorňují kruhy nebo jinými, zpravidla oválovými obrazci zakreslenými uvnitř obdélníku, který zobrazuje základní množinu U (obr. 1.3). Pokud v množinovém diagramu tento obdélník nenakreslíme, předpokládá se, že základní množinu zobrazuje celá rovina (nákresna).



Obr. 1.3

Chceme-li v množinovém diagramu znázornit též některé jednotlivé prvky množin, užíváme k tomu obvykle kroužky nebo křížky uvnitř obrazce představujícího příslušnou množinu (obr. 1.3). Množinové diagramy jsou užitečné pro obecné úvahy o množinách. Ke grafickému znázorňování množin reálných čísel je obvykle vhodnější použít číselnou osu (kap. 2.1), přičemž se množiny reálných čísel znázorňují buď přímo na ní, nebo pomocí vodorovných čar rovnoběžných s číselnou osou (obr. 1.4).

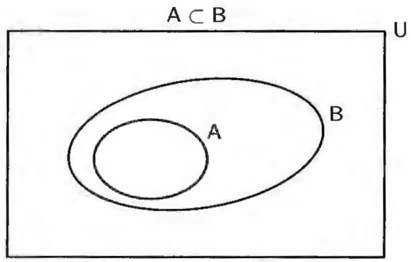


Obr. 1.4

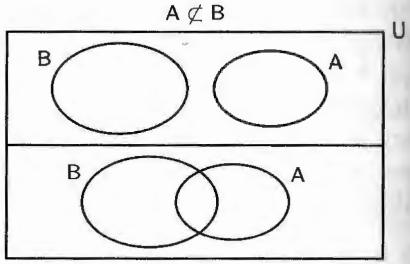
Množinové diagramy, jimiž se graficky znázorňují vztahy mezi množinami a operace s množinami, se nazývají **Vennovy diagramy**.

Dávají velmi jednoduchý a názorný obraz množin, se kterými pracujeme, aniž bychom se zmiňovali o jejich jednotlivých prvcích.

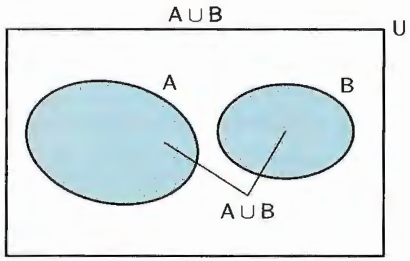
Skutečnost, že množina A je podmnožinou (částí) množiny B ($A \subset B$), znázorňujeme tak, že obraz množiny A umístíme dovnitř obrazu množiny B (obr. 1.5). V opačném případě $A \not\subset B$ obrazy množin zaujímají některou z poloh podle obr. 1.6. Sjednocení $A \cup B$ množin A, B se znázorňuje sjednocením jejich obrazů (v obr. 1.7 a 1.8 je vyznačeno barevně). Průnik $A \cap B$ množin A, B se znázorňuje průnikem jejich obrazů (v obr. 1.9 je vyznačen barevně neprázdný průnik, v obr. 1.10 je průnik prázdný). Obdobným způsobem se znázorňuje též rozdíl $A \setminus B$ množin A, B (v obr. 1.11 pro $B \subset A$ a v obr. 1.12 pro $B \not\subset A$ je znázorněn vybarveným geometrickým útvarem). Speciálním případem je znázornění doplňků množin A, B (vybarvený útvar v obr. 1.11 znázorňuje doplněk B'_A pro $B \subset A$, v obr. 1.13 doplněk A'_B pro $A \subset B$, v obr. 1.14 doplněk A' v základní množině U).



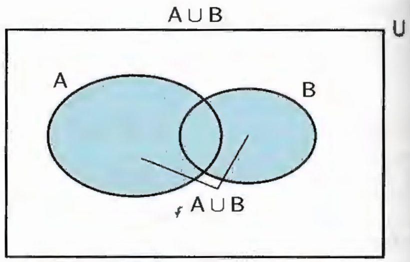
Obr. 1.5



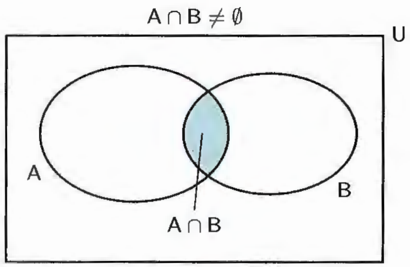
Obr. 1.6



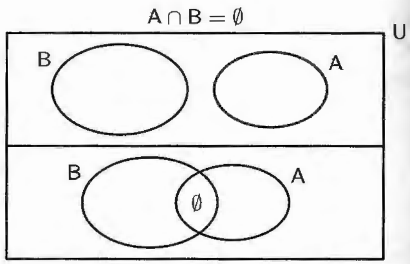
Obr. 1.7



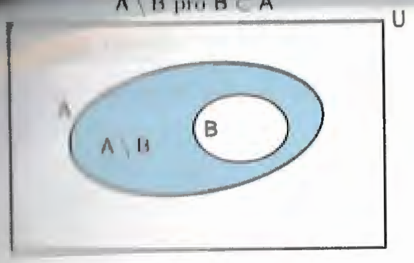
Obr. 1.8



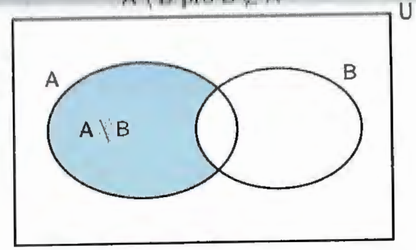
Obr. 1.9



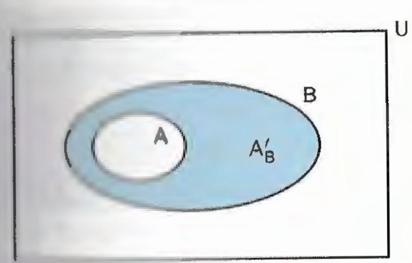
Obr. 1.10



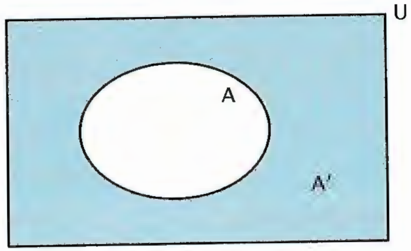
Obr. 1.11



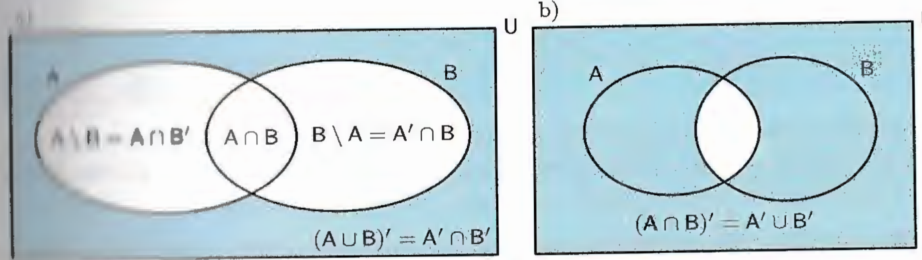
Obr. 1.12



Obr. 1.13



Obr. 1.14



Obr. 1.15

Příklady užití Vennových diagramů k ověření vlastností množinových operací

Z Vennových diagramů v obr. 1.7 až 1.9 lze mj. snadno usoudit, že sjednocení a průnik množin A, B mají vlastnost *komutativnosti*:

$$A \cup B = B \cup A, \; A \cap B = B \cap A,$$

neboť množiny na levé a pravé straně množinové rovnosti jsou znázorněny ve Vennových diagramech týmiž geometrickými útvary.

Obdobně obr. 1.15a, b dává názornou představu platnosti množinových rovností

$$A \setminus B = A \cap B', \qquad B \setminus A = A' \cap B,$$
$$(A \cup B)' = A' \cap B', \qquad (A \cap B)' = A' \cup B'$$

Poznámka. Poslední dvě množinové rovnosti jsou po řadě tzv. *1. a 2. de Morganova* [illegible] *formule.*

Vennovy diagramy se také užívají při *určování počtu prvků konečných množin, jež jsou výsledkem množinových operací*. Vychází se přitom ze *základní věty*:

Počet prvků sjednocení dvou konečných disjunktních množin A, B ($\mathsf{A} \cap \mathsf{B} = \emptyset$) o $|\mathsf{A}|$, $|\mathsf{B}|$ prvcích je dán vzorcem

$$|\mathsf{A} \cup \mathsf{B}| = |\mathsf{A}| + |\mathsf{B}|.$$

Větu lze zobecnit pro n konečných množin:

Počet prvků sjednocení n konečných množin $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \ldots, \mathsf{A}_n$, z nichž každé dvě jsou disjunktní (tj. $\mathsf{A}_i \cap \mathsf{A}_j = \emptyset$ pro každé $i \neq j$) a které mají po řadě $|\mathsf{A}_1|, |\mathsf{A}_2|, \ldots, |\mathsf{A}_n|$ prvků, je dán vzorcem

$$|\mathsf{A}_1 \cup \mathsf{A}_2 \cup \ldots \cup \mathsf{A}_n| = |\mathsf{A}_1| + |\mathsf{A}_2| + \ldots + |\mathsf{A}_n|.$$

Dále platí *věta*:

Nechť A, B jsou konečné množiny A, B o $|\mathsf{A}|$, $|\mathsf{B}|$ prvcích takové, že $\mathsf{B} \subset \mathsf{A}$. Pak počet prvků jejich rozdílu $\mathsf{A} \setminus \mathsf{B}$ je dán vzorcem

$$|\mathsf{A} \setminus \mathsf{B}| = |\mathsf{A}| - |\mathsf{B}|.$$

Poznámka. Diagramům, které vznikají, jestliže se do Vennových diagramů místo symbolů pro průniky množin píší čísla udávající počty prvků těchto množin, říkáme *číselné Vennovy diagramy.*

Příklady užití Vennových diagramů k určení počtu prvků konečných množin, které jsou výsledkem množinových operací

1. Odvoďte vzorec pro počet prvků sjednocení dvou konečných množin A, B o $|\mathsf{A}|$, $|\mathsf{B}|$ prvcích, nejsou-li množiny A, B disjunktní (tj. $\mathsf{A} \cap \mathsf{B} \neq \emptyset$).

Řešení

Použitím Vennova diagramu v obr. 1.16 (sestrojeného podle obr. 1.15) vyjádříme každou z množin A, B, $\mathsf{A} \cup \mathsf{B}$ jako sjednocení dvou disjunktních množin

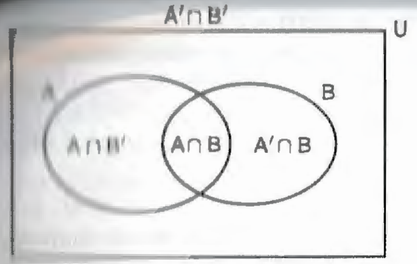
$$\mathsf{A} = (\mathsf{A} \cap \mathsf{B}') \cup (\mathsf{A} \cap \mathsf{B}), \qquad \mathsf{B} = (\mathsf{A}' \cap \mathsf{B}) \cup (\mathsf{A} \cap \mathsf{B}),$$
$$\mathsf{A} \cup \mathsf{B} = (\mathsf{A} \cap \mathsf{B}') \cup (\mathsf{A} \cap \mathsf{B}) \cup (\mathsf{A}' \cap \mathsf{B}),$$

kde A', B' jsou doplňky množin A, B (vzhledem k základní množině U). Podle předchozích vět pak pro počty prvků těchto množin platí

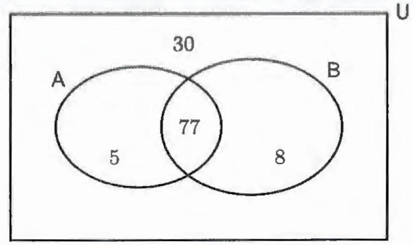
$$|\mathsf{A}| = |\mathsf{A} \cap \mathsf{B}'| + |\mathsf{A} \cap \mathsf{B}|,$$
$$|\mathsf{B}| = |\mathsf{A}' \cap \mathsf{B}| + |\mathsf{A} \cap \mathsf{B}|,$$
$$|\mathsf{A} \cup \mathsf{B}| = |\mathsf{A} \cap \mathsf{B}'| + |\mathsf{A} \cap \mathsf{B}| + |\mathsf{A}' \cap \mathsf{B}|.$$

Z těchto rovností plyne, že pro počet prvků sjednocení $\mathsf{A} \cup \mathsf{B}$ platí vzorec:

$$|\mathsf{A} \cup \mathsf{B}| = |\mathsf{A}| + |\mathsf{B}| - |\mathsf{A} \cap \mathsf{B}|$$



Obr. 1.16



Obr. 1.17

2. 120 studentů absolvovalo zkoušku z matematiky a z fyziky. 82 studentů udělalo zkoušku z matematiky, 85 zkoušku z fyziky. 77 udělalo obě zkoušky. Užitím Vennova diagramu pro množiny těchto studentů odpovězte na následující otázky:

a) Kolik studentů neudělalo zkoušku z matematiky?

b) Kolik studentů neudělalo zkoušku z fyziky?

c) Kolik studentů udělalo zkoušku z matematiky nebo z fyziky?

d) Kolik studentů neudělalo zkoušku z matematiky ani z fyziky?

e) Kolik studentů udělalo zkoušku z matematiky a neudělalo zkoušku z fyziky?

f) Kolik studentů udělalo zkoušku z fyziky a neudělalo zkoušku z matematiky?

Řešení

Označme U množinu všech 120 studentů, A množinu 82 studentů, kteří udělali zkoušku z matematiky, B množinu 85 studentů, kteří udělali zkoušku z fyziky. Označme počty prvků množin $|\mathsf{U}| = 120$, $|\mathsf{A}| = 82$, $|\mathsf{B}| = 85$, $|\mathsf{A} \cap \mathsf{B}| = 77$.

Při řešení úlohy použijeme Vennův diagram z obr. 1.16 a výše uvedené vzorce pro počty prvků příslušných konečných množin. Jestliže do Vennova diagramu budeme místo symbolů množin zapisovat počty prvků těchto množin, vznikne diagram nakreslený v obr. 1.17.

Pro odpovědi na zadané otázky dostáváme:

a) $|\mathsf{A}'| = |\mathsf{U} \setminus \mathsf{A}| = |\mathsf{U}| - |\mathsf{A}| = 120 - 82 = 38,$

b) $|\mathsf{B}'| = |\mathsf{U} \setminus \mathsf{B}| = |\mathsf{U}| - |\mathsf{B}| = 120 - 85 = 35,$

c) $|\mathsf{A} \cup \mathsf{B}| = |\mathsf{A}| + |\mathsf{B}| - |\mathsf{A} \cap \mathsf{B}| = 82 + 85 - 77 = 90,$

d) $|\mathsf{A}' \cap \mathsf{B}'| = |(\mathsf{A} \cup \mathsf{B})'| = |\mathsf{U} \setminus (\mathsf{A} \cup \mathsf{B})| = |\mathsf{U}| - |\mathsf{A} \cup \mathsf{B}| = 120 - 90 = 30,$

e) $|\mathsf{A} \cap \mathsf{B}'| = |\mathsf{A} \setminus (\mathsf{A} \cap \mathsf{B})| = |\mathsf{A}| - |\mathsf{A} \cap \mathsf{B}| = 82 - 77 = 5,$

f) $|\mathsf{A}' \cap \mathsf{B}| = |\mathsf{B} \setminus (\mathsf{A} \cap \mathsf{B})| = |\mathsf{B}| - |\mathsf{A} \cap \mathsf{B}| = 85 - 77 = 8.$

3. Vzorec odvozený v příkladu 1 lze zobecnit i pro více konečných množin, např. pro každé tři konečné množiny A, B, C platí, že

$$|\mathsf{A} \cup \mathsf{B} \cup \mathsf{C}| = |\mathsf{A}| + |\mathsf{B}| + |\mathsf{C}| - |\mathsf{A} \cap \mathsf{B}| - |\mathsf{A} \cap \mathsf{C}| - |\mathsf{B} \cap \mathsf{C}| + |\mathsf{A} \cap \mathsf{B} \cap \mathsf{C}|.$$

Systém množin a základní operace v něm

Prvky množin mohou být také množiny. Taková množina, jejíž prvky jsou vesměs množiny, se nazývá **systém množin** (místo „množina množin“). Přitom se vylučuje případ množiny, která by obsahovala jako prvek samu sebe, a případ množiny všech množin.

Systém množin, ve kterém každá dvojice prvků jsou disjunktní množiny, je nazýván **disjunktní systém množin** (nebo **systém množin po dvou disjunktních**).

Základní operace v systému n **množin** $M_1, M_2, \ldots, M_n \subset U$ ($n \in N$, $n \geqq 2$), kde U je daná základní množina, *definujeme* takto:

Sjednocení množin $M_1, M_2, \ldots, M_n$ označované $\bigcup\limits_{i=1}^{n} M_i = M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_n$ je množina všech prvků ze základní množiny U, které patří do alespoň jedné z množin $M_1, M_2, \ldots, M_n$.

Tedy $\bigcup\limits_{i=1}^{n} M_i = \{x \in U;\ x \in M_1 \vee x \in M_2 \vee \ldots \vee x \in M_n\}$.

Průnik množin $M_1, M_2, \ldots, M_n$ označovaný $\bigcap\limits_{i=1}^{n} M_i = M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_n$ je množina všech prvků ze základní množiny U, které patří do každé z množin $M_1, M_2, \ldots, M_n$.

Tedy $\bigcap\limits_{i=1}^{n} M_i = \{x \in U;\ x \in M_1 \wedge x \in M_2 \wedge \ldots \wedge x \in M_n\}$.

Poznámka. Z uvedených definic plynou tyto *množinově-logické vztahy* (v nichž logickému symbolu $\vee$ odpovídá množinový symbol $\cup$ a symbolu $\wedge$ odpovídá symbol $\cap$):
$(x \in M_1) \vee (x \in M_2) \vee \ldots \vee (x \in M_n)$, znamená totéž co $x \in (M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_n)$,
$(x \in M_1) \wedge (x \in M_2) \wedge \ldots \wedge (x \in M_n)$, znamená totéž co $x \in (M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_n)$.
Tyto vztahy se využívají rozsáhle při řešení rovnic a nerovnic v R (viz kap. 5).

Uvědomte si, že uvedené zápisy (označení) pro sjednocení a průnik n množin jsou možné jen díky tomu, že operace sjednocení a průnik množin mají vlastnost *asociativnosti*, tj. pro každou trojici množin A, B, C platí vztahy

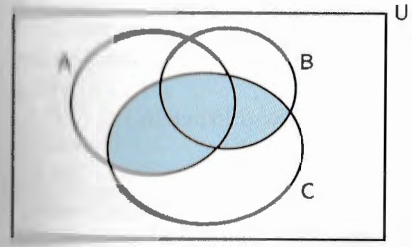
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \qquad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

V důsledku toho sjednocení, resp. průnik libovolných tří a obecně n množin nezávisí na způsobu jejich „uzávorkování“, takže lze pro označení sjednocení, resp. průniku n množin použít uvedené symboly.

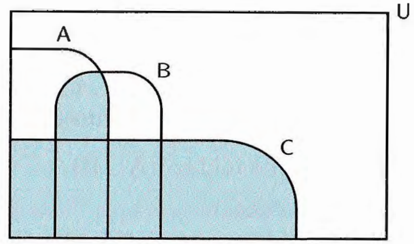
Operace sjednocení a průniku množin mají též vlastnost *distributivnosti* (vůči sobě navzájem), tj. pro každou trojici množin A, B, C platí vztahy

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), \qquad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

Pro názornost ověříme tyto dva množinové vztahy pomocí Vennových diagramů: Grafickým znázorněním množiny $(A \cup B) \cap C$ je vybarvená plocha ve Vennově diagramu v obr. 1.18 a tato plocha je zároveň též grafickým znázorněním množiny $(A \cap C) \cup (B \cap C)$. Obdobně grafickým znázorněním množiny $(A \cap B) \cup C$ je vybarvená plocha ve Vennově diagramu v obr. 1.19 a tato plocha je zároveň také grafickým znázorněním množiny $(A \cup C) \cap (B \cup C)$.



Obr. 1.18



Obr. 1.19

Poznámka. V obr. 1.19 je použit na ukázku poněkud jiný typ Vennova diagramu než obvykle. S tímto typem Vennova diagramu se lze též setkat poměrně často v učebnicové literatuře.

Důkazy množinových rovností

Chceme-li dokázat množinovou rovnost $M_1 = M_2$, kde M_1, M_2, jsou množiny, které vznikly jako výsledek množinových operací apod., *můžeme k tomu použít Vennovy diagramy* (viz předchozí příklady).

Lze však též provést *přímý důkaz na základě definice rovnosti množin* M_1, M_2, (viz tab. 1.22), který spočívá ve dvou krocích:

1. Dokážeme inkluzi $M_1 \subset M_2$, tj. že $\forall x \in U$: $(x \in M_1 \Rightarrow x \in M_2)$.
2. Dokážeme inkluzi $M_2 \subset M_1$, tj. že $\forall x \in U$: $(x \in M_2 \Rightarrow x \in M_1)$.

Příklady přímých důkazů množinových rovností

1. Máme dokázat množinovou rovnost (1. de Morganovu množinovou formuli; viz Vennův diagram v obr. 1.15a)

$$(A \cup B)' = A' \cap B'.$$

Řešení
Důkaz této množinové rovnosti provedeme ve dvou krocích:

1. Dokážeme inkluzi $(A \cup B)' \subset A' \cap B'$.

Přímý důkaz
Pro každé $x \in U$ platí řetězec implikací:
$x \in (A \cup B)' \Rightarrow x \notin (A \cup B) \Rightarrow (x \notin A) \wedge (x \notin B) \Rightarrow (x \in A') \wedge (x \in B') \Rightarrow$
$\Rightarrow x \in (A' \cap B')$.

2. Dokážeme inkluzi $A' \cap B' \subset (A \cup B)'$.

Přímý důkaz

Řetězec implikací z 1. kroku důkazu lze obrátit, čímž je důkaz proveden.

2. Máme dokázat množinovou rovnost (vyjadřující distributivnost operace průniku vůči sjednocení množin; viz Vennův diagram v obr. 1.18)

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

Řešení

Důkaz této množinové rovnosti opět provedeme ve dvou krocích:

1. Dokážeme inkluzi $(A \cup B) \cap C \subset (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

   Přímý důkaz

   Pro každé $x \in U$ platí řetězec implikací:
   $x \in (A \cup B) \cap C \Rightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in C) \Rightarrow$
   $\Rightarrow (x \in A \wedge x \in C) \vee (x \in B \wedge x \in C) \Rightarrow x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

2. Dokážeme inkluzi $(A \cap C) \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap C$.

   Přímý důkaz

   Řetězec implikací z 1. kroku důkazu lze obrátit, čímž je důkaz proveden.

Kartézský součin množin

***n*-ticí objektů (prvků)** $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ($n \in N$, $n \geqq 2$) rozumíme n-prvkovou množinu, tj. konečnou množinu o n prvcích $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Přitom nezáleží na pořadí, v jakém uvádíme prvky v zápise množiny, tj. $\{x_1, x_2\} = \{x_2, x_1\}$ apod. Jestliže pevně stanovíme pořadí, v němž budeme brát objekty (prvky), tj. stanovíme, který z nich vezmeme jako první, který druhý atd. až n-tý, dostáváme tzv. **uspořádanou *n*-tici objektů (prvků)** neboli **konečnou posloupnost**, jež se značí $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nebo $(x_k)_{k=1}^{n}$, kde $n \in N$, $n \geqq 2$.

Při zápisech uspořádaných n-tic se v některých případech (např. při označování souřadnic bodů) používají též hranaté závorky místo závorek kulatých. Pro uspořádané n-tice je *definován* pojem **rovnosti** takto: $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1', x_2', \ldots, x_n')$, právě když $x_1 = x_1' \wedge x_2 = x_2' \wedge \ldots \wedge x_n = x_n'$.

Kartézské násobení množin, tj. vytváření kartézských součinů (tab. 1.24), představuje další operaci s množinami, avšak podstatně odlišnou od základních množinových operací.

Příklady kartézských součinů množin

Jsou dány množiny $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, c, d\}$, $C = \{c\}$. Určete kartézské součiny $A \times B$, $A^2 = A \times A$, $C^2 = C \times C$, $A \times B \times C$.

Řešení

$A \times B = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, b), (b, c), (b, d), (c, b), (c, c), (c, d)\}$,
$A^2 = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$, $C^2 = \{(c, c)\}$,
$A \times B \times C = \{(a, b, c), (a, c, c), (a, d, c), (b, b, c), (b, c, c), (b, d, c), (c, b, c),$
$(c, c, c), (c, d, c)\}$

Definice kartézského součinu množin a kartézské mocniny množiny Tab. 1.24

Název a symbolické označení	Definice (slovní a symbolické vyjádření)
Kartézský součin množin A, B označovaný $A \times B$	**Kartézský součin** $A \times B$ je množina všech uspořádaných dvojic (x_1, x_2) prvků $x_1 \in A$, $x_2 \in B$. Tedy $A \times B = \{(x_1, x_2);\ x_1 \in A,\ x_2 \in B\}$.
Obecně **Kartézský součin množin** $M_1, M_2, \ldots, M_n$ ($n \in N$, $n \geqq 1$) označovaný $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$	**Kartézský součin** $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$ je množina všech uspořádaných n-tic $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ prvků $x_1 \in M_1$, $x_2 \in M_2$, ..., $x_n \in M_n$. Tedy: $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n =$ $= \{(x_1, x_2, \ldots, x_n);\ x_1 \in M_1, x_2 \in M_2, \ldots, x_n \in M_n\}$.
Speciálně pro $M_1 = M_2 = \ldots = M_n = M$: ***n*-tá kartézská mocnina množiny M** označovaná M^n	**Kartézská mocnina** M^n množiny M je množina všech uspořádaných n-tic $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ prvků $x_1 \in M$, $x_2 \in M$, ..., $x_n \in M$. Tedy: $M^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n);\ x_1, x_2, \ldots, x_n \in M\}$.

Při určování počtu prvků kartézského součinu dvou konečných množin se vychází ze *základní věty*:

Počet prvků kartézského součinu dvou konečných množin A, B o $|A|$, $|B|$ prvcích je dán vzorcem

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

(Všechny **prvky** $(x_1, x_2) \in A \times B$ lze totiž zapsat právě do tabulky o $|A|$ řádcích a $|B|$ **sloupcích**, v níž je $|A| \cdot |B|$ míst.)

Větu lze zobecnit pro n konečných množin:

Počet prvků kartézského součinu n konečných množin $M_1, M_2, \ldots, M_n$ ($n \in N$; $n \geqq 2$), které mají $|M_1|, |M_2|, \ldots, |M_n|$ prvků, je dán vzorcem

$$|M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n| = |M_1| \cdot |M_2| \cdot \ldots \cdot |M_n|.$$

Množinová zobrazení

Nechť A, B jsou neprázdné množiny. Přiřadíme-li ke každému prvku $x \in A$ právě jeden prvek $y \in B$ (čímž se vytvoří množina uspořádaných dvojic $(x, y) \in A \times B$), pak toto jednoznačné přiřazení (předpis) se nazývá **zobrazení množiny A do množiny B**. Značí se f, resp. F apod. Říkáme, že prvek x je **vzor** prvku y a prvek y je **obraz** prvku x v zobrazení f, říká se též, že y je **hodnota zobrazení** f v bodě (prvku) x a značí se $y = f(x)$. Množina A se nazývá **definiční obor zobrazení** f, a označuje se proto také $D(f)$, resp. D_f. Množina všech obrazů v zobrazení f se nazývá **obor hodnot zobrazení** f a označuje se $\mathsf{H}(f)$, resp. H_f. Platí $\mathsf{H}(f) \subset \mathsf{B}$.

Symbolicky se zapisuje zobrazení f množiny A do množiny B takto: f: A $\to$ B, popř. f: $y = f(x)$, anebo f: $x \mapsto f(x)$, $x \in$ A, $f(x) \in$ B.

Poznámka. V literatuře se lze setkat také s pojmem **zobrazení z množiny** A **do množiny** B, což je přiřazení (předpis), ve kterém *každému* prvku $x \in$ A se přiřazuje *nejvýše jeden* prvek $y \in$ B. Pojmy vzor, obraz, atd. se užívají obdobně jako v případě zobrazení množiny A do množiny B.

Speciální případy zobrazení f množiny A *do množiny* B:

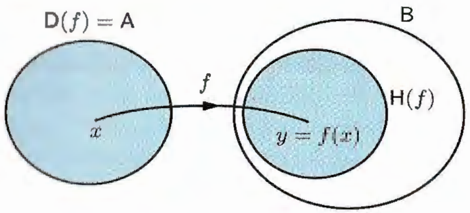
a) Je-li B = A, pak toto zobrazení f se nazývá **zobrazení v množině** A nebo **zobrazení množiny** A **do sebe**.

Na střední škole jsou nejdůležitější tato zobrazení v množině:

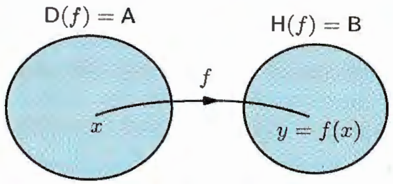
1. **Funkce jedné reálné proměnné**, což jsou zobrazení v množině všech reálných čísel R.
2. **Geometrická zobrazení** v rovině a v prostoru.

b) Je-li B = H(f), čili když v zobrazení f každý prvek množiny B je obrazem alespoň jednoho prvku množiny A, pak zobrazení f se nazývá **zobrazení množiny** A **na množinu** B. Speciálně pro B = A se nazývá **zobrazení množiny** A **na sebe**.

Schematické grafické znázornění množinových zobrazení: Na obr. 1.20 je znázorněno zobrazení f množiny A do množiny B, na obr. 1.21 zobrazení f množiny A na množinu B.



Obr. 1.20



Obr. 1.21

Pojem prostého zobrazení:

Jestliže v zobrazení f: A $\to$ B je každý prvek $y \in$ H(f) obrazem právě jednoho prvku $x \in$ D(f) = A neboli když každé dva různé vzory x_1, x_2 mají také různé obrazy $f(x_1)$, $f(x_2)$ (tj. když pro ně platí implikace $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$), pak zobrazení f se nazývá **prosté zobrazení**. Pro **prosté zobrazení množiny** A **na množinu** B se užívá též název **vzájemně jednoznačné zobrazení mezi množinami** A, B.

Pojem inverzního zobrazení k prostému zobrazení:

V případě libovolného prostého zobrazení f: A $\to$ B existuje k němu právě jedno takové prosté zobrazení, které ke každému prvku $y \in$ H(f) přiřazuje jeho vzor $x \in$ D(f). Toto zobrazení se nazývá **inverzní zobrazení** k zobrazení f a značí se f^{-1}.

Symbolicky lze vyjádřit jeho charakteristické (definiční) vlastnosti vztahy:

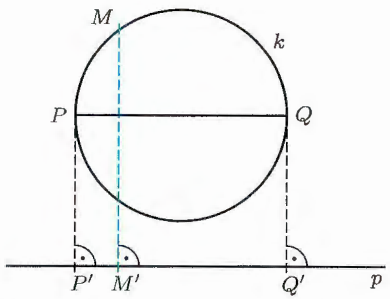
$$\mathsf{D}(f^{-1}) = \mathsf{H}(f), \quad \mathsf{H}(f^{-1}) = \mathsf{D}(f), \quad x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x).$$

***Příklady zobrazení množiny* A *do množiny* B*, resp. na množinu* B**

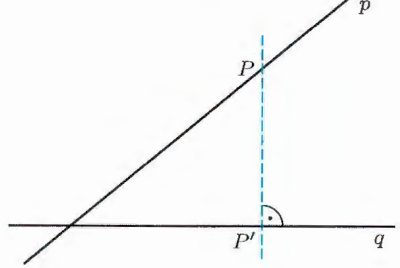
a) V rovině mějme dány dvě množiny bodů: A je kružnice k, B je vnější přímka p této kružnice. Každým bodem M kružnice k veďme kolmici k přímce p a její patu M' zvolme za obraz bodu M (obr. 1.22). Takto definované zobrazení je zobrazením množiny A (kružnice k) do množiny B (přímky p). Není to prosté zobrazení.

b) Ponecháme-li v předchozím příkladu z přímky p jen úsečku $P'Q'$ (obr. 1.22), půjde o zobrazení množiny A (kružnice k) na množinu B (úsečku $P'Q'$). Také toto zobrazení není prosté.

c) Nechť p, q jsou dvě různoběžky, které nejsou navzájem kolmé. Každým bodem $P \in p$ veďme kolmici k přímce q a její patu P' zvolme za obraz bodu P (obr. 1.23). Dostáváme prosté zobrazení množiny A (přímky p) na množinu B (přímku q) čili vzájemně jednoznačné zobrazení mezi těmito množinami.



Obr. 1.22



Obr. 1.23

Složené zobrazení

Mějme dány libovolné množiny A, B, K, L a dvojici zobrazení g: A $\to$ B, f: K $\to$ L, která jsou definována předpisy g: $u = g(x)$, $x \in$ D(g) = A, f: $y = f(u)$, $u \in$ D(f) = K. Obory hodnot zobrazení g, f jsou H(g) $\subset$ K, H(f) $\subset$ L. Nechť platí H(g) $\cap$ D(f) $\neq \emptyset$. Pak *definujeme:*

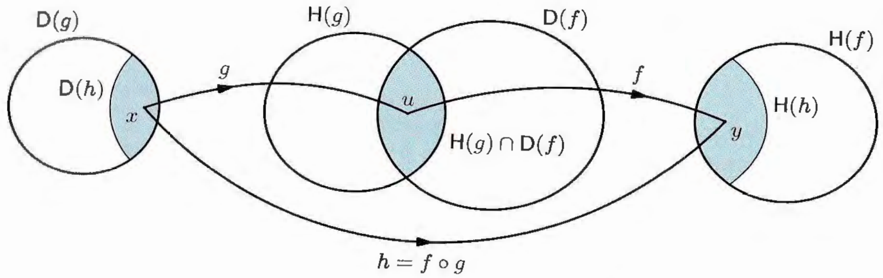
Zobrazení h se nazývá **složené zobrazení** ze zobrazení g, f (v uvedeném pořadí), právě když pro ně platí:

1. Definičním oborem zobrazení h je množina všech těch prvků $x \in$ D(g), pro něž je $g(x) \in$ D(f), tj. D(h) = $\{x \in \mathsf{D}(g);\ g(x) \in \mathsf{D}(f)\}$. (Protože je $g(x) \in$ D(f) $\wedge$ $g(x) \in$ H(g), je zároveň $g(x) \in$ H(g) $\cap$ D(f).)
2. Pro každé $x \in$ D(h) je $h(x) = f(u)$ čili $h(x) = f(g(x))$.

Toto složené zobrazení h se též značí $f \circ g$, tj. píšeme $h = f \circ g$. Zobrazení g se nazývá **vnitřní složka** a zobrazení f **vnější složka** zobrazení $h = f \circ g$.

Poznámka. Při praktickém užití se často setkáváme s takovými případy složeného zobrazení $h = f \circ g$, pro jehož složky g, f platí, že $\mathsf{H}(g) \subset \mathsf{D}(f)$, resp. speciálně $\mathsf{H}(g) = \mathsf{D}(f)$. Pak je $\mathsf{D}(h) = \mathsf{D}(g)$.

Operace vytváření složeného zobrazení $h = f \circ g$ z daných složek g, f (v uvedeném pořadí) se nazývá **skládání zobrazení** g, f. Jeho grafické znázornění je v obr. 1.24.



Obr. 1.24

Poznámka. Při skládání zobrazení téhož typu se zachovává typ zobrazení: Zobrazení složené ze dvou prostých zobrazení je prosté zobrazení. Zobrazení složené ze dvou zobrazení na množinu je zobrazení na množinu. Zobrazení složené ze dvou prostých zobrazení na množinu (vzájemně jednoznačných zobrazení) je prosté zobrazení na množinu (vzájemně jednoznačné zobrazení).

Příklady složených zobrazení

1. Jsou dána zobrazení g, f taková, že $\mathsf{D}(g) = \{a, b, c, d, e\}$, $g(a) = i$, $g(b) = g(c) = j$, $g(d) = g(e) = k$, $\mathsf{D}(f) = \mathsf{H}(g) = \{i, j, k\}$, $f(i) = p$, $f(j) = q$, $f(k) = r$. Utvořte složené zobrazení $h = f \circ g$.

   Řešení

   Složené zobrazení $h = f \circ g$ má definiční obor $D(h) = \mathsf{D}(f \circ g) = \mathsf{D}(g) = \{a, b, c, d, e\}$ a přiřazuje prvku a prvek $h(a) = p$, prvkům b, c prvek $h(b) = h(c) = q$ a prvkům d, e prvek $h(d) = h(e) = r$. Jeho oborem hodnot je tedy množina $\mathsf{H}(h) = \mathsf{H}(f \circ g) = \mathsf{H}(f) = \{p, q, r\}$.

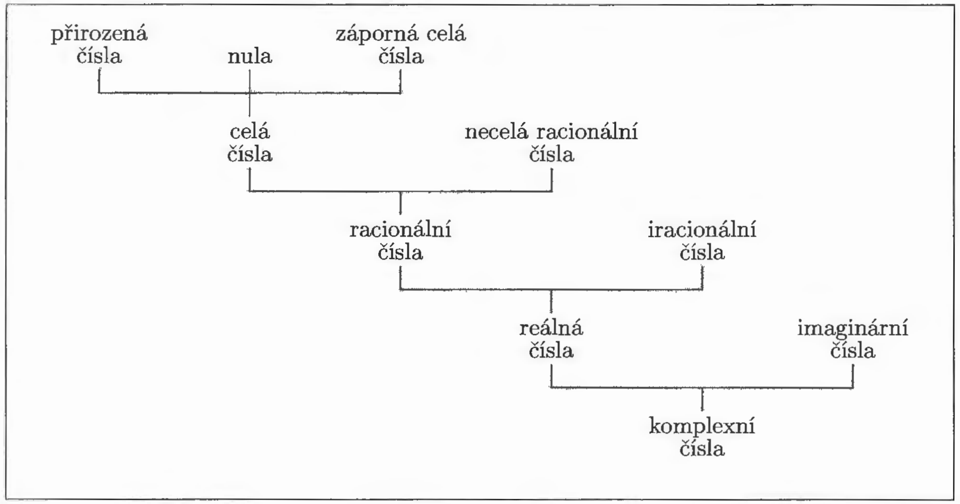
2. Nejdůležitějšími složenými zobrazeními ve středoškolské matematice jsou **složené funkce** (viz kap. 4.1) a **složená geometrická zobrazení** (viz kap. 9.8 a 9.15).

2 Číselné obory

2.1 Základní aritmetické pojmy

Jeden z nejdůležitějších a nejužívanějších pojmů matematiky je nepochybně *pojem čísla*. Během vývoje lidské společnosti a s ním spjatého vývoje matematiky se pojem čísla postupně rozšiřoval a prohluboval. Na základní a střední škole se rozšiřuje pojem čísla postupně, počínaje přirozenými čísly až k číslům komplexním. Do jisté míry je tento postup obdobou historického postupu rozvíjení pojmu čísla. Vztahy mezi jednotlivými druhy čísel vyjadřuje schéma uvedené v tabulce 2.1.

Vztahy mezi druhy čísel Tab. 2.1



Rovnost čísel

Chceme-li vyjádřit, že dva symboly představují totéž číslo, píšeme mezi ně *znak rovnosti* = zvaný též *rovnítko*. Jsou-li a, b táž čísla, píšeme tedy $a = b$ a čteme *a je rovno b*. Vztah vyjádřený tímto zápisem se nazývá **rovnost** čísel. Neplatí-li $a = b$, říkáme, že a je *různé* od b, což zapisujeme $a \neq b$.

Základní vlastnosti rovnosti čísel

Pro každá tři reálná čísla, resp. komplexní čísla a, b, c platí

$$a = b \Leftrightarrow b = a \qquad (\textit{symetričnost rovnosti}),$$

$$(a = b \wedge b = c) \Rightarrow a = c \qquad (\textit{tranzitivnost rovnosti}).$$

Početní operace

Použití čísel si vyžádalo zavedení **početních operací (výkonů)**, jimiž ke dvěma či více číslům přiřazujeme předepsaným způsobem (podle definice početního výkonu) jisté číslo.

Matematické zápisy (symboly), kterými vyjadřujeme početní výkony, jež mají být provedeny, a pořadí, v jakém se tak má stát, nazýváme **početní výrazy**.

Základní početní operace jsou **sčítání** a **násobení**. Každým dvěma číslům dané množiny čísel přiřazujeme podle definice těchto početních operací právě jedno číslo zvané jejich **součet** a právě jedno číslo zvané jejich **součin**. Součet čísel a, b značíme $a + b$ (čteme a plus b), jejich součin $a \cdot b$ nebo ab (čteme a krát b). V prvém případě se čísla a, b nazývají **sčítanci**, ve druhém případě **činitelé**. Pojem součtu a součinu lze zobecnit pro libovolný konečný počet sčítanců, resp. činitelů.

Množina všech čísel určitého druhu, ve které jsou definovány bez omezení operace sčítání a násobení, ze nazývá **obor čísel** (též **číselný obor**). Názvy a symbolická označení významných číselných oborů uvádíme v tabulce 2.2. Pro uvedené číselné obory platí tyto inkluze:

$$\mathsf{N} \subset \mathsf{N}_0 \subset \mathsf{Z} \subset \mathsf{Q} \subset \mathsf{R} \subset \mathsf{C}$$

Číselné obory Tab. 2.2

Název číselného oboru	Označení
Obor přirozených čísel (celých kladných čísel)	N
Obor nezáporných celých čísel	N_0
Obor celých čísel	Z
Obor racionálních čísel	Q
Obor reálných čísel	R
Obor komplexních čísel	C

Poznámka. Užívá se též názvů množina všech přirozených čísel, ..., reálných čísel, komplexních čísel. Zkráceně se mluví o oboru či množině $\mathsf{N}, \dots, \mathsf{R}, \mathsf{C}$.

K početním operacím sčítání a násobení zavádíme **inverzní početní operace**, které nazýváme **odčítání** a **dělení**. Jimi přiřazujeme ke dvěma číslům z daného oboru číslo zvané jejich rozdíl a číslo zvané jejich podíl. **Rozdíl čísel** a, b (v uvedeném pořadí) je takové číslo x, pro něž platí $b + x = a$. Označuje se $a - b$ (čteme a mínus b). Číslo a se nazývá **menšenec**, číslo b **menšitel**. **Podíl čísel** a, b (v uvedeném pořadí), kde $b \neq 0$, je takové číslo x, pro něž platí $b \cdot x = a$. Podíl čísel a, b označujeme $a : b$ nebo symbolem $\frac{a}{b}$ zvaným **zlomek**. Čísla a, b se nazývají **dělenec** a **dělitel**, u zlomku **čitatel** a **jmenovatel**.

Poznámka. Číslo 0 nemůže být dělitelem žádného čísla $a \neq 0$, neboť rovnost $0 \cdot x = a$ neplatí pro žádné (reálné ani komplexní) číslo x. Dále číslo 0 nemůže být ani dělitelem sama sebe ($a = 0$), neboť rovnost $0 \cdot x = 0$ platí pro každé (reálné i komplexní) číslo x, a tedy výraz $0 : 0$ by nevyjadřoval jednoznačný výsledek dělení. Říkáme proto, že **výraz** $a : 0$ **nemá smysl** pro žádné (reálné ani komplexní) číslo a. Odtud vyplývá pro podíl $a : b$ definiční podmínka $b \neq 0$.

Základní definiční podmínka pro podíl
Pro každý podíl $a : b$ čili $\frac{a}{b}$ musí být splněna podmínka $b \neq 0$, tj. dělitel (jmenovatel) se nesmí rovnat nule.

Další dvě početní operace jsou umocňování a odmocňování. Pro každé $n \in \mathsf{N}$ se *definuje*: Součin n činitelů rovných číslu a se značí a^n a nazývá se **n-tá mocnina čísla** a. Příslušná početní operace se nazývá **umocňování** čísla a mocnitelem n. *Definici* **n-té odmocniny čísla** a (též **z čísla** a) v oboru reálných čísel označovanou $\sqrt[n]{a}$ viz v kap. 2.6 a v oboru komplexních čísel označovanou $(\sqrt[n]{a})_{\mathsf{C}}$ viz kap. 2.8. Příslušná početní operace se nazývá **odmocňování** čísla a odmocnitelem n.

Při zapisování početních operací je obvyklá následující *úmluva*: Nejsou-li v jejich zápisu (početním výrazu) závorky, provádíme nejprve umocňování a odmocňování, pak násobení a dělení a poté sčítání a odčítání. Jsou-li v jejich zápisu závorky, provádíme nejprve operace v závorkách; v případě, že je závorek více typů, provádějí se nejprve operace v závorkách, které jsou uvnitř ostatních.

2.2 Obor přirozených čísel

Čísla 1, 2, 3, ... se nazývají **přirozená čísla. Obor přirozených čísel** (množina všech přirozených čísel) se značí N.

Poznámka. V literatuře se někdy mezi přirozená čísla zahrnuje též číslo **nula**, jež vyjadřuje počet prvků prázdné množiny. Na střední škole je však vhodnější z hlediska formulace většiny vět o přirozených číslech nulu mezi přirozená čísla nezahrnovat, a proto tak učiníme i v této knize (v souladu s publikací Názvy a značky školské matematiky). Množinu všech přirozených čísel rozšířenou o nulu budeme označovat symbolem N_0, tj. $\mathsf{N}_0 = \mathsf{N} \cup \{0\}$.

Intuitivní představa přirozených čísel úzce souvisí s jejich *užitím ve dvou významech:*

a) Přirozenými čísly se vyjadřují *počty prvků konečných neprázdných množin.* Odpovídá se jimi tedy na otázku: *Kolik?*

b) Přirozenými čísly se vyjadřuje *pořadí prvků při jejich uspořádání.* Odpovídá se pak jimi na otázku: *Kolikátý?*

Operaci sčítání dvou přirozených čísel m, n lze v pojetí a) vykládat takto: Má-li množina A n prvků a s ní disjunktní množina B m prvků, pak **součet** $n + m$ je roven počtu prvků sjednocení těchto množin $\mathsf{A} \cup \mathsf{B}$.

Operaci násobení dvou přirozených čísel m, n lze chápat jako opakované n-násobné sčítání téhož sčítance m: **Součin** mn je roven součtu n sčítanců vesměs rovných číslu m.

Poznámka. Matematika na základní škole a obvykle i na střední škole se omezuje na uvedené *intuitivní pojetí pojmu přirozeného čísla*. Toto pojetí je postačující pro běžnou početní praxi, avšak z hlediska logické výstavby matematiky (viz kap. 1.1) patří pojem přirozeného čísla mezi *základní pojmy*, které se zavádějí *axiomaticky*. V teoretické aritmetice se formuluje tato soustava axiomů, tzv. **Peanových axiomů**, jimiž se charakterizuje množina všech přirozených čísel N:

1. axiom 1 je přirozené číslo.

2. axiom Ke každému přirozenému číslu n existuje právě jedno přirozené číslo n', které se nazývá **následovník** čísla n.

3. axiom Pro každé přirozené číslo n platí, že $n' \neq 1$.

4. axiom Jestliže $m' = n'$, pak $m = n$.

5. axiom (zvaný **princip matematické indukce**) Jestliže pro některou množinu přirozených čísel M platí

I. $1 \in \mathsf{M}$,

II. $(n \in \mathsf{M}) \Rightarrow (n' \in \mathsf{M})$,

pak množina M obsahuje všechna přirozená čísla, tj. $\mathsf{M} = \mathsf{N}$.

V termínech těchto axiomů se pak definují *operace sčítání a násobení přirozených čísel* (přičemž $n + 1 = n'$, $n \cdot 1 = n$).

Zápis přirozených čísel v desítkové soustavě

Ve škole i v praxi obvykle zapisujeme přirozená čísla v tzv. **číselné soustavě o základu deset** neboli **desítkové (dekadické) číselné soustavě** na základě *věty*:

Každé přirozené číslo a lze vyjádřit právě jedním způsobem *v rozvinutém zápisu* ve tvaru

$$a = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0$$

neboli ve *zkráceném zápisu*

$$a = a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0,$$

kde $n \in \mathsf{N}_0$, $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ jsou některé z číslic $0, 1, 2, \ldots, 9$, přičemž $a_n \neq 0$.

O číslici a_i se říká, že je **číslicí (cifrou) řádu** i čísla a. Číslo 10^i se nazývá **jednotka řádu** i.

V desítkové číselné soustavě tvoří vždy deset jednotek nižšího řádu jednu jednotku následujícího vyššího řádu.

Poznámka. Jednotky některých řádů v desítkové číselné soustavě mají speciální názvy:

$10^0 = 1$ . . . *základní jednotka*,	$10^1 = 10$ . . . *desítka*,
$10^2 = 100$ . . . *stovka*,	$10^3 = 1\,000$ . . . *tisícovka*
$10^6 = 1\,000\,000$ . . . *milion*,	$10^9 = 1\,000\,000\,000$ . . . *miliarda*
10^{12} . . . *bilion*,	10^{15} . . . *biliarda*,
10^{18} . . . *trilion*,	10^{24} . . . *kvadrilion*,
10^{30} . . . *kvintilion*,	10^{36} . . . *sextilion*,
10^{42} . . . *septilion*,	10^{48} . . . *oktilion*.

(Je třeba upozornit na to, že tyto názvy jsou užívány v naší, německé a anglické terminologii, avšak ve francouzské a americké terminologii se neužívá pro 10^9 název miliarda, ale bilion, pro 10^{12} se používá název trilion, pro 10^{15} název kvadrilion atd.)

Příklady rozvinutého a zkráceného zápisu přirozených čísel v desítkové číselné soustavě

Vyjádřete

a) přirozené číslo 5 328 v rozvinutém zápise,

b) přirozené číslo $2 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$ ve zkráceném zápise.

Řešení

a) $5\,328 = 5 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0$

b) $2 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0 = 200 + 70 + 4 = 274$

Zápisy přirozených čísel v desítkové číselné soustavě jsou velmi výhodné pro snadné provádění *početních výkonů* (*operací*) s nimi tak, jak je známe ze základní školy. Tyto zápisy jsou též často užívány *v důkazových úlohách o přirozených číslech.*

Číselné soustavy

Číselnou soustavou je nazývána každá soustava znaků a pravidel, která slouží k zápisu přirozených čísel (a obecněji reálných čísel). Číselné soustavy se rozdělují na poziční a nepoziční.

Poziční číselné soustavy jsou takové číselné soustavy, u nichž význam znaku (číslice) závisí na místě (pozici) v zápisu čísla. Mluví se tu o *místní* (*poziční*) *hodnotě znaku* (*číslice*).

Typickým a běžně užívaným příkladem poziční číselné soustavy je **desítková (dekadická) číselná soustava**, ve které jsou zápisy přirozených čísel (a obecněji reálných čísel) tvořeny pomocí deseti číslic 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Poznámka. Číslice 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 se nazývají *arabské číslice* nebo též *arabsko-indické číslice*, neboť historicky pocházejí od Indů, od nichž je převzali Arabové, kteří je asi před 1 200 lety přenesli při svých výbojích do Evropy. K jejich běžnému použití však zde dochází až od 12. století. Počítání (provádění početních operací) s přirozenými čísly zapsanými v desítkové číselné soustavě se pak postupně stalo standardní součástí školské matematiky.

Kromě desítkové číselné soustavy se někdy používají i jiné poziční číselné soustavy. Zejména v číslicových počítačích je používána **poziční číslicová soustava o základu dvě** neboli **dvojková (binární, dyadická) číselná soustava**, v níž se přirozená čísla zapisují pomocí dvou číslic (cifer) 0 a 1 na základě *věty*:

Každé přirozené číslo a lze vyjádřit právě jedním způsobem *v rozvinutém zápisu* tvaru

$$a = a_n \cdot 2^n + a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 2^1 + a_0 \cdot 2^0$$

neboli ve *zkráceném zápisu*

$$a = (a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0)_2 ,$$

kde $n \in \mathbb{N}_0$, $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$ je některá z číslic 0, 1, přičemž $a_n \neq 0$ (tj. $a_n = 1$).

Poznámka. V konkrétních případech se zápis $(a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0)_2$ často uvádí bez závorky, viz následující příklady. V literatuře se lze však též setkat i s důsledným psaním závorek v těchto zápisech.

Příklady převodu zápisu přirozených čísel z desítkové číselné soustavy do dvojkové a naopak

a) Čísla 5 a 10 zapsaná v desítkové soustavě zapište ve dvojkové soustavě.

b) Číslo 11 101_2 zapsané ve dvojkové soustavě zapište v desítkové soustavě.

Řešení

Užitím uvedené věty dostáváme:

a) $5 = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 101_2$, $10 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 1\,010_2$

b) $11\,101_2 = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 16 + 8 + 4 + 1 = 29$

Poznámka. Historicky je v různých oblastech světa doložen vznik pozičních číselných soustav o základech 5, 7, 9, 10, 12, 20 a 60. Zbytky těchto číselných soustav se ve speciálních případech udržely do dnešní doby. Např. šedesátková soustava pro měření úhlů ve stupních, minutách a vteřinách, dvanáctková soustava v pojmech tucet (12) a veletucet ($12^2 = 144$). Lze se též setkat s použitím pozičních číselných soustav o základech 8 a 16. Obecně se v **poziční číselné soustavě o základu** z ($z \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$) neboli z-**adické číselné soustavě** přirozená čísla zapisují pomocí z znaků (arabských číslic, popř. číslic označených písmeny).

Vznik a rozvoj pozičních číselných soustav, zejména desítkové soustavy, představovaly historicky velký pokrok v porovnání s dřívějšími **nepozičními číselnými soustavami**. Z nich je dosud aktuální **římská číselná soustava**, která vznikla ve starověkém Římě a byla upravena ve středověku. V této modifikované podobě se s ní setkáváme i v současnosti při zápisech přirozených čísel pomocí římských číslic, např. v zápisech letopočtů na památných budovách a pomnících, při uvádění pořadí panovníků, číslování kapitol knih apod.

Zápis přirozených čísel pomocí římských číslic

Římské číslice (cifry) jsou tvořeny sedmi písmennými znaky, jejichž číselné hodnoty jsou uvedeny v tabulce 2.3.

Tabulka římských číslic Tab. 2.3

Znak římské číslice	I	V	X	L	C	D	M
Znamená (má číselnou hodnotu) v desítkové soustavě	1	5	10	50	100	500	1 000

Každá římská číslice má jen svou pevnou číselnou hodnotu, nikoliv však místní (poziční) hodnotu. Pro zápisy přirozených čísel pomocí dvou nebo více římských číslic platí následující pravidla.

Pravidla pro zápis přirozených čísel pomocí římských číslic

1. Je-li za znakem římské číslice zapsán znak římské číslice s menší číselnou hodnotou, pak se jejich číselné hodnoty sčítají.
   Např. VI = 5 + 1, XI = 10 + 1, CX = 100 + 10 = 110.

2. Je-li před znakem římské číslice zapsán znak římské číslice s menší číselnou hodnotou, pak se od větší číselné hodnoty odčítá menší číselná hodnota.
   Např. IV = 5 − 1 = 4, IX = 10 − 1, XL = 50 − 10 = 40, XC = 100 − 10 = 90, CD = 500 − 100 = 400, CM = 1 000 − 100 = 900.

3. Jsou-li stejné znaky římských číslic zapsány vedle sebe, pak se jejich číselné hodnoty sčítají. Přitom se kladou doplňkové podmínky: Kterýkoliv ze znaků I, X, C se může vyskytovat vedle sebe nejvýše třikrát, znak M libovolněkrát. Znaky V, L, D se mohou v zápise přirozeného čísla vyskytovat nejvýše jednou.
   Např. XX = 10 + 10 = 20, CCC = 100 + 100 + 100 = 300, MMMM = $4 \cdot 1\,000 =$ $= 4\,000$.

4. Ve složitějších případech se uvedená pravidla navzájem kombinují.
   Např. VII = $5 + 2 \cdot 1 = 7$, XXIII = $2 \cdot 10 + 3 \cdot 1 = 23$, XXXVI = $3 \cdot 10 +$ $+ 5 + 1 = 36$, XLVII = $(50 - 10) + 5 + 2 \cdot 1 = 47$, CLXXIII = $100 + 50 +$ $+ 2 \cdot 10 + 3 \cdot 1 = 173$, CDXII = $(500 - 100) + 10 + 2 \cdot 1 = 412$, MDCLXVI = $= 1\,000 + 500 + 100 + 50 + 10 + 5 + 1 = 1\,666$ (toto přirozené číslo je zajímavé tím, že jeho zápis pomocí znaků římských číslic obsahuje všech sedm znaků právě jednou), MCMLXVIII = $1\,000 + (1\,000 - 100) + 50 + 10 + 5 + 3 \cdot 1 =$ $= 1\,968$, MMVII = $2 \cdot 1\,000 + 5 + 2 \cdot 1 = 2\,007$, MMMX = $3 \cdot 1\,000 + 10 =$ $= 3\,010$.

Poznámky k pravidlům pro zápis přirozených čísel pomocí římských číslic.

a) Podle uvedených pravidel se přirozená čísla zapisují vždy tak, že se neprovádí více než jedno odčítání číselných hodnot znaků římských číslic (i když by větší počet odčítání vedl ke stručnějšímu zápisu).

b) V současné praxi se lze setkat s tím, že někteří uživatelé kromě uvedených standardních dvojic znaků římských číslic s odčítáním číselných hodnot podle 2. pravidla použijí i některou jinou dvojici.
   Např. alternativně k obvyklému zápisu XCIX = (100 − 10) + (10 − 1) = 99 je možné se setkat s vyjádřením IC = 100 − 1 = 99.

c) Podle označení zavedeného ve středověku pruh nad znakem římské číslice znamená vynásobení její číselné hodnoty tisícem.
   Např. $\overline{\mathrm{X}} = 1\,000 \cdot 10 = 10\,000$, $\overline{\mathrm{C}} = 1\,000 \cdot 100 = 100\,000$, $\overline{\mathrm{M}} = 1\,000 \cdot 1\,000 =$ $= 1\,000\,000$.

Věta o zbytkovém tvaru přirozeného čísla
Každé přirozené číslo a lze vyjádřit pomocí libovolného přirozeného čísla $b > 1$ právě jedním z výrazů

$$bk,\ bk+1,\ bk+2,\ \dots,\ bk+(b-1),\ \text{kde } k \in \mathsf{N}_0,$$

tj. ve tvaru $a = bk + z$, $z \in \mathsf{N}_0$, $0 \leq z < b$.

Výrazu $bk + z$ se říká **zbytkový tvar čísla** a (pro zvolené $b > 1$), číslo z se ıazývá **zbytek při dělení** čísla a číslem b. Je-li $z = 0$, pak číslo k představuje **podíl** čísel a, b (v uvedeném pořadí) a operace **dělení** v tomto případě je inverzní operací k násobení, říká se jí **dělení beze zbytku**. Je-li $z \neq 0$, pak číslo k se nazývá **neúplný podíl** a operaci dělení v tomto případě se říká **dělení se zbytkem**.

Příklad vyjádření přirozeného čísla ve zbytkovém tvaru
Libovolné přirozené číslo n, pro které při dělení přirozeným číslem $b = 12$ vychází zbytek $z = 5$, má zbytkový tvar vyjádřen zápisem $n = 12k + 5$, kde $k \in \mathsf{N}_0$. Tak např. $41 = 12 \cdot 3 + 5$.

Dělitelnost v oboru přirozených čísel

V oboru N pro libovolnou dvojici přirozených čísel a, b *definujeme*:
Číslo a je **dělitelné** číslem b, právě když existuje takové přirozené číslo k, že platí $a = kb$, tj. když číslo a je **násobkem** čísla b. Říkáme pak též, že číslo b je **dělitelem** čísla a nebo že číslo b **dělí** číslo a. Symbolicky to vyjadřujeme zápisem $b \mid a$. Jestliže naopak číslo b nedělí číslo a, píšeme $b \nmid a$.

Příklad
Číslo 20 má právě šest dělitelů v oboru N: 1, 2, 4, 5, 10, 20. Píšeme $1 \mid 20$, $2 \mid 20, \dots,$ $20 \mid 20$.

Poznámka. Termín **dělitel** se užívá ve dvou smyslech; jednak v obecnějším smyslu pro označení čísla, kterým se dělí, jednak v právě uvedeném speciálnějším významu. O který z obou významů jde, je vždy patrné z kontextu.

Některé z dělitelů přirozených čísel lze určit přímo ze zápisu přirozených čísel v desítkové číselné soustavě na základě *vět*, jimž se říká **kritéria** (též **znaky**) **dělitelnosti**.

Kritéria (znaky) dělitelnosti přirozených čísel zapsaných v desítkové soustavě
Přirozené číslo je *dělitelné dvěma*, právě když jeho zápis končí některou z číslic 0, 2, 4, 6, 8.
Přirozené číslo je *dělitelné třemi*, právě když jeho ciferný součet je dělitelný třemi.
Přirozené číslo je *dělitelné čtyřmi*, právě když jeho poslední dvojčíslí je dělitelné čtyřmi.
Přirozené číslo je *dělitelné pěti*, právě když jeho zápis končí číslicí 5 nebo 0.
Přirozené číslo je *dělitelné šesti*, právě když je dělitelné dvěma a zároveň třemi.
Přirozené číslo je *dělitelné osmi*, právě když jeho poslední trojčíslí je dělitelné osmi.
Přirozené číslo je *dělitelné devíti*, právě když jeho ciferný součet je dělitelný devíti.
Přirozené číslo je *dělitelné deseti*, právě když jeho zápis končí číslicí 0.

Prvočísla a čísla složená

Pro každé přirozené číslo n platí rovnost $n = 1 \cdot n$. Odtud plyne: Číslo 1 je dělitelné jediným přirozeným číslem, a to sebou samým. Libovolné přirozené číslo $n > 1$ je dělitelné číslem 1 a sebou samým, těmto dvěma dělitelům se říká **samozřejmí (triviální) dělitelé** čísla n.

Každé přirozené číslo $n > 1$, které je dělitelné jen číslem 1 a samo sebou, tj. má právě jen dva dělitele 1 a n (tj. samozřejmé dělitele), se nazývá **prvočíslo**. Každé přirozené číslo $n > 1$, jež není prvočíslem (tj. má alespoň tři různé dělitele), se nazývá **složené číslo**. Číslo 1 není ani prvočíslem, ani číslem složeným.

Prvočísel je nekonečně mnoho (důkaz této existenční hypotézy viz v kap. 1.1). Jsou to *např.* čísla 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, ... *Složená čísla jsou všechna ostatní přirozená čísla kromě čísla* 1. Jsou to tedy *např.* čísla 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 30, ...

Poznámka. Jednoduchou metodou pro nalezení všech prvočísel menších než dané přirozené číslo n je tzv. *Eratosthenovo síto*: Nejprve napíšeme uspořádaně podle velikosti všechna přirozená čísla od 2 do n. Ponecháme první z nich, tj. prvočíslo 2, a vyškrtneme všechny jeho následující násobky (tj. každé druhé číslo). První neškrtnuté číslo je 3, což je prvočíslo, které ponecháme a vyškrtneme všechny jeho následující násobky (tj. každé třetí číslo). První další neškrtnuté číslo je 5, což je prvočíslo, jež ponecháme a vyškrtneme všechny jeho následující násobky (tj. každé páté číslo). Obdobně postupujeme pro další nevyškrtnutá čísla, dokud je to možné. Zbylá nevyškrtnutá čísla jsou právě všechna prvočísla menší než n.

Příklad
Nalezněte všechna prvočísla menší než 20.
Řešení
Užitím Eratosthenova síta postupně dospíváme k výsledku:
$2, 3, \cancel{4}, 5, \cancel{6}, 7, \cancel{8}, \cancel{9}, \cancel{10}, 11, \cancel{12}, 13, \cancel{14}, \cancel{15}, \cancel{16}, 17, \cancel{18}, 19, \cancel{20}$.

Vyjádření složeného čísla ve tvaru součinu jeho dělitelů větších než 1 se říká **rozklad složeného čísla** (v součin přirozených čísel). Speciálně rozklad složeného čísla v součin prvočísel se nazývá **prvočíselný rozklad složeného čísla**. Prvočísla v tomto rozkladu se nazývají **prvočinitelé**.

Příklady prvočíselného rozkladu složených čísel

$$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5, \qquad 11\,484 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 11 \cdot 29.$$

Základní metoda určení prvočíselného rozkladu složeného čísla $n > 1$ je založena na jeho postupném dělení prvočísly $p = 2, 3, 5, \dots$ menšími než n. (Při tom užíváme přehledů prvočísel uvedených v Matematických, fyzikálních a chemických tabulkách pro střední školy. Zejména často potřebujeme prvočísla menší než 100, jichž je celkem pětadvacet: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.) Tento postup zjišťování prvočíselného rozkladu složeného čísla může usnadnit následující *věta*:

> Je-li přirozené číslo $n > 1$ složené číslo, pak je dělitelné alespoň jedním prvočíslem p, pro které platí
> $$p \leqq \sqrt{n}.$$

Uvědomme si také, že na základě *obměny této věty* lze zjistit, zda dané přirozené číslo $n > 1$ je prvočíslo:

> Není-li přirozené číslo $n > 1$ dělitelné žádným prvočíslem p, pro které platí vztah $p \leqq \sqrt{n}$, pak n je prvočíslo.

Příklady

Rozhodněte, zda daná přirozená čísla a) 437, b) 449, c) 5 547 jsou prvočísla, nebo složená čísla, a ve druhém případě určete jejich prvočíselný rozklad.

Řešení (na základě uvedených vět)

a) Určíme $\sqrt{437} \doteq 20{,}9$. Protože 20 není prvočíslo, zjišťujeme dělitelnost čísla 437 prvočísly $p \leqq 19$; $437 : 19 = 23 \Rightarrow 437 = 19 \cdot 23$. (Tento prvočíselný rozklad lze též nalézt v Matematických, fyzikálních a chemických tabulkách pro střední školy).

b) Vypočteme $\sqrt{449} \doteq 21{,}2$. Ověříme: číslo 449 není dělitelné žádným prvočíslem $p \leqq 19 \Rightarrow 449$ je prvočíslo. (To můžeme také přímo zjistit v Matematických, fyzikálních a chemických tabulkách pro střední školy.)

c) $\sqrt{5\,547} \doteq 74{,}5$, proto ověřujeme dělitelnost čísla 5 547 prvočísly $p \leqq 73$. Zjišťujeme $5\,547 : 3 = 1\,849$ a $\sqrt{1\,849} = 43$, takže $5\,547 = 3 \cdot 43^2$.

Jestliže v prvočíselných rozkladech přirozených čísel uspořádáme základy mocnin prvočísel vzestupně, pak je takový zápis prvočíselného rozkladu jednoznačný pro každé přirozené číslo. Tuto skutečnost vyjadřuje *věta*:

> **Základní věta aritmetiky**
>
> Každé přirozené číslo $n > 1$ lze zapsat jediným způsobem ve tvaru
> $$n = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{r_k},$$
> kde $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$ jsou prvočísla a $r_1, r_2, \ldots, r_k$ přirozená čísla.

Poznámka. Základní věta aritmetiky platí pro každé přirozené číslo $n > 1$, tedy speciálně pro prvočíslo n, kdy $n = p_1$ ($k = 1$, $r_1 = 1$). Významný je ovšem především prvočíselný rozklad složených čísel n podle této věty.

Společní dělitelé přirozených čísel, největší společný dělitel, společné násobky přirozených čísel, nejmenší společný násobek

Společným dělitelem přirozených čísel $n_1, n_2, \ldots, n_k$ nazýváme každé přirozené číslo, jež je dělitelem každého z nich. Ten ze společných dělitelů, který je větší než všichni ostatní společní dělitelé, se nazývá **největší společný dělitel** čísel $n_1, n_2, \ldots, n_k$ a označuje se $D(n_1, n_2, \ldots, n_k)$.

> *Věty o společných dělitelích přirozených čísel*
>
> *V.1.* Je-li číslo d společným dělitelem přirozených čísel n_1, n_2, pak je také dělitelem čísla $k_1n_1 + k_2n_2$, kde k_1, k_2 jsou libovolná přirozená čísla, a pro $k_1n_1 > k_2n_2$ je dělitelem čísla $k_1n_1 - k_2n_2$.
>
> *Speciálně:* Je-li d společným dělitelem čísel n_1, n_2, pak je též dělitelem jejich součtu $n_1 + n_2$ a rozdílu $n_1 - n_2$ (pro $n_1 > n_2$).
>
> *V.2.* Jsou-li n_1, n_2 přirozená čísla a d je společným dělitelem čísel n_1, $n_1 + n_2$, resp. $n_1 - n_2$ (pro $n_1 > n_2$), pak je také dělitelem čísla n_2.
>
> *V.3.* Je-li číslo d dělitelem alespoň jednoho z přirozených čísel n_1, n_2 (tj. $d \mid n_1 \vee d \mid n_2$), potom je též dělitelem jejich součinu n_1n_2.
>
> *V.4.* Je-li číslo d společným dělitelem přirozených čísel n_1, n_2, pak jejich součin je dělitelný d^2.

Poznámky.

1. Obrácená věta k větě V.1 neplatí, jak ukazuje protipříklad: Číslo 5 je dělitelem součtu $6 + 9$, avšak přitom není dělitelem ani jednoho ze sčítanců 6, 9.
2. Také obrácená věta k větě V.3 neplatí, jak ukazuje protipříklad: Číslo 6 je dělitelem součinu $3 \cdot 4$, avšak přitom není dělitelem ani jednoho z činitelů 3, 4.
3. Ani obrácená věta k větě V.4 neplatí, jak plyne z protipříkladu: Číslo 2^2 je dělitelem součinu $3 \cdot 8$, a přitom číslo 2 není dělitelem činitele 3.

Základní metoda určení největšího společného dělitele přirozených čísel $n_1, n_2, \ldots, n_k$ je založena na následující *větě*:

> *V.5.* Největší společný dělitel $D(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ je roven součinu mocnin těch prvočísel, která se vyskytují zároveň ve všech prvočíselných rozkladech čísel $n_1, n_2, \ldots, n_k$, přičemž za mocnitel každého prvočísla se bere nejmenší mocnitel vyskytující se u tohoto prvočísla v rozkladech čísel $n_1, n_2, \ldots, n_k$.

Příklad

Máme určit největšího společného dělitele čísel $n_1 = 2\,604$, $n_2 = 1\,836$.

Řešení

Provedeme prvočíselné rozklady čísel n_1, n_2.

$n_1 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 31$, $n_2 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 17$ a odtud určíme $D(n_1, n_2) = 2^2 \cdot 3 = 12$.

Dále uvedeme větu V.6, jež je základem tzv. *metody postupného dělení* neboli *Eukleidova algoritmu pro určení největšího společného dělitele* dvou přirozených čísel n_1, n_2.

Poznámka. Termín **algoritmus** znamená postup s přesně popsanými kroky, který vede ke stanovenému cíli.

V.6. Jestliže pro přirozená čísla n_1, n_2 platí

$$n_1 = kn_2 + z, \text{ kde } k \in \mathbb{N}_0, \ z \in \mathbb{N},$$

pak každý společný dělitel čísel n_1, n_2 je také dělitelem čísla z a každý společný dělitel čísel n_2, z je dělitelem čísla n_1, tj. společným dělitelem čísel n_1, n_2.

Důsledek: Největší společný dělitel čísel n_1, n_2 je roven největšímu společnému děliteli čísel n_2, z: $D(n_1, n_2) = D(n_2, z)$.

Eukleidův algoritmus: Při určování největšího společného dělitele $D(n_1, n_2)$ dvou přirozených čísel $n_1 > n_2$ nejprve dělíme větší číslo n_1 menším číslem n_2, potom menší číslo n_2 zbytkem prvního dělení z_1, dále první zbytek z_1 dělíme zbytkem druhého dělení z_2 a obdobně pokračujeme tak dlouho, až dostaneme podíl beze zbytku. Pak podle uvedeného důsledku věty V.6 pro hledaného největšího společného dělitele $D(n_1, n_2)$ platí $D(n_1, n_2) = D(n_2, z_1) = D(z_1, z_2) = \ldots = D(z_{r-1}, z_r) = z_r$, kde z_r je poslední nenulový zbytek při postupném dělení.

Poznámka. Užití Eukleidova algoritmu k určování největšího společného dělitele $D(n_1, n_2)$ je zvláště vhodné pro velká čísla n_1, n_2, pro která by byl obtížný prvočíselný rozklad, zatímco dělení čísel se provádí jednoduše pomocí výpočetní techniky.

Příklad užití Eukleidova algoritmu

Máme určit největšího společného dělitele čísel $n_1 = 42\,336$, $n_2 = 11\,340$.

Řešení

Postupným dělením podle Eukleidova algoritmu dostáváme:

$$\begin{aligned}42\,336 &= 3 \cdot 11\,340 + 8\,316\\ 11\,340 &= 1 \cdot 8\,316 + 3\,024\\ 8\,316 &= 2 \cdot 3\,024 + 2\,268\\ 3\,024 &= 1 \cdot 2\,268 + 756\\ 2\,268 &= 3 \cdot 756\end{aligned}$$

Odtud plyne, že $D(42\,336, 11\,340) = 756$.

Přirozená čísla $n_1, n_2, \ldots, n_k$ která mají alespoň jednoho společného dělitele $d > 1$, se nazývají **soudělná čísla**. Nemají-li přirozená čísla $n_1, n_2, \ldots, n_k$ žádného společného dělitele $d > 1$, tj. když je $D(n_1, n_2, \ldots, n_k) = 1$, říká se jim **nesoudělná čísla**.

Příklad

V oboru N určete všechny rozklady čísla 60 na součin dvou čísel a) nesoudělných, b) soudělných. Kolik je takových rozkladů, nepřihlížíme-li k pořadí činitelů?

Řešení

Číslo 60 je v oboru N dělitelné čísly 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60, takže:

a) jeho rozklady v součin dvojic nesoudělných čísel jsou čtyři $60 = 1 \cdot 60 = 3 \cdot 20 = 4 \cdot 15 = 5 \cdot 12$,

b) rozklady v součin dvojic soudělných čísel jsou dva $60 = 2 \cdot 30 = 6 \cdot 10$.

Společným násobkem přirozených čísel $n_1, n_2, \ldots, n_k$ nazýváme přirozené číslo, jež je nějakým násobkem každého z nich. Ten ze společných násobků, který je menší než kterýkoli jiný společný násobek, se nazývá **nejmenší společný násobek** čísel $n_1, n_2, \ldots, n_k$. Označuje se $n(n_1, n_2, \ldots, n_k)$.

Základní metoda určení nejmenšího společného násobku přirozených čísel $n_1, n_2, \ldots, n_k$ je založena na *větě*:

Nejmenší společný společný násobek $n(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ je roven součinu mocnin všech prvočísel, která se vyskytují alespoň v jednom prvočíselném rozkladu čísel $n_1, n_2, \ldots, n_k$, přičemž mocnitel každého prvočísla je největší mocnitel vyskytující se u tohoto prvočísla v rozkladech čísel $n_1, n_2, \ldots, n_k$.

Příklad

Máme určit nejmenší společný násobek čísel $n_1 = 2\,604$, $n_2 = 1\,836$.

Řešení

Na základě prvočíselných rozkladů čísel $n_1 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 31$, $n_2 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 17$ určíme

$$n(n_1, n_2) = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 31 = 398\,412.$$

Je-li již dříve vypočten největší společný dělitel $D(n_1, n_2)$, např. pomocí Eukleidova algoritmu, pak nejmenší společný násobek $n(n_1, n_2)$ můžeme určit jednoduše užitím *věty*:

Pro každou dvojici přirozených čísel n_1, n_2 platí

$$D(n_1, n_2) \cdot n(n_1, n_2) = n_1 \cdot n_2.$$

Příklad

Máme určit nejmenší společný násobek $n(n_1, n_2)$ čísel $n_1 = 2\,604$, $n_2 = 1\,836$, víme-li (viz příklad k větě V.5), že $D(n_1, n_2) = 12$.

Řešení

Z uvedeného vzorce plyne:

$$n(n_1, n_2) = \frac{n_1 n_2}{D(n_1, n_2)} = \frac{2\,604 \cdot 1\,836}{12} = 398\,412$$

Uzavřenost oboru přirozených čísel vzhledem ke sčítání a násobení

Je-li v nějakém číselném oboru proveditelná určitá operace bez omezení, říkáme, že tento **číselný obor** je **uzavřený vzhledem k dané operaci.**

Součet a součin každých dvou přirozených čísel je přirozené číslo, a tedy v oboru N jsou operace sčítání a násobení proveditelné bez omezení.

Platí tedy *věta:*

Obor přirozených čísel je uzavřený vzhledem k operacím sčítání a násobení.

Avšak rozdíl $a - b$ čísel $a, b \in \mathsf{N}$ je přirozeným číslem tehdy a jen tehdy, když $a > b$, podíl $a : b$ je přirozeným číslem, právě když a je násobkem b v oboru N. Tedy obor N není uzavřený vzhledem k operacím odčítání a dělení.

2.3 Obor celých čísel

Uzavřenosti číselného oboru vzhledem k operaci odčítání lze docílit rozšířením oboru přirozených čísel N na **obor celých čísel** Z, který obsahuje **přirozená čísla (celá kladná čísla), nulu** a **celá záporná čísla** ($-1, -2, -3, \dots$, tj. čísla opačná k přirozeným číslům). Celá čísla umožňují vyjádřit nejen počty prvků konečných množin, ale též změny (přírůstky a úbytky) těchto počtů apod.

Základní početní operace a k nim inverzní operace v oboru celých čísel patří k základním poznatkům matematiky již na základní škole. Připomeneme proto jen stručně známé *definice*:

Pro každé $a, b \in \mathsf{N}$ je $a + (-a) = 0$, $-a + (-b) = -(a + b)$, $a + (-b) = a - b$, $a \cdot 0 = 0$, $(-a) \cdot (-b) = ab$, $(-a) \cdot b = -ab$.

Zbytkové tvary celých čísel

Zobecněním věty o zbytkovém tvaru přirozeného čísla (kap. 2.2) je následující *věta:*

Věta o zbytkovém tvaru celého čísla
Každé celé číslo a lze vyjádřit pomocí libovolného přirozeného čísla b právě jedním z výrazů

$$bk,\ bk + 1,\ bk + 2, \dots, bk + (b - 1), \quad \text{kde } k \in \mathsf{Z},$$

tj. ve tvaru $a = bk + z$, $z \in \mathsf{N}_0$, $0 \leq z < b$.

Obdobně jako v případě přirozených čísel (kap. 2.2) se pak říká výrazu $bk + z$ **zbytkový tvar čísla** a (pro dané b), číslu z **zbytek** atd.

Příklad vyjádření celého čísla ve zbytkovém tvaru
Libovolné celé číslo a, pro něž při dělení zvoleným číslem $b = 7$ dostáváme zbytek $z = 6$, má zbytkový tvar vyjádřen zápisem $a = 7k + 6$, kde $k \in \mathsf{Z}$. Tak např. $-85 = 7 \cdot (-13) + 6$.

Dělitelnost v oboru celých čísel

V oboru Z pro libovolnou dvojici celých čísel $a, b \neq 0$ *definujeme*:
Číslo a je **dělitelné** číslem b, právě když existuje takové celé číslo k, že platí $a = bk$, tj. když číslo a je **násobkem** čísla b. Obdobně jako v oboru N (kap. 2.2) pak též říkáme, že číslo b je **dělitelem** čísla a nebo že číslo b dělí číslo a. Píšeme $b \mid a$. A negaci vyjadřujeme zápisem $b \nmid a$.

Příklad
Čísla 4 a -4 mají právě šest celočíselných dělitelů: $1, -1, 2, -2, 4, -4$. Píšeme $1 \mid 4, \dots, -4 \mid 4$; $1 \mid -4, \dots, -4 \mid -4$.

Čísla $1, -1, a, -a$ se nazývají **samozřejmými (triviálními) děliteli** čísel $a, -a$ v oboru Z.

Sudé číslo je každé číslo, které je dělitelné dvěma. Lze je vyjádřit ve zbytkovém tvaru $a = 2k$, kde $k \in \mathsf{Z}$. **Liché číslo** je každé celé číslo, které není dělitelné dvěma. Lze je vyjádřit ve zbytkovém tvaru $a = 2k + 1$, $k \in \mathsf{Z}$, resp. ve tvaru $a = 2k - 1$, kde $k \in \mathsf{Z}$.

Uzavřenost oboru celých čísel vzhledem ke sčítání, odčítání a násobení

V oboru Z jsou bez omezení proveditelné operace sčítání, násobení a odčítání, tj. součtem, součinem i rozdílem libovolných dvou celých čísel je opět celé číslo. Avšak neplatí to pro podíl celých čísel.

Tyto skutečnosti vyjadřujeme *větou:*

Obor celých čísel je uzavřený vzhledem k operacím sčítání, násobení a odčítání. Není však uzavřený vůči operaci dělení.

2.4 Obor racionálních čísel

Abychom docílili uzavřenosti oboru čísel vzhledem k operaci dělení (číslem různým od nuly), rozšiřuje se obor Z na **obor racionálních čísel** Q.

Racionální čísla v porovnání s celými čísly, jež jsou jejich speciálním případem, dovolují navíc vyjádřit údaje o počtech dílů určitého celku, o jejich změnách (přírůstku nebo úbytku) apod.

Racionální číslo je každé reálné číslo, které lze zapsat ve tvaru zlomku $\dfrac{p}{q}$, kde p je celé číslo a q je přirozené číslo.

Přitom takový zlomek není jediný, neboť ho lze vždy upravit. Úpravě zlomku

$$\frac{p}{q} = \frac{kp}{kq}, \quad \text{kde } k \neq 0 \text{ je celé číslo,}$$

se říká **rozšiřování zlomku** celým nenulovým číslem k. Obrácená úprava se nazývá **krácení zlomku** celým nenulovým číslem k.

Mezi všemi zlomky, jimiž lze zapsat určité racionální číslo, existuje právě jeden zlomek, jehož čitatel je nesoudělný s jmenovatelem; říkáme, že jím je **racionální číslo zapsáno v základním tvaru**.

Příklady zápisů racionálních čísel v základním tvaru

$$\frac{1}{3},\ -\frac{1}{3}=\frac{-1}{3},\ \frac{2}{7},\ -\frac{2}{7}=\frac{-2}{7},\ \frac{11}{10},\ -\frac{11}{10}=\frac{-11}{10},\ 5=\frac{5}{1},\ -5=\frac{-5}{1}$$

Uspořádání a operace v oboru racionálních čísel

Racionální čísla vyjádřená zlomky $\frac{p}{q}$, $\frac{r}{s}$ *porovnáváme* pomocí součinů ps, qr (tzv. součinů „křížem“) na základě *věty:*

> Nechť p, r jsou libovolná celá čísla, q, s přirozená čísla, pak platí
>
> $$\frac{p}{q}<\frac{r}{s}\Leftrightarrow ps<qr,\qquad \frac{p}{q}=\frac{r}{s}\Leftrightarrow ps=qr,\qquad \frac{p}{q}>\frac{r}{s}\Leftrightarrow ps>qr.$$

Poznámka. Zlomky též můžeme upravit na společného jmenovatele a porovnat čitatele získaných zlomků.

Příklady porovnávání racionálních čísel vyjádřených zlomky

Máme uspořádat podle velikosti čísla $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{12}$.

Řešení

1. způsob – porovnání čísel pomocí součinů „křížem“ na základě výpočtu jejich rozdílu:

$$5\cdot 12-7\cdot 8=4>0\Rightarrow 5\cdot 12>7\cdot 8\Rightarrow \frac{5}{8}>\frac{7}{12}$$

2. způsob – porovnání čísel převedením zlomků na společného jmenovatele:

$$\frac{5}{8}=\frac{15}{24},\ \frac{7}{12}=\frac{14}{24}\Rightarrow \frac{5}{8}>\frac{7}{12}$$

Základní a inverzní početní výkony s racionálními čísly vyjádřenými zlomky se provádějí podle následujících vzorců:

$$\frac{p}{q}+\frac{r}{s}=\frac{ps+rq}{qs},\qquad \frac{p}{q}-\frac{r}{s}=\frac{ps-rq}{qs}$$
$$\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s}=\frac{pr}{qs},\qquad \frac{p}{q}:\frac{r}{s}=\frac{p}{q}\cdot\frac{s}{r}=\frac{ps}{qr}$$

Přitom platí: Výsledky operací sčítání, odčítání, násobení a dělení racionálních čísel nezávisí na tom, kterými zlomky (z množiny všech sobě rovných zlomků) jsou racionální čísla zapsána.

Pamatujte pravidlo důležité pro výpočetní praxi:

> Pokud je to možné, před všemi operacemi s racionálními čísly zapsanými zlomky nejprve krátíme. Také výsledné racionální číslo ve tvaru zlomku převádíme často krácením na jeho základní tvar.

Příklad výpočtu s racionálními čísly ve tvaru zlomků

$$\left(\frac{5}{3}+\frac{3}{2}\right):\frac{7}{2}=\frac{10+9}{6}:\frac{7}{2}=\frac{19}{6}\cdot\frac{2}{7}=\frac{19}{3}\cdot\frac{1}{7}=\frac{19}{21}$$

Vyjádření racionálních čísel desetinnými rozvoji

Nejprve uvažujme **desetinná čísla**, tj. racionální čísla, která lze vyjádřit *v rozvinutém zápisu* ve tvaru

$$a=\pm\left(a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\ldots+\frac{a_n}{10^n}\right),\tag{1}$$

kde $a_0\in\mathsf{N}_0$ a $a_i\in\mathsf{N}_0$ $(i=1,2,\ldots,n)$, $0\leqq a_i\leqq 9$. Prakticky se místo zápisu (1) užívá *zkrácený zápis*

$$a=\pm a_0{,}a_1a_2\ldots a_n.\tag{2}$$

Symbolu na pravé straně rovností (1), (2) se říká **konečný (ukončený) desetinný rozvoj**, v případě (2) se užívá též název n-**místné desetinné číslo**. Čárka v desetinném rozvoji (2) se nazývá **desetinná čárka**; o číslici a_i se říká, že je na i-tém **desetinném místě** (za desetinou čárkou) nebo že je **číslicí (cifrou) řádu** $-i$. Číslo $10^{-i}=\frac{1}{10^i}$ se nazývá **jednotka řádu** $-i$; jednotce řádu -1 se říká desetina, jednotce řádu -2 setina, jednotce řádu -3 tisícina atd.

Platí *věta:*

> Racionální číslo dané zlomkem $\frac{p}{q}$ v základním tvaru představuje desetinné číslo (tj. lze je vyjádřit konečným desetinným rozvojem), právě když $q=2^r\cdot 5^s$, kde r, $s\in\mathsf{N}_0$.

Symbolu $\pm a_0{,}a_1a_2\ldots a_n\ldots$, ve kterém $a_0\in\mathsf{N}_0$, $a_i\in\{0,1,2,\ldots,9\}$ $(i==1,2,\ldots,n,\ldots)$ a v němž se od jistého indexu $j+1$ $(j\in\mathsf{N}_0)$ počínaje opakuje určitá skupina (uspořádaná k-tice) cifer $a_{j+1}a_{j+2}\ldots a_{j+k}$, se říká **nekonečný (neukončený) periodický desetinný rozvoj**. Opakující se skupině cifer $a_{j+1}a_{j+2}\ldots a_{j+k}$ se říká **perioda desetinného rozvoje**; píše se nad ní pruh. Nekonečný periodický desetinný rozvoj, jehož perioda začíná od indexu $j+1=1$, se nazývá **ryze periodický**, zapisuje se stručně ve tvaru $\pm a_0{,}\overline{a_1a_2\ldots a_k}$. Periodický desetinný rozvoj, jehož perioda začíná až od indexu $j+1>1$, se nazývá **neryze periodický**; zapisuje se ve tvaru $\pm a_0{,}a_1a_2\ldots a_j\overline{a_{j+1}a_{j+2}\ldots a_{j+k}}$ a skupině cifer $a_1a_2\ldots a_j$ za desetinnou čárkou před periodou $a_{j+1}a_{j+2}\ldots a_{j+k}$ se říká **předperioda desetinného rozvoje**.

Věta o vyjádření racionálního čísla desetinným rozvojem
Každé racionální číslo lze vyjádřit jednoznačně ve tvaru konečného desetinného rozvoje nebo nekonečného periodického desetinného rozvoje.

Věta obrácená
Každý konečný desetinný rozvoj nebo nekonečný periodický rozvoj vyjadřuje právě jedno racionální číslo.

Desetinný rozvoj racionálního čísla daného zlomkem $\frac{p}{q}$ dostaneme dělením jeho čitatele $p \in \mathsf{Z}$ jmenovatelem $q \in \mathsf{N}$.

Příklady vyjádření racionálních čísel zadaných ve tvaru zlomků konečnými nebo nekonečnými periodickými rozvoji

$$\frac{1}{2} = 0{,}5, \quad \frac{1}{3} = 0{,}333\ldots = 0{,}\overline{3}, \quad \frac{23}{12} = 1{,}916\,6\ldots = 1{,}91\overline{6}$$

Praktický postup, jímž naopak k danému nekonečnému ryze nebo neryze periodickému rozvoji určíme příslušné racionální číslo ve tvaru zlomku $\frac{p}{q}$, $p \in \mathsf{Z}$, $q \in \mathsf{N}$, je založen na užití vzorce pro součet konvergentní geometrické nekonečné řady (viz kap. 6.3).

Poznámka. Přitom se ukazuje, že nekonečný periodický desetinný rozvoj s periodou obsahující samé devítky představuje totéž racionální číslo jako konečný desetinný rozvoj (desetinné číslo), který dostaneme vynecháním periody $\overline{9}$ a zvětšením předchozí cifry o 1; proto *periodické desetinné rozvoje s periodou* $\overline{9}$ *vylučujeme ze svých úvah.* Za tohoto předpokladu *má každé racionální číslo právě jeden desetinný rozvoj.*

Kladná racionální čísla zapsaná desetinnými rozvoji *porovnáváme* podle velikosti cifer nejvyššího řádu, v nichž se obě čísla liší.

Příklad
Uspořádejte podle velikosti čísla $\frac{7}{16}, \frac{14}{37}, \frac{3}{8}, \frac{5}{12}$.

Řešení
Daná racionální čísla bychom mohli porovnat převedením zlomků na společného jmenovatele, jednodušeji je však porovnáme pomocí jejich desetinných rozvojů:

$$\frac{7}{16} = 0{,}437\,5, \quad \frac{14}{37} = 0{,}\overline{378}, \quad \frac{3}{8} = 0{,}375, \quad \frac{5}{12} = 0{,}41\overline{6} \Rightarrow \frac{3}{8} < \frac{14}{37} < \frac{5}{12} < \frac{7}{16}$$

Také *početní výkony s racionálními čísly* lze provádět *užitím jejich desetinných rozvojů.* V praxi se obvykle počítá s konečnými desetinnými rozvoji, jež představují desetinná čísla nebo zaokrouhlená racionální čísla.

Příklady
Určete součet a součin desetinných čísel a) 0,25; 0,12, b) 0,375; 8,12.

Řešení
a) $0{,}25 + 0{,}12 = 0{,}37$; $0{,}25 \cdot 0{,}12 = 0{,}03$

Uzavřenost oboru racionálních čísel vzhledem ke sčítání, odčítání, násobení a dělení

Součet, rozdíl a součin libovolných dvou racionálních čísel je opět racionální číslo, také podíl libovolného racionálního čísla a racionálního čísla různého od nuly je racionální číslo.

Tyto skutečnosti vyjadřujeme *větou:*

Obor racionálních čísel je uzavřený vzhledem k operacím sčítání, odčítání, násobení a dělení (s výjimkou dělení nulou).

2.5 Obor reálných čísel

V oboru racionálních čísel Q jsou bez omezení proveditelné operace sčítání, násobení i dělení číslem různým od nuly a také umocňování libovolným přirozeným mocnitelem. Avšak v oboru Q není proveditelné bez omezení odmocňování kladných čísel, tak např. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ (představující velikost úhlopříčky čtverce o jednotkové straně a velikost úhlopříčky krychle o jednotkové hraně) nejsou racionální čísla. Délky některých úseček nelze tedy vyjádřit racionálními čísly. Tyto i další důvody vedou k požadavku rozšířit obor Q racionálních čísel na **obor reálných čísel** R, tj. čísel vyjadřujících číselné hodnoty délek všech úseček (při zvolené jednotkové úsečce), čísel k nim opačných a nuly.

Reálná čísla jsou jednak **racionální čísla**, která se dají vyjádřit ve tvaru zlomku $\frac{p}{q}$ s celočíselným čitatelem p a přirozeným jmenovatelem q (kap. 2.4), a dále **iracionální čísla**, jež nelze vyjádřit v tomto tvaru.

Příklady iracionálních čísel
$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, π (**Ludolfovo číslo** představující podíl délky libovolné kružnice a jejího průměru).

Vyjádření reálných čísel desetinnými rozvoji

Iracionální čísla lze charakterizovat jejich vyjádřením desetinnými rozvoji v desítkové soustavě: Každé iracionální číslo a je vyjádřeno **nekonečným (neukončeným) neperiodickým desetinným rozvojem**, tj. symbolem tvaru $a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$, kde $a_0 \in \mathsf{N}$, $a_i \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ $(i = 1, 2, \ldots, n, \ldots)$, přičemž v nekonečně mnoha cifrách a_i se žádná skupina cifer neopakuje. Píšeme:

$$a = \pm a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$$

Vyjádření iracionálních čísel nekonečnými neperiodickými desetinnými rozvoji je vzájemně jednoznačné.

Všechny cifry nekonečného desetinného rozvoje, který vyjadřuje iracionální číslo, nemůžeme samozřejmě nikdy vypsat. K určení iracionálního čísla stačí však udat předpis, podle něhož lze principiálně napsat cifru na libovolném místě jeho de-

Příklady desetinných rozvojů iracionálních čísel

$\sqrt{2} = 1{,}414\,213\,562\ldots, \quad \sqrt{3} = 1{,}732\,050\,808\ldots, \quad \pi = 3{,}141\,592\,653\ldots$

Věta o vyjádření reálného čísla desetinným rozvojem
Každé reálné číslo lze vyjádřit jako desetinný rozvoj. Přitom přiřazení reálných čísel a desetinných rozvojů je vzájemně jednoznačné, pokud při vyjadřování racionálních čísel vyloučíme periodické rozvoje s periodou $\overline{9}$.

Daným desetinným rozvojem libovolného reálného čísla a jsou určeny jeho **dolní a horní desetinné aproximace (přibližné hodnoty)**:

a) Pro kladné číslo $a = a_0{,}a_1a_2\ldots a_n\ldots$ jsou desetinným rozvojem určeny tyto **dolní desetinné aproximace** $a_{n,d}$ a **horní desetinné aproximace** $a_{n,h}$ **řádu** n ($n \in \mathsf{N}_0$):

$$a_{0,d} = a_0, \quad a_{n,d} = a_0{,}a_1a_2\ldots a_n \quad (n \in \mathsf{N}),$$
$$a_{0,h} = a_0 + 1, \quad a_{n,h} = a_{n,d} + \frac{1}{10^n} \quad (n \in \mathsf{N}).$$

b) Pro záporné číslo $a = -a_0{,}a_1a_2\ldots a_n\ldots$ jsou desetinným rozvojem určeny tyto **dolní desetinné aproximace** $a_{n,d}$ a **horní desetinné aproximace** $a_{n,h}$ **řádu** n ($n \in \mathsf{N}_0$):

$$a_{n,d} = -|a|_{n,h}, \quad a_{n,h} = -|a|_{n,d},$$

kde $|a|_{n,d}$, $|a|_{n,h}$ jsou dolní, resp. horní desetinné aproximace absolutní hodnoty čísla a řádu n. (Definici absolutní hodnoty $|a|$ reálného čísla a viz na str. 77.)

c) Pro $a = 0$ klademe $a_{n,d} = 0$, $a_{n,h} = \dfrac{1}{10^n}$ ($n \in \mathsf{N}_0$).

Odtud bezprostředně plyne často používaná *věta:*

Pro každé reálné číslo a, jehož dolní desetinné aproximace řádu n jsou $a_{n,d}$ a horní desetinné aproximace řádu n jsou $a_{n,h}$, platí nerovnosti

$$a_{n,d} \leqq a \leqq a_{n,h}, \quad a_{n,h} - a_{n,d} = \frac{1}{10^n}, \quad a_{n+1,d} \geqq a_{n,d}, \quad a_{n+1,h} \leqq a_{n,h} \quad (n \in \mathsf{N}_0).$$

Příklady dolních a horních desetinných aproximací reálného čísla daných jeho desetinným rozvojem

a) Pro kladné iracionální číslo $\sqrt{2} = 1{,}414\,213\,56\ldots$ jsou desetinným rozvojem dány dolní desetinné aproximace: 1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,414 2; 1,414 21; ..., horní desetinné aproximace: 2; 1,5; 1,42; 1,415; 1,414 3; 1,414 22; ..., pro něž platí nerovnosti (o jejich platnosti se lze přesvědčit umocněním): $1 < \sqrt{2} < 2$, $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$, $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$, $1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$, $1{,}414\,2 < \sqrt{2} < 1{,}414\,3$, $1{,}414\,21 < \sqrt{2} < 1{,}414\,22, \ldots$

b) Pro záporné iracionální číslo $-\sqrt{2} = -1{,}414\,213\,56\ldots$ jsou desetinným rozvojem dány dolní desetinné aproximace: −2; −1,5; −1,42; −1,415; −1,414 3; −1,414 22; ... a horní desetinné aproximace: −1; −1,4; −1,41; −1,414; −1,414 2; −1,414 21; ..., pro něž platí nerovnosti: $-2 < -\sqrt{2} < -1$, $-1{,}5 < -\sqrt{2} < -1{,}4$, $-1{,}42 < -\sqrt{2} < -1{,}41$, $-1{,}415 < -\sqrt{2} < -1{,}414$, $-1{,}414\,3 < -\sqrt{2} < -1{,}414\,2$, $-1{,}414\,22 < -\sqrt{2} < -1{,}414\,21, \ldots$

Porovnávání reálných čísel, sčítání a násobení reálných čísel vyjádřených desetinnými rozvoji

Porovnávání reálných čísel vyjádřených desetinnými rozvoji se *definuje* takto:

Jsou-li $a = a_0{,}a_1a_2\ldots a_n\ldots$, $b = b_0{,}b_1b_2\ldots b_n\ldots$ kladná čísla, pak pro ně platí nerovnost $a > b$, právě když existuje takové číslo $n \in \mathsf{N}_0$, že je $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1, \ldots, a_{n-1} = b_{n-1}$, $a_n > b_n$.

Jsou-li $a = -a_0{,}a_1a_2\ldots a_n\ldots$, $b = -b_0{,}b_1b_2\ldots b_n\ldots$ záporná čísla, pak pro ně platí nerovnost $a > b$, právě když $|a| < |b|$.

Sčítání a násobení reálných čísel vyjádřených desetinnými rozvoji je založeno na těchto *definicích:*

Nechť a, b jsou reálná čísla s dolními a horními desetinnými aproximacemi $a_{n,d}$, $a_{n,h}$, $b_{n,d}$, $b_{n,h}$ ($n \in \mathsf{N}_0$).

Součet $a + b$ je reálné číslo, pro které platí nerovnosti

$$a_{n,d} + b_{n,d} \leqq a + b \leqq a_{n,h} + b_{n,h} \text{ pro každé } n \in \mathsf{N}_0.$$

Součin ab *kladných* čísel a, b je kladné číslo, pro které platí nerovnosti

$$a_{n,d}b_{n,d} \leqq ab \leqq a_{n,h}b_{n,h} \text{ pro každé } n \in \mathsf{N}_0.$$

Jsou-li obě čísla a, b *záporná*, pak

$$ab = |a| \cdot |b|.$$

Je-li jedno z čísel a, b *kladné* a druhé *záporné*, pak

$$ab = -|a| \cdot |b|.$$

Je-li aspoň jedno z čísel a, b *rovno nule*, pak

$$ab = 0.$$

Příklad sčítání a porovnávání iracionálních čísel
Určete součet čísel $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ a porovnejte ho s číslem π.
Řešení
$\sqrt{2} + \sqrt{3} = 1{,}414\,213\,5\ldots + 1{,}732\,050\,8\ldots = 3{,}146\,264\,3\ldots$
$\pi = 3{,}141\,592\,6\ldots \Rightarrow \sqrt{2} + \sqrt{3} > \pi$

Pro součet a součin reálných čísel lze dokázat *věty:*

Je-li součet reálných čísel iracionální číslo, pak alespoň jeden ze sčítanců je iracionální číslo. Je-li součin reálných čísel iracionální číslo, pak alespoň jeden z činitelů je iracionální číslo.

(Snadný je nepřímý důkaz těchto vět, tj. důkaz jejich obměn vyjadřujících uzavřenost oboru racionálních čísel vzhledem k operacím sčítání a násobení.)

Uzavřenost oboru reálných čísel vzhledem k operacím sčítání, odčítání, násobení a dělení

V oboru R jsou bez omezení proveditelné základní i inverzní operace (vyjma dělení nulou), což vyjadřujeme *větou:*

Obor reálných čísel je uzavřený vzhledem k operacím sčítání, odčítání, násobení a dělení číslem různým od nuly.

Naproti tomu součtem, rozdílem, součinem a podílem iracionálních čísel nemusí být iracionální číslo, ale může jím být racionální číslo. Např. $\sqrt{2}+(-\sqrt{2}) = \sqrt{2}-\sqrt{2}=0$, $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2$, $\sqrt{2}:\sqrt{2}=1$. Tedy množina všech iracionálních čísel není uzavřená vzhledem k žádné z operací sčítání, odčítání, násobení a dělení. Proto také není číselným oborem.

Při počítání s racionálními a iracionálními čísly vyjádřenými nekonečnými desetinnými rozvoji se prakticky vždy tato čísla zaokrouhlují na určitý konečný počet cifer. Velký význam z hlediska výpočetní praxe mají proto metody počítání s přibližnými hodnotami reálných čísel, o nichž pojednáme v samostatném článku. Nejprve se však věnujeme shrnutí nejdůležitějších vlastností reálných čísel.

Základní vlastnosti reálných čísel

Reálná čísla (prvky oboru R) mají *základní* (*charakteristické*) *vlastnosti*, jež jsou vyjádřeny následujícími *základními větami:*

Základní věty o vlastnostech operací sčítání a násobení v oboru R

V.I. Pro každá dvě reálná čísla a, b platí

$$a+b=b+a \quad (\textit{komutativnost sčítání}),$$
$$ab=ba \quad (\textit{komutativnost násobení}).$$

V.II. Pro každá tři reálná čísla a, b, c platí

$$(a+b)+c=a+(b+c) \quad (\textit{asociativnost sčítání}),$$
$$(ab)c=a(bc) \quad (\textit{asociativnost násobení}).$$

V.III. Pro každá tři reálná čísla a, b, c platí

$$a(b+c)=ab+ac \quad (\textit{distributivnost násobení vzhledem ke sčítání}).$$

Základní existenční věty v oboru R

V.IV. V oboru R existuje právě jedno číslo 0 (**nula**) takové, že pro každé $a \in$ R platí

$$a+0=a.$$

V.V. V oboru R existuje právě jedno číslo 1 (**jedna**) takové, že pro každé $a \in$ R platí

$$a \cdot 1 = a.$$

V.VI. Ke každému reálnému číslu a existuje v oboru R právě jedno **opačné číslo** $-a$ takové, že

$$a+(-a)=0.$$

V.VII. Ke každému reálnému číslu $a \neq 0$ existuje v oboru R právě jedno **převrácené číslo** $\frac{1}{a}$ takové, že

$$a\cdot\frac{1}{a}=1.$$

Důsledky uvedených základních vět jsou tyto *věty:*

V.1. Pro každá tři reálná čísla a, b, c platí

$$a=b \Leftrightarrow a+c=b+c,$$

$$a=b \Rightarrow ac=bc; \quad \text{pro } c\neq 0 \text{ platí též } ac=bc \Leftrightarrow a=b.$$

V.2. Pro každá dvě reálná čísla a, b existuje právě jedno reálné číslo $a-b$ (**rozdíl čísel** a, b v uvedeném pořadí), a je-li $b\neq 0$, existuje právě jedno reálné číslo $\frac{a}{b}$ neboli $a:b$ (**podíl čísel** a, b v uvedeném pořadí), přičemž platí

$$a-b=a+(-b), \quad \frac{a}{b}=a\cdot\frac{1}{b} \quad (b\neq 0).$$

V.3. *Věta o nulovém součinu dvou reálných čísel*
Součin reálných čísel a, b je roven nule, právě když alespoň jedno z nich je rovno nule:

$$ab=0 \Leftrightarrow a=0 \vee b=0.$$

Poznámka. Všechny doposud uvedené vlastnosti mají nejen reálná čísla, ale též komplexní čísla, tj. prvky oboru C (kap. 2.8).

Pro reálná čísla (prvky oboru R) jsou kromě vztahu rovnosti zavedeny též vztahy **nerovnosti:** „je **menší než**“ (značí se $<$), „je **větší než**“ (značí se $>$), přičemž platí $a<b \Leftrightarrow b>a$. Těmito vztahy je dáno **uspořádání v oboru** R.

Základní věty o uspořádání v oboru R

V.VIII. Pro každá dvě reálná čísla a, b platí právě jeden ze vztahů

$$a<b, \quad a=b, \quad a>b.$$

V.IX. Pro každá tři reálná čísla a, b, c platí

$$(a < b) \wedge (b < c) \Rightarrow a < c \quad (\textit{tranzitivnost nerovnosti}),$$
$$a < b \Rightarrow a + c < b + c,$$
$$(a < b) \wedge (c > 0) \Rightarrow ac < bc.$$

Jestliže chceme vyjádřit, že $a < b$ nebo $a = b$, píšeme $a \leqq b$, je-li $a > b$ nebo $a = b$, píšeme $a \geqq b$.

Reálná čísla $a > 0$ se nazývají **kladná čísla**, $a < 0$ **záporná čísla**, $a \geqq 0$ **nezáporná čísla**, $a \leqq 0$ **nekladná čísla**. Množina všech kladných čísel se značí R^+, množina všech záporných čísel R^-, množina všech nezáporných čísel R_0^+, množina všech nekladných čísel R_0^-.

Na základě uvedených vět V.VIII, V.IX lze odvodit tyto *věty*:

V.4. Pro každá čtyři reálná čísla a, b, c, d platí

$$(a < b) \wedge (c < 0) \Rightarrow ac > bc,$$
$$(a < b) \wedge (c < d) \Rightarrow a + c < b + d,$$
$$(0 < a < b) \wedge (0 < c < d) \Rightarrow ac < bd,$$
$$0 < a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}.$$

V.5. Součin reálných čísel a, b je kladný, právě když jsou buď obě čísla kladná, nebo obě záporná:

$$ab > 0 \Leftrightarrow (a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0).$$

Součin reálných čísel a, b je záporný, právě když jedno z nich je kladné a druhé záporné:

$$ab < 0 \Leftrightarrow (a > 0 \wedge b < 0) \vee (a < 0 \wedge b > 0).$$

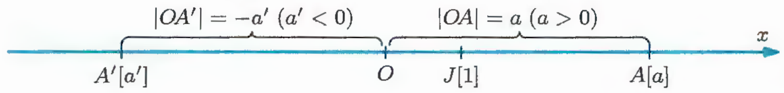
Důsledek: Obdobná věta platí též pro podíl reálných čísel $\frac{a}{b}$.

Základní věta o zobrazení oboru R *na přímku*

V.X. Existuje zobrazení množiny R na přímku, které má tyto vlastnosti:

1. Je vzájemně jednoznačné, tj.
   a) obrazem každého reálného čísla je právě jeden bod přímky,
   b) každý bod přímky je obrazem právě jednoho reálného čísla.
2. Jsou-li a, b, c libovolná reálná čísla, pro něž platí $a < b < c$, pak obraz čísla b leží mezi obrazy čísel a, c.

Nejčastěji užívaným zobrazením reálných čísel, jež má vlastnosti uvedené ve větě V.X, je tzv. **grafické znázornění reálných čísel na číselné ose**, jež se provádí takto: Zvolíme přímku o a na ní dva různé body O, J. Bod O, zvaný **počátek**, prohlásíme za obraz čísla nula a bod J, nazývaný **jednotkový bod**, zvolíme za obraz čísla jedna. Přímce o se pak říká **číselná osa**; zpravidla se její poloha volí vodorovná (přičemž se pak značí x, resp. o_x) a bod J na ní napravo od bodu O (obr. 2.1), někdy se užívá svislá číselná osa (jež se obvykle značí y, resp. o_y) a bod J se na ní volí obvykle nad bodem O. Každému reálnému číslu a přiřazujeme na číselné ose bod A, zvaný **obraz čísla** a, přičemž kladné číslo a se zobrazuje takovým vnitřním bodem polopřímky OJ, že jeho vzdálenost od počátku O je rovna číslu a, záporné číslo a' se zobrazuje vnitřním bodem polopřímky opačné k polopřímce OJ, jehož vzdálenost od počátku O je rovna číslu $-a'$. (Polopřímce OJ se proto říká **kladná poloosa** a polopřímce opačné k OJ **záporná poloosa číselné osy**.)



Obr. 2.1

Vzhledem k tomu, že grafické znázornění reálných čísel na číselné ose je podle věty V.X zobrazení vzájemně jednoznačné a zachovává uspořádání, obrazy reálných čísel na číselné ose se zpravidla označují týmiž symboly jako reálná čísla sama (obr. 2.2). Často, např. u funkcí (kap. 4), a zejména v matematické analýze (kap. 8), se o reálných číslech mluví jako o **bodech číselné osy**.

Obr. 2.2

Poznámka. Číselnou osu lze použít i pro zobrazení libovolné podmnožiny M množiny R (např. množin N, N_0, Z, Q). Avšak v případě, že M $\neq$ R, není toto zobrazení vzájemně jednoznačné, neboť pak vždy existují body číselné osy, které nejsou obrazem žádného čísla z uvažované množiny M.

Absolutní hodnota reálného čísla a její vlastnosti

Důležitým pojmem je **absolutní hodnota reálného čísla** a, která se značí $|a|$ a je *definována* takto:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{je-li } a \geqq 0 \\ -a, & \text{je-li } a < 0 \end{cases}$$

Absolutní hodnota nezáporného čísla je tedy číslo samo, absolutní hodnota záporného čísla je číslo k němu opačné.

Na základě této definice lze odvodit *věty* vyjadřující **významné vlastnosti absolutních hodnot čísel** z oboru R:

Věty o vlastnostech absolutních hodnot reálných čísel
Pro každé reálné číslo a platí

1. $|a| \geqq 0$, přičemž $|a| = 0$, právě když $a = 0$,
2. $|-a| = |a|$,
3. a) $|a| = r > 0$, právě když $a = r$ nebo $a = -r$ (stručněji píšeme: $a = \pm r$),
   b) $|a| < r$, $r > 0$, právě když $-r < a < r$,
   c) $|a| > r > 0$, právě když $a > r$ nebo $a < -r$.

Pro každá dvě reálná čísla a, b platí

1. $|a \pm b| \leqq |a| + |b|$ (**trojúhelníková nerovnost**),
2. $|a \pm b| \geqq ||a| - |b|| \geqq |a| - |b|$,
3. $|a - b| = |b - a|$,
4. $|ab| = |a|\,|b|$,
5. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ pro $b \neq 0$.

Geometrický význam absolutních hodnot reálných čísel: Na číselné ose představuje $|a|$ vzdálenost obrazu čísla a od počátku, $|a - b|$ vzdálenost obrazů čísel a, b (obr. 2.2).

Věty o absolutních hodnotách součtu a součinu lze rozšířit na libovolných n reálných sčítanců, resp. činitelů $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ($n \in \mathsf{N}$):

$$|a_1 + a_2 + \ldots + a_n| \leqq |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|$$
$$|a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n| = |a_1| \cdot |a_2| \cdot \ldots \cdot |a_n|$$

Intervaly

Interval je každá taková množina reálných čísel, jejichž obrazy na číselné ose vyplňují její souvislou podmnožinu. (Stručně lze říci, že intervaly představují libovolné souvislé podmnožiny množiny R.)

Jednotlivé druhy intervalů uvádíme přehledně v tabulce 2.4.

Libovolný bod intervalu, který není jeho **krajním bodem**, se nazývá **vnitřní bod** intervalu. Pro kterýkoliv z omezených intervalů I s krajními body a, b, $a < b$ (tabulka 2.4) se zavádí pojem **délka intervalu**, jíž se rozumí číslo $d(\mathsf{I}) = b - a$ a **střed intervalu** $s(\mathsf{I}) = \frac{1}{2}(a + b)$. Krajním bodům intervalu se říká též **meze intervalu (dolní, horní)**.

Protože intervaly jsou speciální případy množin, lze s nimi provádět množinové operace.

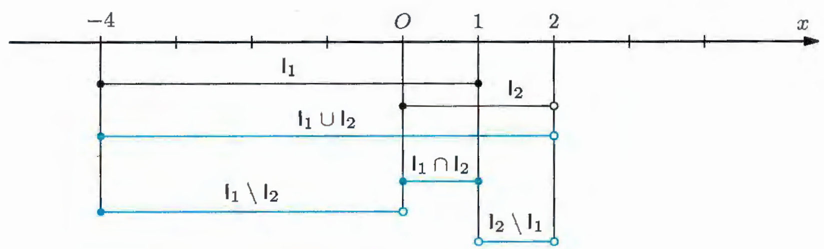
Příklad množinových operací s intervaly
Máme určit sjednocení, průnik a rozdíly intervalů $\mathsf{I}_1 = \langle -4; 1\rangle$, $\mathsf{I}_2 = (0; 2)$. (V zápisech intervalů, jejichž krajními body jsou čísla vyjádřená číslicemi, je vhodné mezi čísly psát středník místo čárky.)

Druhy intervalů množiny R Tab. 2.4

Názvy intervalů	Označení	Definice Množina všech reálných čísel x, pro která platí:	Grafické znázornění na číselné ose
Intervaly omezené s krajními body a, b ($a < b$)			
Uzavřený interval	$\langle a, b\rangle$	$a \leqq x \leqq b$	a b
Otevřený interval	(a, b)	$a < x < b$	a b
Polouzavřené (polootevřené) intervaly	$\langle a, b)$ $(a, b\rangle$	$a \leqq x < b$ $a < x \leqq b$	a b a b
Intervaly neomezené (**zprava**, resp. **zleva**) s krajním bodem a	$\langle a, +\infty)$ $(a, +\infty)$ $(-\infty, a\rangle$ $(-\infty, a)$	$x \geqq a$ $x > a$ $x \leqq a$ $x < a$	a a a a
Interval oboustranně neomezený (množina R)	$(-\infty, +\infty)$	$x \in \mathsf{R}$	R

Poznámka. Symboly $+\infty$ a $-\infty$ čteme: plus nekonečno a minus nekonečno.

Řešení (grafické znázornění je na obr. 2.3)
$\mathsf{I}_1 \cup \mathsf{I}_2 = \langle -4; 1\rangle \cup (0; 2) = \langle -4; 2)$
$\mathsf{I}_1 \cap \mathsf{I}_2 = \langle -4; 1\rangle \cap (0; 2) = (0; 1\rangle$
$\mathsf{I}_1 \setminus \mathsf{I}_2 = \langle -4; 1\rangle \setminus (0; 2) = \langle -4; 0\rangle$
$\mathsf{I}_2 \setminus \mathsf{I}_1 = (0; 2) \setminus \langle -4; 1\rangle = (1; 2)$



Obr. 2.3

Archimedova vlastnost reálných čísel a princip vložených intervalů

V následujícím textu se zmíníme o vlastnostech množiny všech reálných čísel, které se na našich středních školách zpravidla neuvádějí, avšak mají zásadní význam pro teorii reálných čísel, a to i z hlediska středoškolské matematiky.

Věta o Archimedově vlastnosti reálných čísel (Archimedův princip)

Pro každé reálné číslo a a každé číslo $b > 0$ existuje takové přirozené číslo n, že platí

$$nb > a.$$

Speciálně (pro $b = 1$) ke každému reálnému číslu a existuje přirozené číslo n větší než a:

$$n > a.$$

Princip vložených intervalů

a) Jsou-li dána taková reálná čísla $a_i \in \mathsf{R}$, $b_i \in \mathsf{R}$ $(i = 1, 2, \dots, n, \dots)$, že platí

$$a_1 \leqq a_2 \leqq \dots \leqq a_n \leqq \dots \leqq b_n \leqq \dots \leqq b_2 \leqq b_1,$$

pak existuje (alespoň jedno) reálné číslo c, které je prvkem všech do sebe vložených intervalů $\langle a_i, b_i\rangle$ $(i = 1, 2, \dots, n, \dots)$:

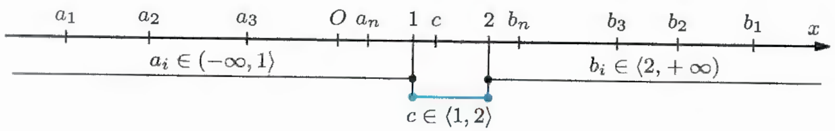
$$\dots \subset \langle a_n, b_n\rangle \subset \langle a_{n-1}, b_{n-1}\rangle \subset \dots \subset \langle a_2, b_2\rangle \subset \langle a_1, b_1\rangle.$$

b) Jestliže pro čísla a_i, b_i $(i = 1, 2, \dots, n, \dots)$ navíc platí, že s rostoucím n rozdíly $b_n - a_n$ neomezeně klesají k nule (tj. pro libovolně malé $\varepsilon > 0$ existuje takové n, že $b_n - a_n < \varepsilon$), pak existuje právě jedno reálné číslo c, jež je prvkem všech těchto do sebe vložených intervalů $\langle a_i, b_i\rangle$ $(i = 1, 2, \dots, n, \dots)$.

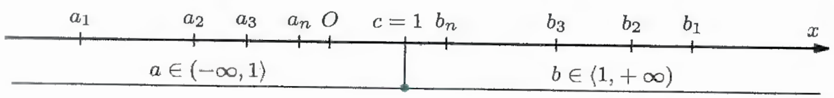
Příklady k principu vložených intervalů

a) Nechť pro krajní body a_i, b_i do sebe vložených intervalů $\langle a_i, b_i\rangle$ platí $a_i \in (-\infty, 1\rangle$, $b_i \in \langle 2, +\infty)$ $(i = 1, 2, \dots, n, \dots)$, pak každé reálné číslo $c \in \langle 1, 2\rangle$ je prvkem všech těchto do sebe vložených intervalů $\langle a_i, b_i\rangle$ $(i = 1, 2, \dots, n, \dots)$, obr. 2.4.

b) Nechť pro krajní body a_i, b_i do sebe vložených intervalů $\langle a_i, b_i\rangle$ platí $a_i \in (-\infty, 1\rangle$, $b_i \in \langle 1, +\infty)$ $(i = 1, 2, \dots, n, \dots)$, pak právě jedno reálné číslo $c = 1$ je prvkem všech těchto do sebe vložených intervalů $\langle a_i, b_i\rangle$ $(i = 1, 2, \dots, n, \dots)$, obr. 2.5.



Obr. 2.4



Obr. 2.5

Poznámky k Archimedovu principu a k principu vložených intervalů.

1. Archimedův princip platí nejen v oboru R, ale také pro všechna čísla a, $b > 0$ v oboru Q. Naproti tomu princip vložených intervalů je charakteristický právě jen pro obor R.
2. Na principu vložených intervalů je založeno vyjadřování reálných čísel nekonečnými desetinnými rozvoji a početní operace s nimi (zajišťuje existenci a unicitu součtu a součinu). Je základem měření skalárních fyzikálních veličin.
3. Geometrická analogie Archimedova principu a principu vložených intervalů jsou též základem pro měření úseček a pro grafické znázorňování reálných čísel na přímce (věta V.X kap. 2.1).

Aproximace reálných čísel, zaokrouhlování, přibližné numerické výpočty

V matematice, ve fyzice i v praxi se velmi často setkáváme nejen s přesnými číselnými údaji, ale také s jejich **aproximacemi (přibližnými hodnotami)**. *Např.* číselné hodnoty veličin získané měřením nebo výsledky výpočtů užitím tabulek či výpočetní techniky jsou prakticky téměř vždy přibližné, zatížené jistou chybou (nepřesností). I v mnoha jiných situacích neznáme přesný číselný údaj, ale jen interval, do kterého uvažované reálné číslo patří.

Víme-li, že pro reálné číslo a platí

$$a \in \langle a_d, a_h\rangle \text{ neboli } a_d \leqq a \leqq a_h,$$

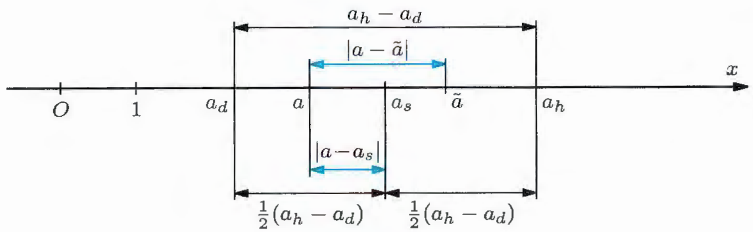
lze považovat kterékoli číslo $\tilde{a}$ z intervalu $\langle a_d, a_h\rangle$ za **aproximaci** čísla a; píšeme $a \approx \tilde{a}$. (Čteme a je přibližně rovno $\tilde{a}$). Speciálně číslo a_d se nazývá **dolní aproximace** čísla a, číslo a_h se nazývá **horní aproximace** čísla a, jejich aritmetickému průměru a_s se říká **střední aproximace** čísla a:

$$a_s = \frac{1}{2}(a_d + a_h)$$

Chybu (nepřesnost) $a - \tilde{a}$ aproximace $\tilde{a}$ čísla a zpravidla nedovedeme určit, můžeme však provést odhad její absolutní hodnoty $|a - \tilde{a}|$ pomocí čísla $\alpha > 0$, pro které platí

$$|a - \tilde{a}| \leqq \alpha.$$

Každé takové číslo α nazýváme **odhadem absolutní chyby (nepřesnosti)** nebo kratčeji **absolutní chybou (nepřesností) aproximace** $\tilde{a}$ čísla a. Aproximujeme-li číslo a kterýmkoli číslem $\tilde{a} \in \langle a_d, a_h\rangle$, zřejmě platí (obr. 2.6)



Obr. 2.6

$$|a - \tilde{a}| \leqq a_h - a_d,$$

takže za α lze vzít délku intervalu $\langle a_h, a_d \rangle$

$$\alpha = a_h - a_d.$$

Pro střední aproximaci a_s dokonce platí (obr. 2.6)

$$|a - a_s| \leqq \frac{1}{2}(a_h - a_d),$$

a proto se za **absolutní chybu střední aproximace** bere číslo

$$\alpha = \frac{1}{2}(a_h - a_d).$$

Z dané střední aproximace a absolutní chyby určíme pak snadno dolní a horní aproximaci:

$$a_d = a_s - \alpha, \qquad a_h = a_s + \alpha$$

Symbolicky se pak často píše

$$a = a_s \pm \alpha,$$

přičemž tento symbolický zápis nepředstavuje rovnost, ale znamená, že aproximované číslo a leží v intervalu $\langle a_s - \alpha, a_s + \alpha \rangle$. Přitom v tomto zápise čísla a_s, α mají poslední číslici téhož řádu. *Např.* zápis $a = 4{,}3 \pm 0{,}1$ vyjadřuje, že $a \in \langle 4{,}2; 4{,}4 \rangle$, podobně zápis $U = (6{,}0 \pm 0{,}5)$ V značí, že $5{,}5\,\mathrm{V} \leqq U \leqq 6{,}5\,\mathrm{V}$.

Absolutní chyba aproximace nevystihuje plně přesnost, se kterou byla aproximace určena (změřena apod.). *Např.* ze dvou změřených délkových údajů $d_1 = (0{,}80 \pm 0{,}05)$ m, $d_2 = (8{,}00 \pm 0{,}05)$ m je druhá délka zajisté určena s větší přesností než první a přitom absolutní chyba je v obou případech táž. Zavádí se proto ještě **relativní (poměrná) chyba** δ aproximace $\tilde{a}$:

$$\delta = \frac{\alpha}{|\tilde{a}|}$$

Vyjadřuje se desetinným číslem nebo v procentech (kap. 2.7), udává pak, kolik procent z absolutní hodnoty aproximace $\tilde{a}$ představuje absolutní chyba α. Ze dvou aproximací je přesnější ta, která má menší relativní chybu. *Např.* pro uvedené délkové údaje jsou relativní chyby $\delta_1 = 0{,}062\,5 = 6{,}25\,\%$, $\delta_2 = 0{,}006\,25 = 0{,}625\,\%$.

Jestliže je aproximace $\tilde{a}$ vyjádřena desetinným číslem, říká se jí **desetinná aproximace**. Významnými speciálními případy jsou dolní a horní desetinné aproximace reálných čísel uvedené na str. 72.

Pokud absolutní chyba α desetinné aproximace $\tilde{a}$ čísla a je menší nebo rovna $\frac{1}{2} \cdot 10^k$ ($k \in \mathsf{Z}$), pak číslici řádu k a všechny číslice předchozí zleva (kromě počátečních nul) nazýváme **platnými číslicemi (platnými ciframi)** desetinné aproximace $\tilde{a}$. *Např.* je-li $34{,}74 \pm 0{,}03$, pak střední aproximace v tomto zápise má tři platné číslice, obdobně střední aproximace v zápise $0{,}012\,76 \pm 0{,}000\,04$ má také tři platné číslice, v zápise $52{,}25 \pm 0{,}005$ má čtyři platné číslice a v zápise 230 ± 5 má dvě platné číslice.

Poznámka. V matematických, fyzikálních a chemických tabulkách se zpravidla při zápisech přibližných hodnot tabelovaných funkcí nebo fyzikálních konstant uvádějí pouze platné číslice.

Při praktických výpočtech s reálnými čísly vyjádřenými desetinnými rozvoji se obvykle počítá s jejich desetinnými aproximacemi získanými zaokrouhlováním čili s tzv. **zaokrouhlenými čísly (zaokrouhlenými hodnotami čísel)**.

Zaokrouhlování se provádí na jednotky daného řádu (nebo na určitý počet platných číslic) takto:

1. Vypustíme všechny číslice nižších řádů (číslice zprava od číslice daného řádu). Je-li přitom zaokrouhlené číslo celé, jsou v něm vypuštěné číslice nahrazeny nulami.
2. Ostatní číslice ponecháme s případnou změnou podle těchto **pravidel zaokrouhlování:**

Jestliže první z vypouštěných číslic (počítáno zleva doprava)
- je menší než 5, pak poslední ponechaná číslice se nemění.
- je rovna 5 nebo větší než 5, pak poslední ponechaná číslice se zvětší o 1.

V prvním případě, když zaokrouhlené číslo je menší než původní (zaokrouhlované) číslo, mluvíme o **zaokrouhlování dolů (sestupném)**, ve druhém případě je zaokrouhlené číslo větší než původní, a proto mluvíme o **zaokrouhlování nahoru (vzestupném)**.

Jestliže aproximace $\tilde{a}$ vznikla zaokrouhlením čísla a, vyjadřujeme tuto skutečnost zápisem $a \doteq \tilde{a}$. (Čteme: a je po zaokrouhlení rovno $\tilde{a}$ nebo a se rovná po zaokrouhlení $\tilde{a}$.)

Poznámka. Zaokrouhlená celá čísla se mají zapisovat ve tvaru $a_p \cdot 10^n$, kde číslo a_p má všechny cifry platné a $n \in \mathsf{N}$. *Např.* rychlost světla ve vakuu se zapisuje takto: $c = (299\,792{,}5 \pm 0{,}3)\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}$ a po zaokrouhlení na tisíce (na tři platné cifry) $c \doteq 300 \cdot 10^3\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}$ nebo $c \doteq 3{,}00 \cdot 10^5\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}$ (nelze však psát $c \doteq 300\,000\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}$, neboť poslední tři nuly nejsou platnými ciframi), resp. po zaokrouhlení na sta (na čtyři platné cifry) $c \doteq 2\,998 \cdot 10^2\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}$ nebo $c \doteq 2{,}298 \cdot 10^5\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}$.

Příklady zaokrouhlování čísel

$25\,476 \doteq 255 \cdot 10^2$ zaokrouhleno na sta (na tři platné cifry); $287{,}235 \doteq 287{,}24$ zaokrouhleno na setiny (na pět platných cifer); $0{,}028\,36 \doteq 0{,}028$ zaokrouhleno na tisíciny (na dvě platné cifry).

Příklad užití zaokrouhlování k porovnání iracionálních čísel

Stanovte, které z iracionálních čísel π, $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ je větší.

Řešení užitím zaokrouhlených hodnot

$\pi \doteq 3{,}142$, $\sqrt{2} + \sqrt{3} \doteq 3{,}146 \Rightarrow \sqrt{2} + \sqrt{3} > \pi$. (Porovnejte s řešením téže úlohy na str. 73.)

Výjimku z pravidel zaokrouhlování je nutné učinit při zaokrouhlování dolních a horních aproximací: Dolní aproximace zaokrouhlujeme vždy dolů, horní aproximace zaokrouhlujeme vždy nahoru, aby aproximované číslo určitě leželo mezi nimi. Z téhož důvodu pak absolutní a relativní chyby zaokrouhlujeme vždy nahoru (obvykle s jednou až dvěma platnými ciframi).

Příklady

1. Určete se zaokrouhlením na dvě desetinná místa dolní a horní aproximaci čísla $a \doteq 12{,}78$.

Řešení

Číslo 12,78 je zaokrouhlené, jeho absolutní chyba je tedy 0,005, takže jeho dolní aproximace je $a_d = 12{,}78 - 0{,}005 = 12{,}775 \doteq 12{,}77$ (zaokrouhleno dolů) a horní aproximace je $a_h = 12{,}78 + 0{,}005 = 12{,}785 \doteq 12{,}79$ (zaokrouhleno nahoru).

2. Pro číslo $\pi = 3{,}141\,59\ldots$ platí nerovnosti $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$. Určete absolutní a relativní chybu aproximací čísla π desetinnými rozvoji čísel $3\frac{1}{7}$, $3\frac{10}{71}$ zaokrouhlenými na čtyři desetinná místa.

Řešení

a) $3\frac{1}{7} = 3{,}\overline{142\,857} \doteq 3{,}142\,9$, takže $|\pi - 3{,}142\,9| = |3{,}141\,59\ldots - 3{,}142\,9| < 0{,}001\,4$. Za absolutní chybu lze tedy vzít číslo 0,001 4 a relativní chyba je $\frac{0{,}001\,4}{3{,}142\,9} \doteq 0{,}000\,5 = 0{,}05\ \%$ (zaokrouhleno nahoru).

b) Obdobně: $3\frac{10}{71} \doteq 3{,}140\,8$; $|\pi - 3{,}140\,8| < 0{,}000\,8$; $\frac{0{,}000\,8}{3{,}140\,8} \doteq 0{,}000\,3 = 0{,}03\ \%$

Metody početních operací s aproximacemi reálných čísel

1. **Metoda mezí** spočívá ve výpočtu dolní a horní aproximace výsledku prováděných početních operací. Užíváme při tom vlastností rovností a nerovností mezi reálnými čísly (kap. 2.1); výhodné je též použití intervalové symboliky.

Pro operace sčítání, odčítání, násobení a dělení lze tak odvodit *větu:*

Pro každá kladná čísla a, a_d, a_h, b, b_d, b_h, pro která platí $a \in \langle a_d, a_h\rangle$, $b \in \langle b_d, b_h\rangle$, je

$$a + b \in \langle a_d + b_d, a_h + b_h\rangle,$$
$$a - b \in \langle a_d - b_d, a_h - b_h\rangle,$$
$$ab \in \langle a_d b_d, a_h b_h\rangle,$$
$$\frac{a}{b} \in \left\langle \frac{a_d}{b_h}, \frac{a_h}{b_d} \right\rangle.$$

(V případě součtu a rozdílu platí věta i pro libovolná reálná čísla.)

Příklad

Vypočítejte dolní a horní aproximace a) součtu, b) součinu čísel $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ s přesností na čtyři desetinná místa.

Řešení

$\sqrt{2} = 1{,}414\,213\,56\ldots$, $\sqrt{3} = 1{,}732\,050\,808\ldots$, takže $\sqrt{2} \in \langle 1{,}414\,2; 1{,}414\,3\rangle$, $\sqrt{3} \in \langle 1{,}732\,0; 1{,}732\,1\rangle$, odtud podle věty o dolních a horních aproximacích součtu a součinu dostáváme

a) $\sqrt{2} + \sqrt{3} \in \langle 1{,}414\,2 + 1{,}732\,0; 1{,}414\,3 + 1{,}732\,1\rangle$
čili $\sqrt{2} + \sqrt{3} \in \langle 3{,}146\,2; 3{,}146\,4\rangle$;

b) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \in \langle 1{,}414\,2 \cdot 1{,}732\,0; 1{,}414\,3 \cdot 1{,}732\,1\rangle$
čili $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \in \langle 2{,}449\,3; 2{,}449\,8\rangle$.

(Při výpočtech jsme užili pravidla o zaokrouhlování dolních a horních aproximací.)

2. **Metoda středních aproximací** spočívá ve výpočtu střední aproximace výsledku prováděných početních operací a její absolutní, resp. relativní chyby. Užíváme při tom opět vlastností rovností a nerovností mezi reálnými čísly.

Pro operace sčítání, odčítání, násobení a dělení lze tak odvodit *větu:*

Pro každá kladná čísla a, a_s, α, b, b_s, β, pro která platí $a = a_s \pm \alpha$, $b = b_s \pm \beta$, je

$$a + b = (a_s + b_s) \pm (\alpha + \beta),$$
$$a - b = (a_s - b_s) \pm (\alpha + \beta)$$

a pro $a_s \gg \alpha$, $b_s \gg \beta$ (symbol $\gg$ značí je mnohem větší než)

$$ab = a_s b_s \pm (\alpha b_s + \beta a_s),$$
$$\frac{a}{b} = \frac{a_s}{b_s} \pm \frac{\alpha b_s + \beta a_s}{b_s^2},$$

takže relativní chyba součinu ab i podílu $\frac{a}{b}$ je $\delta = \frac{\alpha}{a_s} + \frac{\beta}{b_s}$.

(V případě součtu a rozdílu platí věta i pro libovolná reálná čísla.)

Příklad

Určete střední aproximace a) součtu, b) součinu čísel $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ a jejich absolutní i relativní chyby s přesností na čtyři desetinná místa.

Řešení

Při výpočtu vyjdeme ze středních aproximací a absolutních chyb čísel $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ vzatých s přesností o jeden řád větší, než je požadovaná přesnost, tj. na pět desetinných míst:

$\sqrt{2} = 1{,}414\,25 \pm 0{,}000\,05$, $\sqrt{3} = 1{,}732\,05 \pm 0{,}000\,05$, odtud podle věty o středních aproximacích a absolutních chybách součtu a součinu dostáváme

a) $\sqrt{2} + \sqrt{3} = (1{,}414\,25 + 1{,}732\,05) \pm 2 \cdot 0{,}000\,05 = 3{,}146\,3 \pm 0{,}000\,1$,

b) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = (1{,}414\,25 \cdot 1{,}732\,05) \pm 0{,}000\,05 \cdot (1{,}414\,25 + 1{,}732\,05) \doteq$
$\doteq 2{,}449\,6 \pm 0{,}000\,2$.

(K týmž výsledkům by bylo možné dospět též z dolních a horních aproximací vzatých s přesností na pět desetinných míst.)

3. **Metoda platných číslic** se užívá především při počítání se zaokrouhlenými čísly. Je založena na jednoduchých pravidlech, podle kterých se určí přibližná hodnota výsledku početních operací s těmito čísly. Tato pravidla sice neudávají odhad chyby (absolutní chybu) výsledku, zaručují však, že výsledek má s velkou pravděpodobností všechny číslice platné, popř. s výjimkou poslední číslice, která nemusí být platná.

Pravidla metody platných číslic pro počítání se zaokrouhlenými čísly:

1. Při sčítání, resp. odčítání zaokrouhlených čísel určíme ten nejnižší řád číslic, pro který jsou platné číslice ve všech sčítaných, resp. odčítaných číslech. Na tento řád zaokrouhlíme výsledek. (Speciálně při sčítání a odčítání zaokrouhlených čísel s desetinnými místy ponecháme ve výsledku tolik desetinných míst, kolik jich má číslo s nejmenším počtem platných číslic za desetinnou čárkou.)
2. Při násobení, resp. dělení zaokrouhlených čísel ponecháme ve výsledku tolik platných číslic, kolik jich má číslo s nejmenším počtem platných číslic.
3. Při umocňování, resp. odmocňování zaokrouhleného čísla dvěma nebo třemi ponecháme ve výsledku tolik platných číslic, kolik jich má umocňované, resp. odmocňované číslo.
4. Při postupném provádění více operací se zaokrouhlenými čísly ponecháme u všech dílčích výsledků o jednu číslici více, než uvádějí předchozí pravidla. Obdobně lze zaokrouhlovat vstupní data (s různým počtem platných číslic).

Poznámka. Výsledky získané podle těchto pravidel vždy nezaručují, že jejich poslední číslice je platná.

Příklady

1. Vypočtěte přibližně s přesností na tři desetinná místa a) součet $\frac{2}{9} + \frac{5}{7}$, b) součin $\frac{11}{15} \cdot \frac{56}{61}$ tak, že racionální čísla vyjádřená zlomky nahradíte s potřebnou přesností zaokrouhlenými desetinnými čísly.

Řešení

a) $\frac{2}{9} = 0{,}\overline{2} \doteq 0{,}222\,2$, $\frac{5}{7} = 0{,}\overline{714\,285} \doteq 0{,}714\,3$ (podle 4. pravidla daná čísla zaokrouhlujeme na čtyři desetinná místa), a tedy $\frac{2}{9} + \frac{5}{7} \doteq 0{,}222\,2 + 0{,}714\,3 = 0{,}936\,5 \doteq 0{,}937$,

b) $\frac{11}{15} = 0{,}7\overline{3} \doteq 0{,}733\,3$, $\frac{56}{61} = 0{,}\overline{918\,032\,786} \doteq 0{,}918\,0$ (podle 4. pravidla daná čísla zaokrouhlujeme na čtyři platná desetinná místa), a tedy $\frac{11}{15} \cdot \frac{56}{61} \doteq 0{,}733\,3 \cdot 0{,}918\,0 = 0{,}673\,169\,4 \doteq 0{,}673$.

Získané výsledky mají všechna tři desetinná místa platná, neboť výpočty se zlomky bychom dostali

a) $\frac{2}{9} + \frac{5}{7} = \frac{59}{63} = 0{,}\overline{936\,507} \doteq 0{,}937$,

b) $\frac{11}{15} \cdot \frac{56}{61} = \frac{616}{915} = 0{,}673\,224\,043\,7\ldots \doteq 0{,}673$.

2. Vypočtěte přibližně se zaokrouhlením na čtyři desetinná místa a) součet, b) součin iracionálních čísel $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$.

Řešení

$\sqrt{2} = 1{,}414\,213\,562\ldots \doteq 1{,}414\,21$, $\sqrt{3} = 1{,}732\,050\,808\ldots \doteq 1{,}732\,05$ (podle 4. pravidla jsme čísla $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ zaokrouhlili na pět platných desetinných míst), takže

a) $\sqrt{2} + \sqrt{3} \doteq 1{,}414\,21 + 1{,}732\,05 = 3{,}146\,26 \doteq 3{,}146\,3$,

b) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \doteq 1{,}414\,21 \cdot 1{,}732\,05 = 2{,}449\,482\,43\ldots \doteq 2{,}449\,5$.

Oba výsledky mají všechny cifry platné, jak plyne z předcházejících příkladů řešených metodou mezí a metodou středních aproximací. K výsledku b) lze též dospět přesnějším výpočtem na základě věty o odmocnině součinu kladných čísel (kap. 2.6): $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6} = 2{,}449\,489\,743\ldots \doteq 2{,}449\,5$.

2.6 Mocniny a odmocniny v oboru reálných čísel

V oboru R se definuje **mocnina** a^r (čteme: r-tá mocnina a nebo a na r-tou) postupně pro r přirozené, nulu, záporné celé a po zavedení odmocniny pro r racionální a iracionální. Početní operace, kterou se číslu a přiřazuje pro dané reálné číslo r mocnina a^r, se nazývá **umocňování** čísla a číslem r. Číslu a se říká **základ mocniny** (nebo **mocněnec**) a číslu r **mocnitel** (nebo **exponent**).

Mocniny s celočíselnými mocniteli

a) Nejprve se zavádějí mocniny s přirozeným mocnitelem, který označíme n.

Pro každé přirozené číslo n a pro každé reálné číslo a je **n-tá mocnina** čísla a *definována* takto (kap. 2.1):

$$a^1 = a,\ a^n = a^{n-1} \cdot a \ (\text{pro } n \in \mathsf{N},\ n > 1),$$

tj. a^n představuje pro $n \in \mathsf{N}$ součin n sobě rovných činitelů.

Na základě této definice mocniny a^n lze odvodit následující *věty:*

Vzorce pro počítání s mocninami

Pro všechna přirozená čísla r, s a pro všechna reálná čísla a, b platí:

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s} \qquad (1)$$
$$a^r : a^s = a^{r-s} \qquad (2)$$
$$(a^r)^s = a^{rs} \qquad (3)$$
$$(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r \qquad (4)$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r} \qquad (5)$$

s těmito doplňujícími podmínkami: Ve vzorci (2) musí být $r > s$ (aby mocnitel $r - s$ byl přirozené číslo), $a \neq 0$ (abychom nedělili nulou) a obdobně ve vzorci (5) musí být $b \neq 0$.

Poznámka. Vzorce (1) a (4) lze rozšířit na libovolný konečný počet činitelů:

Pro všechna přirozená čísla $r_1, r_2, \dots, r_n, r$ a všechna reálná čísla $a, a_1, a_2, \dots, a_n$ platí:

$$a^{r_1}\cdot a^{r_2}\cdot\ldots\cdot a^{r_n} = a^{r_1+r_2+\dots+r_n} \qquad (1')$$

$$(a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n)^r = a_1^r\cdot a_2^r\cdot\ldots\cdot a_n^r \qquad (4')$$

b) Rozšíření pojmu mocniny na případ, že mocnitelem je nula, motivujeme požadavkem, aby vzorec (2) pro počítání s mocninami platil též pro $r = s$, kdy je podíl mocnin v tomto vzorci $a^r : a^s = 1$ pro $a \neq 0$.

Proto se *definuje* pro každé reálné číslo $a \neq 0$:

$$a^0 = 1$$

(Všimněte si, že *není definováno* 0^0.)

c) Rozšíření pojmu mocniny na případ, že mocnitelem je celé záporné číslo, se motivuje obdobně požadavkem, aby vzorec (2) pro počítání s mocninami o základu $a \neq 0$ platil i pro $r < s$. Pak na pravé straně ve vzorci $a^r : a^s = a^{r-s}$ je mocnitel $r - s < 0$ a zároveň však je $a^r : a^s = \dfrac{a^r}{a^s} = \dfrac{1}{a^{s-r}}$ (po zkrácení zlomku a^r), přičemž $s - r = -(r - s) > 0$. Proto požadujeme, aby platilo $a^{r-s} = \dfrac{1}{a^{s-r}}$.

Tento požadavek vede k tomu, že pro každé záporné celé číslo k a každé reálné číslo $a \neq 0$ *definujeme*:

$$a^k = \frac{1}{a^{-k}}$$

Např. $a^{-3} = \dfrac{1}{a^3}$, kde $a \neq 0$, odkud $2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$ apod.

Těmito definicemi je zavedena mocnina a^r pro každého celočíselného mocnitele r, jejímž základem může být obecně každé číslo $a \neq 0$. Pro **počítání s mocninami o celočíselných mocnitelích** z těchto definic plynou opět vzorce (1) až (5), uvedené na str. 87, jejichž předpoklady vyjadřuje *věta*:

Vzorce (1) až (5) platí pro všechna celá čísla r, s a pro všechna čísla $a \neq 0$, $b \neq 0$; vzorce (1') a (4') platí pro všechna celá čísla $r, r_1, \dots, r_n$ a pro všechna reálná čísla $a \neq 0, a_1 \neq 0, \dots, a_n \neq 0$.

Příklady počítání s mocninami o přirozených mocnitelích

a) $(-2)^3 = (-2)^2\cdot(-2) = 4\cdot(-2) = -8$, $3^5 : 3^3 = 3^{5-3} = 3^2 = 9$, $(-2)^6 = \left[(-2)^2\right]^3 = 4^3 = 64$ nebo $(-2)^6 = \left[(-2)^3\right]^2 = (-8)^2 = 64$, $\left(\dfrac{1}{5}\right)^4 = \dfrac{1^4}{5^4} = \dfrac{1}{625}$, $\left(-\dfrac{2}{7}\right)^3 = \dfrac{(-2)^3}{7^3} = -\dfrac{8}{343}$

b) mocniny se základy $a, b, c, x, y, p, q \in \mathsf{R}$; $a^3\cdot a^2 = a^5$, $a^3 : a^2 = a$ pro $a \neq 0$, $(a^3)^2 = a^6$, $(xy)^3 = x^3y^3$, $5x^4\cdot 3x = 15x^5$, $4a^5b^2\cdot(-7a^3b^4c^2) = -28a^8b^6c^2$, $(2a^3b^4)^2 = 4a^6b^8$, $-12p^6q^3 : 4p^5q = -3pq^2$ pro $p \neq 0$, $q \neq 0$, $(-18x^2y^6) : (-6x^2y^3) = 3y^3$ pro $x \neq 0$, $y \neq 0$.

Příklady počítání s mocninami o celočíselných mocnitelích

a) $(-0{,}2)^{-2} - (-2)^0 + (-1)^{-3} + (-6)^2 - (-3)^{-2} = \left(-\dfrac{1}{5}\right)^{-2} - 1 + (-1)^3 + 6^2 - \left(-\dfrac{1}{3}\right)^2 = 5^2 - 1 - 1 + 6^2 - \dfrac{1}{3^2} = 25 - 2 + 36 - \dfrac{1}{9} = 58\dfrac{8}{9}$

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-10}\cdot\left(\dfrac{1}{8}\right)^4 + \left(\dfrac{3}{7}\right)^0 : \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1} = 2^{10}\cdot\left(\dfrac{1}{2^3}\right)^4 + 1 : 2 = \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{4}$

b) mocniny s libovolnými reálnými základy $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$:

$(8a^5b^{-4}c^{-2})\cdot(3a^{-3}b^7c^2) = 24a^2b^3c^0 = 24a^2b^3$

$(15a^4b^{-2}c^{-3}) : (5a^{-3}b^4c) = 3a^7b^{-6}c^{-4} = \dfrac{3a^7}{b^6c^4}$

$(3a^{-2}bc^3)^{-4} = 3^{-4}a^8b^{-4}c^{-12} = \dfrac{a^8}{3^4b^4c^{12}} = \dfrac{a^8}{81b^4c^{12}}$

Odmocniny v oboru reálných čísel

Při zavedení **odmocňování** jako inverzní operace k umocňování v oboru reálných čísel se vychází z toho, že platí *věta*:

Ke každému nezápornému číslu a existuje pro každé dané přirozené číslo n právě jedno nezáporné číslo b takové, že $b^n = a$.

Na základě této věty *definujeme*:

Nechť n je libovolné přirozené číslo, a nezáporné číslo; pak takové (jediné) nezáporné číslo b, pro které platí $b^n = a$, se nazývá **n-tá odmocnina čísla a**. Zapisuje se $b = \sqrt[n]{a}$. Číslu $a \geqq 0$ se říká **základ odmocniny** (nebo **odmocněnec**) a číslu n **odmocnitel**.

Je-li $a = 0$, je $\sqrt[n]{0} = 0$; je-li $a > 0$, je $\sqrt[n]{a} > 0$ pro každé $n \in \mathsf{N}$. Speciálně pro $n = 1$ je $\sqrt[1]{a} = a$, pro $n = 2$ píšeme místo $\sqrt[2]{a}$ stručněji jen $\sqrt{a}$.

Např. $\sqrt{9} = 3$, neboť $3^2 = 9$; $\sqrt[3]{8} = 2$, neboť $2^3 = 8$.

Důležité je, že pro každé reálné číslo a platí

$$\sqrt{a^2} = |a|,$$

neboť pro $a \geqq 0$ je $\sqrt{a^2} = a$, avšak pro $a < 0$ je $\sqrt{a^2} = -a$.

Tento vzorec lze ještě zobecnit: Pro každé sudé přirozené číslo $n = 2m$ a každé reálné číslo a platí

$$\sqrt[2m]{a^{2m}} = |a|.$$

Z definice n-té odmocniny a ze vzorců pro počítání s mocninami o přirozených mocnitelích uvedených na str. 87 plynou následující *věty:*

Vzorce pro počítání s odmocninami
Pro všechna přirozená čísla m, n, p a pro všechna nezáporná čísla a, b platí:

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab} \qquad (6)$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}} \qquad (7)$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m} \qquad (8)$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a} \qquad (9)$$

$$\sqrt[n]{a}=\sqrt[np]{a^p} \qquad (10)$$

Poznámka. Vzorec (6) lze rozšířit na libovolný konečný počet odmocnin s týmž odmocnitelem:

Pro všechna přirozená čísla n, p a pro všechna nezáporná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_p$ platí:

$$\sqrt[n]{a_1}\cdot\sqrt[n]{a_2}\cdot\ldots\cdot\sqrt[n]{a_p}=\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_p} \qquad (6')$$

Některé *důsledky vzorců* (6) až (10):

a) Ze vzorce (8) plyne pro $m=n$ vzorec

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=\sqrt[n]{a^n}=a \text{ pro každé } a\geqq 0.$$

b) Ze vzorce (9) vyplývá, že je

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} \text{ pro každá } m, n\in\mathsf{N},\ a\geqq 0.$$

c) Ze vzorců (6) a (8) plyne, že je

$$\sqrt[n]{a^n b}=\sqrt[n]{a^n}\cdot\sqrt[n]{b}=a\sqrt[n]{b} \text{ pro každé } n\in\mathsf{N},\ a\geqq 0,\ b\geqq 0.$$

Této úpravě se říká **částečné odmocňování** a obrácené úpravě **převedení činitele** a **do odmocněnce**.

Příklady výpočtů s odmocninami

a) $\sqrt{27}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{27\cdot 3}=\sqrt{81}=9$, $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{8}=2$, $\sqrt{16\cdot 4}=\sqrt{16}\cdot\sqrt{4}=4\cdot 2=$ $=8$, $\sqrt{a^2b}=|a|\cdot\sqrt{b}$ pro $a\in\mathsf{R}$, $b\geqq 0$

b) $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}=\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}}=\frac{2}{3}$, $\sqrt[4]{a^4b^{-4}}=\sqrt[4]{\frac{a^4}{b^4}}=\frac{a}{b}$ pro $a\geqq 0$, $b>0$

c) $\left(\sqrt[6]{4}\right)^3=\sqrt[6]{4^3}=\sqrt[6]{(2^2)^3}=\sqrt[6]{2^6}=2$

d) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}}=\sqrt[12]{2}$, $\sqrt[6]{27}=\sqrt{\sqrt[3]{27}}=\sqrt{\sqrt[3]{3^3}}=\sqrt{3}$

e) $\sqrt[6]{27}=\sqrt[6]{3^3}=\sqrt[2\cdot 3]{3^3}=\sqrt{3}$

Příklady částečného odmocňování

a) $\sqrt{8}=\sqrt{4\cdot 2}=\sqrt{2^2\cdot 2}=2\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{81}=\sqrt[3]{27\cdot 3}=\sqrt[3]{3^3\cdot 3}=3\sqrt[3]{3}$

b) $\sqrt[3]{32x^4y}=\sqrt[3]{(2x)^3\,4xy}=2x\sqrt[3]{4xy}$ pro $x\geqq 0$, $y\geqq 0$

c) Pomocí částečného odmocnění lze někdy upravit ke sčítání odmocniny, které sice mají stejné odmocnitele, ale různé základy, a které proto není možné sečíst přímo. Tak např.:
$\sqrt{8}+\sqrt{18}=\sqrt{2^2\cdot 2}+\sqrt{3^2\cdot 2}=2\sqrt{2}+3\sqrt{2}=(2+3)\sqrt{2}=5\sqrt{2}$

Příklad na převedení činitele do odmocněnce

$\sqrt[3]{16\sqrt{2}}=\sqrt[3]{\sqrt{16^2\cdot 2}}=\sqrt[3]{\sqrt{2^8\cdot 2}}=\sqrt[3]{\sqrt{2^9}}=\sqrt[6]{2^9}=\sqrt{2^3}=2\sqrt{2}$

Poznámka o odmocňování součtu, resp. rozdílu čísel. Je nutné si uvědomit, že pro $\sqrt[n]{x\pm y}$, kde $x>0$, $y>0$, je $\sqrt[n]{x\pm y}\neq\sqrt[n]{x}\pm\sqrt[n]{y}$; tak např. $\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$, zatímco $\sqrt{9}+\sqrt{16}=3+4=7$.

Výpočet odmocniny tvaru $\sqrt{a\pm\sqrt{b}}$ můžeme však provést (lze-li odmocnit a^2-b) užitím *věty:*

Pro libovolné $a>0$, $b>0$, $a^2>b$ platí

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}},$$

přičemž zároveň platí buď horní, nebo dolní znaménka.

Důkaz
Označme $x=\sqrt{a+\sqrt{b}}+\sqrt{a-\sqrt{b}}$.
Umocněním dostaneme $x^2=2a+2\sqrt{a^2-b}$.
Protože je zřejmě $x>0$, je $x=\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-b}}$.

Z obou vyjádření plyne $\sqrt{a+\sqrt{b}}+\sqrt{a-\sqrt{b}}=2\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}$.

Zcela obdobně určíme $\sqrt{a+\sqrt{b}}-\sqrt{a-\sqrt{b}}=2\sqrt{\dfrac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$.

Sečtením, resp. odečtením posledních dvou rovností dostáváme dokazované vztahy.

Příklad užití vzorce z předchozí věty

$$\sqrt{2\pm\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{4-3}}{2}}\pm\sqrt{\frac{2-\sqrt{4-3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{3}\pm 1)=\frac{1}{2}(\sqrt{6}\pm\sqrt{2})$$

Poznámky k pojmu odmocniny v oboru reálných čísel. Velmi často se lze setkat s otázkou: Proč se definuje v oboru reálných čísel pouze n-tá odmocnina z nezáporného čísla, a to opět jako nezáporné číslo? Např. proč je $\sqrt{4}=2$ a nikoli $\sqrt{4}=\pm 2$, ačkoli je nejenom $2^2=4$, ale též $(-2)^2=4$? Důvodů pro to je více, uvedeme dva základní:

a) Odmocninu v R je třeba definovat jednoznačně, aby s ní bylo možné také jednoznačně počítat. Kdyby byla např. $\sqrt{a}$ pro $a > 0$ definována dvojznačně (např. $\sqrt{4} = \pm 2$), pak by již tak jednoduchý výraz jako $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ pro každé $a > 0$, $b > 0$ měl čtyři různé číselné hodnoty.

b) Pro každé reálné číslo $b \neq 0$ a pro každé sudé přirozené číslo n je $b^n > 0$, tj. pro žádné reálné číslo b není $b^n = a < 0$. Pro sudé $n \in \mathrm{N}$ nelze tedy v oboru R definovat $\sqrt[n]{a}$ z čísla $a < 0$. Pro liché $n \in \mathrm{N}$ je možné v oboru R definovat $\sqrt[n]{a}$ z čísla $a < 0$ takto: $\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{|a|}$. Tak např. $\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -2$. Pak však již neplatí některé ze vzorců pro počítání s odmocninami, uvedené na str. 90, např. vzorec (10), jak ukazuje tento jednoduchý příklad:

$$\sqrt[3]{-8} = -2, \quad \text{ale} \quad \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2.$$

Mocniny s racionálními mocniteli

Při motivaci definice **mocniny** $a^{\frac{m}{n}}$ **s racionálním mocnitelem** $\frac{m}{n}$, kde m je celé číslo, n přirozené číslo, vyjdeme z požadavku, aby byla logickým rozšířením pojmu mocniny s celočíselným mocnitelem k. Nechť je tedy speciálně $\frac{m}{n} = k \in \mathrm{Z}$, pak platí pro každé $a > 0$:

$$a^{\frac{m}{n}} = a^k = \left(\sqrt[n]{a^k}\right)^n = \sqrt[n]{a^{kn}} = \sqrt[n]{a^m},$$

např. $2^{\frac{6}{3}} = 2^2 = \sqrt[3]{2^6}$, $3^{-\frac{12}{4}} = 3^{-3} = \sqrt[4]{3^{-12}}$. To nás vede k myšlence zobecnit definicí tento vztah i pro necelá racionální čísla $\frac{m}{n}$.

Pro každé racionální číslo $r = \frac{m}{n}$, kde m je celé číslo, n přirozené číslo, a pro každé kladné číslo a *definujeme*:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Tato definice je oprávněná, neboť určuje mocninu a^r pro libovolné $r \in \mathrm{Q}$ jednoznačně, nezávisle na tom, kterým ze sobě rovných zlomků vyjádříme racionální číslo r. Vyplývá to z *věty*:

Je-li $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$, kde m, p jsou celá čísla, n, q přirozená čísla, pak pro každé kladné číslo a platí $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[q]{a^p}$.

Poznámka. Zdůrazněme, že mocnina a^r, kde $r = \frac{m}{n} \in \mathrm{Q}$, je obecně definována pouze pro základ $a > 0$. Je-li $r \in \mathrm{Q}$, $r > 0$, je možné definici zobecnit i pro $a = 0$, tj. položit $0^r = 0$. Pro $a < 0$ nedefinujeme mocninu a^r, pokud r je obecné racionální číslo; definována je speciálně jen tehdy, je-li $r \in \mathrm{N}$ nebo $r \in \mathrm{Z}$ (viz článek o mocninách s celočíselnými mocniteli).

O vhodnosti uvedené definice mocniny a^r s racionálním mocnitelem $r = \frac{m}{n}$ a základem $a > 0$ svědčí skutečnost, že na jejím základě lze odvodit **vzorce pro počítání s mocninami o racionálních mocnitelích** ve stejném tvaru jako vzorce na str. 87 a 88 za předpokladů formulovaných *větou*:

Vzorce (1) až (5) na straně 87 platí pro každá racionální čísla r, s a pro každá kladná čísla a, b; vzorce (1') a (4') platí pro všechna racionální čísla $r, r_1, \ldots, r_n$ a pro všechna kladná čísla $a, a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Jejich užitím můžeme převést násobení, dělení, umocňování a odmocňování odmocnin na počítání s příslušnými mocninami o racionálních mocnitelích, což je zpravidla jednodušší po stránce výpočtové (neboť pravidla pro počítání s mocninami jsou formálně jednodušší než pravidla pro počítání s odmocninami).

Příklady výpočtů s mocninami o racionálních mocnitelích

a)
$$\frac{\left(15^{\frac{1}{3}} \cdot 27^{-\frac{1}{2}}\right)^{-3}}{\left(25^{\frac{1}{4}} \cdot 9^{\frac{1}{8}}\right)^{-2}} : \frac{9^{\frac{1}{3}}}{\left(3 \cdot 27^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}} = \frac{\left[3^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{3}} \cdot (3^3)^{-\frac{1}{2}}\right]^{-3}}{\left[(5^2)^{\frac{1}{4}} \cdot (3^2)^{\frac{1}{8}}\right]^{-2}} \cdot \frac{\left[3 \cdot (3^3)^{\frac{1}{4}}\right]^{\frac{1}{3}}}{(3^2)^{\frac{1}{3}}} =$$
$$= \frac{3^{-1} \cdot 5^{-1} \cdot 3^{\frac{9}{2}}}{5^{-1} \cdot 3^{-\frac{1}{2}}} \cdot \frac{3^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{4}}}{3^{\frac{2}{3}}} = 3^{-1+\frac{9}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}} =$$
$$= 3^{\frac{-12+54+4+3+6-8}{12}} = 3^{\frac{47}{12}} = 3^3 \cdot 3^{\frac{11}{12}} = 3^3 \cdot \sqrt[12]{3^{11}}$$

b) $\sqrt[3]{16\sqrt{2}} = \left(2^4 \cdot 2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(2^{\frac{9}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{3}{2}} = 2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}$
(Porovnejte s přímým výpočtem s odmocninami uvedeným na str. 91.)

c) Upravte (zjednodušte) výraz s proměnnými $x > 0$, $y > 0$:

$$V(x, y) = \sqrt{2xy} \cdot \sqrt[3]{4x^2y^4} \cdot \sqrt[4]{8x^3y^5} \cdot \sqrt[6]{x^5y^7} \cdot \sqrt[12]{2x^3y^9}$$

Řešení
1. způsob (počítání s odmocninami)
Protože podle vzorce $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ lze násobit jen odmocniny, které mají stejného odmocnitele, musíme nejprve všechny odmocniny převést na nejmenšího společného odmocnitele, jímž bude $n(2; 3; 4; 6; 12) = 12$:

$$V(x, y) = \sqrt[12]{(2xy)^6 \cdot (2^2x^2y^4)^4 \cdot (2^3x^3y^5)^3 \cdot (x^5y^7)^2 \cdot 2x^3y^9} =$$
$$= \sqrt[12]{2^6x^6y^6 \cdot 2^8x^8y^{16} \cdot 2^9x^9y^{15} \cdot x^{10}y^{14} \cdot 2x^3y^9} =$$
$$= \sqrt[12]{2^{24}x^{36}y^{60}} = 4x^3y^5$$

2. způsob (výhodnější – užitím mocnin s racionálními mocniteli):

$$V(x, y) = 2^{\frac{6+8+9+1}{12}} x^{\frac{6+8+9+10+3}{12}} y^{\frac{6+16+15+14+9}{12}} = 2^{\frac{24}{12}} x^{\frac{36}{12}} y^{\frac{60}{12}} = 4x^3y^5$$

Mocniny s reálnými mocniteli

Mocnina a^r s racionálním mocnitelem r byla definována v předchozím článku (obecně pro základy $a > 0$).

Mocnina a^r s kladným iracionálním mocnitelem r vyjádřeným nekonečným neperiodickým desetinným rozvojem $r = r_0{,}r_1r_2\ldots r_n\ldots$ se *definuje* pro základy $a > 0$ jako takové reálné číslo, pro které platí

$$a^{r_{n,d}} \leqq a^r \leqq a^{r_{n,h}}, \text{ je-li } a > 1;$$
$$a^{r_{n,d}} \geqq a^r \geqq a^{r_{n,h}}, \text{ je-li } 0 < a < 1;$$
$$a^r = 1, \quad \text{je-li } a = 1.$$

Přitom $r_{n,d}$ a $r_{n,h}$ jsou dolní a horní n-té desetinné aproximace čísla r. S rostoucím n rozdíly $r_{n,h} - r_{n,d}$ klesají neomezeně k nule. Existence a unicita (jednoznačnost) takto definované mocniny a^r s iracionálním mocnitelem r je zaručena podle principu vložených intervalů (kap. 2.5).

Mocnina a^r se záporným iracionálním mocnitelem r se *definuje* takto:

$$a^r = \frac{1}{a^{-r}}$$

Příklady určení desetinného rozvoje mocniny s iracionálním mocnitelem

a) $2^{\sqrt{2}}$, kde $\sqrt{2} = 1{,}414\ 213\ 56\ldots$, je iracionální číslo, pro které platí $2^1 < 2^{\sqrt{2}} < 2^2, \ldots, 2^{1{,}414} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1{,}415}, \ldots$ Protože $2^{1{,}414} \doteq 2{,}664\ 7$ a $2^{1{,}415} \doteq 2{,}666\ 6$, je $2^{\sqrt{2}} = 2{,}66\ldots$ Přesnější vícemístné výpočty dávají $2^{\sqrt{2}} = 2{,}665\ 144\ 14\ldots$

b) $2^{-\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2^{\sqrt{2}}} = 0{,}375\ 214\ 22\ldots$

Nerovnosti pro dolní a horní aproximace mocniny s iracionálním mocnitelem v její definici platí (za týchž předpokladů) také pro mocniny s racionálními mocniteli. O těchto mocninách víme, že pro počítání s nimi platí vzorce uvedené na str. 87. Platnost těchto **vzorců** lze dokázat i pro **počítání s mocninami o reálných mocnitelích** za předpokladů daných *větou:*

> Vzorce (1) až (5) na str. 87 platí pro každá reálná čísla r, s a pro každá kladná čísla a, b; vzorce (1') a (4') na str. 88 platí pro každá reálná čísla $r, r_1, \ldots, r_n$ a pro každá kladná čísla $a, a_1, \ldots, a_n$.

Příklady počítání s mocninami o reálných mocnitelích

$$2^{\sqrt{3}} \cdot 2^{1-\sqrt{3}} = 2^{\sqrt{3}+1-\sqrt{3}} = 2^1 = 2$$

$$\left(3^{\sqrt{5}-\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = 3^{5-2} = 3^3 = 27$$

$$5^{\sqrt{7}+1} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{7}-1} = 5^{\sqrt{7}+1} \cdot 5^{1-\sqrt{7}} = 5^{\sqrt{7}+1+1-\sqrt{7}} = 5^2 = 25$$

Užitečné jsou též věty o nerovnostech pro mocniny, které lze dokázat (postupně) pro mocniny s libovolnými přirozenými, celými a racionálními mocniteli r, s.

> *Věty o nerovnostech pro mocniny (v oboru* R*)*
> 1. Pro každé $a > 0$ a pro každé reálné r je $a^r > 0$.
> 2. Je-li $0 < a < b$, $r > 0$, pak $a^r < b^r$; je-li $0 < a < b$, $r < 0$, pak $a^r > b^r$.
> 3. Je-li $a > 1$, $r < s$, pak $a^r < a^s$; je-li $0 < a < 1$, $r < s$, pak $a^r > a^s$.

Příklady důkazů nerovností pro mocniny

1. Dokažte, že z nerovnosti $0 < a < b$ plyne pro každé přirozené číslo n nerovnost $0 < a^n < b^n$.

Důkaz matematickou indukcí
Dokazujeme větu $\forall n \in \mathrm{N}$: $0 < a < b \Rightarrow 0 < a^n < b^n$.

I. Pro $n = 1$ dokazovaná věta platí; neboť

$$0 < a < b \Rightarrow 0 < a^1 < b^1.$$

II. Předpokládejme, že dokazovaná věta platí pro $n = k$, tj.

$$0 < a < b \Rightarrow 0 < a^k < b^k.$$

Dokážeme, že pak platí také pro $n = k + 1$: Vynásobením nerovnosti $0 < a^k < b^k$ číslem $a > 0$ dostaneme $0 < a^{k+1} < ab^k$ a vynásobením nerovnosti $a < b$ číslem $b^k > 0$ dostáváme $ab^k < b^{k+1}$. Z obou nerovností pak plyne $0 < a^{k+1} < b^{k+1}$, což je nerovnost $0 < a^n < b^n$ pro $n = k + 1$.

2. Dokažte, že z nerovnosti $0 < a < b$ plyne pro každé záporné celé číslo $r = -n$ nerovnost $a^r > b^r > 0$.

Důkaz
Podle definice mocniny se záporným celým mocnitelem je $a^r = a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$, $b^r = b^{-n} = \dfrac{1}{b^n}$ a podle věty z příkladu 1 je $0 < a^n < b^n$, odkud vzhledem k předpokladu $0 < a < b$ plyne $\dfrac{1}{a^n} > \dfrac{1}{b^n} > 0$ čili $a^r > b^r > 0$.

3. Dokažte, že z nerovnosti $0 < a < b$ plyne

a) pro každé racionální číslo $r > 0$ nerovnost $0 < a^r < b^r$,

b) pro každé racionální číslo $r < 0$ nerovnost $a^r > b^r > 0$.

Důkaz
Označme $r = \dfrac{m}{n}$, kde $m \in \mathrm{Z}$, $n \in \mathrm{N}$; $x = a^{\frac{1}{n}}$, $y = b^{\frac{1}{n}}$. Z nerovnosti $0 < a < b$ plyne pro x, y nerovnost $0 < x < y$. A odtud:

a) Je-li $r > 0$ čili $m \in \mathrm{N}$, platí podle věty z příkladu 1: $0 < x < y \Rightarrow x^m < y^m$ neboli $0 < a^r < b^r$.

b) Je-li $r < 0$ čili m je záporné celé číslo, platí podle věty z příkladu 2: $0 < x < y \Rightarrow x^m > y^m > 0$ neboli $a^r > b^r > 0$.

4. **Dokažte, že platí-li pro racionální čísla r, s nerovnost $r < s$, pak pro každé $a > 1$ je $a^r < a^s$ a pro $0 < a < 1$ je $a^r > a^s$.**

Důkaz

Je-li $r < s$, je $s - r > 0$. Pak podle věty dokazované v předchozím příkladu z nerovnosti $a > 1$ plyne $a^{s-r} > 1$ a odtud $a^s > a^r$ čili $a^r < a^s$, zatímco z nerovnosti $0 < a < 1$ plyne $a^{s-r} < 1$ a odtud $a^s < a^r$ čili $a^r > a^s$.

Věty 1 až 3 o nerovnostech pro mocniny s kladnými základy uvedené na str. 95, které jsme dokázali pro mocniny s racionálními mocniteli, lze dokázat také pro mocniny s obecnými reálnými mocniteli.

Poznámka. Pojem mocniny a^r lze rozšířit též pro základ $a = 0$ a libovolné reálné číslo $r > 0$ definicí $0^r = 0$.

2.7 Zlomky

Poznatky o zlomcích a početních operacích s nimi představují důležitou část učiva matematiky na základní a střední škole.

V předcházejících kapitolách jsme zlomky užívali především pro vyjádření racionálních čísel.

Obecně **zlomek** $\frac{a}{b}$ vyjadřuje podíl libovolných dvou čísel (reálných nebo komplexních) a, b, kde $b \neq 0$; číslu a se říká **čitatel**, číslu b **jmenovatel zlomku**. Speciálně je-li $b = 10^n$, $n \in \mathrm{N}$, zlomek se nazývá **desetinný zlomek**.

Početní operace se zlomky

Z vlastností podílu plyne účelnost těchto *definic* **rovnosti** a **základních operací se zlomky** (za předpokladu, že $b \neq 0$, $d \neq 0$):

rovnost zlomků	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$
rozšíření zlomku číslem $k \neq 0$	$\frac{a}{b} = \frac{ak}{bk}$
krácení zlomku číslem $k \neq 0$	$\frac{ak}{bk} = \frac{a}{b}$
sčítání zlomků	$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$
násobení zlomků	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

Pro inverzní operace platí (za předpokladu, že $b \neq 0$, $d \neq 0$):

odčítání zlomků	$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a}{b} + \left(-\frac{c}{d}\right) = \frac{ad - bc}{bd}$
dělení zlomků	$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$ (pro $c \neq 0$)

Poznámka. Operace sčítání a násobení dvou zlomků lze rozšířit na více zlomků, např. (pro $b \neq 0$, $d \neq 0$, $f \neq 0$):

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} = \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f} = \frac{adf + cbf + ebd}{bdf}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} = \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{e}{f} = \frac{ace}{bdf}$$

Při sčítání a odčítání zlomků, jejichž jmenovatelé jsou různá přirozená čísla postupujeme tak, že je upravíme rozšířením tak, aby měly společného jmenovatele. Nejvhodnější je nejmenší společný jmenovatel (tj. nejmenší společný násobek všech jmenovatelů). Před násobením vždy, pokud je to možné, zlomky nejprve krátíme.

Příklady početních operací se zlomky

a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6}$

b) $\frac{5}{18} - \frac{4}{9} = \frac{5}{18} - \frac{8}{18} = -\frac{3}{18} = -\frac{1}{6}$

c) $\frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{5+3+2}{30} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$

d) $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} = \frac{6+8-9}{12} = \frac{5}{12}$

e) $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} - \frac{4}{5} + \frac{5}{6} = \frac{30+40-45-48+50}{60} = \frac{27}{60} = \frac{9}{20}$

f) $\frac{3}{5} \cdot \frac{8}{11} = \frac{3 \cdot 8}{5 \cdot 11} = \frac{24}{55}$

g) $\frac{21}{8} \cdot \frac{12}{35} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 5} = \frac{9}{10} = 0{,}9$

h) $\frac{5}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{7} = \frac{5}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7} = \frac{5 \cdot 1 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 7} = \frac{15}{14}$

i) $\frac{2}{7} : \frac{5}{6} = \frac{2}{7} \cdot \frac{6}{5} = \frac{2 \cdot 6}{7 \cdot 5} = \frac{12}{35}$

j) $\frac{3}{7} : \frac{9}{14} = \frac{3}{7} \cdot \frac{14}{9} = \frac{1}{1} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

Poznámka. V praxi se často setkáváme s úlohou „určit zlomek $\frac{a}{b}$ z čísla c“ neboli „číslo c změnit“ (zvětšit nebo zmenšit v poměru a ku b). Tato úloha se řeší násobením $\frac{a}{b} \cdot c = \frac{ac}{b}$.

Příklady

$$\frac{2}{3} \text{ z } 60 \text{ jsou } \frac{2}{3} \cdot 60 = 40, \qquad \frac{3}{2} \text{ z } \pi \text{ jsou } \frac{3}{2}\pi$$

Příklad důkazové úlohy o zlomcích

Dokažte *větu:* Pro libovolná čísla a, b, c, d, $b \neq 0$, $d \neq 0$ platí implikace

a) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}$, b) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a \pm c}{b \pm d} = \frac{c}{d}$ pro $b \neq \pm d$.

Důkaz

Vyjdeme z ekvivalence: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$, $b \neq 0$, $d \neq 0$.

a) K oběma stranám rovnosti $ad = bc$ přičteme $\pm bd$:

$$ad \pm bd = bc \pm bd$$

Po vytknutí b, d dostáváme:

$$d(a \pm b) = b(c \pm d)$$

Odtud pro $b \neq 0$, $d \neq 0$ plyne dokazovaná rovnost a).

b) K oběma stranám rovnosti $ad = bc$ přičteme $\pm cd$:

$$ad \pm cd = bc \pm cd$$

Po vytknutí d, c dostáváme:

$$d(a \pm c) = c(b \pm d)$$

Odtud pro $b \neq \pm d$ plyne dokazovaná rovnost b).

Složené zlomky

Podíl dvou zlomků lze psát opět ve tvaru zlomku, nazýváme ho **zlomkem složeným**. Zlomek, který není složený, se pak označuje jako **zlomek jednoduchý**.

Složený zlomek lze **převést na jednoduchý zlomek** buď tak, že provedeme dělení, které složený zlomek představuje, nebo ho rozšíříme vhodným číslem.

Např. (za předpokladu, že $b \neq 0$, $c \neq 0$, $d \neq 0$) dostáváme *1. způsobem*:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

nebo *2. způsobem* (rozšířením číslem bd, resp. $n(bd)$):

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{\frac{a}{b} \cdot bd}{\frac{c}{d} \cdot bd} = \frac{ad}{bc}$$

Druhý způsob bývá mnohdy výhodnější, neboť vede rychleji k cíli.

Příklad použití úpravy složeného zlomku na jednoduchý zlomek

Upravte složený zlomek $\dfrac{\frac{3\pi}{4} - \frac{2\pi}{3}}{\frac{5}{6} - \frac{1}{2}}$ na zlomek jednoduchý.

1. způsob řešení:

$$\frac{\frac{3}{4} - \frac{2}{3}}{\frac{5}{6} - \frac{1}{2}}\pi = \frac{\frac{9-8}{12}}{\frac{5-3}{6}}\pi = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{3}}\pi = \frac{\pi}{12} : \frac{1}{3} = \frac{\pi}{12} \cdot 3 = \frac{\pi}{4}$$

2. způsob řešení (rozšíříme číslem $n(4; 3; 6; 2) = 12$):

$$\frac{\left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right) \cdot 12}{\left(\frac{5}{6} - \frac{1}{2}\right) \cdot 12}\pi = \frac{9-8}{10-6}\pi = \frac{\pi}{4}$$

Tento způsob je zřejmě výhodnější než 1. způsob, lze ho lehce provést zpaměti.

Umocňování a odmocňování zlomků

Při těchto operacích se zlomky v oboru R vycházíme ze vzorců uvedených na str. 87 a 90 (kap. 2.6).

Příklady umocňování a odmocňování zlomků

a) $\left(\dfrac{x^2y^{-3}}{6z^4}\right)^{-3} \cdot \left(\dfrac{x^3y^{-2}}{9z^5}\right)^2 = \dfrac{x^{-6} \cdot y^9}{2^{-3} \cdot 3^{-3} \cdot z^{-12}} \cdot \dfrac{x^6 \cdot y^{-4}}{3^4 \cdot z^{10}} = \dfrac{x^0 \cdot y^5}{2^{-3} \cdot 3 \cdot z^{-2}} = \dfrac{8}{3}y^5z^2$

pro každé $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$

b) $\dfrac{\sqrt{2^3 \cdot 3}}{\sqrt{2^2 \cdot 3^3}} = \sqrt{\dfrac{2^3 \cdot 3}{2^2 \cdot 3^3}} = \sqrt{\dfrac{2}{3^2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3^2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$

Usměrňování zlomků

Některé zlomky, které obsahují ve jmenovateli odmocniny, mohou být vhodným rozšiřováním upraveny na zlomky jim rovné, které ve jmenovateli odmocniny nemají, a jsou proto často vhodnější pro numerické výpočty. Těmto úpravám se říká **usměrňování zlomku.**

Uvedeme *nejčastější případy usměrňování zlomků* ($k \in R \setminus \{0\}$, $a > 0$, $n, m \in N$):

a) Zlomek typu $\dfrac{k}{\sqrt[n]{a^m}}$, kde $n > m$, rozšíříme číslem $\sqrt[n]{a^{n-m}}$, čímž ve jmenovateli dostaneme číslo a; speciálně zlomek typu $\dfrac{k}{\sqrt{a}}$ rozšíříme číslem $\sqrt{a}$, abychom ve jmenovateli získali číslo a.

b) Zlomek typu $\dfrac{k}{a \pm \sqrt{b}}$ rozšíříme dvojčlenem $a \mp \sqrt{b}$, abychom ve jmenovateli dostali číslo $a^2 - b$.

c) Zlomek typu $\dfrac{k}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$ rozšíříme dvojčlenem $\sqrt{a} \mp \sqrt{b}$, čímž ve jmenovateli získáme číslo $a - b$.

d) Zlomek typu $\dfrac{k}{a\sqrt{b} \pm c\sqrt{d}}$ rozšíříme dvojčlenem $a\sqrt{b} \mp c\sqrt{d}$, takže ve jmenovateli bude pak číslo $a^2b - c^2d$.

Příklady usměrňování zlomků

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} = \dfrac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2^2}} = \dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}$

b) $\dfrac{1}{1 + \sqrt{2}} = \dfrac{1 - \sqrt{2}}{(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})} = \dfrac{1 - \sqrt{2}}{1 - 2} = \sqrt{2} - 1$

c) $\dfrac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})} = \dfrac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{3 - 2} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$

d) $\dfrac{1}{5\sqrt{2} + 2\sqrt{5}} = \dfrac{5\sqrt{2} - 2\sqrt{5}}{(5\sqrt{2} + 2\sqrt{5})(5\sqrt{2} - 2\sqrt{5})} = \dfrac{5\sqrt{2} - 2\sqrt{5}}{25 \cdot 2 - 4 \cdot 5} =$

$= \dfrac{1}{30} \cdot (5\sqrt{2} - 2\sqrt{5})$

Procenta a jejich užití (procentový počet)

Při určování částí daného číselného celku (reálného čísla) se v praxi často uplatňují zlomky se jmenovatelem 100, resp. 1 000. V této souvislosti se *definuje*:

Procento (označované %) je jiný (mezinárodně užívaný název pro setinu; píšeme

$$1\ \% = \frac{1}{100}.$$

Promile (označované ‰) je jiný (mezinárodně užívaný) název pro tisícinu; píšeme

$$1\ ‰ = \frac{1}{1\,000}.$$

Poznámka. Název procento pochází z lat. pro cento znamenajícího „na sto (vzhledem ke stu)“. Název promile pochází z lat. pro mille znamenajícího „na tisíc (vzhledem k tisíci)“.

Metodami výpočtů s procenty se zabývá tzv. **procentový počet**. V úlohách řešených procentovým počtem se užívají tyto základní pojmy:

Základ z je daný (zvolený) základní číselný celek (dané reálné číslo, popř. hodnota skalární veličiny).

Počet procent p (někdy zvaný **procentová míra**) ze základu z je kladné číslo, které udává určitý násobek procent (setin) základu.

Procentová část $č$ je celá část základu z, jež přísluší uvažovanému počtu procent p základu.

Vztah mezi sobě příslušnými hodnotami $z, p, č$ lze odvodit touto úvahou:

$$1\ \%\ \text{ze}\ z\ \text{je}\ \frac{z}{100},\quad \text{takže}\ p\ \%\ \text{ze}\ z\ \text{je}\ p\cdot\frac{z}{100}.$$

Odtud plyne, že platí

$$č = \frac{pz}{100},$$

což je tzv. **základní vzorec procentového počtu**. (V něm místo $\frac{z}{100}$ lze též psát $0{,}01z$.)

Příklady řešení úloh procentového počtu užitím základního vzorce

1. Určete část $č$ základu z, jež je jeho

a) 50 %, b) 25 %, c) 10 %, d) 200 %.

Řešení

Podle základního vzorce procentového počtu je

a) $č = \frac{50}{100}z = \frac{1}{2}z$,

b) $č = \frac{25}{100}z = \frac{1}{4}z$,

c) $č = \frac{10}{100}z = \frac{1}{10}z$,

d) $č = \frac{200}{100}z = 2z$.

2. Určete, jak se změní původní cena (základ) z, jestliže došlo k jejímu

a) 12% nárůstu, b) 12% poklesu (slevě).

Řešení

Nová cena je

a) $z + 12\ \%z = 112\ \%z = 1{,}12z$,

b) $z - 12\ \%z = 88\ \%z = 0{,}88z$.

3. Vysvětlete, co se rozumí výrokem: „V průměru 8 % dané populace má určitou vlastnost“.

Odpověď: Tímto výrokem se rozumí, že na každých 100 lidí dané populace připadá průměrně 8 lidí, kteří mají tu určitou vlastnost.

4. Vysvětlete, co znamená, že na etiketě piva je uvedeno: Obsahuje 4,1 % obj. alkoholu.

Odpověď: Údaj znamená, že v 1 l tohoto piva je objem alkoholu $V_a = 4{,}1 \cdot 0{,}01\ \mathrm{l} = 4{,}1 \cdot 10\ \mathrm{ml} = 41\ \mathrm{ml}$. Hmotnost tohoto alkoholu je $m_a = \varrho_a V_a$, kde $\varrho_a \doteq 0{,}8\ \mathrm{g\cdot cm^{-3}}$ je jeho hustota, takže $m_a \doteq 32{,}8\ \mathrm{g}$.

5. Chceme získat 150 g desetiprocentního roztoku soli ve vodě. Kolik gramů soli a kolik gramů vody je k tomu třeba vzít?

Řešení

Je dána hmotnost roztoku $m = 150$ g (základ). Desetiprocentní roztok obsahuje 10 % soli a 90 % vody. (p % roztok soli je takový, že obsahuje právě p % soli.) Je proto třeba vzít sůl a vodu o těchto hmotnostech (částech základu): $m_1 = \frac{m}{100}\cdot 10 = \frac{1}{10}\cdot 150\ \mathrm{g} = 15\ \mathrm{g}$ (soli), $m_2 = m - m_1 = 135$ g (vody).

6. Vodný roztok obsahuje 12 g soli a 88 g vody. Kolikaprocentní je to roztok?

Řešení

Rozpuštěním soli ve vodě vznikne roztok o hmotnosti $m = 100$ g (základ). Hmotnost soli je $m_1 = 12$ g (část základu). Vypočteme počet procent soli v roztoku: $p_1 = \frac{m_1}{m} = \frac{12}{100} = 12\ \%$. Roztok je tedy dvanáctiprocentní.

7. V kolika gramech vody je třeba rozpustit 18 g soli, aby vznikl devítiprocentní roztok?

Řešení

Je dána hmotnost soli v roztoku $m_1 = 18$ g (část základu), což představuje $p_1 = 9\,\%$ (počet procent) celkové hmotnosti roztoku m (základu), kterou určíme ze vztahu

$$m_1 = \frac{m}{100}p_1 \Rightarrow m = \frac{100m_1}{p_1} = \frac{1\,800\ \mathrm{g}}{9} = 200\ \mathrm{g}.$$

Hledaná hmotnost vody tedy je $m_2 = m - m_1 = 182$ g.

Příklady užití pojmu promile (‰)

1. Určete, kolik % je

a) 1 ‰, b) 10 ‰, c) 100 ‰.

Řešení

a) $1\ ‰ = \frac{1}{10}\ \% = 0{,}1\ \%$

b) $10\ ‰ = 1\ \%$

c) $100\ ‰ = 10\ \%$

2. Vysvětlete, co se rozumí výrokem: „V průměru 5 ‰ novorozenců má jistou vlastnost."

Odpověď: Tímto výrokem se rozumí, že na každých 1 000 novorozenců připadá průměrně 5 novorozenců, kteří mají jistou vlastnost.

3. Vysvětlete, co znamená údaj, že v krvi určitého člověka bylo naměřeno 2 ‰ alkoholu.

Odpověď: Tento údaj znamená, že v každém litru krve toho člověka jsou $\frac{2}{1\,000}$ l = 2 ml alkoholu.

4. Co se rozumí údajem, že stoupání železniční trati je 8 ‰?

Odpověď: Tímto údajem se rozumí, že daná železniční trať stoupá o 8 m vertikálně na 1 km horizontální vzdálenosti.

2.8 Obor komplexních čísel, algebraický tvar komplexních čísel

Z kap. 2.2 až 2.5 víme, jak se postupně rozšiřuje obor přirozených čísel N až na obor reálných čísel R. V oboru R jsou proveditelné bez omezení (tj. pro libovolná reálná čísla) základní operace – sčítání, násobení – i operace k nim inverzní – odčítání, dělení (vyjma dělení nulou). V R je také definováno umocňování libovolného reálného čísla přirozeným číslem. Avšak inverzní operace odmocňování přirozeným číslem je definována v oboru R pouze pro nezáporná čísla, což má za následek, že v R nejsou řešitelné kvadratické rovnice se záporným diskriminantem a mnohé další algebraické rovnice vyšších stupňů (kap. 5.3 a 5.5). Proto se obor reálných čísel R rozšiřuje na **obor komplexních čísel** C, ve kterém se dá definovat odmocnina libovolného záporného čísla a obecně každého komplexního čísla.

Definice komplexních čísel a základních početních operací s komplexními čísly v algebraickém tvaru

Rozšíření oboru reálných čísel R *na obor komplexních čísel* se na střední škole obvykle provádí takto:

K oboru reálných čísel R se připojí takové číslo i, pro které platí

$$\mathrm{i}^2 = -1.$$

Toto číslo i se nazývá **imaginární jednotka**. (Při použití v elektrotechnice se značí j namísto i.)

Protože v číselném oboru C musí být bez omezení proveditelné operace sčítání a násobení, musí v něm být obsaženy všechny výrazy tvaru $x + y\mathrm{i}$, kde x, y jsou libovolná reálná čísla.

Každý z výrazů tvaru

$$z = x + y\mathrm{i}, \quad \text{kde } x, y \in \mathrm{R},$$

se nazývá **komplexní číslo v algebraickém tvaru** a číslo $x \in \mathrm{R}$ se nazývá **reálná část (složka) komplexního čísla** z, číslo $y \in \mathrm{R}$ se nazývá **imaginární část (složka) komplexního čísla** z. Symbolicky se píše

$$\operatorname{Re} z = x, \quad \operatorname{Im} z = y.$$

Poznámka. V případě, že zároveň uvažujeme více komplexních čísel, značíme je $z_1 = x_1 + y_1\mathrm{i}$, $z_2 = x_2 + y_2\mathrm{i}$, resp. $a = a_1 + a_2\mathrm{i}$, $b = b_1 + b_2\mathrm{i}$, $c = c_1 + c_2\mathrm{i}$ apod. Lze se též setkat s označeními $a + bi$, $c + di$ apod.

Klasifikace komplexních čísel

Existují dva druhy komplexních čísel:

a) Je-li $y = 0$, pak $z = x \in \mathrm{R}$ je **reálné číslo**.

b) Je-li $y \neq 0$, pak $z = x + y\mathrm{i}$ je tzv. **imaginární číslo**.

Je-li zároveň $x = 0$, pak $z = y\mathrm{i}$ je tzv. **ryze imaginární číslo**. (Speciálním případem pro $y = 1$ je imaginární jednotka i.)

Rovnost komplexních čísel v algebraickém tvaru se *definuje* takto:

$z_1 = z_2$ čili $x_1 + y_1\mathrm{i} = x_2 + y_2\mathrm{i}$, právě když platí $x_1 = x_2$ a $y_1 = y_2$.

Součet a součin komplexních čísel v algebraickém tvaru se *definují* tak, aby se komplexní čísla sčítala a násobila obdobně jako dvojčleny, ale navíc se klade $\mathrm{i}^2 = -1$:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + y_1\mathrm{i}) + (x_2 + y_2\mathrm{i}) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\mathrm{i},$$
$$z_1 z_2 = (x_1 + y_1\mathrm{i})(x_2 + y_2\mathrm{i}) = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)\mathrm{i}.$$

Poznámka. Uvedeme ještě *alternativní způsob vytvoření oboru komplexních čísel* C, při kterém *definujeme*:

Komplexními čísly (prvky oboru C) nazýváme uspořádané dvojice reálných čísel, jež značíme

$$z = [x, y]; \quad x, y \in \mathrm{R}.$$

Speciálně: $x = [x, 0]$ jsou reálná čísla a $\mathrm{i} = [0; 1]$ je imaginární jednotka.

Komplexní čísla $z_1 = [x_1, y_1]$, $z_2 = [x_2, y_2]$ **jsou si rovna** $z_1 = z_2$, právě když je $x_1 = x_2$ a $y_1 = y_2$.

Součet komplexních čísel $z_1 = [x_1, y_1]$, $z_2 = [x_2, y_2]$ je komplexní číslo

$$z_1 + z_2 = [x_1 + x_2, y_1 + y_2].$$

Součin komplexních čísel $z_1 = [x_1, y_1]$, $z_2 = [x_2, y_2]$ **je komplexní číslo**

$$z_1 z_2 = [x_1 x_2 - y_1 y_2,\ x_1 y_2 + x_2 y_1].$$

Z uvedené konstrukce oboru komplexních čísel C bezprostředně vyplývá jeho jednoznačná existence.

Příklady důkazových úloh o komplexních číslech

1. Dokažte, že každé komplexní číslo $z = [x, y]$ lze jednoznačně vyjádřit v algebraickém tvaru.

   Důkaz

   $z = [x, y] = [x; 0] + [0; y] = [x; 0] + y \cdot [0; 1] = x + y\mathrm{i}$

2. Dokažte, že pro imaginární jednotku $\mathrm{i} = [0; 1]$ platí $\mathrm{i}^2 = -1$.

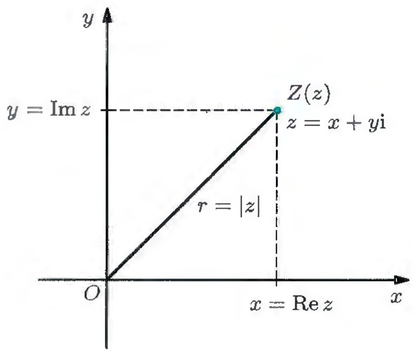
   Důkaz

   $\mathrm{i}^2 = \mathrm{i} \cdot \mathrm{i} = [0; 1] \cdot [0; 1] = [0 - 1; 0 + 0] = [-1; 0] = -1$

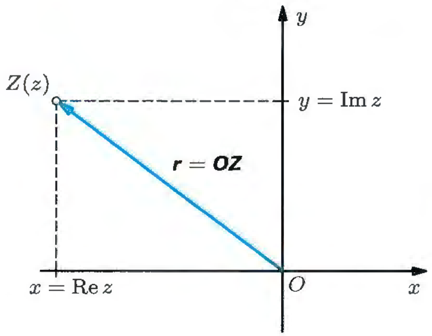
Z definice součtu a součinu komplexních čísel vyplývá, že operace sčítání a násobení jsou *komutativní, asociativní* a násobení je *distributivní* vzhledem ke sčítání.

Geometrické znázornění komplexních čísel v Gaussově rovině

Komplexní čísla geometricky znázorňujeme (zobrazujeme) body roviny, ve které je zavedena kartézská soustava souřadnic a jež se nazývá **rovina komplexních čísel** nebo krátce **Gaussova rovina**. Každé komplexní číslo $z = [x, y]$ je v ní geometricky znázorněno (zobrazeno) bodem o souřadnicích x, y (obr. 2.7). Zobrazení mezi komplexními čísly a body Gaussovy roviny je vzájemně jednoznačné zobrazení: Každému komplexnímu číslu je přiřazen právě jeden bod Gaussovy roviny jako jeho obraz a naopak každému bodu Gaussovy roviny je přiřazeno právě jedno komplexní číslo jako jeho vzor. Osa x v Gaussově rovině se nazývá **osa reálných čísel** nebo krátce **reálná osa**, osa y v této rovině se nazývá **osa ryze imaginárních čísel** nebo krátce **imaginární osa**.



Obr. 2.7



Obr. 2.8

V Gaussově rovině leží obrazy reálných čísel na reálné ose. Obrazy imaginárních čísel jsou ty body Gaussovy roviny, které neleží na reálné ose. Speciálně obrazy ryze imaginárních čísel leží na imaginární ose.

Geometrické znázornění komplexních čísel body Gaussovy roviny není však jediné možné. Každému bodu Z Gaussovy roviny, a tedy též komplexnímu číslu z jím zobrazenému lze přiřadit **polohový vektor (rádiusvektor)** $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{OZ}$, tj. vázaný vektor (kap. 10.5) s počátečním bodem O a s koncovým bodem Z. Komplexní číslo $z = x + y\mathrm{i}$ je proto také geometricky znázorněno (zobrazeno) polohovým vektorem $\boldsymbol{r}$ bodu Z o souřadnicích $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$ (obr. 2.8). Zobrazení mezi komplexními čísly a polohovými vektory bodů Gaussovy roviny je zřejmě opět vzájemně jednoznačné zobrazení. Geometrické znázornění komplexních čísel polohovými vektory je výhodné např. při znázorňování operací s komplexními čísly.

Obdobně jako v oboru reálných čísel také v oboru komplexních čísel platí *věta*:

Věta o nulovém součinu dvou komplexních čísel
Součin dvou komplexních čísel je rovný nule, právě když alespoň jedno z nich je rovno nule.

Odčítání a dělení komplexních čísel v algebraickém tvaru

Opačná a převrácená komplexní čísla, komplexně sdružená čísla

Komplexní čísla $z = x + y\mathrm{i}$, $-z = -x - y\mathrm{i}$ se nazývají navzájem **opačná čísla**. Komplexní čísla $z = x + y\mathrm{i}$, $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{x + y\mathrm{i}}$, kde $z \neq 0$, se nazývají **navzájem převrácená (reciproká) čísla**. **Číslem komplexně sdruženým** k číslu $z = x + y\mathrm{i}$ nazýváme komplexní číslo $\overline{z} = x - y\mathrm{i}$. (V literatuře se lze setkat též s jeho označením z^*.) Platí: $z\overline{z} = x^2 + y^2 \in \mathrm{R}$.

Algebraický tvar čísla převráceného k číslu $z = x + y\mathrm{i}$ dostaneme rozšířením zlomku $\dfrac{1}{z}$ číslem $\overline{z} = x - y\mathrm{i}$ komplexně sdruženým k číslu z:

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z \cdot \overline{z}} = \frac{x - y\mathrm{i}}{(x + y\mathrm{i})(x - y\mathrm{i})} = \frac{x - y\mathrm{i}}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2}\mathrm{i}$$

Odčítání a dělení komplexních čísel

Stejně jako v oboru R (kap. 2.5) také v oboru C operace **odčítání** a **dělení** představují inverzní operace ke sčítání a násobení.

Proto platí pro **rozdíl** $z_1 - z_2$ a **podíl** $\dfrac{z_1}{z_2}$:

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) \qquad \text{pro každé } z_1, z_2 \in \mathrm{C}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} \qquad \text{pro každé } z_1, z_2 \in \mathrm{C},\ z_2 \neq 0$$

Praktický postup odčítání a dělení komplexních čísel v algebraickém tvaru $z_1 = x_1 + y_1\mathrm{i}$, $z_2 = x_2 + y_2\mathrm{i}$ je tento:

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)\mathrm{i}$$

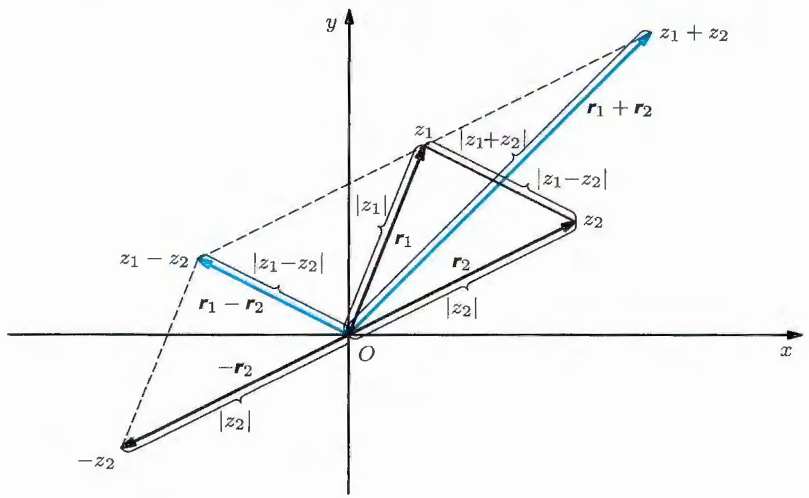
Při dělení komplexního čísla z_1 komplexním číslem $z_2 \neq 0$ rozšiřujeme zlomek $\dfrac{z_1}{z_2}$ číslem $\overline{z}_2$ komplexně sdruženým k jmenovateli z_2:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z}_2}{z_2 \cdot \overline{z}_2} = \frac{(x_1 + y_1\mathrm{i})(x_2 - y_2\mathrm{i})}{(x_2 + y_2\mathrm{i})(x_2 - y_2\mathrm{i})} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}\mathrm{i}$$

Příklady početních operací s komplexními čísly v algebraickém tvaru
Vypočtěte součet, rozdíl, součin a podíl komplexních čísel $z_1 = 1 - \mathrm{i}$, $z_2 = 1 + \mathrm{i}$ (v uvedeném pořadí).
Řešení
a) $z_1 + z_2 = (1 - \mathrm{i}) + (1 + \mathrm{i}) = 2$
b) $z_1 - z_2 = (1 - \mathrm{i}) + (-1 - \mathrm{i}) = -2\mathrm{i}$
c) $z_1 \cdot z_2 = (1 - \mathrm{i}) \cdot (1 + \mathrm{i}) = 2$
d) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{1 - \mathrm{i}}{1 + \mathrm{i}} = \dfrac{(1 - \mathrm{i})^2}{(1 + \mathrm{i})(1 - \mathrm{i})} = \dfrac{-2\mathrm{i}}{2} = -\mathrm{i}$

Geometrické znázornění operací sčítání a odčítání komplexních čísel v Gaussově rovině

Nechť libovolným dvěma nenulovým komplexním číslům $z_1 = x_1 + y_1\mathrm{i}$ a $z_2 = x_2 + y_2\mathrm{i}$ jsou po řadě přiřazeny polohové vektory (rádiusvektory) $\boldsymbol{r}_1$ o souřadnicích (x_1, y_1) a $\boldsymbol{r}_2$ o souřadnicích (x_2, y_2). Součtu $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\mathrm{i}$ je přiřazen polohový vektor o souřadnicích $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ což je (jak známo z analytické geometrie, viz kap. 10.5) součet polohových vektorů $\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2$. Takto je v obr. 2.9 sestrojen obraz součtu komplexních čísel $z_1 + z_2$ jako koncový bod vektoru $\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2$.



Obr. 2.9

Rozdílu $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$ je přiřazen polohový vektor rovný $\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_1 + (-\boldsymbol{r}_2)$, kde $-\boldsymbol{r}_2$ je vektor opačný k polohovému vektoru $\boldsymbol{r}_2$. Na základě toho je v obr. 2.9 sestrojen obraz rozdílu komplexních čísel $z_1 - z_2$ jako koncový bod vektoru $\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_1 + (-\boldsymbol{r}_2)$.

Geometrické znázornění součinu a podílu nenulových komplexních čísel je založeno na jejich goniometrickém tvaru, jak ukážeme v kap. 4.6.

Definice absolutní hodnoty komplexního čísla a její vlastnosti

Absolutní hodnota komplexního čísla $z = x + y\mathrm{i}$, označovaná symbolem $|z|$, je reálné číslo *definované* vztahem

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ čili } |z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}, \text{ kde } \overline{z} = x - y\mathrm{i}.$$

Geometrický význam absolutní hodnoty komplexního čísla:
V Gaussově rovině představuje $|z|$ vzdálenost obrazu komplexního čísla z od počátku (obr. 2.7).

Věty o vlastnostech absolutních hodnot komplexních čísel
a) Pro každé číslo $z \in \mathrm{C}$ platí
$|z| \geqq 0$, přičemž $|z| = 0$, právě když $z = 0$,
$|z| = |-z| = |\overline{z}|$.
b) Pro každou dvojici čísel $z_1, z_2 \in \mathrm{C}$ platí
$\big||z_1| - |z_2|\big| \leqq |z_1 \pm z_2| \leqq |z_1| + |z_2|$ **(trojúhelníková nerovnost)**,
$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$,
$\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, je-li $z_2 \neq 0$.

Geometrický význam absolutních hodnot komplexních čísel v trojúhelníkové nerovnosti: Absolutní hodnoty $|z_1|$, $|z_2|$, $|z_1 + z_2|$, $|z_1 - z_2|$ jsou v Gaussově rovině rovny vzdálenostem obrazů komplexních čísel z_1, z_2, $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$ od počátku (obr. 2.9). Dále lze dokázat *větu:*

Absolutní hodnota $|z_1 - z_2|$ rozdílu komplexních čísel z_1, z_2 je rovna vzdálenosti obrazu komplexního čísla z_1 od obrazu komplexního čísla z_2 (obr. 2.9).

Příklady výpočtu absolutní hodnoty komplexního čísla
Určete absolutní hodnoty komplexních čísel
a) $5 + 4\mathrm{i}$, b) $\dfrac{56 - 33\mathrm{i}}{5 + 12\mathrm{i}}$.
Řešení
a) $|5 + 4\mathrm{i}| = \sqrt{25 + 16} = \sqrt{41}$
b) $\left|\dfrac{56 - 33\mathrm{i}}{5 + 12\mathrm{i}}\right| = \dfrac{|56 - 33\mathrm{i}|}{|5 + 12\mathrm{i}|} = \dfrac{\sqrt{3\,136 + 1\,089}}{\sqrt{25 + 144}} = \dfrac{\sqrt{4\,225}}{\sqrt{169}} = \dfrac{65}{13} = 5$
(tento postup je jednodušší než vypočítat nejprve podíl a pak jeho absolutní hodnotu).

Každé komplexní číslo z, jehož absolutní hodnota je rovna jedné ($|z| = 1$), se nazývá **komplexní jednotka**.

Příklady komplexních jednotek

$$1,\ -1,\ \mathrm{i},\ -\mathrm{i},\ \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i},\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i},\ \frac{3}{5}+\frac{4}{5}\mathrm{i}.$$

Obrazy komplexních jednotek v Gaussově rovině leží na jednotkové kružnici (tj. kružnici o poloměru $r = 1$) se středem v počátku O. A obráceně každé komplexní číslo, jehož obraz leží na jednotkové kružnici se středem v počátku O, je komplexní jednotka.

Mocniny v oboru komplexních čísel

n-tá mocnina komplexního čísla z pro $n \in \mathsf{N}$ se *definuje* stejně jako n-tá mocnina reálného čísla v oboru R (kap. 2.1, 2.6):

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{n\text{-krát}} \text{ pro každé komplexní číslo } z \text{ a } n \in \mathsf{N}.$$

Stejně jako v oboru R se *definuje* i v oboru C:

$$z^0 = 1 \text{ pro každé komplexní číslo } z \neq 0,$$
$$z^{-n} = \frac{1}{z^n} \text{ pro každé komplexní číslo } z \neq 0 \text{ a } n \in \mathsf{N}.$$

Z těchto definic plyne, že v oboru C pro počítání s mocninami o celočíselných mocnitelích platí stejně jako v oboru R vzorce (1) až (5) a (1'), (4') (str. 87 a 88, kap. 2.6), kde základy mocnin jsou nyní z oboru C.

Příklady umocňování komplexních čísel v algebraickém tvaru

1. Odvoďte vzorce pro mocniny i^k, kde i je imaginární jednotka, $k \in \mathsf{Z}$.

Řešení

Víme, že $\mathrm{i}^2 = -1$. Odtud plyne $\mathrm{i}^3 = \mathrm{i}^2 \cdot \mathrm{i} = -\mathrm{i}$, $\mathrm{i}^4 = (\mathrm{i}^2)^2 = (-1)^2 = 1$, $\mathrm{i}^5 = \mathrm{i}^4 \cdot \mathrm{i} = 1 \cdot \mathrm{i} = \mathrm{i}$, $\mathrm{i}^6 = \mathrm{i}^4 \cdot \mathrm{i}^2 = 1 \cdot (-1) = -1$ atd.

Obecně pro každé $k \in \mathsf{Z}$ tvaru $k = 4m$, $4m+1$, $4m+2$, $4m+3$ platí:

$$\begin{aligned} \mathrm{i}^{4m} &= (\mathrm{i}^4)^m = 1^m = 1 \\ \mathrm{i}^{4m+1} &= \mathrm{i}^{4m} \cdot \mathrm{i} = 1 \cdot \mathrm{i} = \mathrm{i} \\ \mathrm{i}^{4m+2} &= \mathrm{i}^{4m} \cdot \mathrm{i}^2 = 1 \cdot (-1) = -1 \\ \mathrm{i}^{4m+3} &= \mathrm{i}^{4m} \cdot \mathrm{i}^3 = 1 \cdot (-\mathrm{i}) = -\mathrm{i} \end{aligned}$$

2. Vypočtěte $(1+\mathrm{i})^8$.

Řešení

$$(1+\mathrm{i})^8 = \left[(1+\mathrm{i})^2\right]^4 = (1+2\mathrm{i}-1)^4 = 2^4 \cdot \mathrm{i}^4 = 16$$

Odmocniny v oboru komplexních čísel

Nechť je $n \in \mathsf{N}$. V oboru C *definujeme*: **n-tá odmocnina komplexního čísla** a je každé takové komplexní číslo z, pro které platí $z^n = a$.

Pro rozlišení od odmocniny v oboru R ji budeme značit $(\sqrt[n]{a})_{\mathsf{C}}$.

Podle této definice platí ekvivalence:

$$(\sqrt[n]{a})_{\mathsf{C}} = z \Leftrightarrow a = z^n \text{ pro každé } a,\ z \in \mathsf{C},\ n \in \mathsf{N},$$

tj. určení n-té odmocniny komplexního čísla a je ekvivalentní s řešením rovnice $z^n = a$ (kap. 5.5).

Je-li $a = 0$, má rovnice $z^n = 0$ právě jedno řešení $z = 0$, takže $\sqrt[n]{0} = 0$.

Je-li $a \neq 0$, rovnice $z^n = a$ má v oboru C právě n různých řešení, jež se dají určit pomocí goniometrického tvaru komplexního čísla a (viz kap. 4.6). Odtud plyne, že $(\sqrt[n]{a})_{\mathsf{C}}$ je pro každé $a \in \mathsf{C} \setminus \{0\}$ *n-značná*, tj. nabývá právě n různých komplexních hodnot $z_1, z_2, \ldots, z_n$. (Píšeme $(\sqrt[n]{a})_{\mathsf{C}} = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$.) Tím se zásadně odlišuje od $\sqrt[n]{a}$ pro $a > 0$ v oboru R, která je *jednoznačná*, tj. nabývá právě jedné hodnoty $\sqrt[n]{a} > 0$ (viz kap. 2.6). Tak např. $(\sqrt{4})_{\mathsf{C}} = \pm 2$, zatímco $\sqrt{4} = 2$; $(\sqrt{-1})_{\mathsf{C}} = \pm\mathrm{i}$ a $(\sqrt{-4})_{\mathsf{C}} = \pm 2\mathrm{i}$, zatímco $\sqrt{-1}$ a $\sqrt{-4}$ v R neexistují (nejsou definovány).

V důsledku toho pro odmocniny v oboru C neplatí obecně vzorce platné pro reálné odmocniny z nezáporných čísel (viz str. 90, kap. 2.6).

Poznámka. Pro n-tou odmocninu komplexního čísla $a \neq 0$ se někdy užívá místo symbolu $(\sqrt[n]{a})_{\mathsf{C}}$ označení $\sqrt[n]{a}$. Při jeho použití musíme pak ovšem důsledně dbát toho, aby nedocházelo k jeho záměně s týmž symbolem pro reálnou odmocninu čísla $a > 0$.

Příklady hodnot n-té odmocniny komplexního čísla

1. $(\sqrt{\mathrm{i}})_{\mathsf{C}}$ jsou dvě opačná komplexní čísla $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$, $z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$, neboť podle vzorce pro $(a+b)^2$ (viz kap. 3.1)

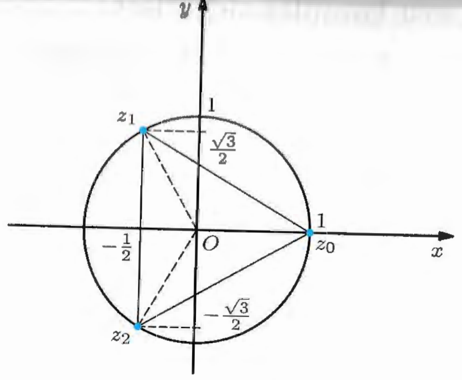
$$z_1^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right)^2 = \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i} - \frac{1}{2} = \mathrm{i},$$
$$z_2^2 = (-z_1)^2 = z_1^2 = \mathrm{i}.$$

Obrazy komplexních čísel z_1, z_2 v Gaussově rovině jsou body souměrně sdružené podle počátku O; leží na kružnici o poloměru $r = |\mathrm{i}| = 1$.

2. $(\sqrt[3]{1})_{\mathsf{C}}$ jsou tři komplexní čísla $z_0 = 1$, $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$, $z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$, neboť $z_0^3 = 1$ a s použitím vzorce pro $(a+b)^3$ (viz kap. 3.1) dostáváme $z_1^3 = 1$, $z_2^3 = 1$.

Obrazy čísel z_0, z_1, z_2 v Gaussově rovině jsou vrcholy rovnostranného trojúhelníku, které leží na kružnici se středem v počátku O a poloměrem $r = 1$ (obr. 2.10).

V předchozích dvou příkladech jsme na základě definice n-té odmocniny komplexního čísla a pouze *ověřovali*, že hodnotami druhé, resp. třetí odmocniny daného komplexního čísla jsou daná (nějakým způsobem určená) komplexní čísla.



Obr. 2.10

Metody (způsoby) výpočtu hodnot n-té odmocniny komplexního čísla a jsou dvojího druhu:

Pro $n = 2$ a ve speciálních případech též pro $n > 2$ lze určit $(\sqrt[n]{a})_C$ *algebraickým výpočtem* s užitím algebraického tvaru komplexního čísla a (viz binomické rovnice v kap. 5.5). Obecně použitelný je *goniometrický výpočet* pomocí goniometrického tvaru komplexního čísla a (viz kap. 4.6 a binomické rovnice v kap. 5.5). V uvedených kapitolách naleznete principy obou metod výpočtu hodnot odmocniny v komplexním oboru a příklady použití.

3 Základní poznatky z algebry

3.1 Mnohočleny

Nechť je n dané přirozené číslo nebo nula, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ daná reálná čísla (konstanty), x proměnná (písmeno ve významu libovolného reálného čísla), pak součet

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \quad \text{kde } a_n \neq 0,$$

se nazývá **mnohočlen (polynom) proměnné (v proměnné) x s koeficienty $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$** z číselného oboru R. Sčítanci $a_k x^k$ se nazývají **členy mnohočlenu**, k jejich **stupeň**. Číslo a_0 se nazývá **absolutní člen mnohočlenu.** Číslo n se nazývá **stupeň mnohočlenu. Mnohočlen nultého stupně** je zřejmě každé číslo různé od nuly. Číslu nula se říká **nulový mnohočlen**; jeho stupeň se nedefinuje.

Pojem mnohočlenu lze zobecnit pro více proměnných. Uvažujme výrazy tvaru $a_k x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}$, kde a_k jsou konstanty z číselného oboru R, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsou reálné proměnné, $k_1, k_2, \ldots, k_n$ jsou nezáporná celá čísla. Součet libovolného počtu výrazů tohoto tvaru se nazývá **mnohočlen** (nebo polynom) n **proměnných (v n proměnných)** $x_1, x_2, \ldots, x_n$ s koeficienty z číselného oboru R. Každý ze sčítanců se nazývá **člen mnohočlenu**, a_k je jeho **koeficient**, součet $k_1 + k_2 + \ldots + k_n$ je **stupeň členu**; maximální z těchto součtů se nazývá **stupeň mnohočlenu (vzhledem ke všem proměnným)**, maximální z exponentů pro každou z proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se nazývá **stupeň mnohočlenu vzhledem k proměnné** $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Mnohočlen s jedním členem se nazývá **jednočlen**, se dvěma členy **dvojčlen**, se třemi členy **trojčlen** atd. Mezi jednočleny patří také čísla různá od nuly i nula.

Příklady mnohočlenů
$2x^3 - 4x^2 + x + 1$ je mnohočlen (čtyřčlen) 3. stupně v proměnné x s koeficienty z oboru Z, $a^5 - 1$ je mnohočlen (dvojčlen) 5. stupně v proměnné a s koeficienty z oboru Z, $-\dfrac{4}{9}y^2 + \dfrac{1}{7}y + 2$ je mnohočlen (trojčlen) 2. stupně v proměnné y s koeficienty z oboru Q, $25m^3 - 3m^2n + 5mn^2 - n$ je mnohočlen (čtyřčlen) 3. stupně v proměnných m, n (vzhledem k proměnné m je 3. stupně, vzhledem k proměnné n je 2. stupně) s koeficienty z oboru Z.

Rovnost mnohočlenů

Dva mnohočleny v týchž proměnných jsou si rovny, právě když se sobě rovnají všechny koeficienty odpovídajících si členů obou mnohočlenů (tj. členů obsahujících stejné mocniny proměnných).

Při počítání s mnohočleny v oboru R užíváme vlastností reálných čísel, uvedených v kap. 2.5, a poznatků o počítání s mocninami z kap. 2.6.

Součtem (rozdílem) mnohočlenů je mnohočlen, jehož členy mají koeficienty rovné součtu (rozdílu) koeficientů odpovídajících si členů daných mnohočlenů (přitom některé koeficienty v těchto mnohočlenech mohou být nulové).

Mnohočlen násobíme jednočlenem tak, že jednočlenem vynásobíme každý člen mnohočlenu.

Mnohočlen násobíme mnohočlenem tak, že každý člen jednoho mnohočlenu vynásobíme každým členem druhého mnohočlenu. Takto získané součiny jsou členy mnohočlenu, který nazýváme součinem mnohočlenů.

Příklady základních operací s mnohočleny

$$(2a+5b)+(3a-4b)-(7a+b)=2a+5b+3a-4b-7a-b=-2a$$

$$(4x^2y^2-5x^4y^3)\cdot 2xy=8x^3y^3-10x^5y^4$$

$$(4x^2-1)(x^2+3)=4x^4-x^2+12x^2-3=4x^4+11x^2-3$$

Často je užíván vzorec (pro $a, b \in \mathsf{R}$, resp. C)

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2,$$

podle něhož je např.

$$(xy-3)(xy+3)=x^2y^2-9.$$

Umocnit mnohočlen na n-tou ($n \in \mathsf{N}$) znamená (podle definice mocniny) znásobit vzájemně n mnohočlenů vesměs rovných danému mnohočlenu.

Velmi často se užívají vzorce pro $(a\pm b)^2$, $(a\pm b)^3$. Říká se jim **binomické vzorce** (z lat. binom = dvojčlen). Obecný binomický vzorec pro $(a\pm b)^n$, kde $n \in \mathsf{N}$ ($n>1$), udává **binomická věta**, kterou formulujeme v kombinatorice (kap. 7.3).

Vzorce pro druhé a třetí mocniny dvojčlenů $a \pm b$ ($a, b \in \mathsf{R}$, resp. C)

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

Příklady umocňování mnohočlenů

$$(3a+7b)^2+(2a-5b)^2=9a^2+42ab+49b^2+4a^2-20ab+25b^2=$$
$$=13a^2+22ab+74b^2$$

$$(4x^3y^2-9xy^4)^2=(4x^3y^2)^2-2\cdot 4x^3y^2\cdot 9xy^4+(9xy^4)^2=$$
$$=16x^6y^4-72x^4y^6+81x^2y^8$$

$$(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n)^2=a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots+a_n^2+$$
$$+2a_1a_2+2a_1a_3+\ldots+2a_1a_n+\ldots+2a_{n-1}a_n$$

(Tento vzorec, který lze *dokázat matematickou indukcí*, je užitečné si zapamatovat.)

Mnohočlen dělíme jednočlenem tak, že jednočlenem dělíme každý člen mnohočlenu.

Příklady dělení mnohočlenů jednočleny

$$(6ax-9bx):3x=2a-3b,\ \text{ kde } x\neq 0$$

$$(a^3-2a^2+3a):(-a)=-a^2+2a-3,\ \text{ kde } a\neq 0$$

$$(10m^6n^2+18m^5n^3-12m^4n^4+2m^3n^5):(-2m^3n^2)=$$
$$=-5m^3-9m^2n+6mn^2-n^3,\ \text{ kde } m\neq 0,\ n\neq 0$$

Pro libovolné dva mnohočleny s proměnnou x a racionálními koeficienty

$$P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0,$$

$$P_m(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0,\ \text{ kde } b_m\neq 0 \text{ a } m<n,$$

existuje jediná dvojice mnohočlenů $Q(x)$ a $R(x)$ taková, že platí

$$P_n(x)=P_m(x)Q(x)+R(x),$$

přičemž stupeň mnohočlenu $R(x)$ je buď menší než m, nebo je $R(x)=0$.

Postupu, kterým určujeme mnohočleny $Q(x)$, $R(x)$, se říká **algoritmus dělení mnohočlenu mnohočlenem**. Je-li $R(x)\neq 0$, mluvíme o **dělení mnohočlenů se zbytkem**; přitom **zbytkem** se rozumí mnohočlen $R(x)$, mnohočlen $Q(x)$ se nazývá **neúplný podíl mnohočlenů** $P_n(x)$, $P_m(x)$. Je-li $R(x)=0$, mluvíme o **dělení mnohočlenů beze zbytku**, $Q(x)$ je **podíl mnohočlenů** $P_n(x)$, $P_m(x)$. V tomto případě říkáme, že **mnohočlen** $P_n(x)$ je **dělitelný mnohočleny** $P_m(x)$, $Q(x)$; těmto mnohočlenům se říká **dělitelé mnohočlenu** $P_n(x)$.

Algoritmus dělení mnohočlenu $P_n(x)$ *mnohočlenem* $P_m(x)$ je obdobný algoritmu dělení přirozených čísel zapsaných v desítkové soustavě. Nejprve dělíme člen nejvyššího stupně dělence $P_n(x)$ členem nejvyššího stupně dělitele $P_m(x)$, výsledek $q_1(x)$ je prvním členem podílu $Q(x)$. Jím znásobíme dělitele $P_m(x)$ a součin $q_1(x)\cdot P_m(x)$ odečteme od dělence $P_n(x)$. Dostaneme zbytek $R_1(x)$. Pokud zbytek není nula nebo mnohočlen nižšího stupně, než je stupeň dělitele $P_m(x)$, postupujeme obdobně dál, tj. člen nejvyššího stupně mnohočlenu $R_1(x)$ dělíme členem nejvyššího stupně dělitele $P_m(x)$, čímž dostaneme druhý člen $q_2(x)$ podílu $Q(x)$, součin $q_2(x)\cdot P_m(x)$ odečteme od zbytku $R_1(x)$ a dostaneme zbytek $R_2(x)$. Tak pokračujeme, dokud zbytek není nula nebo mnohočlen nižšího stupně, než je stupeň dělitele $P_m(x)$.

Analogii mezi dělením přirozených čísel zapsaných v desítkové soustavě a dělením mnohočlenů nejlépe osvětlí porovnání na *příkladech*:

$10665 : 45 = 237$ $\ \ 166$ $\ \ \ \ 315$ $\ \ \ \ \ \ 0$	Takto zpravidla zapisujeme postup dělení přirozených čísel v desítkové soustavě.

$$\begin{array}{r}
10665 : 45 = 237 \\
-90 \\
\hline
166 \\
-135 \\
\hline
315 \\
-315 \\
\hline
0
\end{array}$$

Zápis podrobnější, zachycující i fáze postupu v předchozím zápise jen myšlené.

Obdobně jako ve druhém případě zápisu dělení přirozených čísel postupujeme i při zápisu dělení mnohočlenů, jak ukazují následující příklady. Při tom mnohočleny zapisujeme se sestupným uspořádáním členů (podle klesajících mocnin proměnné x).

Příklady dělení mnohočlenu mnohočlenem

a) Vypočítejte $(2x^4 - x^3 + 3x^2 - x + 1) : (x^2 + 1)$.

Řešení

$x^2 + 1 \neq 0$ pro každé $x \in \mathsf{R}$, takže dělení lze provést bez omezení.

$$\begin{array}{l}
(2x^4 - x^3 + 3x^2 - x + 1) : (x^2 + 1) = 2x^2 - x + 1 \\
-(2x^4 \qquad + 2x^2) \\
\hline
\qquad -x^3 + x^2 - x + 1 \\
\qquad -(-x^3 \qquad - x) \\
\hline
\qquad\qquad x^2 \qquad + 1 \\
\qquad\quad -(x^2 \qquad + 1) \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

b) Vypočítejte $(x^3 - 5x^2 + 5x - 2) : (x - 4)$.

Řešení

Dělení lze provést za předpokladu, že $x \neq 4$.

$$\begin{array}{l}
(x^3 - 5x^2 + 5x - 2) : (x - 4) = x^2 - x + 1 \\
-(x^3 - 4x^2) \\
\hline
\qquad -x^2 + 5x - 2 \\
\quad -(-x^2 + 4x) \\
\hline
\qquad\qquad x - 2 \\
\qquad\quad -(x - 4) \\
\hline
\qquad\qquad\quad 2 \quad \text{zbytek}
\end{array}$$

Výsledek zapisujeme takto:

$$\frac{x^3 - 5x^2 + 5x - 2}{x - 4} = x^2 - x + 1 + \frac{2}{x - 4}$$

Rozklady mnohočlenů v oboru R

Mnohdy, např. při počítání se zlomky, v nichž se vyskytují mnohočleny, je třeba vyjádřit daný mnohočlen jako součin jednodušších mnohočlenů, tj. zpravidla mnohočlenů nižšího stupně. Mluvíme o **rozkladu mnohočlenu** v součin. Lze ho často provést některým z těchto způsobů:

1. **Vytknutí společného činitele před závorku**

Příklady

$$5a + 10b - 15c = 5(a + 2b - 3c)$$

$$x(y-1) + 2(1-y) - z(1-y) = x(y-1) - 2(y-1) + z(y-1) =$$
$$= (y-1)(x - 2 + z)$$

Někdy sice nelze ze všech členů daného mnohočlenu vytknout žádného společného činitele, ale po vhodném seřazení jeho členů do skupin je možno každou skupinu zvlášť rozložit tak, že pak všechny skupiny společného činitele mají.

Příklad

$$ax - bx + 2a - 2b = (ax - bx) + (2a - 2b) =$$
$$= x(a - b) + 2(a - b) = (a - b)(x + 2)$$

2. **Rozklad užitím binomických vzorců** (viz str. 112 a obecně viz v kap. 7.3) nebo **vzorců pro** $a^n \pm b^n$, $n \in \mathsf{N}$.

Vzorce pro $a^n \pm b^n$ ($n \in \mathsf{N}$; $a, b \in \mathsf{R}$, resp. C)

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$ pro každé $n \in \mathsf{N}$ $(n > 1)$

$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \ldots - ab^{n-2} + b^{n-1})$ pro každé liché $n \in \mathsf{N}$ $(n > 1)$

Poznámka. Všimněte si skutečnosti, že se v uvedených vzorcích nevyskytuje rozklad součtu druhých mocnin $a^2 + b^2$. Zapamatujte si, že kvadratický dvojčlen $a^2 + b^2$ a též kvadratické trojčleny $a^2 + ab + b^2$, $a^2 - ab + b^2$ (obsažené v rozkladech dvojčlenů $a^3 \pm b^3$) nejsou v oboru R rozložitelné v součin lineárních dvojčlenů. (V oboru C viz str. 119.)

Příklady rozkladů mnohočlenů pomocí vzorců

$$x^2 - 25 = x^2 - 5^2 = (x+5)(x-5)$$
$$4m^2 - 9n^2 = (2m)^2 - (3n)^2 = (2m+3n)(2m-3n)$$
$$a^2 - 6ab + 9b^2 - 16c^2 = (a-3b)^2 - (4c)^2 = $$
$$= (a-3b+4c)(a-3b-4c)$$
$$r^3 + 8s^3 = r^3 + (2s)^3 = (r+2s)(r^2 - 2rs + 4s^2)$$
$$125u^3 - 64v^3 = (5u)^3 - (4v)^3 = (5u-4v)\left[(5u)^2 + 5u\cdot 4v + (4v)^2\right] =$$
$$= (5u-4v)(25u^2 + 20uv + 16v^2)$$
$$a^5 + 1 = (a+1)(a^4 - a^3 + a^2 - a + 1)$$

3. **Rozklad kvadratického trojčlenu** v součin dvou lineárních dvojčlenů tvaru

$$x^2 + px + q = (x+u)(x+v)$$

v oboru R se můžeme pokusit najít[1] *dvěma způsoby*:

a) Protože $(x+u)(x+v) = x^2 + (u+v)x + uv = x^2 + px + q$, musí být

$$u + v = p$$
$$uv = q.$$

Jsou-li p, q celá čísla, lze čísla u, v určit mnohdy zpaměti, a to tak, že rozložíme číslo q různými způsoby na součin dvou celočíselných činitelů (je-li $q > 0$, jsou u, v buď obě kladná, nebo obě záporná, je-li $q < 0$, mají u, v opačná znaménka a určíme, která dvojice činitelů má součet roven p).

Příklady rozkladu kvadratických trojčlenů

Máme-li rozložit $x^2 - 8x + 12$, musí být $u + v = -8$, $uv = 12$. Součin kladný a součet záporný budou jen tehdy, jsou-li obě čísla u, v záporná. Rozložíme tedy $12 = (-3)\cdot(-4) = (-2)\cdot(-6) = (-1)\cdot(-12)$; součet -8 dává dvojice (-2), (-6), a proto $x^2 - 8x + 12 = (x-2)\cdot(x-6)$.

Rozkládáme-li kvadratický trojčlen $x^2 + x - 20$, usuzujeme takto: $u + v = 1$, $uv = -20$. Protože součin uv je záporný, mají čísla u, v různá znaménka; protože je však jejich součet kladný, je kladné to z nich, které má větší absolutní hodnotu. Rozložíme tedy $-20 = 20\cdot(-1) = 10\cdot(-2) = 5\cdot(-4)$; součet 1 dává dvojice 5, (-4), a proto $x^2 + x - 20 = (x+5)(x-4)$. Podobně $x^2 - 2x - 35 = (x-7)(x+5)$, neboť $-7\cdot 5 = -35$, $-7 + 5 = -2$;

$$2x^3 + 22x^2 + 48x = 2x(x^2 + 11x + 24) =$$
$$= 2x(x+3)(x+8), \text{ neboť } 3\cdot 8 = 24,\ 3 + 8 = 11.$$

[1] Uvažovaný rozklad v oboru R nemusí existovat, obecně je možný v oboru C.

b) Nedovedeme-li u, v určit zpaměti, např. proto, že p a q jsou čísla příliš veliká nebo nejsou celá, pak se rozklad kvadratického trojčlenu $x^2 + px + q$ provádí zpravidla na základě řešení kvadratické rovnice $x^2 + px + q = 0$ (kap. 5.3). Jsou-li x_1, x_2 kořeny této rovnice, pak platí $u = -x_1$, $v = -x_2$. Určení čísel u, v je však možné též bez použití vzorce pro výpočet kořenů kvadratické rovnice na základě postupu, jímž se tento vzorec odvozuje. Vychází se z následující úpravy kvadratického trojčlenu.

Doplnění kvadratického trojčlenu na druhou mocninu lineárního dvojčlenu

Této úpravě se v literatuře často říká též stručně **doplnění kvadratického trojčlenu na „úplný čtverec“** („čtvercem“ se zde rozumí druhá mocnina lineárního dvojčlenu a přívlastkem „úplný“ se vyjadřuje skutečnost, že se ke „čtverci“ dospívá z původních členů přičtením vhodného čísla). Tato úprava je velmi důležitá a používá se v mnoha partiích matematiky. Proto je nutné si ji dokonale osvojit a její postup zmechanizovat.

Obecný postup doplnění kvadratického trojčlenu $x^2 + px + q$, resp. $ax^2 + bx + c$, *kde* $a \neq 0$, *na druhou mocninu lineárního dvojčlenu* („*úplný čtverec*“) je tento:

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{D}{4}, \text{ kde } D = p^2 - 4q,$$
$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2}\right], \text{ kde } D = b^2 - 4ac$$

Zapamatujte si: Doplněním kvadratického trojčlenu na „úplný čtverec“ vytváříme druhou mocninu lineárního dvojčlenu, ve kterém k x přičítáme polovinu koeficientu lineárního členu kvadratického trojčlenu.

Poznámka. Doplňování na „úplný čtverec“ patří mezi tzv. umělé, ale účelné úpravy spočívající v tom, že přičítáme a zároveň odčítáme vhodné číslo (konstantu), resp. obecněji vhodný výraz s proměnnými.

Příklady doplnění kvadratického trojčlenu na „úplný čtverec“

a) $x^2 - x - 2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$

b) $x^2 - 6x + 18 = (x-3)^2 - 3^2 + 18 = (x-3)^2 + 9$

c) $2x^2 - 3x + 7 = 2\left[x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{7}{2}\right] = 2\left[\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{2}\right] =$
$= 2\left[\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{47}{16}\right]$

V případě a) $(D > 0)$ je možný rozklad kvadratického trojčlenu v součin lineárních činitelů v R, zatímco v případech b), c) $(D < 0)$ takový rozklad neexistuje v R, je však možný v C.

Užití mnohočlenů a jejich úprav v teorii čísel

Mnohočleny a jejich úpravy se často používají v důkazových i dalších úlohách číselné teorie. Uvedeme některé typové příklady.

Příklady užití úprav polynomů v důkazových úlohách o celých číslech

1. Dokažte, že druhou mocninu součtu druhých mocnin libovolných dvou celých čísel lze také vyjádřit ve tvaru součtu druhých mocnin celých čísel.

Řešení

Označme uvažovaná celá čísla a, b.

$$\left(a^2+b^2\right)^2 = a^4+2a^2b^2+b^4 = a^4-2a^2b^2+b^4+4a^2b^2 = \\ = \left(a^2-b^2\right)^2+(2ab)^2,$$

kde a^2-b^2, $2ab$ jsou celá čísla. Tím je důkaz proveden.

2. Je součet třetích mocnin tří po sobě následujících celých čísel vždy dělitelný devíti?

Řešení

Libovolnou trojici po sobě následujících celých čísel můžeme vyjádřit ve tvaru a, $a+1$, $a+2$, kde $a \in \mathsf{Z}$.

Pak $a^3+(a+1)^3+(a+2)^3 = 3a^3+9a^2+15a+9 = 3a\left(a^2+5\right)+9a^2+9 = 3a\left(a^2-1+6\right)+9a^2+9 = 3a(a+1)(a-1)+9a^2+2\cdot 9a+9$. Protože jedno z čísel a, $a-1$, $a+1$ je jistě dělitelné třemi, dospíváme ke kladné odpovědi na danou otázku.

3. Odvoďte postup pro výpočet druhé mocniny dvojciferného přirozeného čísla a víceciferného přirozeného čísla.

Řešení

Každé dvojciferné číslo lze v desítkové soustavě zapsat ve tvaru $10x+y$, kde x je některá z cifer $1, \ldots, 9$, y některá z cifer $0, 1, \ldots, 9$. Jeho druhou mocninu lze vypočítat užitím vzorce

$$(10x+y)^2 = 10^2x^2+10\cdot 2xy+y^2.$$

Postup výpočtu lze zkráceně zapsat takto (píšeme-li místo nul tečky):

$$\begin{array}{l} x^2.\,. \\ 2xy\,. \\ \underline{\quad y^2} \\ \text{součet} \end{array} \qquad \text{nebo} \qquad \begin{array}{r} x^2. \\ 2xy\,. \\ \underline{y^2} \\ \text{součet} \end{array}$$

Příklad: $37^2 = 1\,369$,

neboť

$$\begin{array}{rcr} 3^2 & \ldots & 9\,. \\ 2\cdot 3\cdot 7 & \ldots & 42\,. \\ 7^2 & \ldots & \underline{49} \\ & & 1\,369 \end{array}$$

Prakticky zpravidla výpočet provádíme uvedeným postupem odzadu zpaměti.

Analogicky libovolné $n$ciferné číslo lze zapsat ve tvaru $10x+y$, kde x je $(n-1)$ciferné číslo, y některá z cifer $0, 1, \ldots, 9$. Podle uvedeného vzorce, popř. upraveného na tvar

$$(10x+y)^2 = 10^2x^2+(10\cdot 2x+y)\cdot y,$$

lze vypočítat druhou mocninu $n$ciferného čísla, známe-li ji pro číslo $(n-1)$ciferné.

Postup výpočtu ukážeme na *příkladu:*

$$2\,573^2 = 6\,620\,329,$$

neboť

$$\begin{array}{rcr} 25^2 & \ldots & 625\,. \\ 2\cdot 25\cdot 7 & \ldots & 350\,. \\ 7^2 & \ldots & 49\,. \\ 2\cdot 257\cdot 3 & \ldots & 1542\,. \\ 3^2 & \ldots & \underline{9} \\ & & 6620329 \end{array} \qquad \text{nebo} \qquad \begin{array}{rcr} 2^2 & \ldots & 4\,.\,. \\ 45\cdot 5 & \ldots & 225\,.\,. \\ 507\cdot 7 & \ldots & 3549\,.\,. \\ 5143\cdot 3 & \ldots & \underline{15429} \\ & & 6620329 \end{array}$$

Tento postup výpočtu je zřejmě vhodnější.

4. Jak se postup umocňování přirozeného čísla zjednoduší, končí-li umocňované číslo cifrou 5?

Řešení

Pro druhou mocninu čísla tvaru $10x+5$ platí

$$(10x+5)^2 = 10^2x^2+10\cdot 2\cdot 5x+5^2 = 10^2x(x+1)+25.$$

Umocnění lze tedy provést tak, že napíšeme 25 a před toto dvojčíslí součin čísla x a čísla o 1 většího.

Například:

$$85^2 = \underbrace{7}_{8\cdot 9}225, \qquad 95^2 = \underbrace{9}_{9\cdot 10}025, \qquad 195^2 = \underbrace{38}_{19\cdot 20}025.$$

Rozklady mnohočlenů v oboru C

Obdobnými způsoby jako v oboru R se provádí i v C **rozklad mnohočlenu** v součin mnohočlenů nižšího stupně. S potřebou takových rozkladů se setkáváme v kap. 5.5 při řešení algebraických rovnic vyšších stupňů. Zejména si uvědomme, že vzorce uvedené na stranách 112 a 115 platí i v oboru C. V předcházejících článcích jsme viděli, že některé mnohočleny nelze rozložit v oboru R. Avšak v oboru C je rozklad možný, jak ukážeme v následujících příkladech.

***Příklady rozkladů mnohočlenů v oboru* C**

a) Dvojčlen a^2+b^2 nelze rozložit v oboru R, avšak můžeme ho rozložit v oboru C na součin lineárních dvojčlenů takto:

$$a^2+b^2 = a^2-(b\mathrm{i})^2 = (a+b\mathrm{i})(a-b\mathrm{i}),$$

kde i je imaginární jednotka.

b) Trojčleny $a^2 \pm ab + b^2$ též nelze rozložit v oboru R, avšak v oboru C je můžeme rozložit v součin lineárních trojčlenů (pomocí doplnění na druhou mocninu lineárního dvojčlenu a užitím rozkladu podle příkladu a)):

$$a^2+ab+b^2 = \left[a^2+2a\cdot\frac{b}{2}+\left(\frac{b}{2}\right)^2\right]+\frac{3}{4}b^2 = \left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2 =$$
$$= \left(a+\frac{b}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}bi\right)\left(a+\frac{b}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}bi\right)$$

a analogicky

$$a^2-ab+b^2 = \left(a-\frac{b}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}bi\right)\left(a-\frac{b}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}bi\right).$$

c) Dvojčlen a^4+b^4 je možné rozložit v oboru C stejně jako v oboru R takto:

$$a^4+b^4 = (a^4+2a^2b^2+b^4)-2a^2b^2 = (a^2+b^2)^2-\left(\sqrt{2}ab\right)^2 =$$
$$= \left(a^2+\sqrt{2}ab+b^2\right)\left(a^2-\sqrt{2}ab+b^2\right)$$

V oboru R již další rozklad není možný, v oboru C je však možné ještě každý z kvadratických trojčlenů rozložit v součin lineárních trojčlenů (obdobným postupem jako v příkladu b)); dostáváme:

$$a^4+b^4 = \left(a+\frac{\sqrt{2}}{2}b+\frac{\sqrt{2}}{2}bi\right)\left(a+\frac{\sqrt{2}}{2}b-\frac{\sqrt{2}}{2}bi\right)\cdot$$
$$\cdot\left(a-\frac{\sqrt{2}}{2}b+\frac{\sqrt{2}}{2}bi\right)\left(a-\frac{\sqrt{2}}{2}b-\frac{\sqrt{2}}{2}bi\right)$$

3.2 Algebraické výrazy a jejich úpravy

Algebraický výraz je výraz (zápis) skládající se z čísel a z písmen označujících proměnné, jež jsou spojeny znaky operací sčítání, odčítání, násobení, dělení, umocňování a odmocňování, popř. obsahuje též závorky, které určují pořadí provádění naznačených operací.

Každá **proměnná** v algebraickém výrazu zastupuje libovolné číslo z jisté (dané) číselné množiny, jež se nazývá **obor proměnné**; pokud není obor proměnné uveden, rozumí se jím uvažovaná základní množina U (v této kapitole množina R). Čísla z oboru proměnné se nazývají **hodnoty proměnné**.

Algebraické výrazy se rozdělí takto: Algebraické výrazy, v nichž se nevyskytují odmocniny z proměnných, se nazývají **racionální algebraické výrazy**. Dělí se na **racionální celistvé výrazy (mnohočleny)** a **racionální lomené výrazy** vyjádřené zlomky, jejichž čitatelem i jmenovatelem jsou mnohočleny. Algebraické výrazy, ve kterých se vyskytují odmocniny z jedné nebo více proměnných, se nazývají **iracionální algebraické výrazy**.

V následujícím textu budeme označovat algebraický výraz s proměnnou $x \in$ R symbolem $V(x)$ a algebraický výraz s proměnnými $x_1, x_2, \dots, x_n$ symbolem $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Zavedeme pojmy: Množina všech hodnot proměnné $x \in$ R, pro něž má výraz $V(x)$ smysl (tj. je definován), se nazývá **definiční obor algebraického výrazu** $V(x)$. Množina všech takových uspořádaných n-tic hodnot proměnných $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in$ R^n, pro něž má výraz $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ smysl (tj. je definován), se nazývá **definiční obor algebraického výrazu** $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Pro definiční obory výrazů V (jedné nebo více proměnných) budeme používat označení D(V), popř. D$_V$.

Při určování definičních oborů algebraických výrazů je zejména třeba si uvědomit, že u lomených výrazů musí být jmenovatelé zlomků různí od nuly a pro iracionální výrazy v oboru R musí být základy odmocnin nezáporné.

Příklady algebraických výrazů a určení jejich definičních oborů

a) racionální celistvé výrazy (mnohočleny)

$$V(x) = 2x+1, \quad \mathrm{D}(V) = \mathrm{R}; \quad V(x,y) = 3x^2+5x-y, \quad \mathrm{D}(V) = \mathrm{R}^2;$$

b) racionální lomené výrazy

$$V(x) = \frac{2}{x^2-1}, \quad \mathrm{D}(V) = \mathrm{R}\setminus\{1; -1\};$$
$$V(x,y) = \frac{1}{x-y}, \quad \mathrm{D}(V) = \left\{[x,y] \in \mathrm{R}^2;\ y \neq x\right\}.$$

c) iracionální algebraické výrazy

$$V(x) = 1+\sqrt{x}, \quad \mathrm{D}(V) = \langle 0, +\infty);$$
$$V(a,b) = a+\sqrt{b-1}, \quad \mathrm{D}(V) = \left\{[a,b] \in \mathrm{R}^2;\ b \geqq 1\right\}.$$

Hodnotou algebraického výrazu pro dané hodnoty jeho proměnných se rozumí číslo, které dostaneme dosazením těchto hodnot proměnných do daného algebraického výrazu.

Příklady výpočtu hodnot algebraického výrazu

a) Algebraický výraz $V(x) = \dfrac{x^2-2x-1}{x-1}$ má pro $x=2$ hodnotu $V(2) = -1$.

b) Algebraický výraz $V(x,y) = \dfrac{1}{2}(x+y)$ má pro $x=1$, $y=3$ hodnotu $V(1,3) = 2$.

Rovnost algebraických výrazů, úpravy algebraických výrazů

Definujeme: Dva **algebraické výrazy** V_1, V_2 **jsou si rovny** (značíme $V_1 = V_2$), právě když pro ně platí:

1. mají společný definiční obor D(V_1) = D(V_2) = D,
2. po dosazení libovolných stejných hodnot proměnných do výrazů V_1, V_2 jsou si rovny hodnoty výrazů.

Úpravou algebraického výrazu se rozumí provedení sledu operací, jimiž se od daného algebraického výrazu V_1 přejde k jinému algebraickému výrazu V_2, pro který platí $V_1 = V_2$ na společném definičním oboru D obou výrazů V_1, V_2. Tento společný definiční obor se dostane z *podmínek, za nichž daný výraz a jeho provedené úpravy mají smysl.* Prakticky se zpravidla uvádějí jen tyto podmínky.

Speciálně se **zjednodušením algebraického výrazu** rozumí takové jeho úpravy, po nichž dostaneme výraz s menším počtem členů, závorek, zlomků apod. Jindy se v úlohách o úpravách algebraických výrazů např. požaduje, aby upravený výraz měl tvar součinu, resp. neobsahoval podíl, popř. neobsahoval odmocninu ve jmenovatelích zlomků apod.

Při úpravách algebraických výrazů se používá *tranzitivnosti rovnosti algebraických výrazů*: Jestliže pro výrazy V_1, V platí $V_1 = V$ ve společném definičním oboru D_1 a jestliže pro výrazy V, V_2 platí $V = V_2$ ve společném definičním oboru D_2, pak platí $V_1 = V_2$ ve společném definičním oboru $\mathsf{D} = \mathsf{D}_1 \cap \mathsf{D}_2$.

Dovednost upravovat algebraické výrazy je zcela nepostradatelná při řešení mnoha matematických úloh, v teoretických úvahách i pro užití matematiky v praxi. Přitom *nutnou součástí těchto úprav je stanovení podmínek, za nichž mají úpravy smysl.*

Úpravy racionálních lomených výrazů

Při úpravách racionálních lomených výrazů se používají vzorce, uvedené v kap. 3.1, o rozkladu mnohočlenů a dále vzorce pro počítání se zlomky, uvedené v kap. 2.7.

V úlohách o úpravách lomených výrazů je nutné klást *podmínky*, že jmenovatelé všech zlomků v původních výrazech i v jejich upravených tvarech musí být různí od nuly.

Příklady úprav racionálních lomených výrazů

1. Zjednodušte dané algebraické výrazy a udejte podmínky, za nichž mají provedené úpravy smysl v R:

a) $V_1 = \dfrac{a-b}{b-a}$, b) $V_2 = \dfrac{(x-y)^2}{y^2-x^2}$,

c) $V_3 = \dfrac{m^4-m}{2m^2+2m+2}$, d) $V_4 = \dfrac{xy+1-x-y}{y+z-1-yz}$.

Řešení

a) $V_1 = \dfrac{-(b-a)}{b-a} = -1$, je-li $b-a \neq 0$ čili pro $a \neq b$,

b) $V_2 = \dfrac{(y-x)^2}{(y-x)(y+x)} = \dfrac{y-x}{y+x}$, je-li $y \pm x \neq 0$ čili pro $x \neq \pm y$,

c) $V_3 = \dfrac{m(m^3-1)}{2(m^2+m+1)} = \dfrac{m(m-1)(m^2+m+1)}{2(m^2+m+1)} = \dfrac{m(m-1)}{2}$ pro každé $m \in \mathsf{R}$, neboť $m^2+m+1 = \left(m+\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} > 0$ pro každé $m \in \mathsf{R}$,

d) $V_4 = \dfrac{xy-x-y+1}{y-yz-1+z} = \dfrac{x(y-1)-(y-1)}{y(1-z)-(1-z)} = \dfrac{(y-1)(x-1)}{(1-z)(y-1)} = \dfrac{x-1}{1-z}$, je-li $y-1 \neq 0$ a $1-z \neq 0$ čili pro $y \neq 1$, $z \neq 1$.

2. Vypočítejte a stanovte podmínky, za kterých mají provedené úpravy smysl v R:

a) $V_1 = (r-s) : \left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{s}\right)$,

b) $V_2 = \dfrac{5a}{3(4-a)} + \dfrac{a+4}{8-3a} \cdot \left(\dfrac{a-1}{a+4} - \dfrac{a-3}{a-4}\right)$,

c) $V_3 = \left(\dfrac{2a^2-2}{a^2+ab} \cdot \dfrac{a+b}{1-a}\right) : \dfrac{a^3+1}{a}$.

Řešení

a) $V_1 = (r-s) : \dfrac{s-r}{rs} = -(s-r) \cdot \dfrac{rs}{s-r} = -rs$, pro $r \neq 0$, $s \neq 0$ a $s-r \neq 0$ čili $s \neq r$.

b) Nejprve odečteme zlomky v závorce, pak jejich rozdíl vynásobíme zlomkem před závorkou a nakonec k tomuto součinu přičteme první zlomek:

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{5a}{3(4-a)} + \frac{a+4}{8-3a} \cdot \frac{(a-1)(a-4)-(a-3)(a+4)}{(a+4)(a-4)} = \\ &= \frac{5a}{3(4-a)} + \frac{(a^2-a-4a+4)-(a^2-3a+4a-12)}{(8-3a)(a-4)} = \\ &= \frac{5a}{3(4-a)} + \frac{a^2-5a+4-a^2-a+12}{(8-3a)(a-4)} = \\ &= \frac{5a}{3(4-a)} + \frac{16-6a}{(8-3a)(a-4)} = \frac{5a}{3(4-a)} + \frac{2(8-3a)}{(8-3a)(a-4)} = \\ &= \frac{5a}{3(4-a)} - \frac{2}{4-a} = \frac{5a-6}{3(4-a)} \end{aligned}$$

pro $4-a \neq 0$, $8-3a \neq 0$, $a+4 \neq 0$ čili $a \neq \pm 4$, $a \neq 2\frac{2}{3}$.

c) Abychom mohli zkrátit, rozložíme dvojčleny na součin:

$$V_3 = \frac{2(a+1)(a-1)}{a(a+b)} \cdot \frac{a+b}{-(a-1)} \cdot \frac{a}{(a+1)(a^2-a+1)} = -\frac{2}{a^2-a+1}$$

pro $a \neq 0$, $a \neq -b$, $a \neq 1$, $a \neq -1$. (Výraz $a^2-a+1 \neq 0$ pro každé reálné číslo a, neboť $a^2-a+1 = \left(a^2-a+\dfrac{1}{4}\right) + \dfrac{3}{4} = \left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} > 0$.)

3. Upravte na jednoduchý zlomek výraz $V = \dfrac{1+\frac{1}{x-1}}{1-\frac{1}{x+1}}$, $x \in \mathsf{R}$.

Řešení

$$V = \frac{\frac{x-1+1}{x-1}}{\frac{x+1-1}{x+1}} = \frac{x}{x-1} : \frac{x}{x+1} = \frac{x}{x-1} \cdot \frac{x+1}{x} = \frac{x+1}{x-1} \text{ pro } x \neq \pm 1,\ x \neq 0$$

Rychleji dospějeme k témuž výsledku rozšířením složeného zlomku součinem $(x+1)(x-1)$:

$$V = \frac{1+\frac{1}{x-1}}{1-\frac{1}{x+1}} \cdot \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{(x+1)(x-1+1)}{(x-1)(x+1-1)} = \frac{x+1}{x-1}$$

pro $x \neq \pm 1$, $x \neq 0$.

4. Vypočtěte hodnoty výrazu $V(x)$ z předchozí úlohy pro a) $x = 2$, b) $x = 3$ dvěma způsoby: jednak dosazením do daného výrazu a jednak dosazením do upraveného výrazu.

Řešení

a) $V(2) = \dfrac{1+1}{1-\frac{1}{3}} = \dfrac{2}{\frac{2}{3}} = 3$ a $V(2) = \dfrac{3}{1} = 3$

b) $V(3) = \dfrac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}} = \dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{4}} = 2$ a $V(3) = \dfrac{4}{2} = 2$

Poznámka. Pokud by oběma způsoby nevyšla tatáž hodnota výrazu, signalizovalo by nám to, že jsme se při úpravách daného výrazu dopustili chyby.

Úpravy iracionálních algebraických výrazů

Při úpravách iracionálních algebraických výrazů využíváme poznatků o odmocninách a mocninách s racionálními mocniteli (kap. 2.6) a pravidel pro početní operace se zlomky (kap. 2.7). *Podmínky,* za nichž prováděné úpravy mají smysl, především vyjadřují, že základy všech odmocnin (odmocněnci) musí být nezáporné a jmenovatelé zlomků se nesmějí rovnat nule.

Příklady úprav iracionálních algebraických výrazů

1. Zjednodušte dané iracionální výrazy a uveďte podmínky, za nichž úpravy mají smysl v R:

a) $$V_1 = \frac{a\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2b\sqrt{a}}\right)^{-1} + b\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2a\sqrt{b}}\right)^{-1}}{\left(\frac{a+\sqrt{ab}}{2ab}\right)^{-1} + \left(\frac{b+\sqrt{ab}}{2ab}\right)^{-1}},$$

b) $$V_2 = \left(\frac{3x^{-\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}} - 2x^{-\frac{1}{3}}} - \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{4}{3}} - x^{\frac{1}{3}}}\right)^{-1} - \left(\frac{1-2x}{3x-2}\right)^{-1}.$$

Řešení

a) $$V_1 = \frac{\frac{2ab\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{2ab\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}}{\frac{2ab}{a+\sqrt{ab}} + \frac{2ab}{b+\sqrt{ab}}} = \frac{\frac{2ab\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}}{\frac{2ab}{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)} + \frac{2ab}{\sqrt{b}\left(\sqrt{b}+\sqrt{a}\right)}} =$$

$$= \frac{2ab}{\frac{2ab\left(\sqrt{b}+\sqrt{a}\right)}{\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}} = 2ab \cdot \frac{\sqrt{ab}}{2ab} = \sqrt{ab} \text{ pro } a > 0,\ b > 0.$$

b) V první závorce rozšíříme 1. zlomek číslem $x^{\frac{1}{3}}$, 2. zlomek číslem $x^{-\frac{1}{3}}$; dostáváme: $V_2 = \left(\dfrac{3}{x-2} - \dfrac{1}{x-1}\right)^{-1} - \dfrac{3x-2}{1-2x} =$

$$= \left[\frac{3x-3-x+2}{(x-2)(x-1)}\right]^{-1} + \frac{3x-2}{2x-1} = \frac{(x^2-3x+2)+(3x-2)}{2x-1} = \frac{x^2}{2x-1} \text{ pro}$$

$x > 0$, $x \neq \dfrac{1}{2}$, $x \neq 1$, $x \neq 2$.

2. Zjednodušte (upravte na jediný zlomek) a uveďte podmínky, za nichž úpravy mají smysl v R:

$$V = \frac{2x-3y}{(2x)^{\frac{1}{2}} + (3y)^{\frac{1}{2}}} - \frac{(2x)^{\frac{3}{2}} + (3y)^{\frac{3}{2}}}{2x-3y}$$

Řešení

Položíme $u = 2x$, $v = 3y$ a užijeme toho, že $\left(u^{\frac{1}{2}} + v^{\frac{1}{2}}\right)\left(u^{\frac{1}{2}} - v^{\frac{1}{2}}\right) = u - v$.

Dostáváme:

$$V = \frac{u-v}{u^{\frac{1}{2}} + v^{\frac{1}{2}}} - \frac{u^{\frac{3}{2}} + v^{\frac{3}{2}}}{u-v} = \frac{(u-v)\left(u^{\frac{1}{2}} - v^{\frac{1}{2}}\right) - \left(u^{\frac{3}{2}} + v^{\frac{3}{2}}\right)}{u-v} =$$

$$= \frac{u^{\frac{3}{2}} - u^{\frac{1}{2}}v - uv^{\frac{1}{2}} + v^{\frac{3}{2}} - u^{\frac{3}{2}} - v^{\frac{3}{2}}}{u-v} = \frac{uv^{\frac{1}{2}} + vu^{\frac{1}{2}}}{v-u} =$$

$$= \frac{u\sqrt{v} + v\sqrt{u}}{v-u} = \frac{2x\sqrt{3y} + 3y\sqrt{2x}}{3y-2x} \text{ pro } x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ 2x \neq 3y.$$

3. Vypočtěte hodnotu výrazu $V(x, y)$ z předchozí úlohy pro $x = 2$, $y = 3$ dvěma způsoby: dosazením do daného výrazu a dosazením do upraveného výrazu.

Řešení

Oběma způsoby dostáváme tutéž hodnotu:

$$V(2, 3) = \frac{4-9}{2+3} - \frac{8+27}{4-9} = -1 + 7 = 6 \text{ a } V(2, 3) = \frac{12+18}{5} = 6$$

Usměrňování zlomků (iracionálních algebraických výrazů)

Při usměrňování zlomků typu $\dfrac{k}{\sqrt{x} \pm \sqrt{y}}$ (kap. 2.7) je rozšiřujeme výrazem $\sqrt{x} - \sqrt{y}$, resp. $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ („výrazem sdruženým" ke jmenovateli). Touto úpravou ze jmenovatele zlomku odstraníme odmocniny, neboť podle vzorce $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ je $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right) = x - y$.

Obecně při usměrňování zlomků typu $\dfrac{k}{\sqrt[n]{x} \pm \sqrt[n]{y}}$ zlomky rozšiřujeme výrazem, který určíme obdobně pomocí vzorců pro rozklad dvojčlenů $a^n - b^n$ (n je libovolné přirozené číslo, $n > 1$), resp. pro rozklad dvojčlenů $a^n + b^n$ (n je libovolné liché přirozené číslo, $n > 1$).

Příklady usměrňování zlomků (iracionálních algebraických výrazů)

Usměrněte zlomky

a) $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$, b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}$.

Řešení

a) $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \cdot \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}$ pro $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $x \neq y$,

b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}} = \dfrac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}{x+y}$ pro $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $x \neq 0 \vee y \neq 0$, $x \neq -y$.

3.3 Důkazy algebraických rovností a nerovností

Při důkazech platnosti rovností, resp. nerovností $V_1 < V_2$, $V_1 \leqq V_2$, $V_1 = V_2$, $V_1 \geqq V_2$, $V_1 > V_2$ pro algebraické výrazy V_1, V_2, jež obsahují reálná čísla (konstanty) a reálné proměnné, vycházíme ze základních i dalších vlastností rovností a nerovností (vztahu $<$, resp. $>$) mezi reálnými čísly. Uplatňují se přitom všechny druhy důkazů, s nimiž jsme se seznámili v kap. 1.1.

Příklady důkazů algebraických rovností a nerovností

1. Dokažte věty:

a) $\forall a, b \in \mathsf{R}$: $a = b \Rightarrow a^2 = b^2$,

b) $\forall a, b \in \mathsf{R}$: $0 < a < b \Rightarrow 0 < a^2 < b^2$.

Platí věty obrácené?

Řešení

a) 1. *způsob přímého důkazu:* $a = b \Rightarrow a - b = 0 \Rightarrow (a-b)(a+b) = 0 \Rightarrow a^2 - b^2 = 0 \Rightarrow a^2 = b^2$.

2. *způsob přímého důkazu:* Danou rovnost $a = b$ vynásobíme nejprve číslem a, potom číslem b:

$$a = b \Rightarrow (a^2 = ab \wedge ab = b^2) \Rightarrow a^2 = b^2$$

Obrácená věta neplatí (neboť $a^2 = b^2 \Rightarrow a^2 - b^2 = 0 \Rightarrow (a+b)(a-b) = 0 \Rightarrow a = \pm b$).

b) 1. *způsob přímého důkazu:* $0 < a < b \Rightarrow (a+b > 0 \wedge a-b < 0) \Rightarrow a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) < 0 \Rightarrow 0 < a^2 < b^2$.

2. *způsob přímého důkazu:* Vynásobením nerovnosti $0 < a < b$ touž nerovností mezi kladnými čísly dostáváme nerovnost $0 < a^2 < b^2$.

Obrácená věta platí za předpokladu, že je $a > 0$ a $b > 0$:

$$\forall a, b \in \mathsf{R}: (a > 0 \wedge b > 0 \wedge a^2 < b^2) \Rightarrow a < b.$$

(Neboť pro $a > 0 \wedge b > 0$: $a^2 < b^2 \Rightarrow a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) < 0 \Rightarrow a - b < 0 \Rightarrow a < b$.)

2. Dokažte, že pro každé $a, b \in \mathsf{R}$, resp C platí rovnosti:

$$(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2+b^2), \qquad (a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab.$$

Důkaz

$(a+b)^2 + (a-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab + b^2 = 2(a^2+b^2)$,

$(a+b)^2 - (a-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2 = 4ab$.

3. Dokažte, že pro každé $x_i, y_i \in \mathsf{R}$, resp. C ($i, j = 1, 2, \ldots, n$; $n \in \mathsf{N} \setminus \{1\}$) platí tzv. *Lagrangeova identita* [čti: lagránžova identita či rovnost]:

$$(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2) - (x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n)^2 = \\ = (x_1y_2 - x_2y_1)^2 + (x_1y_3 - x_3y_1)^2 + \ldots + (x_{n-1}y_n - x_ny_{n-1})^2$$

(Na pravé straně této rovnosti je součet všech výrazů tvaru $(x_iy_j - x_jy_i)^2$ pro $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $i \neq j$.)

Důkaz matematickou indukcí provedete postupem uvedeným v kap. 1.1.

4. Dokažte, že aritmetický průměr dvou nezáporných čísel je větší nebo roven jejich průměru geometrickému:

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab} \quad \text{pro každé } a \geqq 0,\ b \geqq 0.$$

Kdy nastává rovnost?

Řešení

1. *způsob přímého důkazu* (důkaz nezápornosti rozdílu levé a pravé strany nerovnosti):

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geqq 0,$$

neboť druhá mocnina každého reálného čísla je číslo nezáporné.

Tedy $\dfrac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \geqq 0$, a proto $\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$.

2. *způsob přímého důkazu* (vyjdeme z vhodné známé nerovnosti):

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqq 0 \text{ čili } a - 2\sqrt{ab} + b \geqq 0,$$

odtud $a + b \geqq 2\sqrt{ab}$ čili $\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$.

Poznámka. Pokud se čtenáři při 2. způsobu důkazu zdá obtížné „uhodnout“ výchozí nerovnost, je možné úpravy provést v obráceném sledu a poté ukázat, že postup lze obrátit.

3. *způsob důkazu* (důkaz sporem): Vychází se z předpokladu platnosti negace dokazované nerovnosti, tj. předpokládáme, že existuje alespoň jedna dvojice nezáporných čísel a, b, pro kterou platí

$$\frac{a+b}{2} < \sqrt{ab} \text{ čili } a+b < 2\sqrt{ab} \text{ neboli } \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 < 0,$$

což je však ve sporu s předpoklady věty, neboť tato nerovnost neplatí pro žádné $a \geqq 0$, $b \geqq 0$. Předpoklad platnosti negace dokazované nerovnosti je tedy nesprávný.

Rovnost v dokazovaném vztahu platí právě tehdy, když $a = b$.

Poznámka. Nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem dvou nezáporných čísel a, b dokazovaná v příkladu 4 má četné aplikace. Lze ji též zobecnit:

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geqq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$$

pro každé $x_1 \geqq 0$, $x_2 \geqq 0$, ..., $x_n \geqq 0$; rovnost nastává, právě když $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

5. Další užitečnou nerovnost odvodíme takto:

$$(a-b)^2 \geqq 0 \Rightarrow \frac{a^2+b^2}{2} \geqq ab \quad \text{pro každé } a, b \in \mathsf{R},$$

přičemž rovnost nastává, právě když $a = b$.

6. Užitím této nerovnosti dále snadno odvodíme, že platí:

$$\frac{a+b}{2} \leqq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \quad \text{pro každé } a, b \in \mathsf{R}.$$

Poznámka. Předchozí nerovnost lze též zobecnit:

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \leqq \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}}$$

pro každé $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathsf{R}$; rovnost nastává, právě když $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

7. Při řešení matematických úloh např. v Matematické olympiádě bývá často užitečná tzv. **Cauchyova nerovnost** [čti kóšiova nerovnost]:

$$\left(x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n\right)^2 \leqq \left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2\right)\left(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2\right)$$

pro každé $x_i, y_i \in \mathsf{R}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$); rovnost zde nastává, právě když existuje takové číslo $k \geqq 0$, že $x_i = ky_i$ nebo $y_i = kx_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$).

Důkaz Cauchyovy nerovnosti lze provést mnoha různými způsoby. Nejjednodušší je její odvození jako *důsledku* Lagrangeovy identity (viz příklad 3), kterou upravíme na ekvivalentní tvar:

$$\begin{aligned}\left(x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n\right)^2 = {} & \left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2\right)\left(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2\right) - \\ & -\left(x_1y_2 - x_2y_1\right)^2 - \left(x_1y_3 - x_3y_1\right)^2 - \ldots - \\ & -\left(x_{n-1}y_n - x_ny_{n-1}\right)^2 .\end{aligned}$$

Vynecháním všech členů tvaru $-\left(x_iy_j - x_jy_i\right)^2 \leqq 0$ plyne odtud Cauchyova nerovnost.

8. Odmocněním lze Cauchyovu nerovnost upravit na ekvivalentní tvar

$$|x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n| \leqq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}\,\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2}.$$

Vzhledem k tomu, že vždy platí

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n \leqq |x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n|,$$

plyne odtud a z předchozího tvaru Cauchyovy nerovnosti tento její *důsledek*:

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n \leqq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}\,\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2}.$$

Poznámka. V literatuře se někdy uvádějí pro **Cauchyovu nerovnost** doplňkové, popř. alternativní názvy **Schwarzova** [čti: švarcova] nebo **Buňakovského nerovnost**.

9. Často užívaná je též **Bernoulliova nerovnost** [čti: bernuliova nerovnost] (nazvaná podle Jacoba I. Bernoulliho):

$$(1+x)^n \geqq 1 + nx \quad \text{pro každé } x \geqq -2 \text{ a pro každé } n \in \mathsf{N};$$

rovnost zde platí, právě když je $n = 1$ nebo $x = 0$ (při libovolném $n \in \mathsf{N}$).

Důkaz Bernoulliovy nerovnosti se provádí *matematickou indukcí* vzhledem k proměnné $n \in \mathsf{N}$.

4 Funkce

4.1 Základní pojmy

V kap. 1.2 jsme se seznámili s pojmem zobrazení množiny A do množiny B. Speciálně se zobrazení libovolné množiny A do číselné množiny (R, resp. C) nazývá (**reálná**, resp. **komplexní**) **funkce**. Ve středoškolské matematice se probírají jen reálné funkce, a sice jedné reálné proměnné ($\mathsf{A} \subset \mathsf{R}$).

Reálná funkce jedné reálné proměnné je **definována** takto:

Nechť A, B jsou neprázdné množiny reálných čísel ($\mathsf{A} \subset \mathsf{R}$, $\mathsf{B} = \mathsf{R}$). Přiřadíme-li každému číslu $x \in \mathsf{A}$ právě jedno číslo $y \in \mathsf{B}$, pak se toto jednoznačné přiřazení (zobrazení) reálných čísel nazývá **reálná funkce reálné proměnné** x. (Dále budeme stručně mluvit o **funkci** proměnné x.) Značí se f apod.

Proměnná x je nazývána **funkční proměnná** nebo též **argument funkce** f; jednotlivým číslům množiny A se říká **hodnoty proměnné (argumentu)**. Množina A všech hodnot proměnné x se nazývá **definiční obor funkce** f a značí se $\mathsf{D}(f)$ nebo D_f. Číslo y přiřazené číslu x se nazývá **funkční hodnota** či **hodnota funkce** f **v bodě** x a značí se též $f(x)$; píšeme $y = f(x)$ nebo $x \mapsto f(x)$. Množina všech hodnot funkce f se nazývá **obor hodnot funkce** f nebo **obor funkčních hodnot funkce** f a značí se $\mathsf{H}(f)$ nebo H_f.

Symbolicky se vyjadřuje funkce f zápisy

$$f\colon \mathsf{A} \to \mathsf{R},\ \ \mathsf{D}(f) = \mathsf{A};$$
$$f\colon y = f(x),\ \ x \in \mathsf{D}(f),\ \ \text{resp. } f\colon x \mapsto f(x),\ \ x \in \mathsf{D}(f).$$

Poznámky.

1. Pro označení funkcí se užívají také písmena g, h, F, G, φ apod. Některé často užívané funkce mají speciální označení, např. log, sin, cos.
2. V matematice a v jejích aplikacích se také setkáváme s **funkcemi více reálných proměnných**. Definice takové funkce f n proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se liší od definice funkce jedné reálné proměnné jen tím, že definiční obor $\mathsf{D}(f)$ je množina uspořádaných n-tic $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Každé takové uspořádané n-tici reálných čísel se přiřazuje právě jedno reálné číslo, které se označuje $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
3. Ve vyšší matematice se definují také **komplexní funkce komplexní proměnné** z (resp. n komplexních proměnných $z_1, z_2, \ldots, z_n$). Hodnoty proměnných i funkční hodnoty takové funkce jsou komplexní čísla.
4. V dalším výkladu budeme slovem **funkce** rozumět vždy jen **reálnou funkci jedné reálné proměnné**, pokud výjimečně nebude řečeno něco jiného.

Názornou představu o vlastnostech funkce f poskytuje její **grafické znázornění** neboli ***graf funkce*** f, *který sestrojíme takto:*

V rovině zvolíme pravoúhlou (speciálně kartézskou) soustavu souřadnic s počátkem O a osami x, y (kap. 10.2). Pro všechna $x \in \mathsf{D}(f)$ každé uspořádané dvojici

reálných čísel $[x, f(x)]$ přiřadíme v této rovině bod, který má (v uvedeném pořadí) souřadnice x, $y = f(x)$. Množinu všech takových bodů roviny nazýváme **grafem funkce** f.

Obsahuje-li definiční obor $\mathsf{D}(f)$ nekonečně mnoho hodnot argumentu x lze sestrojit jen určitý konečný počet bodů grafu funkce f o souřadnicích $[x, f(x)]$ a potom graf přibližně dokreslit. Ke správnému nakreslení grafu musíme ovšem uplatnit znalosti různých vlastností funkce. Je-li funkce f dána analyticky (rovnicí $y = f(x)$), je možné její charakteristické vlastnosti vyšetřit systematicky metodami diferenciálního počtu (kap. 8); některé vlastnosti lze určit i metodami elementárními.

Poznámka. Pro přesnější rýsování grafů funkcí se často používá papír s předtištěnou milimetrovou sítí (tzv. milimetrový papír). Výhodné je také použití ohebného (plastického) křivítka. A k sestrojování grafů základních elementárních funkcí slouží šablona Logarex 25 516.

V technické praxi se často grafy funkcí sestrojují automaticky, např. kreslicím zařízením připojeným k měřicím přístrojům (barografu, elektrokardiografu aj.) V současné době se rychle rozvíjí počítačová grafika, jejíž součástí je kreslení grafů funkcí v zobrazovacím zařízení na výstupu počítače.

Způsoby zadání (určení) funkce

K **zadání funkce** je třeba stanovit (zvolit):

1. **definiční obor funkce** $\mathsf{D}(f)$,
2. **funkční předpis**, tj. pravidlo (formulované slovně nebo častěji pomocí matematických symbolů), podle kterého je ke každému číslu $x \in \mathsf{D}(f)$ přiřazena jednoznačně funkční hodnota $y = f(x)$.

Podle formy funkčního předpisu rozlišujeme tyto základní **způsoby zadání funkce** f:

a) **Analytické zadání** – funkční předpis je dán **vzorcem**, tj. rovnicí tvaru $y = f(x)$, kde $f(x)$ je výraz s proměnnou x, resp. konstanta, např. $f(x) = x - 2$, $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ apod., anebo několika takovými rovnicemi platnými pro různé části definičního oboru funkce. Tento způsob zadání bývá nejčastější.

b) **Grafické zadání** – funkční předpis je dán **grafem funkce**.

c) **Zadání výčtem (tabelární zadání) funkce** – funkční předpis je určen spolu s definičním předpisem **výčtem** (zpravidla **tabulkou**) všech uspořádaných dvojic $[x, y = f(x)]$ hodnot argumentu x a příslušných funkčních hodnot $f(x)$. Takový způsob zadání funkce lze ovšem použít jen pro funkce, jejichž definičním oborem je konečná množina.

Poznámka. V praxi se též často setkáváme s užitím **výpisu** některých hodnot argumentu x a jim přiřazených funkčních hodnot $y = f(x)$ ve formě tabulky. Slouží např. k přibližnému zadání (určení) funkce a ke konstrukci jejího grafu.

Příklady funkcí

Uvedeme dva jednoduché příklady funkcí a jejich grafů; s mnoha dalšími se setkáme v tomto i ostatních článcích této kapitoly.

a) V teorii čísel a jinde v matematice se užívá funkce, jež je daná funkčním předpisem

$$y = [x] \text{ pro každé } x \in \mathsf{R},$$

kde symbolem $[x]$ se značí **celá část čísla** x, tj. takové celé číslo $[x] = k$, že platí $k \leqq x < k + 1$. Např. $[0] = 0$, $[5{,}82] = 5$, $\left[\dfrac{6}{5}\right] = 1$, $[\pi] = 3$, $[-4{,}21] = -5$.

Graf této funkce zvané **funkce celá část** ukazuje obr. 4.1. (Je zde znázorněna část grafu v intervalu $\langle -3; 3)$.)

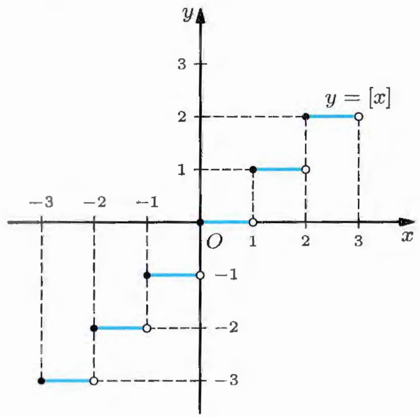
b) Často se také užívá funkce, která je určena funkčním předpisem

$$y = \operatorname{sgn} x \text{ pro každé } x \in \mathsf{R},$$

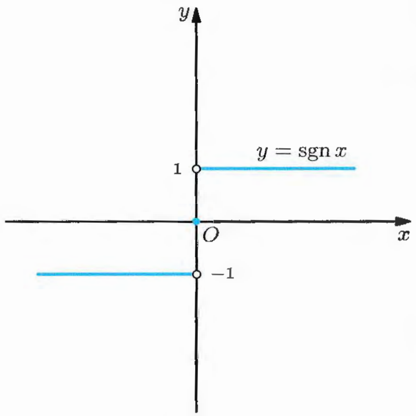
kde symbolem $\operatorname{sgn} x$ se značí **signum čísla** x (latinské slovo signum znamená znak, znamení):

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|} & \text{pro } x \neq 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{cases} \quad \text{neboli} \quad \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{pro } x > 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0 \\ -1 & \text{pro } x < 0 \end{cases}$$

Graf této funkce zvané **funkce signum** ukazuje obr. 4.2.



Obr. 4.1



Obr. 4.2

Maximální definiční obor funkce

Je-li f funkce zadaná analyticky vzorcem (rovnicí) $y = f(x)$, kde $f(x)$ je nějaký výraz s proměnnou x, a není-li zároveň uveden definiční obor funkce, pak se jím rozumí množina všech takových reálných čísel x, pro něž má smysl výraz $f(x)$. Takovému definičnímu oboru $\mathsf{D}(f)$ se říká **maximální definiční obor funkce**; pro stručnost se však slovo maximální zpravidla vynechává a mluví se prostě o **definičním oboru funkce**, což také v dalším textu děláme.

Příklady stanovení definičního oboru analyticky zadané funkce

a) Funkce f_1 daná předpisem $y = \dfrac{1}{x-1}$, kde zlomek má smysl pro každé reálné $x \neq 1$, je definována v $\mathsf{D}(f_1) = \mathsf{R} \setminus \{1\}$.

b) Funkce f_2 určená předpisem $y = \sqrt{x-2}$, kde odmocnina je definována pro všechna reálná $x \geqq 2$, má definiční obor $\mathsf{D}(f_2) = \langle 2, +\infty)$.

Rovnost funkcí a algebraické operace s funkcemi

Definice rovnosti funkcí:

O dvou funkcích f, g říkáme, že **jsou si rovny** (píšeme $f = g$), právě když mají týž definiční obor $\mathsf{D}(f) = \mathsf{D}(g)$ a v každém bodě x tohoto definičního oboru je $f(x) = g(x)$.

O funkcích f, g jež si nejsou rovny, říkáme, že jsou **různé** (píšeme $f \neq g$).

Např. funkce $f\colon y = x^2$, $g\colon y = |x|^2$ jsou si rovny, neboť obě mají týž definiční obor $\mathsf{D}(f) = \mathsf{D}(g) = \mathsf{R}$ a pro každé $x \in \mathsf{R}$ je $x^2 = |x|^2$. Naproti tomu funkce $f\colon y = x + 1$, $g\colon y = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ jsou různé, neboť $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$, avšak $\mathsf{D}(g) = \mathsf{R} \setminus \{1\}$; pro $x \neq 1$ je ovšem $g(x) = f(x)$.

Definice algebraických operací s funkcemi:

Nechť průnik D definičních oborů funkcí f, g je neprázdná množina. Přiřadíme-li každému $x \in \mathsf{D}$ číslo $f(x) + g(x)$, dostaneme funkci $f + g$ zvanou **součet funkcí** f, g. Obdobně se definuje **rozdíl** $f - g$, **součin** fg a **podíl** $\dfrac{f}{g}$ **funkcí** f, g (v posledním případě za předpokladu, že $g(x) \neq 0$ pro všechna $x \in \mathsf{D}$).

Složená funkce

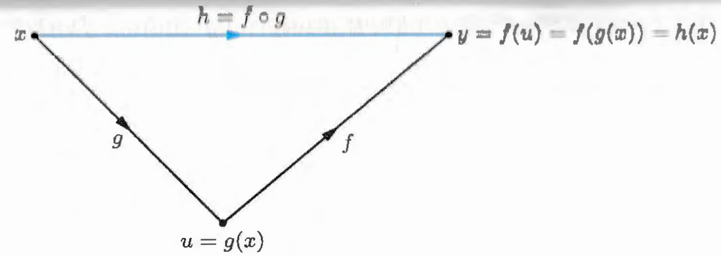
Speciálním případem složeného zobrazení (kap. 1.2) je složená funkce *definovaná* takto:

Nechť jsou dány dvě funkce $g\colon u = g(x)$, $x \in \mathsf{D}(g)$ a $f\colon y = f(u)$, $u \in \mathsf{D}(f)$, takové, že $\mathsf{H}(g) \cap \mathsf{D}(f) \neq \emptyset$. Funkce h se nazývá **složená funkce** z funkcí g, f (v uvedeném pořadí), právě když pro ni platí:

1. Definičním oborem funkce h je množina všech těch čísel $x \in \mathsf{D}(g)$, pro která je $g(x) \in \mathsf{D}(f)$, tj. $\mathsf{D}(h) = \{x \in \mathsf{D}(g);\ g(x) \in \mathsf{D}(f)\}$.
2. Pro každé $x \in \mathsf{D}(h)$ je $h(x) = f(u)$ čili $h(x) = f(g(x))$.

Složená funkce h přiřazuje každému prvku $x \in \mathsf{D}(h) \subset \mathsf{D}(g)$ právě jeden prvek $y \in \mathsf{H}(h) \subset \mathsf{H}(f)$; značí se $h = f \circ g$. Funkce g se nazývá **vnitřní složka** a funkce f **vnější složka** složené funkce $h = f \circ g$. Stručně se někdy mluví o **vnitřní funkci** g a **vnější funkci** f.

Poznámka. Často se setkáváme s takovými případy složené funkce h, pro jejíž složky g, f platí $\mathsf{H}(g) \subset \mathsf{D}(f)$, popř. speciálně $\mathsf{H}(g) = \mathsf{D}(f)$. Pak je $\mathsf{D}(h) = \mathsf{D}(g)$.



Obr. 4.3

Operace, jíž se vytváří složená funkce $h = f \circ g$ z daných složek g, f (v uvedeném pořadí), se nazývá **skládání funkcí** g, f. Schematicky se znázorňuje podle obr. 4.3.

Příklad skládání funkcí (vytvoření složené funkce)
Složením funkcí g: $u = 1 - x$, $x \in \mathsf{D}(g) = \mathsf{R}$ a f: $y = \sqrt{u}$, $u \in \mathsf{D}(f) = \langle 0, +\infty)$ (v uvedeném pořadí vznikne složená funkce $h = f \circ g$, pro kterou platí:

1. Definičním oborem funkce h je množina všech takových čísel $x \in \mathsf{D}(g) = \mathsf{R}$, pro než platí $g(x) \in \mathsf{D}(f) = \langle 0, +\infty)$, tj. pro která je $g(x) \geqq 0$ čili $1 - x \geqq 0 \Leftrightarrow x \leqq 1$, takže $D(h) = (-\infty, 1\rangle$.
2. Pro každé $x \in \mathsf{D}(h)$ je $h(x) = \sqrt{1 - x}$.

Výsledkem je tedy složená funkce h: $y = \sqrt{1 - x}$, $x \in \mathsf{D}(h) = (-\infty, 1\rangle$.

Poznámka. Další příklady složených funkcí viz v kap. 4.4.

Užití pojmu funkce

Funkce je jedním z nejdůležitějších matematických pojmů. Užívá se však nejen v matematice, ale také ve fyzice a v technických i dalších oborech. Fyzikální zákony se vyjadřují ve formě **funkční závislosti** jedné veličiny (zvané **závisle proměnná**) na druhé veličině (zvané **nezávisle proměnná**). Stručně se též říká, že první veličina je funkcí druhé veličiny. *Např.* dráha s je funkcí času t, proud I je funkcí napětí U apod.

V aplikacích (v geometrii, ve fyzice, technice, aj.) se setkáváme se všemi třemi uvedenými způsoby zadání funkcí. Analytické zadání je dáno geometrickými vzorci, např. $S = \pi r^2$ (pro obsah kruhu), vzorci vyjadřujícími fyzikální zákony, např. $F = ma$ (pro 2. pohybový zákon Newtonův) apod. Grafické zadání a tabelární zadání funkce je v praxi často výsledkem měření, statistického zjišťování aj.

Poznámky k užití pojmu funkce ve fyzice. Fyzika rozlišuje pojmy *fyzikální veličina* a její *číselná hodnota*. Hodnoty fyzikální veličiny jsou uspořádané dvojice: číselná hodnota fyzikální veličiny a zvolená jednotka fyzikální veličiny. **Funkční závislostí ve fyzice** se rozumí jednoznačný vztah mezi fyzikálními veličinami, tj. zobrazení množiny hodnot jedné fyzikální veličiny do množiny hodnot druhé fyzikální veličiny. **Funkcí v matematickém významu** je zde příslušné jednoznačné přiřazení mezi číselnými hodnotami veličin.

Při řešení úloh s fyzikálními náměty budeme pro dosazování do rovnic funkčních závislostí (vyjadřujících fyzikální zákony) užívat zápisů typu: $F = 2 \cdot 3\ \mathrm{N} = 6\ \mathrm{N}$.

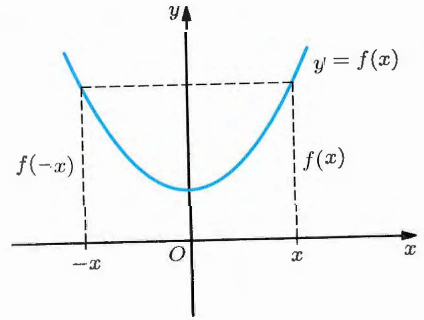
4.2 Vlastnosti a druhy funkcí

Některé funkce mají určité společné vlastnosti, podle nichž je nazýváme.

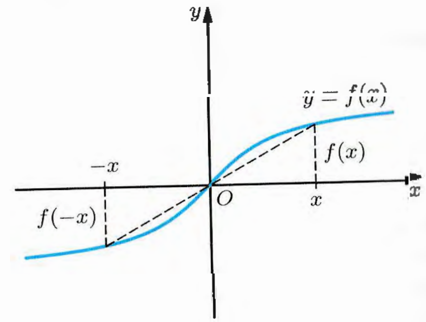
Sudé funkce, liché funkce

Nechť funkce f s definičním oborem $\mathsf{D}(f)$ má tuto vlastnost: Je-li $x \in \mathsf{D}(f)$, pak také $-x \in \mathsf{D}(f)$. Rozlišujeme dva významné typy takových funkcí: 1. Funkce f se nazývá **sudá funkce**, právě když pro každé $x \in \mathsf{D}(f)$ je $f(-x) = f(x)$. 2. Funkce f se nazývá **lichá funkce**, právě když pro každé $x \in \mathsf{D}(f)$ je $f(-x) = -f(x)$.

Z této definice plyne: *Graf sudé funkce je souměrný podle osy y* (obr. 4.4). *Graf liché funkce je souměrný podle počátku* (obr. 4.5).



Obr. 4.4



Obr. 4.5

Příklady
Funkce f: $y = x^2$ s definičním oborem $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$ je funkce sudá, neboť pro každé $x \in \mathsf{R}$ je také $-x \in \mathsf{R}$ a $(-x)^2 = x^2$. Naproti tomu funkce f: $y = \operatorname{sgn} x$ s definičním oborem $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$, jejíž graf je na obr. 4.2, je zřejmě lichá funkce (protože $\operatorname{sgn} x = \frac{x}{|x|}$, $\operatorname{sgn}(-x) = \frac{-x}{|-x|} = -\operatorname{sgn} x$).

Poznámka. Mnohé funkce nejsou ani sudé, ani liché, např. funkce s definičními obory R dané funkčními předpisy:

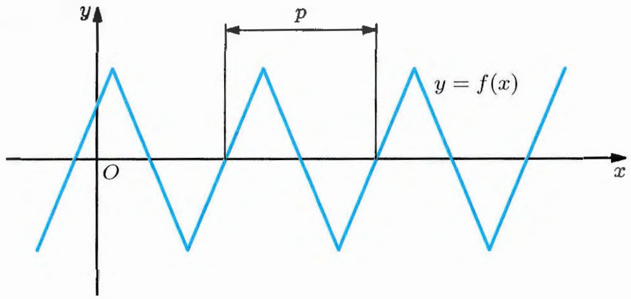
$$y = x - 1, \quad y = x^2 + x^3, \quad y = (x - 1)^2 .$$

Periodické funkce

Funkce f se nazývá **periodická funkce**, právě když existuje takové číslo $p \neq 0$, že pro každé $x \in \mathsf{D}(f)$ je též $x \pm p \in \mathsf{D}(f)$ a platí $f(x \pm p) = f(x)$. Číslo p se nazývá **perioda funkce** f. (Ve fyzikálních aplikacích, kde nezávisle proměnnou je čas t, se perioda značí T.)

Metodou matematické indukce snadno dokážeme, že pro periodickou funkci f s periodou p platí: $f(x + kp) = f(x)$ pro každé $x \in \mathsf{D}(f)$ a každé celé k. Má-li tedy periodická funkce f periodu p, pak také každé číslo kp ($k \in \mathsf{Z}$, $k \neq 0$) je rovněž periodou funkce f. Pokud v množině čísel p, která jsou periodami periodické funkce f, existuje nejmenší kladné číslo, pak tuto periodu $p > 0$ nazýváme **základní (primitivní) periodou funkce** f.

Graf periodické funkce se pravidelně (periodicky) opakuje po intervalech, jejichž délka je rovna základní periodě p (obr. 4.6). Při vyšetřování periodické funkce se lze proto zřejmě omezit na kterýkoli takový interval hodnot jejích argumentů.



Obr. 4.6

Příklady periodických funkcí

Nejvýznamnější jsou **goniometrické funkce** (kap. 4.5). Jiným příkladem periodické funkce je f: $y = x - [x]$, $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$ (načrtněte její graf), její periodou je každé číslo $p \in \mathsf{N}$ a základní periodou je tedy $p = 1$. Také funkce konstantní je periodická, přičemž periodou je každé číslo $p \in \mathsf{R}$.

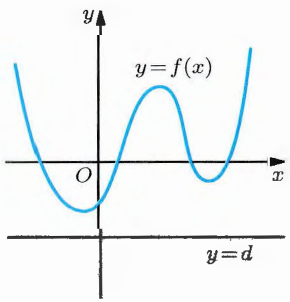
Funkce omezené (zdola, shora)

Nechť f je daná funkce a M podmnožina jejího definičního oboru $\mathsf{D}(f)$.

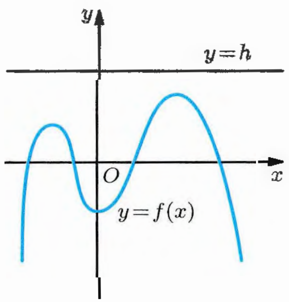
Funkce f se nazývá **funkce zdola omezená na množině** M, právě když existuje takové číslo $d \in \mathsf{R}$, že pro všechna $x \in \mathsf{M}$ je $f(x) \geqq d$ (obr. 4.7).

Funkce f se nazývá **funkce shora omezená na množině** M, právě když existuje takové číslo $h \in \mathsf{R}$, že pro všechna $x \in \mathsf{M}$ je $f(x) \leqq h$ (obr. 4.8).

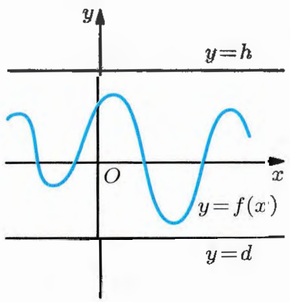
Funkce f se nazývá **funkce omezená na množině** M, právě když je zdola omezená a shora omezená na M (obr. 4.9).



Obr. 4.7



Obr. 4.8



Obr. 4.9

Pokud je funkce f omezená na celém definičním oboru $\mathsf{D}(f)$, budeme říkat stručněji, že je **funkce omezená**. Analogicky je třeba chápat pojmy **funkce zdola omezená**, **funkce shora omezená**.

Příklad omezené funkce

Funkce sgn x je omezená (zdola i shora) na R, neboť pro každé $x \in \mathsf{R}$ platí $-1 \leqq \operatorname{sgn} x \leqq 1$ (obr. 4.2). Naproti tomu funkce $[x]$ není omezená ani zdola, ani shora na R (obr. 4.1).

Pro zdola, popř. shora omezené funkce f na množině $\mathsf{M} \subset \mathsf{D}(f)$ se zavádějí pojmy **extrémy funkce** f **na množině** $\mathsf{M} \subset \mathsf{D}(f)$:

Nechť f je daná funkce, M podmnožina jejího definičního oboru $\mathsf{D}(f)$, $a \in \mathsf{M}$, $b \in \mathsf{M}$.

Říkáme, že funkce f má v bodě a **minimum (nejmenší hodnotu) na množině** M, právě když pro všechna $x \in \mathsf{M}$ je $f(x) \geqq f(a)$.

Píšeme pak

$$f(a) = \min_{x \in \mathsf{M}} f(x).$$

Speciálně říkáme, že funkce f má v bodě a **ostré minimum na množině** M, právě když pro všechna $x \in \mathsf{M}$, $x \neq a$, je $f(x) > f(a)$.

Říkáme, že funkce f má v bodě b **maximum (největší hodnotu) na množině** M, právě když pro všechna $x \in \mathsf{M}$ je $f(x) \leqq f(b)$.

Píšeme pak

$$f(b) = \max_{x \in \mathsf{M}} f(x).$$

Speciálně říkáme, že f má v bodě b **ostré maximum na množině** M, právě když pro všechna $x \in \mathsf{M}$, $x \neq b$, je $f(x) < f(b)$.

Jestliže v uvedených definicích uvažujeme speciálně $\mathsf{M} = \mathsf{D}(f)$, pak mluvíme stručně o **globálních** či **absolutních extrémech (minimech, maximech) funkce** f.

Píšeme pak

$$f(a) = \min_{x \in \mathsf{D}(f)} f(x), \qquad f(b) = \max_{x \in \mathsf{D}(f)} f(x).$$

Příklady globálních extrémů funkcí

a) Funkce $y = \operatorname{sgn} x$ (kap. 4.1) má globální minimum i globální maximum na $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$: $\min\limits_{x \in \mathsf{R}} \operatorname{sgn} x = -1$, $\max\limits_{x \in \mathsf{R}} x = 1$, neboť $\mathsf{H}(f) = \{-1; 0; 1\}$ (obr. 4.2).

b) Funkce f: $y = x^2$ má globální minimum na $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$: $\min\limits_{x \in \mathsf{R}} x^2 = 0$, neboť je $x^2 \geqq 0$ pro každé $x \in \mathsf{R}$; globální maximum na $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$ však nemá.

Poznámka. Funkce nemusí mít na $\mathsf{D}(f)$ žádný globální extrém, např. funkce f: $y = x$ na $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$.

Monotónní funkce

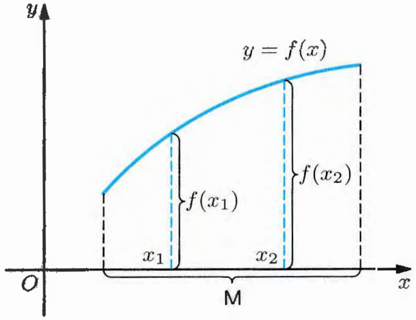
Nechť f je funkce, M podmnožina jejího definičního oboru $D(f)$.

Funkce f se nazývá **funkce rostoucí na množině** M, právě když pro každé dva prvky x_1, x_2 z M platí: Je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) < f(x_2)$ (obr. 4.10).

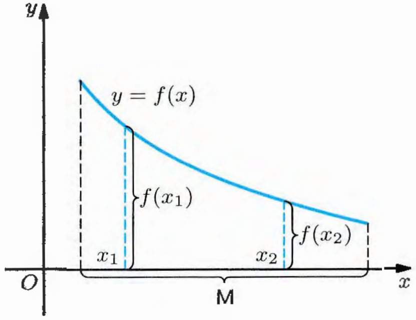
Funkce f se nazývá **funkce klesající na množině** M, právě když pro každé dva prvky x_1, x_2 z M platí: Je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) > f(x_2)$ (obr. 4.11).

Funkce f se nazývá **funkce neklesající na množině** M, právě když pro každé dva prvky x_1, x_2 z M platí: Je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) \leqq f(x_2)$ (obr. 4.12).

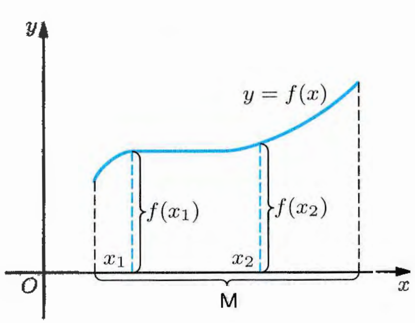
Funkce f se nazývá **funkce nerostoucí na množině** M, právě když pro každé dva prvky x_1, x_2 z M platí: Je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) \geqq f(x_2)$ (obr. 4.13).



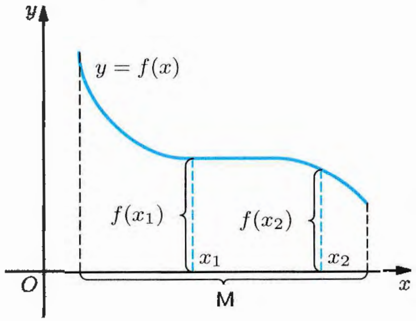
Obr. 4.10



Obr. 4.11



Obr. 4.12



Obr. 4.13

Rostoucí a klesající funkce na množině M se souhrnně nazývají **ryze monotónní funkce na množině** M; neklesající a nerostoucí funkce na množině M se souhrnně nazývají **monotónní funkce na množině** M. Z definice je zřejmé, že každá rostoucí funkce na M je zároveň neklesající na M a každá klesající funkce na M je zároveň nerostoucí na M. Množina všech ryze monotónních funkcí tvoří tedy podmnožinu množiny všech monotónních funkcí na téže množině M.

Speciálně může být M $= D(f)$. Pokud je funkce f rostoucí na celém definičním oboru $D(f)$, budeme stručněji říkat, že je **rostoucí funkce**. V analogickém pojetí budeme stručně říkat, že funkce f je **klesající funkce**, **neklesající funkce**, **nerostoucí funkce**, **ryze monotónní funkce**, **monotónní funkce**, jestliže tuto vlastnost má na celém $D(f)$.

Příklady monotónních funkcí

a) Funkce f: $y = x^2$, $D(f) = \mathrm{R}$, je rostoucí na množině $\mathrm{M}_1 = \langle 0, +\infty)$ a klesající na množině $\mathrm{M}_2 = (-\infty, 0\rangle$, neboť pro každé $x_1, x_2 \in \mathrm{M}_1$ platí: je-li $0 \leqq x_1 < x_2$, je $x_1^2 < x_2^2$ čili $f(x_1) < f(x_2)$. A pro každé $x_1, x_2 \in \mathrm{M}_2$ platí: je-li $x_1 < x_2 \leqq 0$, je $x_1^2 > x_2^2$ čili $f(x_1) > f(x_2)$.

b) Funkce f: $y = [x]$, $x \in \mathrm{R}$ (obr. 4.1) je neklesající (na $D(f) = \mathrm{R}$), protože pro každé $x_1, x_2 \in D(f)$ platí: je-li $x_1 < x_2$ je $[x_1] \leqq [x_2]$ čili $f(x_1) \leqq f(x_2)$.

Prosté funkce a funkce k nim inverzní

Funkce f s definičním oborem $D(f)$ se nazývá **prostá funkce**, právě když pro každou dvojici $x_1, x_2 \in D(f)$, $x_1 \neq x_2$, platí $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Prakticky velmi důležitou postačující podmínku, aby funkce byla prostá, vyjadřuje *věta*:

> Je-li funkce ryze monotónní, tj. rostoucí, anebo klesající, pak je prostá.

Obrácená věta však neplatí, tj. ryzí monotónnost funkce není obecně nutnou podmínkou pro to, aby funkce byla prostá. Důkaz provedeme snadno konstrukcí *protipříkladu*: Např. funkce $f = \{[1; 3], [2; 4], [3; 5], [4; 2]\}$ je prostá, avšak není ani rostoucí, ani klesající.

Prostá funkce je prosté zobrazení definičního oboru $D(f)$ na množinu všech funkčních hodnot $H(f)$ funkce f (kap. 1.2). K tomuto zobrazení existuje proto zobrazení inverzní, které je opět prosté a zobrazuje množinu $H(f)$ na množinu $D(f)$. Je to funkce, které říkáme **funkce inverzní** k funkci f a značíme ji f^{-1}.

Platí pro ni

$$f^{-1}\colon x = f^{-1}(y),\quad D(f^{-1}) = H(f) \text{ a } H(f^{-1}) = D(f),$$

přičemž

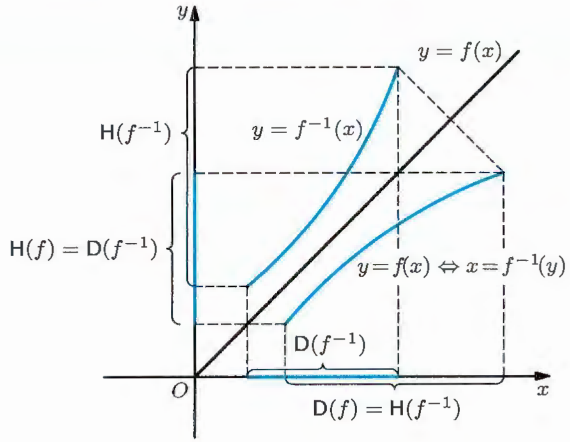
$$x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x) \text{ pro každé } x \in D(f) = H(f^{-1}),\quad y \in H(f) = D(f^{-1}).$$

Z toho plyne pro **graf inverzní funkce** f^{-1} toto: Nechť je v dané kartézské soustavě souřadnic Oxy sestrojen graf prosté funkce $f\colon y = f(x)$, $x \in D(f)$ (obr. 4.14). Zvolíme-li novou kartézskou soustavu souřadnic s týmž počátkem O jako původní soustava, ale s první osou y a druhou osou x (přičemž se nemění kladné části obou os), pak v této nové soustavě Oyx je grafem funkce f^{-1} graf funkce f v původní soustavě Oxy. Pro body grafu funkce f^{-1} o souřadnicích $[y, x]$ platí, že $x = f^{-1}(y)$. Avšak obvyklé je sestrojit graf funkce f^{-1} také v původní soustavě souřadnic Oxy, což odpovídá vzájemné záměně proměnných y, x. Tím funkční předpis $x = f^{-1}(y)$ pro f^{-1} přejde na tvar $y = f^{-1}(x)$, takže pak je

$$f^{-1}\colon y = f^{-1}(x),\quad x \in D(f^{-1}) = H(f).$$

Záměna proměnných y, x představuje geometricky transformaci kartézské soustavy souřadnic Oyx v kartézskou soustavu souřadnic Oxy, kterou provedeme pomocí osové souměrnosti podle osy I. a III. kvadrantu, tj. přímky o rovnici $y = x$. Platí tedy *věta*:

Jestliže je v kartézské soustavě souřadnic Oxy sestrojen graf libovolné prosté funkce f, pak graf inverzní funkce f^{-1} v téže soustavě souřadnic je souměrně sdružený s grafem funkce f podle přímky o rovnici $y = x$ (obr. 4.14).



Obr. 4.14

Věty o inverzních funkcích

V.1. K funkci f existuje, a to jediná, inverzní funkce f^{-1}, právě když je funkce f prostá.

V.2. Je-li funkce f rostoucí, pak k ní existuje inverzní funkce f^{-1}, která je také rostoucí.

Je-li funkce f klesající, pak k ní existuje inverzní funkce f^{-1}, která je též klesající.

Příklad určení inverzní funkce f^{-1} k dané funkci f

Dokažte, že funkce f: $2x + 1$, $x \in \mathsf{R}$, je rostoucí (a tedy prostá). Určete funkci k ní inverzní f^{-1} a sestrojte grafy funkcí f, f^{-1}.

Řešení

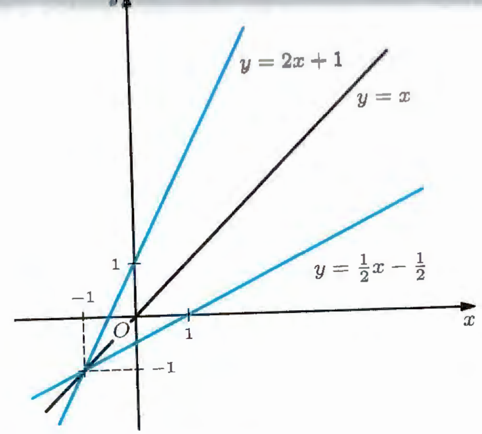
Funkce f je rostoucí, neboť pro každé $x_1, x_2 \in \mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$ platí: je-li $x_1 < x_2$, pak je $2x_1 + 1 < 2x_2 + 1$ čili $f(x_1) < f(x_2)$. Podle věty 2 existuje proto funkce k ní inverzní f^{-1}, která je opět rostoucí. Její funkční předpis určíme tak, že z rovnice (funkčního předpisu funkce f) $y = 2x + 1$ vyjádříme x:

$$x = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}.$$

A po záměně proměnných dospíváme k výsledku:

$$f^{-1}\colon y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}, \quad \mathsf{D}(f^{-1}) = \mathsf{H}(f) = \mathsf{R}.$$

Grafy obou funkcí f, f^{-1} jsou přímky (funkce f, f^{-1} jsou lineární), viz kap. 4.3, a jsou souměrně sdružené podle přímky o rovnici $y = x$ (obr. 4.15).



Obr. 4.15

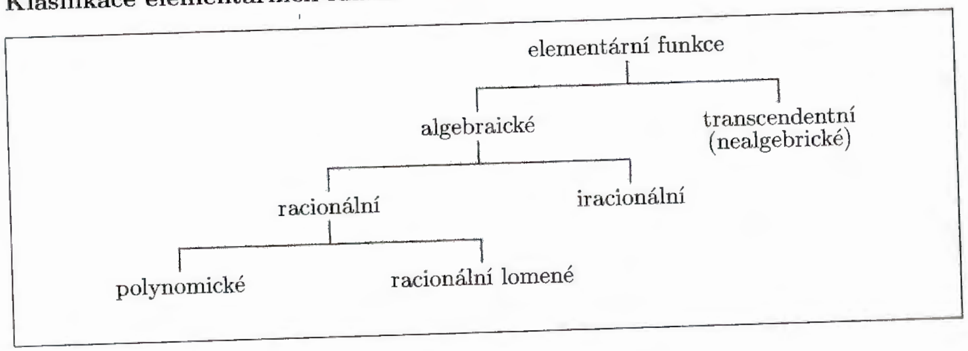
4.3 Elementární funkce

Základními elementárními funkcemi se nazývají funkce mocninné, exponenciální, logaritmické, goniometrické a cyklometrické. Na střední škole se probírají podrobně s výjimkou funkcí cyklometrických (jimiž se rozumějí funkce inverzní k funkcím goniometrickým na intervalech, kde jsou goniometrické funkce ryze monotónní).

Elementární funkcí nazýváme každou funkci, která buď patří mezi základní elementární funkce, anebo je z nich vytvořena pomocí konečného počtu základních algebraických operací (tj. jejich sčítáním, odčítáním, násobením, dělením) nebo tvořením složených funkcí. Třídění (klasifikace) elementárních funkcí ukazuje tabulka 4.1.

Tab. 4.1

Klasifikace elementárních funkcí



I. **Algebraickou funkcí** nazýváme každou funkci

$$f\colon y = f(x), \quad x \in \mathsf{D}(f) \subset \mathsf{R},$$

pro kterou výraz funkčních hodnot $f(x)$ lze vytvořit pomocí (konečného počtu) operací sčítání, odčítání, násobení, dělení, umocňování a odmocňování.

Algebraické funkce rozdělujeme na racionální funkce a iracionální funkce.

1. **Racionálními funkcemi** nazýváme souhrnně polynomické funkce (celé racionální funkce) a lomené racionální funkce.

   a) **Polynomickou funkcí** neboli **celou racionální funkcí** nazýváme každou funkci f proměnné x danou předpisem (rovnicí) tvaru

   $$f\colon y = P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \quad x \in \mathsf{R},$$

   kde $n \in \mathsf{N}$, $a_n, \ldots, a_0 \in \mathsf{R}$, tj. každou funkci, jejíž funkční hodnoty představují hodnoty polynomu (n-tého stupně) v proměnné x. Definičním oborem $\mathsf{D}(f)$ racionální celistvé (polynomické) funkce f je množina R.

   Významnými speciálními případy polynomických funkcí probíranými na střední škole jsou lineární funkce, kvadratické funkce a obecněji mocninné funkce s přirozenými mocniteli.

   b) **Lomenou racionální funkcí** nazýváme každou funkci f proměnné $x \in \mathsf{R}$ danou předpisem (rovnicí) tvaru

   $$f\colon y = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}, \quad Q_m(x) \neq 0,$$

   kde $n, m \in \mathsf{N}$, $a_n, \ldots, a_0, b_m, \ldots, b_0 \in \mathsf{R}$, přičemž polynomy $P_n(x)$, $Q_m(x)$ jsou nesoudělné (tj. nejsou vzájemně dělitelné). Její funkční hodnoty jsou tedy vyjádřeny jako podíl dvou nesoudělných polynomů: často se značí $R(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$. Definičním oborem $\mathsf{D}(f)$ racionální lomené funkce f je množina všech takových $x \in \mathsf{R}$, která nejsou kořeny rovnice

   $$Q_m(x) = 0 \text{ čili } b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0 = 0.$$

   Důležitým případem racionálních lomených funkcí jsou lineární lomené funkce, speciálně nepřímá úměrnost. Z obecných případů těchto funkcí se na střední škole probírají mocninné funkce se zápornými celými mocniteli.

2. **Iracionální funkce** je každá algebraická funkce, která není racionální.

   Příklady iracionálních funkcí

   a) $f_1\colon y = 2 + \sqrt{x}$, $x \in \langle 0, +\infty)$

   b) $f_2\colon y = \dfrac{4x^2 - 3\sqrt{x-1}}{2x+5}$, $x \in \langle 1, +\infty)$

   c) $f_3\colon y = \dfrac{2x}{\sqrt{x+2}}$, $x \in (-2, +\infty)$

II. **Transcendentní elementární funkce** jsou elementární funkce, jež nejsou algebraické. Ze základních elementárních funkcí mezi ně patří funkce exponenciální, logaritmické, goniometrické a cyklometrické (inverzní ke goniometrickým).

Poznámka. Kromě elementárních funkcí se i ve středoškolské matematice setkáváme výjimečně též s **neelementárními funkcemi**. Jsou to *např.* funkce $[x]$ (celá část x) a sgn x (signum x) definované pro každé $x \in \mathsf{R}$ (kap. 4.1).

Nyní postupně uvedeme ty elementární funkce, které se podrobně probírají na střední škole (goniometrickým funkcím věnujeme speciální články). Přitom u všech uvedených funkcí značí x argument, zatímco písmena a, b, c, d, k označují reálné konstanty a n přirozené konstanty.

Lineární funkce

Lineární funkcí nazýváme každou funkci

$$f\colon y = ax + b, \quad \mathsf{D}(f) = \mathsf{R}.$$

Speciálně: Je-li $a \neq 0$, $b = 0$, pak se lineární funkci říká **přímá úměrnost**. (Vyjadřuje: Kolikrát se zvětší $|x|$, tolikrát se zvětší $|y|$.) Je-li $a = 0$, jde o **konstantní funkci (konstantu)**.

Grafem každé lineární funkce je **přímka** (lat. slovo linea znamená čáru, přímku), která je různoběžná s osou y. Je-li $a = 0$, je to rovnoběžka s osou x; k jejímu určení stačí tedy bod $[0, b]$. Je-li $a \neq 0$, je grafem lineární funkce různoběžka s osou x (tabulka 4.2); určena je dvěma různými body $[x_1, ax_1 + b]$, $[x_2, ax_2 + b]$, kde x_1 a $x_2 \neq x_1$ volíme libovolně; výhodné je volit $x_1 = 0$ a $x_2 = -\dfrac{b}{a}$ (dostáváme tak průsečíky s osami y, popř. x).

Základní vlastnosti lineárních funkcí jsou přehledně uvedeny v tabulce 4.2.

Lineární funkce a speciálně přímá úměrnost patří mezi nejčastěji používané typy funkcí v matematice a v aplikacích (ve fyzice, v technických i dalších oborech).

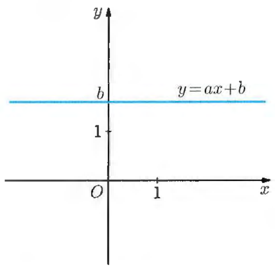
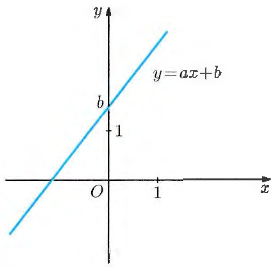
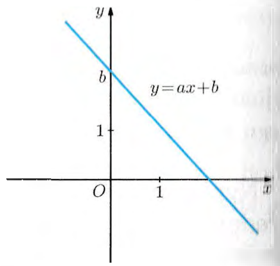
Příklady užití lineárních funkcí ve fyzice

a) $s = s_0 + vt$ (*zákon dráhy rovnoměrného pohybu*) – lineární závislost mezi dráhou s, kterou hmotný bod urazí rovnoměrným pohybem, a dobou pohybu t; s_0 je dráha v čase $t = 0$, v je konstanta (rychlost pohybu). Speciálně pro $s_0 = 0$ vyjadřuje vztah $s = vt$ přímou úměrnost mezi veličinami s a t.

b) $F = ma$ (*2. pohybový zákon Newtonův*) – přímá úměrnost mezi zrychlením a hmotného bodu o konstantní hmotnosti m a velikostí působící síly F.

c) $U = RI$ (*Ohmův zákon*) – přímá úměrnost mezi proudem I ve vodiči (lineárním rezistoru) a napětím U mezi jeho konci (svorkami) při konstantním odporu R vodiče.

Vlastnosti lineárních funkcí f: $y = ax + b$ Tab. 4.2

$a = 0$	$a > 0$	$a < 0$
		
$\mathrm{D}(f) = \mathrm{R}$, $\mathrm{H}(f) = \{b\}$ Je omezená. Je nerostoucí a neklesající, není prostá. V každém $x \in \mathrm{R}$ má maximum a minimum.	$\mathrm{D}(f) = \mathrm{R}$, $\mathrm{H}(f) = \mathrm{R}$ Není ani shora, ani zdola omezená. Je rostoucí, a tedy prostá. Nemá maximum ani minimum.	$\mathrm{D}(f) = \mathrm{R}$, $\mathrm{H}(f) = \mathrm{R}$ Není ani shora, ani zdola omezená. Je klesající, a tedy prostá. Nemá maximum ani minimum.

Kvadratická funkce

Kvadratickou funkcí nazýváme každou funkci

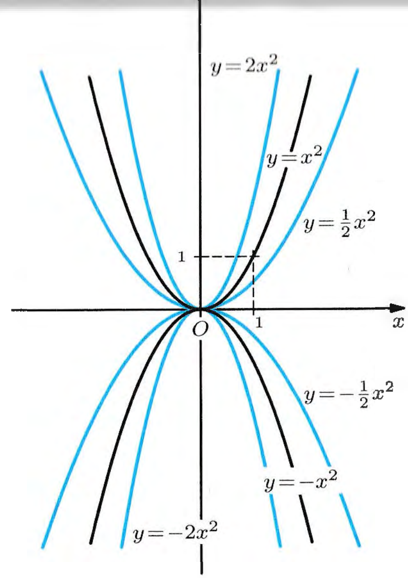
$$f\colon y = ax^2 + bx + c,\ \ a \neq 0,\ \ \mathrm{D}(f) = \mathrm{R}.$$

Speciálně Položíme-li $a = 1$, $b = c = 0$, dostáváme nejjednodušší kvadratickou funkci $f\colon y = x^2$, která se někdy nazývá **základní kvadratická funkce**.

Grafem každé kvadratické funkce je křivka zvaná **parabola**, která je souměrná podle osy o rovnoběžné s osou y. Průsečíku osy o s parabolou se říká **vrchol paraboly** a přímce $v \perp o$, jež prochází vrcholem paraboly, říkáme **vrcholová tečna paraboly.**

a) Graf funkce $f_1\colon y = ax^2$ je parabola s vrcholem v počátku O. Je-li $a > 0$, leží všechny ostatní body grafu nad osou x (tj. mají kladné souřadnice y), je-li $a < 0$, leží pod osou x (tj. mají záporné souřadnice y). V obr. 4.16 jsou znázorněny grafy kvadratických funkcí f_1 pro $a = \pm 1, \pm 2, \pm\frac{1}{2}$. Je-li $[x_0, y_0]$ libovolný bod grafu základní kvadratické funkce ($a = 1$), pak bod grafu funkce $f_1\colon y = 2x^2$ o souřadnici x_0 má druhou souřadnici $2y_0$ a bod grafu funkce $f_1\colon y = \frac{1}{2}x^2$ o souřadnici x_0 má druhou souřadnici $\frac{1}{2}y_0$ atd. Grafy funkcí $f_1\colon y = ax^2$ pro dvě navzájem opačná a jsou souměrně sdružené podle osy x.

b) Graf funkce $f_2\colon y = ax^2 + c$ je parabola, která vznikne z paraboly jež je grafem funkce $f_1\colon y = ax^2$, posunutím převádějícím vrchol $[0, 0]$ do vrcholu $[0, c]$ grafu funkce f_2.



Obr. 4.16

c) Graf funkce $f_3\colon y = a(x - x_0)^2$ je parabola, která vznikne z grafu funkce $f_1\colon y = ax^2$ posunutím převádějícím vrchol $[0, 0]$ této paraboly do vrcholu $[x_0, 0]$ grafu funkce f_3. (Jestliže totiž ve funkčním předpisu funkce f_3 položíme $x - x_0 = u$, dostáváme $y = au^2$, odtud plyne, že grafem funkce f_3 je táž parabola, jež je grafem funkce f_1, avšak s vrcholem v bodě o souřadnicích $u = 0$ neboli $x = x_0$ a $y = 0$, tj. v bodě $[x_0, 0]$.)

d) Graf funkce $f\colon y = ax^2 + bx + c$ je parabola, kterou lze získat z grafu funkce f_1. Nejprve kvadratický trojčlen $ax^2 + bx + c$ doplníme na „úplný čtverec“ (kap. 3.1):

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)$$

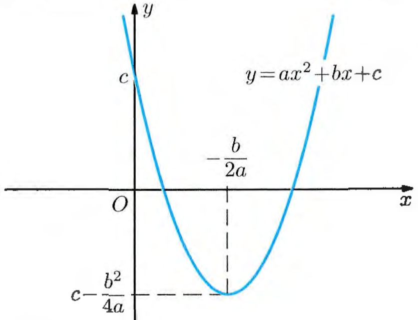
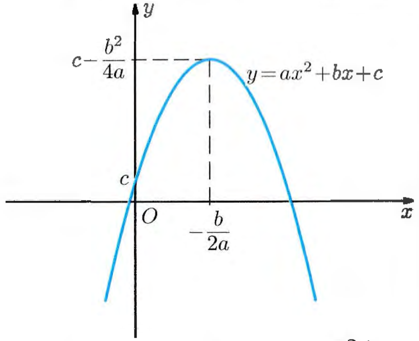
užitím této úpravy lze přepsat funkční předpis funkce f ve tvaru

$$y = a(x - x_0)^2 + y_0,\ \ \text{kde } x_0 = -\frac{b}{2a},\ \ y_0 = c - \frac{b^2}{4a}.$$

Z toho a podle odst. b), c) plyne, že graf kvadratické funkce f dostaneme, jestliže graf funkce $f_1\colon y = ax^2$ posuneme nejprve tak, že počátek $[0, 0]$, tj. vrchol grafu funkce f_1 přejde do vrcholu $[x_0, 0]$ grafu funkce $f_3\colon y = a(x - x_0)^2$, a pak tento graf posuneme tak, že jeho vrchol přejde do vrcholu $[x_0, y_0] = \left[-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right]$ grafu funkce f (tabulka 4.3). Podle hodnot a, b, c může ležet vrchol v obou případech buď pod osou x, nebo nad osou x, anebo na ose x. Průsečík grafu funkce f s osou y je bod $[0, c]$.

Základní vlastnosti kvadratických funkcí přehledně shrnuje tabulka 4.3.

Vlastnosti kvadratických funkcí $f\colon y = ax^2 + bx + c$ Tab. 4.3

$a > 0$	$a < 0$
	
$\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f) = \left\langle c - \frac{b^2}{4a}, +\infty \right)$ Je zdola omezená, není shora omezená. Je rostoucí v $\left\langle -\frac{b}{2a}, +\infty \right)$. Je klesající v $\left(-\infty, -\frac{b}{2a} \right\rangle$. V bodě $x_0 = -\frac{b}{2a}$ má ostré minimum $y_b = c - \frac{b^2}{4a}$.	$\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f) = \left(-\infty, c - \frac{b^2}{4a} \right\rangle$ Je shora omezená, není zdola omezená. Je rostoucí v $\left(-\infty, -\frac{b}{2a} \right\rangle$. Je klesající v $\left\langle -\frac{b}{2a}, +\infty \right)$. V bodě $x_0 = -\frac{b}{2a}$ má ostré maximum $y_0 = c - \frac{b^2}{4a}$.

Mocninná funkce

Mocninná funkce s přirozeným mocnitelem je funkce

$$f\colon y = x^n, \quad n \in \mathsf{N}, \quad \mathsf{D}(f) = \mathsf{R}.$$

Speciálně: Je-li $n = 1$, je to lineární funkce $f\colon y = x$, pro $n = 2$ základní kvadratická funkce $f\colon y = x^2$, pro $n = 3$ základní kubická funkce $f\colon y = x^3$ atd.

Grafem této mocninné funkce je pro $n = 1$ **přímka** (osa I. a III. kvadrantu) *a pro $n > 1$* **parabola n-tého stupně**. (Pro $n = 1, 3, 5, 2, 4, 6$ jsou grafy sestrojeny v tabulce 4.4.)

Základní vlastnosti mocninných funkcí s přirozeným mocnitelem uvádíme v tabulce 4.4.

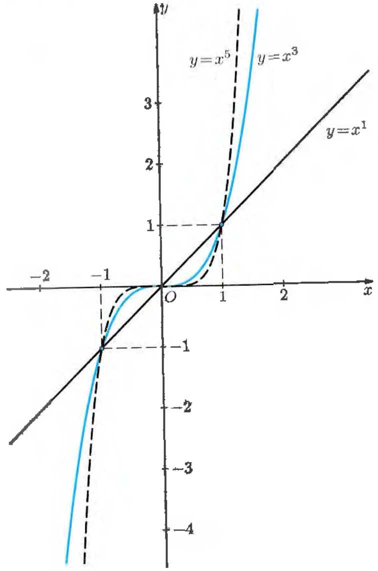
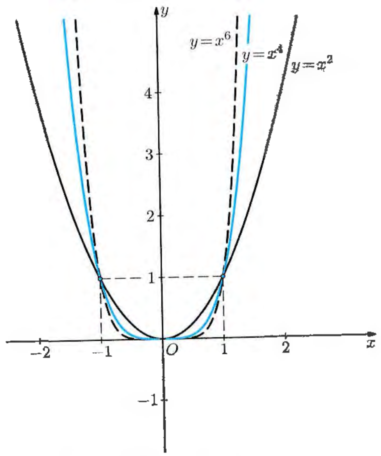
Mocninná funkce se záporným celým mocnitelem je funkce

$$f\colon y = x^{-n}, \quad n \in \mathsf{N}, \quad \mathsf{D}(f) = \mathsf{R} \setminus \{0\}.$$

Grafem této mocninné funkce je **hyperbola stupně** $n + 1$ (tabulka 4.5).

Základní vlastnosti mocninných funkcí s celým záporným mocnitelem jsou uvedeny v tabulce 4.5.

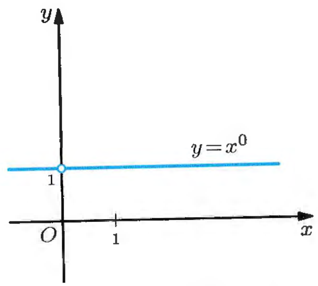
Vlastnosti mocninných funkcí $f\colon y = x^n$, $n \in \mathsf{N}$ Tab. 4.4

n liché	n sudé
	
$\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f) = \mathsf{R}$ Je lichá. Není ani shora, ani zdola omezená. Je rostoucí Nemá minimum ani maximum.	$\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$, $\mathsf{H}(f) = \langle 0, +\infty)$ Je sudá. Je zdola omezená, není shora omezená. Je rostoucí v $\langle 0, +\infty)$, je klesající v $(-\infty, 0\rangle$. Má ostré minimum v bodě 0, nemá maximum.

Poznámka. Lze definovat též **mocninnou funkci s nulovým mocnitelem**:

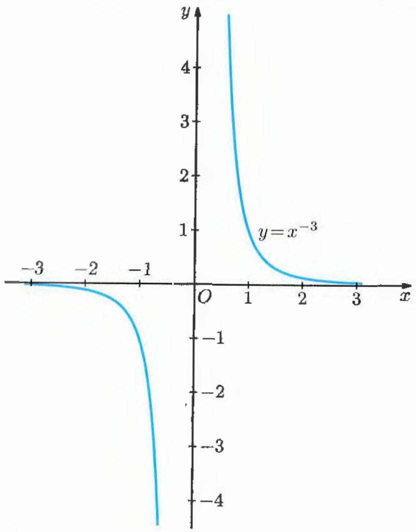
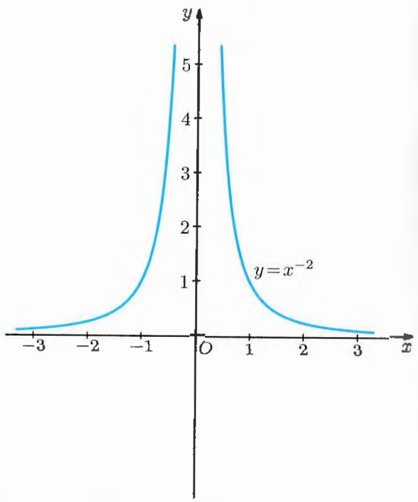
$$f\colon y = x^0, \quad \mathsf{D}(f) = \mathsf{R} \setminus \{0\}, \text{ jejíž graf je na obr. 4.17.}$$

Pojem mocninné funkce je možné rozšířit i pro racionální a obecný reálný mocnitel, což však přesahuje rámec středoškolské matematiky.



Obr. 4.17

Vlastnosti mocninných funkcí $f\colon y = x^{-n}$, $n \in \mathsf{N}$ Tab. 4.5

n liché	n sudé
	
$\mathsf{D}(f) = \mathsf{R} \setminus \{0\}$, $\mathsf{H}(f) = \mathsf{R} \setminus \{0\}$ Je lichá Není ani zdola, ani shora omezená Je klesající v $(-\infty, 0)$ a $(0, +\infty)$. Nemá maximum ani minimum.	$\mathsf{D}(f) = \mathsf{R} \setminus \{0\}$, $\mathsf{H}(f) = (0, +\infty)$ Je sudá Je zdola omezená, není shora omezená. Je rostoucí v $(-\infty, 0)$, je klesající v $(0, +\infty)$. Nemá maximum ani minimum.

Nepřímá úměrnost

Nepřímá úměrnost je každá funkce

$$f\colon y = \frac{k}{x}, \quad k \neq 0, \quad \mathsf{D}(f) = \mathsf{R} \setminus \{0\}.$$

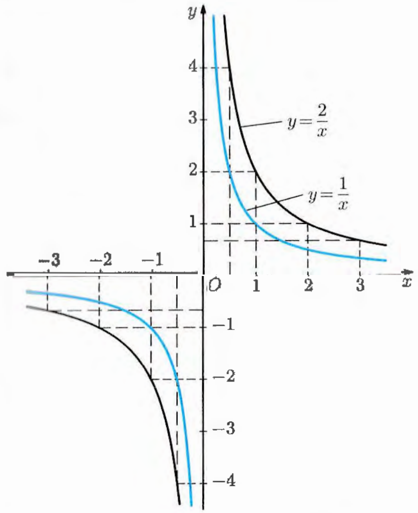
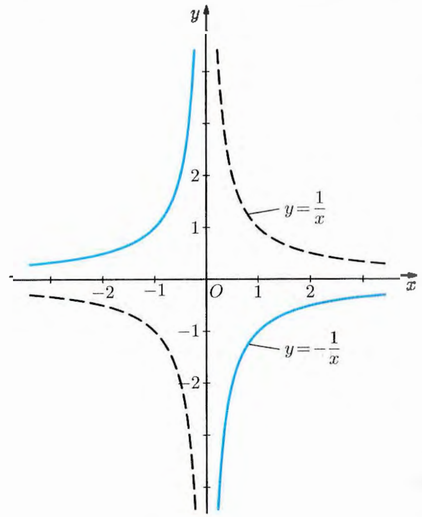
(Vyjadřuje: Kolikrát se zvětší $|x|$, tolikrát se zmenší $|y|$.) Speciálním případem (pro $k = 1$) je funkce $f\colon y = \frac{1}{x} = x^{-1}$, tj. mocninná funkce se záporným celým mocnitelem -1.

Graf nepřímé úměrnosti je tzv. **rovnoosá hyperbola**, jež je souměrná podle os kvadrantů soustavy souřadnic Oxy a též podle počátku O (tabulka 4.6). Osy souměrnosti se nazývají **osy hyperboly** a středu souměrnosti O se říká **střed hyperboly**. Hyperbola se neomezeně blíží k souřadnicovým osám x, y, které se proto nazývají **asymptoty hyperboly**.

Základní vlastnosti nepřímých úměrností jsou uvedeny v tabulce 4.6.

S užitím nepřímé úměrnosti se setkáváme často v matematice i v aplikacích.

Vlastnosti nepřímé úměrnosti $f\colon y = \frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$ Tab. 4.6

$k > 0$	$k < 0$
	
$\mathsf{D}(f) = \mathsf{R} \setminus \{0\}$, $\mathsf{H}(f) = \mathsf{R} \setminus \{0\}$ Je lichá Není ani zdola, ani shora omezená Je klesající v $(-\infty, 0)$ a $(0, +\infty)$. Nemá maximum ani minimum.	$\mathsf{D}(f) = \mathsf{R} \setminus \{0\}$, $\mathsf{H}(f) = \mathsf{R} \setminus \{0\}$ Je lichá Není ani zdola, ani shora omezená Je rostoucí v $(-\infty, 0)$ a v $(0, +\infty)$. Nemá maximum ani minimum.

Příklad užití nepřímé úměrnosti ve fyzice

$p = \frac{c}{V}$, kde c je konstanta (*zákon Boylův-Mariottův* pro izotermický děj s ideálním plynem) – tlak p, ideálního plynu je nepřímo úměrný jeho objemu V při konstantní teplotě T.

Lineární lomená funkce

Lineární lomená funkce je funkce

$$f\colon y = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad \text{kde } c \neq 0, \quad ad - bc \neq 0, \quad \mathsf{D}(f) = \mathsf{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}.$$

Objasníme, proč se kladou uvedené podmínky:

Jestliže bychom připustili $c = 0$ a ovšem $d \neq 0$, pak daný funkční předpis by nabyl tvaru

$$y = \frac{ax + b}{cx + d} = \frac{ax + b}{d} = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d},$$

což však představuje pro $a \neq 0$ lineární funkci (nekonstantní) a pro $a = 0$ konstantní funkci.

Je-li $c \neq 0$, pak daný funkční předpis lze upravit takto:

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{\frac{a}{c}(cx+d) + b - \frac{ad}{c}}{cx+d} = \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cx+d} = \frac{a}{c} + \frac{1}{c^2} \cdot \frac{bc-ad}{x+\frac{d}{c}}.$$

Pokud by bylo $ad = bc$, pak by funkční předpis nabyl tvaru $y = \dfrac{a}{c}$, takže bychom dostali konstantní funkci. Jestliže je splněna podmínka $ad \neq bc$, máme lineární lomenou funkci s funkčním předpisem ve tvaru

$$y = \frac{k}{x - x_0} + y_0, \text{ kde } x_0 = -\frac{d}{c},\ y_0 = \frac{a}{c},\ k = \frac{1}{c^2}(bc - ad).$$

Speciálním případem (pro $x_0 = 0$, $y_0 = 0$) je nepřímá úměrnost $f_1\colon y = \dfrac{k}{x}$.

Graf funkce $f_2\colon y = \dfrac{k}{x - x_0}$ vznikne z grafu funkce f_1 (tj. rovnoosé hyperboly se středem v počátku $[0, 0]$) posunutím převádějícím bod $[0, 0]$ v bod $[x_0, 0]$. (Jestliže totiž ve funkčním předpisu funkce f položíme $x - x_0 = u$, dostáváme $y = \dfrac{k}{u}$, takže grafem funkce f_2 je táž rovnoosá hyperbola, jež je grafem funkce f_1, avšak se středem v bodě o souřadnicích $u = 0$ čili $x = x_0$ a $y = 0$, tj. v bodě $[x_0, 0]$.)

Graf funkce $f\colon y = \dfrac{k}{x - x_0} + y_0$ dostaneme, jestliže graf funkce $f_1\colon y = \dfrac{k}{x}$ posuneme nejprve tak, aby bod $[0, 0]$ přešel do bodu $[x_0, 0]$ a takto sestrojený graf funkce f_2 posuneme tak, aby bod $[x_0, 0]$ přešel do bodu $[x_0, y_0]$. *Grafem lineární lomené funkce f je tedy* **rovnoosá hyperbola**, která má střed v bodě $[x_0, y_0] = \left[-\dfrac{d}{c}, \dfrac{a}{c}\right]$ a její asymptoty procházejí tímto bodem tak, že jedna o rovnici $y = \dfrac{a}{c}$ je rovnoběžná s osou x a druhá o rovnici $x = -\dfrac{d}{c}$ je rovnoběžná s osou y (obr. 4.18).

Exponenciální funkce

Exponenciální funkce o základu (se základem) a je funkce

$$f\colon y = a^x,\ a > 0,\ a \neq 1,\ \mathrm{D}(f) = \mathrm{R}.$$

Objasníme, proč se kladou uvedené podmínky:

Mocnina a^x je definována pro každé $x \in \mathrm{R}$ jen pro $a > 0$ (kap. 2.6). Pro $a = 1$ je však $a^x = 1$ pro každé $x \in \mathrm{R}$, takže jde o konstantní funkci, kterou však mezi exponenciální funkce nezahrnujeme.

Exponenciální funkce o základu 10 se nazývá **dekadická exponenciální funkce**. Zvláště důležitá je exponenciální funkce, jejíž základ je tzv. **Eulerovo číslo** e definované v matematické analýze (kap. 8); je to iracionální číslo

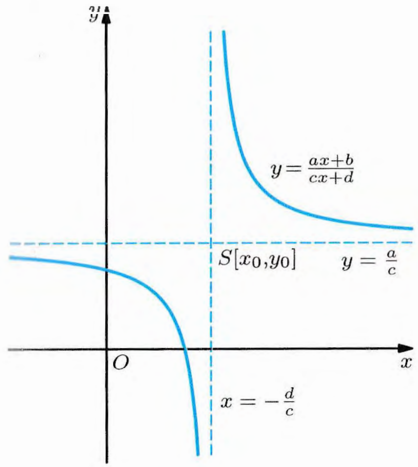
$$\mathrm{e} = 2{,}718\,281\,828\,459\ldots \doteq 2{,}718.$$

Exponenciální funkce $f\colon y = \mathrm{e}^x$ se nazývá **přirozená exponenciální funkce**; značí se též exp, takže $\exp x = \mathrm{e}^x$.

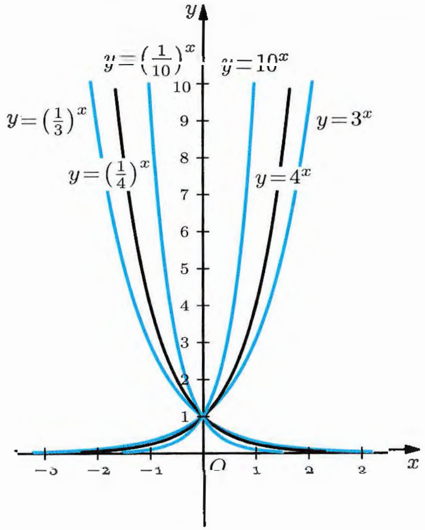
Graf exponenciální funkce je tzv. **exponenciální křivka** (krátce **exponenciála**). Pro každou exponenciální funkci prochází její graf bodem $[0; 1]$, neboť $a^0 = 1$ pro všechna $a \neq 0$. Exponenciální křivky $y = a^x$, $y = \left(\dfrac{1}{a}\right)^x$ pro totéž a jsou souměrně sdružené podle osy y (obr. 4.19).

Základní vlastnosti exponenciálních funkcí uvádíme v tabulce 4.7.

Přirozená exponenciální funkce má široké uplatnění v matematice i v aplikacích.

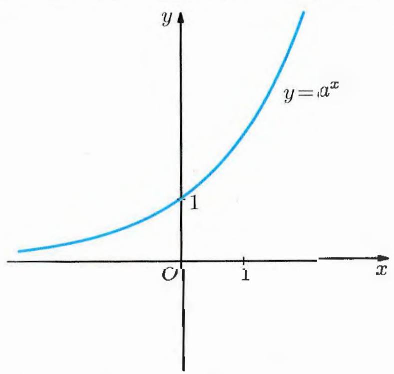
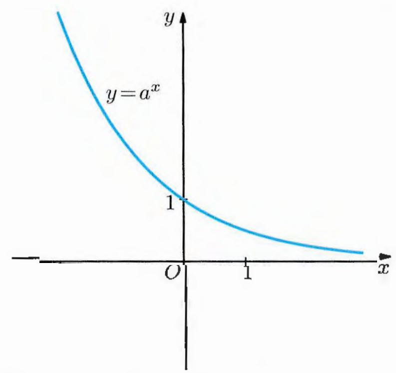


Obr. 4.18



Obr. 4.19

Vlastnosti exponenciálních funkcí $f\colon y = a^x$ Tab. 4.7

$a > 1$	$0 < a < 1$
	
$\mathrm{D}(f) = \mathrm{R}$, $\mathrm{H}(f) = (0, +\infty)$ Je zdola omezená ($a^x > 0$), není shora omezená. Je rostoucí, a tedy prostá. Nemá maximum ani minimum.	$\mathrm{D}(f) = \mathrm{R}$, $\mathrm{H}(f) = (0, +\infty)$ Je zdola omezená ($a^x > 0$), není shora omezená. Je klesající, a tedy prostá. Nemá maximum ani minimum.

Příklady užití přirozené exponenciální funkce ve fyzice

a) Exponenciální závislost atmosférického tlaku p na nadmořské výšce h je dána vzorcem $p = p_0 \mathrm{e}^{-kh}$, kde p_0 je vztažný atmosférický tlak, k je konstanta ... *barometrická formule.*

b) Exponenciální závislost počtu N (nepřeměněných) jader radionuklidu při radioaktivní přeměně na čase t lze vyjádřit vzorcem $N = N_0 \mathrm{e}^{-\lambda t}$, kde N_0 je počet nepřeměněných jader v počátečním čase $t = 0$, λ je přeměnová (rozpadová) konstanta ... *zákon radioaktivní přeměny.*

c) Závislost intenzity I záření pronikajícího vrstvou látky o tloušťce x udává vzorec $I = I_0 \mathrm{e}^{-\alpha x}$, kde I_0 je počáteční intenzita záření (pro $x = 0$), α je absorpční koeficient ... *exponenciální zákon absorpce (pohlcování) záření.*

Logaritmická funkce

Logaritmická funkce o základu (se základem) a označovaná $f\colon y = \log_a x$ je funkce inverzní k exponenciální funkci o témž základu a, která je (tabulka 4.7) ryze monotónní v definičním oboru R a nabývá v něm všech kladných funkčních hodnot. definiční obor logaritmické funkce je tedy $\mathsf{D}(f) = \mathsf{H}(f^{-1}) = (0, +\infty)$ a její obor funkčních hodnot $\mathsf{H}(f) = \mathsf{D}(f^{-1}) = \mathsf{R}$.

Funkční hodnoty logaritmické funkce se nazývají **logaritmy**; symbol $\log_a x$ čteme: logaritmus čísla x o základu (při základu) a.

Symbolicky zapisujeme logaritmickou funkci o základu a takto:

$$f\colon y = \log_a x,\quad a > 0,\quad a \neq 1,\quad \mathsf{D}(f) = (0, +\infty),$$

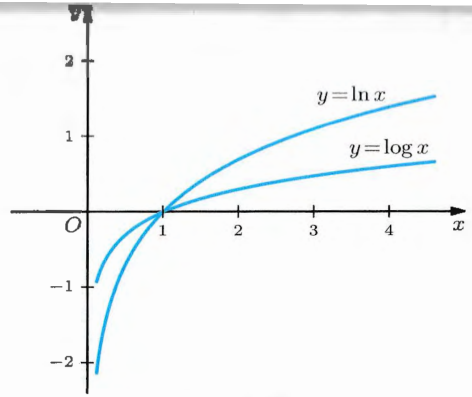
přičemž podle její definice platí

$$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y \text{ pro každé } x \in (0, +\infty),\ y \in \mathsf{R},\ a > 0,\ a \neq 1.$$

Logaritmická funkce o základu 10, tj. inverzní funkce k dekadické exponenciální funkci, se nazývá **dekadická logaritmická funkce**. Její funkční hodnoty se nazývají **dekadické logaritmy** a obvykle se označují jen $\log x$ (místo $\log_{10} x$). Logaritmická funkce o základu e, tj. inverzní funkce k přirozené exponenciální funkci, se nazývá **přirozená logaritmická funkce**. Její funkční hodnoty se nazývají **přirozené logaritmy** a značí se $\ln x$ (místo $\log_{\mathrm{e}} x$). (Symbol ln znamená latinsky logaritmus naturalis = přirozený logaritmus.)

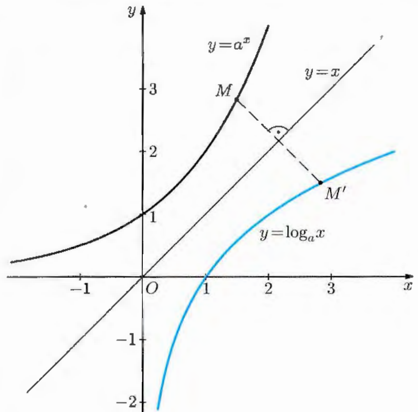
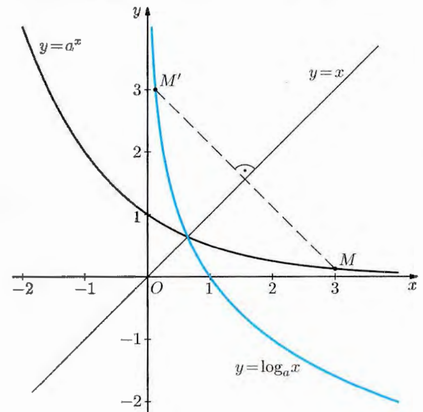
Graf logaritmické funkce je tzv. **logaritmická křivka**. Z výkladu o inverzních funkcích (kap. 4.2) víme, že graf logaritmické funkce o základu a je souměrně sdružený s grafem exponenciální funkce o témž základu a podle přímky o rovnici $y = x$ (tabulka 4.8). Všechny logaritmické křivky procházejí bodem [1; 0] (obr. 4.20), který je v této souměrnosti obrazem bodu [0; 1], jímž procházejí všechny exponenciální křivky.

Základní vlastnosti logaritmických funkcí jsou uvedeny v tabulce 4.8.



Obr. 4.20

Vlastnosti logaritmických funkcí $f\colon y = \log_a x$ — Tab. 4.8

$a > 1$	$0 < a < 1$
	
$\mathsf{D}(f) = (0, +\infty)$, $\mathsf{H}(f) = \mathsf{R}$ $f(1) = \log_a 1 = 0$ Není ani zdola omezená, ani shora omezená Je rostoucí, a tedy prostá. Nemá maximum ani minimum.	$\mathsf{D}(f) = (0, +\infty)$, $\mathsf{H}(f) = \mathsf{R}$ $f(1) = \log_a 1 = 0$ Není ani zdola omezená, ani shora omezená Je klesající, a tedy prostá. Nemá maximum ani minimum.

Poznámka. Lze dokázat (užitím matematické analýzy), že obecně mají grafy funkcí $f\colon y = a^x$ a $g\colon y = \log_a x$ tyto počty průsečíků:

a) pro $a > 1$ buď žádný průsečík, je-li $a > \mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$ (např. pro $a = 2$, $a = \mathrm{e}$), nebo 1 průsečík, je-li $a = \mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$, anebo 2 průsečíky, je-li $1 < a < \mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$,

b) pro $0 < a < 1$ buď 1 průsečík, je-li $\mathrm{e}^{-\mathrm{e}} < a < 1$ (např. pro $a = \frac{1}{2}$, $a = \frac{1}{\mathrm{e}}$), nebo 2 průsečíky, je-li $a = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}}$, anebo 3 průsečíky, je-li $0 < a < \mathrm{e}^{-\mathrm{e}}$ (např. pro $a = \frac{1}{16}$, $a = \frac{1}{64}$).

Protože logaritmická funkce o základu a ($a > 0$, $a \neq 1$) je definována na intervalu $(0, +\infty)$ a je na něm ryze monotónní, a tedy prostá, přísluší ke každému číslu $x > 0$ právě jedno číslo $y = \log_a x$ (**logaritmus čísla x při základu a**), přičemž pro $x_1 \neq x_2$ je $\log_a x_1 \neq \log_a x_2$. Přitom $\log_a x$ nabývá všech hodnot z $\mathsf{R} = (-\infty, +\infty)$. Z definice logaritmické funkce o základu a jako funkce inverzní k exponenciální funkci o témž základu a tedy plyne:

Logaritmus kladného čísla x o základu a ($a > 0$, $a \neq 1$) je takové reálné číslo $y = \log_a x$, pro které platí rovnost

$$a^{\log_a x} = x \text{ pro každé } x > 0, \quad a > 0, \quad a \neq 1.$$

Např. $\log 10 = 1$, neboť $10^1 = 10$; $\log 100 = 2$, neboť $10^2 = 100$.

Z uvedené definiční rovnosti plynou též tyto důsledky:

Pro každé $a > 0$, $a \neq 1$ platí

$$\log_a 1 = 0, \quad \text{neboť } a^0 = 1,$$
$$\log_a a = 1, \quad \text{neboť } a^1 = a.$$

Z definice logaritmů, ze vzorců pro počítání s mocninami o témž základu (kap. 2.6) a z toho, že exponenciální funkce je ryze monotónní, plynou následující *věty*:

Pravidla pro počítání s logaritmy

Nechť je $a > 0$, $a \neq 1$ a nechť x_1, x_2 jsou libovolná kladná čísla. Potom pro ně platí tyto vzorce:

$$\log_a (x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$$
$$\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2$$
$$\log_a x^r = r \log_a x \text{ pro každé } r \in \mathsf{R}$$
$$\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_a x \text{ pro každé } n \in \mathsf{N}$$

Platnost prvního vzorce lze rozšířit na součin libovolných n kladných činitelů $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ($n \in \mathsf{N}$):

$$\log_a (x_1 x_2 \ldots x_n) = \log_a x_1 + \log_a x_2 + \ldots + \log_a x_n$$

Příklady počítání s logaritmy

) $\log (2x^4 y^2) = \log 2 + 4 \log x + 2 \log y$; $x > 0$, $y > 0$

) $\log \dfrac{x_1^2 x_2}{x_3 x_4^3} = 2 \log x_1 + \log x_2 - \log x_3 - 3 \log x_4$; $x_1, x_2, x_3, x_4 > 0$

) $\log \sqrt{\dfrac{xy}{z^3}} = \dfrac{1}{2}(\log x + \log y - 3 \log z)$; $x, y, z > 0$

) $\log \sqrt[3]{x\sqrt{y+z}} = \dfrac{1}{3}\left[\log x + \dfrac{1}{2} \log (y+z)\right]$; $x > 0$, $y + z > 0$

Úprava rovnosti $a^y = x$ na tvar $y = \log_a x$ se nazývá **logaritmování** (při základu a); obrácená úprava se nazývá **odlogaritmování**.

Odvození převodního vztahu mezi logaritmy čísla $x > 0$ o dvou různých základech a, b ($a > 0$, $a \neq 1$; $b > 0$, $b \neq 1$)

Nechť $y = \log_a x$ neboli $a^y = x$. Z této rovnosti logaritmováním při základu b plyne $y \log_b a = \log_b x$ a odtud po dosazení za y dostáváme hledaný *převodní vzorec*

$$\log_b x = \log_a x \cdot \log_b a \text{ pro každé } x \in (0, +\infty),\ a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ b \neq 1$$

Speciálně

$$\text{pro } a = 10,\ b = \mathrm{e}\text{: } \ln x = \log x \cdot \ln 10,$$
$$\text{pro } a = \mathrm{e},\ b = 10\text{: } \log x = \ln x \cdot \log \mathrm{e},$$

přičemž

$$\ln 10 = 2{,}302\,585\,09\ldots, \qquad \log \mathrm{e} = 0{,}434\,294\,48\ldots$$

Důsledkem převodního vzorce (pro $x = b$) je též vztah

$$\log_b a \cdot \log_a b = 1,$$

speciálně

$$\ln 10 \cdot \log \mathrm{e} = 1,$$

K numerickým výpočtům se dříve hodně používaly **logaritmické tabulky** (tabulky zaokrouhlených hodnot logaritmů kladných čísel) a **logaritmické pravítko**. V současnosti je však prakticky nahradily **elektronické kalkulátory**.

4.4 Úlohy o funkcích

Příklady užití přímé a nepřímé úměrnosti v praxi

a) 5 dělníků vyrobilo 100 výrobků. Kolik výrobků vyrobilo 12 dělníků? (Předpokládá se, že všichni dělníci pracovali se stejnými výkony.)

Řešení

x dělníků vyrobí y výrobků. Kolikrát je více dělníků, tolikrát více výrobků vyrobí. Počet výrobků y je tedy přímo úměrný počtu dělníků x, tj. $y = kx$, kde $k > 0$. Konstantu úměrnosti k určíme, dosadíme-li do této rovnice $y = 100$ pro $x = 5$, dostáváme $k = \dfrac{100}{5} = 20$, takže rovnice uvažované přímé úměrnosti je $y = 20x$. Pro $x = 12$ je $y = 20 \cdot 12 = 240$.

Úlohu je možné řešit též úsudkem:

1 dělník vyrobí $\dfrac{100}{5} = 20$ výrobků $\Rightarrow$ 12 dělníků vyrobí $20 \cdot 12 = 240$ výrobků.

Odpověď: 12 dělníků vyrobilo 240 výrobků.

(Řešení téže úlohy rovnicí viz kap. 5.14.)

Poznámka. Řešení předchozí úlohy je založeno na *větě:*

> Podíl libovolných dvou funkčních hodnot přímé úměrnosti y_i, y_j ($i \in \mathsf{N}$, $j \in \mathsf{N}$) je roven podílu příslušných argumentů x_i, x_j (za předpokladu, že $x_j \neq 0$, $y_j \neq 0$).

Důkaz
Je-li přímá úměrnost dána rovnicí $y = kx$, pak pro libovolné dvě hodnoty argumentu x_i, x_j a odpovídající funkční hodnoty y_i, y_j platí $y_i = kx_i$, $y_j = kx_j$. Odtud plyne (za uvedeného předpokladu):

$$y_i : y_j = x_i : x_j \Leftrightarrow \frac{y_i}{y_j} = \frac{x_i}{x_j}$$

Rovnosti poměrů (podílů) se říká **úměra**. Čísla y_i, x_j se nazývají **vnější členy**, čísla y_j, x_i **vnitřní členy úměry**. Úměry $y_1 : y_2 = x_1 : x_2$, $y_2 : y_3 = x_2 : x_3$, ..., $y_{n-1} : y_n = x_{n-1} : x_n$ se též zapisují jako jedna tzv. **postupná (složená) úměra**

$$y_1 : y_2 : \ldots : y_n = x_1 : x_2 : \ldots : x_n.$$

b) 3 dělníci vykonali určitou práci za 10 dní. Za kolik dní by ji vykonalo 5 dělníků? (Předpokládá se, že všichni dělníci pracovali se stejnými výkony.)

Řešení
x dělníků vykoná práci za y dní. Kolikrát je více dělníků, tolikrát kratší je doba, za kterou vykonají určitou práci. Je tedy počet dní y nepřímo úměrný počtu dělníků x, tj. $y = \frac{k}{x}$, kde $k > 0$. Konstantu úměrnosti k určíme, dosadíme-li do této rovnice $y = 10$ pro $x = 3$; dostáváme $k = 10 \cdot 3 = 30$, takže rovnice příslušné nepřímé úměrnosti je $y = \frac{30}{x}$. Pro $x = 5$ je $y = \frac{30}{5} = 6$.

Úlohu je možné opět řešit úsudkem. Ukažte.

Odpověď: 5 dělníků vykoná danou práci za 6 dní.

(Řešení téže úlohy rovnicí viz v kap. 5.14.)

Poznámka. Řešení předchozí úlohy je založeno na *větě:*

> Podíl libovolných dvou funkčních hodnot nepřímé úměrnosti y_i, y_j ($i \in \mathsf{N}$, $j \in \mathsf{N}$) je roven převrácené hodnotě podílu příslušných argumentů x_i, x_j (přitom je $x_i \neq 0$, $y_i \neq 0$, $x_j \neq 0$, $y_j \neq 0$).

Důkaz
Je-li nepřímá úměrnost daná rovnicí $y = \frac{k}{x}$, pak pro libovolné dvě hodnoty argumentu x_i, x_j a odpovídající funkční hodnoty y_i, y_j platí $y_i = \frac{k}{x_i}$, $y_j = \frac{k}{x_j}$. Odtud plyne:

$$y_i : y_j = \frac{1}{x_i} : \frac{1}{x_j} \Leftrightarrow y_i : y_j = x_j : x_i \Leftrightarrow \frac{y_i}{y_j} = \frac{x_j}{x_i}.$$

Příklady sestrojení grafů elementárních funkcí

a) f: $y = 3x^2 - 12x + 13$, $D(f) = \mathsf{R}$,

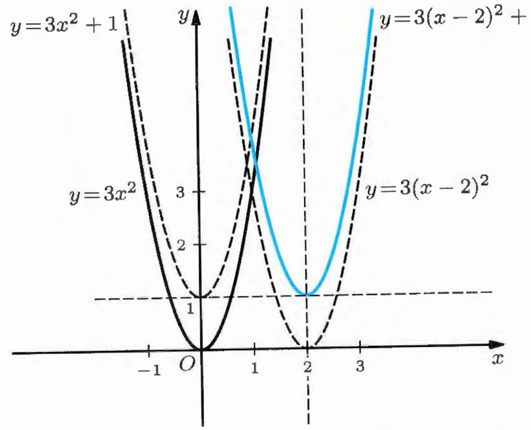
b) g: $y = \dfrac{2x+5}{x-3}$, $D(g) = \mathsf{R} \setminus \{3\} = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$.

Řešení
Užijeme postupů uvedených v kap. 4.3:

a) Funkční předpis kvadratické funkce f doplníme na „úplný čtverec“:

$$y = 3x^2 - 12x + 13 = 3(x^2 - 4x + 4) + 1 = 3(x-2)^2 + 1$$

Na základě této úpravy sestrojíme graf funkce f postupně pomocí grafu příslušné základní funkce (obr. 4.21):



Obr. 4.21

Sestrojíme parabolu s vrcholem v počátku [0; 0] a s osou v ose y, jež je grafem základní kvadratické funkce

$$f_1\colon y = 3x^2, \quad x \in \mathsf{R}.$$

Posunutím grafu funkce f_1 převádějícím bod [0; 0] do bodu [2; 0], tj. posunutím o 2 jednotky ve směru osy x, dostáváme parabolu s vrcholem v bodě [2; 0] a osou rovnoběžnou s osou y; tato parabola je grafem funkce

$$f_2\colon y = 3(x-2)^2, \quad x \in \mathsf{R}.$$

Posunutím grafu funkce f_2 převádějícím bod [2; 0] do bodu [2; 1], tj. posunutím o 1 jednotku ve směru osy y, získáváme parabolu s vrcholem v bodě [2; 1] a osou rovnoběžnou s osou y; tato parabola je grafem funkce f. Osu y protíná v bodě [0; 13].

Druhý možný způsob postupu řešení je tento (obr. 4.21):

Posunutím grafu funkce f_1 převádějícím bod [0; 0] do bodu [0; 1], tj. posunutím o 1 jednotku ve směru osy y, sestrojíme parabolu s vrcholem [0; 1] a osou rovnoběžnou s osou y, tato parabola je grafem funkce

$$f_2'\colon y = 3x^2 + 1, \quad x \in \mathsf{R}.$$

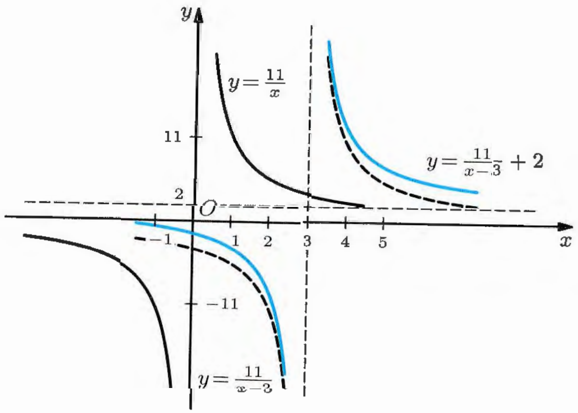
Posunutím grafu funkce f_2' převádějícím bod [0; 1] do bodu [2; 1], tj. posunutím o 2 jednotky ve směru osy x, získáme opět parabolu, která je grafem funkce f.

Poznámka. Výslednou parabolu, jež je grafem funkce f, lze ovšem sestrojit též přímo tak, že určíme vrchol [2; 1] a osu rovnoběžnou s osou y. Pak zvolíme několik dalších bodů této paraboly, kterými ji proložíme.

b) Funkční předpis upravíme takto:

$$y = \frac{2x+5}{x-3} = \frac{2(x-3)+11}{x-3} = \frac{11}{x-3} + 2$$

Na základě této úpravy sestrojíme graf funkce g postupně pomocí grafu příslušné základní lineární lomené funkce, tj. nepřímé úměrnosti (obr. 4.22):



Obr. 4.22

Sestrojíme rovnoosou hyperbolu se středem v počátku [0; 0], která je grafem nepřímé úměrnosti

$$g_1\colon y = \frac{11}{x}, \quad x \in \mathsf{R}.$$

Posunutím grafu funkce g_1 převádějícím bod [0; 0] do bodu [3; 0], tj. posunutím o 3 jednotky ve směru osy x, dostáváme rovnoosou hyperbolu se středem v bodě [3; 0], jež je grafem funkce

$$g_2\colon y = \frac{11}{x-3}, \quad x \in \mathsf{R} \setminus \{3\}.$$

Posunutím grafu funkce g_2 převádějícím bod [3; 0] do bodu [3; 2], tj. posunutím o 2 jednotky ve směru osy y, získáme rovnoosou hyperbolu se středem v bodě [3; 2] a s asymptotami rovnoběžnými s osami x, y, která je grafem funkce g. Jejími průsečíky s osami x, y jsou body $\left[-\frac{5}{2}; 0\right]$, $\left[0; -\frac{5}{3}\right]$.

Poznámka. Výslednou rovnoosou hyperbolu, jež je grafem funkce g, lze ovšem opět sestrojit též přímo (určíme její střed [3; 2], asymptoty a několik jejích bodů, jimiž ji proložíme).

Definice absolutní hodnoty funkce

Je-li dána funkce $f\colon y = f(x)$ s definičním oborem $\mathsf{D}(f)$, pak funkci

$$|f|\colon y = |f(x)|, \quad x \in \mathsf{D}(|f|) = \mathsf{D}(f),$$

nazýváme **absolutní hodnotou funkce** f.

Graf funkce $|f|$ se sestrojí z grafu funkce f tak, že se ponechají ty jeho části, pro něž je $y \geqq 0$ (tj. které jsou „nad osou x“ nebo jsou na ose x), zatímco části, pro něž je $y < 0$ (tj. leží „pod osou x“), nahradíme jejich obrazy v osové souměrnosti podle osy x (tj. „překlopíme“ je kolem osy x).

Příklady sestrojení grafů absolutních hodnot funkcí

a) $|f_1|\colon y = |x|, \quad x \in \mathsf{R}$,

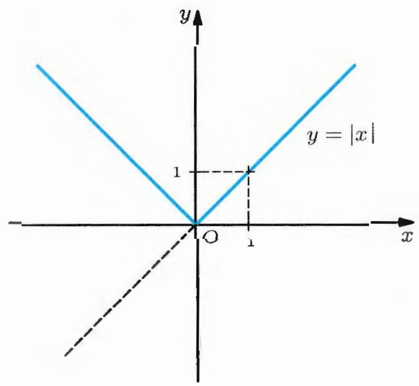
b) $|f_2|\colon y = |x+2|, \quad x \in \mathsf{R}$,

c) $|f_3|\colon y = |x^2 + x - 2|, \quad x \in \mathsf{R}$,

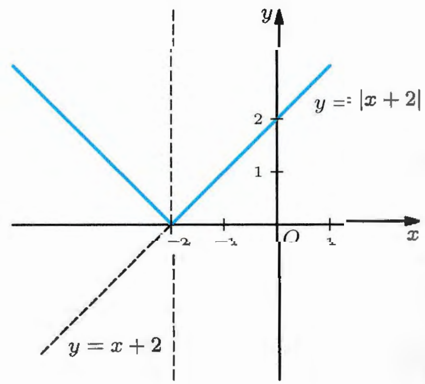
d) $|f_4|\colon y = \left|\dfrac{x-5}{2-x}\right|, \quad x \in \mathsf{R} \setminus \{2\}$.

Řešení

a) Podle definice $|x|$ je pro $x \geqq 0$: $|x| = x$ čili $|f_1| = f_1$ a pro $x < 0$: $|x| = -x$ čili $|f_1| = -f_1$. Graf funkce $|f_1|$ se sestrojí proto takto: Sestrojíme přímku, jež je grafem funkce $f_1\colon y = x$ (osa I. a III. kvadrantu), a část tohoto grafu pro $x < 0$ zobrazíme v osové souměrnosti podle osy x (obr. 4.23).



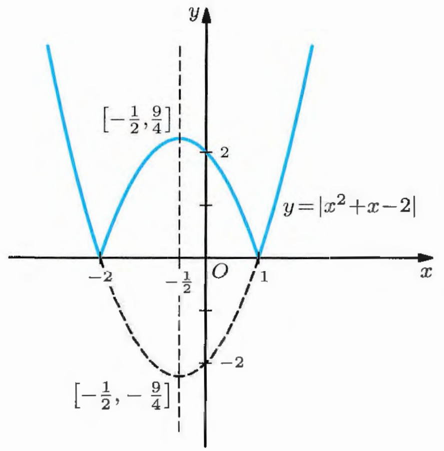
Obr. 4.23



Obr. 4.24

b) Podle definice $|x+2|$ je pro $x \geqq -2$: $|x+2| = x+2$ čili $|f_2| = f_2$ a pro $x < -2$: $|x+2| = -(x+2)$ čili $|f_2| = -f_2$. Graf funkce $|f_2|$ se proto sestrojí takto: Sestrojíme graf funkce f_2: $y = x+2$, kterým je přímka procházející body $[-2; 0]$, $[0; 2]$, a část toho grafu „pod osou x", tj. pro $x < -2$ zobrazíme v osové souměrnosti podle osy x (obr. 4.24).

c) Nejprve sestrojíme graf funkce f_3: $y = x^2 + x - 2$ neboli po doplnění na „úplný čtverec" $y = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$. Tímto grafem je parabola s vrcholem v bodě $\left[-\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}\right]$ a s osou v přímce vedené tímto bodem rovnoběžně s osou y. Graf funkce $|f_3|$ sestrojíme tak, že část grafu funkce f_3 ležící „pod osou x" zobrazíme v souměrnosti podle osy x (obr. 4.25).



Obr. 4.25

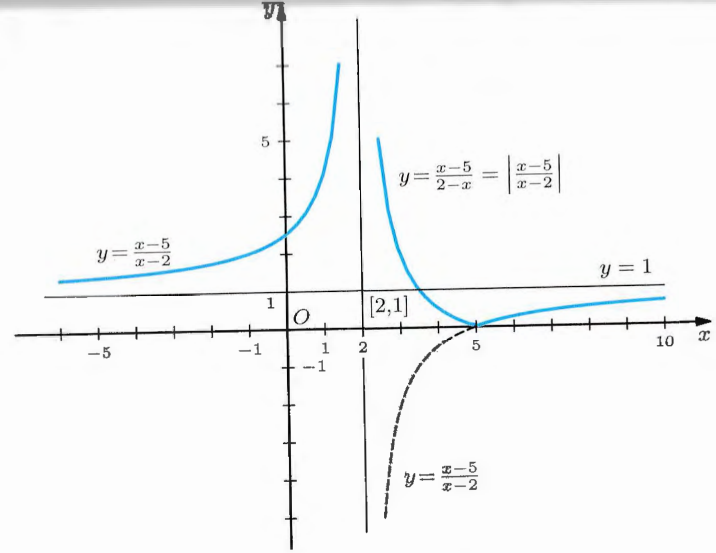
d) Protože $\left|\dfrac{x-5}{2-x}\right| = \left|\dfrac{x-5}{x-2}\right|$, sestrojíme graf funkce f_4: $y = \dfrac{x-5}{x-2}$, tj. hyperbolu se středem v bodě $[2; 1]$ a s asymptotami vedenými tímto bodem rovnoběžně s osami souřadnic. Graf funkce $|f_4|$ dostaneme z grafu funkce f_4 tak, že část tohoto grafu ležící „pod osou x" zobrazíme v souměrnosti podle osy x (obr. 4.26).

Funkce s absolutními hodnotami

Obecněji analyticky zadané funkce, v jejichž funkčním předpise se vyskytují absolutní hodnoty výrazů se zvolenou funkční proměnnou (např. x), se stručně nazývají **funkce s absolutními hodnotami** (výrazů s proměnnou).

Příklady sestrojení grafů funkcí s absolutními hodnotami

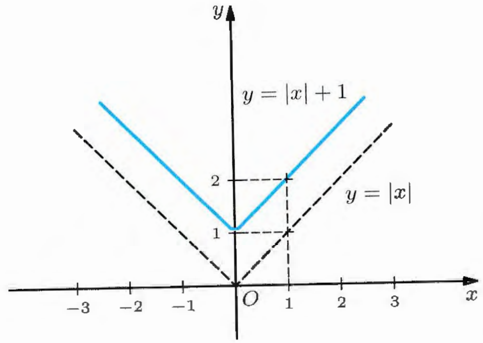
a) f_1: $y = |x| + 1$, b) f_2: $y = \frac{1}{2}(|x+1| + |x-1|)$.



Obr. 4.26

Řešení

a) Pro $x \geqq 0$ je $y = |x| + 1 = x + 1$, pro $x < 0$ je $y = |x| + 1 = -x + 1$. Graf funkce f_1: $y = |x| + 1$ se proto skládá ze dvou polopřímek (obr. 4.27). Při jeho konstrukci můžeme využít toho, že funkce f_1 je sudá (neboť $|-x| + 1 = |x| + 1$), tj. její graf je souměrný podle osy y. Lze ho také sestrojit posunutím grafu funkce $|f|$: $y = |x|$ o 1 jednotku ve směru osy y.



Obr. 4.27

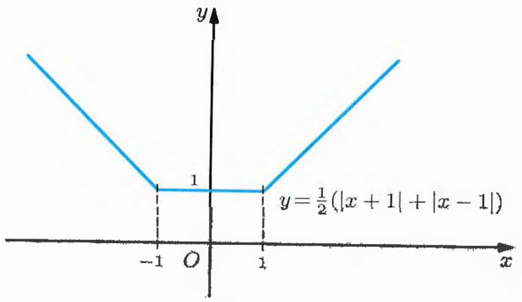
b) Funkční předpis funkce f_2 obsahuje dvě absolutní hodnoty výrazů s proměnnou x. Určíme hodnoty proměnné x, pro něž výraz $x+1$ nebo $x-1$ nabývá nulové hodnoty. Jsou to tzv. nulové body $x_1 = -1$ a $x_2 = 1$, které rozdělí množinu $\mathsf{R} = (-\infty, +\infty)$ na tři intervaly $(-\infty, -1)$, $\langle -1; 1)$, $\langle 1, +\infty)$. V každém z nich lze upravit funkční předpis $y = \frac{1}{2}(|x+1| + |x-1|)$ na tvar bez absolutních hodnot:

Pro $x \in (-\infty, -1)$ je $x+1 < 0 \wedge x-1 < 0 \Rightarrow |x+1| = -x-1 \wedge |x-1| = -x+1$,
$y = \dfrac{1}{2}(-x-1-x+1) = -x$.

Pro $x \in \langle -1; 1\rangle$ je $x+1 \geqq 0 \wedge x-1 \leqq 0 \Rightarrow |x+1| = x+1 \wedge |x-1| = -x+1$,
$y = \dfrac{1}{2}(x+1-x+1) = 1$.

Pro $x \in (1, +\infty)$ je $x+1 > 0 \wedge x-1 > 0 \Rightarrow |x+1| = x+1 \wedge |x-1| = x-1$,
$y = \dfrac{1}{2}(x+1+x-1) = x$.

Graf funkce f_2 se tedy skládá ze dvou polopřímek a jedné úsečky (obr. 4.28). Je souměrný podle osy y, neboť funkce f_2 je sudá ($|-x+1| = |1-x| = |x-1| \wedge |-x-1| = |x+1|$).



Obr. 4.28

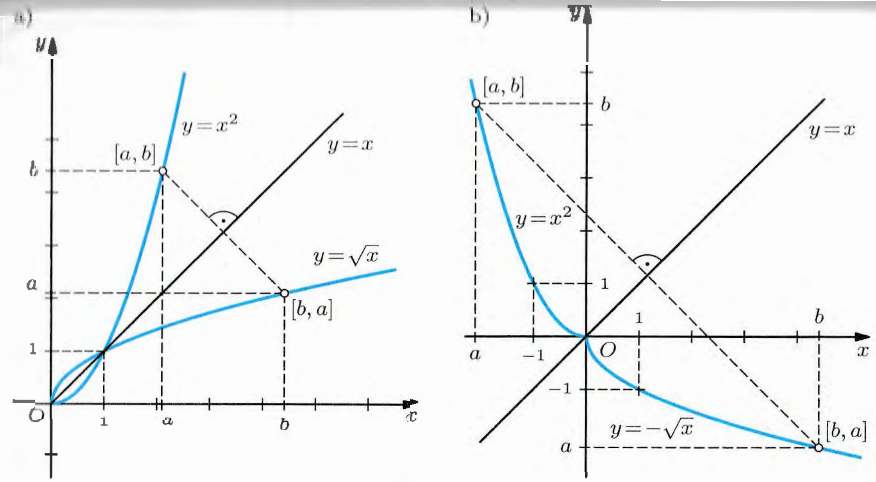
Příklad určení inverzní funkce k části funkce, která je prostá

Funkce f: $y = x^2$ není prostá v $\mathrm{D}(f) = \mathrm{R}$, neboť je sudá, tj. platí pro ni $f(x) = f(-x)$, a tedy např. pro $x_1 = 1$, $x_2 = -1$ je $f(x_1) = f(x_2) = 1$. Proto k ní neexistuje v $\mathrm{D}(f) = \mathrm{R}$ inverzní funkce.

Avšak můžeme uvažovat ryze monotónní části f_1, f_2 funkce f na intervalech $\langle 0, +\infty)$, $(-\infty, 0\rangle$. Funkce f_1: $y = x^2$, $x \in \langle 0, +\infty)$, je rostoucí, neboť pro každé $x_1, x_2 \in \langle 0, +\infty)$ platí $x_1 < x_2 \Rightarrow f_1(x_1) - f_1(x_2) = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) < 0 \Rightarrow f_1(x_1) < f_1(x_2)$. Funkce f_2: $y = x^2$, $x \in (-\infty, 0\rangle$, je klesající, neboť pro každé $x_1, x_2 \in (-\infty, 0\rangle$ platí $x_1 < x_2 \Rightarrow f_2(x_1) - f_2(x_2) = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) > 0 \Rightarrow f_2(x_1) > f_2(x_2)$. Funkce f_1, f_2 jsou tedy prosté, takže k nim existují funkce inverzní.

Analytická vyjádření těchto inverzních funkcí f_1^{-1}, f_2^{-1} získáme, řešíme-li rovnici $y = x^2$ vzhledem k neznámé x: dostáváme $|x| = \sqrt{y}$. A po záměně proměnných je $|y| = \sqrt{x}$, kde $x \in \mathrm{H}(f_1) = \mathrm{H}(f_2) = \langle 0, +\infty)$. Odtud plyne, že hledané inverzní funkce f_1^{-1}, f_2^{-1} s definičními obory $\mathrm{D}(f_1^{-1}) = \mathrm{H}(f_1) = \langle 0, +\infty)$, $\mathrm{D}(f_2^{-1}) = \mathrm{H}(f_2) = \langle 0, +\infty)$ a s obory funkčních hodnot $\mathrm{H}(f_1^{-1}) = \mathrm{D}(f_1) = \langle 0, +\infty)$, $\mathrm{H}(f_2^{-1}) = \mathrm{D}(f_2) = (-\infty, 0\rangle$ jsou f_1^{-1}: $y = \sqrt{x}$, $x \in \langle 0, +\infty)$, f_2^{-1}: $y = -\sqrt{x}$, $x \in \langle 0, +\infty)$.

Grafické znázornění funkcí f_1, f_1^{-1} je na obr. 4.29a, funkcí f_2, f_2^{-1} na obr. 4.29b.



Obr. 4.29

Příklady určování definičních oborů funkcí zadaných analyticky

a) f_1: $y = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$, b) f_2: $y = \dfrac{1}{\sqrt{x-|x|}}$, c) f_3: $y = \sqrt{\dfrac{x-2}{1-3x}}$,

d) f_4: $y = \dfrac{1}{\log\,(x-3)}$, e) f_5: $y = \ln|x|$.

Řešení

Vychází se z podmínek pro proměnnou x, za nichž výrazy na pravé straně definičního předpisu mají smysl:

a) $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1 \Rightarrow \mathrm{D}(f_1) = (1, +\infty)$

b) $x - |x| > 0 \Leftrightarrow |x| < x \Leftrightarrow x \in \emptyset \Rightarrow \mathrm{D}(f_2) = \emptyset$

c) $\dfrac{x-2}{1-3x} \geqq 0 \Leftrightarrow \dfrac{x-2}{x-\frac{1}{3}} \leqq 0 \Leftrightarrow x - 2 \leqq 0 \wedge x - \dfrac{1}{3} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{3} < x \leqq 2 \Rightarrow \mathrm{D}(f_3) = \left(\dfrac{1}{3}; 2\right\rangle$

d) $x - 3 > 0 \wedge x - 3 \neq 1 \Leftrightarrow x > 3 \wedge x \neq 4 \Leftrightarrow 3 < x < 4 \vee x > 4 \Rightarrow \mathrm{D}(f_4) = (3; 4) \cup (4, \infty)$

e) $|x| > 0 \Rightarrow \mathrm{D}(f_5) = \mathrm{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

Příklady složených funkcí (podle definice v kap. 4.1)

Z daných funkcí g, f s maximálními definičními obory utvořte složené funkce $h = f \circ g$:

a) g: $u = 2x - 1$, f: $y = \dfrac{1}{u}$, b) g: $u = \dfrac{1}{x}$, f: $y = 2u - 1$,

c) g: $u = 9 - x^2$, f: $y = \sqrt{u}$, d) g: $u = \log x$, f: $y = 2u$,

e) g: $u = -2x$, f: $y = \log u$.

Řešení

Stanovíme funkční předpisy a definiční obory složené funkce $h = f \circ g$:

a) $h\colon y = \dfrac{1}{2x-1}$, $g(x) = 2x - 1 \neq 0 \Rightarrow \mathsf{D}(h) = \mathsf{R} \setminus \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$,

b) $h\colon y = \dfrac{2}{x} - 1$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0 \Rightarrow \mathsf{D}(h) = \mathsf{R} \setminus \{0\}$,

c) $h\colon y = \sqrt{9 - x^2}$, $g(x) = 9 - x^2 \geqq 0 \Leftrightarrow x^2 \leqq 9 \Rightarrow \mathsf{D}(h) = \langle -3; 3 \rangle$,

d) $h\colon y = 2 \log x$, $g(x) = \log x$, $x > 0 \Rightarrow \mathsf{D}(h) = (0, +\infty)$,

e) $h\colon y = \log(-2x)$, $g(x) = -2x > 0 \Leftrightarrow x < 0 \Rightarrow \mathsf{D}(h) = (-\infty, 0)$.

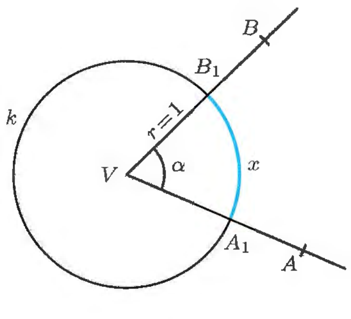
4.5 Goniometrické funkce

V tomto článku se budeme zabývat **goniometrickými funkcemi**, někdy též zvanými **trigonometrické funkce**. (Řecké slovo goniometrie znamená měření úhlů, slovo trigon znamená trojúhelník.) Středoškolská definice goniometrických funkcí se opírá o geometrické pojmy (kap. 9), především o **velikost úhlu**, kterou udáváme buď **v míře obloukové**, nebo **v míře stupňové**:

Nechť je úhel AVB libovolný konvexní nebo nekonvexní úhel (kap. 9.2).

a) Oblouková míra úhlu

Sestrojíme v rovině AVB kružnici k, která má střed V a poloměr $r = 1$; říkáme jí jednotková kružnice se středem V. Její průsečíky s polopřímkami VA, VB označme po řadě A_1, B_1 (obr. 4.30). Potom **velikostí úhlu** AVB **v míře obloukové** nazýváme délku toho oblouku A_1B_1 jednotkové kružnice k, který leží v úhlu AVB. Přitom jednotka délky oblouku A_1B_1 je dána poloměrem kružnice k. **Jednotkový úhel obloukové míry** se nazývá **radián** (značka rad); je to takový úhel, který na jednotkové kružnici se středem ve vrcholu úhlu vytíná oblouk jednotkové délky $|\widehat{A_1B_1}| = 1$ dj.



Obr. 4.30

Poznámka. Při zápisech velikostí úhlů v míře obloukové se v matematice zpravidla vynechává značka rad, tj. zapisují se jen číselné hodnoty velikostí úhlů v obloukové míře.

b) Stupňová míra úhlu

Velikost úhlu AVB **ve stupňové míře** je vyjádřena nezáporným číslem, které udává, kolikrát je úhel AVB větší, resp. menší než jeden (úhlový) stupeň, příp. je-li mu roven. **Jednotkový úhel stupňové míry** zvaný **úhlový stupeň** (krátce **stupeň**, označení °) je úhel rovnající se $\dfrac{1}{90}$ pravého úhlu. Téhož názvu se používá pro jednotku velikosti úhlu ve významu fyzikální veličiny. Ve stupňové míře se užívá též menších jednotek: **Úhlová minuta** (krátce **minuta**, značka ′) je jedna šedesátina stupně a **úhlová vteřina** (krátce **vteřina**, označení ″) je jedna šedesátina minuty. Platí tedy:

$$1^\circ = 60' = 3\,600''.$$

c) Vztahy mezi velikostmi úhlu v míře obloukové a v míře stupňové

Označme x číselnou hodnotu velikosti daného úhlu v míře obloukové a α velikost téhož úhlu v míře stupňové.

Pro plný úhel je $\alpha = 360^\circ$, což odpovídá $x = 2\pi$ (délka jednotkové kružnice), pro přímý úhel je $\alpha = 180^\circ$ neboli $x = \pi$. Obecně pro velikosti úhlu α v míře stupňové a x v míře obloukové platí tedy vztah:

$$\alpha : x = 180^\circ : \pi$$

Odtud lze pro danou hodnotu α vypočítat příslušnou hodnotu x a naopak.

Mnohdy však bývá jednodušší použít při vzájemných převodech mezi α a x místo uvedeného vztahu jeho elementárního důsledku:

$$1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \doteq 57^\circ\, 17'\, 45'',$$
$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$$

Příklady převodů velikostí úhlů

$$\frac{\pi}{12} \text{ rad} = \frac{180^\circ}{12} = 15^\circ,\ 4 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot 4 \doteq 229^\circ\, 11',\ 63^\circ = \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} \cdot 63^\circ = \frac{7}{20}\pi \text{ rad}.$$

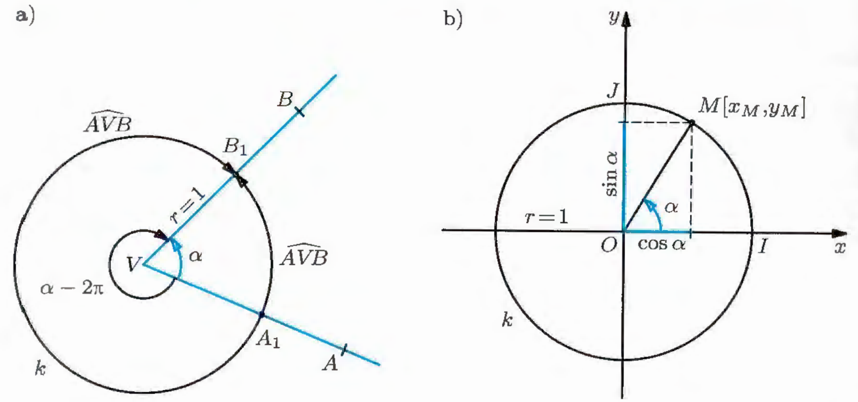
V tabulce 4.9 uvádíme pro některé často užívané úhly jejich velikosti v míře stupňové a v míře obloukové.

Velikost některých úhlů v míře stupňové a v míře obloukové Tab. 4.9

α°	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
x rad	0	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$	π	$\dfrac{3}{2}\pi$	2π

Definice orientovaného úhlu a jeho velikosti

Orientovaným úhlem v rovině rozumíme uspořádanou dvojici polopřímek se společným počátkem. Přitom slovy uspořádaná dvojice vyjadřujeme skutečnost, že záleží na tom, která z obou polopřímek se bere jako první (nazýváme ji **počátečním ramenem orientovaného úhlu**) a která je druhá (nazýváme ji **koncovým ramenem orientovaného úhlu**). Společný počátek obou polopřímek se nazývá **vrchol orientovaného úhlu**. Orientovaný úhel s počátečním ramenem VA a koncovým ramenem VB značíme $\widehat{AVB}$ (obr. 4.31a). Definice orientovaného úhlu nevylučuje, že polopřímky VA, VB jsou totožné, pak $\widehat{AVB}$ se nazývá **nulový orientovaný úhel**.



Obr. 4.31

Počáteční rameno VA orientovaného úhlu $\widehat{AVB}$ lze otočit kolem bodu V do jeho koncového ramene VB dvěma způsoby: buď *otočením v kladném smyslu* (tj. proti pohybu hodinových ručiček), anebo *otočením v záporném smyslu* (tj. souhlasně s pohybem hodinových ručiček). Při jedné otočce opíše polopřímka VA v prvním případě (neorientovaný) úhel velikosti α a v druhém případě úhel velikosti $2\pi-\alpha$. Polopřímka VA ovšem může vykonat i více otoček, z nichž při každé opíše plný úhel. Na základě toho pak *definujeme*:

Velikostí orientovaného úhlu $\widehat{AVB}$ nazýváme každé z reálných čísel $\alpha+2k\pi$ (v míře obloukové), resp. $\alpha+k\cdot 360°$ (v míře stupňové), kde $k\in\mathsf{Z}$, a α určíme takto:

a) Jestliže polopřímky VA, VB jsou totožné, pak je $\alpha=0$, resp. $\alpha=0°$.

b) Jestliže polopřímky VA, VB jsou různé, pak je α velikost neorientovaného úhlu, který vznikne otočením počátečního ramene VA do koncového ramene VB v kladném smyslu (tj. proti pohybu hodinových ručiček).

Je tedy $0\leqq\alpha<2\pi$, resp. $0°\leqq\alpha<360°$; této velikosti orientovaného úhlu se říká **základní velikost orientovaného úhlu.**

V obrázcích orientovaný úhel o velikostech $\alpha+2k\pi$ znázorňujeme graficky zpravidla takto (obr. 4.31a): Obloukem se šipkou je vyznačeno, že jde o orientovaný úhel a α udává jeho základní velikost, popř. $\alpha-2\pi$ jeho velikost pro $k=-1$.

Jsou-li dány orientované úhly $\widehat{AVB}$ a $\widehat{BVC}$ (tj. koncové rameno jednoho z nich je počátečním ramenem druhého), pak orientovaný úhel $\widehat{AVC}$ se nazývá **součet orientovaných úhlů** $\widehat{AVB}$ a $\widehat{BVC}$. Je-li velikost prvního z nich $\alpha+2k_1\pi$, velikost druhého $\beta+2k_2\pi$, je velikost jejich součtu $\alpha+\beta+2k\pi$, kde $k=k_1+k_2\in\mathsf{Z}$.

Je-li úhel $\widehat{AVC}$ součtem úhlů $\widehat{AVB}$ a $\widehat{BVC}$, pak úhel $\widehat{BVC}$ se nazývá **rozdíl orientovaných úhlů** $\widehat{AVC}$ a $\widehat{AVB}$ (v uvedeném pořadí). Je-li velikost prvního z nich $\gamma+2k_1\pi$, velikost druhého $\alpha+2k_2\pi$, je velikost jejich rozdílu $\gamma-\alpha+2k\pi$, kde $k=k_1-k_2\in\mathsf{Z}$.

Definice goniometrických funkcí sinus a kosinus

Zvolíme kartézskou soustavu souřadnic Oxy, tj. dvě k sobě kolmé číselné osy (osy x a y) se společným počátkem O, přičemž obě osy mají tutéž délkovou jednotku. Ke každému reálnému číslu α lze pak přiřadit právě jeden orientovaný úhel velikosti α (v obloukové míře), jehož počáteční rameno je polopřímka OI, kde O je počátek soustavy kartézských souřadnic a I obraz čísla 1 na ose x; říká se mu **orientovaný úhel velikosti** α **v základní poloze**. Sestrojíme jednotkovou kružnici k (tj. kružnici jednotkového poloměru) se středem O a označíme M její průsečík s koncovým ramenem orientovaného úhlu α v základní poloze (obr. 4.31b). Bodem M vedeme kolmici k ose x, jejích průsečík je na ose x obrazem reálného čísla x_M a dále bodem M vedeme kolmici k ose y, jejích průsečík je na ose y obrazem reálného čísla y_M. O číslech x_M, y_M říkáme, že jsou *první* a *druhou souřadnicí bodu* M, a píšeme $M[x_M, y_M]$.

Definujeme: Druhou souřadnici bodu M jednotkové kružnice na koncovém rameni orientovaného úhlu α v základní poloze nazýváme **sinus** α a jeho první souřadnici nazýváme **kosinus** α, značíme je $\sin\alpha$, $\cos\alpha$. Je tedy

$$\sin\alpha=y_M,\quad \cos\alpha=x_M \text{ pro každé } \alpha\in\mathsf{R}.$$

Poznámka. Protože jsou $\sin x$ a $\cos x$ definovány pomocí jednotkové kružnice, jsou nezávislé na volbě délkové jednotky.

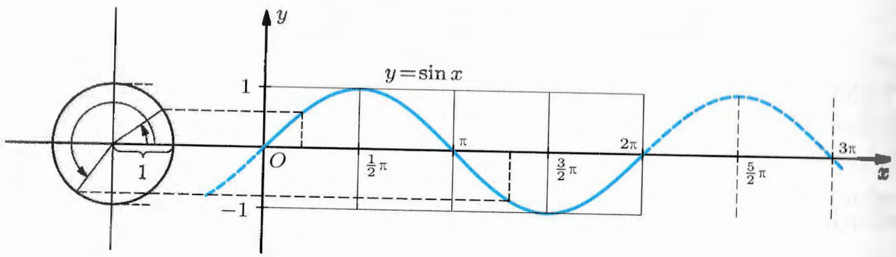
Uvedenými definičními vztahy je každému číslu $x\in\mathsf{R}$ přiřazeno právě jedno reálné číslo $\sin x$ a právě jedno reálné číslo $\cos x$, tj. tyto vztahy udávají funkční předpisy **funkce sinus**

$$f\colon y=\sin x,\quad \mathrm{D}(f)=\mathsf{R},$$

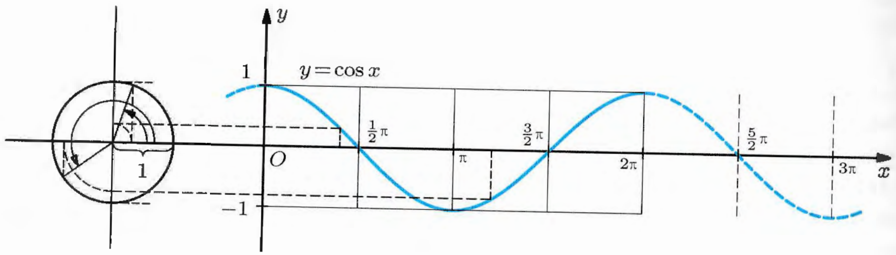
a **funkce kosinus**

$$f\colon y=\cos x,\quad \mathrm{D}(f)=\mathsf{R}.$$

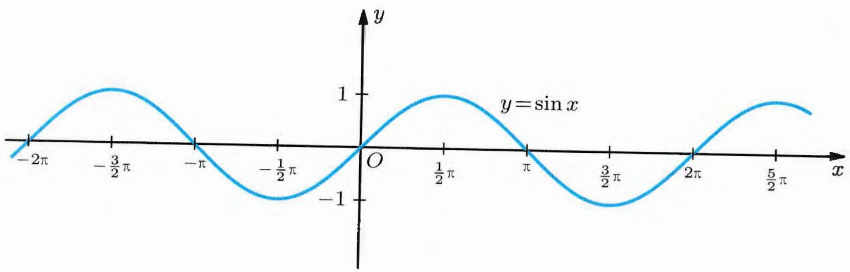
Grafy funkcí sinus a kosinus argumentu x sestrojíme na základě jejich definice pomocí souřadnic bodů M jednotkové kružnice k se středem v počátku O kartézské soustavy souřadnic, jak je naznačeno v obr. 4.32, 4.33. Podle definice zřejmě stačí sestrojit tyto grafy v intervalu $\langle 0, 2\pi)$ (viz plně vytažené čáry v obr 4.32, 4.33) a pak průběhy funkcí periodicky prodloužit (viz čárkované čáry na obr. 4.32, 4.33). *Graf funkce sinus* (obr. 4.34) se nazývá **sinusoida** a *graf funkce kosinus* (obr. 4.35) se nazývá **kosinusoida**. Přitom kosinusoida je zřejmě posunutá sinusoida o $\frac{\pi}{2}$ ve směru záporné poloosy x. Protože definičním oborem funkcí sinus a kosinus je množina R = $(-\infty, +\infty)$, na omezené nákresně můžeme zobrazit jen části jejich grafů.



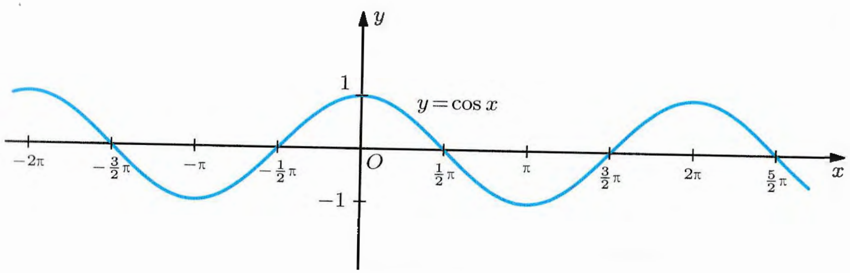
Obr. 4.32



Obr. 4.33



Obr. 4.34



Obr. 4.35

Tabulka vlastností goniometrických funkcí sinus a kosinus Tab. 4.10

Vlastnosti funkce f:	$y = \sin x$	$y = \cos x$
Definiční obor funkce D(f)	množina R = $(-\infty, +\infty)$	množina R = $(-\infty, +\infty)$
Obor funkčních hodnot H(f)	$\langle -1; 1 \rangle$	$\langle -1; 1 \rangle$
Sudost, lichost funkce	lichá funkce	sudá funkce
Periodičnost funkce	periodická s periodou $2k\pi$ (základní perioda je 2π)	periodická s periodou $2k\pi$ (základní perioda je 2π)
Omezenost, resp. neomezenost funkce v D(f)	omezená funkce	omezená funkce
Intervaly, v nichž je rostoucí funkcí	$\left\langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle$	$\langle -\pi + 2k\pi, 2k\pi \rangle$
Intervaly, v nichž je klesající funkcí	$\left\langle \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \right\rangle$	$\langle 2k\pi, \pi + 2k\pi \rangle$
Největší hodnota (maximum) funkce v bodě	$y = 1$ pro $x = (4k+1)\frac{\pi}{2}$	$y = 1$ pro $x = 2k\pi$
Nejmenší hodnota (minimum) funkce v bodě	$y = -1$ pro $x = (4k-1)\frac{\pi}{2}$	$y = -1$ pro $x = (2k-1)\pi$
Body, ve kterých jsou funkční hodnoty nulové ($y = 0$)	$x = k\pi$	$x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$
Intervaly, v nichž jsou funkční hodnoty kladné ($y > 0$)	$(2k\pi, \pi + 2k\pi)$	$\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$
Intervaly, v nichž jsou funkční hodnoty záporné ($y < 0$)	$(\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi)$	$\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right)$

$k \in$ Z

Základní vlastnosti funkcí sinus a kosinus se snadno odvodí (i zapamatují) přímo z definice funkčních hodnot $\sin x$, $\cos x$ pomocí souřadnic bodu M jednotkové kružnice k (obr. 4.31), které přiřazujeme popsaným způsobem číslům $x \in$ R. Názornou představu o vlastnostech funkcí sinus a kosinus nám poskytují též jejich grafy (obr. 4.34. 4.35). Z jejich základních vlastností si především zapamatujeme:

Funkce sinus je lichá, funkce kosinus sudá v definičním oboru R:

$$\sin(-x) = -\sin x, \quad \cos(-x) = \cos x \text{ pro každé } x \in \mathrm{R}$$

Obě tyto goniometrické funkce jsou *periodické se základní periodou* 2π:

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x, \quad \cos(x + 2k\pi) = \cos x \text{ pro každé } x \in \mathrm{R}, \quad k \in \mathrm{Z};$$

jsou omezené:

$$-1 \leqq \sin x \leqq 1, \quad -1 \leqq \cos x \leqq 1;$$

mají globální maximum 1 a globální minimum -1 atd. Všechny tyto a další vlastnosti funkcí sinus a kosinus jsou uvedeny v tabulce 4.10.

Z definice funkcí sinus a kosinus také plyne, že platí (tabulka 4.10) pro každé $x \in \mathrm{R}$:

$$\sin x = 0, \text{ právě když je } x = k\pi = 2k \cdot \frac{\pi}{2}, \text{ kde } k \in \mathrm{Z},$$
$$\cos x = 0, \text{ právě když je } x = (2k+1)\frac{\pi}{2}, \text{ kde } k \in \mathrm{Z}.$$

Definice goniometrických funkcí tangens a kotangens

Definujeme:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \text{ pro každé } x \in \mathrm{R} \setminus \bigcup_{k \in \mathrm{Z}} \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\right\},$$
$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x} \text{ pro každé } x \in \mathrm{R} \setminus \bigcup_{k \in \mathrm{Z}} \{k\pi\}.$$

(Symbol $\operatorname{tg} x$ čteme: **tangens** x, symbol $\operatorname{cotg} x$ čteme: **kotangens** x.)

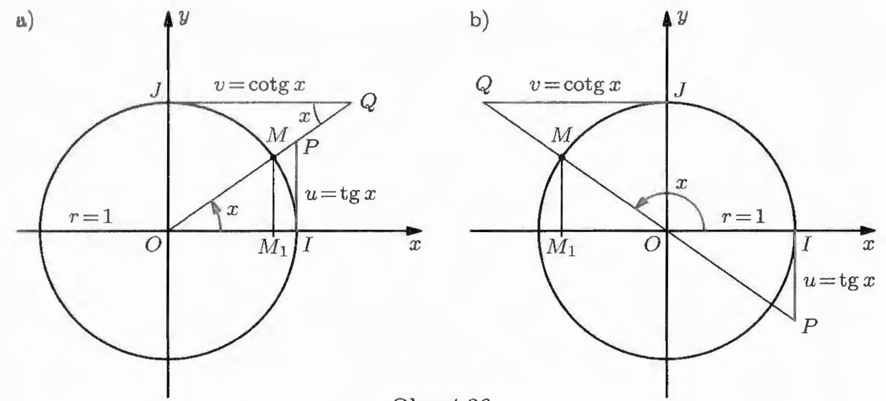
Těmito definičními vztahy je každému přípustnému $x \in \mathrm{R}$ přiřazeno právě jedno reálné číslo $\operatorname{tg} x$ a právě jedno reálné číslo $\operatorname{cotg} x$, tj. tyto vztahy udávají funkční předpisy **funkce tangens**

$$f\colon y = \operatorname{tg} x, \quad \mathrm{D}(f) = \mathrm{R} \setminus \bigcup_{k \in \mathrm{Z}} \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\right\} = \bigcup_{k \in \mathrm{Z}} \left((2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2}\right)$$

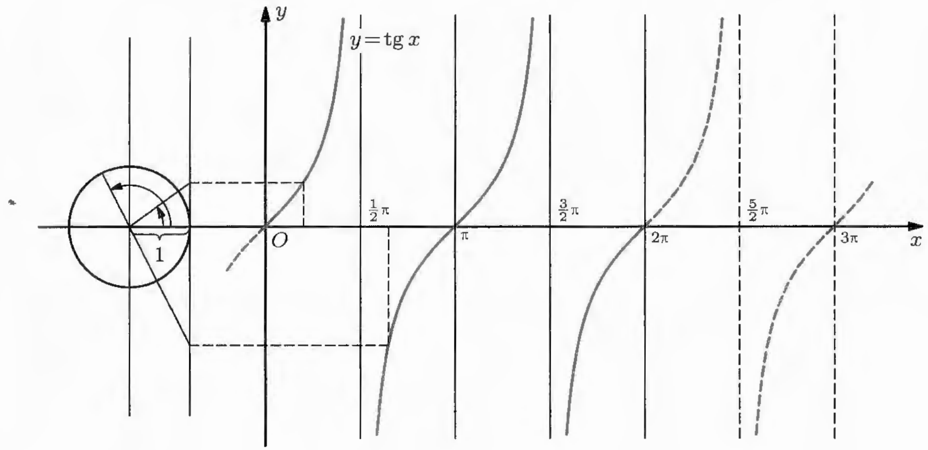
a **funkce kotangens**

$$f\colon y = \operatorname{cotg} x, \quad \mathrm{D}(f) = \mathrm{R} \setminus \bigcup_{k \in \mathrm{Z}} \{k\pi\} = \bigcup_{k \in \mathrm{Z}} ((k-1)\pi, k\pi).$$

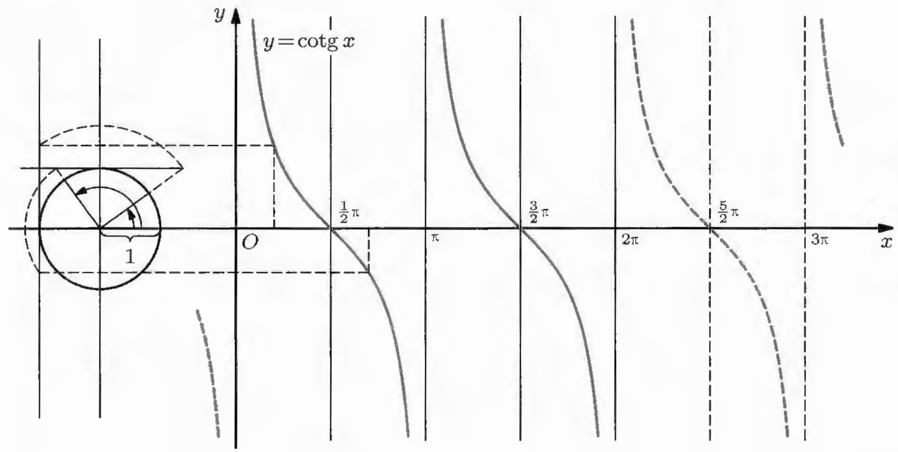
Grafy funkcí tangens a kotangens argumentu x sestrojíme na základě jejich definice opět pomocí souřadnic bodů M jednotkové kružnice k se středem v počátku O kartézské soustavy souřadnic postupem, který odvodíme podle obr. 4.36a (pro $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$) a 4.36b (pro $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$). Nechť je bod M jednotkové kružnice k přiřazen číslu x (velikosti úhlu IOM). Patu kolmice vedené tímto bodem k ose x označme M_1. V bodech $I[1; 0]$, $J[0; 1]$ sestrojíme tečny ke kružnici k (které jsou rovnoběžné po řadě se souřadnicovými osami y, x). Přímka OM protne tyto tečny po řadě v bodech P, Q. Z podobnosti trojúhelníků $\triangle M_1OM \sim \triangle IOP$ a $\triangle M_1OM \sim \triangle JQO$ plyne, že $|PI| = |\operatorname{tg} x|$, $|QJ| = |\operatorname{cotg} x|$, takže je $P[1, \operatorname{tg} x]$,



Obr. 4.36

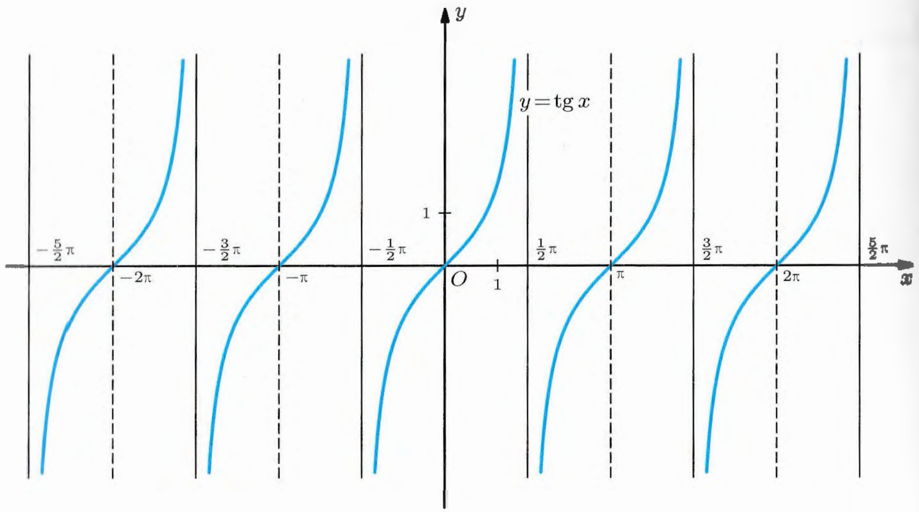


Obr. 4.37

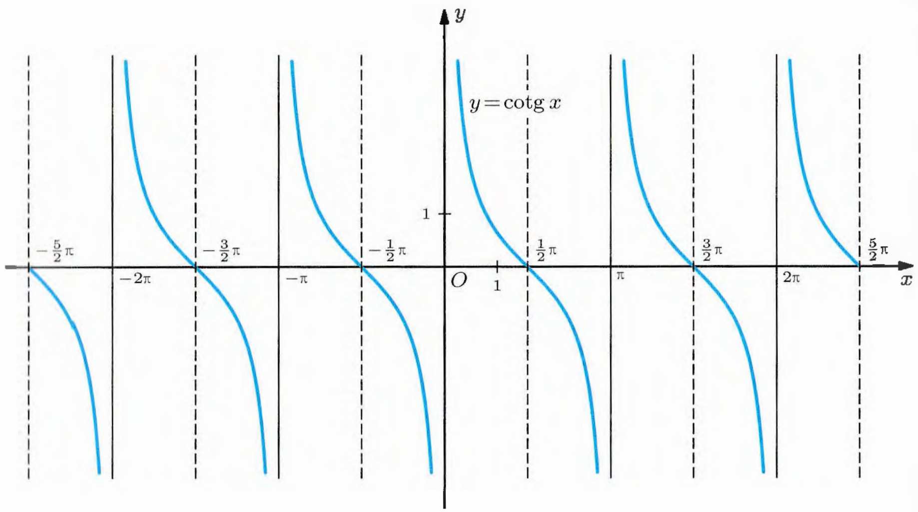


Obr. 4.38

$Q[\cot g\, x, 1]$. Z toho plynoucí konstrukce grafů funkcí tangens a kotangens jsou naznačeny v obr. 4.37 a 4.38. *Graf funkce tangens* (obr. 4.39) se nazývá **tangentoida** a *graf funkce kotangens* (obr. 4.40) **kotangentoida**. Oba grafy jsou zřejmě navzájem symetrické („překlopené“) podle os souměrnosti rovnoběžných s osou y a procházejících body $x = (2k+1)\frac{\pi}{4}$, $k \in \mathsf{Z}$. Protože definičními obory funkcí tangens a kotangens jsou sjednocení nekonečně mnoha otevřených intervalů, můžeme na omezené nákresně zobrazit jen části těchto grafů.



Obr. 4.39



Obr. 4.40

Tabulka vlastností goniometrických funkcí tangens a kotangens Tab. 4.11

Vlastnosti funkce f:	$y = \operatorname{tg} x$	$y = \operatorname{cotg} x$
Definiční obor funkce $\mathsf{D}(f)$	$\left\{x \in \mathsf{R};\ x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}\right\}$	$\{x \in \mathsf{R};\ x \neq k\pi\}$
Obor funkčních hodnot $\mathsf{H}(f)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$
Sudost, lichost funkce	lichá funkce	lichá funkce
Periodičnost funkce	periodická s periodou $k\pi$ (základní perioda je π)	periodická s periodou $k\pi$ (základní perioda je π)
Omezenost, resp. neomezenost funkce v $\mathsf{D}(f)$	neomezená funkce	neomezená funkce
Intervaly, v nichž je rostoucí funkcí	$\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$	neexistují (nerostoucí funkce)
Intervaly, v nichž je klesající funkcí	neexistují (neklesající funkce)	$(k\pi, \pi + k\pi)$
Největší hodnota (maximum) funkce v bodě	neexistuje	neexistuje
Nejmenší hodnota (minimum) funkce v bodě	neexistuje	neexistuje
Body, ve kterých jsou funkční hodnoty nulové ($y = 0$)	$x = k\pi$	$x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$
Intervaly, v nichž jsou funkční hodnoty kladné ($y > 0$)	$\left(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$	$\left(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$
Intervaly, v nichž jsou funkční hodnoty záporné ($y < 0$)	$\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, \pi + k\pi\right)$	$\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, \pi + k\pi\right)$

$k \in \mathsf{Z}$

Základní vlastnosti funkcí tangens a kotangens argumentu x snadno odvodíme přímo z definice $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$ a užitím vlastností funkcí sinus a kosinus. Názornou představu o vlastnostech funkcí tangens a kotangens nám též poskytují jejich grafy (obr. 4.39, 4.40).

Ze základních vlastností si především zapamatujeme: *Funkce tangens i funkce kotangens jsou liché* ve svých definičních oborech, neboť (jak plyne ze vztahů $\sin(-x) = -\sin x$, $\cos(-x) = \cos x$ pro každé $x \in \mathsf{R}$) pro ně platí:

$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x \text{ pro každé } x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathsf{Z},$$
$$\operatorname{cotg}(-x) = -\operatorname{cotg} x \text{ pro každé } x \neq k\pi,\ k \in \mathsf{Z}$$

Obě tyto goniometrické funkce *jsou periodické se základní periodou π*:

$$\operatorname{tg}(x + k\pi) = \operatorname{tg} x \text{ pro každé } x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in Z$$
$$\operatorname{cotg}(x + k\pi) = \operatorname{cotg} x \text{ pro každé } x \neq k\pi,\ \ k \in Z$$

Funkce tangens a kotangens *nejsou omezené*. Tyto i další vlastnosti funkcí tangens a kotangens jsou přehledně shrnuty v tabulce 4.11.

Určování hodnot goniometrických funkcí

a) Některé významné hodnoty goniometrických funkcí lze snadno určit přímo na základě jejich definice s použitím jednoduchých geometrických poznatků (kap. 9.5). Tyto přesné funkční hodnoty goniometrických funkcí, které je účelné si zapamatovat, uvádíme v tabulce 4.12.

Tabulka důležitých hodnot goniometrických funkcí Tab. 4.12

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	není def.	0	není def.	0
$\operatorname{cotg} x$	není def.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	není def.	0	není def.

Zaokrouhlené hodnoty goniometrických funkcí pro další hodnoty argumentů z intervalu $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ neboli $(0°, 90°)$, které se počítají užitím metod matematické analýzy, jsou uvedeny v matematických, fyzikálních a chemických tabulkách a lze je také určit pomocí elektronických kalkulátorů s goniometrickými funkcemi. U dokonalejších typů těchto kalkulátorů se dají přímo určit i v širším intervalu argumentů. Obecně se však všechny ostatní funkční hodnoty goniometrických funkcí dají vypočítat pomocí hodnot argumentů z uvedeného intervalu, a to následujícími způsoby.

b) 1. Pro $x < 0$ užijeme k výpočtu hodnot goniometrických funkcí toho, že funkce kosinus je sudá a funkce sinus, tangens a kotangens jsou liché, tj.

$$\cos(-x) = \cos x,\ \sin(-x) = -\sin x,$$
$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x,\ \ \operatorname{cotg}(-x) = -\operatorname{cotg} x.$$

Užitím těchto vztahů tedy výpočet převedeme na určení hodnot goniometrických funkcí argumentu $x > 0$.

2. Pro $x > 2\pi$ čili $x > 360°$ určíme hodnoty $\sin x$ a $\cos x$ na základě toho, že funkce sinus a kosinus jsou periodické s periodou $2k\pi$, $k \in Z$, pro přípustná $x > \pi$ čili $x > 180°$ určíme hodnoty $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$ na základě toho, že funkce tangens a kotangens jsou periodické s periodou $k\pi$, $k \in Z$.

Příklady

a) $\sin\frac{9}{4}\pi = \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\frac{9}{4}\pi = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{9}{4}\pi = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$, $\operatorname{cotg}\frac{9}{4}\pi = \operatorname{cotg}\frac{\pi}{4} = 1$,

b) $\sin\left(-\frac{9}{4}\pi\right) = -\sin\frac{9}{4}\pi = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\left(-\frac{9}{4}\pi\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg}\left(-\frac{9}{4}\pi\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = -1$, $\operatorname{cotg}\left(-\frac{9}{4}\pi\right) = -\operatorname{cotg}\frac{\pi}{4} = -1$,

c) $\sin 7\,380° = \sin(180° + 20 \cdot 360°) = \sin 180° = 0$, $\cos 7\,380° = \cos 180° = -1$, $\operatorname{tg} 7\,380 = \operatorname{tg} 180° = 0$, $\operatorname{cotg} 7\,380° = \operatorname{cotg} 180°$ neexistuje.

3. Zbývá tedy jen výpočet hodnot funkcí sinus, kosinus argumentu x v intervalech $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $\left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$, $\left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right)$ a hodnot funkcí tangens, kotangens argumentu x v intervalu $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. V těchto případech postupujeme takto:

Znaménko určované funkční hodnoty $f(x)$ goniometrické funkce f určíme podle intervalu, ve kterém se nalézá uvažované x, neboli podle kvadrantu, v němž leží příslušný bod M jednotkové kružnice k (obr. 4.31). Přehledně tato znaménka uvádí tabulka 4.13 (je účelné si ji zapamatovat). Dále pak vyjádříme uvažovanou hodnotu argumentu x v některém z následujících tvarů, kde $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$:

$x = \pi - x_0$, je-li $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, tj. pro II. kvadrant, v němž je bod $M \in k$;

$x = \pi + x_0$, je-li $x \in \left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$, tj. pro III. kvadrant, v němž je bod $M \in k$;

$x = 2\pi - x_0$, je-li $x \in \left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right)$, tj. pro IV. kvadrant, v němž je bod $M \in k$.

Znaménka hodnota goniometrických funkcí Tab. 4.13

Kvadrant	I.	II.	III.	IV.
Interval argumentu x	$\left(0, \frac{1}{2}\pi\right)$	$\left(\frac{1}{2}\pi, \pi\right)$	$\left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$	$\left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right)$
$\sin x$	+	+	−	−
$\cos x$	+	−	−	+
$\operatorname{tg} x$	+	−	+	−
$\operatorname{cotg} x$	+	−	+	−

Pro kteroukoliv goniometrickou funkci f platí rovnosti

$$|f(\pi - x_0)| = |f(\pi + x_0)| = |f(x_0)|$$

pro každé $x_0 = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, jak lze snadno ověřit pomocí jednotkové kružnice k (obr. 4.31) či grafů goniometrických funkcí. Užitím těchto vztahů stanovíme absolutní hodnotu určované funkční hodnoty goniometrické funkce f: $|f(x)| = |f(x_0)|$. A tím je hodnota $f(x)$ určena.

Příklad

Užitím uvedeného postupu určete hodnoty goniometrických funkcí pro $x = \frac{2}{3}\pi$.

Řešení

$x = \frac{2}{3}\pi \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, tj. $M \in k$ je ve II. kvadrantu. Vyjádříme proto x ve tvaru: $x = \pi - x_0$, kde $x_0 = \frac{\pi}{3} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Znaménka hodnot goniometrických funkcí určíme podle tabulky 4.13 (sloupec pro II. kvadrant) a na základě rovností $\left|f\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right| = \left|f\left(\frac{\pi}{3}\right)\right|$ po dosazení známých hodnot goniometrických funkcí argumentu $\frac{\pi}{3}$ (podle tabulky 4.12) dostáváme:

$$\sin \frac{2}{3}\pi = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\cos \frac{2}{3}\pi = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$
$$\operatorname{tg} \frac{2}{3}\pi = \operatorname{tg}\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$$
$$\operatorname{cotg} \frac{2}{3}\pi = \operatorname{cotg}\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{cotg} \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Harmonické funkce a jejich grafy

Ve fyzice a v technice jsou důležité funkce typu

$$f\colon y = c \sin(ax + b), \quad \mathrm{D}(f) = \mathrm{R},$$

kde a, b, c jsou reálné konstanty, x je reálná proměnná, nazývají se **harmonické funkce**.

Graf harmonické funkce známe pro základní případ, kdy $a = c = 1$, $b = 0$ a pomocí něho můžeme sestrojit *grafy harmonických funkcí* (transformované **sinusoidy**) v ostatních případech. Postup ukážeme na příkladech.

Příklady konstrukce grafů harmonických funkcí

Sestrojte grafy funkcí

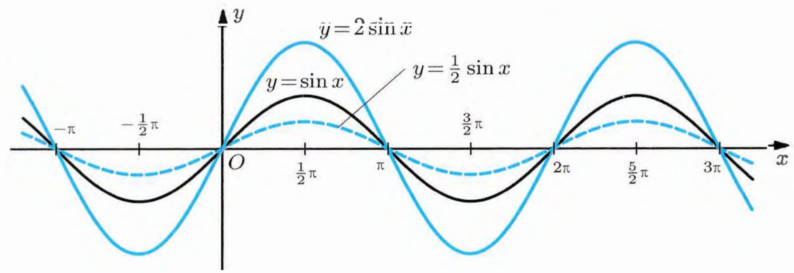
a) $f_1\colon y = 2 \sin x$, $f_2\colon y = \frac{1}{2} \sin x$, b) $f_3\colon y = \sin 2x$, $f_4\colon y = \sin \frac{x}{2}$,

c) $f_5\colon y = \sin(x + 1)$, $f_6\colon y = \sin(x - 1)$, d) $g\colon y = 3 \sin(2x - 1)$; $x \in \mathrm{R}$.

Řešení

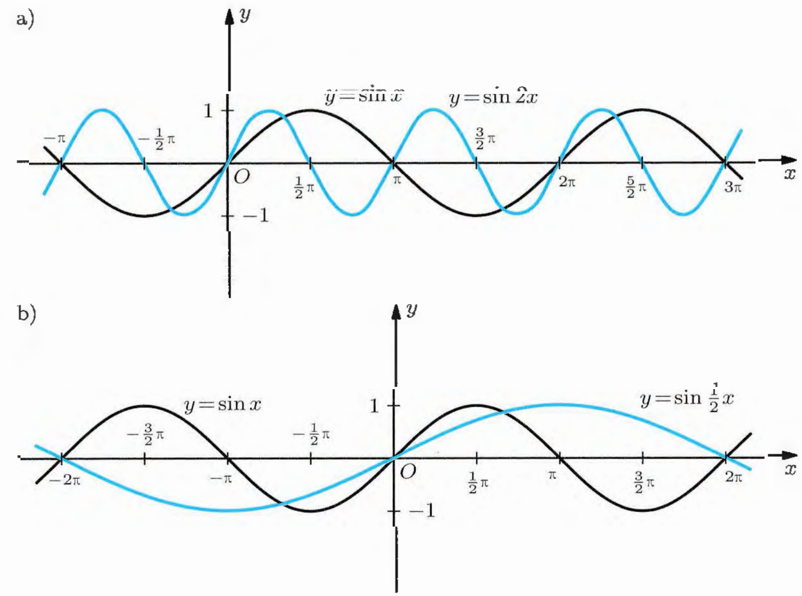
Vycházíme z grafu funkce $f\colon y = \sin x$ podle obr. 4.34.

a) Graf funkce $f_1\colon y = 2 \sin x$ získáme zdvojnásobením všech souřadnic y výchozího grafu funkce f a graf funkce $f_2\colon y = \frac{1}{2} \sin x$ dostaneme, jestliže všechny souřadnice y grafu funkce f zmenšíme na polovinu (obr. 4.41).



Obr. 4.41

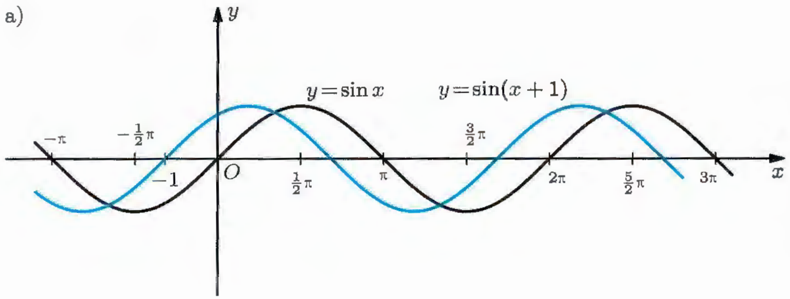
b) Složená funkce $f_3\colon y = \sin u$, kde $u = 2x$, má základní periodu π, neboť je $\sin(u + 2k\pi) = \sin u$ čili $\sin 2(x + k\pi) = \sin 2x$ pro každé $x \in \mathrm{R}$, $k \in \mathrm{Z}$. A obdobně složená funkce $f_4\colon y = \sin u$, kde $u = \frac{x}{2}$, má základní periodu 4π, neboť je $\sin\left(\frac{x}{2} + 2k\pi\right) = \sin \frac{1}{2}(x + 4k\pi) = \sin \frac{x}{2}$ pro každé $x \in \mathrm{R}$, $k \in \mathrm{Z}$. Jejich grafy jsou v obr. 4.42a, b.



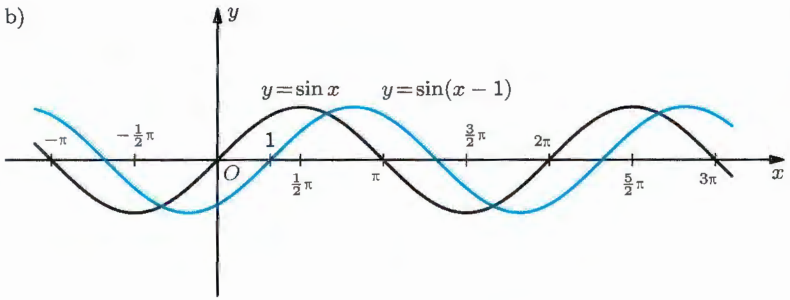
Obr. 4.42

c) Složená funkce $f_5\colon y = \sin u$, kde $u = x + 1$, a stejně tak složená funkce $f_6\colon y = \sin u$, kde $u = x - 1$, mají tutéž základní periodu 2π jako funkce f, neboť platí $\sin(x \pm 1 + 2k\pi) = \sin(x \pm 1)$ pro každé $x \in \mathsf{R}$, $k \in \mathsf{Z}$. Pro funkci f_5 je $u = x + 1$ čili $x = u - 1$, takže graf funkce f_5 dostaneme z grafu funkce f posunutím o 1 jednotku ve směru záporné poloosy x (tj. „doleva") a obdobně pro funkci f_6 je $u = x - 1$ čili $x = u + 1$, proto graf funkce f_6 získáme z grafu funkce f posunutím o 1 jednotku ve směru kladné poloosy x (tj. „doprava"). Grafy jsou zobrazeny v obr. 4.43a, b.

a)



b)



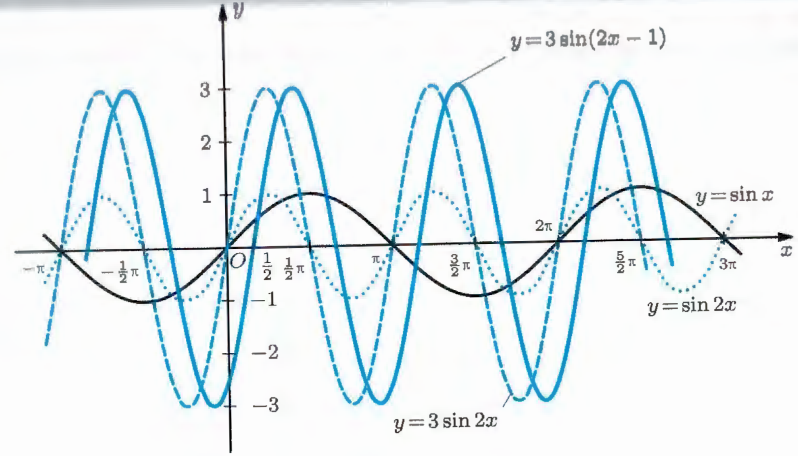
Obr. 4.43

d) Složená funkce g: $y = 3 \sin u$, kde $u = 2x - 1 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)$, má základní periodu π, neboť $\sin\left(2\left(x - \frac{1}{2}\right) + 2k\pi\right) = \sin 2\left(x - \frac{1}{2} + k\pi\right) = \sin 2\left(x - \frac{1}{2}\right)$ pro každé $x \in \mathsf{R}$, $k \in \mathsf{Z}$. Konstrukci grafu funkce g lze provést tak, že postupně sestrojíme grafy funkcí (obr. 4.44):

g_1: $y = \sin 2x$ podle příkladu b) ($g_1 = f_3$),

g_2: $y = 3 \sin 2x$ obdobně jako v příkladu a) (trojnásobným zvětšením hodnot funkce g_1),

g: $y = 3 \sin 2\left(x - \frac{1}{2}\right)$ obdobně jako v příkladu c) (posunutím grafu funkce g_2 o $\frac{1}{2}$ jednotky ve směru kladné poloosy x, tj. „doprava").



Obr. 4.44

Vzorce pro goniometrické funkce

Dosud jsme argument goniometrických funkcí označovali x. Avšak v geometrii i v dalších aplikacích je obvyklé označovat jejich argumenty řeckými písmeny α, β atd. Dále použijeme tato označení, neboť nám umožňují rozlišit různé hodnoty argumentů bez zavádění indexů (místo x_1, x_2 píšeme α, β).

V dalším textu uvádíme přehledně nejdůležitější vzorce pro goniometrické funkce s podmínkami jejich platnosti a připojujeme poznámky o důkazech těchto vzorců.

Základní vzorce pro goniometrické funkce

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad \text{pro každé } \alpha \in \mathsf{R},$$

a tedy

$$|\sin\alpha| = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} \quad \text{pro každé } \alpha \in \mathsf{R},$$

$$|\cos\alpha| = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} \quad \text{pro každé } \alpha \in \mathsf{R},$$

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} \quad \text{pro každé reálné } \alpha \neq k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathsf{Z},$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \quad \text{pro každé reálné } \alpha \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathsf{Z},$$

$$1 + \operatorname{cotg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} \quad \text{pro každé reálné } \alpha \neq k\pi,\ k \in \mathsf{Z}.$$

Poznámka. Uvedené vzorce plynou přímo z definice $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ pomocí jednotkové kružnice a z definičních vztahů pro $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{cotg}\alpha$.

Součtové vzorce pro funkce sinus a kosinus

Pro každá dvě reálná čísla α, β platí:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

Poznámka. Součtové vzorce pro funkce sinus a kosinus lze odvodit několika způsoby; jednoduchý způsob důkazu lze provést pomocí skalárního součinu vektorů, jehož definici uvádíme v kap. 10.8 na str. 558.

Vzorce pro funkce sinus, kosinus argumentů 2α a $\frac{\alpha}{2}$

Pro každé reálné číslo α platí:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$
$$\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

Poznámka. První dva vzorce dostaneme, jestliže v součtových vzorcích pro funkce sinus a kosinus položíme $\beta = \alpha$, a další dva vzorce odvodíme na základě předchozích vzorců: $\cos\alpha = \cos 2\frac{\alpha}{2} = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$, $\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$ a dále užijeme vztahu $\sqrt{a^2} = |a|$ (platného pro každé $a \in \mathrm{R}$).

Vzorce pro součet a rozdíl hodnot funkcí sinus a kosinus

Pro každá dvě reálná čísla α, β platí:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Poznámka. Tyto vzorce lze odvodit pomocí součtových vzorců pro funkce sinus a kosinus takto: Levé strany dokazovaných rovností upravíme vyjádřením α, β ve tvaru

$$\alpha = \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}, \quad \beta = \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Tak např. $\sin\alpha + \sin\beta = \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}\right)$, a užijeme-li na pravé straně první a druhý součtový vzorec ze str. 180, dostáváme první vzorec. Obdobně dokážeme ostatní vzorce.

Také výrazy $\sin\alpha \pm \cos\beta$ (α, $\beta \in \mathrm{R}$) lze převést na součin goniometrických funkcí (viz příklad 3 na str. 184).

Užitím součtových vzorců pro funkce sinus a kosinus lze dále odvodit vzorce pro převod součinů goniometrických funkcí $\sin\alpha\cdot\sin\beta$, $\cos\alpha\cdot\cos\beta$, $\sin\alpha\cdot\cos\beta$, $\cos\alpha\cdot\sin\beta$ (α, $\beta \in \mathrm{R}$) na součet goniometrických funkcí (viz příklad 3 na str. 187).

Součtové vzorce pro funkci tangens

Pro každá dvě reálná čísla $\alpha \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $\beta \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, kde $k \in \mathrm{Z}$, platí:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}, \text{ je-li } \alpha+\beta \neq (2x+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathrm{Z},\ \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta \neq 1$$
$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}, \text{ je-li } \alpha-\beta \neq (2x+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathrm{Z},\ \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta \neq -1$$

Poznámka. Vzorce plynou z definičních vztahů pro $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$, $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$ a ze součtových vzorců pro sinus a kosinus.

Vzorce pro funkci tangens argumentů 2α a $\frac{\alpha}{2}$

Pro každé reálné číslo $\alpha \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $\alpha \neq (2k+1)\frac{\pi}{4}$, kde $k \in \mathrm{Z}$, platí:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$$

Pro každé reálné číslo $\alpha \neq (2k+1)\pi$, kde $k \in \mathrm{Z}$, platí:

$$\left|\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

Poznámka. První ze vzorců dostaneme ze vzorce pro $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$, položíme-li $\beta = \alpha$. Druhý vzorec plyne z definičního vztahu pro $\left|\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right|$ a ze vzorců pro $\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|$, $\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|$.

Součtové vzorce pro funkce sinus a kosinus uvedené na str. 180 jsou základní vzorce, jež si nutně zapamatujte! Další vzorce pro goniometrické funkce lze odvodit jejich užitím.

Tak. *např.* užitím součtových vzorců a toho, že $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\sin\pi = 0$, $\cos\pi = -1$ odvodíme snadno *větu:*

Pro každé $x \in \mathrm{R}$ platí vzorce

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x, \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x,$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x, \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x,$$
$$\sin(\pi+x)=-\sin x, \qquad \cos(\pi+x)=-\cos x,$$
$$\sin(\pi-x)=\sin x, \qquad \cos(\pi-x)=-\cos x.$$

Důkaz provedeme pro první z těchto často užitečných vzorců (u ostatních je odvození obdobné):

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\sin\frac{\pi}{2}\cos x+\cos\frac{\pi}{2}\sin x=1\cdot\cos x+0\cdot\sin x=\cos x.$$

Úlohy na užití goniometrických vzorců k určování hodnot goniometrických funkcí

Existují *dva typy těchto úloh*: V prvním případě se určují funkční hodnoty pro zadané hodnoty argumentů, ve druhém případě se k zadaným hodnotám některých goniometrických funkcí hledají hodnoty dalších goniometrických funkcí téhož argumentu. Úlohy druhého typu jsou řešitelné jednoznačně jen tehdy, jsou-li zadány doplňující podmínky pro interval, v němž se nalézají uvažované hodnoty argumentů.

Příklady určování hodnot goniometrických funkcí užitím goniometrických vzorců

1. Určete: a) $\sin\frac{5}{12}\pi$, $\cos\frac{5}{12}\pi$, b) $\sin 105° - \sin 45°$.

Řešení

a) Podle součtových vzorců pro funkce sinus a kosinus dostáváme

$$\sin\frac{5}{12}\pi=\sin\left(\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{12}\pi\right)=\cos\frac{1}{12}\pi=\cos\left(\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{6}\pi\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},$$
$$\cos\frac{5}{12}\pi=\cos\left(\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{12}\pi\right)=\sin\frac{1}{12}\pi=\sin\left(\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{6}\pi\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

b) Výpočet provedeme na základě vzorce pro rozdíl hodnot funkce sinus

$$\sin 105° - \sin 45° = 2\cos\frac{105°+45°}{2}\cdot\sin\frac{105°-45°}{2}=$$
$$=2\cos 75°\cdot\sin 30° = 2\cdot\cos 75°\cdot\frac{1}{2}=\cos 75° = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

(podle předchozího příkladu, neboť $75° = \frac{5}{12}\pi$).

2. Určete hodnoty ostatních goniometrických funkcí téhož argumentu α, je-li dána hodnota: a) $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, b) $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{3}{4}$.

Řešení

a) Ze základní rovnosti pro funkce sinus a kosinus (str. 179) plyne

$$\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha \Rightarrow \cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha},$$

odtud

$$\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\pm\sqrt{\frac{16}{25}}=\pm\frac{4}{5}.$$

Dále užitím definičních vztahů určíme hodnoty $\operatorname{tg}\alpha$ a $\operatorname{cotg}\alpha$:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\pm\frac{3}{4},\quad \operatorname{cotg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=\pm\frac{4}{3}$$

b) Hodnotu $\cos\alpha$ určíme podle vzorce ze str. 179:

$$\frac{1}{\cos^2\alpha}=1+\operatorname{tg}^2\alpha \Rightarrow \cos\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}},$$

odtud

$$\cos\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{16}}}=\pm\frac{4}{5}.$$

Užitím definičního vztahu pro $\operatorname{tg}\alpha$ dále určíme hodnotu $\sin\alpha$:

$$\sin\alpha=\operatorname{tg}\alpha\cdot\cos\alpha=\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\pm\frac{4}{5}\right)=\mp\frac{3}{5};$$

hodnotu $\operatorname{cotg}\alpha$ určíme přímo z dané hodnoty $\operatorname{tg}\alpha$:

$$\operatorname{cotg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=-\frac{4}{3}.$$

Úlohy na úpravy goniometrických výrazů a důkazy goniometrických vzorců

V následujících příkladech budeme pomocí uvedených goniometrických vzorců řešit *dva často se vyskytující typy goniometrických úloh.*

Prvním typem jsou úlohy na **úpravu goniometrického výrazu**, tj. výrazu obsahujícího goniometrické funkce. Důvodem a cílem úpravy bývá zpravidla co největší zjednodušení daného goniometrického výrazu nebo převedení výrazu obsahujícího součet, popř. rozdíl goniometrických funkcí, který nelze logaritmovat, na součin nebo podíl, jenž se logaritmovat dá. Nutnou součástí řešení úloh tohoto typu je stanovit podmínky, za nichž provedené úpravy mají smysl.

Druhým typem jsou důkazové úlohy, v nichž se má dokázat platnost nějakého goniometrického vzorce, tj. rovnosti obsahující goniometrické funkce. Zpravidla postupujeme tak, že složitější stranu vzorce upravujeme, až dospějeme k jeho straně jednodušší. Tento postup je v podstatě týž jako u úloh prvního typu, předem víme, který výsledek máme dostat. Nedílnou součástí důkazu vzorce je ověření podmínek jeho platnosti.

Příklady úprav goniometrických výrazů

Zjednodušte goniometrické výrazy:

1. a) $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha + \cos^2\alpha$, b) $\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} - \dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$.

Řešení

a) $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha + \cos^2\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha) + \cos^2\alpha =$
$= 1(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha) + \cos^2\alpha = \sin^2\alpha$ pro každé $\alpha \in \mathsf{R}$,

b) $$\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{1-\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin\alpha\,(1-\cos\alpha)} = \frac{1-(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)}{\sin\alpha\,(1-\cos\alpha)} =$$
$$= \frac{1-1}{\sin\alpha\,(1-\cos\alpha)} = 0,$$ jestliže $\sin\alpha \neq 0$ a $\cos\alpha \neq 1$, tj. pro každé reálné $\alpha \neq k\pi$, $k \in \mathsf{Z}$.

2. a) $\dfrac{\sin^2\alpha - \mathrm{tg}^2\alpha}{\cos^2\alpha - \mathrm{cotg}^2\alpha}$, b) $\dfrac{\cos^2\alpha}{\mathrm{cotg}\,\frac{\alpha}{2} - \mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}}$.

Řešení

a) $$\frac{\sin^2\alpha - \mathrm{tg}^2\alpha}{\cos^2\alpha - \mathrm{cotg}^2\alpha} = \left(\sin^2\alpha - \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right) : \left(\cos^2\alpha - \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}\right) =$$
$$= \frac{\sin^2\alpha(\cos^2\alpha - 1)}{\cos^2\alpha} : \frac{\cos^2\alpha(\sin^2\alpha-1)}{\sin^2\alpha} =$$
$$= \frac{\sin^2\alpha(-\sin^2\alpha)}{\cos^2\alpha} : \frac{\cos^2\alpha(-\cos^2\alpha)}{\sin^2\alpha} = \frac{-\sin^4\alpha}{\cos^2\alpha}\cdot\frac{\sin^2\alpha}{-\cos^4\alpha} = \mathrm{tg}^6\alpha,$$

jestliže $\sin\alpha \neq 0$ a $\cos\alpha \neq 0$ čili pro každé reálné $\alpha \neq k\dfrac{\pi}{2}$, $k \in \mathsf{Z}$.

b) Nejprve upravíme jmenovatele
$$\mathrm{cotg}\,\frac{\alpha}{2} - \mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} - \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos 2\frac{\alpha}{2}}{\frac{1}{2}\sin 2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Proto daný výraz je roven $\cos^2\alpha : \dfrac{2\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{2} = \dfrac{1}{4}\sin 2\alpha$, jestliže $\sin\alpha \neq 0$ čili pro každé reálné $\alpha \neq k\pi$, $k \in \mathsf{Z}$.

3. Převeďte výrazy $\sin\alpha \pm \cos\beta$ na součin. Uvažte speciálně též případy, kdy $\beta = \alpha$.

Řešení

Podle vzorce pro $\sin(\alpha - \beta)$ platí pro každé $\beta \in \mathsf{R}$, že
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \sin\frac{\pi}{2}\cos\beta - \cos\frac{\pi}{2}\sin\beta = \cos\beta.$$

Užitím tohoto vztahu a vzorce pro součet sinů (str. 180) dostáváme
$$\sin\alpha + \cos\beta = \sin\alpha + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = 2\sin\frac{\alpha + \frac{\pi}{2} - \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \frac{\pi}{2} + \beta}{2} =$$
$$= 2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

pro každá dvě reálná čísla α, β.

Speciálně pro $\beta = \alpha$ odtud plyne:
$$\sin\alpha + \cos\alpha = 2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right),$$

neboť $\cos\alpha = \sin\left(\alpha + \dfrac{\pi}{2}\right)$ pro každé $\alpha \in \mathsf{R}$.

Analogickým postupem dostaneme
$$\sin\alpha - \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

pro každá dvě reálná čísla α, β a speciálně pro $\beta = \alpha$ odtud plyne
$$\sin\alpha - \cos\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right).$$

4. Vyjádřete a) $\sin x$, b) $\cos x$, c) $\mathrm{tg}\,x$ jako racionální lomené funkce proměnné $t = \mathrm{tg}\,\dfrac{x}{2}$.

Řešení

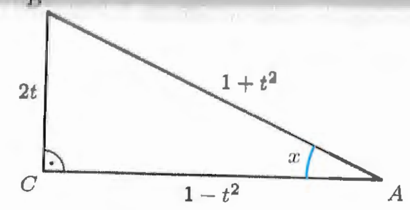
Užitím vzorců dostáváme:

a) $$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cos^2\frac{x}{2} = 2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$
je-li $\cos\dfrac{x}{2} \neq 0$ čili $\dfrac{x}{2} \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$ čili pro každé reálné číslo $x \neq (2k+1)\pi$, $k \in \mathsf{Z}$;

b) $$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \cos^2\frac{x}{2}\left(1 - \mathrm{tg}^2\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}\cdot\left(1 - \mathrm{tg}^2\frac{x}{2}\right) =$$
$$= \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$ pro každé reálné číslo $x \neq (2k+1)\pi$, $k \in \mathsf{Z}$;

c) $$\mathrm{tg}\,x = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1-t^2}$$ pro každé reálné číslo $x \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$, $x \neq (2k+1)\pi$, $k \in \mathsf{Z}$.

Poznámka. Vztahy odvozené v příkladu 4 jsou užívány v integrálním počtu a lze si je zapamatovat pomocí pravoúhlého trojúhelníku v obr. 4.45. (Označíme-li $|AC| = 1 - t^2$, $|BC| = 2t$, je podle Pythagorovy věty $|AB| = \sqrt{4t^2 + (1-t^2)^2} = 1 + t^2$.)



Obr. 4.45

Příklady důkazů goniometrických vzorců (rovností)

1. Dokažte, že platí vzorce:

a) $1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$, b) $1 + \mathrm{cotg}^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$,

a stanovte podmínky jejich platnosti.

Řešení

a) Vyjdeme z definice tg α a užitím základní goniometrické rovnosti $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ dostáváme

$$1 + \mathrm{tg}^2\alpha = 1 + \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha},$$

jestliže $\cos\alpha \neq 0$ čili pro každé reálné $\alpha \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

b) Dokážeme obdobně. Platí za předpokladu, že $\sin\alpha \neq 0$ čili pro každé reálné $\alpha \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. Dokažte, že platí rovnosti:

a) $\dfrac{\mathrm{tg}\,2\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\alpha}{\mathrm{tg}\,2\alpha - \mathrm{tg}\,\alpha} = \sin 2\alpha$, b) $\dfrac{2\sin\alpha + \sin 2\alpha}{2\sin\alpha - \sin 2\alpha} = \mathrm{cotg}^2\dfrac{\alpha}{2}$,

a stanovte podmínky jejich platnosti.

Řešení

a) Levou, tj. složitější stranu dokazované rovnosti upravíme postupně užitím vzorců takto:

$$\frac{\mathrm{tg}\,2\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\alpha}{\mathrm{tg}\,2\alpha - \mathrm{tg}\,\alpha} = \frac{2\,\mathrm{tg}^2\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha} : \left(\frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha} - \mathrm{tg}\,\alpha\right) =$$
$$= \frac{2\,\mathrm{tg}^2\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha} : \frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\alpha(1-\mathrm{tg}^2\alpha)}{1-\mathrm{tg}^2\alpha} = \frac{2\,\mathrm{tg}^2\alpha}{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}^3\alpha} =$$
$$= 2\,\mathrm{tg}\,\alpha : (1+\mathrm{tg}^2\alpha) = \frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha} : \left(1 + \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right) =$$
$$= \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha} : \frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = 2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$$

Platí, když $\mathrm{tg}\,\alpha \neq \pm 1$, $\sin\alpha \neq 0$, $\cos\alpha \neq 0$, $\cos 2\alpha \neq 0$, tj. pro každé reálné α takové, že $\alpha \neq k \cdot \frac{\pi}{2}$ a $\alpha \neq (2k+1)\frac{\pi}{4}$, kde $k \in \mathbb{Z}$.

b) Levou stranu upravíme postupně užitím vzorců:

$$\frac{2\sin\alpha + \sin 2\alpha}{2\sin\alpha - \sin 2\alpha} = \frac{2\sin\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha}{2\sin\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{2\sin\alpha(1+\cos\alpha)}{2\sin\alpha(1-\cos\alpha)} =$$
$$= \frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha} = \mathrm{cotg}^2\frac{\alpha}{2}$$

Platí, když $\sin\alpha \neq 0$ a $\cos\alpha \neq 1$ čili pro každé reálné $\alpha \neq k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$.

3. Dokažte, že pro každá dvě reálná čísla α, β platí vzorce:

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$$
$$\cos\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)]$$
$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$$
$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$$

Řešení

Tyto vzorce dostaneme postupně sečtením, resp. odečtením součtových a rozdílových vzorců pro funkce sinus a kosinus.

Poznámka. Vzorce uvedené v příkladu 3 se užívají zejména v diferenciálním a integrálním počtu při výpočtu derivací a integrálů ze součinu goniometrických funkcí sinus a kosinus.

4.6 Užití goniometrických funkcí, goniometrický tvar komplexních čísel

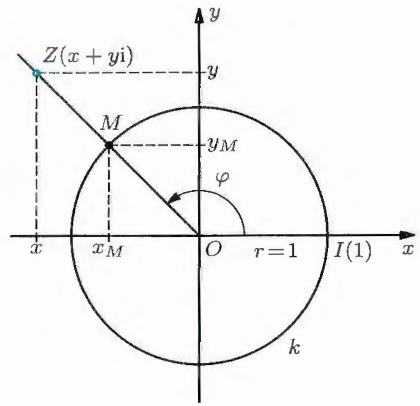
Goniometrické funkce se často používají v matematice i v dalších vědních oborech, např. ve fyzice a v technických oborech. Uvedeme některé významné příklady.

Užití goniometrických funkcí v aritmetice komplexních čísel

Goniometrický tvar komplexního čísla – *definice*: Uvažujeme libovolné komplexní číslo $z \neq 0$ v algebraickém tvaru $z = x + \mathrm{i}y$ (kap. 2.8), jehož obrazem v Gaussově rovině je bod $Z(x + y\mathrm{i})$ (obr. 4.46). Sestrojíme jednotkovou kružnici k se středem v počátku O, která protíná kladnou poloosu x v bodě $I(1)$. Polopřímka OZ protne kružnici k v bodě M, o němž z goniometrie (kap. 4.5) víme, že má souřadnice $x_M = \cos\varphi$, $y_M = \sin\varphi$, kde $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$ je základní velikost orientovaného úhlu $\widehat{IOM}$ v míře obloukové, resp. $\varphi \in \langle 0°, 360°)$ v míře stupňové. Odtud plyne, že pro souřadnice $x = \mathrm{Re}\,z$, $y = \mathrm{Im}\,z$ bodu Z platí

$$x = |z| \cos \varphi, \quad y = |z| \sin \varphi,$$

neboť bod M je bodem polopřímky OZ a $|OZ| : |OM| = |z| : 1 = |z|$ (obr. 4.46).



Obr. 4.46

Dosazením do algebraického tvaru komplexního čísla $z \neq 0$ dostáváme

$$z = |z|(\cos \varphi + \mathrm{i} \sin \varphi), \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi),$$

a tento tvar se nazývá **goniometrický tvar komplexního čísla** $z \neq 0$.

Číslu φ v goniometrickém tvaru čísla z se říká **argument komplexního čísla** $z \neq 0$ a píše se $\arg z = \varphi$. Za předpokladu, že $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$, argument φ představuje základní velikost orientovaného úhlu s vrcholem v počátku O, jehož počátečním ramenem je kladná poloosa x a koncové rameno prochází obrazem komplexního čísla z (obr. 4.46). Argument $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$ čísla $z \neq 0$ je určen jednoznačně vzorci uvedenými přehledně v následujícím textu.

Vzorce pro převod algebraického tvaru komplexního čísla na goniometrický tvar

Pro určení absolutní hodnoty $|z|$ a argumentu φ libovolného komplexního čísla $z = x + yi \neq 0$ platí vzorce:

$$|z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\cos \varphi = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|} = \frac{x}{|z|}, \qquad \sin \varphi = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|} = \frac{y}{|z|}$$

Poznámky.

1. Čísla $r = |z|$ a φ v goniometrickém tvaru komplexního čísla $z \neq 0$ představují v Gaussově rovině tzv. polární souřadnice (kap. 10.2) bodu Z, který je obrazem komplexního čísla z. Proto se tento jeho tvar nazývá v literatuře též **polární tvar komplexního čísla** $z \neq 0$.

2. Protože funkce sinus a kosinus jsou periodické s periodou $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, lze vzít za argument čísla $z \neq 0$ také každé reálné číslo tvaru $\varphi' = \varphi + 2k\pi$, kde k je libovolné celé číslo. Číslu $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$, resp. $\varphi \in (-\pi, \pi\rangle$ se pak říká **hlavní (základní) hodnota argumentu komplexního čísla** $z \neq 0$.

Převedení algebraického tvaru komplexního čísla $z \neq 0$ na goniometrický tvar a opačně na základě uvedených vzorců ukážeme na několika příkladech.

Příklady převedení algebraického tvaru komplexního čísla na goniometrický tvar

Převeďte na goniometrický tvar komplexní čísla

a) $\sqrt{3} + \mathrm{i}$, b) $\sqrt{3} - \mathrm{i}$, c) 1, d) $-5\mathrm{i}$.

Řešení

Užitím vzorců pro daná komplexní čísla z vypočteme $|z|$ a $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$, resp. $\varphi \in (-\pi, \pi\rangle$, čímž určíme jejich hledaný goniometrický tvar $z = |z|(\cos \varphi + \mathrm{i} \sin \varphi)$.

a) $|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = 2$, $\cos \varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin \varphi = \dfrac{1}{2}$, odkud $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$,
a tedy $\sqrt{3} + \mathrm{i} = 2\left(\cos \dfrac{\pi}{6} + \mathrm{i} \sin \dfrac{\pi}{6}\right)$;

b) $|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = 2$, $\cos \varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin \varphi = -\dfrac{1}{2}$, odkud $\varphi = $
$= \dfrac{11}{6}\pi$, resp. $\varphi = -\dfrac{\pi}{6}$, takže $\sqrt{3} - \mathrm{i} = 2\left(\cos \dfrac{11}{6}\pi + \mathrm{i} \sin \dfrac{11}{6}\pi\right)$, resp. $\sqrt{3} - \mathrm{i} =$
$= 2\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + \mathrm{i} \sin\left(\dfrac{-\pi}{6}\right)\right]$;

c) $|z| = 1$, $\cos \varphi = \dfrac{1}{1} = 1$, $\sin \varphi = \dfrac{0}{1} = 0$, odkud $\varphi = 0$, a tedy $1 = \cos 0 + \mathrm{i} \sin 0$;

d) $|z| = |-5\mathrm{i}| = 5|\mathrm{i}| = 5 \cdot 1 = 5$, $\cos \varphi = 0$, $\sin \varphi = -1$, odkud $\varphi =$
$= \dfrac{3}{2}\pi$, resp. $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$, a tedy $-5\mathrm{i} = 5\left(\cos \dfrac{3}{2}\pi + \mathrm{i} \sin \dfrac{3}{2}\pi\right)$, resp. $-5\mathrm{i} =$
$= 5\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i} \sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right]$.

Příklady převedení komplexních čísel z goniometrického tvaru na algebraický tvar

Převeďte na algebraický tvar komplexní čísla

a) $3(\cos 225° + \mathrm{i} \sin 225°)$, b) $2\sqrt{2}\left(\cos \dfrac{7}{4}\pi + \mathrm{i} \sin \dfrac{7}{4}\pi\right)$.

Řešení

Určíme $x = |z| \cos \varphi$, $y = |z| \sin \varphi$ a odtud $z = x + yi$.

a) $225° = 180° + 45° \Rightarrow \cos 225° = -\cos 45° = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin 225° = -\sin 45° =$
$= -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, takže $x = 3 \cdot \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $y = 3 \cdot \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, a tedy
$3(\cos 225° + \mathrm{i} \sin 225°) = -\dfrac{3}{2}\sqrt{2} - \dfrac{3}{2}\sqrt{2}\mathrm{i}$;

b) $\frac{7}{4}\pi = 2\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow \cos\frac{7}{4}\pi = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\frac{7}{4}\pi = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, takže $x = 2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 2$, $y = 2\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2$, a tedy $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{7}{4}\pi\right) = 2 - 2\mathrm{i}$.

Výpočet součinu a podílu komplexních čísel v goniometrickém tvaru

Užitím součtových vzorců pro funkce sinus a kosinus (str. 180) snadno dokážeme, že součin a podíl libovolných dvou komplexních jednotek jsou komplexní jednotky dané vzorci:

$$(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2) = \cos(\varphi_1+\varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1+\varphi_2),$$

$$\frac{\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1}{\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2} = \frac{(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - \mathrm{i}\sin\varphi_2)}{(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 - \mathrm{i}\sin\varphi_2)} = \cos(\varphi_1-\varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1-\varphi_2).$$

Odtud pro součin a podíl libovolných dvou nenulových komplexních čísel z_1, z_2 v goniometrickém tvaru plynou následující vzorce.

Vzorce pro součin a podíl komplexních čísel v goniometrickém tvaru

Pro součin a podíl libovolných dvou nenulových komplexních čísel $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1)$, $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2)$ platí vzorce:

$$z_1 z_2 = |z_1|\,|z_2|[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1+\varphi_2)]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}[\cos(\varphi_1-\varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1-\varphi_2)]$$

Poznámka. Matematickou indukcí je možno dokázat, že pro každé $n \in \mathrm{N}$ se součin n komplexních jednotek s argumenty $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ rovná komplexní jednotce

$$\cos(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n).$$

Na základě toho lze zobecnit větu o součinu dvou nenulových komplexních čísel v goniometrickém tvaru pro n takových činitelů.

Příklady výpočtu součinu a podílu komplexních čísel v goniometrickém tvaru

Vypočtěte součin a podíl komplexních čísel (v uvedeném pořadí):

$$z_1 = 3\left(\cos\frac{5}{6}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{5}{6}\pi\right), \quad z_2 = 16\left(\cos\frac{4}{3}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{4}{3}\pi\right).$$

Řešení

Podle vzorců je

a)
$$z_1z_2 = 3\cdot 16\left[\cos\left(\frac{5}{6}\pi + \frac{4}{3}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{5}{6}\pi + \frac{4}{3}\pi\right)\right] =$$
$$= 48\left(\cos\frac{13}{6}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{13}{6}\pi\right) = 48\left[\cos\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi\right)\right] =$$
$$= 48\left(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right) = 48\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right) = 24(\sqrt{3} + \mathrm{i}),$$

b)
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3}{16}\left[\cos\left(\frac{5}{6}\pi - \frac{4}{3}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{5}{6}\pi - \frac{4}{3}\pi\right)\right] =$$
$$= \frac{3}{16}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{3}{16}\left(\cos\frac{\pi}{2} - \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{16}(0 - \mathrm{i}) = -\frac{3}{16}\mathrm{i}.$$

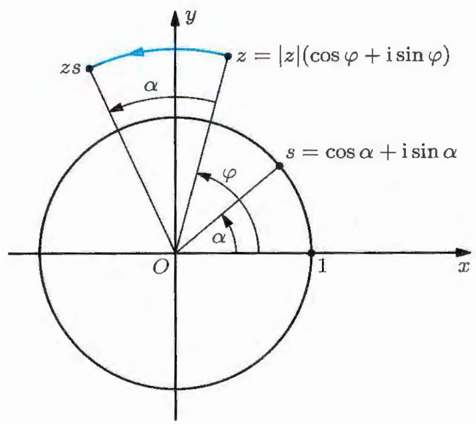
Geometrické znázornění součinu a podílu komplexních čísel v goniometrickém tvaru v Gaussově rovině

V kap. 2.8 jsme ukázali, že součet a rozdíl komplexních čísel lze geometricky znázornit pomocí sčítání a odčítání polohových vektorů sčítaných, resp. odčítaných komplexních čísel (obr. 2.9) neboli jinak řečeno pomocí posunutí obrazů těchto čísel v Gaussově rovině. Nyní ukážeme, že také součin a podíl komplexních čísel lze znázornit užitím dalších geometrických zobrazení v rovině – použitím *otočení* a *stejnolehlosti* (viz kap. 9.8):

a) Nejprve ukážeme, jak lze graficky sestrojit součin nenulového komplexního čísla $z = |z|(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ a komplexní jednotky $s = \cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha$. Pro součin zs platí

$$zs = |z|(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha) = |z|[\cos(\varphi+\alpha) + \mathrm{i}\sin(\varphi+\alpha)].$$

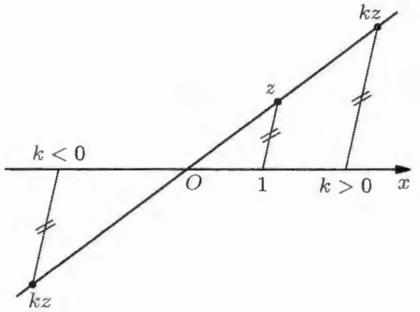
Odtud plyne (obr. 4.47):



Obr. 4.47

Obraz součinu komplexního čísla $z \neq 0$ a komplexní jednotky s sestrojíme v Gaussově rovině tak, že obraz komplexního čísla z otočíme kolem počátku O v kladném smyslu o argument komplexní jednotky s.

b) Dále popíšeme, jak můžeme graficky sestrojit součin nenulového komplexního čísla $z = |z|(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ a reálného čísla $k \neq 0$. Pro součin kz platí $kz = k|z|(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ a odtud plyne (obr. 4.48):



Obr. 4.48

Obraz součinu komplexního čísla $z \neq 0$ a reálného čísla $k \neq 0$ sestrojíme v Gaussově rovině tak, že obraz komplexního čísla z zobrazíme ve stejnolehlosti se středem v počátku O a s koeficientem k. (Touto stejnolehlostí se zobrazí obraz čísla 1 na obraz čísla k a obraz komplexního čísla z na obraz komplexního čísla kz.)

c) Ukážeme, jak lze graficky sestrojit součin libovolných dvou nenulových komplexních čísel v goniometrickém tvaru $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1)$, $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2)$. Pro součin z_1z_2 platí

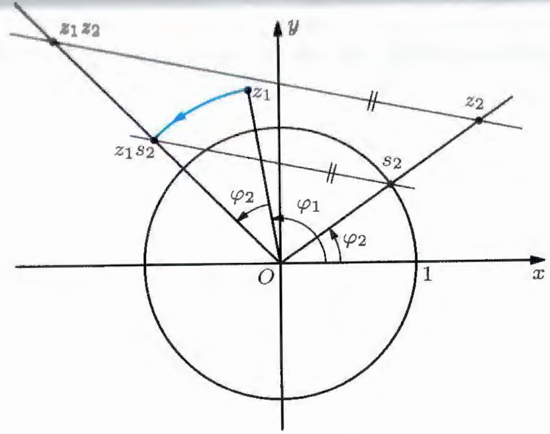
$$|z| = |z_1z_2| = |z_1|\,|z_2|, \quad \arg z = \arg z_1z_2 = \varphi_1 + \varphi_2.$$

Odtud plyne (obr. 4.49):

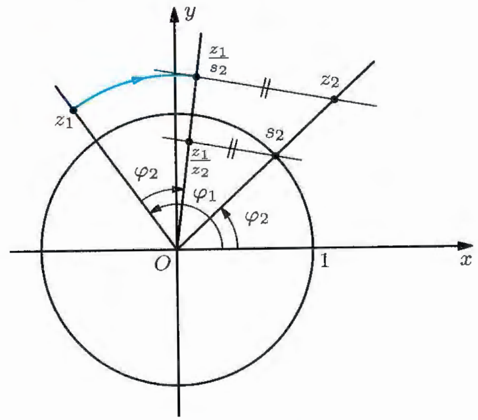
Obraz součinu komplexních čísel $z_1 \neq 0$, $z_2 \neq 0$ sestrojíme v Gaussově rovině tak, že nejprve obraz komplexního čísla z_1 otočíme kolem počátku O v kladném smyslu o argument komplexní jednotky $s_2 = \cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2$, čímž získáme obraz komplexního čísla z_1s_2 a k němu sestrojíme obraz součinu z_1z_2 ve stejnolehlosti se středem O a s koeficientem $|z_2|$.

d) Ukážeme, jak lze graficky sestrojit podíl libovolných dvou nenulových komplexních čísel v goniometrickém tvaru $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1)$, $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2)$. Pro podíl $\dfrac{z_1}{z_2}$ platí

$$|z| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \arg z = \arg\frac{z_1}{z_2} = \varphi_1 - \varphi_2.$$



Obr. 4.49



Obr. 4.50

Odtud plyne (obr. 4.50):

Obraz podílu komplexních čísel $z_1 \neq 0$, $z_2 \neq 0$ sestrojíme v Gaussově rovině tak, že nejprve obraz komplexního čísla z_1 otočíme kolem počátku O v záporném smyslu o argument komplexní jednotky $s_2 = \cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2$, čímž získáme obraz komplexního čísla $\dfrac{z_1}{s_2}$ a k němu sestrojíme obraz podílu $\dfrac{z_1}{z_2}$ ve stejnolehlosti se středem O a s koeficientem $\dfrac{1}{|z_2|}$.

Moivreova věta a goniometrický tvar n-té mocniny komplexního čísla

Speciálním případem věty o součinu n komplexních jednotek s argumenty $\varphi_1 = \varphi$, $\varphi_2 = \varphi$, ..., $\varphi_n = \varphi$ je *věta:*

Moivreova věta [čti: moávrova věta]
Pro každé reálné číslo φ a $n \in \mathbb{N}$ platí

$$(\cos \varphi + \mathrm{i} \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + \mathrm{i} \sin n\varphi.$$

Tuto větu lze dokázat též samostatně *matematickou indukcí* a plyne z ní jako důsledek následující věta o vyjádření n-té mocniny libovolného nenulového komplexního čísla v goniometrickém tvaru.

Vzorec pro n-tou mocninu komplexního čísla v goniometrickém tvaru
Nechť $z = |z|(\cos \varphi + \mathrm{i} \sin \varphi)$ je libovolné nenulové komplexní číslo a $n \in \mathbb{N}$. Pak n-tá mocnina čísla z je dána vzorcem:

$$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + \mathrm{i} \sin n\varphi)$$

Příklad výpočtu n-té mocniny komplexního čísla v goniometrickém tvaru
Vypočtěte $(1-\mathrm{i})^{15}$ užitím Moivreovy věty.
Řešení
$|1-\mathrm{i}| = \sqrt{2}$, $\cos \varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin \varphi = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = \dfrac{7}{4}\pi$, takže $1 - \mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\cos \dfrac{7}{4}\pi + \mathrm{i} \sin \dfrac{7}{4}\pi\right)$.
Podle důsledku Moivreovy věty je proto

$$\begin{aligned}(1-\mathrm{i})^{15} &= (\sqrt{2})^{15}\left(\cos 15 \cdot \frac{7}{4}\pi + \mathrm{i} \sin 15 \cdot \frac{7}{4}\pi\right) = \\ &= 128\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + 13 \cdot 2\pi\right) + \mathrm{i} \sin\left(\frac{\pi}{4} + 13 \cdot 2\pi\right)\right] = \\ &= 128\sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + \mathrm{i} \sin \frac{\pi}{4}\right) = 128\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i}) = \\ &= 128(1+\mathrm{i}) = 128 + 128\mathrm{i}.\end{aligned}$$

Příklad užití Moivreovy věty k vyjádření $\cos n\alpha$, $\sin n\alpha$ $(n \in \mathbb{N})$ ***pomocí*** $\cos \alpha$, $\sin \alpha$ ***pro každé*** $\alpha \in \mathbb{R}$
Vyjádřete pro libovolné $\alpha \in \mathbb{R}$ $\cos 3\alpha$, $\sin 3\alpha$ pomocí $\cos \alpha$, $\sin \alpha$.
Řešení
Podle Moivreovy věty je

$$(\cos \alpha + \mathrm{i} \sin \alpha)^3 = \cos 3\alpha + \mathrm{i} \sin 3\alpha$$

a zároveň podle definice třetí mocniny komplexního čísla dostáváme

$$(\cos \alpha + \mathrm{i} \sin \alpha)^3 = (\cos^3\alpha - 3 \cos \alpha \sin^2\alpha) + \mathrm{i}(3 \cos^2\alpha \sin \alpha - \sin^3\alpha).$$

Odtud a z definice rovnosti komplexních čísel plynou rovnosti:

$$\begin{aligned}\cos 3\alpha &= \cos^3\alpha - 3 \cos \alpha \sin^2\alpha \\ \sin 3\alpha &= 3 \cos^2\alpha \sin \alpha - \sin^3\alpha\end{aligned}$$

Dosadíme-li do první z těchto rovností za $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$ a do druhé z nich za $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$, po úpravě docházíme k těmto výsledkům pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3\alpha - 3 \cos \alpha, \quad \sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3\alpha$$

n-tá odmocnina komplexního čísla v goniometrickém tvaru

Pro každé $a \in \mathbb{C}$ a $n \in \mathbb{N}$ je podle definice n-té odmocniny komplexního čísla a (kap. 2.8)

$$z = (\sqrt[n]{a})_{\mathbb{C}}\,, \text{ právě když } z^n = a.$$

Předpokládejme, že $a \neq 0$. Nechť komplexní číslo $z = |z|(\cos \varphi + \mathrm{i} \sin \varphi)$ je řešením rovnice $z^n = a$, kde $a = |a|(\cos \alpha + \mathrm{i} \sin \alpha)$, takže podle důsledku Moiverovy věty platí

$$|z|^n(\cos n\varphi + \mathrm{i} \sin n\varphi) = |a|(\cos \alpha + \mathrm{i} \sin \alpha).$$

Dvě komplexní čísla v goniometrickém tvaru jsou si rovna právě tehdy, když mají tutéž absolutní hodnotu a zároveň jsou si rovny jejich argumenty nebo se liší o celočíselný násobek čísla 2π. Proto z odvozené rovnosti plyne, že je

$$|z| = \sqrt[n]{|a|}, \; n\varphi = \alpha + 2k\pi \text{ čili } \varphi = \frac{\alpha + 2k\pi}{n}, \; k \in \mathbb{Z}.$$

Stačí však vzít $k = 0, 1, \ldots, n-1$, neboť pro jiná celočíselná k dostaneme vždy komplexní číslo z, jehož argument se liší od argumentu jednoho z čísel $z_0, z, \ldots, z_{n-1}$ o celočíselný násobek 2π, takže kosiny a siny obou těchto argumentů jsou tytéž. Získané výsledky shrnuje *věta:*

Vzorec pro n-tou odmocninu komplexního čísla v goniometrickém tvaru
Nechť $a = |a|(\cos \alpha + \mathrm{i} \sin \alpha)$ je libovolné nenulové komplexní číslo a $n \in \mathbb{N}$. Pak existuje právě n různých hodnot n-té odmocniny komplexního čísla a; jsou to komplexní čísla vyjádřená v goniometrickém tvaru vzorcem:

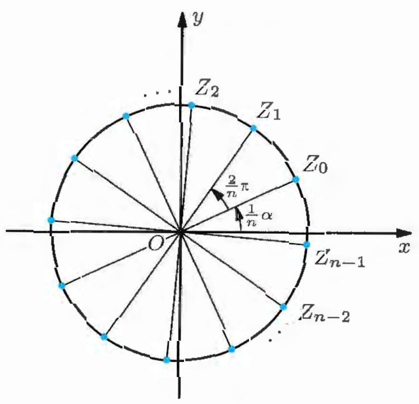
$$(\sqrt[n]{a})_{\mathbb{C}} = z_k = \sqrt[n]{|a|}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + \mathrm{i} \sin\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right],$$

kde $k = 0, 1, \ldots, n-1$ a $\sqrt[n]{|a|}$ je jednoznačná reálná n-tá odmocnina kladného čísla $|a|$.

Z této věty plyne, že všechny hodnoty n-té odmocniny komplexního čísla a mají tutéž absolutní hodnotu rovnou $\sqrt[n]{|a|}$ a jejich argumenty jsou rovny $\dfrac{\alpha}{n} + \dfrac{2k\pi}{n}$, kde $k = 0, 1, \ldots, n-1$, tj. liší se o celistvé násobky čísla $\dfrac{2\pi}{n}$. Proto pro obrazy $(\sqrt[n]{a})_{\mathbb{C}}$ v Gaussově rovině platí:

a) Je-li $n = 2$, pak hodnotami n-té mocniny komplexního čísla $a \neq 0$ jsou dvě opačná komplexní čísla, jejichž obrazy v Gaussově rovině jsou body souměrně sdružené podle počátku, ležící na kružnici se středem v počátku O a o poloměru $r = \sqrt{|a|}$.

b) Je-li $n \geqq 3$, pak obrazy $Z_k(z_k)$ hodnot n-té odmocniny komplexního čísla $a \neq 0$ jsou vrcholy pravidelného n-úhelníku, který je vepsán do kružnice o středu v počátku O a o poloměru $r = \sqrt[n]{|a|}$ (obr. 4.51).



Obr. 4.51

Příklady výpočtu n-té odmocniny komplexního čísla v goniometrickém tvaru

Vypočtěte

a) $(\sqrt{\mathrm{i}})_\mathrm{C}$, b) $(\sqrt[3]{-1})_\mathrm{C}$.

Řešení

Komplexní číslo vyjádříme v goniometrickém tvaru a hledanou odmocninu určíme užitím věty formulované na str. 195.

a) $\mathrm{i} = \cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}$, takže podle vzorce je $(\sqrt{\mathrm{i}})_\mathrm{C} = z_k = \cos\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right)$, kde $k = 0, 1$, neboli nabývá hodnot

$$z_0 = \cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i},$$
$$z_1 = \cos\frac{5}{4}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{5}{4}\pi = -\cos\frac{\pi}{4} - \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}.$$

b) $-1 = \cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi$, a tedy dostáváme $(\sqrt[3]{-1})_\mathrm{C} = z_k = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}k\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}k\pi\right)$, kde $k = 0, 1, 2$, čili

$$z_0 = \cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i},$$
$$z_1 = \cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi = -1$$
$$z_2 = \cos\frac{5}{3}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{5}{3}\pi = \cos\frac{\pi}{3} - \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}.$$

Užití harmonických funkcí a komplexních čísel ve fyzice a v technice

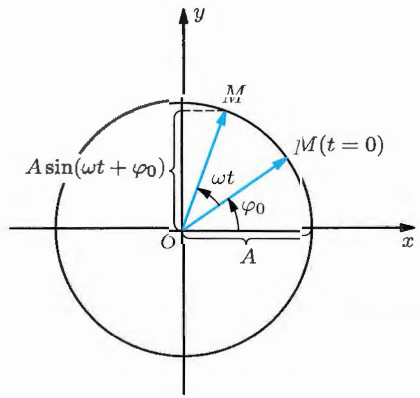
Ve fyzikálních a technických aplikacích se často setkáváme s veličinami vyjádřenými harmonickými funkcemi (viz str. 176) tvaru

$$f\colon y = A\sin(\omega t + \varphi_0),$$

kde A, ω, φ_0 jsou reálné konstanty, t je reálná proměnná (obvykle čas). Konstanta A se nazývá **amplituda (maximální hodnota)** harmonické funkce (veličiny), neboť $\max y = A$, konstanta ω se nazývá **úhlový kmitočet (úhlová frekvence)**, $\omega t + \varphi_0$ **fáze**, φ_0 **počáteční fáze** (pro $t = 0$).

Je-li **perioda** harmonické funkce (harmonické veličiny) $p = T$ a **kmitočet (frekvence)** $f = \frac{1}{T}$, pak pro úhlový kmitočet (úlovou frekvenci) platí

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f.$$



Obr. 4.52

Funkční hodnoty funkce $f\colon y = A\sin(\omega t + \varphi_0)$ argumentu $t \in \langle 0, +\infty)$ můžeme získat takto: Sestrojíme kružnici o poloměru A se středem v počátku kartézské soustavy souřadnic Oxy (obr. 4.52). Po této kružnici nechť se pohybuje v kladném smyslu bod M konstantní úhlovou rychlostí ω. (Úhlová rychlost udává úhlovou dráhu v obloukové míře, kterou opíše polohový vektor $\boldsymbol{OM}$ bodu M za jednotku času.) Orientovaný úhel sevřený kladnou poloosou x a polopřímkou OM v čase $t = 0$ má velikost φ_0, za čas t se pak zvětší o ωt. Souřadnice bodu M jsou $x_M = A\cos(\omega t + \varphi_0)$, $y_M = A\sin(\omega t + \varphi_0)$, takže $y_M = f(t)$ pro $t \in \langle 0, +\infty)$.

Bod M je proto obrazem komplexního čísla v goniometrickém tvaru

$$A\cos(\omega t + \varphi_0) + \mathrm{i}\,A\sin(\omega t + \varphi_0),$$

jehož imaginární částí je funkční hodnota $y = A\sin(\omega t + \varphi_0)$. Lze snadno ukázat, že součtem dvou komplexních čísel uvedeného tvaru je komplexní číslo téhož tvaru.

Toho se užívá ve fyzice a v technice, zejména v elektrotechnice: počítání s goniometrickými funkcemi se nahrazuje jednodušším počítáním s komplexními čísly (tzv. *symbolicko-komplexní metoda*). Přitom, jak jsme uvedli, v elektrotechnice se značí imaginární jednotka j.

Poznámka. V aplikacích se zpravidla pracuje s tzv. **exponenciálním tvarem komplexního čísla**, který dostaneme z goniometrického tvaru, položíme-li

$$\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi},$$

kde e je Eulerovo číslo. Výhoda exponenciálních tvarů komplexních čísel spočívá v tom, že jejich násobení, dělení a umocňování přirozeným číslem se provádí (jak plyne z uvedené definice a ze vzorců na str. 190 a 194) podle analogických pravidel jako pro mocniny v oboru R.

4.7 Cyklometrické funkce a hyperbolické funkce

V této kapitole představíme funkce, které bezprostředně souvisejí se základními elementárními funkcemi probíranými ve středoškolské matematice. Tyto funkce mají četné aplikace v různých oborech matematiky a fyziky, v elektrotechnice i v dalších technických oborech.

Cyklometrické funkce

Funkce inverzní k částem goniometrických funkcí na intervalech, na nichž jsou goniometrické funkce ryze monotónní, a tedy prosté, se nazývají **cyklometrické funkce**. Pro funkci sinus se volí interval $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle$, pro funkci kosinus interval $\langle 0, \pi\rangle$, pro funkci tangens interval $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ a pro funkci kotangens interval $(0, \pi)$.

Funkce arkussinus (označovaná arcsin) je definována takto:

$$f\colon y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y, \quad x \in \mathsf{D}(f) = \langle -1; 1\rangle, \quad y = \mathsf{H}(f) = \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle.$$

Funkce arkuskosinus (označovaná arccos) je definována takto:

$$f\colon y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y, \quad x \in \mathsf{D}(f) = \langle -1; 1\rangle, \quad y = \mathsf{H}(f) = \langle 0, \pi\rangle.$$

Grafy funkcí arkussinus a arkuskosinus jsou v obr. 4.53.

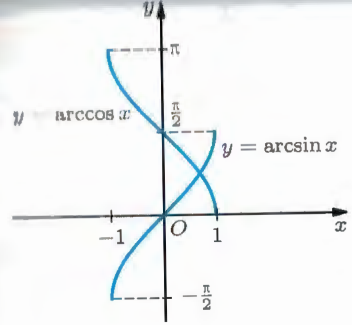
Funkce arkustangens (označovaná arctg) je definována takto:

$$f\colon y = \operatorname{arctg} x \Leftrightarrow x = \operatorname{tg} y, \quad x \in \mathsf{D}(f) = \mathsf{R}, \quad y = \mathsf{H}(f) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

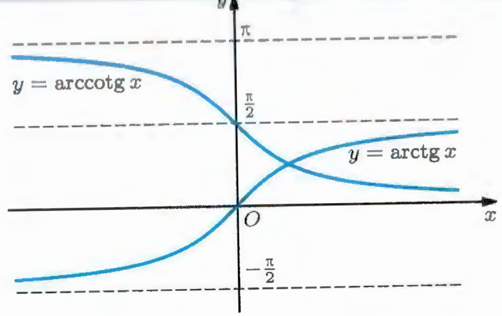
Funkce arkuskotangenss (označovaná arccotg) je definována takto:

$$f\colon y = \operatorname{arccotg} x \Leftrightarrow x = \operatorname{cotg} y, \quad x \in \mathsf{D}(f) = \mathsf{R}, \quad y = \mathsf{H}(f) = (0, \pi).$$

Grafy funkcí arkustangens a arkuskotangens jsou v obr. 4.54.



Obr. 4.53



Obr. 4.54

Poznámka. Na elektronických kalkulátorech se často místo označení arcsin, arccos, arctg, arccotg užívá po řadě označení $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$, tg^{-1}, cotg^{-1}.

Nejčastěji používané vzorce pro cyklometrické funkce

$$\forall x \in \langle -1; 1\rangle: \arcsin(-x) = -\arcsin x$$
$$\forall x \in \langle -1; 1\rangle: \arccos(-x) = \pi - \arccos x$$
$$\forall x \in \langle -1; 1\rangle: \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$
$$\forall x \in \mathsf{R}: \quad \operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$$
$$\forall x \in \mathsf{R}: \quad \operatorname{arccotg}(-x) = \pi - \operatorname{arccotg} x$$
$$\forall x \in \mathsf{R}: \quad \operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}$$

Hyperbolické funkce

Hyperbolické funkce se definují pomocí přirozených exponenciálních funkcí $y = \mathrm{e}^x$ a $y = \mathrm{e}^{-x}$.

Funkce hyperbolický sinus (označovaná sinh) je definována takto:

$$f\colon \sinh x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}, \quad x \in \mathsf{D}(f) = \mathsf{R}, \quad y = \mathsf{H}(f) = \mathsf{R}.$$

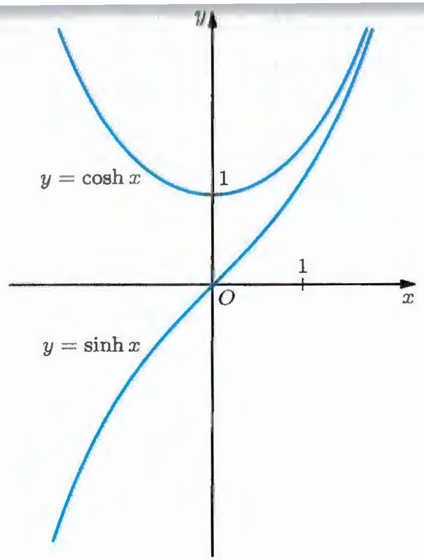
Funkce hyperbolický kosinus (označovaná cosh) je definována takto:

$$f\colon \cosh x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}, \quad x \in \mathsf{D}(f) = \mathsf{R}, \quad y = \mathsf{H}(f) = \langle 1, +\infty).$$

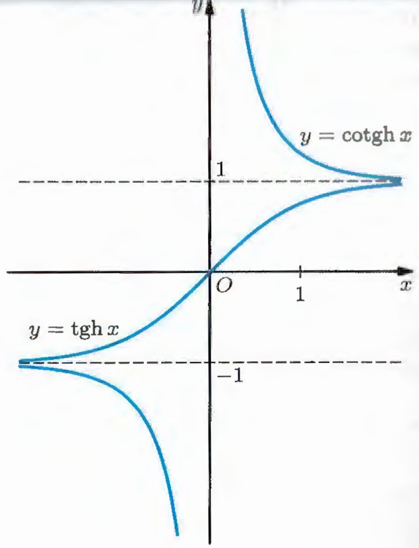
Grafy funkcí hyperbolický sinus a hyperbolický kosinus jsou v obr. 4.55.

Funkce hyperbolický tangens (označovaná tgh) je definována takto:

$$f\colon \operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}, \quad x \in \mathsf{D}(f) = \mathsf{R}, \quad y = \mathsf{H}(f) = (-1; 1).$$



Obr. 4.55



Obr. 4.56

Funkce hyperbolický kotangens (označovaná cotgh) je definována takto:

$$f\colon \operatorname{cotgh} x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}, \quad x \in \mathsf{D}(f) = \mathsf{R} \setminus \{0\}, \quad y = \mathsf{H}(f) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty).$$

Grafy funkcí hyperbolický tangens a hyperbolický kotangens jsou v obr. 4.56.

Nejčastěji používané vzorce pro hyperbolické funkce

$\forall x \in \mathsf{R}$: $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

$\forall x \in \mathsf{R}$: $\sinh(-x) = -\sinh x, \quad \cosh(-x) = \cosh x$

$\forall x_1, x_2 \in \mathsf{R}$: $\sinh(x_1 + x_2) = \sinh x_1 \cosh x_2 + \cosh x_1 \sinh x_2$

$\cosh(x_1 + x_2) = \cosh x_1 \cosh x_2 + \sinh x_1 \sinh x_2$

$\forall x \in \mathsf{R}$: $\operatorname{tgh}(-x) = -\operatorname{tgh} x$

$\forall x \in \mathsf{R} \setminus \{0\}$: $\operatorname{cotgh}(-x) = -\operatorname{cotgh} x$

$\forall x_1, x_2 \in \mathsf{R}$: $\operatorname{tgh}(x_1 + x_2) = \dfrac{\operatorname{tgh} x_1 + \operatorname{tgh} x_2}{1 + \operatorname{tgh} x_1 \cdot \operatorname{tgh} x_2}$

Poznámka. K hyperbolickým funkcím existují funkce inverzní, nazývají se **funkce hyperbolometrické**. Jsou to funkce **argument hyperbolického sinu** (argsinh), **argument hyperbolického kosinu** (argcosh), **argument hyperbolického tangens** (argtgh), **argument hyperbolického kotangens** (argcotgh). Přitom argcosh je možné definovat jen k části funkce hyperbolický kosinus na intervalu $\langle 0, +\infty)$, kde je hyperbolický kosinus funkcí rostoucí, a tedy prostou.

5 Rovnice a nerovnice

5.1 Rovnice a jejich řešení

Mnoho fyzikálních, technických a jiných úloh lze matematicky formulovat jako *úlohu* tohoto typu:

Jsou dány dva výrazy $L(x)$, $P(x)$ s proměnnou x. Mají se určit hodnoty této proměnné z daného číselného oboru M, pro něž jsou si rovny hodnoty obou výrazů. Zápis této úlohy ve tvaru

$$L(x) = P(x)$$

se nazývá **rovnice**. Výrazu $L(x)$ se říká **levá strana rovnice**, výrazu $P(x)$ **pravá strana rovnice**. Speciálně může být jedna strana rovnice konstanta; je-li jí nula, mluvíme o **anulovaném tvaru rovnice**. Proměnná x v rovnici se nazývá **neznámá**. (K jejímu označení se užívají i jiná písmena, zpravidla z konce latinské abecedy.) Hodnoty neznámé (určitá čísla) x_k, pro něž je rovnice splněna, tj. platí rovnost $L(x_k) = P(x_k)$, se nazývají **kořeny (řešení) rovnice**. Číselný obor M, ve kterém hledáme kořeny (řešení) rovnice, nazýváme **oborem řešení rovnice**. Podmnožina množiny M, v níž jsou definovány oba výrazy $L(x)$ a $P(x)$, neboli průnik definičních oborů těchto výrazů, se nazývá **definiční obor rovnice** a značí se D. **Množinu všech kořenů (řešení)** rovnice budeme značit K ($\mathsf{K} \subset \mathsf{D} \subset \mathsf{M}$).

Poznámka. Název **řešení rovnice** se používá v trojím významu: a) pro kořen rovnice, b) pro množinu kořenů rovnice, c) pro postup, jímž se určují kořeny rovnice. Konkrétní význam je buď zadán, nebo bývá v textu zřejmý ze souvislosti.

Příklady rovnic

1. Rovnice $7x = 5$ s neznámou $x \in \mathsf{R}$. Pro tuto rovnici je: a) obor řešení rovnice $\mathsf{M} = \mathsf{R}$, b) neznámá x, c) $L(x) = 7x$, $P(x) = 5$; má právě jeden kořen $x = \frac{5}{7}$ neboli $\mathsf{K} = \left\{\frac{5}{7}\right\}$.

2. Rovnice $7(x-2) + 5 = 2(x-3) + 5x - 3$ s neznámou $x \in \mathsf{R}$. Pro tuto rovnici je: a) obor řešení rovnice $\mathsf{M} = \mathsf{R}$, b) neznámá x, c) $L(x) = 7(x-2) + 5$, $P(x) = 2(x-3) + 5x - 3$; má za kořen libovolné číslo $x \in \mathsf{R}$ neboli $\mathsf{K} = \mathsf{R}$.

3. Rovnice $x^2 = -2$ s neznámou $x \in \mathsf{R}$. Pro tuto rovnici je: a) obor řešení rovnice $\mathsf{M} = \mathsf{R}$, b) neznámá x, c) $L(x) = x^2$, $P(x) = -2$; nemá žádný reálný kořen neboli $\mathsf{K} = \emptyset$.

Volba oboru M řešení rovnice je podstatná z hlediska její řešitelnosti (tj. existence řešení rovnice). Tak *např.* v oboru $\mathsf{M} = \mathsf{C}$ má rovnice $x^2 = -2$ právě dva kořeny $x_1 = \sqrt{2}\mathrm{i}$, $x_2 = -\sqrt{2}\mathrm{i}$, tj. $\mathsf{K} = \{\pm\sqrt{2}\mathrm{i}\}$.

Rovnice s parametry

Kromě neznámých mohou rovnice obsahovat další proměnné, jimž se říká **parametry**. Značí se a, b nebo p apod. Rovnice se pak nazývá **rovnice s parametry** nebo **parametrická rovnice**. Představuje zápis množiny všech rovnic, které získáme dosazením konstant za každý parametr z dané číselné množiny (oboru parametru).

Příkladem je rovnice $ax = b$ s neznámou $x \in \mathsf{R}$ a s parametry $a, b \in \mathsf{R}$.

Řešit rovnici s parametry znamená určit její kořeny v závislosti na přípustných hodnotách parametrů.

Části postupu početního řešení rovnice

Postup řešení dané rovnice se vždy skládá ze tří základních částí zvaných **rozbor (analýza)**, **závěr rozboru**, **zkouška (kontrola)**. U rovnic s parametry je součástí závěru rozboru tzv. **diskuse řešení**.

1. **Rozbor**: Předpokládáme, že daná rovnice má alespoň jeden kořen. Jejími úpravami získáme rovnici, jejíž kořeny známe nebo je snadno dovedeme určit. Přitom použité úpravy rovnice musí mít tu vlastnost, že každý kořen dané rovnice je také kořenem rovnice získané její úpravou. Těmto úpravám rovnice říkáme **důsledkové (implikační) úpravy**. Z logického hlediska představuje důsledková úprava rovnice (1) na rovnici (2) implikaci (odtud její název), a proto se zapisuje (1) $\Rightarrow$ (2). (Pokud píšeme rovnice (1), (2) pod sebou na samostatných řádcích, znak $\Rightarrow$ se vynechává.)

Z důsledkových úprav rovnice jsou zvláště důležité tzv. **ekvivalentní úpravy**. Jsou to takové úpravy dané rovnice, které ji převádějí na rovnici, jejíž množina všech kořenů je rovna množině všech kořenů dané rovnice; obě tyto rovnice se nazývají navzájem **ekvivalentní rovnice**. Z logického hlediska představuje každá ekvivalentní úprava rovnice (1) na rovnici (2) ekvivalenci (odtud její název), a proto se zapisuje (1) $\Leftrightarrow$ (2). (Pokud opět píšeme rovnice (1), (2) pod sebe na samostatných řádcích, znak $\Leftrightarrow$ se vynechává.)

Nejdůležitější ekvivalentní úpravy rovnic jsou shrnuty v tabulce 5.1. Vycházejí z vlastností rovnosti reálných čísel (kap. 2.1). V tabulce 5.1a uvádíme nejvýznamnější důsledkové úpravy rovnic, které nejsou obecně ekvivalentními úpravami.

2. **Závěr rozboru**: Určíme množinu M' všech kořenů rovnice získané v první fázi důsledkovými úpravami. Množina $\mathsf{M}' \subset \mathsf{M}$ obsahuje všechna *možná řešení dané rovnice*. (Pokud však použité důsledkové úpravy nejsou ekvivalentní, pak některé prvky množiny M' nemusejí být kořeny dané rovnice.)

U *rovnic s parametry* se v závěru rozboru provádí **diskuse řešení**: Stanovíme, pro které hodnoty parametrů má daná rovnice řešení, jež určíme, a pro které hodnoty parametrů daná rovnice nemá řešení.

3. **Zkouška**: Zjistíme, které z prvků x_k množiny M' jsou kořeny dané rovnice. Dosadíme postupně každé z čísel $x_k \in \mathsf{M}'$ do levé strany $L(x)$ dané rovnice, čímž dostaneme nějaké číslo $L(x_k)$, a do pravé strany $P(x)$ dané rovnice, čímž dostaneme číslo $P(x_k)$. Je-li $L(x_k) = P(x_k)$, je dosazované číslo x_k kořenem dané rovnice. Výsledkem zkoušky je získání množiny K všech kořenů rovnice ($\mathsf{K} \subset \mathsf{M}' \subset \mathsf{M}$).

Poznámka. **Zkouška je nutnou součástí řešení, pokud všechny důsledkové úpravy použité při rozboru nebyly ekvivalentní. I při použití ekvivalentních úprav je však vhodné ji provádět, abychom si ověřili, zda jsme se při úpravách nedopustili chyb.**

Přehled ekvivalentních úprav rovnice v oboru $\mathsf{M} \subset \mathsf{R}$ — Tab. 5.1

Označení	Ekvivalentní úprava rovnice
(UR 1)	Vzájemná výměna stran rovnice.
(UR 2)	Nahrazení libovolné strany rovnice výrazem, který se jí rovná v celém oboru řešení rovnice.
(UR 3)	Přičtení téhož čísla nebo výrazu s neznámou, který je definován v celém oboru řešení rovnice, k oběma stranám rovnice.
(UR 4)	Vynásobení obou stran rovnice týmž číslem různým od nuly nebo výrazem s neznámou, který je definován a různý od nuly (tj. nabývá jen nenulových hodnot) v celém oboru řešení rovnice. (Stručně říkáme, že *rovnici násobíme číslem*, resp. *výrazem*.)
(UR 5)	Umocnění obou stran rovnice týmž přirozeným mocnitelem, jsou-li obě strany rovnice nezáporné (tj. nabývají jen nezáporných hodnot) v celém oboru řešení rovnice.
(UR 6)	Odmocnění obou stran rovnice týmž přirozeným odmocnitelem, jestliže jsou obě strany rovnice nezáporné (tj. nabývají jen nezáporných hodnot) v celém oboru řešení rovnice.
(UR 7)	Zlogaritmování obou stran rovnice při témž základu, jsou-li obě strany rovnice kladné (tj. nabývají jen kladných hodnot) v celém oboru řešení rovnice.

Přehled důsledkových úprav rovnice v oboru $\mathsf{M} \subset \mathsf{R}$ — Tab. 5.1a

Označení	Důsledková (obecně neekvivalentní) úprava rovnice
(UR 4a)	Vynásobení obou stran rovnice týmž číslem nebo výrazem s neznámou, který je definován v celém oboru řešení rovnice.
(UR 5a)	Umocnění obou stran rovnice týmž přirozeným mocnitelem.

Poznámka. Ekvivalentní úpravy rovnice (UR 1), (UR 2), (UR 3), (UR 4) a důsledkové (obecně neekvivalentní) úpravy rovnice (UR 4a), (UR 5a) jsou použitelné též při řešení rovnice v oboru $\mathsf{M} \subset \mathsf{C}$.

Příklad částí postupu řešení rovnic

Řešte v oboru R rovnici $\dfrac{1-x^2}{1-x} = 2x$ s neznámou x.

1. *Rozbor:* Aby daná rovnice měla smysl, musí být $1 - x \neq 0$ čili $x \neq 1$. Zkrácením levé strany rovnice dvojčlenem $1 - x$ dostáváme rovnici $1 + x = 2x$.
2. *Závěr rozboru:* Řešením rovnice získané v 1. fázi dostáváme kořen $x = 1$, tedy $\mathsf{M}' = \{1\}$.
3. *Zkouška:* Kořen $x = 1$ rovnice získané v 1. fázi nevyhovuje však dané rovnici, neboť její levá strana je definována pouze pro $x \neq 1$. Tedy $\mathsf{K} = \emptyset$.

Poznámka. V předcházejících příkladech a v mnoha dalších příkladech, jimiž se budeme zabývat v kap. 5.2 až 5.7, získáváme přesné řešení (kořeny) rovnice na základě důsledkových (speciálně ekvivalentních) úprav. Avšak někdy nelze takový způsob řešení rovnice provést. Pak se rovnice řeší zpravidla **přibližnými numerickými metodami**. Často bývá též užitečná **grafická metoda řešení rovnice** v oboru $\mathsf{M} \subset \mathsf{R}$. Poskytuje nám přibližné hodnoty (aproximace) reálných kořenů rovnice. Při grafickém řešení rovnice $f(x) = 0$ s neznámou $x \in \mathsf{M} \subset \mathsf{R}$ postupujeme buď a) tak, že sestrojíme graf funkce f a jeho průsečíky s osou x nám určí přibližné hodnoty kořenů x_k dané rovnice, anebo b) upravíme danou rovnici ekvivalentními úpravami na tvar $f_1(x) = f_2(x)$, kde f_1 a f_2 jsou funkce, jejichž grafy snadno sestrojíme, a souřadnice x_k každého bodu průniku obou grafů je jedním reálným kořenem dané rovnice. (Přesnost získaných aproximací kořenů závisí ovšem na tom, s jakou přesností byl sestrojen graf funkce f, resp. grafy funkcí f_1, f_2.)

Klasifikace rovnic

Elementární rovnice probírané na střední škole jsou v podstatě dvojího druhu: I. algebraické, II. nealgebraické.

I. **Algebraická rovnice n-tého stupně** s neznámou $x \in \mathsf{C}$ je každá rovnice tvaru

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0, \quad \text{kde } a_n \neq 0, \quad n \in \mathsf{N},$$

přičemž $a_0, a_1, \ldots, a_n$ jsou komplexní (speciálně reálná) čísla nazývaná **koeficienty algebraické rovnice.**

Levá strana algebraické rovnice tohoto tvaru je tedy mnohočlen n-tého stupně s komplexními (speciálně reálnými) koeficienty $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$; stručně se označuje $P_n(x)$. Členy mnohočlenu $P_n(x)$ se nazývají **členy algebraické rovnice**. Je-li speciálně $a_n = 1$, říkáme, že algebraická rovnice je v **normovaném tvaru**.

Na střední škole se z algebraických rovnic probírají především rovnice 1. stupně zvané **lineární rovnice** a rovnice 2. stupně zvané **kvadratické rovnice**. Z rovnic vyšších stupňů jen některé speciální případy.

II. **Nealgebraická rovnice** je každá rovnice, která není algebraická.

Z těchto rovnic se na střední škole probírají **rovnice iracionální, exponenciální, logaritmické** a **goniometrické**. Lze ovšem uvažovat též rovnice kombinovaných typů.

Kromě toho se na střední škole řeší **rovnice s neznámou v absolutní hodnotě**; oborem řešení je daná podmnožina množiny R.

5.2 Lineární rovnice

Lineární rovnicí s neznámou x nazýváme každou rovnici tvaru

$$ax + b = 0,$$

kde a, b jsou libovolná reálná nebo komplexní čísla.

Pro řešení lineární rovnice $ax + b = 0$ v oboru R, resp. C mohou nastat právě tyto tři případy:

a) Je-li $a \neq 0$, je ekvivalentní s rovnicí $ax = -b$, takže má *právě jeden kořen* $x = -\dfrac{b}{a}$.

b) Je-li $a = b = 0$, má *nekonečně mnoho řešení*: jejím kořenem je každé reálné, resp. komplexní číslo.

c) Je-li $a = 0$, $b \neq 0$, nemá *žádné řešení.*

Poznámka. Podle kap. 5.1 je lineární rovnice algebraickou rovnicí 1. stupně, právě když platí $a \neq 0$.

Příklady řešení lineárních rovnic

1. Řešte rovnici s neznámou $x \in \mathsf{R}$:

$$5 - \frac{x}{3} = 2{,}5 - \frac{3x+1}{12}$$

Řešení

Použijeme ekvivalentní úpravy rovnice uvedené v tabulce 5.1. V rovnici nejprve odstraníme zlomky (vynásobením obou jejích stran nejmenším společným jmenovatelem zlomků, tj. číslem 12):

$$\begin{aligned} 5 - \frac{x}{3} &= 2{,}5 - \frac{3x+1}{12} && |\cdot 12 \text{ (UR 4)} \\ 60 - 4x &= 30 - 3x - 1 && \text{(UR 2) a (UR 1)} \\ 29 - 3x &= 60 - 4x && |+(-29+4x) \text{ (UR 3)} \\ 4x - 3x &= 60 - 29 && \text{(UR 2)} \\ x &= 31 \end{aligned}$$

Zkouška:

$$\left.\begin{aligned} L(31) &= 5 - \frac{31}{3} = -\frac{16}{3} \\ P(31) &= 2{,}5 - \frac{93+1}{12} = 2{,}5 - \frac{47}{6} = -\frac{32}{6} = -\frac{16}{3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow L(31) = P(31)$$

Výsledek: $\mathsf{K} = \{31\}$

2. Řešte rovnici s neznámou $x \in \mathsf{C}$: $(4 + 3\mathrm{i})x + \mathrm{i} = 0$, kde i je imaginární jednotka.

Řešení

Rovnice má právě jeden kořen

$$x = \frac{-\mathrm{i}}{4+3\mathrm{i}} = \frac{-\mathrm{i}(4-3\mathrm{i})}{(4+3\mathrm{i})(4-3\mathrm{i})} = \frac{-3-4\mathrm{i}}{16+9} = -\frac{3}{25} - \frac{4}{25}\mathrm{i}.$$

Příklady vyjádření jedné proměnné z daného vzorce (lineární rovnice)

a) Z geometrického vzorce $S = 2\pi r(r+v)$ vyjádřete v,

b) z fyzikálního vzorce $v = v_0 - gt$ (kde g je tíhové zrychlení, tj. kladná konstanta) vypočtěte t.

(Proměnné ve vzorcích nabývají jen kladných hodnot.)

Řešení

Ekvivalentními úpravami dané rovnice dostáváme:

a) $r + v = \dfrac{S}{2\pi r} \Rightarrow v = \dfrac{S}{2\pi r} - r$

b) $gt = v_0 - v \Rightarrow t = \dfrac{v_0 - v}{g}$

Příklady řešení složitějších rovnic převedením na lineární rovnici

1. Řešte rovnici s neznámou $x \in \mathsf{R}$:

$$(12x+3)^2 + (5x+3)^2 = (13x+4)^2$$

Řešení

Po ekvivalentních úpravách dané rovnice dospějeme k lineární rovnici:

$$\begin{aligned}
(12x+3)^2 + (5x+3)^2 &= (13x+4)^2 && \text{(UR 2)}\\
144x^2 + 72x + 9 + 25x^2 + 30x + 9 &= 169x^2 + 104x + 16 && \text{(UR 2)}\\
169x^2 + 102x + 18 &= 169x^2 + 104x + 16 && \text{(UR 3)}\\
102x + 18 &= 104x + 16 && \text{(UR 1)}\\
104x + 16 &= 102x + 18 && \text{(UR 3)}\\
2x &= 2\\
x &= 1
\end{aligned}$$

Zkouška:

$$\left.\begin{aligned} L(1) &= (12+3)^2 + (5+3)^2 = 225 + 64 = 289\\ P(1) &= (13+4)^2 = 17^2 = 289 \end{aligned}\right\} \Rightarrow L(1) = P(1)$$

Výsledek: $\mathsf{K} = \{1\}$

2. Určete, pro která přípustná $x \in \mathsf{R}$ platí

$$\frac{x+3}{x-3} + \frac{7x-15}{9-x^2} = \frac{x-3}{x+3}.$$

Řešení

Zlomky v této rovnici mají význam, je-li $x \neq \pm 3$. Definičním oborem rovnice je tedy množina $\mathsf{D} = \mathsf{R} \setminus \{\pm 3\}$.

Obě strany dané rovnice vynásobíme součinem $(x+3)(x-3) = x^2 - 9$, což je úprava (UR 4) v D (avšak (UR 4a) v R), kterou dostáváme rovnici (ekvivalentní s danou rovnicí v D)

$$(x+3)^2 - (7x-15) = (x-3)^2$$

a po její úpravě (UR 2) rovnici

$$x^2 + 6x + 9 - 7x + 15 = x^2 - 6x + 9,$$

po přičtení výrazu $6x - 24$ k oběma stranám rovnice (UR 3)

$$5x = -15,$$

odtud po dělení obou stran pěti (UR 4) dostáváme

$$x = -3.$$

To však je nepřípustná hodnota $x \in \mathsf{R}$, neboť $x = -3 \notin \mathsf{D}$. Tedy daná rovnice nemá v R řešení.

Výsledek: $\mathsf{K} = \emptyset$

Lineární rovnice s parametry

Příklady řešení lineárních rovnic s parametry

1. Řešte rovnici $\dfrac{x+p}{p} = px - 1$ s neznámou $x \in \mathsf{R}$ a s parametrem $p \in \mathsf{R} \setminus \{0\}$.

Řešení

Ekvivalentními úpravami rovnice (pro $p \neq 0$) dostáváme:

$$\begin{aligned}
\frac{x+p}{p} &= px - 1 && \text{(UR 4)}\\
x + p &= p^2x - p && \text{(UR 3)}\\
x - p^2x &= -2p && \text{(UR 4)}\\
(p^2-1)x &= 2p
\end{aligned}$$

Diskuse řešení: Je-li $p \neq \pm 1$, pak $x = \dfrac{2p}{p^2-1}$.
Je-li $p = \pm 1$, pak $0x = \pm 2 \Rightarrow x \in \emptyset$.

Výsledek: Pro $p = 0$ nemá daná rovnice smysl. Pro $p \neq 0 \wedge p \neq \pm 1$ má právě jeden reálný kořen $x = \dfrac{2p}{p^2-1}$, tj. $\mathsf{K} = \left\{\dfrac{2p}{p^2-1}\right\}$. Pro $p = \pm 1$ nemá žádný reálný kořen, tj. $\mathsf{K} = \emptyset$.

2. Řešte rovnici $px - q = 1 + x$ s neznámou $x \in \mathsf{R}$ a parametry $p, q \in \mathsf{R}$.

Řešení

Provedeme rozbor užitím ekvivalentních úprav rovnice:

$$\begin{aligned} px - q &= 1 + x && \text{(UR 3)} \\ px - x &= q + 1 && \text{(UR 2)} \\ (p-1)x &= q + 1 \end{aligned}$$

Diskuse řešení: Je-li $p \neq 1$, pak $x = \dfrac{q+1}{p-1}$.
Je-li $p = 1 \wedge q = -1$, pak $0x = 0 \Rightarrow x \in \mathsf{R}$.
Je-li $p = 1 \wedge q \neq -1$, pak $0x = q + 1 \Rightarrow x \in \emptyset$.

Výsledek: Pro $p \neq 1$, $q \in \mathsf{R}$ má daná rovnice právě jeden reálný kořen $x = \dfrac{q+1}{p-1}$, tj. $\mathsf{K} = \left\{\dfrac{q+1}{p-1}\right\}$. Pro $p = 1 \wedge q = -1$ splňuje danou rovnici každé reálné číslo x, tj. $\mathsf{K} = \mathsf{R}$. Pro $p = 1 \wedge q \neq -1$ nemá daná rovnice žádný reálný kořen, tj. $\mathsf{K} = \emptyset$.

Lineární rovnice s absolutními hodnotami

Lineární rovnicí s absolutními hodnotami nazýváme každou rovnici (s neznámou $x \in \mathsf{R}$) tvaru

$$|a_1x + b_1| \pm |a_2x + b_2| \pm \ldots \pm |a_nx + b_n| = a_0x + b_0,$$

kde a_i, b_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ jsou daná reálná čísla, $a_i \neq 0$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$.

Řeší se úpravou na lineární rovnice bez absolutních hodnot v intervalech, na které je rozdělena množina $\mathsf{R} = (-\infty, +\infty)$ nulovými body dvojčlenů $a_ix + b_i$, tj. čísly $-\dfrac{b_i}{a_i}$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$. Této metodě řešení se říká **metoda intervalů (metoda nulových bodů).**

Poznámka. Ve speciálním případě při řešení rovnice

$$|a_1x + b_1| = c,$$

kde c je daná kladná konstanta, lze též jednodušeji vyjít přímo ze známé ekvivalence: $|a| = r > 0 \Leftrightarrow a = \pm r$ (viz kap. 2.1).

Příklady řešení lineárních rovnic s absolutními hodnotami

1. Řešte v oboru R rovnici $|x + 2| = 3$.

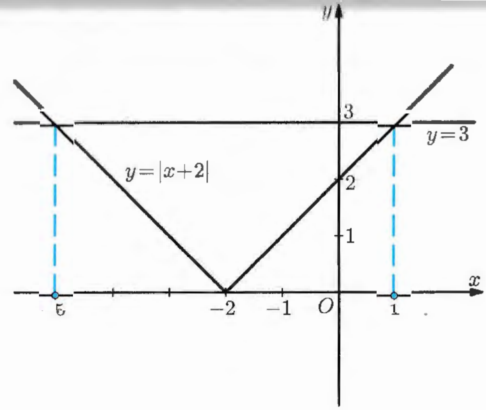
Řešení

Podle předcházející poznámky je

$$|x + 2| = 3 \Leftrightarrow x + 2 = 3 \vee x + 2 = -3 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -5.$$

Výsledek: $\mathsf{K} = \{-5; 1\}$

Grafické řešení je znázorněno na obr. 5.1: Sestrojíme grafy funkcí $f\colon y = |x + 2|$, $g\colon y = 3$. Souřadnice x jejich průsečíků představují kořeny dané rovnice.



Obr. 5.1

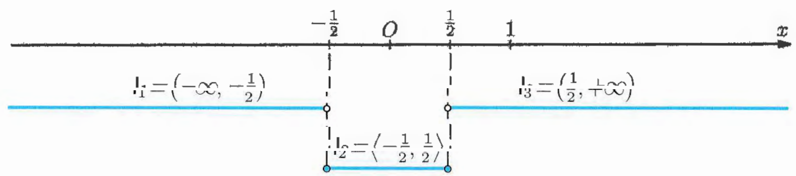
2. V oboru R řešte rovnici

$$|2x + 1| + |2x - 1| = 3.$$

Řešení metodou intervalů

Určíme nulové body výrazů $2x + 1$, $2x - 1$: označíme $x_1 = -\dfrac{1}{2}$, $x_2 = \dfrac{1}{2}$ $(x_1 < x_2)$. Množina $\mathsf{R} = (-\infty, +\infty)$ je jimi rozdělena na intervaly $\mathsf{I}_1 = \left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right)$, $\mathsf{I}_2 = \left\langle -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right\rangle$, $\mathsf{I}_3 = \left(\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$ (obr. 5.2), ve kterých lze upravit danou rovnici s absolutními hodnotami na rovnice bez absolutních hodnot. Stačí určit znaménka libovolných hodnot dvojčlenů $2x + 1$, $2x - 1$ uvnitř intervalů $\mathsf{I}_1, \mathsf{I}_2, \mathsf{I}_3$:

x	$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$
$2x + 1$	$-$	$+$	$+$
$2x - 1$	$-$	$-$	$+$



Obr. 5.2

Odtud plyne:

a) Pro $x \in \mathsf{I}_1 = \left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right)$ je $|2x + 1| = -2x - 1$, $|2x - 1| = -2x + 1$ a daná rovnice nabývá tvaru

$$-2x - 1 + (-2x + 1) = 3.$$

Jejím kořenem je číslo $x = -\frac{3}{4} \in \mathsf{I}_1$, a tedy $\mathsf{K}_1 = \left\{-\frac{3}{4}\right\}$.

b) Pro $x \in \mathsf{I}_2 = \left\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$ je $|2x+1| = 2x + 1$, $|2x - 1| = -2x + 1$ a daná rovnice nabývá tvaru

$$2x + 1 + (-2x + 1) = 3.$$

Tato rovnice není splněna pro žádné reálné x, a tedy $\mathsf{K}_2 = \emptyset$.

c) Pro $x \in \mathsf{I}_3 = \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ je $|2x + 1| = 2x + 1$, $|2x - 1| = 2x - 1$ a daná rovnice nabývá tvaru

$$2x + 1 + 2x - 1 = 3.$$

Její kořen $x = \frac{3}{4}$ patří do intervalu I_3, a tedy $\mathsf{K}_3 = \left\{\frac{3}{4}\right\}$.

Výsledek: $\mathsf{K} = \mathsf{K}_1 \cup \mathsf{K}_2 \cup \mathsf{K}_3 = \left\{\pm\frac{3}{4}\right\}$

3. Řešte rovnici s neznámou $x \in \mathsf{R}$ a s parametrem $b \in \mathsf{R}$:

$$|x| + 2 = x + b$$

Řešení

Nulový bod $x = 0$ rozdělí množinu $\mathsf{R} = (-\infty, +\infty)$ na dva intervaly $\mathsf{I}_1 = (-\infty, 0)$, $\mathsf{I}_2 = \langle 0, +\infty)$.

a) Pro $x \in \mathsf{I}_1 = (-\infty, 0)$ je $|x| = -x$, takže řešená rovnice nabývá tvaru

$$-x + 2 = x + b \Leftrightarrow 2x = 2 - b \Leftrightarrow x = \frac{2-b}{2}.$$

Protože je $x < 0$, musí být $2 - b < 0$ čili $b > 2$. Je-li tedy $b > 2$, pak má daná rovnice právě jedno řešení $x = \frac{2-b}{2} \in \mathsf{I}_1$; $\mathsf{K}_1 = \left\{\frac{2-b}{2}\right\}$. Je-li $b \leqq 2$, pak nemá žádné řešení $x \in \mathsf{I}_1$.

b) Pro $x \in \mathsf{I}_2 = \langle 0, +\infty)$ je $|x| = x$, takže řešená rovnice nabývá tvaru

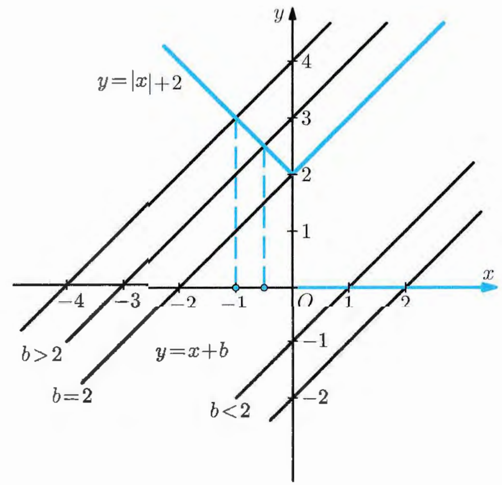
$$x + 2 = x + b.$$

Je-li $b = 2$, pak řešením této rovnice je každé $x \in \mathsf{I}_2$: je-li $b \neq 2$, pak v I_2 nemá tato rovnice žádné řešení.

Výsledky jsou shrnuty přehledně v tabulce:

Hodnoty parametru	Množina K všech řešení
$b \in (2, +\infty)$	$\mathsf{K} = \left\{\frac{2-b}{2}\right\}$
$b = 2$	$\mathsf{K} = \langle 0, +\infty)$
$b \in (-\infty, 2)$	$\mathsf{K} = \emptyset$

Grafické řešení **je znázorněno v obr. 5.3, kde jsou sestrojeny grafy funkcí f: $y = |x| + 2$, g: $y = x + b$ pro několik zvolených hodnot parametru b ($b = -2, -1, 2, 3, 4$).**



Obr. 5.3

5.3 Kvadratické rovnice

Kvadratickou rovnicí s neznámou x nazýváme každou rovnici tvaru

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

kde a, b, c jsou libovolná reálná, resp. komplexní čísla, $a \neq 0$. Členy **kvadratického trojčlenu** $ax^2 + bx + c$ se pak nazývají: ax^2 **kvadratický člen**, bx **lineární člen**, c **absolutní člen** kvadratické rovnice.

Speciální případy kvadratické rovnice: Je-li $b = 0$, má kvadratická rovnice tvar $ax^2 + c = 0$ a nazývá se **ryze kvadratická rovnice**. Je-li $c = 0$, má kvadratická rovnice tvar $ax^2 + bx = 0$ a říká se jí **kvadratická rovnice bez absolutního členu**.

Kvadratické rovnici tvaru

$$x^2 + px + q = 0$$

se říká **normovaný tvar kvadratické rovnice** (nebo **normovaná kvadratická rovnice**).

Při řešení každé kvadratické rovnice (s reálnými nebo komplexními koeficienty a, b, c) v oboru R i v oboru C je důležité číslo

$$D = b^2 - 4ac,$$

které se nazývá **diskriminant kvadratické rovnice**. (Název pochází z lat. slova discriminare = rozlišovat.)

Řešení kvadratické rovnice s reálnými koeficienty v oboru R

V.1. Věta o řešitelnosti kvadratické rovnice v oboru R
Nechť $ax^2 + bx + c = 0$ je libovolná kvadratická rovnice s reálnými koeficienty a, b, c $(a \neq 0)$ a diskriminantem D.
Je-li $D > 0$, má tato rovnice právě *dva reálné různé kořeny*,
je-li $D = 0$, má tato rovnice právě *dva sobě rovné reálné kořeny* (**dvojnásobný reálný kořen**),
je-li $D < 0$, *nemá* tato rovnice *v oboru reálných čísel žádný kořen.*

Poznámka. Podmínky věty V.1 vyčerpávají všechny možné a vzájemně se vylučující případy pro hodnotu D, jsou to proto podmínky nutné a postačující, tj. větu V.1 *lze obrátit.*

V.2. Věta o vzorci pro určení kořenů kvadratické rovnice v oboru R
Nechť $ax^2 + bx + c = 0$ je libovolná kvadratická rovnice s reálnými koeficienty a, b, c $(a \neq 0)$ a diskriminantem $D \geqq 0$. Pak jsou reálné kořeny x_1, x_2 této kvadratické rovnice dány vzorcem

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

Poznámka. Důkaz tohoto vzorce je založen na doplnění kvadratického trojčlenu $ax^2 + bx + c$ na „úplný čtverec".

V.3. Věta o vztazích mezi kořeny a koeficienty kvadratické rovnice v anulovaném tvaru
Mezi kořeny x_1, x_2 a koeficienty a, b, c $(a \neq 0)$ libovolné kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, resp. koeficienty příslušné normované kvadratické rovnice $x^2 + px + q = 0$ platí vztahy vyjádřené tzv. **Viètovými vzorci**:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -p$$
$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} = q$$

Poznámka. Důkaz věty V.3 se snadno provede užitím věty V.2. Přímým důsledkem věty V.3 je následující věta.

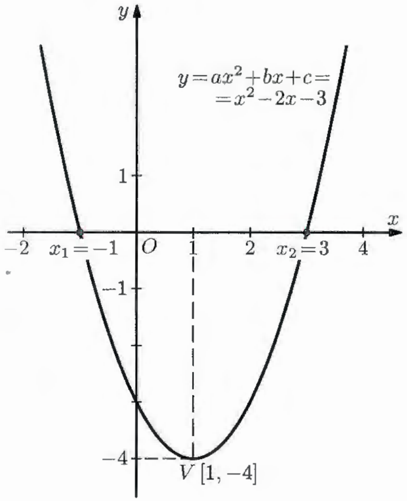
V.4. Věta o rozkladu kvadratického trojčlenu v součin lineárních dvojčlenů
Má-li kvadratická rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ kořeny x_1, x_2, pak kvadratický trojčlen $ax^2 + bx + c$ lze rozložit v součin lineárních dvojčlenů (**kořenových činitelů**) $x - x_1$, $x - x_2$ takto:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

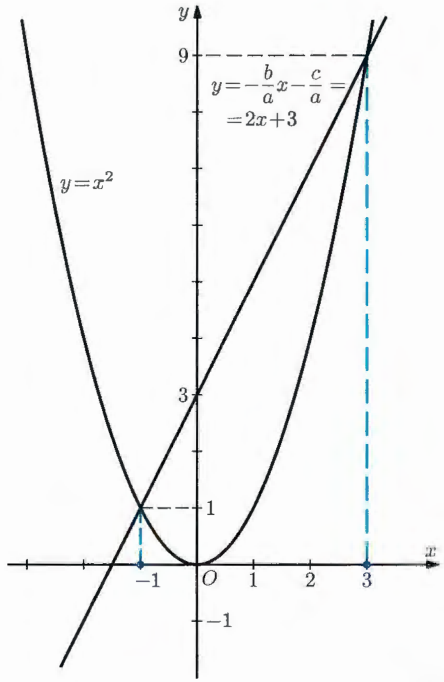
takže danou kvadratickou rovnici můžeme vyjádřit ve tvaru

$$a(x - x_1)(x - x_2) = 0 \Leftrightarrow (x - x_1)(x - x_2) = 0.$$

Kvadratickou rovnici $ax^2 + bx + c = 0$ s reálnými koeficienty a, b, c $(a \neq 0)$ lze v oboru R též *řešit graficky*: Buď sestrojíme graf kvadratické funkce $y = ax^2 + bx + c$ a jeho průsečíky s osou x zobrazují hledané reálné kořeny x_1, x_2 (obr. 5.4 pro $a = 1$, $b = -2$, $c = -3$), nebo jednodušeji upravíme řešenou kvadratickou rovnici na tvar $ax^2 = -bx - c$, resp. $x^2 = -\frac{b}{a}x - \frac{c}{a}$ a sestrojíme průsečíky grafu kvadratické funkce $y = ax^2$, resp. $y = x^2$ s grafem lineární funkce $y = -bx - c$, resp. $y = -\frac{b}{a}x - \frac{c}{a}$; jejich x-ové souřadnice představují reálné kořeny řešené kvadratické rovnice (obr. 5.5 pro $a = 1$, $b = -2$, $c = -3$). V obecném případě bude grafické řešení ovšem jen přibližné.



Obr. 5.4



Obr. 5.5

Příklady řešení kvadratických rovnic v oboru R

Zjistěte, zda v oboru R mají řešení kvadratické rovnice:

a) $x^2 - 6x - 27 = 0$, b) $15x^2 - 38x + 24 = 0$, c) $9x^2 - 6x + 10 = 0$.

Řešení

a) $D = b^2 - 4ac = 36 + 4 \cdot 27 = 144 > 0$, takže (podle věty V.1) rovnice má dva různé reálné kořeny x_1, x_2. Vypočteme je užitím vzorce z věty V.2:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{6 \pm 12}{2} \quad \text{čili } x_1 = 9, \ x_2 = -3$$

Proveďte *zkoušku* dosazením.

Výsledek: $\mathsf{K} = \{9; -3\}$

K tomuto výsledku lze dospět též rozkladem kvadratického trojčlenu v kořenové činitele (zpaměti) podle věty V.4, neboť $6 = 9 + (-3) \wedge -27 = 9 \cdot (-3)$, takže $x^2 - 6x - 27 = (x - 9)(x + 3)$.

Výsledek lze ověřit také užitím Viètových vzorců (věta V.3):

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -p = 6$$
$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = q = -27$$

Řešení této soustavy lineárních rovnic lze provést tak, že vypočteme

$$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 144.$$

Předpokládáme-li, že $x_1 > x_2$, dostáváme odtud $x_1 - x_2 = 12$. Ze soustavy rovnic $x_1 - x_2 = 12$, $x_1 + x_2 = 6$ plyne, že $2x_1 = 18$ čili $x_1 = 9$, a tedy $x_2 = -3$.

b) $D = 38^2 - 4 \cdot 15 \cdot 24 = 1\,444 - 1\,440 = 4 > 0 \Rightarrow$ rovnice má dva různé reálné kořeny x_1, x_2. Vypočteme je užitím vzorce:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{38 \pm 2}{30} \Rightarrow x_1 = \frac{4}{3}, \ x_2 = \frac{6}{5} = 1{,}2$$

Proveďte *zkoušku* dosazením a uvažte také další možné způsoby řešení.

Výsledek: $\mathsf{K} = \left\{\frac{4}{3}; \frac{6}{5}\right\}$

c) $D = b^2 - 4ac = 36 - 4 \cdot 90 = -324 < 0 \Rightarrow$ rovnice není řešitelná v oboru R.

Výsledek: $\mathsf{K} = \emptyset$

Příklad určení kvadratických rovnic daných vlastností

Určete všechny kvadratické rovnice, jejichž kořeny jsou čísla $\frac{1}{3}$ a -7.

Řešení

Kořenovými činiteli hledaných kvadratických rovnic jsou dvojčleny $x - \frac{1}{3}$ a $x + 7$, takže podle věty V.4 mají tyto rovnice tvar

$$a\left(x - \frac{1}{3}\right)(x + 7) = 0 \Leftrightarrow ax^2 + \frac{20}{3}ax - \frac{7}{3}a = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3ax^2 + 20ax - 7a = 0,$$

kde $a \neq 0$ je reálný parametr.

Příklady řešení složitějších rovnic převedením na kvadratické rovnice

1. Určete všechna přípustná $x \in \mathsf{R}$, pro něž platí

$$\frac{x + \sqrt{3}}{x} - \frac{2x}{x + \sqrt{3}} = 2.$$

Řešení

Danou rovnici upravíme za předpokladu, že $x \neq 0$, $x \neq -\sqrt{3}$, na ryze kvadratickou rovnici, která má kořeny $x_1 = 1$, $x_2 = -1$.

Výsledek: $\mathsf{K} = \{-1; 1\}$

2. Řešte v oboru R rovnici

$$|x^2 - 2x + 3| = 3.$$

Řešení

Vyjdeme z ekvivalence $|f(x)| = a > 0 \Leftrightarrow f(x) = \pm a$: $|x^2 - 2x + 3| = 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 = 3 \vee x^2 - 2x + 3 = -3$.

První z těchto rovnic lze upravit na anulovaný tvar $x^2 - 2x = 0$ neboli $x(x - 2) = 0$, tj. má kořeny $x_1 = 0$, $x_2 = 2$. Druhá z rovnic po úpravě na anulovaný tvar je $x^2 - 2x + 6 = 0$, její diskriminant je $D = -20 < 0$, takže v oboru R nemá řešení.

Výsledek: $\mathsf{K} = \{0; 2\}$

Kvadratické rovnice s reálnými parametry

Příklady řešení kvadratických rovnic s parametry

1. Řešte v oboru R rovnici s reálným parametrem m:

$$(m - 2)x^2 - (m^2 - 2m + 2)x + 2m = 0$$

Řešení

Daná rovnice je kvadratická, právě když platí $m - 2 \neq 0$ čili $m \neq 2$.

Je-li $m = 2$, je rovnice lineární

$$-2x + 4 = 0;$$

má právě jeden kořen $x = 2$.

Je-li $m \neq 2$, rovnice je kvadratická a po vydělení obou jejích stran dvojčlenem $m-2$ ji můžeme přepsat v normovaném tvaru

$$x^2 - \frac{m^2-2m+2}{m-2}x + \frac{2m}{m-2} = 0.$$

Podle Viètových vzorců platí pro její kořeny x_1, x_2:

$$x_1 + x_2 = -p = \frac{m^2-2m+2}{m-2} = m + \frac{2}{m-2}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{2m}{m-2}$$

Řešením této soustavy pro neznámé x_1, x_2 dostáváme:

$$x_1 = m, \quad x_2 = \frac{2}{m-2}$$

(Proveďte *zkoušku*.)

2. Pro kterou hodnotu parametru m je součet druhých mocnin kořenů kvadratické rovnice $x^2-(m-2)x-m-1=0$ nejmenší?

Řešení

Jsou-li kořeny této rovnice x_1, x_2, pak podle Viètových vzorců platí

$$x_1 + x_2 = m-2, \quad x_1x_2 = -(m+1),$$

takže

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 = (m-2)^2 + 2m + 2 = \\ = m^2 - 2m + 6 = (m-1)^2 + 5.$$

Součet druhých mocnin kořenů $x_1^2 + x_2^2$ nabývá proto nejmenší hodnoty, je-li $m-1=0$ čili $m=1$; pak $x_1^2+x_2^2=5$.

Řešení kvadratické rovnice s reálnými nebo komplexními koeficienty v oboru C

V.5. Věta o řešitelnosti a o vzorcích pro kořeny kvadratické rovnice s reálnými koeficienty v oboru C

Kvadratická rovnice $ax^2+bx+c=0$ s reálnými koeficienty a, b, c, $a \neq 0$, jejíž diskriminant je $D = b^2 - 4ac$, má v oboru C

a) stejně jako v oboru R *dva reálné různé kořeny*, právě když $D > 0$; *dvojnásobný reálný kořen*, právě když $D = 0$;
pro tyto reálné kořeny platí stejně jako v oboru R vzorec

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a},$$

b) *dva imaginární komplexně sdružené kořeny*, právě když $D < 0$, tyto imaginární kořeny jsou dány vzorcem

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \mathrm{i}\sqrt{|D|}}{2a}.$$

V.6. Věta o řešitelnosti a o vzorcích pro kořeny kvadratické rovnice s komplexními koeficienty v oboru C

Kvadratická rovnice $ax^2+bx+c=0$ s komplexními koeficienty a, b, c, $a \neq 0$, jejíž diskriminant je $D = b^2 - 4ac$, má v oboru C vždy právě *dva komplexní kořeny* dané vzorcem

$$x_{1,2} = \frac{-b + (\sqrt{D})_{\mathrm{C}}}{2a},$$

kde $(\sqrt{D})_{\mathrm{C}}$ je dvojznačná odmocnina komplexního čísla D. Tyto komplexní kořeny jsou *jednoduché* ($x_1 \neq x_2$), právě když $D \neq 0$, zatímco pro $D = 0$ dostáváme *dvojnásobný kořen* ($x_1 = x_2$).

Poznámka. Ve vzorci věty V.6 jsou zahrnuty vzorce předcházející věty jako speciální případy.

Dále pro kvadratickou rovnici (s reálnými nebo imaginárními koeficienty) v oboru C platí obdobně jako v oboru R tyto *věty*:

Věta V.3 o vztazích mezi kořeny a koeficienty kvadratické rovnice vyjádřených Viètovými vzorci, věta V.4 o rozkladu kvadratického trojčlenu v součin lineárních dvojčlenů (kořenových činitelů).

Příklady řešení kvadratických rovnic v oboru C

1. Řešte v oboru C kvadratickou rovnici $9x^2-6x+10=0$.

Řešení

Rovnici budeme řešit dvěma způsoby: užitím vzorců pro kořeny kvadratické rovnice a pomocí Viètových vzorců.

a) $D = b^2 - 4ac = 36 - 4 \cdot 90 = -324$, takže $\sqrt{|D|} = 18$; podle vzorce pro kořeny kvadratické rovnice s diskriminantem $D < 0$ dostáváme $x_{1,2} = \frac{-b \pm \mathrm{i}\sqrt{|D|}}{2a} = \frac{6 \pm 18\mathrm{i}}{18} = \frac{1}{3} \pm \mathrm{i}$.

Výsledek: Daná rovnice má kořeny $x_1 = \frac{1}{3} + \mathrm{i}$, $x_2 = \frac{1}{3} - \mathrm{i}$.

b) Podle Viètových vzorců $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$, $x_1x_2 = \frac{c}{a} = \frac{10}{9}$; odtud $(x_1-x_2)^2 = (x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2 = \frac{4}{9} - \frac{40}{9} = -\frac{36}{9} = -4$, takže $x_1 - x_2 = \pm 2\mathrm{i}$ a sečtením, resp. odečtením od rovnice $x_1 + x_2 = \frac{2}{3}$ dostáváme $2x_{1,2} = \frac{2}{3} \pm 2\mathrm{i}$ čili $x_{1,2} = \frac{1}{3} \pm \mathrm{i}$. Dospíváme k témuž výsledku jako při řešení 1. způsobem: $\mathrm{K} = \left\{\frac{1}{3} \pm \mathrm{i}\right\}$.

2. Stanovte kvadratické rovnice s reálnými koeficienty v normovaném tvaru, jejichž jeden kořen je $1 + 3i$.

Řešení
Vzhledem k tomu, že koeficienty každé z hledaných kvadratických rovnic mají být vesměs reálné, jejich druhým kořenem bude číslo komplexně sdružené k $1 + 3i$, tj. číslo $1 - 3i$. Hledané kvadratické rovnice lze tedy podle věty V.4 vyjádřit ve tvaru $a(x - 1 - 3i)(x - 1 + 3i) = 0$ čili $ax^2 - 2ax + 10a = 0$, kde a je libovolné reálné číslo, $a \neq 0$.

3. Určete, pro které hodnoty reálného parametru m bude mít kvadratická rovnice

$$(m + 5)x^2 - 2mx + (m - 1) = 0$$

imaginární kořeny.

Řešení
Podle věty V.5 jsou kořeny kvadratické rovnice imaginární, právě když $D = 4m^2 - 4(m + 5)(m - 1) = 4(5 - 4m) < 0$. Odtud $5 - 4m < 0$ neboli $m > \frac{5}{4}$, tj. pro $m \in \left(\frac{5}{4}; +\infty\right)$.

4. Řešte v oboru C kvadratickou rovnici

$$x^2 + (2 - 3i)x - 5(1 + i) = 0.$$

Řešení
$D = (2 - 3i)^2 + 20(1 + i) = 15 + 8i$; $(\sqrt{D})_C = (\sqrt{15 + 8i})_C$, algebraicky nebo goniometricky určíme dvě hodnoty této odmocniny: $z_1 = 4 + i$, $z_2 = -(4 + i) = -4 - i$. Po dosazení do vzorce pro kořeny $x_{1,2}$ kvadratické rovnice s komplexními koeficienty (věta V.6) dostáváme

$$x_1 = \frac{1}{2}(-2 + 3i + 4 + i) = 1 + 2i,$$
$$x_2 = \frac{1}{2}(-2 + 3i - 4 - i) = -3 + i.$$

Poznámka. Jak ukazuje poslední příklad, kořeny kvadratické rovnice s komplexními koeficienty nemusí být obecně komplexně sdružená čísla.

5.4 Iracionální rovnice

Iracionální rovnice s neznámou $x \in R$ jsou rovnice tvaru $f(x) = g(x)$, kde f nebo g jsou algebraické funkce, z nichž alespoň jedna je iracionální. Oborem řešení iracionální rovnice je podmnožina množiny R.

Základní metody řešení iracionálních rovnic: Řešení iracionálních rovnic se zpravidla provádí na základě jejich úpravy umocňováním obou stran rovnice. Přitom k těmto úpravám lze přistupovat dvojím způsobem (viz kap. 5.1):

1. *Jako k důsledkovým úpravám* ((UR 5a) – tabulka 5.1a). Pak nutnou součástí řešení iracionální rovnice je zkouška. Tou ze všech kořenů algebraické rovnice získané umocněním dané iracionální rovnice určíme ty, jež jsou kořeny dané iracionální rovnice.

2. *Jako k ekvivalentním úpravám* ((UR 5) – tabulka 5.1). Pak stanovíme podmínky ekvivalence dané a upravené (umocněné) rovnice. Tyto podmínky jsou doplňkovými nerovnicemi, jež je třeba řešit spolu (v konjunkci) s upravenou rovnicí. Tento postup je však prakticky vhodný jen u jednodušších iracionálních rovnic.

Poznámka. V některých případech je možné řešit iracionální rovnici pomocí substituce za iracionální výraz s neznámou.

Příklady řešení iracionálních rovnic

1. Řešte v oboru R iracionální rovnici

$$1 + \sqrt{x + 11} = x.$$

Řešení
Kdybychom obě strany dané rovnice hned umocnili dvěma, neodstranili bychom z ní odmocninu. Nejprve ji musíme upravit přičtením čísla -1 k oběma stranám rovnice, což představuje ekvivalentní úpravu (UR 3) na tvar

$$\sqrt{x + 11} = x - 1. \qquad (1)$$

Umocnění obou stran rovnice (1) je důsledková, nikoliv však ekvivalentní úprava (UR 5a), kterou dostáváme rovnici

$$x + 11 = x^2 - 2x + 1.$$

Po ekvivalentních úpravách (UR 1 a UR 3) této rovnice dostáváme

$$x^2 - 3x - 10 = 0 \Leftrightarrow (x - 5)(x + 2) = 0. \qquad (2)$$

Kořeny této kvadratické rovnice jsou proto čísla $x_1 = 5$, $x_2 = -2$.

Provedeme *zkoušku* dosazením, která je zde nutnou součástí řešení:

$$L(5) = 1 + \sqrt{5 + 11} = 1 + 4 = 5,\ P(5) = 5,\ L(5) = P(5)$$
$$L(-2) = 1 + \sqrt{-2 + 11} = 1 + 3 = 4,\ P(-2) = -2,\ L(-2) \neq P(-2)$$

Kořenem dané rovnice je tedy pouze číslo 5. (Poznamenejme, že druhé číslo $x_2 = -2$ je kořenem rovnice $\sqrt{x + 11} = 1 - x$; umocněním obou jejích stran se dostane rovnice (2).)

Výsledek: $K = \{5\}$

Danou iracionální rovnici lze řešit též *druhým způsobem*: Opět ji upravíme na tvar (1). Při umocnění obou stran rovnice (1) však stanovíme doplňkové podmínky plynoucí z definice odmocniny v oboru R:

$$x + 11 \geqq 0 \wedge x - 1 \geqq 0$$

Bude-li však $x - 1 \geqq 0$, bude jistě také $x + 11 > 0$ (neboť $x + 11 > x - 1$), takže pro každé řešení rovnice (1) musí platit $x \geqq 1$. Za této podmínky bude umocnění obou stran rovnice (1) její ekvivalentní úpravou (UR 5), neboť pak též obráceně platí

$$\sqrt{x^2 - 2x + 1} = \sqrt{(x-1)^2} = |x - 1| = x - 1.$$

Podmínku $x \geqq 1$ splňuje však jenom kořen $x_1 = 5$.

V dalších složitějších příkladech budeme umocňování obou stran iracionální rovnice provádět bez doplňujících podmínek jako důsledkovou úpravu rovnice. Nutnou součástí řešení rovnice bude zkouška dosazením.

2. Řešte v oboru R iracionální rovnici obsahující dvě odmocniny:

$$2\sqrt{x+18} + \sqrt{4x-3} = 15$$

Řešení
Danou rovnici upravíme nejprve na tvar

$$2\sqrt{x+18} = 15 - \sqrt{4x-3}.$$

Obě strany této rovnice umocníme dvěma (důsledková, neekvivalentní úprava), a tím dostáváme iracionální rovnici s jedinou odmocninou

$$4(x + 18) = 225 - 30\sqrt{4x-3} + 4x - 3,$$

kterou ekvivalentními úpravami upravíme na tvar

$$\sqrt{4x-3} = 5.$$

A umocněním obou jejích stran (důsledková úprava) dostáváme rovnici

$$4x - 3 = 25,$$

která má jediný kořen $x = 7$.

Zkouška (dosazením):

$$L(7) = 2\sqrt{25} + \sqrt{25} = 10 + 5 = 15, \quad P(7) = 15, \quad L(7) = P(7)$$

Výsledek: Řešená rovnice má právě jeden kořen $x = 7$, tj. $\mathsf{K} = \{7\}$.

3. Řešte v oboru R iracionální rovnici s třetími odmocninami:

$$\sqrt[3]{3x+28} - \sqrt[3]{3x-28} = 2$$

Řešení
Obě strany dané rovnice umocníme na třetí:

$$\left(\sqrt[3]{3x+28} - \sqrt[3]{3x-28}\right)^3 = 2^3$$

čili po úpravě užitím vzorce pro $(a - b)^3$ (uvedeného v kap. 3.1)

$$3x + 28 - 3 \cdot \sqrt[3]{(3x+28)^2 \cdot (3x-28)} + 3\sqrt[3]{(3x+28)(3x-28)^2} - 3x + 28 = 8.$$

K oběma stranám této rovnice přičteme -56 a vytkneme na levé straně společnou část s odmocninami:

$$-3\sqrt[3]{(3x+28)(3x-28)}\left[\sqrt[3]{3x+28} - \sqrt[3]{3x-28}\right] = -48$$

Výraz v hranatých závorkách je podle původní rovnice roven 2, takže po dělení získané rovnice číslem -6 dostaneme

$$\sqrt[3]{9x^2 - 28^2} = 8.$$

Obě strany této rovnice umocníme na třetí:

$$9x^2 - 784 = 512 \Rightarrow 9x^2 = 1\,296 \Rightarrow x^2 = 144 \Rightarrow |x| = 12,$$

kořeny této rovnice jsou tedy čísla $x_1 = 12$ a $x_2 = -12$.

Zkouška (dosazením):

$$L(12) = \sqrt[3]{36+28} - \sqrt[3]{36-28} = \sqrt[3]{64} - \sqrt[3]{8} = 4 - 2 = 2,$$
$$P(12) = 2, \quad L(12) = P(12);$$

pro $x = -12$ však není definována levá strana rovnice.

Výsledek: Daná rovnice má právě jeden kořen $x = 12$, a tedy $\mathsf{K} = \{12\}$.

5.5 Vlastnosti algebraických rovnic a některé speciální typy algebraických rovnic vyšších stupňů

Významné *vlastnosti algebraických rovnic* vyjadřují následující *věty*:

V.1. **Základní věta algebry**
Každá algebraická rovnice $P_n(x) = 0$ s komplexními (speciálně reálnými) koeficienty má v oboru C alespoň jeden komplexní kořen.

Poznámka. Ve větě V.1 je výslovně zdůrazněno, že jde o *komplexní kořen*, neboť i algebraická rovnice s reálnými koeficienty nemusí mít žádný reálný kořen.

V.2. Je-li komplexní (speciálně reálné) číslo x_1 kořenem algebraické rovnice $P_n(x) = 0$, pak platí

$$P_n(x) = (x - x_1)Q_{n-1}(x),$$

kde $Q_{n-1}(x)$ je mnohočlen stupně $n - 1$. Mnohočlen $P_n(x)$ je tedy dělitelný lineárním dvojčlenem $x - x_1$.

V.3. Algebraická rovnice n-tého stupně $P_n(x) = 0$, tj. rovnice

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0,$$

má nejvýše n různých kořenů. Jsou-li $x_1, x_2, \ldots, x_j$ $(j \leqq n)$ tyto různé kořeny, pak lze mnohočlen $P_n(x)$ vyjádřit ve tvaru

$$P_n(x) = a_n(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2} \ldots (x - x_j)^{k_j},$$

kde $k_1, k_2, \ldots, k_j$ jsou přirozená čísla, přičemž

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_j = n.$$

Každý z lineárních dvojčlenů $x - x_1, x - x_2, \ldots, x - x_j$ se nazývá **kořenový činitel mnohočlenu** $P_n(x)$. Vyjádření mnohočlenu $P_n(x)$ podle věty V.3 se říká **rozklad mnohočlenu v kořenové činitele**. Exponent k_i výrazu $(x - x_i)^{k_i}$ se nazývá **násobnost kořene** x_i. O kořenu x_i potom říkáme, že je k_i-**násobným kořenem rovnice** $P_n(x) = 0$. Je-li $k_i = 1$, říkáme, že číslo x_i je **jednoduchý kořen rovnice** $P_n(x) = 0$.

Některé důležité důsledky věty V.3:

a) Algebraická rovnice n-tého stupně má právě n komplexních kořenů za předpokladu, že se k-násobný kořen započítává k-krát.

b) Má-li algebraická rovnice $P_n(x) = 0$ právě n různých kořenů $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathsf{C}$, pak mnohočlen $P_n(x)$ lze vyjádřit ve tvaru

$$P_n(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n).$$

Speciálně pro algebraické rovnice s reálnými koeficienty platí věta:

V.4. Má-li algebraická rovnice $P_n(x) = 0$ *s reálnými koeficienty* k-násobný imaginární kořen x_j, pak má také k-násobný komplexně sdružený kořen $\overline{x}_j$.

Důsledek vět V.3 a V.4:

Každý normovaný mnohočlen $P_n(x)$ stupně $n > 2$ s *reálnými koeficienty* lze v oboru R rozložit jednoznačně na součin lineárních dvojčlenů (kořenových činitelů tvaru $x - x_i$, kde x_i je reálný kořen rovnice $P_n(x) = 0$), a popřípadě kvadratických trojčlenů v oboru R nerozložitelných (tvaru $x^2 + px + q = (x - x_k)(x - \overline{x}_k)$, kde x_k, $\overline{x}_k$ je dvojice komplexně sdružených imaginárních kořenů rovnice $P_n(x) = 0$).

Příklad užití věty V.4 a jejího důsledku

Sestavte algebraickou rovnici 3. stupně s reálnými koeficienty, která má reálný kořen $x_1 = 1$ a imaginární kořen $x_2 = 2 + 2\mathrm{i}$.

Řešení

Má-li hledaná kubická rovnice imaginární kořen $x_2 = 2 + 2\mathrm{i}$, pak podle věty V.4 má také komplexně sdružený kořen $x_3 = 2 - 2\mathrm{i}$. Součin jejích kořenových činitelů je tedy $(x - 1)(x - 2 - 2\mathrm{i})(x - 2 + 2\mathrm{i}) = (x - 1)(x^2 - 4x + 8)$. Hledaná rovnice je $(x - 1)(x^2 - 4x + 8) = 0$ čili $x^3 - 5x^2 + 12x - 8 = 0$.

Poznámka. Pro každou **algebraickou rovnici n-tého stupně** $P_n(x) = 0$ **s celočíselnými koeficienty** $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ platí následující *věty*:

Je-li x_0 *nenulový celočíselný kořen* algebraické rovnice $P_n(x) = 0$ s celočíselnými koeficienty, pak její absolutní člen a_0 je dělitelný číslem x_0. A obecněji: Je-li x_0 takový *racionální kořen* algebraické rovnice $P_n(x) = 0$ s celočíselnými koeficienty, že $x_0 = \frac{p}{q}$, kde p, q jsou celá nesoudělná čísla, $p \neq 0$, $q \neq 0$, pak její absolutní člen a_0 je dělitelný číslem p a koeficient a_n je dělitelný číslem q.

Obrácené věty však neplatí. Proto je nutné prověřit, která z nalezených čísel jsou skutečně kořeny dané algebraické rovnice (např. zkouškou dosazením).

V dalším textu se budeme zabývat řešením **algebraických rovnic** $P_n(x) = 0$ **stupně** $n \geqq 3$. Pro řešení algebraických rovnic třetího a čtvrtého stupně, jež se nazývají **kubické rovnice** a **bikvadratické rovnice**, je možno odvodit obecné vzorce, které vyjadřují kořeny pomocí algebraických výrazů sestavených z koeficientů rovnice. Tyto vzorce jsou však značně složité, a proto se na střední škole neprobírají. Pro algebraické rovnice pátého stupně a vyšších stupňů takové vyjádření kořenů vůbec neexistuje. Řešení lze však nalézt, jak dále ukážeme, pro některé *speciální typy algebraických rovnic*. Budeme je řešit v oboru C. Omezíme se však jen na *rovnice s reálnými koeficienty*, jež se v praxi vyskytují nejčastěji. (V případě rovnic s libovolnými komplexními koeficienty by byl postup řešení týž.)

Algebraické rovnice v rozloženém tvaru

Budeme uvažovat algebraické rovnice $P_n(x) = 0$ $(n \geqq 3)$, kde je mnohočlen $P_n(x)$ rozložen v součin mnohočlenů nižšího stupně, speciálně v součin lineárních dvojčlenů (kořenových činitelů), event. kvadratických trojčlenů. Při jejich řešení se vychází z *věty o nulovém součinu komplexních čísel* (viz str. 105):

Pro každá dvě komplexní čísla a, b platí $ab = 0$, právě když $a = 0$ nebo $b = 0$.

Větu lze zobecnit pro libovolných n komplexních čísel.

Příklady řešení algebraických rovnic v rozloženém tvaru

1. Řešte rovnici s neznámou $x \in \mathsf{C}$:

$$(x+3)^2\,(x-2)=0$$

Řešení

Podle věty o nulovém součinu komplexních čísel je

$$(x+3)^2\,(x-2)=0 \Leftrightarrow (x+3)^2=0 \vee x-2=0,$$

odkud plyne, že daná algebraická rovnice má kořeny: $x_{1,2}=-3$ (dvojnásobný kořen) a $x_3=2$.

2. Řešte v oboru C rovnici:

$$(x-5)\left(x^2-x+1\right)=0$$

Řešení

Podle věty o nulovém součinu komplexních čísel je

$$(x-5)\left(x^2-x+1\right)=0 \Leftrightarrow x-5=0 \vee x^2-x+1=0,$$

odtud plyne, že daná algebraická rovnice má právě jeden reálný kořen $x_1=5$ a dva imaginární (komplexně sdružené) kořeny, které získáme řešením kvadratické rovnice $x^2-x+1=0$ s diskriminantem $D=1-4=-3<0$: $x_2 = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$, $x_3=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

Binomické rovnice

Binomická rovnice (z lat. slova binom = dvojčlen) s neznámou x je algebraická rovnice tvaru

$$ax^n+b=0, \tag{1}$$

kde a, b jsou libovolná komplexní čísla, $a\neq 0$, $b\neq 0$ a n je libovolné přirozené číslo.

V dalším textu se omezíme na reálná čísla a, b ($a\neq 0$, $b\neq 0$). Obě strany rovnice (1) můžeme dělit číslem $a\in \mathsf{R}\setminus\{0\}$ a zapsat ji v normovaném tvaru

$$x^n \pm c = 0,\ \ \text{kde } c>0. \tag{2}$$

Binomickou rovnici (2) v oboru C můžeme řešit buď *algebraicky* rozkladem levé strany rovnice na součin mnohočlenů nižších stupňů, nebo *goniometricky* ekvivalentní úpravou rovnice (2) na tvar $x=\left(\sqrt[n]{\mp c}\right)_{\mathsf{C}}$ a určením goniometrického tvaru komplexních kořenů této rovnice podle vzorce z kap. 4.6.

Příklady řešení binomických rovnic

V oboru C řešte 1. algebraicky, 2. goniometricky rovnice

a) $x^3-2=0$, b) $16x^4+9=0$.

Řešení

a) *1. Algebraický způsob řešení.* Levou stranu řešené rovnice $x^3-2=0$ rozložíme podle vzorce pro a^3-b^3 (viz kap. 3.1), dostáváme

$$x^3-2=x^3-\left(\sqrt[3]{2}\right)^3=\left(x-\sqrt[3]{2}\right)\left(x^2+\sqrt[3]{2}x+\sqrt[3]{2^2}\right)=0.$$

Odtud plyne podle věty o nulovém součinu, že jednak může být $x-\sqrt[3]{2}=0$, což dává reálný kořen $x_0=\sqrt[3]{2}$, a dále může být $x^2+\sqrt[3]{2}x+\sqrt[3]{2^2}=0$; řešením této kvadratické rovnice dostáváme imaginární (komplexně sdružené) kořeny

$$x_1=\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}(-1+\mathrm{i}\sqrt{3}),\qquad x_2=\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}(-1-\mathrm{i}\sqrt{3}).$$

2. Goniometrický způsob řešení. Daná rovnice $x^3-2=0$ je ekvivalentní s rovnicí $x=\left(\sqrt[3]{2}\right)_{\mathsf{C}}$, a proto podle vzorce ze str. 195 její kořeny v goniometrickém tvaru jsou

$$x_k=\left(\sqrt[3]{2}\right)_{\mathsf{C}}=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{2k\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{3}\right),\qquad k=0,1,2.$$

Pro $k=0$: $x_0=\sqrt[3]{2}(\cos 0+\mathrm{i}\sin 0)=\sqrt[3]{2}$,

pro $k=1$: $x_1=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{2}{3}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}(-1+\mathrm{i}\sqrt{3})$,

pro $k=2$: $x_2=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{4}{3}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{4}{3}\pi\right)=\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}(-1-\mathrm{i}\sqrt{3})$.

b) *1. Algebraický způsob řešení.* Řešenou rovnici $16x^4+9=0$ upravíme na normovaný tvar $x^4+\left(\frac{3}{4}\right)^2=0$. Po substituci $x=y\sqrt[4]{\left(\frac{3}{4}\right)^2}=y\sqrt{\frac{3}{4}}$ dostaneme rovnici $y^4\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2=0$, jež po vydělení obou stran číslem $\left(\frac{3}{4}\right)^2$ nabývá tvaru $y^4+1=0$. Levou stranu této rovnice upravíme takto:

$$\begin{aligned} y^4+1&=y^4+2y^2+1-2y^2=\left(y^2+1\right)^2-\left(y\sqrt{2}\right)^2=\\ &=\left(y^2+y\sqrt{2}+1\right)\left(y^2-y\sqrt{2}+1\right)\end{aligned}$$

Odtud plyne: $y^4+1=0 \Leftrightarrow y^2+y\sqrt{2}+1=0 \vee y^2-y\sqrt{2}+1=0$. Řešením kvadratické rovnice $y^2-y\sqrt{2}+1=0$ dostáváme kořeny $y_{0,3}=\frac{1}{2}\sqrt{2}(1\pm\mathrm{i})$ a řešením rovnice $y^2+y\sqrt{2}+1=0$ kořeny $y_{1,2}=\frac{1}{2}\sqrt{2}(-1\pm\mathrm{i})$. A tedy kořeny původní rovnice jsou

$$x_{0,3}=\frac{1}{2}\sqrt{2}(1\pm\mathrm{i})\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{6}}{4}(1\pm\mathrm{i}),$$

$$x_{1,2}=\frac{1}{2}\sqrt{2}(-1\pm\mathrm{i})\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{6}}{4}(-1\pm\mathrm{i}).$$

Poznámka. Rovnici $y^4+1=0$ lze řešit algebraicky také tímto způsobem: Dělíme její strany $y^2 \neq 0$, čímž dostaneme rovnici $y^2+\dfrac{1}{y^2}=0$, pro jejíž řešení použijeme substituci $t=y+\dfrac{1}{y} \Rightarrow t^2-2=y^2+\dfrac{1}{y^2}$, kterou přejde na rovnici $t^2-2=0$, jež má kořeny $\pm\sqrt{2}$. Dosazením do substituční rovnice dostáváme dvojici rovnic $\sqrt{2}=y+\dfrac{1}{y}$, $-\sqrt{2}=y+\dfrac{1}{y}$ neboli po úpravě dostáváme opět rovnice $y^2-y\sqrt{2}+1=0$, $y^2+y\sqrt{2}+1=0$, které jsme již řešili. Pomocí substituce použitého typu se obecněji řeší, jak dále poznáme, tzv. reciproké rovnice I. druhu; rovnice $y^4+1=0$ je jejich zvláštním případem.

2. Goniometrický způsob řešení. Tento způsob řešení dané binomické rovnice je podstatně jednodušší než její algebraické řešení. Kořeny rovnice $x^4+\left(\frac{3}{4}\right)^2=0$ jsou právě všechny hodnoty $\left(\sqrt[4]{-\left(\frac{3}{4}\right)^2}\right)_{\mathrm{C}}$, jež určíme v goniometrickém tvaru podle vzorce ze str. 195:

$$x_k=\left(\sqrt[4]{-\left(\frac{3}{4}\right)^2}\right)_{\mathrm{C}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\left[\cos\,(2k+1)\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\,(2k+1)\frac{\pi}{4}\right],$$

kde $k=0,1,2,3$, takže

$$x_0=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}(1+\mathrm{i})=\frac{\sqrt{6}}{4}(1+\mathrm{i}),$$

$$x_1=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{3}{4}\pi\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}(-1+\mathrm{i})=\frac{\sqrt{6}}{4}(-1+\mathrm{i}),$$

$$x_2=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{5}{4}\pi\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}(-1-\mathrm{i})=\frac{\sqrt{6}}{4}(-1-\mathrm{i}),$$

$$x_3=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{7}{4}\pi\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}(1-\mathrm{i})=\frac{\sqrt{6}}{4}(1-\mathrm{i}).$$

Trinomické rovnice

Rovnice trinomické (z lat. slova trinom = trojčlen) s neznámou x jsou algebraické rovnice typu

$$ax^{2n}+bx^n+c=0,$$

kde a, b, c jsou libovolná komplexní čísla, a, b, $c \neq 0$ a $n \geqq 2$ je přirozené číslo. Speciálně pro $n=2$ dostáváme trinomickou rovnici 4. stupně, tj. **rovnici bikvadratickou**

$$ax^4+bx^2+c=0, \quad a\neq 0.$$

Trinomické rovnice se řeší užitím substituce

$$z=x^n,$$

kterou přechází trinomická rovnice v kvadratickou rovnici

$$az^2+bz+c=0.$$

Jejím řešením určíme dva kořeny z, které dosadíme do vztahů $x^n=z$, a tím dostaneme dvě binomické rovnice, jejichž řešením najdeme všech $2n$ kořenů trinomické rovnice.

Příklady řešení trinomických rovnic

1. Řešte trinomickou (bikvadratickou) rovnici $x^4+x^2-20=0$.

Řešení

Substitucí $z=x^2$ převedeme danou rovnici na kvadratickou rovnici $z^2+z-20=0$, jejíž kořeny jsou $z_1=4$, $z_2=-5$. Dosazením do substituční rovnice dostáváme dvě rovnice ryze kvadratické $x^2=4$, $x^2=-5$, jejichž kořeny $x_{1,2}=\pm 2$, $x_{3,4}=\pm\mathrm{i}\sqrt{5}$ jsou právě všechny kořeny dané trinomické rovnice.

2. Řešte rovnici $x^3(x^3-7)=12(18+x^3)$.

Řešení

Danou rovnici upravíme na tvar $x^6-19x^3-216=0$. Tuto trinomickou rovnici převedeme substitucí $z=x^3$ na kvadratickou rovnici $z^2-19z-216=0$, jejíž kořeny jsou $z_1=27$, $z_2=-8$. Po dosazení do substituční rovnice dostáváme dvojici rovnic $x^3=27$ a $x^3=-8$, které postupně upravíme takto:

$$x^3=27 \Leftrightarrow x^3-3^3=0 \Leftrightarrow (x-3)(x^2+3x+9)=0,$$

tato rovnice má kořeny $x_1=3$, $x_{2,3}=-1{,}5(1\pm\mathrm{i}\sqrt{3})$;

$$x^3=-8 \Leftrightarrow x^3+2^3=0 \Leftrightarrow (x+2)(x^2-2x+4)=0,$$

tato rovnice má kořeny $x_4=-2$, $x_{5,6}=1\pm\mathrm{i}\sqrt{3}$.

Čísla x_1 až x_6 jsou právě všechny kořeny dané rovnice.

Reciproké rovnice

Reciproká rovnice n-tého stupně prvního, resp. druhého druhu je algebraická rovnice

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0=0, \quad (a_n\neq 0)$$

pro jejíž koeficienty a_k $(k=0,1,\ldots,n)$ platí:

v případě **reciproké rovnice I. druhu (kladně reciproké rovnice)**

$$a_k=a_{n-k},$$

v případě **reciproké rovnice II. druhu (záporně reciproké rovnice)**

$$a_k=-a_{n-k}.$$

Pro reciproké rovnice sudého stupně $n=2m$ zřejmě platí, že v rovnici I. druhu může být koeficient a_m libovolný, zatímco v rovnici II. druhu musí být nulový.

Příklady
$2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0$ je reciproká rovnice I. druhu 3. stupně,
$5x^4 - 26x^3 + 10x^2 - 26x + 5 = 0$ je reciproká rovnice I. druhu 4. stupně,
$12x^4 - 25x^3 + 25x - 12 = 0$ je reciproká rovnice II. druhu 4. stupně.

Reciproké rovnice mají všechny kořeny různé od nuly. Je-li číslo x_1 libovolný kořen reciproké rovnice, pak také reciproké (převrácené) číslo $\frac{1}{x_1}$ je kořenem této rovnice. (Odtud pochází název „reciproká rovnice".)

Postup řešení reciproké rovnice I. druhu:

a) Je-li stupeň sudé číslo $n = 2m$ ($m \in \mathsf{N}$), pak

1. dělíme obě strany rovnice číslem x^m ($x \neq 0$),
2. z prvního a posledního členu, druhého a předposledního členu atd. vytkneme společný koeficient této dvojice členů,
3. použijeme substituci $y = x + \frac{1}{x}$, jíž dostáváme

$$y^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}, \quad y^3 - 3y = x^3 + \frac{1}{x^3},$$

$$y^4 - 4y^2 + 2 = x^4 + \frac{1}{x^4} \text{ atd.}$$

b) Je-li stupeň liché číslo $n = 2m + 1$ ($m \in \mathsf{N}$), má rovnice vždy kořen -1; dělíme ji proto kořenovým činitelem $x + 1$, čímž dostaneme reciprokou rovnici I. druhu sudého stupně.

Lze též postupovat podle 2. kroku případu a), což nám umožní vytknutí kořenového činitele $x + 1$ na levé straně rovnice.

Postup řešení reciproké rovnice II. druhu:

Tato rovnice má vždy kořen 1; dělíme proto obě její strany kořenovým činitelem $x - 1$, čímž dostaneme reciprokou rovnici I. druhu sudého stupně.

Bylo by ovšem možné užít úpravy ve 2. kroku případu a) řešení reciproké rovnice I. druhu.

Příklady řešení reciprokých rovnic

1. Řešte rovnici $5x^4 - 26x^3 + 10x^2 - 26x + 5 = 0$.

Řešení

Daná rovnice je reciproká I. druhu 4. stupně, řešíme ji proto takto: Nejprve dělíme obě její strany x^2, po úpravě dostáváme $5\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 26\left(x + \frac{1}{x}\right) + 10 = 0$. Použijeme substituci $y = x + \frac{1}{x}$, a tedy $y^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$; rovnice nabývá tvaru $5(y^2 - 2) - 26y + 10 = 0$ čili $5y^2 - 26y = 0$, odkud plyne, že kořeny jsou čísla $y_1 = 0$, $y_2 = \frac{26}{5}$.

Dosazením do substituční rovnice dostáváme dvojici rovnic $x + \frac{1}{x} = 0$ a $x + \frac{1}{x} = \frac{26}{5}$, které upravíme na kvadratické rovnice $x^2 + 1 = 0$ a $5x^2 - 26x + 5 = 0$. První rovnice má kořeny $x_1 = \mathrm{i}$, $x_2 = -\mathrm{i}$ (oba kořeny jsou reciproké, neboť $-\mathrm{i} = \frac{1}{\mathrm{i}}$). Druhá rovnice má kořeny $x_3 = 5$, $x_4 = \frac{1}{5} = 0{,}2$ (tedy opět dvojice reciprokých kořenů).

2. Řešte rovnici $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0$.

Řešení

Jde o reciprokou rovnici I. druhu 3. stupně, má proto jeden kořen $x_1 = -1$. Vydělíme obě její strany kořenovým činitelem $x + 1$ a získáme kvadratickou rovnici $2x^2 - 5x + 2 = 0$, jejíž kořeny jsou $x_2 = 2$ a $x_3 = \frac{1}{2}$. (Kvadratická rovnice byla reciproká, proto jsou jejími kořeny reciproká čísla.)

Alternativní způsob řešení: Nejprve vytkneme společné koeficienty

$$2(x^3 + 1) - 3x(x + 1) = 0,$$

$x^3 + 1$ rozložíme, dostaneme

$$2(x + 1)(x^2 - x + 1) - 3x(x + 1) = 0,$$

$x + 1$ vytkneme, dostáváme

$$(x + 1)[2(x^2 - x + 1) - 3x] = 0$$

neboli po úpravě $(x + 1)(2x^2 - 5x + 2) = 0$, odkud plynou opět rovnice $x + 1 = 0$ a $2x^2 - 5x + 2 = 0$.

3. Řešte rovnici $12x^4 - 25x^3 + 25x - 12 = 0$.

Řešení

Jde o reciprokou rovnici II. druhu 4. stupně. Proto má kořen $x_1 = 1$. Dělením obou stran rovnice kořenovým činitelem $x - 1$ dostaneme reciprokou rovnici I. druhu 3. stupně, která má kořen $x_2 = -1$. Dělením obou stran této rovnice kořenovým činitelem $x + 1$ dostaneme kvadratickou rovnici $12x^2 - 25x + 12 = 0$. (Přímo ji lze dostat dělením dané rovnice dvojčlenem $x^2 - 1$, tj. součinem $(x + 1)(x - 1)$.) Má kořeny $x_3 = \frac{4}{3}$, $x_4 = \frac{3}{4}$.

Alternativní postup řešení: Nejprve vytkneme společné koeficienty $12(x^4 - 1) - 25x(x^2 - 1) = 0$, $x^4 - 1$ rozložíme, dostáváme

$$12(x^2 - 1)(x^2 + 1) - 25x(x^2 - 1) = 0,$$

$x^2 - 1$ vytkneme, dostaneme $(x^2 - 1)(12x^2 + 12 - 25x) = 0$, odkud plynou opět rovnice $x^2 - 1 = 0$, $12x^2 - 25x + 12 = 0$.

4. Řešte reciprokou rovnici 5. stupně

$$6x^5 - 41x^4 + 97x^3 - 97x^2 + 41x - 6 = 0.$$

Řešení

Vytkneme z členů souměrně položených jejich společné koeficienty:

$$6(x^5-1)-41x(x^3-1)+97x^2(x-1)=0,$$

x^5-1 a x^3-1 rozložíme, čímž dostáváme

$$6(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)-41x(x-1)(x^2+x+1)+97x^2(x-1)=0,$$

$x-1$ vytkneme:

$$(x-1)(6x^4+6x^3+6x^2+6x+6-41x^3-41x^2-41x+97x^2)=0$$

a po úpravě

$$(x-1)(6x^4-35x^3+62x^2-35x+6)=0.$$

Tato rovnice je ekvivalentní s dvojicí rovnic

$$x-1=0 \text{ a } 6x^4-35x^3+62x^2-35x+6=0.$$

Kořenem první rovnice je číslo $x_1=1$. Druhá rovnice je reciproká rovnice I. druhu 4. stupně. Dělíme obě její strany číslem x^2 a použijeme substituci $y=x+\dfrac{1}{x}$, čímž dostáváme postupnými úpravami:

$$6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-35\left(x+\frac{1}{x}\right)+62=0,$$
$$6(y^2-2)-35y+62=0,$$
$$6y^2-35y+50=0.$$

Kořeny kvadratické rovnice jsou čísla $\dfrac{10}{3}$ a $\dfrac{5}{2}$.

Dosazením do substituční rovnice získáme dvojici rovnic $x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{10}{3}$ a $x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{2}$. Po úpravě dostáváme kvadratické rovnice:

$$3x^2-10x+3=0 \text{ s kořeny } x_2=3,\ x_3=\frac{1}{3}$$
$$\text{a } 2x^2-5x+2=0 \text{ s kořeny } x_4=2,\ x_5=\frac{1}{2}.$$

5.6 Exponenciální a logaritmické rovnice

Exponenciální rovnicí nazýváme rovnici, ve které je neznámá $x \in \mathsf{R}$ v exponentu nějaké mocniny tvaru a^x, popř. $a^{f(x)}$, kde $a>0$, $a\neq 1$ je daná konstanta, f je daná polynomická funkce.

Základní exponenciální rovnice s neznámou $x \in \mathsf{R}$ jsou rovnice tvaru

$$a^x=b, \text{ kde } a\in \mathsf{R}^+\setminus\{1\},\ b\in \mathsf{R}^+,$$

které se řeší takto:

a) Je-li $b=a^c$, kde $c\in\mathsf{R}$, pak $x=c$.

b) Není-li $b=a^c$, kde $c\in\mathsf{R}$, pak se řeší logaritmováním, např. při základu 10: $x\log a=\log b \Rightarrow x=\dfrac{\log b}{\log a}$.

Složitější exponenciální rovnice se řeší zpravidla převedením na uvedený základní tvar užitím *vhodné úpravy* nebo převedením na algebraickou rovnici pomocí *vhodné substituce.*

Příklady řešení exponenciálních rovnic s neznámou $x\in\mathsf{R}$

1. Řešte rovnice

a) $5^{1-x}=7^{x-1}$, b) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2-3x}=5^x$.

Řešení

a) Protože platí $5^{1-x}=5^{-(x-1)}=\dfrac{1}{5^{x-1}}$, lze danou rovnici upravit na tvar $7^{x-1}\cdot 5^{x-1}=1$ čili $(7\cdot 5)^{x-1}=1$ neboli $35^{x-1}=35^0$, odtud $x-1=0$ čili $x=1$.

Zkouška: Pro $x=1$ je $L(1)=5^0=1$, $P(1)=7^0=1$, tedy $L(1)=P(1)$.

Výsledek: $\mathsf{K}=\{1\}$

b) Protože je $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2-3x}=3^{3x-2}$, lze danou rovnici upravit na tvar $3^{3x-2}=5^x$. Základy obou mocnin v této rovnici jsou různé, proto ji řešíme logaritmováním:

$$(3x-2)\log 3=x\log 5 \Leftrightarrow x(3\log 3-\log 5)=2\log 3,$$

odkud

$$x=\frac{2\log 3}{3\log 3-\log 5}=\frac{\log 3^2}{\log 3^3-\log 5}=\frac{\log 9}{\log 5{,}4}\doteq 1{,}302\,9.$$

Zkouška: $\log L(x)=\dfrac{2\log 3\cdot\log 5}{3\log 3-\log 5}$, $\log P(x)=\dfrac{2\log 3\cdot\log 5}{3\log 3-\log 5}$, a tedy $L(x)=P(x)$.

Výsledek: $\mathsf{K}=\left\{\dfrac{2\log 3}{3\log 3-\log 5}\right\}$

2. Řešte rovnici

$$2^{2x+1}+4^{x+1}+16^{\frac{x}{2}}=28.$$

Řešení

Na levé straně můžeme všechny sčítance vyjádřit jako násobky téže mocniny 4^x:

$$2^{2x+1} = 2^{2x} \cdot 2^1 = 4^x \cdot 2, \quad 4^{x+1} = 4^x \cdot 4, \quad 16^{\frac{x}{2}} = \left(16^{\frac{1}{2}}\right)^x = 4^x,$$

takže danou rovnici lze upravit na tvar:

$$4^x \cdot 2 + 4^x \cdot 4 + 4^x = 28 \quad \text{čili} \quad 4^x \cdot (2 + 4 + 1) = 4 \cdot 7,$$

odkud $4^x = 4^1$, a tedy $x = 1$.

Zkouška: $L(1) = 2^3 + 4^2 + 16^{\frac{1}{2}} = 8 + 16 + 4 = 28$, $P(1) = 28$, $L(1) = P(1)$.

Výsledek: $\mathsf{K} = \{1\}$

3. Řešte rovnici

$$4^x + 3^{x+4} = 4^{x+3} - 3^{x+2}.$$

Řešení

Danou rovnici upravíme takto:

$$3^{x+4} + 3^{x+2} = 4^{x+3} - 4^x \text{ čili } 3^x \cdot 81 + 3^x \cdot 9 = 4^x \cdot 64 - 4^x,$$

vytkneme společné činitele na levé a pravé straně rovnice:

$$3^x \cdot (81 + 9) = 4^x \cdot (64 - 1) \text{ neboli } 3^x \cdot 90 = 4^x \cdot 63,$$

takže

$$\left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{7}{10} \text{ a po zlogaritmování: } x = \frac{\log 0{,}7}{\log 0{,}75} \doteq 1{,}24.$$

Zkoušku dosazením proveďte sami.

Výsledek: $\mathsf{K} = \left\{\dfrac{\log 0{,}7}{\log 0{,}75} \doteq 1{,}24\right\}$

4. Řešte rovnici

$$2^{2x+1} + 2^{x+2} = 16.$$

Řešení

Rovnici upravíme na tvar

$$2 \cdot 2^{2x} + 4 \cdot 2^x - 16 = 0.$$

Položíme-li $2^x = y$, a tedy $2^{2x} = y^2$, po dosazení do této rovnice a dělení jejích obou stran dvěma dostáváme kvadratickou rovnici $y^2 + 2y - 8 = 0$, jež má kořeny $y = 2$ a $y = -4$.

Je-li $y = 2$ čili $2^x = 2$, pak $x = 1$; naproti tomu kořen $y = -4$ však nepřichází v úvahu, neboť podle vlastností exponenciální funkce (kap. 4.3) je $2^x > 0$.

Zkouška: $L(1) = 2^3 + 2^3 = 8 + 8 = 16$, $P(1) = 16$, $L(1) = P(1)$.

Výsledek: $\mathsf{K} = \{1\}$

Logaritmickou rovnicí nazýváme rovnici, v níž jsou logaritmy výrazů s neznámou $x \in \mathsf{R}^+$.

Základní logaritmické rovnice s neznámou $x \in \mathsf{R}^+$ jsou rovnice tvaru

$$\log_a x = b, \text{ kde } a \in \mathsf{R}^+ \setminus \{1\}, \ b \in \mathsf{R}. \tag{1}$$

Řeší se užitím definice logaritmu (viz kap. 4.3), podle níž (odlogaritmováním): $x = a^b$.

Složitější logaritmickou rovnici obvykle řešíme tak, že ji *upravíme na rovnici* tvaru

$$\log_a f(x) = \log_a g(x), \ a > 0, \ a \neq 1, \tag{2}$$

kde výrazy $f(x)$, $g(x)$ vyjadřují funkční hodnoty dvou daných funkcí f, g proměnné x, z nichž jedna může být speciálně konstanta. Protože logaritmická funkce je prostá (rostoucí pro $a > 1$, klesající pro $0 < a < 1$), z logaritmické rovnice (2) plyne rovnice

$$f(x) = g(x). \tag{3}$$

Rovnice (2), (3) jsou však ekvivalentní jenom při splnění podmínek: $f(x) > 0$ a $g(x) > 0$. Pokud je nestanovíme předem, musí být nutnou součástí řešení zkouška.

Řešení složitějších logaritmických rovnic též často usnadňuje *vhodná substituce*, např. $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$), kterou se převede logaritmická rovnice na algebraickou rovnici.

Příklady řešeni logaritmických rovnic s neznámou $x \in \mathsf{R}$

1. Řešte rovnice

a) $\log\left(x^{\log x}\right) = 1$, b) $(\log x)^{\log x} = 1$.

Řešení

a) Z dané rovnice plyne (podle definice logaritmu) jako důsledek rovnice $x^{\log x} = 10$; po zlogaritmování obou stran $\log x \cdot \log x = 1$ čili $\log^2 x = 1$, a tedy $|\log x| = 1$ čili $\log x = \pm 1$, odkud $x = 10$ nebo $x = \frac{1}{10}$.

Zkouška: $L(10) = \log 10^{\log 10} = \log 10^1 = 1$, $P(10) = 1$, $L(10) = P(10)$, $L\left(\frac{1}{10}\right) = \log\left(10^{-\log 10^{-1}}\right) = \log 10^1 = 1$, $P\left(\frac{1}{10}\right) = 1$, $L\left(\frac{1}{10}\right) = P\left(\frac{1}{10}\right)$.

Výsledek: $\mathsf{K} = \left\{1; \frac{1}{10}\right\}$

b) Obě strany dané rovnice zlogaritmujeme, dostáváme rovnici $\log x \cdot \log\log x = 0$ a odtud $\log x = 0$ nebo $\log\log x = 0$. První z těchto rovnic je splněna pro $x = 1$, z druhé plyne, že $\log x = 1$, a tedy $x = 10$.

Zkouška: Pro $x = 1$ je $L(1) = 0^0$, avšak tato mocnina není definována. Pro $x = 10$ je $L(10) = 1^1$, $P(10) = 1$, $L(10) = P(10)$.

Výsledek: $\mathsf{K} = \{10\}$

2. Řešte rovnici

$$5 \log \sqrt[3]{x} - 4 \log \sqrt[6]{x} + \frac{1}{2} \log x^8 = 9 - \log x^5.$$

Řešení

Na základě vlastností logaritmů lze danou rovnici upravit (za předpokladu, že $x > 0$) na tvar

$$5 \cdot \frac{\log x}{3} - 4 \cdot \frac{\log x}{6} + \frac{1}{2} \cdot 8 \log x = 9 - 5 \log x$$

čili $\frac{5}{3} \log x - \frac{2}{3} \log x + 4 \log x + 5 \log x = 9$, odkud $10 \log x = 9$, a tedy $\log x = 0{,}9$.

Podle definice logaritmu to znamená, že $x = 10^{0{,}9} \doteq 7{,}943$.

Zkoušku proveďte sami.

Výsledek: $\mathsf{K} = \{10^{0{,}9} \doteq 7{,}943\}$

3. Řešte rovnici

$$\log (x+3) + \log (x-2) = 2 - \log 2.$$

Řešení

Protože existují jen logaritmy kladných čísel, musí být $x - 2 > 0$ čili $x > 2$ (pak je i $x + 3 > 0$). Levou stranu rovnice upravíme podle vzorce $\log u + \log v = \log uv$. Pravou stranu rovnice upravíme podle vzorce $\log u - \log v = \log \frac{u}{v}$, přičemž položíme $2 = \log 100$. Dostaneme tak rovnici

$$\log (x+3)(x-2) = \log \frac{100}{2} \text{ čili } \log \left(x^2 + x - 6\right) = \log 50.$$

Odtud dostáváme po odlogaritmování obou stran rovnici

$$x^2 + x - 6 = 50 \text{ čili } x^2 + x - 56 = 0.$$

Tato kvadratická rovnice má kořeny $x = 7$ a $x = -8$. Pouze první z nich však vyhovuje podmínce $x > 2$, druhý není tedy kořenem dané rovnice. (Není pro něj definována její levá strana $L(-8)$.)

Zkouška: $L(7) = \log 10 + \log 5 = 1 + \log 5 = 1 + \log \frac{10}{2} = 2 - \log 2$, $P(7) = 2 - \log 2$, $L(7) = P(7)$.

Výsledek: $\mathsf{K} = \{7\}$

5.7 Goniometrické rovnice

Goniometrickou rovnicí s neznámou $x \in \mathsf{R}$ nazýváme rovnici tvaru $g(x) = c$, kde $g(x)$ je goniometrický výraz s proměnnou x a $c \in \mathsf{R}$ je konstanta.

Nejjednodušší, tzv. **základní goniometrické rovnice**, jsou následujících typů:

1. Rovnice tvaru

$$\sin x = a \text{ nebo } \cos x = a,$$

kde $a \in \langle -1; 1 \rangle$ je dané číslo. Mají pro každé takové a nekonečně mnoho řešení (kořenů), jež určíme takto:

a) Je-li $a = 0$ nebo $a = \pm 1$, pak určení všech kořenů rovnice provedeme nejjednodušeji užitím grafu funkce sinus, resp. kosinus.

b) Je-li $a \neq 0$, $a \neq \pm 1$, nejprve zjistíme dvojici kořenů $x_1, x_2 \in \langle 0, 2\pi)$. Užíváme k tomu znázornění na jednotkové kružnici k se středem v počátku O, popř. graf funkce sinus, resp. kosinus, zpaměti známé údaje (tabulka 4.12) a dále tabulky goniometrických funkcí, resp. kalkulátor. Všechny kořeny rovnice určíme pak ve tvaru $x_1 + 2k\pi$, $x_2 + 2k\pi$, $k \in \mathsf{Z}$ (vzhledem k periodicitě funkcí sin, cos s periodou $2k\pi$).

Poznámka. Pro $a \in \mathsf{R} \setminus \langle -1; 1 \rangle$, tj. když $|a| > 1$, rovnice uvedeného typu nemá řešení (neboť $\mathsf{H}(\sin x) = \mathsf{H}(\cos x) = \langle -1; 1 \rangle$).

2. Rovnice tvaru

$$\operatorname{tg} x = a \text{ nebo } \operatorname{cotg} x = a,$$

kde $a \in \mathsf{R}$ je dané číslo. Mají pro každé a nekonečně mnoho řešení (kořenů), jež určíme takto:

a) Je-li $a = 0$, pak určení množiny všech kořenů rovnice provedeme buď pomocí grafu funkce tangens, resp. kotangens, nebo využitím ekvivalence $\operatorname{tg} x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0$ nebo $\operatorname{cotg} x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0$.

b) Je-li $a \neq 0$, pak nejprve zjistíme právě jeden kořen $x_1 \in \langle 0, \pi)$, přičemž postupujeme zcela obdobně jako u rovnic typu 1. Všechny kořeny rovnice jsou pak tvaru $x_1 + k\pi$, $k \in \mathsf{Z}$ (vzhledem k periodicitě funkcí tg, cotg s periodou $k\pi$).

Příklady řešení základních goniometrických rovnic

1. V oboru R řešte rovnice

a) $\sin x = 0$, b) $\sin x = 1$, c) $\sin x = -1$, d) $\cos x = 0$,
e) $\cos x = 1$, f) $\cos x = -1$, g) $\operatorname{tg} x = 0$, h) $\operatorname{cotg} x = 0$.

Řešení

Z grafů funkcí sinus (obr. 4.34), kosinus (obr. 4.35), tangens (obr. 4.39) a kotangens (obr. 4.40) plyne, že všechna řešení daných rovnic jsou (pro libovolné $k \in \mathsf{Z}$)

a) $x = 0 + k\pi = k\pi$, b) $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi = (4k+1)\frac{\pi}{2}$,

c) $x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi = (4k+3)\frac{\pi}{2}$, d) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi = (2k+1)\frac{\pi}{2}$,

e) $x = 0 + 2k\pi = 2k\pi$, f) $x = \pi + 2k\pi = (2k+1)\pi$,

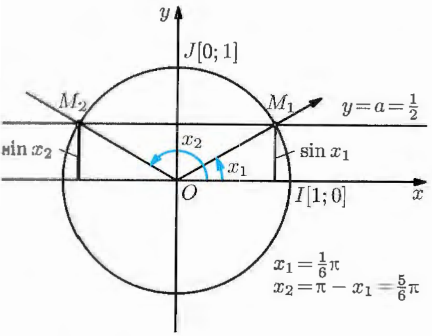
g) $x = 0 + k\pi = k\pi$, h) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi = (2k+1)\frac{\pi}{2}$.

2. Řešte v oboru R rovnice

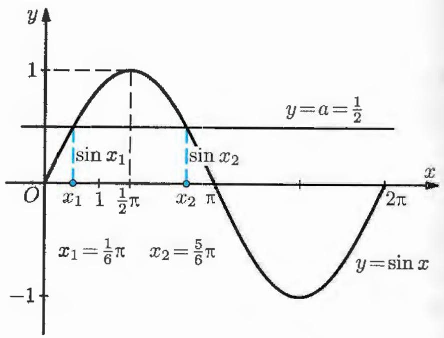
a) $\sin x = \dfrac{1}{2}$, b) $\cos x = -\dfrac{1}{2}$.

Řešení

a) Nejprve určíme pro danou rovnici dvojici kořenů $x_1, x_2 \in \langle 0, 2\pi)$: Protože funkce sinus nabývá kladných hodnot v intervalech odpovídajících I. a II. kvadrantu (viz tabulka 4.13), bude $x_1 \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ a $x_2 \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$. Kořen x_1 dovedeme určit zpaměti (podle tabulky 4.12): $x_1 = \dfrac{\pi}{6}$, kořen x_2 určíme pomocí obr. 5.6 nebo 5.7: $x_2 = \pi - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{5}{6}\pi$. Všechna řešení dané rovnice mají tvary: $x_1 + 2k\pi = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi = (12k+1)\dfrac{\pi}{6}$, $x_2 + 2k\pi = \dfrac{5}{6}\pi + 2k\pi = (12k+5)\dfrac{\pi}{6}$, kde $k \in \mathsf{Z}$, tj. $\mathsf{K} = \bigcup_{k\in \mathsf{Z}} \left\{(12k+1)\dfrac{\pi}{6}, (12k+5)\dfrac{\pi}{6}\right\}$.

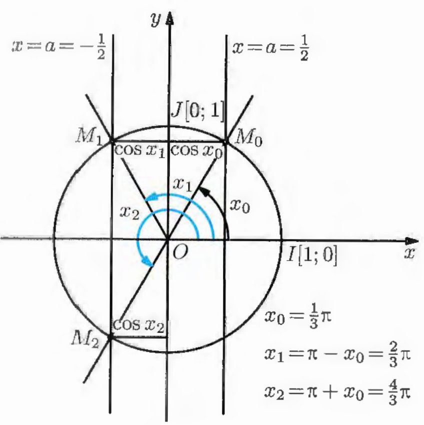


Obr. 5.6

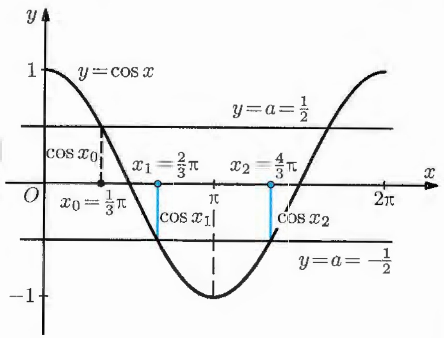


Obr. 5.7

b) Je vhodné vyjít z řešení rovnice $\cos x = \dfrac{1}{2}$ v intervalu $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Její kořen v tomto intervalu dovedeme určit zpaměti (podle tabulky 4.12): $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$.



Obr. 5.8



Obr. 5.9

Jeho užitím stanovíme kořeny $x_1, x_2 \in \langle 0, 2\pi)$ dané rovnice $\cos x = -\dfrac{1}{2}$. Protože funkce kosinus nabývá záporných hodnot v intervalech odpovídajících II. a III. kvadrantu (viz tabulka 4.13), bude $x_1 \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$ a $x_2 \in \left(\pi, \dfrac{3}{2}\pi\right)$.

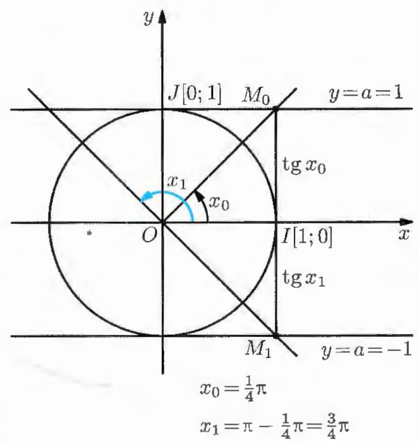
Z obr. 5.8, popř. 5.9 je zřejmé, že platí: $x_1 = \pi - x_0 = \pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2}{3}\pi$, $x_2 = \pi + x_0 = \pi + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{4}{3}\pi$. Všechna řešení dané rovnice mají tvary $x_1 + 2k\pi = \dfrac{2}{3}\pi + 2k\pi = (3k+1)\dfrac{2}{3}\pi$, $x_2 + 2k\pi = \dfrac{4}{3}\pi + 2k\pi = (3k+2)\dfrac{2}{3}\pi$, kde $k \in \mathsf{Z}$, takže $\mathsf{K} = \bigcup_{k\in \mathsf{Z}} \left\{(3k+1)\dfrac{2}{3}\pi, (3k+2)\dfrac{2}{3}\pi\right\}$.

3. Řešte v oboru R rovnici

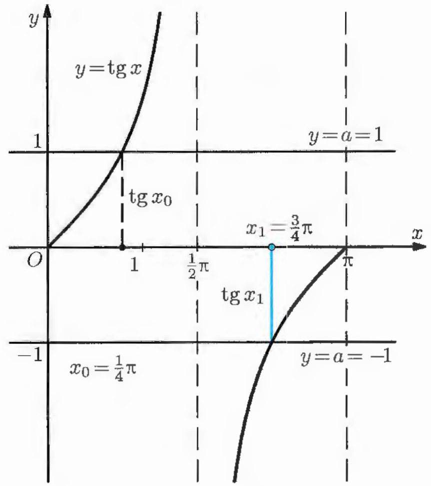
$$\operatorname{tg} x = -1.$$

Řešení

Postupujeme obdobně jako v příkladu 2b). Vyjdeme z řešení rovnice $\operatorname{tg} x = 1$ v intervalu $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Její kořen v tomto intervalu určíme zpaměti (podle tabulky 4.12): $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$. Na základě obr. 5.10 nebo 5.11 určíme pak kořen dané rovnice $\operatorname{tg} x = -1$ v intervalu $\langle 0, \pi)$. Záporných hodnot nabývá funkce tangens v intervalu $\left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$ (odpovídá II. kvadrantu, viz tabulka 4.13). Z obr. 5.10, popř. 5.11 je zřejmé, že pro kořen $x_1 \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$ platí: $x_1 = \pi - x_0 = \pi - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3}{4}\pi$. Všechna řešení rovnice mají tvar $x_1 + k\pi = \dfrac{3}{4}\pi + k\pi = (4k+3)\dfrac{\pi}{4}$, kde $k \in \mathsf{Z}$, takže $\mathsf{K} = \bigcup_{k\in \mathsf{Z}} \left\{(4k+3)\dfrac{\pi}{4}\right\}$.



Obr. 5.10



Obr. 5.11

Složitější goniometrické rovnice řešíme zpravidla převedením na základní goniometrické rovnice. Toho dosahujeme nejčastěji vhodnou *substitucí* (zavedením pomocné neznámé) nebo *užitím vzorců pro goniometrické funkce.*

Příklady řešení složitějších goniometrických rovnic

1. Řešte v oboru R rovnici

$$\sin 2x = -\frac{1}{2}.$$

Řešení

Po substituci $u = 2x$ dostáváme rovnici $\sin u = -\frac{1}{2}$, která má všechna řešení tvaru $u = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi$ (III. kvadrant), $u = \frac{11}{6}\pi + 2k\pi$ (IV. kvadrant). Odtud $x = \frac{7}{12}\pi + k\pi$ nebo $x = \frac{11}{12}\pi + k\pi$, kde $k \in \mathsf{Z}$, takže $\mathsf{K} = \bigcup_{k\in\mathsf{Z}}\left\{(12k+7)\frac{\pi}{12}, (12k+11)\frac{\pi}{12}\right\}$.

2. Řešte v oboru R pro α ve stupňové míře rovnici $\cos(3\alpha - 60°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Řešení

Funkce kosinus je kladná v intervalech odpovídajících I. a IV. kvadrantu, takže po substituci (zavedení pomocné neznámé) $\beta = 3\alpha - 60°$ dostáváme tato řešení:

$$\beta = 45° + k \cdot 360°,\ \beta = (360° - 45°) + k \cdot 360° = 315° + k \cdot 360°$$

Odtud plyne po zpětném dosazení za β:

$$3\alpha = 105° + k \cdot 360°,\ \text{resp. } 3\alpha = 375° + k \cdot 360°$$

čili

$$\alpha = 35° + k \cdot 120°,\ \alpha = 125° + k \cdot 120°,\ \text{kde } k \in \mathsf{Z},$$

a tedy $\mathsf{K} = \bigcup_{k\in\mathsf{Z}}\{35° + k \cdot 120°, 125° + k \cdot 120°\}$.

3. Řešte v oboru R rovnici

$$2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0.$$

Řešení

Užitím substituce $u = \cos x$ převedeme danou goniometrickou rovnici na kvadratickou rovnici pro neznámou u:

$$2u^2 + 3u + 1 = 0,$$

která má řešení $u = -1$ a $u = -\frac{1}{2}$. Po zpětném dosazení za u dostáváme dvojici základních goniometrických rovnic pro neznámou x:

$$\cos x = -1, \qquad \cos x = -\frac{1}{2}.$$

Jejich všechna řešení mají tvary

$$x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi = (3k+1)\frac{2}{3}\pi,\ x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi = (3k+2)\frac{2}{3}\pi,$$
$$x = (2k+1)\pi,\ \text{kde } k \in \mathsf{Z},$$

takže

$$\mathsf{K} = \bigcup_{k\in\mathsf{Z}}\left\{(3k+1)\frac{2}{3}\pi, (3k+2)\frac{2}{3}\pi, (2k+1)\pi\right\}.$$

4. Řešte v oboru R rovnici

$$2\sin^2 x - \cos^2 x - 4\sin x + 2 = 0.$$

Řešení

Abychom měli v rovnici jen jednu goniometrickou funkci (kterou pak můžeme z rovnice určit), vyjádříme funkci kosinus funkcí sinus podle vzorce: $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, takže rovnice nabývá po úpravě tvaru

$$3\sin^2 x - 4\sin x + 1 = 0.$$

To je kvadratická rovnice pro neznámou $u = \sin x$. Jejím řešením dostáváme dvojici základních goniometrických rovnic: $\sin x = 1$, $\sin x = \frac{1}{3}$. Všechna řešení první rovnice mají tvar

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi = (4k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathsf{Z};$$

všechna řešení druhé rovnice mají tvary

$$x \doteq 0{,}339\,8 + 2k\pi,\ x \doteq \pi - 0{,}339\,8 + 2k\pi \doteq 2{,}801\,8 + 2k\pi,\ k \in \mathsf{Z}.$$

Výsledek: $\mathsf{K} \bigcup_{k\in\mathsf{Z}}\left\{x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ x \doteq 0{,}339\,8 + 2k\pi,\ x \doteq 2{,}081\,8 + 2k\pi\right\}$

5. Řešte v oboru R rovnici

$$\cos x + \operatorname{cotg} x = 1 + \sin x.$$

Řešení

Daná rovnice má smysl, jen pokud je $\sin x \neq 0$ čili $x \neq k\pi$, $k \in \mathsf{Z}$. Postupně ji pak upravujeme takto:

$$\cos x + \frac{\cos x}{\sin x} - (1 + \sin x) = 0$$
$$\sin x \cos x + \cos x - \sin x(1 + \sin x) = 0$$
$$\cos x(\sin x + 1) - \sin x(\sin x + 1) = 0$$
$$(\sin x + 1)(\cos x - \sin x) = 0$$

$$\sin x + 1 = 0 \qquad \vee \qquad \cos x - \sin x = 0$$
$$\sin x = -1 \qquad\qquad \operatorname{cotg} x = 1$$
$$x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \ k \in \mathsf{Z} \qquad\qquad x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \ k \in \mathsf{Z}$$

Po provedení zkoušky dospíváme k tomuto *výsledku:*

$$\mathsf{K} = \bigcup_{k \in \mathsf{Z}} \left\{ (4k-1)\frac{\pi}{2}, (4k+1)\frac{\pi}{4} \right\}$$

V aplikacích ve fyzice a technice jsou velmi důležité *goniometrické rovnice typu*

$$a \sin x + b \cos x = c,$$

kde a, b, c jsou nenulová reálná čísla a x je neznámá. Řešení rovnice tohoto typu lze provést několika různými způsoby; v následujícím příkladu ukážeme nejčastěji používaný způsob, který spočívá v úpravě levé strany rovnice na tvar $A \sin (x + x_0)$, kde $A > 0$, $x_0 \in \langle 0, 2\pi)$.

6. Řešte v oboru R rovnici

$$8 \sin x + 6 \cos x = 9.$$

Řešení

Podle součtového vzorce pro funkci sinus (viz str. 180) platí

$$A \sin (x + x_0) = A \sin x \cos x_0 + A \cos x \sin x_0.$$

Položíme proto $A \cos x_0 = 8$ a $A \sin x_0 = 6$.

$$\text{Odtud } \frac{A \sin x_0}{A \cos x_0} = \frac{6}{8} \text{ čili } \operatorname{tg} x_0 = 0{,}75 \Rightarrow x_0 \doteq 0{,}643\,5;$$
$$A^2 \cos^2 x_0 + A^2 \sin^2 x_0 = 64 + 36 \text{ čili } A^2 = 100 \Rightarrow A = 10 \ (A > 0).$$

Daná rovnice pak nabývá tvaru $10 \sin (x + 0{,}643\,5) = 9$ čili $\sin (x + 0{,}643\,5) = 0{,}9$. Tuto rovnici řešíme substitucí $u = x + 0{,}643\,5$: rovnice $\sin u = 0{,}9$ má pro $u \in \langle 0, 2\pi)$ dvojici kořenů:

$$u_1 \doteq 1{,}119\,8 \text{ čili } x_1 + 0{,}643\,5 \doteq 1{,}119\,8 \Rightarrow x_1 \doteq 0{,}476\,3,$$
$$u_2 \doteq \pi - 1{,}119\,8 \text{ čili } x_2 + 0{,}643\,5 \doteq \pi - 1{,}119\,8 \Rightarrow x_2 \doteq 1{,}378\,3.$$

Všechna řešení dané rovnice mají tvary $x_1 + 2k\pi$, $x_2 + 2k\pi$, kde $k \in \mathsf{Z}$.

Výsledek: $\mathsf{K} = \bigcup_{k \in \mathsf{Z}} \{x_1 + 2k\pi, x_2 + 2k\pi\}$, kde $x_1 \doteq 0{,}476\,3$, $x_2 \doteq 1{,}378\,3$.

5.8 Nerovnice a jejich řešení

V matematice i v aplikacích je často třeba řešit také *úlohu* tohoto typu: Jsou dány dva výrazy $L(x)$, $P(x)$ s proměnnou x. Mají se určit hodnoty této proměnné z daného číselného oboru $\mathsf{M} \subset \mathsf{R}$ (nejčastěji $\mathsf{M} = \mathsf{R}$), pro něž platí

$$L(x) < P(x), \text{ resp. } L(x) > P(x),$$
$$\text{popřípadě } L(x) \leqq P(x), \text{ resp. } L(x) \geqq P(x).$$

Zápis úlohy v některém z těchto tvarů se nazývá **nerovnice**. Zavádí se zcela obdobná terminologie jako u rovnic (viz kap. 5.1): **levá strana nerovnice** $L(x)$, **pravá strana nerovnice** $P(x)$, **neznámá** x, **kořen (řešení) nerovnice**, **obor řešení nerovnice** $\mathsf{M} \subset \mathsf{R}$, **definiční obor nerovnice** D, **množina všech kořenů (řešení) nerovnice** K ($\mathsf{K} \subset \mathsf{D} \subset \mathsf{M} \subset \mathsf{R}$).

Poznámka. Názvu **řešení nerovnice** se užívá v trojím významu analogicky jako u rovnice.

Příklad nerovnice

Nerovnice $7x < 5$ s neznámou $x \in \mathsf{R}$ (tj. nerovnice určená takto: a) obor řešení nerovnice $\mathsf{M} = \mathsf{R}$, b) neznámá x, c) znak nerovnosti $<$, $L(x) = 7x$, $P(x) = 5$) je splněna pro všechna $x < \frac{5}{7}$, tj. jejím kořenem je každé číslo $x \in \left(-\infty, \frac{5}{7}\right)$ čili množina všech kořenů je interval $\mathsf{K} = \left(-\infty, \frac{5}{7}\right)$.

Zdůrazněme, že pro nerovnice je vždy $\mathsf{M} \subset \mathsf{R}$, tj. kořeny nerovnice mohou být pouze reálná čísla. Volba oboru řešení nerovnice M je ovšem obdobně jako u rovnice podstatná z hlediska její řešitelnosti. Tak *např.* když pro nerovnici $7x < 5$ zvolíme $\mathsf{M} = \mathsf{Z}$, bude $\mathsf{K} = \mathsf{Z}_0^- = \{0; -1; -2; \ldots\}$; zvolíme-li $\mathsf{M} = \mathsf{N}$, bude $\mathsf{K} = \emptyset$.

Analogicky jako tomu bylo u rovnic (kap. 5.1), lze také uvažovat **nerovnice s parametry (parametrické nerovnice)**. Parametry nerovnice jsou samozřejmě jen reálné.

Části postupu početního řešení nerovnice

Postup řešení dané nerovnice se skládá z týchž základních částí jako řešení rovnice, tj. z **rozboru**, **závěru rozboru** a **zkoušky**. U nerovnic s parametry je součástí závěru rozboru **diskuse řešení** vzhledem k hodnotám parametrů.

Úpravy nerovnic prováděné v rozboru jsou analogicky jako u rovnic obvykle **ekvivalentní úpravy**, tj. takové úpravy, jimiž se z dané nerovnice získává nerovnice s touž množinou všech kořenů. Z logického hlediska představuje ekvivalentní úprava nerovnice (1) na nerovnici (2) ekvivalenci (odtud její název), a proto se zapisuje (1) $\Leftrightarrow$ (2). (Pokud však píšeme nerovnice (1), (2) pod sebou na samostatných řádcích, znak $\Leftrightarrow$ se vynechává.)

Nejdůležitější ekvivalentní úpravy nerovnic jsou shrnuty v tabulce 5.2. Vycházejí z vlastností nerovností mezi reálnými čísly (kap. 2.1).

Přehled ekvivalentních úprav nerovnice v oboru $M \subset R$ Tab. 5.2

Označení	Ekvivalentní úprava nerovnice
(UN 1)	Vzájemná výměna stran nerovnice se současnou změnou znaku nerovnosti v obrácený.
(UN 2)	Nahrazení libovolné strany nerovnice výrazem, který se jí rovná v celém oboru řešení nerovnice, přitom znak nerovnosti se nemění.
(UN 3)	Přičtení téhož čísla nebo výrazu s neznámou, který je definován v celém oboru řešení, k oběma stranám nerovnice, znak nerovnosti se nemění.
(UN 4)	Vynásobení obou stran nerovnice kladným číslem nebo výrazem s neznámou, který je definován a kladný (tj. nabývá jen kladných hodnot) v celém oboru řešení nerovnice, přitom znak nerovnosti se nemění.
(UN 4a)	Vynásobení obou stran nerovnice záporným číslem nebo výrazem s neznámou, který je definován a záporný (tj. nabývá jen záporných hodnot) v celém oboru řešení nerovnice, přitom znak nerovnosti se změní v obrácený.
(UN 5)	Umocnění obou stran nerovnice přirozeným mocnitelem, jsou-li obě strany nerovnice nezáporné (tj. nabývají jen nezáporných hodnot) v celém oboru řešení nerovnice, přitom znak nerovnosti se nemění.
(UN 6)	Odmocnění obou stran nerovnice přirozeným odmocnitelem, jestliže obě strany nerovnice jsou nezáporné (tj. nabývají jen nezáporných hodnot) v celém oboru řešení nerovnice, přitom znak nerovnosti se nemění.
(UN 7)	Zlogaritmování obou stran nerovnice při témž základu větším než 1, jsou-li obě strany nerovnice kladné (tj. nabývají jen kladných hodnot) v celém oboru řešení nerovnice, přitom znak nerovnosti se nemění.

Při použití pouze ekvivalentních úprav nerovnice není *zkouška* nutnou součástí řešení. Je však účelné ji také provést pro kontrolu správnosti řešení, a to buď prověřením podmínek, za nichž jsou prováděné úpravy ekvivalentní (tj. kdy postup v rozboru lze též obrátit), nebo jistou modifikací zkoušky dosazením u rovnic:

$$\text{Vyšlo-li } x > x_1, \text{ můžeme dosadit } x = x_1 + a,$$
$$\text{vyšlo-li } x < x_2, \text{ můžeme dosadit } x = x_2 - a,$$

kde $a > 0$ je pomocný reálný parametr.

Příklad částí postupu řešení nerovnic

Řešte v oboru R nerovnici $\dfrac{x}{1-x} < -1$ s neznámou x.

Řešení

1. *Rozbor:* Daná nerovnice má smysl pro $1 - x \neq 0$ čili $x \neq 1$. Přičtením čísla 1 k oběma stranám nerovnice postupně dostáváme

$$\frac{x}{1-x} + 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{x+1-x}{1-x} < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{1-x} < 0.$$

2. *Závěr rozboru:* Nerovnice $\dfrac{1}{1-x} < 0$ je splněna pro všechna x, pro něž platí

$$1 - x < 0 \text{ čili } x > 1.$$

3. *Zkouška* (není nutná, neboť všechny úpravy dané nerovnice byly ekvivalentní, a lze je proto obrátit, takže všechna $x > 1$ jsou též kořeny dané nerovnice). Provedeme ji takto: Zavedeme pomocný parametr $a > 0$ a položíme $x = 1 + a$. Dosazením do levé a pravé strany nerovnice dostáváme

$$L(1+a) = \frac{1+a}{-a} = -\frac{1}{a} - 1, \quad P(1+a) = -1, \text{ takže } L(1+a) < P(1+a).$$

Výsledek: $K = (1, +\infty)$

Jiný způsob řešení: Danou nerovnici lze též řešit vynásobením obou stran číslem $1 - x$. Přitom je nutné uvážit dva případy: $1 - x > 0$ a $1 - x < 0$. Pro $1 - x > 0$ dostáváme po vynásobení nerovnici $x < x - 1$, která zřejmě není splněna pro žádné x; pro $1 - x < 0$ čili $x > 1$ dostáváme nerovnici $x > x - 1$, která je splněna pro každé x. Za podmínky $x > 1$ je tato nerovnice ekvivalentní s danou nerovnicí, jejímiž řešeními jsou proto všechna $x \in (1, +\infty)$.

Poznámka. Obdobně jako rovnice lze též nerovnice řešit přibližně graficky. **Grafická metoda řešení nerovnice** $f(x) < g(x)$, resp. $f(x) > g(x)$ je založena na tom, že její levá strana $f(x)$ a pravá strana $g(x)$ představují analyticky vyjádřené reálné funkce reálné proměnné x (kap. 4.1) f: $y = f(x)$, g: $y = g(x)$, $x \in M \subset R$. Sestrojíme-li v pravoúhlé soustavě souřadnic Oxy grafy funkcí f, g, pak pomocí nich určíme řešení dané nerovnice takto: Při grafickém řešení nerovnice $f(x) < g(x)$ určíme body grafu funkce f, které leží „pod body" grafu funkce g o téže souřadnici x, pak tyto souřadnice x jsou kořeny dané nerovnice. Při grafickém řešení nerovnice $f(x) > g(x)$ určíme body grafu funkce f, které leží „nad body" grafu funkce g o téže souřadnici x; pak tyto souřadnice x jsou kořeny dané nerovnice. Prakticky ovšem získáme jen přibližné hodnoty kořenů, jejichž přesnost závisí na tom, jak přesně se dařilo graficky znázornit funkce f, g.

Klasifikace nerovnic

Elementární nerovnice s neznámou $x \in R$ probírané na střední škole lze rozdělit obdobně jako u rovnic na dva druhy:
I. algebraické, II. nealgebraické.

I. **Algebraická nerovnice n-tého stupně** s neznámou $x \in R$ je každá nerovnice tvaru

$$P_n(x) > 0, \text{ resp. } P_n < 0,$$
$$P_n(x) \geqq 0, \text{ resp. } P_n \leqq 0,$$

kde $P_n(x)$ je mnohočlen n-tého stupně. Významnými speciálními případy jsou zejména **lineární nerovnice** a **kvadratická nerovnice**.

II. **Nealgebraická nerovnice** je každá nerovnice, která není algebraická. Patří mezi ně **nerovnice iracionální**, **exponenciální**, **logaritmické** a **goniometrické**.

Kromě toho se v R řeší též **nerovnice s neznámou v absolutní hodnotě**.

5.9 Lineární nerovnice

Lineární nerovnicí s neznámou $x \in \mathsf{R}$ nazýváme každou nerovnici tvaru

$$ax + b > 0, \quad \text{resp.} \quad ax + b < 0,$$

kde a, b jsou libovolná reálná čísla. O lineární nerovnici se mluví také v případě, že má tvar

$$ax + b \geqq 0, \quad \text{resp.} \quad ax + b \leqq 0.$$

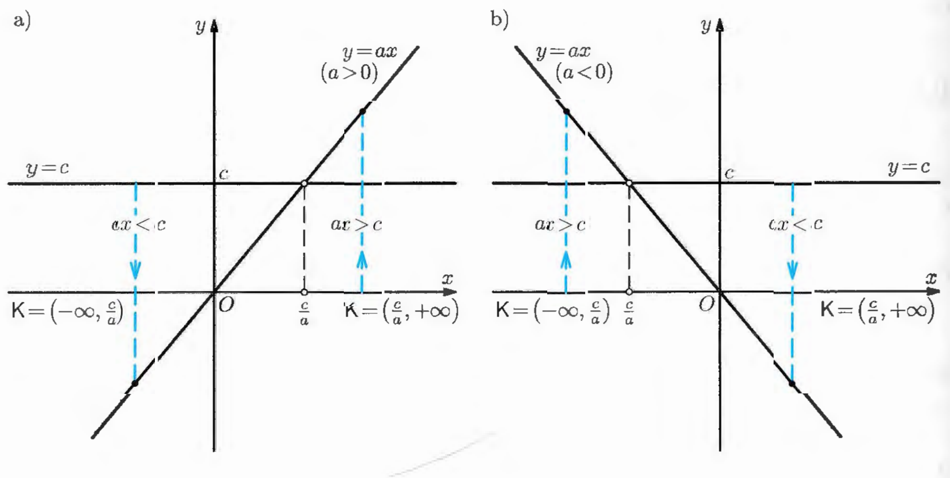
Řešení lineární nerovnice $ax + b > 0$, resp. $ax + b < 0$ se provádí tak, že ji upravíme odečtením čílsa b od obou stran nerovnice (což je ekvivalentní úprava typu (UN 3)) na tvar $ax > c$, resp. $ax < c$ ($a, c \in \mathsf{R}$; $c = -b$).
Řešení této nerovnice v oboru $\mathsf{M} = \mathsf{R}$ je již snadné. Mohou nastat tyto tři případy:

a) Pro $a > 0$ je $ax > c \Leftrightarrow x > \frac{c}{a}$, tj. $\mathsf{K} = \left(\frac{c}{a}, +\infty\right)$; resp $ax < c \Leftrightarrow x < \frac{c}{a}$, tj. $\mathsf{K} = \left(-\infty, \frac{c}{a}\right)$.

b) Pro $a < 0$ je $ax > c \Leftrightarrow x < \frac{c}{a}$, tj. $\mathsf{K} = \left(-\infty, \frac{c}{a}\right)$; resp. $ax < c \Leftrightarrow x > \frac{c}{a}$, tj. $\mathsf{K} = \left(\frac{c}{a}, +\infty\right)$.

c) Pro $a = 0$ dostáváme nerovnici tvaru $0x > c$, resp. $0x < c$. Podle toho, jakých hodnot nabývá c, je tato nerovnice splněna buď pro každé $x \in \mathsf{R}$, tj. $\mathsf{K} = \mathsf{R}$, anebo pro žádné $x \in \mathsf{R}$, tj. $\mathsf{K} = \emptyset$.

Poznámka. Pro názornost uvádíme též grafické řešení nerovnic $ax > c$, $ax < c$, je-li $a > 0$ (obr. 5.12a) nebo $a < 0$ (obr. 5.12b).



Obr. 5.12

Příklady řešení lineárních nerovnic

Při řešení použijeme ekvivalentní úpravy nerovnic uvedené v tabulce 5.2.

Řešte v daných oborech nerovnice:

a) $2(x-5) < x - 1$ v oboru R, b) $3 - \frac{3x}{2} < \frac{5}{8} - \frac{4x-3}{6}$ v oboru R,

c) $6x + 1 > 2(x-3) - 1$ v oboru Z.

Řešení

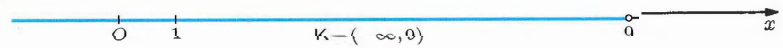
a)

$$\begin{aligned} 2(x-5) &< x - 1 && \text{(UN 2)} \\ 2x - 10 &< x - 1 && |+10-x \quad \text{(UN 3)} \\ 2x - x &< 10 - 1 && \text{(UN 2)} \\ x &< 9 \end{aligned}$$

Použité úpravy nerovnice jsou vesměs ekvivalentní. *Zkouška* není nutná. Provedeme ji však pro kontrolu a procvičení jejího postupu. Užitím pomocného parametru $a > 0$ lze každé řešení $x < 9$ vyjádřit ve tvaru $x = 9 - a$. Po dosazení do levé a pravé strany dané nerovnice dostáváme:

$$\left.\begin{aligned} L(9-a) &= 2(9-a-5) = 2(4-a) = 8 - 2a \\ P(9-a) &= 9 - a - 1 = 8 - a \end{aligned}\right\} \Rightarrow L(9-a) < P(9-a)$$

Výsledek: $\mathsf{K} = (-\infty, 9)$; grafické znázornění je na obr. 5.13.



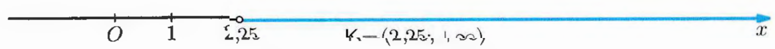
Obr. 5.13

b) Vynásobením obou stran dané nerovnice nejmenším společným jmenovatelem zlomků, které obsahuje, ji převedeme na tvar neobsahující zlomky:

$$\begin{aligned} 3 - \frac{3x}{2} &< \frac{5}{8} - \frac{4x-3}{6} && |\cdot 24 \quad \text{(UN 4)} \\ 72 - 36x &< 15 - (16x - 12) && \text{(UN 2)} \\ 72 - 36x &< 27 - 16x && |-72+16x \quad \text{(UN 3)} \\ 16x - 36x &< 27 - 72 && \text{(UN 2)} \\ -20x &< -45 && \left|\cdot\left(-\frac{1}{20}\right)\right. \quad \text{(UN 4a)} \\ x &> 2{,}25 \end{aligned}$$

Zkoušku lze provést obdobně jako v příkladu a) zavedením pomocného parametru $a > 0$ pro vyjádření kořenů $x > 2{,}25$ ve tvaru $x = 2{,}25 + a$.

Výsledek: $\mathsf{K} = (2{,}25; +\infty)$; grafické znázornění je na obr. 5.14.



Obr. 5.14

c)
$$\begin{aligned} 6x+1 &> 2(x-3)-1 && \text{(UN 2)} \\ 6x+1 &> 2x-7 && \mid -1-2x \quad \text{(UN 3)} \\ 6x-2x &> -1-7 && \text{(UN 2)} \\ 4x &> -8 && \mid \cdot \tfrac{1}{4} \quad \text{(UN 4)} \\ x &> -2 \end{aligned}$$

Zkoušku můžeme provést podobně jako v příkladu a) zavedením pomocného parametru $a > 0$ k vyjádření kořenů $x > -2$ ve tvaru $x = -2 + a$.

Výsledek: $\mathsf{K} = (-2, +\infty) \cap \mathsf{Z} = \{-1\} \cup \mathsf{N}_0$

Příklady řešení lineárních nerovnic s parametrem

1. Řešte nerovnici $3(2p - x) < px + 1$ s neznámou $x \in \mathsf{R}$ a s parametrem $p \in \mathsf{R}$.

Řešení

$$\begin{aligned} 3(2p-x) &< px+1 && \text{(UN 2)} \\ 6p-3x &< px+1 && \text{(UN 3)} \\ 6p-1 &< px+3x && \text{(UN 1) a (UN 2)} \\ (p+3)x &> 6p-1 \end{aligned}$$

Diskuse řešení: Je-li $p > -3$, pak $x > \dfrac{6p-1}{p+3}$.

Je-li $p < -3$, pak $x < \dfrac{6p-1}{p+3}$.

Je-li $p = -3$, pak $0x > -19 \Rightarrow x \in \mathsf{R}$.

Výsledky: Pro $p > -3$ je $\mathsf{K} = \left(\dfrac{6p-1}{p+3}, +\infty\right)$.

Pro $p < -3$ je $\mathsf{K} = \left(-\infty, \dfrac{6p-1}{p+3}\right)$. Pro $p = -3$ je $\mathsf{K} = \mathsf{R}$.

2. Pro která $x \in \mathsf{R}$ platí $(p^2 - 2p)x > 2 - p$, kde p je kladný parametr $(p > 0)$?

Řešení

Danou nerovnici upravíme ekvivalentními úpravami (UN 3) a (UN 2) na tvar

$$(p-2)(px+1) > 0.$$

Diskuse řešení: Je-li $p = 2$, pak $0 \cdot (2x+1) > 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$.

Je-li $p > 2$, pak po (UN 4) je $px + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -\dfrac{1}{p}$.

Je-li $0 < p < 2$, pak po (UN 4a) je $px + 1 < 0 \Leftrightarrow x < -\dfrac{1}{p}$.

Výsledek: Pro $p = 2$ je $\mathsf{K} = \emptyset$. Pro $p > 2$ je $\mathsf{K} = \left(-\dfrac{1}{p}, +\infty\right)$.

Pro $0 < p < 2$ je $\mathsf{K} = \left(-\infty, -\dfrac{1}{p}\right)$.

Poznámka. **Řešení rovnic a nerovnic různých druhů, určování podmínek jejich řešitelnosti i některé jiné úlohy vedou k řešení soustav lineárních nerovnic o jedné neznámé** dvou druhů:
a) spojených znakem logické **konjunkce** $\wedge$, b) spojených znakem logické **disjunkce** $\vee$. Množiny K všech řešení soustavy n nerovnic těchto typů se určí takto: a) K je **průnik** množin K_i všech řešení jednotlivých nerovnic, b) K je **sjednocení** množin K_i všech řešení jednotlivých nerovnic, $i = 1, 2, \ldots, n$. Z kap. 1.2 víme, že platí

$$(x \in \mathsf{A} \wedge x \in \mathsf{B}) \Leftrightarrow x \in \mathsf{A} \cap \mathsf{B}, \quad (x \in \mathsf{A} \vee x \in \mathsf{B}) \Leftrightarrow x \in \mathsf{A} \cup \mathsf{B}.$$

Příklady řešení soustav lineárních nerovnic s jednou neznámou

1. V oboru R řešte soustavy (konjunkce) nerovnic

a) $\dfrac{x}{4} - \dfrac{7}{8} > \dfrac{1}{5}x - \dfrac{5}{2}, \quad \dfrac{x+1}{4} \geqq 2 - \dfrac{1-2x}{3},$

b) $2x - 8 > 5x + 1 > 3x + 7.$

Řešení

a) Daná soustava představuje konjunkci nerovnic

$$\frac{x}{4} - \frac{7}{8} > \frac{1}{5}x - \frac{5}{2} \wedge \frac{x+1}{4} \geqq 2 - \frac{1-2x}{3}.$$

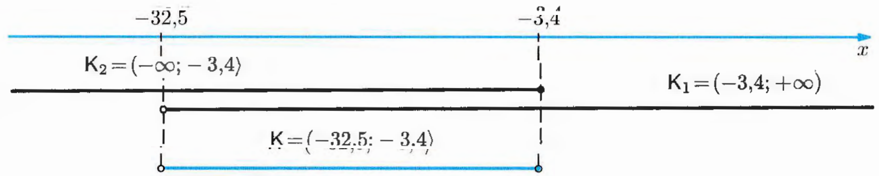
Obě nerovnice postupně zjednodušíme užitím ekvivalentních úprav podle tabulky 5.2, přičemž nejprve přejdeme k nerovnicím neobsahujícím zlomky (vynásobením obou stran 1. nerovnice číslem 40 a 2. nerovnice číslem 12), tak dostaneme ekvivalentní soustavy nerovnic

$$\begin{aligned} 10x - 35 > 8x - 100 &\wedge 3x + 3 \geqq 24 - 4 + 8x, \\ 2x > -65 \quad &\wedge \quad -17 \geqq 5x, \\ x > -32{,}5 \quad &\wedge \quad x \leqq -3{,}4, \end{aligned}$$

takže $x \in (-32{,}5; +\infty) = \mathsf{K}_1 \wedge x \in (-\infty; -3{,}4\rangle = \mathsf{K}_2$.

Výsledek: $\mathsf{K} = \mathsf{K}_1 \cap \mathsf{K}_2 = (-32{,}5; -3{,}4\rangle$

Graficky je řešení znázorněno na obr. 5.15.



Obr. 5.15

b) Daná soustava představuje konjunkci nerovnic

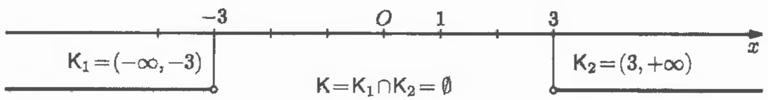
$$2x - 8 > 5x + 1 \wedge 5x + 1 > 3x + 7,$$

odkud plyne ekvivalentními úpravami, že $x < -3 \wedge x > 3$ čili

$$x \in (-\infty, -3) = \mathsf{K}_1 \wedge x \in (3, +\infty) = \mathsf{K}_2.$$

Výsledek: $\mathsf{K} = \mathsf{K}_1 \cap \mathsf{K}_2 = \emptyset$

Graficky je řešení znázorněno na obr. 5.16.



Obr. 5.16

2. V oboru R řešte soustavu (disjunkci) nerovnic z předcházejícího příkladu 1a).

Řešení

Nerovnice jsou nyní spojeny znakem disjunkce $\vee$. Týmiž ekvivalentními úpravami jako v příkladu 1a) dospíváme k tomu, že

$$x \in (-32{,}5; +\infty) = \mathsf{K}_1 \vee x \in (-\infty; -3{,}4) = \mathsf{K}_2.$$

Výsledek: $\mathsf{K} = \mathsf{K}_1 \cup \mathsf{K}_2 = \mathsf{R}$

Lineární nerovnicí s neznámou v absolutní hodnotě nazýváme každou nerovnici (s neznámou $x \in \mathsf{R}$) tvaru

$$|a_1x + b_1| \pm |a_2x + b_2| \pm \ldots \pm |a_nx + b_n| > a_0x + b_0$$

(popř. $\geqq$, $<$, $\leqq$), přičemž a_i, b_i ($i = 0, 1, 2, \ldots, n$) jsou daná reálná čísla, $a_i \neq 0$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$.

Řeší se úpravou na lineární nerovnice bez absolutních hodnot užitím **metody intervalů** (**metody nulových bodů**) obdobně jako v případě lineární rovnice s absolutními hodnotami (viz kap. 5.2).

Poznámka. Ve speciálních případech nerovnic $|a_1x + b_1| < c$, $|a_1x + b_1| \leqq c$, $|a_1x + b_1| > c$, $|a_1x + b_1| \geqq c$, kde c je daná kladná konstanta, lze při řešení též jednodušeji vyjít přímo ze známých ekvivalencí pro libovolné reálné číslo a a $r > 0$: $|a| < r \Leftrightarrow -r < a < r$, $|a| \leqq r \Leftrightarrow -r \leqq a \leqq r$, $|a| > r \Leftrightarrow a > r \vee a < -r$, $|a| \geqq r \Leftrightarrow a \geqq r \vee a \leqq -r$ (viz kap. 2.1).

Příklady řešení nerovnic s absolutními hodnotami

1. Řešte v oboru R nerovnice

a) $|x - 2| < 5$, b) $|2x + 7| \geqq 3$.

Řešení

Užitím postupu podle předcházející poznámky dostáváme:

a) $|x - 2| < 5 \Leftrightarrow -5 < x - 2 < 5$, odkud $-3 < x < 7$ čili $x \in (-3; 7)$.

Výsledek: $\mathsf{K} = (-3; 7)$

b) $|2x + 7| \geqq 3 \Leftrightarrow 2x + 7 \geqq 3 \vee 2x + 7 \leqq -3$, odkud $x \geqq -2 \vee x \leqq -5$ čili $x \in (-\infty, -5\rangle \cup \langle -2, +\infty)$.

Výsledek: $\mathsf{K} = (-\infty, -5\rangle \cup \langle -2, +\infty)$

2. V oboru R řešte nerovnici

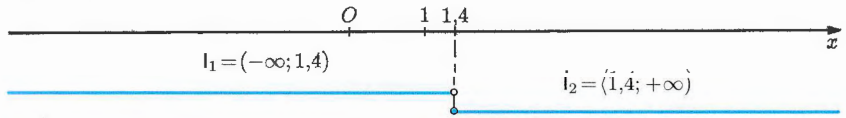
$$|5x - 7| < 3x + 1.$$

Řešení metodou intervalů

Pro nerovnici $|5x - 7| < 3x + 1$ určíme nulový bod lineárního dvojčlenu v absolutní hodnotě

$$5x - 7 = 0 \Rightarrow x = \frac{7}{5} = 1{,}4.$$

Tento bod rozdělí množinu $\mathsf{R} = (-\infty, +\infty)$ na dva intervaly $\mathsf{I}_1 = (-\infty; 1{,}4)$, $\mathsf{I}_2 = \langle 1{,}4; +\infty)$ (obr. 5.17), ve kterých danou nerovnici s absolutní hodnotou můžeme nahradit rovnicemi bez absolutní hodnoty.



Obr. 5.17

Pro $x \in \mathsf{I}_1 = (-\infty; 1{,}4)$ je $x < 1{,}4 \Rightarrow 5x - 7 < 0 \Rightarrow |5x - 7| = -5x + 7$, takže daná nerovnice nabývá tvaru

$$-5x + 7 < 3x + 1 \Rightarrow x > 0{,}75.$$

Jejími řešeními jsou tedy všechna taková x, pro která platí $x < 1{,}4 \wedge x > 0{,}75$ čili $0{,}75 < x < 1{,}4$. Množina všech těchto řešení je $\mathsf{K}_1 = (0{,}75; 1{,}4)$.

Pro $x \in \mathsf{I}_2 = \langle 1{,}4; +\infty)$ je $x \geqq 1{,}4 \Rightarrow 5x - 7 \geqq 0 \Rightarrow |5x - 7| = 5x - 7$, takže daná nerovnice nabývá tvaru

$$5x - 7 < 3x + 1 \Rightarrow x < 4.$$

Jejími řešeními jsou tedy všechna taková x, pro něž platí $x \geqq 1{,}4 \wedge x < 4$ čili $1{,}4 \leqq x < 4$. Množina všech těchto řešení je $\mathsf{K}_2 = \langle 1{,}4; 4)$.

Výsledek: $\mathsf{K} = \mathsf{K}_1 \cup \mathsf{K}_2 = (0{,}75; 4)$

3. Řešte v oboru R nerovnici

$$\left|\frac{x - 5}{x + 1}\right| \leqq 4.$$

Řešení metodou intervalů

Definičním oborem dané nerovnice je množina $\mathsf{D} = \mathsf{R} \setminus \{-1\}$. Nerovnici upravíme nejprve vynásobením obou jejích stran výrazem $|x + 1|$, čímž dostáváme nerovnici

$$|x - 5| - 4|x + 1| \leqq 0.$$

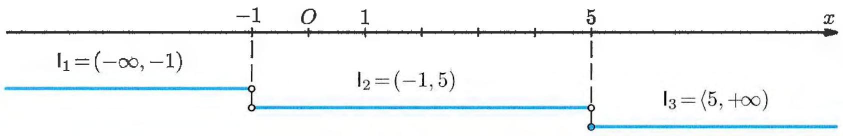
(Úprava je ekvivalentní za předpokladu, že $x \neq -1$, tj. x je z definičního oboru nerovnice.)

Při řešení této nerovnice metodou intervalů postupujeme takto: Určíme nulové body lineárních dvojčlenů v absolutních hodnotách

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1, \quad x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5.$$

Označíme je $x_1 = -1$, $x_2 = 5$, $x_1 < x_2$. (Je třeba zdůraznit, že se zde musí vzít také bod $x_1 = -1$, i když nepatří do definičního oboru dané nerovnice.) Nulové body rozdělí definiční obor nerovnice $\mathsf{R} \setminus \{-1\}$ na tři intervaly $\mathsf{I}_1 = (-\infty, -1)$, $\mathsf{I}_2 = (-1; 5)$, $\mathsf{I}_3 = \langle 5, +\infty)$ (obr. 5.18). V těchto intervalech se řešená nerovnice upraví na nerovnice bez absolutních hodnot. K tomu lze využít tabulku znamének hodnot dvojčlenů $x+1$ a $x-5$ pro vnitřní body x intervalů I_1 až I_3:

x	$(-\infty, -1)$	$(-1; 5)$	$(5, +\infty)$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$x-5$	$-$	$-$	$+$



Obr. 5.18

Pro $x \in \mathsf{I}_1 = (-\infty, -1)$ je $|x+1| = -(x+1)$, $|x-5| = -(x-5)$, takže daná nerovnice nabývá tvaru: $-(x-5) + 4(x+1) \leqq 0$, odkud $x \leqq -3$ čili $x \in (-\infty, -3\rangle$. Množinou všech řešení nerovnice v I_1 je tedy $\mathsf{K}_1 = (-\infty, -1) \cap (-\infty, -3\rangle = (-\infty, -3\rangle$.

Pro $\mathsf{I}_2 = (-1; 5)$ je $|x+1| = x+1$, $|x-5| = -(x-5)$, takže daná nerovnice nabývá tvaru: $-(x-5) - 4(x+1) \leqq 0$, odtud $x \geqq \frac{1}{5}$ čili $x \in \left\langle \frac{1}{5}, +\infty\right)$.

Množinou všech řešení nerovnice v I_2 tedy je $\mathsf{K}_2 = (-1, 5) \cap \left\langle \frac{1}{5}, +\infty\right) = \left\langle \frac{1}{5}, 5\right)$.

Pro $x \in \mathsf{I}_3 = \langle 5, +\infty)$ je $|x+1| = x+1$, $|x-5| = x-5$; takže daná nerovnice nabývá tvaru: $x - 5 - 4(x+1) \leqq 0$, odtud $x \geqq -3$ čili $x \in \langle -3, +\infty)$. Množinou všech řešení nerovnice v I_3 je tedy $\mathsf{K}_3 = \langle 5, +\infty) \cap \langle -3, +\infty) = \langle 5, +\infty)$.

Výsledek: $\mathsf{K} = \mathsf{K}_1 \cup \mathsf{K}_2 \cup \mathsf{K}_3 = (-\infty, -3\rangle \cup \left\langle \frac{1}{5}, 5\right) \cup \langle 5, +\infty) = (-\infty, -3\rangle \cup \left\langle \frac{1}{5}, +\infty\right)$

Poznámka. Tuto úlohu lze též řešit úpravou dané nerovnice na kvadratické nerovnice (viz kap. 5.10).

5.10 Kvadratické nerovnice

Kvadratickou nerovnicí s neznámou $x \in \mathsf{R}$ nazýváme každou nerovnici tvaru

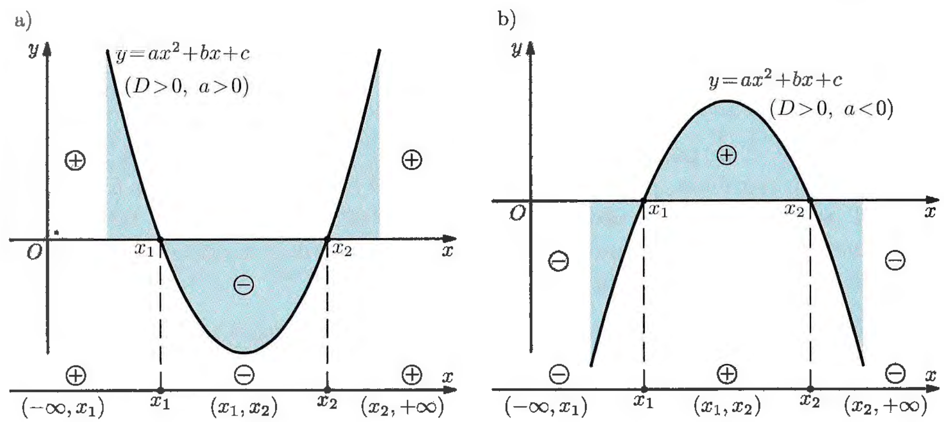
$$ax^2 + bx + c > 0, \quad \text{resp. } ax^2 + bx + c < 0,$$

kde a, b, c jsou libovolná reálná čísla, $a \neq 0$. O kvadratické nerovnici se mluví také v případě, že má tvar

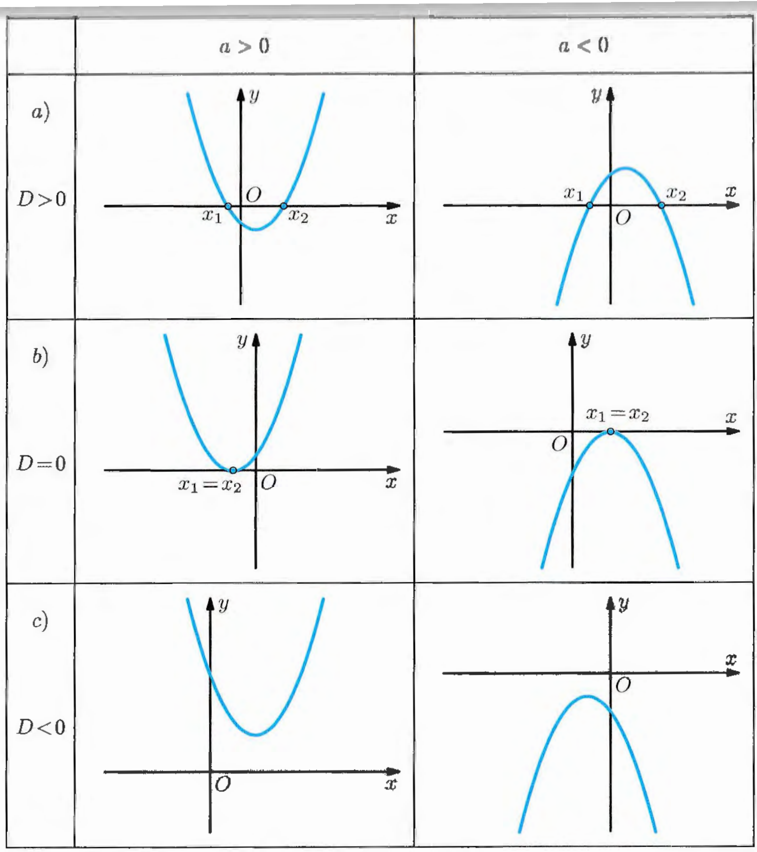
$$ax^2 + bx + c \geqq 0, \quad \text{resp. } ax^2 + bx + c \leqq 0.$$

Řešení kvadratických nerovnic uvedených typů se provádí v oboru R takto:
Označme $D = b^2 - 4ac$ diskriminant příslušné kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ (kap. 5.3).

I. Je-li $D > 0$, pak tato kvadratická rovnice má dva reálné různé kořeny x_1, x_2 a kvadratický trojčlen $ax^2 + bx + c$ lze rozložit v součin kořenových činitelů $a(x - x_1)(x - x_2)$. Po vydělení obou stran dané nerovnice číslem a neboli vynásobením obou jejích stran číslem $\frac{1}{a}$ (úprava (UN 4), resp. (UN 4a)) má levá strana získané kvadratické nerovnice tvar $(x - x_1)(x - x_2)$ a k jejímu řešení stačí užít věty o znaménku součinu dvou reálných čísel (kap. 2.1). Tento postup řešení lze výhodně zjednodušit pomocí **metody intervalů** (**metody nulových bodů**): Nechť je $x_1 < x_2$. Parabola, která je grafem kvadratické funkce $f\colon y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, protíná osu x ve dvou různých bodech a z jejího průběhu (obr. 5.19a, b, 5.20a) vidíme, že pro funkční hodnoty funkce f v intervalech $\mathsf{I}_1 = (-\infty, x_1)$, $\mathsf{I}_2 = (x_1, x_2)$, $\mathsf{I}_3 = (x_2, +\infty)$ platí: V každé dvojici sousedních intervalů mají opačná znaménka. Stačí proto zjistit znaménko hodnoty kvadratického trojčlenu $ax^2 + bx + c$ v kterémkoli bodě jednoho z intervalů I_1, I_2, I_3 (nejjednodušeji v bodě $x = 0$, pokud je $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$). Odkud pak již plynou znaménka hodnot tohoto trojčlenu ve všech ostatních bodech těchto intervalů, čímž je určeno řešení dané kvadratické nerovnice.



Obr. 5.19



Obr. 5.20

II. Je-li $D = 0$, pak kvadratická rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ má jediný dvojnásobný kořen x_1, takže je $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$ a pro každé $x \in \mathsf{R}$ platí: Je-li $a > 0$, je $a(x - x_1)^2 \geqq 0$, je-li $a < 0$, je $a(x - x_1)^2 \leqq 0$, přičemž rovnost nule nastává (vzhledem k tomu, že $a \neq 0$) jenom tehdy, když $x = x_1$. V grafickém znázornění to znamená, že parabola, která je grafem kvadratické funkce f: $y = ax^2 + bx + c$, se dotýká osy x, všechny ostatní body paraboly leží nad osou x anebo pod ní (obr. 5.20b).

III. Je-li $D < 0$, pak kvadratická rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ nemá žádný reálný kořen, tj. parabola, jež je grafem kvadratické funkce f: $y = ax^2 + bx + c$, leží celá nad osou x, resp. pod osou x (obr. 5.20c). Stačí proto k určení řešení kvadratické nerovnice zjistit znaménko hodnoty kvadratického trojčlenu v kterémkoli bodě $x \in \mathsf{R}$, nejjednodušeji např. v bodě $x = 0$.

Poznámka. K témuž výsledku lze též dospět na základě doplnění kvadratického trojčlenu $ax^2 + bx + c$ na „úplný čtverec“ (kap. 3.1). Upravíme-li kvadratickou nerovnici vydělením obou jejích stran číslem $a \neq 0$, pak diskriminant příslušné normované kvadratické rovnice $x^2 + px + q = 0$ je $D = p^2 - 4q$ a doplněním kvadratického trojčlenu $x^2 + px + q$ na „úplný čtverec“ dostáváme $x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{D}{4}$.

Odtud plyne *věta:*

Je-li $D = p^2 - 4q < 0$, pak pro každé $x \in \mathsf{R}$ je $x^2 + px + q > 0$.

Důsledky:

Kvadratická nerovnice $x^2 + px + q > 0$ s neznámou $x \in \mathsf{R}$ a s reálnými koeficienty p, q má pro $D < 0$ nekonečně mnoho řešení $x \in \mathsf{R}$ (tedy $\mathsf{K} = \mathsf{R}$) a kvadratická nerovnice $x^2 + px + q < 0$ nemá za týchž předpokladů v oboru R žádné řešení (tedy $\mathsf{K} = \emptyset$).

Příklady řešení kvadratických nerovnic

1. Řešte v oboru R kvadratickou nerovnici $x^2 + x - 2 < 0$.

Řešení
Diskriminant příslušné kvadratické rovnice je $D = 1 + 4 \cdot 2 = 9 > 0$, takže tato rovnice má dva reálné různé kořeny $x_1 = -2$, $x_2 = 1$ a platí

$$x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1).$$

Řešenou kvadratickou nerovnici lze proto vyjádřit ve tvaru

$$(x + 2)(x - 1) < 0.$$

Tuto nerovnici můžeme řešit uvedenými dvěma způsoby:
1. způsob řešení (užitím věty o záporném součinu dvou reálných čísel)
Součin $(x + 2)(x - 1)$ je záporný, právě když větší z čísel $x + 2$, $x - 1$ je kladné a menší z nich je záporné, tedy

$$x + 2 > 0 \wedge x - 1 < 0.$$

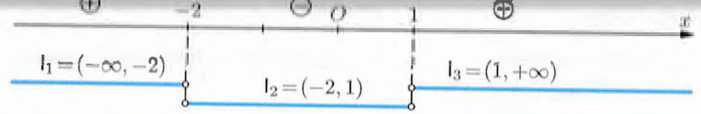
Odtud: $x > -2 \wedge x < 1$ neboli $-2 < x < 1$, tj. $x \in (-2; 1)$.
Výsledek: $\mathsf{K} = (-2; 1)$

Poznámka. Vzhledem k tomu, že použité úpravy řešené kvadratické nerovnice byly ekvivalentní, není nutnou součástí řešení *zkouška*. Můžeme ji však provést (analogicky jako u lineárních nerovnic) zavedením vhodného pomocného parametru. Položíme $x = -2 + a$, kde $a \in (0; 3)$ je pomocný parametr (krajní body intervalu pro a byly získány takto: $x = x_1 = -2$ odpovídá $a = 0$, $x = x_2 = 1$ odpovídá $a = 3$). Dosazením do levé strany řešené nerovnice dostáváme

$$L = (-2 + a)^2 + (-2 + a) - 2 = a^2 - 3a = a(a - 3) < 0$$

pro každé $a \in (0; 3)$. Tedy je $L(x) < 0$ pro každé $x \in (-2; 1)$.

2. způsob řešení (metodou intervalů)
Nulové body kvadratického trojčlenu (kořeny příslušné kvadratické rovnice) $x_1 = -2$, $x_2 = 1$ ($x_1 < x_2$) vymezují na číselné ose intervaly $\mathsf{I}_1 = (-\infty, -2)$, $\mathsf{I}_2 = (-2; 1)$, $\mathsf{I}_3 = (1, +\infty)$, jež jsou graficky znázorněny v obr. 5.21. Zvolíme libovolný bod $x_0 \in \mathsf{R} \setminus \{-2; 1\}$ a vypočteme v něm hodnotu kvadratického trojčlenu $P_2(x) = x^2 + x - 2$, např. pro $x_0 = 0$ dostáváme $P_2(0) = -2 < 0$. Protože



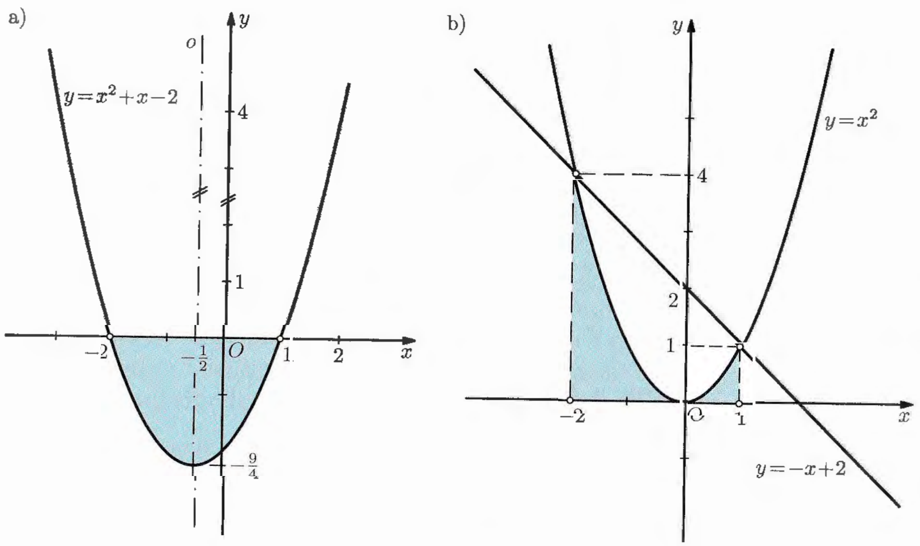
Obr. 5.21

je $0 \in I_2$, bude $P_2(x) < 0$ pro každé $x \in I_2$ (zatímco v sousedních intervalech I_1, I_3 pro každé x bude $P_2(x) > 0$). Dospíváme tedy k témuž výsledku jako při 1. způsobu řešení.

Souvislost (ekvivalentnost) obou způsobů řešení plyne ze znaménkové analýzy kořenových činitelů a kvadratického trojčlenu $P_2(x)$ v uvedených dílčích intervalech I_1, I_2, I_3:

x	$(-\infty, -2)$	$(-2; 1)$	$(1, +\infty)$
$x+2$	$-$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$
$P_2(x)$	$+$	$-$	$+$

Poznámka. Grafické řešení dané kvadratické nerovnice lze provést dvěma způsoby podle obr. 5.22a, b. (V obr. 5.22a je řešena v daném anulovaném tvaru $x^2 + x - 2 < 0$, v obr. 5.22b je řešena ve tvaru $x^2 < -x + 2$ získaném ekvivalentní úpravou.)



Obr. 5.22

2. Řešte v oboru R nerovnici $x^2 + 5x + 7 > 0$.

Řešení

Diskriminant příslušné kvadratické rovnice je $D = 25 - 28 = -3 < 0$, takže rovnice nemá žádné reálné kořeny, a tedy kvadratický trojčlen $P_2(x) = x^2 + 5x + 7$ nelze rozložit v R na součin kořenových činitelů. Vypočteme-li hodnotu $P_2(x)$ pro libovolně zvolené číslo $x_0 \in \mathrm{R}$, např. pro $x_0 = 0$, je $P_2(0) = 7 > 0$. Odtud plyne, že je $P_2(x) > 0$ pro každé $x \in \mathrm{R}$. (Graficky to znamená, že parabola, jež je grafem funkce $f\colon y = x^2 + 5x + 7$, leží celá nad osou x.)

Výsledek: $\mathrm{K} = \mathrm{R}$. K tomuto výsledku lze dospět též na základě doplnění kvadratického trojčlenu $P_2(x)$ na „úplný čtverec“.

$$x^2 + 5x + 7 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 7 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + 0{,}75$$

Po této úpravě řešená nerovnice nabývá tvaru

$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + 0{,}75 > 0,$$

což je splněno pro každé $x \in \mathrm{R}$.

Poznámka. Užitím doplnění kvadratického trojčlenu na „úplný čtverec“ lze řešit též kvadratickou nerovnici s diskriminantem $D \geqq 0$ tak, že ji pomocí této úpravy převedeme na lineární nerovnici s absolutní hodnotou.

Ilustrujme to na předcházejícím *příkladu 1*: Ekvivalentními úpravami postupně dostáváme $x^2 + x - 2 < 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} < 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 < \frac{9}{4} \Leftrightarrow \left|x + \frac{1}{2}\right| < \frac{3}{2} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} < x + \frac{1}{2} < \frac{3}{2}$ a odtud: $-2 < x < 1$ čili $x \in (-2; 1)$. Dospěli jsme tedy k témuž výsledku jako při způsobu řešení na str. 253, jenž je obvykle užíván, neboť vede rychleji k cíli.

Příklady řešení složitějších nerovnic převedením na kvadratické nerovnice

1. Určete přípustná $x \in \mathrm{R}$, pro která platí

$$\frac{2x - 5}{x + 2} < 3.$$

Řešení

Daná nerovnice má definiční obor $\mathrm{D} = \mathrm{R} \setminus \{-2\}$. Obě strany dané nerovnice vynásobíme číslem $(x+2)^2 > 0$. (Je to výhodnější než násobit číslem $x + 2$, neboť pak bychom museli rozlišit dva případy: a) $x + 2 > 0$, b) $x + 2 < 0$.) Dostáváme

$$(2x - 5)(x + 2) < 3(x + 2)^2 .$$

Provedená úprava byla ekvivalentní v D. Dalšími ekvivalentními úpravami postupně dostáváme

$$2x^2 - x - 10 < 3x^2 + 12x + 12$$
$$x^2 + 13x + 22 > 0$$
$$(x+2)(x+11) > 0.$$

Součin $(x+2)(x+11)$ je kladný, jsou-li buď obě čísla $x+2$, $x+11$ kladná, přičemž stačí brát menší z nich, tj. platí-li $x+2>0$ čili $x>-2$, nebo jsou-li obě čísla $x+2$, $x+11$ záporná, přičemž stačí brát větší z nich, tj. platí-li $x+11<0$ čili $x<-11$.

Výsledek: $\mathsf{K} = (-\infty, -11) \cup (-2, +\infty)$

Provedeme *zkoušku* zavedením pomocného parametru: Je-li $x > -2$, položíme $x = -2 + a$, kde $a > 0$. Dosazením do levé strany nerovnice dostáváme

$$L(-2+a) = \frac{2a-9}{a} = 2 - \frac{9}{a}, \quad P(-2+a) = 3, \quad L(-2+a) < P(-2+a).$$

Je-li $x < -11$, položíme $x = -11 - a$, kde $a > 0$. Dosazením do levé strany nerovnice dostáváme

$$L(-11-a) = \frac{-2a-27}{-a-9} = \frac{2a+27}{a+9} = \frac{2(a+9)+9}{a+9} = 2 + \frac{9}{a+9}$$
$$P(-11-a) = 3, \quad L(-11-a) < P(-11-a).$$

Jiný způsob řešení

Danou nerovnici upravíme na tvar $\dfrac{2x-5}{x+2} - 3 < 0$ čili $\dfrac{-x-11}{x+2} < 0$ Odtud po vynásobení číslem -1 plyne nerovnice $\dfrac{x+11}{x+2} > 0$, jejíž řešení je totéž jako řešení získané 1. způsobem, neboť pro $x \neq -2$ platí

$$\frac{x+11}{x+2} > 0 \Leftrightarrow (x+2)(x+11) > 0.$$

2. Řešte v oboru R nerovnici

$$2|x+3| \leqq 10 - x^2.$$

Řešení

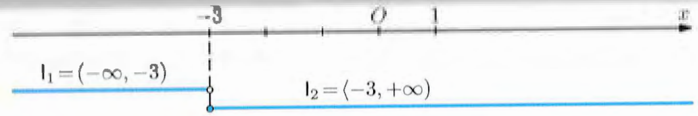
Nejprve určíme nulový bod lineárního dvojčlenu v absolutní hodnotě:

$$x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$$

Tento bod rozdělí množinu $\mathsf{R} = (-\infty, +\infty)$ na dva intervaly $\mathsf{I}_1 = (-\infty, -3)$, $\mathsf{I}_2 = \langle -3, +\infty)$ (obr. 5.23), v nichž danou nerovnici s absolutní hodnotou lze převést na odpovídající nerovnice bez absolutní hodnoty.

Pro $x \in \mathsf{I}_1 = (-\infty, -3)$ je $x < -3 \Rightarrow x + 3 < 0 \Rightarrow |x+3| = -(x+3)$, takže daná nerovnice nabývá tvaru

$$-2(x+3) \leqq 10 - x^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 16 \leqq 0.$$



Obr. 5.23

Řešením jsou všechna taková x, pro něž platí $x \in (-\infty, -3)$ a zároveň $x \in \langle 1 - \sqrt{17}, 1 + \sqrt{17} \rangle$. Množina všech těchto řešení je $\mathsf{K}_1 = (-\infty, -3) \cap \cap \langle 1 - \sqrt{17}, 1 + \sqrt{17} \rangle = \langle 1 - \sqrt{17}, -3)$.

Pro $x \in \mathsf{I}_2 = \langle -3, +\infty)$ je $x \geqq -3 \Rightarrow x + 3 \geqq 0 \Rightarrow |x+3| = x+3$, takže daná nerovnice nabývá tvaru

$$2(x+3) \leqq 10 - x^2 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 4 \leqq 0.$$

Řešeními jsou všechna taková x, pro něž platí

$$x \in \langle -3, +\infty) \wedge x \in \langle -1 - \sqrt{5}, -1 + \sqrt{5} \rangle.$$

Množina všech těchto řešení je $\mathsf{K}_2 = \langle -3, +\infty) \cap \langle -1 - \sqrt{5}, -1 + \sqrt{5} \rangle = \langle -3, -1 + \sqrt{5} \rangle$.

Výsledek: $\mathsf{K} = \mathsf{K}_1 \cup \mathsf{K}_2 = \langle 1 - \sqrt{17}, -3) \cup \langle -3, -1 + \sqrt{5} \rangle = \langle 1 - \sqrt{17}, -1 + \sqrt{5} \rangle$

3. Řešte v oboru R nerovnici

$$\left| \frac{x-5}{x+1} \right| \leqq 4.$$

Řešení

V kap. 5.9 jsme tuto nerovnici řešili metodou intervalů, pomocí níž jsme danou nerovnici převedli na řešení lineárních nerovnic. Nyní ukážeme dva způsoby, jimiž ji lze převést na řešení kvadratických nerovnic.

1. způsob řešení

Pro $x \neq -1$ platí

$$\left| \frac{x-5}{x+1} \right| \leqq 4 \Leftrightarrow -4 \leqq \frac{x-5}{x+1} \leqq 4.$$

Odtud po ekvivalentních úpravách dospějeme k soustavě kvadratických nerovnic:

$$\left(x - \frac{1}{5}\right)(x+1) \geqq 0 \wedge (x+3)(x+1) \geqq 0 \text{ pro } x \neq -1$$

Řešením této soustavy (konjunkce) kvadratických nerovnic jsou všechna $x \in (-\infty, -3\rangle \cup \left\langle \frac{1}{5}, +\infty \right)$. Dospíváme k témuž výsledku jako při řešení v kap. 5.9.

2. způsob řešení
Nejprve se upraví řešená nerovnice na ekvivalentní tvar bez zlomků a poté se umocní, čímž se dospívá k ekvivalentní kvadratické nerovnici řešené v definičním oboru $\mathsf{R} \setminus \{-1\}$:

$$
\begin{aligned}
|x-5| &\leqq 4|x+1| \\
(x-5)^2 &\leqq 16(x+1)^2 \\
15x^2 + 42x - 9 &\geqq 0 \\
5x^2 + 14x - 3 &\geqq 0 \\
5\left(x - \frac{1}{5}\right)(x+3) &\geqq 0
\end{aligned}
$$

Odtud: $x \geqq \frac{1}{5} \vee x \leqq -3$ čili $x \in (-\infty, -3\rangle \cup \left\langle \frac{1}{5}, +\infty\right)$. Dostali jsme tedy opět týž výsledek jako u obou předcházejících způsobů řešení.

Příklady řešení kvadratické nerovnice s parametrem

1. Řešte v oboru R nerovnici s neznámou x a s reálným parametrem q:

$$x^2 + 2x + q > 0$$

Řešení
Diskriminant příslušné kvadratické rovnice je $D = 4 - 4q = 4(1-q)$.

Diskuse řešení:
Je-li $D > 0$ čili $q < 1$, pak kvadratická rovnice $x^2 + 2x + q = 0$ má dva reálné různé kořeny $x_1 = -1 - \sqrt{1-q}$, $x_2 = -1 + \sqrt{1-q}$, $x_1 < x_2$, takže danou nerovnici lze přepsat v ekvivalentním součinovém tvaru $(x - x_1)(x - x_2) > 0$ a jejím řešením jsou všechna $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$.

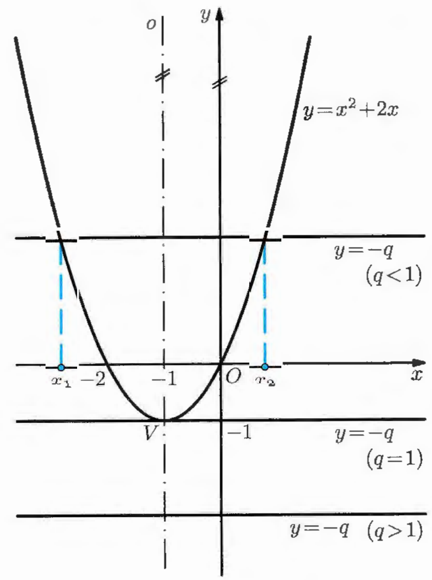
Je-li $D = 0$ čili $q = 1$, pak $x^2 + 2x + q = (x+1)^2$, takže daná nerovnice má tvar $(x+1)^2 > 0$ a je splněna, právě když $x \in \mathsf{R} \setminus \{-1\}$.

Je-li $D < 0$ čili $q > 1$, pak po doplnění kvadratického trojčlenu na „úplný čtverec" nabývá daná nerovnice tvaru $(x+1)^2 + q - 1 > 0$, a je tedy splněna pro každé $x \in \mathsf{R}$.

Výsledky diskuse řešení shrneme v tabulce:

Hodnoty parametru	Množina všech kořenů nerovnice
$q < 1$	$\mathsf{K} = (-\infty, -1 - \sqrt{1-q}) \cup (-1 + \sqrt{1-q}, +\infty)$
$q = 1$	$\mathsf{K} = \mathsf{R} \setminus \{-1\}$
$q > 1$	$\mathsf{K} = \mathsf{R}$

Poznámka. Řešení dané nerovnice upravené na tvar $x^2 + 2x > -q$ lze znázornit graficky, jak je ukázáno v obr. 5.24. Pro konkrétní hodnoty parametru q bychom touto grafickou metodou mohli získat přibližná řešení nerovnice.



Obr. 5.24

2. Řešte v oboru R nerovnici s neznámou x a s reálným parametrem m:

$$(m-1)x^2 - 2(m+1)x + m - 3 > 0$$

Řešení
Je-li $m - 1 = 0$ čili $m = 1$, daná nerovnice je lineární:

$$-4x - 2 > 0 \Leftrightarrow 2x + 1 < 0$$

a jejími řešeními jsou všechna $x < -\frac{1}{2}$.

Je-li $m - 1 \neq 0$ čili $m \neq 1$, daná nerovnice je kvadratická s diskriminantem příslušné kvadratické rovnice:

$$D = 4(m+1)^2 - 4(m-1)(m-3) = 24m - 8 = 8(3m-1)$$

Diskusi řešení provedeme analogicky jako v předcházejícím příkladě, přičemž rozlišujeme tyto případy:

$D > 0$ čili $3m - 1 > 0 \wedge m \neq 1$ neboli $m \in \left(\frac{1}{3}; 1\right) \cup (1, +\infty)$,

$D = 0$ čili $3m - 1 = 0$ neboli $m = \frac{1}{3}$,

$D < 0$ čili $3m - 1 < 0$ neboli $m \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$.

Výsledky diskuse řešení shrneme v tabulce:

Hodnoty parametru	Množina všech kořenů nerovnice
$m \in \left(-\infty,\ \dfrac{1}{3}\right\rangle$	$\mathsf{K} = \emptyset$
$m \in \left(\dfrac{1}{3};\, 1\right)$	$\mathsf{K} = \left(\dfrac{m+1-\sqrt{6m-2}}{m-1},\ \dfrac{m+1+\sqrt{6m-2}}{m-1}\right)$
$m = 1$	$\mathsf{K} = \left(-\infty,\ -\dfrac{1}{2}\right)$
$m \in (1,\ +\infty)$	$\mathsf{K} = \left(-\infty,\ \dfrac{m+1-\sqrt{6m-2}}{m-1}\right) \cup \left(\dfrac{m+1+\sqrt{6m-2}}{m-1},\ +\infty\right)$

5.11 Další druhy nerovnic

Iracionální nerovnice

Iracionální nerovnice s neznámou $x \in \mathsf{R}$ jsou nerovnice tvaru $f(x) < g(x)$, resp. $f(x) > g(x)$ nebo $f(x) \geqq g(x)$, resp. $f(x) \leqq g(x)$, kde f, g jsou algebraické funkce, z nichž alespoň jedna je iracionální.

Iracionální nerovnice se řeší zpravidla tak, že se umocněním převedou na řešení racionální nerovnice. V některých případech usnadní řešení iracionální nerovnice použití substituce za vhodně zvolený iracionální výraz s neznámou.

Příklady řešení iracionálních nerovnic

1. Řešte v oboru R iracionální nerovnici

$$\sqrt{6-x} < 3x - 4.$$

Řešení

Aby nerovnice měla řešení, musí být splněny podmínky $6 - x \geqq 0 \wedge 3x - 4 > 0$, odtud $\dfrac{4}{3} < x \leqq 6$ čili $x \in \left(\dfrac{4}{3};\, 6\right\rangle$.

Za tohoto předpokladu lze danou nerovnici umocnit:

$$6 - x < (3x-4)^2$$

a po úpravě na anulovaný tvar:

$$9x^2 - 23x + 10 > 0 \Leftrightarrow (x-2)\left(x - \frac{5}{9}\right) > 0.$$

Řešeními této nerovnice jsou všechna $x < \dfrac{5}{9} \vee x > 2$, tj. $x \in \left(-\infty,\ \dfrac{5}{9}\right) \cup$ $\cup\ (2,\ +\infty)$.

Výsledek: $\mathsf{K} = \left(\dfrac{4}{3};\, 6\right\rangle \cap \left[\left(-\infty,\ \dfrac{5}{9}\right) \cup (2,\ +\infty)\right] = (2;\, 6\rangle$

2. Řešte v oboru R iracionální nerovnici

$$\sqrt{x^2 - 5x - 24} > x + 2.$$

Řešení

Aby odmocnina v nerovnici měla smysl, musí být $x^2 - 5x - 24 \geqq 0$, odtud $x \leqq -3 \vee x \geqq 8$ čili $x \in (-\infty, -3\rangle \cup \langle 8, +\infty)$.

a) Pro $x \in (-\infty, -3\rangle$ je daná nerovnice zřejmě splněna vždy, neboť je pak $x + 2 < 0$. Získáme tedy 1. dílčí výsledek $\mathsf{K}_1 = (-\infty, -3\rangle$.

b) Pro $x \in \langle 8, +\infty)$ je $x + 2 > 0$, takže obě strany dané nerovnice jsou nezáporné a jejím umocněním dostáváme nerovnici

$$x^2 - 5x - 24 > (x+2)^2,$$

jejímiž řešeními jsou všechna $x < -\dfrac{28}{9}$ čili $x \in \left(-\infty, -\dfrac{28}{9}\right)$. 2. dílčím výsledkem je tedy $\mathsf{K}_2 = \langle 8, +\infty) \cap \left(-\infty, -\dfrac{28}{9}\right) = \emptyset$.

Výsledek: $\mathsf{K} = \mathsf{K}_1 \cup \mathsf{K}_2 = (-\infty, -3\rangle$

Algebraické nerovnice vyššího stupně

Budeme uvažovat **algebraické nerovnice** tvaru $P_n(x) > 0$, resp. $P_n(x) < 0$ anebo $P_n(x) \geqq 0$, resp. $P_n(x) \leqq 0$, kde $P_n(x)$ je mnohočlen stupně $n \geqq 3$.

Při jejich řešení rozlišíme dva případy a), b):

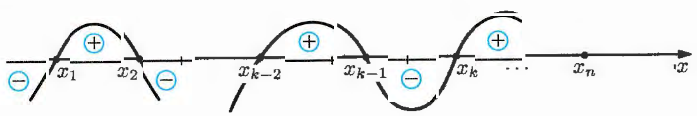
a) Případ, kdy levá strana nerovnice má tvar

$$P_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n),$$

kde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsou vesměs různá reálná čísla (kořeny algebraické rovnice $P_n(x) = 0$). Pro určitost budeme o nich předpokládat, že jsou v tomto uspořádání:

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n$$

Postup řešení algebraických nerovnic typu a) **metodou intervalů (metodou nulových bodů)**:



Obr. 5.25

Na číselné ose (obr. 5.25) zobrazíme čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a určíme znaménka polynomu $P_n(x)$ v jimi vymezených intervalech $(-\infty, x_1)$, (x_1, x_2), ..., (x_{n-1}, x_n), $(x_n, +\infty)$. Přitom postupujeme tak, že zvolíme libovolné číslo x_0 v některém z těchto intervalů (nejjednodušeji číslo $x_0 = 0$, pokud není kořenem rovnice

$P_n(x) = 0$) a určíme hodnotu $P_n(x_0) \neq 0$. Znaménka hodnot polynomu $P_n(x)$ v dalších intervalech jsou pak již též známa, neboť se zřejmě v každých dvou sousedních intervalech střídají (tj. jsou opačná), jak je patrné z grafického znázornění polynomické funkce f: $y = P_n(x)$ (obr. 5.25).

Poznámka. Při motivaci postupu řešení metodou intervalů jsme se odvolávali na geometrický názor, exaktní odvození lze provést buď prostředky matematické analýzy, nebo užitím těchto elementárních *vět:*

1. $\forall x, a \in \mathsf{R}$: $x > a \Rightarrow x - a > 0$, $x < a \Rightarrow x - a < 0$.
2. Součin libovolného počtu kladných čísel je číslo kladné. Součin sudého počtu záporných čísel je číslo kladné. Součin lichého počtu záporných čísel je číslo záporné.

(Věty jsou důsledkem základních vlastností reálných čísel, viz kap. 2.1.)

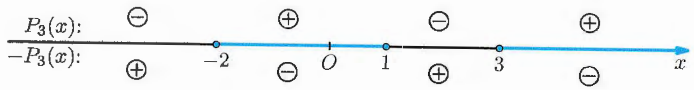
Příklad řešení algebraické nerovnice typu a) metodou intervalů

Řešte v oboru R nerovnici

$$(x-3)(x+2)(1-x) \leqq 0.$$

Řešení

Obě strany nerovnice $(x-3)(x+2)(1-x) \leqq 0$ vynásobíme (-1) a upravíme ji tak na tvar $(x+2)(x-1)(x-3) \geqq 0$; označme $P_3(x) = (x+2)(x-1)(x-3)$. Kořeny rovnice $P_3(x) = 0$ jsou čísla $x_1 = -2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$ ($x_1 < x_2 < x_3$), jež vymezují intervaly $(-\infty, -2)$, $(-2; 1)$, $(1; 3)$, $(3, +\infty)$ (obr. 5.26). Protože $P_3(0) = 6 > 0 \Rightarrow P_3(x) > 0$ pro všechna $x \in (-2; 1)$. V dalších intervalech se znaménka $P_3(x)$ střídají (obr. 5.26).



Obr. 5.26

Odtud plyne, že všechna řešení nerovnice $P_3(x) \geqq 0$, a tedy i dané nerovnice, jsou tato:

$$x \in \langle -2; 1\rangle \vee x \in \langle 3, +\infty) \text{ čili } x \in \langle -2; 1\rangle \cup \langle 3, +\infty).$$

Výsledek: $\mathsf{K} = \langle -2; 1\rangle \cup \langle 3, +\infty)$

b) Případ, kdy polynom $P_n(x)$ má tvar součinu lineárních dvojčlenů tvaru $x - x_i$, kde x_i jsou všechny reálné kořeny polynomu $P_n(x)$, z nichž některé si mohou být rovny, a kvadratických trojčlenů tvaru $x^2 + p_jx + q_j$, jež nelze v R rozložit na lineární dvojčleny (tj. kvadratické rovnice $x^2 + p_jx + q_j = 0$ mají diskriminanty $D_j < 0$, a nemají tedy řešení v R).

Algebraické nerovnice tvaru b) řešíme tak, že je vhodnými ekvivalentními úpravami převedeme na tvar a), kde lze k řešení užít metody intervalů.

Příklad řešení algebraické nerovnice tvaru b) metodou intervalů

Řešte v oboru R nerovnici

$$x(x+2)(x-1)^3\,(x^2+1) > 0.$$

Řešení

Danou nerovnici vydělíme pro $x \neq 1$ výrazem (polynomem) $(x-1)^2\,(x^2+1) > 0$ (ekvivalentní úprava UN 4) a získanou nerovnici řešíme užitím metody intervalů; dostáváme:

$$x \in (-2; 0) \cup (1, +\infty)$$

Výsledek: $\mathsf{K} = (-2; 0) \cup (1, +\infty)$

Poznámka. Je ovšem možné též přímé řešení algebraických nerovnic bez užití metody intervalů. Bylo by to však zřejmě komplikovanější, což si čtenář může ověřit na příkladech. Dále poznamenejme, že v uvedených typech algebraických nerovnic a), b) jsme se omezili na případy, kdy polynom $P_n(x)$ má normovaný tvar, tj. je v něm při x^n koeficient 1. Pokud by tomu tak nebylo, danou algebraickou nerovnici snadno převedeme na normovaný tvar jejím vydělením koeficientem při x^n, tj. číslem $a_n \neq 0$.

Dále budeme uvažovat **nerovnice se zlomky** tvaru

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} > 0 \quad (\text{nebo se znaky } \geqq, <, \leqq),$$

kde $P_n(x)$, $Q_m(x)$ jsou polynomy stupně n a m v normovaném tvaru.

Při jejich řešení v oboru $\mathsf{M} \subset \mathsf{R}$, ve kterém pro každé $x \in \mathsf{M}$ je $Q_m(x) \neq 0$, lze postupovat takto: Danou nerovnici vynásobíme výrazem (mnohočlenem) $[Q_m(x)]^2$. Tím ji převedeme na ekvivalentní algebraickou nerovnici výše uvedeného tvaru a), resp. b).

Příklad řešení nerovnice se zlomky

V oboru $\mathsf{M} = \mathsf{R} \setminus \{3\}$ řešte nerovnici

$$\frac{(x+2)x^2(x-1)^3}{x-3} \leqq 0.$$

Řešení

Nejprve budeme uvažovat rovnici

$$\frac{(x+2)x^2(x-1)^3}{x-3} = 0.$$

Tato rovnice má kořeny $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$.

Dále budeme řešit nerovnici

$$\frac{(x+2)x^2(x-1)^3}{x-3} < 0.$$

Vynásobíme ji výrazem $(x-3)^2 > 0$ a tím ji upravíme na součinový tvar

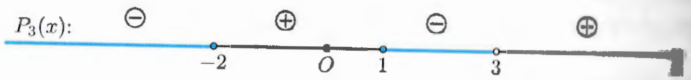
$$(x+2)x^2(x-1)^3\,(x-3) < 0.$$

Tuto nerovnici vydělíme výrazem $x^2(x-1)^2 > 0$ (předpokládáme, že $x \neq 0 \wedge \wedge\, x \neq 1$), čímž dospíváme k nerovnici

$$(x+2)(x-1)(x-3) < 0,$$

kterou řešíme metodou intervalů (obr. 5.27): Nerovnice je splněna pro každé $x \in (-\infty, -2) \cup (1; 3)$.

Výsledek: Daná nerovnice (se znakem $\leqq$) má množinu všech kořenů:
$\mathsf{K} = (-\infty, -2) \cup (1; 3) \cup \{-2; 0; 1\} = (-\infty, -2\rangle \cup \{0\} \cup \langle 1; 3)$



Obr. 5.27

Exponenciální a logaritmické nerovnice

Exponenciální nerovnicí s neznámou $x \in \mathsf{R}$ nazýváme nerovnici tvaru $a^x < b$, resp. $a^x > b$, popř. $a^{f(x)} < a^{g(x)}$, resp. $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ nebo $a^x \leqq b$, resp. $a^x \geqq b$, popř. $a^{f(x)} \leqq a^{g(x)}$, resp. $a^{f(x)} \geqq a^{g(x)}$, kde $x \in \mathsf{R}^+ \setminus \{1\}$, $b \in \mathsf{R}^+$ jsou dané konstanty, f, g jsou dané polynomické funkce.

Řeší se v oboru R s využitím vlastností exponenciálních funkcí (kap. 4.2).

Příklady řešení exponenciálních nerovnic

1. Řešte v oboru R nerovnice

a) $2^x < 2$, b) $2^x > 4$, c) $2^x \leqq 3$.

Řešení

Užijeme vlastností exponenciální funkce o základu $a = 2$, tj. $a > 1$:

a) $2^x < 2 \Leftrightarrow 2^x < 2^1$, odtud $x < 1$, tj. $\mathsf{K} = (-\infty, 1)$,

b) $2^x > 4 \Leftrightarrow 2^x > 2^2$, odkud $x > 2$, tj. $\mathsf{K} = (2, +\infty)$,

c) $2^x \leqq 3 \Leftrightarrow 2^x \leqq 2^{\log_2 3}$, odkud $x \leqq \log_2 3$, tj. $\mathsf{K} = (-\infty, \log_2 3\rangle$.

Výsledky: a) $\mathsf{K} = (-\infty, 1)$, b) $\mathsf{K} = (2, +\infty)$, c) $\mathsf{K} = (-\infty, \log_2 3\rangle$

2. Řešte v oboru R nerovnici

$$2^{5x-2} < 2.$$

Řešení

Užijeme vlastností složené exponenciální funkce $f\colon y = 2^u$, $u = 5x - 2$:

$$2^{5x-2} < 2^1 \Leftrightarrow 5x - 2 < 1, \text{ odkud } x < \frac{3}{5}$$

Výsledek: $\mathsf{K} = \left(-\infty, \frac{3}{5}\right)$

3. V oboru R řešte nerovnici

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{5x-2} \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^{3x+4}.$$

Řešení

Užijeme vlastností exponenciální funkce o základu $a = \frac{1}{2}$, tj. $0 < a < 1$:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{5x-2} \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^{3x+4} \Leftrightarrow 5x - 2 \geqq 3x + 4, \text{ odkud } x \geqq 3.$$

Výsledek: $\mathsf{K} = \langle 3 + \infty)$

4. V oboru R řešte nerovnici

$$25^x < 6 \cdot 5^x - 5.$$

Řešení

Danou nerovnici upravíme na ekvivalentní tvar

$$5^{2x} - 6 \cdot 5^x + 5 < 0.$$

Provedeme substituci $5^x = y > 0$ a dostaneme kvadratickou nerovnici

$$y^2 - 6y + 5 < 0,$$

kterou splňují všechna y, pro něž platí $1 < y < 5$. Podle substitučního vztahu odtud plyne

$$1 < 5^x < 5 \Leftrightarrow 5^0 < 5^x < 5^1, \text{ a tedy } 0 < x < 1.$$

Výsledek: $\mathsf{K} = (0; 1)$

Logaritmickou nerovnicí s neznámou $x \in \mathsf{R}$ nazýváme nerovnici tvaru $\log_a f(x) < b$, resp. $\log_a f(x) > b$, popř. $\log_a f(x) < \log_a g(x)$, resp. $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ nebo $\log_a f(x) \leqq b$, resp. $\log_a f(x) \geqq b$, popř. $\log_a f(x) \leqq \log_a g(x)$, resp. $\log_a f(x) \geqq \log_a g(x)$, kde $a \in \mathsf{R}^+ \setminus \{1\}$, $b \in \mathsf{R}$ jsou dané konstanty, f, g jsou dané polynomické funkce.

Řeší se v oboru R s využitím vlastností logaritmických funkcí (kap. 4.3) definovaných pouze pro kladné argumenty.

Příklady řešení logaritmických nerovnic

1. Řešte v oboru R nerovnice

a) $\log (1 - x) > 0$, b) $\log (1 - x) < -2$.

Řešení

Využijeme vlastností logaritmické funkce o základu $a = 10$, tj. $a > 1$;

a) $\log (1 - x) > 0 \Leftrightarrow 1 - x > 1$ (tehdy je také $1 - x > 0$), odkud $-x > 0$ čili $x < 0$,

b) $\log (1 - x) < -2 \Leftrightarrow 0 < 1 - x < 10^{-2}$, odkud $0{,}99 < x < 1$.

Výsledky: a) $\mathsf{K} = (-\infty, 0)$, b) $\mathsf{K} = (0{,}99; 1)$

2. V oboru R řešte nerovnici

$$\log \frac{x-1}{x+1} < 0.$$

Řešení

Jak plyne z vlastností logaritmické funkce o základu $a = 10 > 0$, daná logaritmická nerovnice bude splněna pro taková $x \in \mathsf{R}$, pro která platí

$$0 < \frac{x-1}{x+1} < 1 \text{ čili } \frac{x-1}{x+1} > 0 \wedge -\frac{2}{x+1} < 0.$$

Odtud plyne, že $x + 1 > 0$ a také $x - 1 > 0$, a tedy $x > 1$.

Výsledek: $\mathsf{K} = (1, +\infty)$

3. Řešte v oboru R nerovnici

$$\ln x^2 \leqq \ln (5x - 4).$$

Řešení

Z vlastností přirozené logaritmické funkce (o základu e) plyne, že daná logaritmická nerovnice je splněna pro taková $x \in \mathsf{R}$, pro něž platí soustava nerovnic:

$$0 < x^2 \leqq 5x - 4 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 \leqq 0 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-4) \leqq 0$$

Výsledek: $\mathsf{K} = \langle 1; 4 \rangle$

Goniometrické nerovnice

Goniometrickou nerovnicí s neznámou $x \in \mathsf{R}$ nazýváme nerovnici tvaru $g(x) < c$, resp. $g(x) > c$ nebo $g(x) \leqq c$, resp. $g(x) \geqq c$, kde $g(x)$ je goniometrický výraz s proměnnou x a $c \in \mathsf{R}$ je konstanta.

Příklady řešení goniometrických nerovnic

1. Určete všechna reálná čísla x, pro něž platí

$$\cos x > \frac{1}{2}.$$

Řešení

Protože platí $|\cos x| \leqq 1$, musíme řešit soustavu nerovnic $\frac{1}{2} < \cos x \leqq 1$. V intervalu $(-\pi, \pi)$ je $\cos x = \frac{1}{2}$ pro $x = -\frac{\pi}{3}$ a pro $x = \frac{\pi}{3}$, $\cos x = 1$ pro $x = 0$, takže této soustavě nerovností vyhovují všechna $x \in \left(-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right)$. V oboru R jí vyhovují (vzhledem k periodicitě funkce $\cos x$) všechna $x \in \left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)$, kde $k \in \mathsf{Z}$.

Výsledek: $\mathsf{K} = \bigcup\limits_{k \in \mathsf{Z}} \left((6k-1)\frac{\pi}{3}, (6k+1)\frac{\pi}{3}\right)$

2. Určete všechna reálná čísla x, pro něž platí

$$2\sin^2 x + 3\sin x - 2 \geqq 0.$$

Řešení

Substitucí $y = \sin x$ dostáváme kvadratickou nerovnici

$$2y^2 + 3y - 2 \geqq 0 \Leftrightarrow 2(y+2)\left(y - \frac{1}{2}\right) \geqq 0.$$

Tato nerovnice má řešení: $y \leqq -2$ a $\frac{1}{2} \leqq y \leqq 1$ (neboť $y = \sin x \leqq 1$). Zpětným užitím substitučního vztahu dostáváme odtud nerovnici $\sin x \leqq -2$, které nevyhovuje žádné $x \in \mathsf{R}$, a soustavu nerovnic $\frac{1}{2} \leqq \sin x \leqq 1$, jež je splněna pro všechna

$$x \in \left\langle \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \right\rangle, \text{ kde } k \in \mathsf{Z}.$$

Výsledek: $\mathsf{K} = \bigcup\limits_{k \in \mathsf{Z}} \left\langle (12k+1)\frac{\pi}{6}, (12k+5)\frac{\pi}{6} \right\rangle$

5.12 Rovnice a soustavy rovnic s více neznámými

Pojem rovnice s jednou neznámou (kap. 5.1) zobecníme na **rovnici s n neznámými** $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ($n \in \mathsf{N}$):

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

jejíž **levá strana** $L(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a **pravá strana** $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ jsou výrazy s proměnnými (neznámými) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (speciálně to mohou být konstanty). Tato rovnice vyjadřuje *úlohu:* Určit všechny uspořádané n-tice $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ čísel z daného číselného oboru M ($\mathsf{M} \subset \mathsf{R}$, resp. $\mathsf{M} \subset \mathsf{C}$), jež splňují rovnici, tj. po dosazení do ní dostáváme pravdivý výrok (rovnost). Každou takovou uspořádanou n-tici $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ nazýváme **řešením rovnice**; stejným názvem se označuje též postup jejího určování. (Použitý význam slova řešení plyne vždy z kontextu.)

Poznámka. V případě rovnic se dvěma, resp. třemi neznámými značíme neznámé často x, y, resp. x, y, z.

Příklady algebraických rovnic s více neznámými

Lineární rovnice s n neznámými $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je každá rovnice tvaru

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b,$$

kde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jsou číselné koeficienty z oboru R, resp. C, z nichž aspoň jeden je různý od nuly a b je číslo z téhož číselného oboru.

Kvadratická rovnice se dvěma neznámými x, y je každá rovnice tvaru $a_1x^2 + a_2y^2 + a_3xy + a_4x + a_5y = b$, kde $a_1, a_2, \ldots, a_5$ jsou číselné koeficienty z oboru R, resp. C, přičemž aspoň jeden z koeficientů a_1, a_2, a_3 je různý od nuly a b je konstanta z téhož číselného oboru.

Množina všech řešení závisí ovšem na číselném oboru M, v němž rovnici ře-šíme. Pro rovnice se dvěma neznámými x, y můžeme tuto množinu znázornit graficky v kartézské soustavě souřadnic Oxy. Např. rovnice $2x + 4y = 3$ má v oboru R nekonečně mnoho řešení $[x, y] \in \mathrm{R}^2$ tvaru $[x, y] = \left[x, \frac{1}{4}(3 - 2x)\right]$, kde x je libovolné reálné číslo; grafickým znázorněním množiny všech těchto řešení je přímka. Avšak v oboru Z nemá tato rovnice žádné řešení, neboť pro žádnou dvojici celých čísel $[x, y]$ neplatí $x + 2y = \frac{3}{2}$.

Soustavy rovnic s více neznámými

Zpravidla neřešíme (v daném číselném oboru M) jednotlivé rovnice s více neznámými, nýbrž několik takových rovnic, které mají být splněny zároveň. Mluvíme pak o **soustavě rovnic** se dvěma, resp. více neznámými. Mezi jednotlivé rovnice soustavy bychom měli psát znak $\wedge$ („a zároveň"). Obvykle se však mezi nimi píše čárka, resp. se rovnice píší pod sebou. **Řešením soustavy rovnic** o n neznámých $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se rozumí každá uspořádaná n-tice $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ čísel z daného číselného oboru M, která splňují zároveň všechny rovnice soustavy, tj. po dosazení do každé z rovnic soustavy dostaneme pravdivý výrok (rovnost). **Množina všech řešení soustavy rovnic** je průnikem množin všech řešení jednotlivých rovnic soustavy.

Druhy soustav rovnic s více neznámými

Prakticky nejdůležitější jsou **soustavy lineárních algebraických rovnic** (stručně dále budeme mluvit o **soustavách lineárních rovnic**), tj. algebraických rovnic prvního stupně s neznámými $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Obecněji se řeší **soustavy algebraických rovnic vyšších stupňů**, na střední škole se ovšem omezujeme na soustavy rovnic nejvýše 2. stupně (kvadratické rovnice) pro dvě neznámé.

Lze vytvářet **soustavy nealgebraických rovnic**, jež obsahují např. exponenciální, logaritmické nebo goniometrické rovnice vzhledem k neznámým.

Početní řešení soustav rovnic

Metody početního řešení soustav rovnic užívají **ekvivalentní úpravy soustavy rovnic**, tj. takové úpravy, jimiž se nemění řešení soustavy. Nejdůležitější jsou souhrnně uvedeny v tabulce 5.3. Při použití pouze ekvivalentních úprav soustavy není zkouška nutnou součástí postupu řešení, ale je vhodná pro kontrolu.

Soustavy lineárních rovnic

Základním typem metod řešení soustav lineárních algebraických rovnic jsou **eliminační metody**, jejichž podstatou je postupná **eliminace** (vylučování) **neznámých** z rovnic soustavy.

Přehled ekvivalentních úprav soustavy rovnic Tab. 5.3

Označení	Ekvivalentní úprava soustavy rovnic
(USR 1)	Nahrazení libovolné rovnice soustavy rovnicí, která je s ní ekvivalentní, tj. má totéž řešení. Získává se zejména těmito dvěma ekvivalentními úpravami: 1. K oběma stranám rovnice přičteme totéž číslo nebo výraz s neznámými, který je definován v celém oboru, v němž se rovnice řeší. 2. Obě strany rovnice násobíme týmž číslem různým od nuly nebo výrazem s neznámými, který je definován a nenulový v celém oboru, v němž se rovnice řeší. (Stručně říkáme, že *rovnici násobíme číslem*, resp. *výrazem*.)
(USR 2)	Nahrazení libovolné rovnice soustavy součtem této rovnice a libovolné jiné rovnice soustavy.
(USR 3)	Dosazení neznámé nebo výrazu s neznámou z jedné rovnice soustavy do jiné její rovnice.

1. Soustava dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými

Podle způsobu, jímž eliminujeme (vyloučíme) jednu neznámou z některé rovnice soustavy, rozlišujeme tyto tři metody řešení:

a) **Metoda sčítací** – rovnice soustavy násobíme čísly zvolenými tak, aby se po sečtení vynásobených rovnic jedna neznámá vyloučila.

b) **Metoda dosazovací (substituční)** – vyjádříme jednu neznámou z jedné rovnice soustavy a dosadíme ji do druhé rovnice, čímž se jedna neznámá z této rovnice vyloučí.

c) **Metoda srovnávací** – z obou rovnic vyjádříme touž neznámou, výsledky porovnáme a tím získáme rovnici, ve které je tato neznámá vyloučena.

Příklad řešení soustavy dvou lineárních rovnic s neznámými $x, y \in \mathrm{R}$

$$\begin{aligned} 2x - y &= 1 \\ x + 3y &= 11 \end{aligned}$$

a) *Řešení metodou sčítací*

První rovnici vynásobíme třemi, dostáváme rovnici

$$6x - 3y = 3.$$

Získanou rovnici sečteme s druhou rovnicí soustavy, tím vyloučíme neznámou y a pro neznámou x dostáváme rovnici

$$7x = 14,$$

odtud po dělení rovnice sedmi

$$x = 2.$$

Obdobně lze vyloučit neznámou x vynásobením druhé rovnice minus dvěma a sečtením s první rovnicí; dostáváme rovnici

$$-7y = -21,$$

odkud po dělení rovnice minus sedmi

$$y = 3.$$

b) *Řešení metodou dosazovací*
Z první rovnice vyjádříme

$$y = 2x - 1$$

a dosadíme do druhé rovnice; dostáváme

$$7x - 3 = 11,$$

odkud

$$7x = 14 \text{ čili } x = 2.$$

Obdobně, vyjádříme-li z druhé rovnice

$$x = 11 - 3y$$

a dosadíme do první rovnice, dostáváme

$$22 - 7y = 1,$$

odkud

$$-7y = -21 \text{ čili } y = 3.$$

c) *Řešení metodou srovnávací*
Z první i druhé rovnice vyjádříme např. neznámou y, dostáváme

$$y = 2x - 1 \text{ a } y = \frac{1}{3}(11 - x).$$

Porovnáním odtud plyne rovnice

$$2x - 1 = \frac{1}{3}(11 - x)$$

čili

$$6x - 3 = 11 - x$$

a odtud

$$7x = 14 \text{ čili } x = 2.$$

Po dosazení do rovnice $y = 2x - 1$ vypočteme $y = 3$.

Výsledek: Daná soustava rovnic má v množině R^2 právě jedno řešení $[x, y] = [2; 3]$.

Zkoušku provedeme dosazením:

$$L_1 = 2 \cdot 2 - 3 = 4 - 3 = 1, \quad P_1 = 1, \quad L_1 = P_1$$
$$L_2 = 2 + 3 \cdot 3 = 2 + 9 = 11, \quad P_2 = 11, \quad L_2 = P_2$$

Grafické řešení soustav lineárních rovnic se dvěma neznámými v R

Soustavy rovnic se dvěma neznámými x, $y \in \mathsf{R}$ lze rovněž řešit graficky. Vycházíme přitom z poznatku, že množinou všech bodů, jejichž kartézské souřadnice splňují lineární rovnici, je přímka. Jestliže sestrojíme přímky, které graficky znázorňují v soustavě kartézských souřadnic Oxy obě dané lineární rovnice, pak body jejich průniku mají souřadnice, jež představují řešení soustavy těchto lineárních rovnic. Přitom dvě přímky v rovině mohou být navzájem buď různoběžné, nebo rovnoběžné různé, anebo splývající, takže platí: *Soustava dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými*

a) *má právě jedno řešení*, jestliže přímky graficky znázorňující všechna řešení daných rovnic jsou různoběžné,

b) *nemá žádné řešení*, jestliže tyto přímky jsou rovnoběžné různé,

c) *má nekonečně mnoho řešení*, jestliže obě přímky splývají.

Příklady grafického řešení soustav dvou lineárních rovnic s neznámými $x, y \in \mathsf{R}$

Řešte graficky soustavy lineárních rovnic:

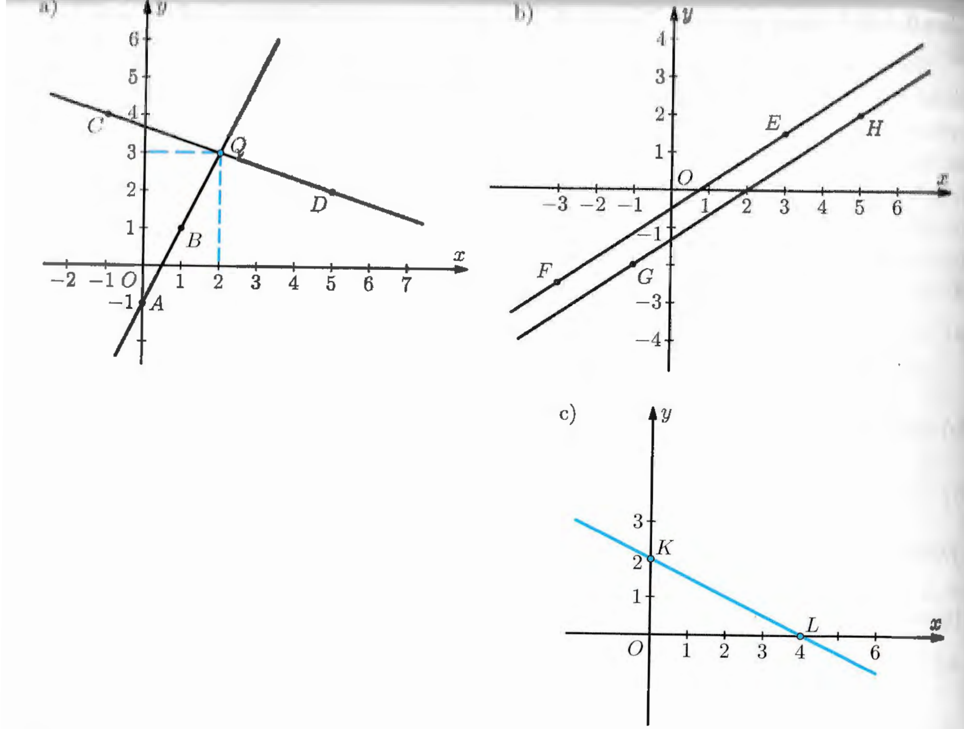
a) $2x - y = 1$ $x + 3y = 11$	b) $4x - 6y = 3$ $6x - 9y = 12$	c) $x + 2y = 4$ $3x + 6y = 12$

Řešení

a) Sestrojíme množinu bodů, jejichž kartézské souřadnice splňují první rovnici. Je to graf funkce $y = 2x - 1$, tj. přímka procházející body $A[0; -1]$, $B[1; 1]$. Obdobně druhá rovnice vyjadřuje funkci $y = -\frac{1}{3}x + \frac{11}{3}$. Jejím grafem je přímka procházející body $C[-1; 4]$, $D[5; 2]$. Přímky AB, CD jsou různoběžné (obr. 5.28a), jejich průsečíkem je bod $Q[2; 3]$. Daná soustava má tedy právě jedno řešení $[2; 3]$. (Výsledek grafického řešení souhlasí s výsledkem početního řešení na str. 269.)

b) První rovnici upravíme na tvar $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}$, který vyjadřuje funkci, jejímž grafem je přímka procházející body $E[3; 1{,}5]$, $F[-3; -2{,}5]$. Druhou rovnici upravíme na tvar $y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$, který je vyjádřením funkce, jejímž grafem je přímka procházející body $G[-1; -2]$, $H[5; 2]$. Přímky EF, GH jsou dvě různé rovnoběžky (obr. 5.28b). To odpovídá tomu, že daná soustava nemá žádné řešení, neboť obě rovnice si zřejmě odporují (dělíme-li první rovnici dvěma, dostáváme $2x - 3y = 1{,}5$, dělíme-li druhou rovnici třemi, dostáváme $2x - 3y = 4$).

c) Rovnice představují analytická vyjádření dvou sobě rovných funkcí, jejichž grafy jsou totožné přímky procházející body $K[0; 2]$, $L[4; 0]$ (obr. 5.28c). To odpovídá tomu, že každá uspořádaná dvojice $[x, y]$, která splňuje první rovnici, vyhovuje též druhé rovnici, tj. daná soustava rovnic má nekonečně mnoho řešení.



Obr. 5.28

Příklad řešení soustavy dvou lineárních rovnic o dvou neznámých s reálnými parametry
Řešte soustavu rovnic a proveďte diskusi podle parametru $p \in \mathsf{R}$:

$$\begin{aligned} p^2x + py &= p^3 + 1 \\ p^3x + y &= p^2 + p \end{aligned}$$

Řešení provedeme např. *metodou dosazovací*
Ze 2. rovnice vyjádříme

$$y = p^2 + p - p^3x$$

a dosadíme do 1. rovnice:

$$p^2x + p^3 + p^2 - p^4x = p^3 + 1$$

Po úpravě dostáváme

$$p^2(1 - p^2)x = 1 - p^2$$

čili

$$p^2(1 + p)(1 - p)x = (1 + p)(1 - p).$$

Diskuse řešení
Je-li $p \neq 0 \wedge p \neq \pm 1$, plyne odtud, že $x = \dfrac{1}{p^2}$, a tedy $y = p^2$, tj. daná soustava má pak právě jedno řešení $[x, y] = \left[\dfrac{1}{p^2}, p^2\right]$.

Je-li $p = 0$, dané rovnice nabývají tvaru $0x + 0y = 1$, $0x + y = 0$, první rovnici nelze však splnit pro žádná $x, y \in \mathsf{R}$, takže daná soustava v tomto případě nemá žádné řešení $[x, y] \in \mathsf{R}^2$.
Je-li $p = 1$, obě rovnice dané soustavy nabývají téhož tvaru $x + y = 2$; soustava má tedy nekonečně mnoho řešení tvaru $[x, y] = [x, 2 - x]$, kde x je libovolné reálné číslo. Je-li $p = -1$, obě rovnice dané soustavy nabývají tvaru $x - y = 0$, $-x + y = 0$, tj. jsou obě ekvivalentní s rovnicí $x = y$, soustava má tedy nekonečně mnoho řešení tvaru $[x, y] = [x, x]$, kde x je libovolné reálné číslo.

2. Soustava dvou lineárních rovnic se třemi neznámými

Jednu neznámou lze v této soustavě zvolit za parametr a získat tak soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, kterou řešíme některou z uvedených metod.

Příklad řešení soustavy dvou lineárních rovnic se třemi neznámými $x, y, z \in \mathsf{R}$
Řešte soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} 6x + 2y + 3z &= 2 \\ 2x - 3y + z &= 8 \end{aligned}$$

Řešení
Danou soustavu upravíme na tvar

$$\begin{aligned} 6x + 2y &= 2 - 3z, \\ 2x - 3y &= 8 - z. \end{aligned}$$

Neznámou z zvolíme za reálný parametr. Tuto soustavu dvou rovnic o dvou neznámých x, y řešíme např. metodou sčítací: Druhou rovnici vynásobíme minus třemi a sečteme s první rovnicí, čímž se vyloučí neznámá x (a též parametr z), dostáváme

$$2y + 9y = 2 - 24 \text{ čili } 11y = -22, \text{ odkud } y = -2.$$

Dosazením do druhé rovnice soustavy dále plyne

$$2x + 6 + z = 8 \text{ čili } 2x = 2 - z, \text{ odkud } x = 1 - 0{,}5z.$$

Výsledek: Daná soustava má v R^3 nekonečně mnoho řešení tvaru $[x, y, z] = [1 - 0{,}5z; -2; z]$, kde z je libovolné reálné číslo.
Zkouška: $L_1 = 6 - 3z - 4 + 3z = 2$, $P_1 = 2$, $L_1 = P_1$
$L_2 = 2 - z + 6 + z = 8$, $P_2 = 8$, $L_2 = P_2$

3. Soustava tří lineárních rovnic se třemi neznámými

Lze ji řešit obdobně jako soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, tj. zobecněnou **metodou sčítací, dosazovací** nebo **srovnávací.**

Avšak výhodnější je použití **Gaussovy eliminační metody** (GEM), která spočívá v postupném převedení dané soustavy rovnic na tzv. *trojúhelníkový tvar*, kde ve druhé rovnici je eliminována první neznámá a ve třetí rovnici jsou eliminovány první a druhá neznámá. Převedení soustavy na trojúhelníkový tvar se provádí ekvivalentními úpravami tímto postupem (zvaným *přímý* chod GEM):

1. Rovnice dané soustavy uspořádáme tak, aby koeficient 1. neznámé v 1. rovnici byl buď 1, anebo jiné číslo různé od nuly – v tomto případě 1. rovnici tímto číslem vydělíme, čímž dostaneme rovnici s koeficientem 1 u 1. neznámé.

2. Od 2. a 3. rovnice odečteme takové násobky upravené 1. rovnice, aby se v nich po odečtení eliminovaly členy s 1. neznámou.

3. Obdobně eliminujeme člen s 2. neznámou ve 3. rovnici.

Ze získané soustavy lineárních rovnic v trojúhelníkovém tvaru určíme již snadno její řešení tímto postupem (zvaným *zpětný* chod GEM): Ze 3. rovnice vypočteme kořen z, pak dosazením do 2. rovnice kořen y a nakonec po dosazení do 1. rovnice kořen x.

Příklad řešení soustavy tří lineárních rovnic s neznámými $x, y, z \in \mathsf{R}$

Řešte soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} 9x + 5y - 2z &= 15 \qquad (1)\\ 8x + 6y + 3z &= 15 \qquad (2)\\ 3x - 7y + 4z &= 27 \qquad (3) \end{aligned}$$

Řešení provedeme užitím *Gaussovy eliminační metody.*

Danou soustavu rovnic nejprve převedeme na trojúhelníkový tvar takto (přímý chod GEM): Nejprve ji upravíme tak, aby v 1. rovnici koeficient u 1. neznámé byl 1. Bylo by možné dosáhnout toho dělením této rovnice číslem 9, tím bychom ovšem v upravené rovnici dostali desetinná čísla. Při ručním výpočtu můžeme použít takové ekvivalentní úpravy, aby koeficienty zůstala čísla celá; od 1. rovnice odečteme 2. rovnici, čímž dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x - y - 5z &= 0, \qquad (1_1)\\ 8x + 6y + 3z &= 15, \qquad (2_1) = (2)\\ 3x - 7y + 4z &= 27. \qquad (3_1) = (3) \end{aligned}$$

Dále od rovnice (2_1) odečteme osminásobek rovnice (1_1) a od rovnice (3_1) odečteme trojnásobek rovnice (1_1), tím eliminujeme neznámou x v těchto rovnicích a dostáváme tuto ekvivalentní soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x - y - 5z &= 0, \qquad (1_2) = (1_1)\\ 14y + 43z &= 15, \qquad (2_2)\\ -4y + 19z &= 27. \qquad (3_2) \end{aligned}$$

Nyní rovnici (2_2) dělíme čtrnácti, abychom u neznámé y získali koeficient 1; dostáváme tak rovnici (2_3). Dále k rovnici (3_2) přičteme čtyřnásobek rovnice (2_3), čímž v ní eliminujeme neznámou y; tím přecházíme k této soustavě rovnic

$$\begin{aligned} x - y - 5z &= 0, \qquad (1_3) = (1_2)\\ y + \frac{43}{14}z &= \frac{15}{14}, \qquad (2_3)\\ 219z &= 219. \qquad (3_3) \end{aligned}$$

Tato soustava rovnic má trojúhelníkový tvar a její řešení určíme snadno takto (zpětný chod GEM): Z rovnice (3_3) po dělení číslem 219 dostáváme: $z = 1$. Dosazením do rovnice (2_3) vypočteme

$$y = \frac{1}{14}(15 - 43) = -2$$

a po dosazení do rovnice (1_3) vychází $x = -2 + 5 = 3$.

Výsledek: Daná soustava má v R^3 právě jedno řešení $[x, y, z] = [3; -2; 1]$.

Zkouška: $L_1 = 9 \cdot 3 + 5(-2) - 2 \cdot 1 = 27 - 10 - 2 = 15,\ P_1 = 15,\ L_1 = P_1$

$L_2 = 8 \cdot 3 + 6(-2) + 3 \cdot 1 = 24 - 12 + 3 = 15,\ P_2 = 15,\ L_2 = P_2$

$L_3 = 3 \cdot 3 - 7(-2) + 4 \cdot 1 = 9 + 14 + 4 = 27,\ P_3 = 27,\ L_3 = P_3$

Poznámky.

1. Analogicky jako při řešení soustavy tří lineárních rovnic o třech neznámých lze postupovat i při řešení soustavy n lineárních rovnic o n neznámých pro $n > 3$.
2. Řešíme-li soustavu lineárních rovnic Gaussovou metodou, je možné pro zestručnění zapisovat jenom koeficienty a pravé strany rovnic (neboli vynechat v zápisech stále se opakující neznámé). Tabulka číselných údajů uspořádaných do p řádků a q sloupců se nazývá **matice** typu (p, q); zápis matice se ohraničuje závorkami hranatými [ ] či okrouhlými ( ). Koeficienty soustavy rovnic tvoří tzv. **matici soustavy**, rozšíříme-li ji o sloupec pravých stran (oddělený svislou čárou), dostáváme tzv. **rozšířenou matici soustavy** a právě s ní se v GEM pracuje. Přitom se mezi rozšířenými maticemi soustav rovnic před a po ekvivalentní úpravě píše znak $\sim$ (popř. $\to$). Proveďte si maticové zápisy úprav GEM pro předcházející příklad.
3. Obdobně jako pro soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých také v obecném případě soustavy n rovnic o n neznámých ($n \in \mathsf{N}$, $n > 2$) může pro její řešení nastat právě jedna z těchto možností: soustava má právě jedno řešení, soustava má nekonečně mnoho řešení (jestliže některou rovnici lze získat ekvivalentními úpravami z ostatních rovnic soustavy), soustava nemá žádné řešení (jestliže některá rovnice je v rozporu s ostatními rovnicemi soustavy).

Soustavy s kvadratickými rovnicemi

Tyto soustavy rovnic řešíme obvykle **metodou dosazovací**: Z jedné z rovnic vyjádříme jednu neznámou a dosazením do zbývajících rovnic ji z těchto rovnic eliminujeme.

Příklad řešení soustavy jedné kvadratické rovnice a jedné lineární rovnice s neznámými $x, y \in \mathsf{R}$

Řešte soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + x + y &= 36\\ x + 2y &= 9 \end{aligned}$$

Řešení

Z lineární rovnice vyjádříme neznámou $x = 9 - 2y$ a po dosazení do kvadratické rovnice soustavy v ní eliminujeme neznámou x, takže tato rovnice nabývá tvaru

$$81 - 36y + 4y^2 + y^2 + 9 - 2y + y = 36$$

čili po úpravě

$$5y^2 - 37y + 54 = 0.$$

Řešením této kvadratické rovnice dostáváme

$$\begin{aligned} y_1 &= 5{,}4, \quad \text{a tedy} \quad x_1 = 9 - 10{,}8 = -1{,}8,\\ y_2 &= 2, \quad \text{a tedy} \quad x_2 = 9 - 4 = 5. \end{aligned}$$

Výsledek: Daná soustava rovnic má v R^2 právě dvě řešení $[x_1, y_1] = [-1{,}8; 5{,}4]$, $[x_2, y_2] = [5; 2]$.

Příklad řešení soustavy dvou kvadratických rovnic s neznámými x, y ∈ R

Řešte soustavu rovnic:

$$x^2 - y^2 = 56,$$
$$xy = 45.$$

Řešení

Ze druhé rovnice vyjádříme $y = \dfrac{45}{x}$ a dosadíme do první rovnice, čímž dostáváme rovnici pro jednu neznámou x:

$$x^2 - \frac{2\,025}{x^2} = 56 \text{ čili } x^4 - 56x^2 - 2\,025 = 0.$$

To je bikvadratická rovnice, kterou lze převést substitucí $u = x^2$ na kvadratickou rovnici $u^2 - 56u - 2\,025 = 0$ s kořeny

$$u_{1,2} = 28 \pm \sqrt{784 + 2\,025} = 28 \pm \sqrt{2\,809} = 28 \pm 53, \quad u_1 = 81, \quad u_2 = -25.$$

Rovnice $x^2 = 81$ má dva kořeny $x_{1,2} = \pm 9$, jimž přísluší $y_{1,2} = \dfrac{45}{\pm 9} = \pm 5$.
(Rovnice $x^2 = -25$ nemá v R žádný kořen, v C by měla kořeny $x_{3,4} = \pm 5\mathrm{i}$, a tedy $y_{3,4} = \dfrac{45}{\pm 5\mathrm{i}} = \pm\dfrac{9}{\mathrm{i}} = \pm\dfrac{9\mathrm{i}}{\mathrm{i}^2} = \mp 9\mathrm{i}$.)

Výsledek: Daná soustava má v R^2 právě dvě řešení $[x_1, y_1] = [9; 5]$, $[x_2, y_2] = [-9; -5]$. (V C^2 by měla navíc řešení $[x_3, y_3] = [5\mathrm{i}, -9\mathrm{i}]$, $[x_4, y_4] = [-5\mathrm{i}, 9\mathrm{i}]$, kde i je imaginární jednotka.)

Poznámka. S geometrickým významem řešení soustav rovnic uvedených typů se seznámíme v analytické geometrii kuželoseček (kap. 10.14); na jeho základě lze tyto soustavy rovnic řešit též (přibližně) **graficky**.

5.13 Nerovnice a soustavy nerovnic s více neznámými

Také pojem nerovnice s jednou neznámou (kap. 5.8) lze zobecnit na **nerovnice s n neznámými** $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ($n \in \mathsf{N}$) v oboru R:

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n) < P(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$
$$\text{resp. } L(x_1, x_2, \ldots, x_n) > P(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

(popřípadě se znaky $\leqq$ resp. $\geqq$) s obdobným významem symbolů jako u rovnice v kap. 5.12. Tato nerovnice vyjadřuje *úlohu:* Určit všechny uspořádané n-tice reálných čísel $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, které splňují nerovnici, tj. po dosazení do ní dostáváme pravdivý výrok (nerovnost). Každou takovou uspořádanou n-tici $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ nazýváme **řešení nerovnice**. I další terminologie a symbolika je zde analogická jako u rovnice s n neznámými (kap. 5.12). Oborem řešení nerovnic je však vždy $\mathsf{M} \subset \mathsf{R}$.

V dalším textu se omezíme na **nerovnice se dvěma neznámými** x, y. Obdobně jako u rovnice se dvěma neznámými také množinu všech řešení nerovnice lze *znázornit graficky* v kartézské soustavě souřadnic Oxy; grafickým znázorněním je množina všech takových bodů roviny, jejichž souřadnice vyhovují dané nerovnici.

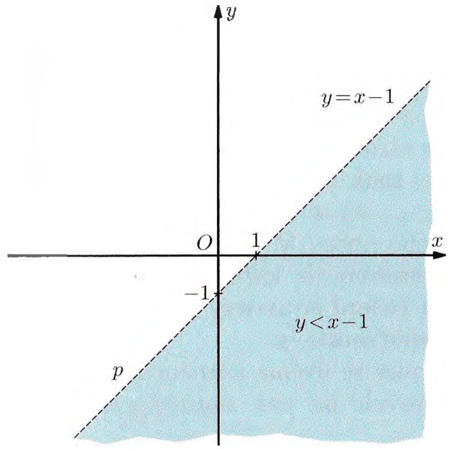
Poznámka. Nechť je dán graf funkce $f\colon y = f(x)$ proměnné $x \in \mathsf{R}$. O každém bodu, pro jehož souřadnice $[x, y]$ je splněna nerovnice $y > f(x)$, budeme říkat, že bod leží nad grafem funkce f, a je-li pro ně naopak splněna nerovnice $y < f(x)$, budeme říkat, že bod leží pod grafem funkce f.

Příklady řešení nerovnice se dvěma neznámými $x, y \in \mathsf{R}$

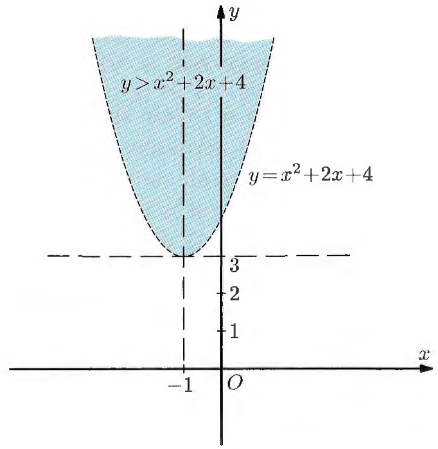
1. Řešte nerovnici $x - y - 1 > 0$ s neznámými $x \in \mathsf{R}$, $y \in \mathsf{R}$.

Řešení

Dané nerovnici vyhovuje každá uspořádaná dvojice $[x, y] \in \mathsf{R}^2$, v níž x je libovolné reálné číslo a příslušné y splňuje nerovnici $y < x - 1$. Tato řešení nerovnice představují kartézské souřadnice bodů roviny, které leží pod přímkou p, jež je grafem funkce $y = x - 1$. Množinou všech těchto bodů roviny je polorovina vybarvená v obr. 5.29 (hraniční přímka p do této množiny nepatří); tato polorovina tedy graficky znázorňuje všechna řešení dané nerovnice.



Obr. 5.29



Obr. 5.30

2. Řešte nerovnici $x^2 + 2x < y - 4$ s neznámými $x \in \mathsf{R}$, $y \in \mathsf{R}$.

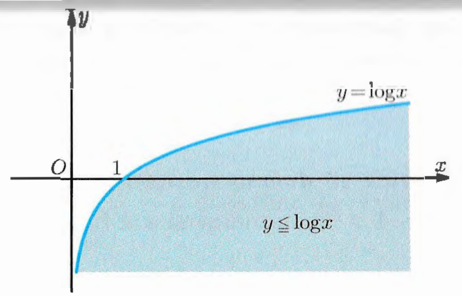
Řešení

Řešením dané nerovnice je každá uspořádaná dvojice $[x, y] \in \mathsf{R}^2$, kde x je libovolné reálné číslo a příslušné y splňuje nerovnici $y > x^2 + 2x + 4$. Tato řešení představují kartézské souřadnice bodů ležících nad parabolou, která je grafem funkce $y = x^2 + 2x + 4$. Množinou všech takových bodů je část roviny vyznačená v obr. 5.30 barevně (parabola k ní nepatří). Vybarvená část roviny je tedy grafickým znázorněním množiny všech řešení dané nerovnice.

3. Řešte nerovnici $y \leqq \log x$ s neznámými $x \in \mathsf{R}$, $y \in \mathsf{R}$.

Řešení

Logaritmus čísla x je definován pro $x > 0$. Řešeními dané nerovnice jsou proto všechny dvojice $[x, y]$, kde $x \in (0, +\infty)$ a příslušné y splňuje nerovnici $y \leqq \log x$. Tato řešení představují kartézské souřadnice bodů, které leží na grafu nebo pod grafem funkce $y = \log x$. Množinou všech těchto bodů je část roviny vyznačená



Obr. 5.31

v obr. 5.31 barevně (logaritmická křivka k ní patří). Vybarvená část roviny tedy graficky znázorňuje množinu všech řešení dané nerovnice.

Soustavy nerovnic s více neznámými

Obdobně jako u rovnic se také u nerovnic s více neznámými setkáváme s úlohou řešit soustavu nerovnic, které mají platit zároveň, tj. lze mezi ně psát znak $\wedge$ (obdobně jako u rovnic se však obvykle tento znak nahrazuje čárkou). **Řešením soustavy nerovnic** o n neznámých $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se rozumí každá uspořádaná n-tice $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ čísel z daného číselného oboru $\mathsf{M} \subset \mathsf{R}$, pro kterou platí zároveň všechny nerovnice soustavy, tj. po dosazení do každé z nich dostaneme pravdivý výrok (nerovnost). **Množina všech řešení soustavy nerovnic** je průnikem množin všech řešení jednotlivých nerovnic soustavy.

V dalším textu se opět omezíme na nerovnice se dvěma neznámými $x, y \in \mathsf{R}$. Množinu všech řešení soustavy takových nerovnic lze pak *znázorňovat graficky* v souřadnicové soustavě Oxy.

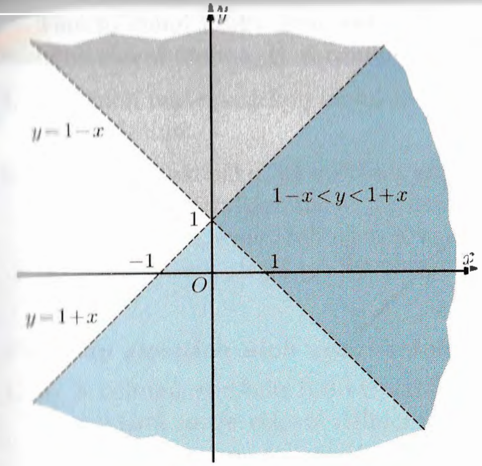
Příklady řešení soustavy nerovnic o dvou neznámých $x, y \in \mathsf{R}$

1. Řešte soustavu nerovnic s neznámými $x \in \mathsf{R}$, $y \in \mathsf{R}$:

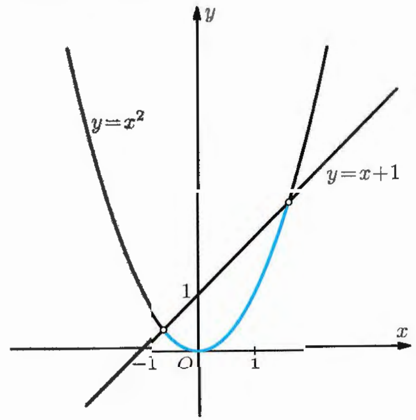
$$y - x < 1$$
$$y + x > 1$$

Řešení
První nerovnice je splněna pro libovolně zvolené $x \in \mathsf{R}$ a $y < 1 + x$ čili $y \in (-\infty, 1 + x)$. Druhá nerovnice je splněna pro libovolné $x \in \mathsf{R}$ a $y > 1 - x$ čili $y \in (1 - x, +\infty)$. Množina všech řešení soustavy představuje průnik množin řešení $[x, y]$ jednotlivých nerovnic, který je neprázdný, právě když platí $1 - x < 1 + x$ čili pro $x > 0$. Řešením soustavy nerovnic je tedy každá taková uspořádaná dvojice $[x, y] \in \mathsf{R}^2$, že $x \in (0, +\infty)$, $y \in (1 - x, 1 + x)$.

Grafické znázornění množiny všech řešení $[x, y]$ je v obr. 5.32. Množiny všech bodů, jejichž souřadnice jsou řešeními jednotlivých nerovnic, jsou vyznačeny barevně; jejich průnik je vyznačen tmavší barvou (hraniční polopřímky do něho nepatří).



Obr. 5.32



Obr. 5.33

2. Řešte soustavu rovnice a nerovnice s neznámými $x \in \mathsf{R}$, $y \in \mathsf{R}$:

$$y = x^2$$
$$y - x < 1$$

Řešení
Vyloučíme-li z dané nerovnice neznámou y, dostáváme

$$x^2 - x - 1 < 0 \text{ čili } \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} < 0,$$

odtud plyne, že

$$\left|x - \frac{1}{2}\right| < \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ čili } -\frac{\sqrt{5}}{2} < x - \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{5}}{2},$$

$$\text{a tedy } \frac{1 - \sqrt{5}}{2} < x < \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

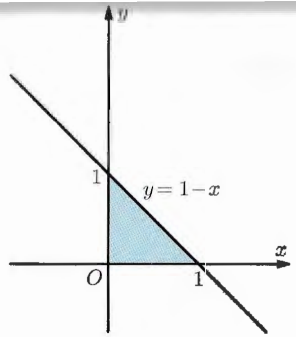
Řešením dané soustavy je proto každá taková uspořádaná dvojice $[x, y] \in \mathsf{R}^2$, že platí

$$x \in \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right), \quad y = x^2.$$

Grafickým znázorněním množiny všech řešení $[x, y]$ je oblouk paraboly vyznačený barevně v obr. 5.33 (bez krajních bodů).

3. Řešte soustavu nerovnic s neznámými $x \in \mathsf{R}$, $y \in \mathsf{R}$:

$$x + y < 1$$
$$x > 0$$
$$y > 0$$



Obr. 5.34

Řešení
Z první nerovnice plyne $y < 1 - x$. Protože však má být $x > 0$, $y > 0$, vyplývá odtud, že musí být $0 < x < 1$ a $0 < y < 1 - x$. Řešením dané soustavy je tedy každá dvojice $[x, y] \in \mathsf{R}^2$, v níž $x \in (0; 1)$, $y \in (0; 1 - x)$.

Grafickým znázorněním množiny všech řešení $[x, y]$ je vnitřek vybarveného trojúhelníku v obr. 5.34.

5.14 Slovní úlohy vedoucí k řešení rovnic a nerovnic

Při řešení fyzikálních, technických a jiných problémů v praxi je velmi často možné přejít k jejich matematickému vyjádření. Tomuto přechodu se říká **matematizace reálné situace.**

Reálný problém bývá obvykle formulován jako *slovní úloha*, kterou řešíme takto:

a) Převedeme ji na **matematickou úlohu**, jež představuje **matematický model reálného problému.** Ve středoškolské matematice je to nejčastěji **aritmetická úloha** nebo **algebraická úloha** vyjádřená *rovnicemi*, resp. *nerovnicemi.*

b) **Vyřešíme matematickou úlohu**; aritmetická úloha se **řeší úsudkem**, algebraická úloha **vyřešením rovnic, resp. nerovnic.**

c) Získané výsledky **interpretujeme v dané reálné situaci** neboli vybereme ta řešení matematické úlohy, která jsou **řešením reálného problému.**

Speciálně **algebraické řešení slovních úloh pomocí rovnic, resp. nerovnic** probíhá v těchto krocích:

1. Zvolíme jednu, resp. více neznámých, tj. proměnných (veličin), jejichž hodnoty máme podle podmínek slovní úlohy nalézt. Označíme je např. x, y, u atd.
2. Uvědomíme si a zaznamenáme všechny číselné údaje slovní úlohy.
3. Na základě podmínek plynoucích z textu slovní úlohy sestavíme rovnici, nerovnici, event. soustavu rovnic či nerovnic pro zvolené neznámé.

Těmito třemi kroky jsme vytvořili matematický model reálného problému daného slovní úlohou, tj. formulovali jsme příslušnou matematickou úlohu.

4. Získanou matematickou úlohu (rovnici, nerovnici, soustavu rovnic, resp. nerovnic) vyřešíme.
5. Provedeme zkoušku, jíž ověříme, zda výsledky řešení vyhovují všem podmínkám slovní úlohy. (Uvědomme si, že není postačující provést zkoušku dosazením do řešené rovnice, event. řešených rovnic, neboť jsme se mohli dopustit chyb nejen při jejich řešení, ale již při jejich sestavování neboli při vytváření matematického modelu.)

Příklady slovních úloh vedoucích k řešení lineární nerovnice

1. a) 5 dělníků vyrobilo 100 výrobků. Kolik výrobků vyrobilo 12 dělníků? (Předpokládá se, že všichni dělníci pracovali se stejnými výkony.)

b) 3 dělníci vykonali určitou práci za 10 dní. Za kolik dní by ji vykonalo 5 dělníků? (Opět za předpokladu stejných výkonů všech dělníků.)

Řešení
Tyto dvě úlohy jsme řešili v příkladech na přímou a nepřímou úměrnost v kap. 4.4. Na stejném principu je založeno jejich řešení rovnicemi, které nyní ukážeme.

a) Volba neznámé: y je hledaný počet výrobků. Přímou úměrnost mezi počtem výrobků a počtem dělníků vyjádříme schematicky:

$$\uparrow \begin{array}{l} 5 \text{ dělníků} \ \ldots\ 100 \text{ výrobků} \\ 12 \text{ dělníků} \ \ldots\ \ \ y \text{ výrobků} \end{array} \uparrow \ \Rightarrow \frac{y}{100} = \frac{12}{5} \Rightarrow y = 240$$

Odpověď: 12 dělníků vyrobilo 240 výrobků.

b) Volba neznámé: y je určovaný počet dní. Nepřímou úměrnost mezi počtem dní a počtem dělníků vyjádříme schematicky:

$$\downarrow \begin{array}{l} 3 \text{ dělníci} \ \ldots\ 10 \text{ dní} \\ 5 \text{ dělníků} \ \ldots\ \ y \text{ dní} \end{array} \uparrow \ \Rightarrow \frac{y}{10} = \frac{3}{5} \Rightarrow y = 6$$

Odpověď: 5 dělníků vykoná danou práci za 6 dní.

2. Při přímé silnici leží místa A, B a C (B je mezi A a C), jejichž vzdálenosti jsou $|AB| = 20\,\text{km}$, $|BC| = 50\,\text{km}$. Z míst A a B vyjeli současně 2 cyklisté směrem k C, rychlost prvního byla v_1, druhého v_2 ($v_2 < v_1$) v $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$. První cyklista dohonil druhého ještě před místem C. V jaké vzdálenosti od A to bylo?

Řešení
Volba neznámé: První cyklista dohonil druhého ve vzdálenosti $s = x\,\text{km}$ od A.

Matematické vyjádření údajů slovní úlohy:
Doba jízdy prvního cyklisty (v hodinách) byla $\dfrac{s}{v_1}$. Druhý cyklista ujel dráhu $s - 20\,\text{km}$ za dobu $\dfrac{s - 20\text{ km}}{v_2}$.

Protože oba vyjeli současně, doba jejich jízdy je stejná, což vyjádříme rovnicí

$$\frac{s}{v_1} = \frac{s - 20\text{ km}}{v_2},$$

z níž

$$s = 20\text{ km} \cdot \frac{v_1}{v_1 - v_2}.$$

Podle textu úlohy je $|AB| < s < |AC|$ čili $20 < x < 70$ čili $20 < \frac{20v_1}{v_1 - v_2} < 70$. Odtud plyne, že musí být $v_1 > 1{,}4v_2$.

Odpověď: První cyklista dohonil druhého ve vzdálenosti $\frac{20v_1}{v_1 - v_2}$ km od místa A za předpokladu, že $v_1 > 1{,}4v_2$.

Příklady slovních úloh vedoucích k řešení kvadratické rovnice

1. Součet druhých mocnin tří po sobě bezprostředně následujících lichých přirozených čísel je 155. Určete tato čísla.

Řešení

Volba neznámé: Prostřední z hledaných čísel označíme x; ostatní dvě čísla budou $x - 2$, $x + 2$.

Matematické vyjádření údajů slovní úlohy vede k rovnici

$$(x-2)^2 + x^2 + (x+2)^2 = 155.$$

Po jejích ekvivalentních úpravách dostáváme

$$3x^2 + 8 = 155 \text{ čili } x^2 = 49.$$

Kořeny jsou tedy čísla $x_1 = 7$, $x_2 = -7$.

Požadavkům slovní úlohy vyhovuje jen kořen $x_1 = 7 \in \mathsf{N}$; $x_1 - 2 = 5$, $x_1 + 2 = 9$.

Zkouška: $5^2 + 7^2 + 9^2 = 25 + 49 + 81 = 155$.

Odpověď: Hledaná přirozená čísla jsou 5, 7, 9.

2. Do propasti byl volně puštěn kámen a po čase $t = 6{,}4$ s bylo slyšet, že kámen narazil na dno. Jak je propast hluboká? (Rychlost šíření zvuku je $v \doteq 340\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Odpor vzduchu zanedbejte. Tíhové zrychlení je $g \doteq 10\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.)

Řešení

Volba neznámé: Označíme-li t_d dobu pádu kamene, je hledaná hloubka h dána vzorcem pro dráhu volného pádu $h = \frac{g}{2}t_\mathrm{d}^2$. Za neznámou zvolme t_d; doba šíření zvuku je $t - t_\mathrm{d}$.

Matematické vyjádření údajů slovní úlohy: Dráha uražená dopadajícím kamenem je rovna dráze šíření zvuku ze dna propasti nahoru, tedy jsou si rovny dráhy $h = \frac{g}{2}t_\mathrm{d}^2$ a $h = v(t - t_\mathrm{d})$. Odtud dostáváme rovnici:

$$\frac{g}{2}t_\mathrm{d}^2 = v(t - t_\mathrm{d})$$

a po ekvivalentních úpravách

$$gt_\mathrm{d}^2 + 2vt_\mathrm{d} - 2vt = 0.$$

Řešením této kvadratické rovnice dostáváme kořeny

$$t_\mathrm{d} = \frac{-2v \pm \sqrt{4v^2 + 8gvt}}{2g} = \frac{-v \pm \sqrt{v^2 + 2gvt}}{g}.$$

Podmínkám úlohy vyhovuje pouze kladný kořen

$$t_\mathrm{d} = \frac{-v + \sqrt{v^2 + 2gvt}}{g} \doteq 5{,}9\text{ s}.$$

Po dosazení dostáváme $h = v(t - t_\mathrm{d}) \doteq 340 \cdot 0{,}5\text{ m} = 170\text{ m}$.

Odpověď: Hloubka propasti je přibližně 170 m.

Poznámka. Řešení bylo možné provést též sestavením rovnice přímo pro neznámou h; hloubka propasti je rovna dráze volného pádu kamene za čas $t - \frac{h}{v}$, kde $\frac{h}{v}$ je doba šíření zvuku, tedy $h = \frac{g}{2}\left(t - \frac{h}{v}\right)^2$.

Příklady slovních úloh vedoucích k řešení rovnic se zlomky

1. Dva dělníci pracující společně vykonají určitý úkol za 12 dní. Pracuje-li první z nich sám tak dlouho, že udělá polovinu úkolu, a pak je vystřídán druhým, který úkol dokončí, trvá celá práce 25 dní. Za jak dlouho by udělal celý úkol každý z nich sám?

Řešení

Volba neznámé: Protože za 25 dní oddělené práce udělá každý z nich $\frac{1}{2}$ úkolu, udělali by za 50 dní celkem 2 úkoly. První dělník udělá celý úkol sám za x dní, druhý dělník za $(50 - x)$ dní.

Za jeden den udělá první dělník sám $\frac{1}{x}$ úkolu, druhý dělník $\frac{1}{50 - x}$ úkolu, oba společnou prací udělají $\frac{1}{12}$ úkolu (neboť celý úkol udělají společně za 12 dní). Sestavená rovnice proto zní

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{50 - x} = \frac{1}{12}.$$

(Zřejmě je $x \neq 0$, $x \neq 50$.)

Po ekvivalentních úpravách dostáváme kvadratickou rovnici

$$x^2 - 50x + 600 = 0$$

s kořeny $x_1 = 20$, $x_2 = 30$, jež vyhovují podmínkám úlohy.

Odpověď: Samostatně by úkol udělal jeden (výkonnější) dělník za 20 dní, druhý za 30 dní.

2. **Parník potřeboval na cestu 48 km proti proudu a 48 km zpět po proudu dohromady 5 hodin. Jakou rychlostí by jel parník v klidné vodě, byla-li rychlost proudu 4 km za hodinu?**

Řešení

Volba neznámé: V klidné vodě by parník jel rychlostí $v = x\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$. Proti proudu jel rychlostí $(x-4)\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$, 48 km ujel za $\frac{48}{x-4}$ h, po proudu jel rychlostí $(x+4)\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$, 48 km ujel za $\frac{48}{x+4}$ h. Podle podmínek úlohy dostáváme rovnici

$$\frac{48}{x-4}+\frac{48}{x+4}=5.$$

(Zřejmě $v \neq \pm 4\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$.)

Její ekvivalentní úpravy vedou ke kvadratické rovnici

$$x^2-19{,}2x-16=0.$$

Podmínky slovní úlohy splňuje pouze kladný kořen rovnice $x=20$.

Odpověď: V klidné vodě by parník jel rychlostí $v = 20\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$.

Příklady slovních úloh vedoucích k řešení lineárních nerovnic

1. V místech A a B vzdálených od sebe $|AB| = d$ km se těží uhlí. Cena 1 tuny uhlí v místě A je q Kč, v místě B o p % více. V kterých místech přímé silnice mezi A a B bude uhlí přivezené z B levnější než uhlí přivezené z A, stojí-li dovoz 1 tuny uhlí na vzdálenost 1 km n Kč? ($d>0$, $q>0$, $p>0$, $n>0$)

Řešení

Volba neznámé: Zvolíme za ni vzdálenost hledaných míst M mezi A a B od místa B, tj. položíme $|MB| = x$ km ($0<x<d$). Vzdálenost místa M od A pak bude $|MA| = (d-x)$ km.

Aby úloha měla řešení, je nutné, aby cena 1 tuny uhlí vytěženého v místě A a dovezeného do místa B byla vyšší než cena 1 tuny uhlí vytěženého v B, tj. musí platit nerovnost:

$$q+dn>q+\frac{pq}{100}\Leftrightarrow 100dn-pq>0.$$

Matematické vyjádření údajů slovní úlohy vedoucí k sestavení nerovnice: V uvažovaných místech M bude 1 tuna uhlí dovezeného z místa B stát (v Kč) $\frac{q(100+p)}{100}+nx$, 1 tuna uhlí přivezeného z místa A bude stát $q+(d-x)n$. Podle textu úlohy má být splněna nerovnice

$$\frac{q(100+p)}{100}+nx<q+(d-x)n.$$

Řešení nerovnice: Po vynásobení stem dostáváme

$$100q+pq+100nx<100q+100dn-100nx$$

a odtud

$$200nx<100dn-pq.$$

Protože podle smyslu úlohy má být $0<x<d$ a $n>0$, vychází

$$0<x<\frac{100dn-pq}{200n},\quad \text{kde } 100dn-pq>0.$$

Výsledek: Hledaná místa jsou ve vzdálenostech x km od místa B: $x\in\left(0;\ \frac{100dn-pq}{200n}\right)$. Úloha má řešení, právě když platí $100dn-pq>0$.

2. Hmotnost Země nechť je M, hmotnost Měsíce m, vzdálenost středů obou těles je d. Do jaké vzdálenosti od středu Země musí odletět kosmická loď letící směrem k Měsíci, aby mohla pokračovat v letu k němu jen vlivem přitažlivosti Měsíce? (Hmotnost Země je přibližně 81krát větší než hmotnost Měsíce.)

Řešení

Volba neznámé: Označme x vzdálenost kosmické lodi od středu Země. Její vzdálenost od středu Měsíce je pak $d-x$.

Matematické vyjádření údajů slovní úlohy vedoucí na nerovnici: Je-li m_1 hmotnost kosmické lodi, pak v uvažované vzdálenosti x od středu Země na ni působí podle Newtonova gravitačního zákona přitažlivá síla Země $\kappa\cdot\frac{M\cdot m_1}{x^2}$ a přitažlivá síla Měsíce $\kappa\cdot\frac{m\cdot m_1}{(d-x)^2}$, kde κ je gravitační konstanta. Podle znění úlohy má být

$$\kappa\cdot\frac{m\cdot m_1}{(d-x)^2}>\kappa\frac{M\cdot m_1}{x^2}.$$

Řešení této nerovnice: Po ekvivalentních úpravách dostáváme

$$\frac{x^2}{(d-x)^2}>\frac{M}{m}\quad\text{čili}\quad\frac{(d-x)^2}{x^2}<\frac{m}{M}.$$

A protože platí $x>0$, $d-x>0$, $M>0$, $m>0$, plyne odtud

$$\frac{d-x}{x}<\sqrt{\frac{m}{M}}\quad\text{čili}\quad\frac{d}{x}-1<\sqrt{\frac{m}{M}},$$

takže

$$\frac{x}{d}>\frac{1}{1+\sqrt{\frac{m}{M}}},\quad\text{kde}\quad\frac{m}{M}\doteq\frac{1}{81}.$$

Výsledek: Přibližně tak vychází $\frac{x}{d}>\frac{1}{1+\frac{1}{9}}$ neboli $0{,}9d<x<d$. Podmínky úlohy jsou tedy splněny pro vzdálenosti $x\in(0{,}9d;\,d)$.

3. V nádobě je 8 kg dvacetišestiprocentního roztoku určité látky B ($w_1(\mathrm{B})=26$). Kolikaprocentní musí být druhý roztok téže látky B, aby po smíšení jeho 10 kg s 8 kg prvního roztoku vznikl roztok nejméně padesátiprocentní a nejvýše šedesátiprocentní?

Řešení

Označíme

$x = w_2(\mathrm{B})$ ... hledaný počet procent látky B v druhém roztoku,
$w_3(\mathrm{B})$ ... počet procent látky ve výsledném roztoku,
$m_1 = 8\,\mathrm{kg}$ ... hmotnost prvního roztoku,
$m_2 = 10\,\mathrm{kg}$ ... hmotnost druhého roztoku,
$m_3 = 18\,\mathrm{kg}$ ... hmotnost výsledného roztoku,
$m_1(\mathrm{B})$ ... hmotnost látky B v prvním roztoku,
$m_2(\mathrm{B})$ ... hmotnost látky B v druhém roztoku,
$m_3(\mathrm{B})$ ... hmotnost látky B ve výsledném roztoku.

Při výpočtu vycházíme ze zákona zachování hmotnosti pro látku B

$$m_1(\mathrm{B}) + m_2(\mathrm{B}) = m_3(\mathrm{B})$$

a z téhož zákona aplikovaného na celkové hmotnosti roztoků

$$m_1 + m_2 = m_3.$$

Vyjádříme-li $m_i(\mathrm{B})$, $i = 1, 2, 3$, z definičních vztahů pro hmotnostní zlomky $w_i(\mathrm{B}) = \dfrac{m_i(\mathrm{B})}{m_i}$, dostáváme tuto *hmotnostní směšovací rovnici:*

$$m_1 w_1(\mathrm{B}) + m_2 w_2(\mathrm{B}) = (m_1 + m_2) w_3(\mathrm{B}).$$

Po dosazení číselných hodnot veličin dostáváme

$$8 \cdot 26 + 10x = 18 w_3(\mathrm{B}),$$

přičemž má platit

$$50 \leqq w_3(\mathrm{B}) \leqq 60 \text{ čili } 18 \cdot 50 \leqq 18 w_3(\mathrm{B}) \leqq 18 \cdot 60.$$

Tyto podmínky vedou k soustavě nerovnic

$$18 \cdot 50 \leqq 8 \cdot 26 + 10 \cdot x \leqq 18 \cdot 60 \text{ čili } 9 \leqq 2{,}08 + 0{,}1x \leqq 10{,}8.$$

Jejich úpravami dostaneme: $69{,}2 \leqq x \leqq 87{,}2$.

Odpověď: Přimíšený roztok musí mít nejméně 69,2 % a nejvýše 87,2 % látky B.

Příklad slovní úlohy vedoucí na řešení kvadratické nerovnice

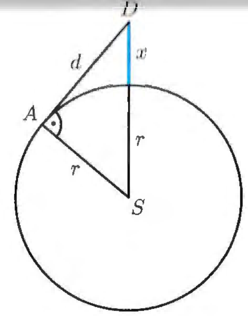
Určete výšky, v nichž může být umístěna nad zemským povrchem stacionární družice, aby byla viditelná na horizontu ze všech míst na Zemi vzdálených od ní nejméně $d = 2\,000\,\mathrm{km}$. (Zemi uvažujeme jako kouli o poloměru $r = 6\,370\,\mathrm{km}$, družici jako bod.)

Řešení

Volba neznámé: Označme hledané výšky x (obr. 5.35).

Matematické vyjádření podmínek úlohy: Podle Pythagorovy věty pro pravoúhlý trojúhelník SAD v obr. 5.35 platí

$$(r + x)^2 - r^2 = d^2 \quad \text{čili} \quad x^2 + 2rx = d^2$$



Obr. 5.35

a po dosazení dostáváme pro číselné hodnoty x a d rovnici

$$x^2 + 12\,740x = d^2, \text{ přičemž } d^2 \geqq 2\,000^2.$$

To vede ke kvadratické nerovnici

$$x^2 + 12\,740x - 4\,000\,000 \geqq 0.$$

Z řešení této nerovnice vyhovují podmínkám úlohy ($x > 0$) všechna $x \geqq 306{,}6$.

Odpověď: Družice musí být umístěna ve vzdálenosti alespoň 306,6 km nad zemským povrchem.

Příklady slovních úloh vedoucích k řešení soustavy rovnic o více neznámých

1. Proud $I = 4{,}5\,\mathrm{A}$ protéká dvěma paralelními větvemi stejnosměrného obvodu. Určete proudy ve větvích, jestliže jejich odpory jsou $R_1 = 60\,\Omega$ a $R_2 = 90\,\Omega$.

   Řešení

   Volba neznámých: Hledané proudy ve větvích označíme I_1, I_2.

   Matematické vyjádření údajů slovní úlohy: Podle Kirchhoffových zákonů pro daný stejnosměrný obvod platí rovnice

   $$I_1 + I_2 = I, \text{ kde } I = 4{,}5 \text{ A},$$

   $$I_1 : I_2 = \frac{1}{R_1} : \frac{1}{R_2} \text{ čili } I_1 = \frac{3}{2} I_2.$$

   Řešením této soustavy dvou lineárních rovnic pro dvě neznámé I_1, I_2 dostáváme

   $$I_1 = \frac{3}{5} I = 2{,}7 \text{ A}, \quad I_2 = \frac{2}{5} I = 1{,}8 \text{ A}.$$

2. Nádrž se plní třemi přívody A, B, C. Současně otevřenými přívody A a B se naplní za 1 hodinu, přívody A a C za 45 minut, přívody B a C za 1,5 hodiny. Jak dlouho by se plnila každým přívodem zvlášť?

Řešení

Volba neznámých: Celá nádrž se naplní přívodem A za a hodin, přívodem B za b hodin, přívodem C za c hodin.

Matematické vyjádření podmínek úlohy: Za 1 hodinu přívodem A nateče $\frac{1}{a}$ nádrže, přívodem B nateče $\frac{1}{b}$ nádrže, přívodem C nateče $\frac{1}{c}$ nádrže. Za 45 minut $\left(=\frac{3}{4}\text{ h}\right)$ přívodem A nateče $\frac{0{,}75}{a}$ nádrže, přívodem C nateče $\frac{0{,}75}{c}$ nádrže; za 1,5 hodiny přívodem B nateče $\frac{1{,}5}{b}$ nádrže, přívodem C nateče $\frac{1{,}5}{c}$ nádrže. Podle podmínek slovní úlohy platí rovnice

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{a}+\frac{1}{b}&=1,\\
\frac{0{,}75}{a}+\frac{0{,}75}{c}&=1 \quad \text{čili } \frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{4}{3},\\
\frac{1{,}5}{b}+\frac{1{,}5}{c}&=1 \quad \text{čili } \frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{2}{3}.
\end{aligned}
$$

Řešením této soustavy tří lineárních rovnic pro tři neznámé $x=\frac{1}{a}$, $y=\frac{1}{b}$, $z=\frac{1}{c}$ vychází: $z=\frac{1}{2}$ čili $c=2$, $y=\frac{1}{6}$ čili $b=6$, $x=\frac{5}{6}$ čili $a=\frac{6}{5}$.

Odpověď: Nádrž se naplní přívodem A za $\frac{6}{5}$ hodiny, tj. za 1 hodinu 12 minut, přívodem B za 6 hodin a přívodem C za 2 hodiny.

6 Posloupnosti a řady

6.1 Posloupnosti

Funkce, jejímž definičním oborem je množina N všech přirozených čísel, popř. její nekonečná podmnožina, se nazývá **posloupnost** (**nekonečná číselná posloupnost**). Funkce, jejímž definičním oborem je množina prvních n přirozených čísel $\{1, 2, \dots, n\}$, se nazývá **konečná posloupnost** (**konečná číselná posloupnost**). Funkční hodnoty posloupnosti (nekonečné nebo konečné) se nazývají **členy posloupnosti**. Funkční hodnota posloupnosti v bodě $n \in \mathsf{N}$ se nazývá ***n*-tý člen posloupnosti** a značí se místo $f(n)$ zpravidla f_n anebo častěji a_n, b_n apod.

Posloupnost (nekonečná) s n-tým členem a_n se zapisuje $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ nebo $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, stručně též $(a_n)_1^{\infty}$. Konečná posloupnost s n-tým členem a_n a s definičním oborem $\{1, 2, \dots, k\}$ se zapisuje $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ nebo $(a_n)_{n=1}^{k}$, stručně též $(a_n)_1^{k}$.

Poznámka. Je třeba zdůraznit, že pod pojmem *posloupnost* rozumíme vždy *nekonečnou posloupnost*. Jestliže budeme uvažovat *konečnou posloupnost*, výslovně se o tom zmíníme.

Příklady posloupností

1. Posloupnost všech sudých přirozených čísel

$$(2n)_{n=1}^{\infty} \quad \text{čili } (2, 4, \dots, 2n, \dots).$$

Přiřazuje číslu $n=1$ číslo $a_1=2$, číslu $n=2$ číslo $a_2=4$, ..., obecně číslu n číslo $a_n=2n$.

2. Posloupnost všech lichých přirozených čísel

$$(2n-1)_{n=1}^{\infty} \quad \text{čili } (1, 3, \dots, 2n-1, \dots).$$

Přiřazuje číslu $n=1$ číslo $a_1=1$, číslu $n=2$ číslo $a_2=3$, ..., obecně číslu n číslo $a_n=2n-1$.

Funkční předpis posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je zpravidla zadán jedním z těchto dvou způsobů:

a) **vzorcem pro *n*-tý člen** a_n, např. $a_n=2n$, $a_n=2n-1$ v předchozích příkladech,

b) **rekurentně** zadáním prvního členu posloupnosti nebo několika prvních členů posloupnosti a vzorcem, podle něhož lze určit postupně další členy, např. je dáno a_1 a vzorec vyjadřující člen a_{n+1} pomocí a_n nebo je dáno a_1, a_2 a vzorec vyjadřující člen a_{n+1} pomocí a_n, a_{n-1}.

Příklady určení několika prvních členů posloupnosti

1. Určete prvních pět členů posloupností daných vzorcem pro n-tý člen:

a) $a_n = n + 2$, b) $a_n = \dfrac{1}{(n+2)^2}$,

c) $a_n = \dfrac{n}{n+2}$, d) $a_n = (-1)^n$.

Řešení

Dosadíme postupně $n = 1, 2, 3, 4, 5$, dostáváme:

a) $3, 4, 5, 6, 7$ b) $\dfrac{1}{9}, \dfrac{1}{16}, \dfrac{1}{25}, \dfrac{1}{36}, \dfrac{1}{49}$

c) $\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{5}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{5}{7}$ d) $-1, 1, -1, 1, -1$

2. Pro posloupnosti z příkladu 1 určete člen a_{n+1}.

Řešení

Do vzorců pro a_n dosadíme za n číslo $n + 1$, dostáváme:

a) $a_{n+1} = n + 1 + 2 = n + 3$ b) $a_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1+2)^2} = \dfrac{1}{(n+3)^2}$

c) $a_{n+1} = \dfrac{n+1}{n+1+2} = \dfrac{n+1}{n+3}$ d) $a_{n+1} = (-1)^{n+1}$

3. Určete prvních šest členů posloupností zadaných rekurentně:

a) $a_1 = 4,\ a_{n+1} = a_n - 2,\ n \in \mathrm{N}$, b) $a_1 = 3,\ a_{n+1} = \dfrac{1}{a_n},\ n \in \mathrm{N}$,

c) $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_{n+1} = a_n + a_{n-1},\ n > 1$,

d) $a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_n = a_{n-2} + a_{n-1},\ n > 2$.

Řešení

Do vzorců pro a_{n+1} dosadíme postupně v a), b) $n = 1, 2, 3, 4, 5$, v c) $n = 2, 3, 4, 5$, do vzorce pro a_n v d) dosadíme postupně $n = 3, 4, 5, 6$.

a) $4, 2, 0, -2, -4, -6$ b) $3, \dfrac{1}{3}, 3, \dfrac{1}{3}, 3, \dfrac{1}{3}$

c) $1, 2, 3, 5, 8, 13$ d) $1, 1, 2, 3, 5, 8$

Poznámka. Posloupnost z příkladu 3d se nazývá *Fibonacciova posloupnost* [čti: fibonačiova posloupnost]; setkáváme se s ní v matematice i v jejích aplikacích.

Grafické znázornění posloupnosti

Posloupnosti můžeme graficky znázorňovat nejen v pravoúhlé soustavě souřadnic v rovině, ale též na přímce (číselné ose). **Grafem posloupnosti** je vždy *množina navzájem izolovaných bodů.*

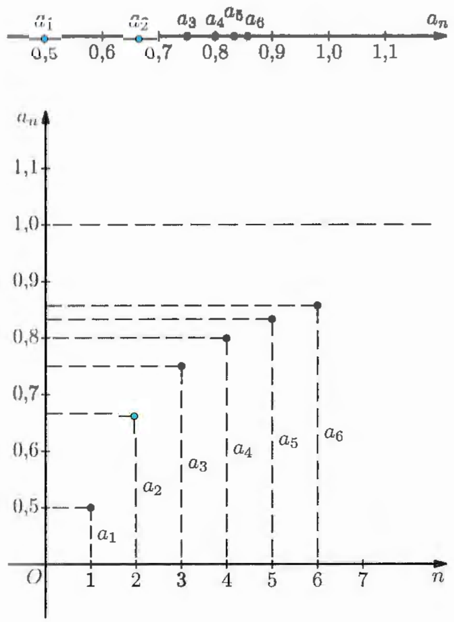
Příklady grafického znázornění posloupností

Znázorněte graficky prvních šest členů posloupností daných vzorcem pro n-tý člen:

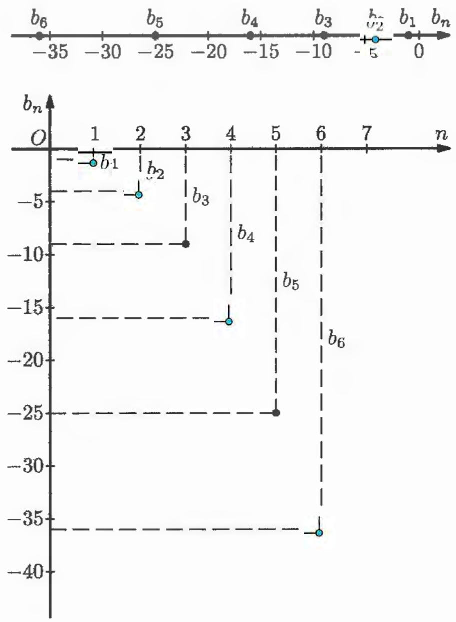
a) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$, b) $b_n = -n^2$, c) $c_n = (-1)^n \cdot \dfrac{n}{n+1}$.

Řešení

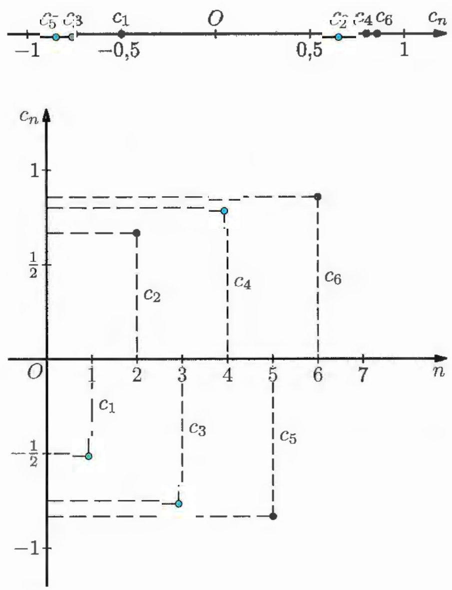
Grafy daných posloupností jsou sestrojeny na obr. 6.1 až 6.3.



Obr. 6.1



Obr. 6.2



Obr. 6.3

Některé vlastnosti posloupností

Protože posloupnost s reálnými členy je zvláštním případem reálné funkce reálné proměnné, můžeme také u ní zkoumat obdobné vlastnosti, např. omezenost a monotonii. *Definice* těchto pojmů jsme uvedli obecně pro funkce v kap. 4.3 a speciálně pro posloupnosti je lze formulovat takto:

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá
shora omezená posloupnost, existuje-li takové číslo $h \in \mathsf{R}$, že

$$a_n \leqq h \text{ pro každé } n \in \mathsf{N},$$

zdola omezená posloupnost, existuje-li takové číslo $d \in \mathsf{R}$, že

$$a_n \geqq d \text{ pro každé } n \in \mathsf{N},$$

omezená posloupnost, je-li omezená shora i zdola.

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá
rostoucí posloupnost, je-li $a_{n+1} > a_n$ pro každé $n \in \mathsf{N}$,
klesající posloupnost, je-li $a_{n+1} < a_n$ pro každé $n \in \mathsf{N}$,
neklesající posloupnost, je-li $a_{n+1} \geqq a_n$ pro každé $n \in \mathsf{N}$,
nerostoucí posloupnost, je-li $a_{n+1} \leqq a_n$ pro každé $n \in \mathsf{N}$.
Rostoucí, klesající, neklesající, nerostoucí posloupnosti nazýváme souhrnně **monotónními posloupnostmi**. Posloupnosti rostoucí a klesající se souhrnně nazývají **ryze monotónní posloupnosti**.

Příklady vyšetřování vlastností posloupností
Určete, zda jsou omezené (zdola, shora) a zda jsou monotónní posloupnosti

a) $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$, b) $(b_n)_{n=1}^{\infty} = (-n^2)_{n=1}^{\infty}$.

Řešení

a) Posloupnost s n-tým členem $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ (jejíž graf je na obr. 6.1) je omezená zdola, neboť $a_n \geqq d = a_1 = \dfrac{1}{2}$, i shora, neboť $a_n < h = 1$ a je rostoucí, protože pro každé $n \in \mathsf{N}$: $a_{n+1} - a_n = \dfrac{n+1}{n+2} - \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{1}{(n+2)(n+1)} > 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow a_{n+1} > a_n$.

b) Posloupnost s n-tým členem $b_n = -n^2$ (jejíž graf je na obr. 6.2) je omezená shora, neboť $b_n \leqq h = b_1 = -1$, avšak není omezená zdola a je klesající, protože pro každé $n \in \mathsf{N}$:

$$b_{n+1} - b_n = -(n+1)^2 - \left(-n^2\right) = -2n - 1 = -(2n+1) < 0 \Rightarrow b_{n+1} < b_n.$$

Posloupnost vybraná z posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$

Nechť je dána posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a nechť $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel ($k_1 < k_2 < k_3 < \ldots$). Potom posloupnost $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ taková, že platí $b_n = a_{k_n}$ pro všechna $n \in \mathsf{N}$, se nazývá **posloupnost vybraná z posloupnosti** $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ nebo také **podposloupnost** posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Zapisujeme ji obvykle $(a_{k_n})_{n=1}^{\infty}$.

Příklad
Z posloupnosti $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ lze vytvořit vybrané posloupnosti:

$\left(\dfrac{1}{2n}\right)_{n=1}^{\infty}$ (posloupnost vzniklá výběrem členů se sudými indexy $k_n = 2n$),

$\left(\dfrac{1}{2n-1}\right)_{n=1}^{\infty}$ (posloupnost vzniklá výběrem členů s lichými indexy $k_n = 2n - 1$).

Aritmetická a geometrická posloupnost

Tyto elementární typy posloupností mají velký teoretický i praktický význam.
Aritmetická posloupnost je každá posloupnost určená rekurentně vztahy

$$a_1 = a, \quad a_{n+1} = a_n + d \quad \forall n \in \mathsf{N},$$

kde a, d jsou daná čísla. Číslo d se nazývá **diference aritmetické posloupnosti**.

Příklady aritmetických posloupností

a) $(2n)_{n=1}^{\infty}$ je aritmetická posloupnost s 1. členem $a_1 = 2$ a s diferencí $d = 2$, neboť $a_{n+1} = 2(n+1) = 2n + 2 = a_n + 2$,

b) $(2n-1)_{n=1}^{\infty}$ je aritmetická posloupnost s 1. členem $a_1 = 1$ a s diferencí $d = 2$, neboť $a_{n+1} = 2(n+1) - 1 = (2n-1) + 2 = a_n + 2$.

Poznámky k pojmu aritmetická posloupnost.

1. Aritmetická posloupnost s reálnými členy úzce souvisí s *lineární funkcí* $f\colon y = ax + b$, $x \in \mathsf{R}$, kde a, $b \in \mathsf{R}$ jsou daná čísla (kap. 4.3). Dostaneme ji z této funkce, omezíme-li její definiční obor na množinu N. Funkce $g\colon y = an + b$ s proměnnou $n \in \mathsf{N}$, kde a, b jsou daná čísla, představuje aritmetickou posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s 1. členem $a_1 = g(1) = a + b$ a s diferencí $d = a$, neboť $a_{n+1} = g(n+1) = a(n+1) + b = (an+b) + a = g(n) + a = a_n + a$.

2. V aritmetické posloupnosti platí

$$a_{n+1} = a_n + d, \quad a_{n-1} = a_n - d \text{ pro každé } n \in \mathsf{N}, \ n \geqq 2.$$

Z těchto vztahů plyne

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \quad \forall n \in \mathsf{N}, \ n \geqq 2,$$

tj. počínaje druhým členem je každý člen a_n aritmetické posloupnosti roven *aritmetickému průměru* sousedních členů a_{n-1}, a_{n+1}. (Tato vlastnost vysvětluje název aritmetická posloupnost.)

Geometrická posloupnost je každá posloupnost určená rekurentně vztahy

$$a_1 = a, \quad a_{n+1} = a_n \cdot q \quad \forall n \in \mathsf{N},$$

kde a, q jsou daná čísla. Číslo q se nazývá **kvocient geometrické posloupnosti**.
Protože pro $a = 0 \vee q = 0$ dostáváme posloupnost, jejíž členy (event. s výjimkou 1. členu) jsou samé nuly, budeme v dalším textu předpokládat, že je $a \neq 0 \wedge q \neq 0$.

Příklady geometrických posloupností

a) $(2^n)_{n=1}^{\infty}$ je geometrická posloupnost s 1. členem $a_1 = 2$ a s kvocientem $q = 2$, neboť $a_{n+1} = 2^{n+1} = 2^n \cdot 2 = a_n \cdot 2$,

b) $(2^{-n})_{n=1}^{\infty}$ je geometrická posloupnost s 1. členem $a_1 = \frac{1}{2}$ a s kvocientem $q = \frac{1}{2}$, neboť $a_{n+1} = 2^{-(n+1)} = 2^{-n} \cdot \frac{1}{2} = a_n \cdot \frac{1}{2}$.

Poznámky k pojmu geometrická posloupnost.

1. Geometrická posloupnost s kladnými členy a s kvocientem, který se rovná 1. členu $a_1 = a \neq 1$, souvisí s *exponenciální funkcí* $f\colon y = a^x$, $x \in \mathsf{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$ (kap. 4.3). Dostaneme ji z této funkce, omezíme-li její definiční obor na množinu N. Funkce $g\colon y = a^n$ s proměnnou $n \in \mathsf{N}$, kde a je dané číslo ($a > 0$, $a \neq 1$), představuje geometrickou posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s 1. členem $a_1 = g(1) = a$ a s kvocientem $q = a$, neboť $a_{n+1} = g(n+1) = a^{n+1} = a^n \cdot a = g(n) \cdot a = a_n \cdot a$.
2. V geometrické posloupnosti platí

$$a_{n+1} = a_n \cdot q, \quad a_{n-1} = \frac{a_n}{q} \text{ pro každé } n \in \mathsf{N},\ n \geqq 2.$$

Z těchto vztahů plyne

$$|a_n| = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}} \quad \forall n \in \mathsf{N},\ n \geqq 2,$$

tj. počínaje druhým členem je absolutní hodnota každého členu a_n geometrické posloupnosti reálných čísel rovna *geometrickému průměru* sousedních členů a_{n-1}, a_{n+1}. (Tato vlastnost vysvětluje název geometrická posloupnost.)

Další důležité vlastnosti aritmetických posloupností a geometrických posloupností vyjadřují následující *věty*:

Věty o vlastnostech aritmetických a geometrických posloupností

Pro každou aritmetickou, resp. geometrickou posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ platí:

n-tý člen aritmetické posloupnosti lze vyjádřit vzorcem $$a_n = a_1 + (n-1)d.$$	n-tý člen geometrické posloupnosti lze vyjádřit vzorcem $$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$
Pro libovolné dva členy a_r, a_s aritmetické posloupnosti platí $$a_s = a_r + (s-r)d.$$	Pro libovolné dva členy a_r, a_s geometrické posloupnosti platí $$a_s = a_r \cdot q^{s-r}.$$
Pro součet s_n prvních n členů aritmetické posloupnosti platí $$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$	Pro součet s_n prvních n členů geometrické posloupnosti platí $$s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}, \text{ je-li } q \neq 1,$$ $$s_n = na_1, \text{ je-li } q = 1.$$

Poznámka. Důkazy vzorců pro a_n a s_n lze snadno provést matematickou indukcí.

Příklady určení všech aritmetických posloupností daných vlastností

1. Najděte všechny aritmetické posloupnosti, u nichž součet prvních tří členů je 27 a součet mocnin týchž členů je 275.

Řešení

Označme 2. člen hledaných posloupností $a_2 = x$, pak jejich 1. člen bude $a_1 = x - d$ a 3. člen bude $a_3 = x + d$, kde d je diference určovaných aritmetických posloupností. Podle jejich první dané vlastnosti je $a_1 + a_2 + a_3 = 27$ čili

$$(x-d) + x + (x+d) = 27,$$

odkud $3x = 27$, a tedy $x = 9$. Bude proto $a_1 = 9 - d$, $a_2 = 9$, $a_3 = 9 + d$. Podle druhé vlastnosti hledaných posloupností platí $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 275$ čili

$$(9-d)^2 + 9^2 + (9+d)^2 = 275,$$

odkud $d^2 = 16$, a tedy $d = \pm 4$.

Výsledek: Úloze vyhovují právě dvě aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, jejichž diference a první členy jsou

a) $d = 4$, $a_1 = 9 - 4 = 5$, tj. $(a_n)_{n=1}^{\infty} = (5, 9, 13, 17, 21, \ldots)$,

b) $d = -4$, $a_1 = 9 + 4 = 13$, tj. $(a_n)_{n=1}^{\infty} = (13, 9, 5, 1, -3, \ldots)$.

2. Určete všechny aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ takové, že pro součet prvních n členů platí $s_n = 7n^2 - 3n$.

Řešení

Pro $n = 1$ je $s_1 = a_1$ a podle daného vztahu je $s_1 = 4$, takže $a_1 = 4$. Pro $n = 2$ je $s_2 = a_1 + a_2$, podle daného vztahu je však $s_2 = 22$, a tedy $4 + a_2 = 22$ čili $a_2 = 18$. Odtud plyne, že diference hledaných posloupností musí být $d = a_2 - a_1 = 18 - 4 = 14$.

Výsledek: Existuje právě jedna aritmetická posloupnost dané vlastnosti s prvním členem $a_1 = 4$ a diferencí $d = 14$, tj. posloupnost $(4, 18, 32, 46, \ldots)$.

Příklady určení všech geometrických posloupností daných vlastností

1. Určete všechny geometrické posloupnosti, u nichž součet prvního a čtvrtého členu je 18, součet druhého a třetího členu je 12.

Řešení

Pro hledané geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ platí $a_1 + a_4 = 18$, $a_2 + a_3 = 12$, přičemž $a_2 = a_1q$, $a_3 = a_1q^2$, $a_4 = a_1q^3$, kde q je kvocient geometrické posloupnosti. Po dosazení dostáváme soustavu dvou rovnic pro neznámé a_1, q:

$$a_1 + a_1q^3 = 18 \quad \text{čili} \quad a_1(1+q)(1-q+q^2) = 18, \qquad (1)$$
$$a_1q + a_1q^2 = 12 \quad \text{čili} \quad a_1q(1+q) = 12. \qquad (2)$$

Dělením rovnice (1) rovnicí (2), eliminujeme neznámou a_1 a získáváme pro neznámou q rovnici

$$\frac{1-q+q^2}{q} = \frac{3}{2},$$

jež po úpravě vede na kvadratickou rovnici

$$2q^2 - 5q + 2 = 0,$$

která má dva reálné různé kořeny $q = 2$ a $q = \frac{1}{2}$. Po dosazení do rovnice (1) pak dostáváme, že pro $q = 2$ je $a_1 = 2$ a pro $q = \frac{1}{2}$ je $a_1 = 16$.

Výsledek: Daným podmínkám vyhovují právě dvě geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, jejichž kvocienty a první členy jsou

a) $q = 2$, $a_1 = 2$, tj. $(a_n)_{n=1}^{\infty} = (2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots)$,

b) $q = \frac{1}{2}$, $a_1 = 16$, tj. $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \left(16, 8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \dots\right)$.

2. Určete všechny geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, pro které platí

$$a_1 = 2, \quad a_p = 13\,122, \quad s_p = 19\,682, \quad p \in \mathbb{N}.$$

Řešení

Dosadíme-li do vzorců pro a_p a s_p, dostáváme

$$13\,122 = 2q^{p-1} \quad \text{čili} \quad 6\,561 = q^{p-1},$$
$$19\,682 = 2 \cdot \frac{q^p - 1}{q - 1} \quad \text{čili} \quad 9\,841 = \frac{q^p - 1}{q - 1},$$

odkud vyplývá

$$6\,561q = q^p, \qquad (1)$$
$$9\,841(q-1) = q^p - 1. \qquad (2)$$

Dosadíme-li z rovnice (1) do (2), dostáváme

$$9\,841q - 9\,841 = 6\,561q - 1 \text{ čili } 3\,280q = 9\,840, \text{ takže } q = 3.$$

Z (1) pak plyne

$$3^{p-1} = 6\,561 \text{ čili } 3^{p-1} = 3^8,$$

odkud

$$p - 1 = 8, \quad p = 9.$$

Výsledek: Daným podmínkám vyhovuje právě jedna geometrická posloupnost s prvním členem $a_1 = 2$ a kvocientem $q = 3$, tj. posloupnost (2, 6, 18, 54, 162, 486, 1 458, 4 374, 13 122, ...).

Příklady praktického užití aritmetických a geometrických posloupností

1. Spodní vrstva narovnaných 12 vrstev trub obsahuje 120 kusů. Kolik trub je celkem na hromadě, obsahuje-li každá vrstva o 1 kus méně než vrstva pod ní ležící?

Řešení

Počty trub ve vrstvách tvoří konečnou aritmetickou posloupnost. Je dáno $a_1 = 120$, $d = -1$, $n = 12$; máme určit s_{12}. Užitím vzorců pro a_n a s_n dostáváme:

$$a_{12} = a_1 + 11d = 120 - 11 = 109$$
$$s_{12} = 6(a_1 + a_{12}) = 6(120 + 109) = 6 \cdot 229 = 1\,374$$

Odpověď: Na hromadě je celkem 1 374 trub.

2. Poločas přeměny (rozpadu jader) rádia C je přibližně 20 minut. Kolik rádia C zbude bez přeměny z 1 mg po n hodinách? (Poločas přeměny radioaktivní látky je doba, za kterou dojde k radioaktivní přeměně přibližně u poloviny jader atomů té látky.)

Řešení

Z 1 mg rádia C za 20 min zbude přibližně $\frac{1}{2}$ mg rádia C, za dalších 20 min zbude z něj $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ mg, tj. $\frac{1}{4}$ mg rádia C atd. Za 1 h = 3 · 20 min zůstane z něj tedy $\frac{1}{8}$ mg, tj. 0,125 mg rádia. Číselné hodnoty hmotnosti zbylého rádia C po jednotlivých hodinách radioaktivních přeměn tvoří proto geometrickou posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s prvním členem $a_1 = \frac{1}{8}$ a kvocientem $q = \frac{1}{8}$. Ze vzorce $a_n = a_1 q^{n-1}$ pak plyne

$$a_n = q^n = \frac{1}{8^n}.$$

Odpověď: Po n hodinách zůstane tedy z 1 mg přibližně $\frac{1}{8^n}$ mg rádia C.

3. Klient si počátkem roku uložil do peněžního ústavu (banky, spořitelny) částku a_0 Kč a ponechal ji nevybránu i s úroky po n let. Určete, na jakou částku vzrostl vklad na konci n-tého roku, jestliže na konci každého roku byl připisován úrok v hrubé výši p % (tzv. *složené úročení* se stálou *úrokovou mírou* p %), který byl snížen o daň z úroku ve výši 15 %. (Čistý úrok tedy je 0,85násobek úroku; $k = 0{,}85$ je tzv. *zdaňovací koeficient.*)

Řešení

Na konci 1. roku připíše peněžní ústav úrok p % z původně vložené částky a_0 snížený o 15 %, vklad vzroste na částku $a_1 = a_0 + 0{,}85 \cdot \frac{p}{100} a_0 = a_0\left(1 + 0{,}85\frac{p}{100}\right)$.

Na konci 2. roku připíše k částce a_1 úrok ve výši p % z a_1 snížený o 15 %, vklad vzroste na částku $a_2 = a_1\left(1 + 0{,}85\frac{p}{100}\right)$. Obdobně je tomu v dalších letech. Vklady po připsání úroků snížených o 15% daň v jednotlivých letech tvoří stejně geometrickou posloupnost s kvocientem $q = 1 + 0{,}85\frac{p}{100}$ a s prvním členem $a_1 = a_0 \cdot q$. Užitím vzorce $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ dospíváme k výsledné částce a_0 Kč po n letech: $a_n = a_0 \cdot q^n$.

Odpověď: Při p-procentním složeném úročení vzroste původně vložená částka a_0 Kč na částku a_n Kč, kterou vypočteme podle vzorce

$$a_n = a_0\left(1 + 0{,}85\frac{p}{100}\right)^n.$$

námka. Vzorec tohoto typu se užívá i pro řešení mnoha analogických úloh, např
vnoměrném procentuálním vzrůstu počtu obyvatel či vzrůstu objemu výroby v da
i časovém úseku n let apod.

kupní cena stroje je c_0 Kč. Při každoroční inventuře se odepisuje na opotř
ání p % ceny stroje z předchozího roku (tzv. *amortizace*). Jaká bude cena
oje po n letech?

šení

dobnou úvahou jako v předchozím příkladu dospíváme k tomu, že ceny stroje
konci jednotlivých let tvoří geometrickou posloupnost $(c_1, c_2, \ldots)$ s kvoc
em $q = 1 - \dfrac{p}{100}$ a s prvním členem $c_1 = c_0 \cdot q$, takže $c_n = c_0 \cdot q^n$.

pověď: Cena stroje po n letech v Kč bude $c_0\left(1 - \dfrac{p}{100}\right)^n$.

Limita posloupnosti

otivace pojmu limita posloupnosti

dujme, co se děje s členy posloupností, které jsou znázorněny graficky na
.1, 6.2, 6.3, jestliže n neomezeně roste:

ny posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$ se neomezeně blíží k číslu $a = 1$
r. 6.1),

ny posloupnosti $(b_n)_{n=1}^{\infty} = (-n^2)_{n=1}^{\infty}$ neomezeně klesají, blíží se k $-\infty$
r. 6.2), naproti tomu členy posloupnosti $(n^2)_{n=1}^{\infty}$ neomezeně rostou, blíží se
$+\infty$,

ny posloupnosti $(c_n)_{n=1}^{\infty} = \left((-1)^n \dfrac{n}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$ se neblíží ani k žádnému číslu
R, ani k $+\infty$ nebo $-\infty$ (obr. 6.3).

edené tři případy jsou typové, právě jeden z nich nastává pro každou po-
ost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$:

tliže s rostoucím n se členy posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ neomezeně blíží k určitému
lnému číslu a, říkáme o tom čísle, že je *limitou* (*vlastní limitou*) *posloupnosti*.

tliže s rostoucím n se členy posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ blíží k $+\infty$ nebo $-\infty$,
áme, že *posloupnost má nevlastní limitu* $+\infty$ nebo $-\infty$.

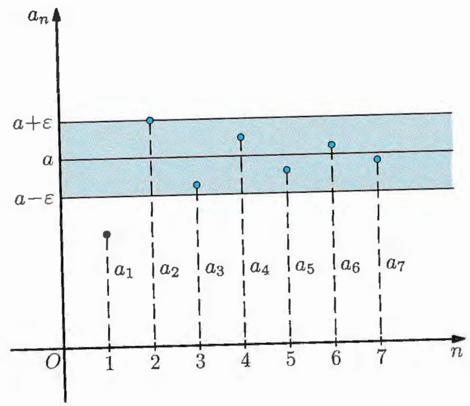
tliže s rostoucím n se členy posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ neblíží ani k žádnému číslu
R, ani k $+\infty$ nebo $-\infty$, pak říkáme, že *posloupnost nemá ani vlastní, ani*
lastní limitu neboli *je oscilující*.

nka. Název limita pochází z latinského „limes", což znamená doslovně „mez".
m textu se budeme převážně zabývat vlastní limitou posloupnosti a budeme stručně
o limitě posloupnosti. S uvedeným *intuitivním pojetím pojmu limita posloupnosti*
všem v matematice vystačit. Je nutné vyslovit její *definici*, ve které je přesně
no, co se rozumí tím, že se pro neomezeně rostoucí n „blíží" členy a_n k číslu

Definice vlastní (konečné) limity posloupnosti

Říkáme, že reálné číslo a je **limita posloupnosti** $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se členy $a_n \in$ R, právě když ke každému (jakkoli malému) číslu $\varepsilon > 0$ existuje takové přirozené číslo n_0, že pro všechna $n \geqq n_0$ je $a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ čili platí nerovnost $|a_n - a| < \varepsilon$.

Geometrický výklad definice limity posloupnosti (obr. 6.4): Má-li posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ limitu $a \in$ R, pak ke každému (libovolně malému) číslu $\varepsilon > 0$ existuje takové číslo $n_0 \in$ R, že pro všechna $n \geqq n_0$ obrazy členů a_n v kartézském grafu posloupnosti leží uvnitř pásu, jehož hraniční přímky procházejí body $a - \varepsilon$, $a + \varepsilon$ na ose y a jsou k ní kolmé (v tzv. *ε-ovém pásu bodu a osy y*; v obr. 6.4 je vyznačen barevně).



Obr. 6.4

Skutečnost, že posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má limitu $a \in$ R, se vyjadřuje zápisem

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a,$$

který čteme: limita a_n pro n jdoucí k nekonečnu (rostoucí nade všechny meze) je rovna a.

Posloupnosti, které mají vlastní limitu ($a \in$ R), se nazývají **konvergentní posloupnosti**. Posloupnosti, jež nejsou konvergentní, se nazývají **divergentní posloupnosti** (*divergují k* $+\infty$ *nebo* $-\infty$, *anebo jsou oscilující*).

Příklad použití definice limity posloupnosti

Pomocí grafického znázornění odhadněte limitu posloupnosti $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1}$ a svou domněnku ověřte podle definice limity.

Řešení

Na základě grafického znázornění posloupnosti (obr. 6.1) dospíváme k názoru, že limita dané posloupnosti je rovna jedné. Tuto svoji domněnku ověříme přímým užitím definice limity posloupnosti. Podle ní je třeba dokázat: Ke každému (libovolně malému) $\varepsilon > 0$ existuje takové přirozené číslo n, že pro všechna $n \geqq n_0$ platí $\left|\dfrac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$ čili $\dfrac{1}{n+1} < \varepsilon$, a tedy $n > \dfrac{1}{\varepsilon} - 1$. Číslo n_0 požadovaných vlast-

...osti existuje; je to každé přirozené číslo, pro něž platí $n_0 \geq \frac{1}{\varepsilon} - 1$. Např. volíme-li $\varepsilon \in (0; 0{,}1)$, je minimálně požadované $n_0 = \frac{1}{\varepsilon - 1}$:

ε	0,1	0,04	0,01	0,001	0,000 3	0,000 1
$n_0 = \frac{1}{\varepsilon} - 1$	9	24	99	999	3 332	9 999

...ím je dokázáno, že skutečně $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$.

Tento způsob určování limit posloupnosti je však obecně obtížný, a proto se ...pravidla neužívá, ale pomocí definice limity se odvodí věty o limitách a z těch se ...ak vychází při praktickém výpočtu limit.

...ěty o vlastních limitách posloupností

...1. Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu. (Tedy buď vlastní limitu nemá, anebo má právě jednu.)

...2. Každá konvergentní posloupnost je omezená.

Obrácená věta k větě V.2 neplatí (např. posloupnost $((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$ není zřejmě ...nvergentní, přestože je omezená). Platí však následující *věta:*

...3. Je-li omezená posloupnost monotónní, pak je konvergentní.

Tato věta v sobě shrnuje dvojici *vět:*
Je-li posloupnost neklesající a shora omezená, pak je konvergentní.
Je-li posloupnost nerostoucí a zdola omezená, pak je konvergentní.

...4. Věta o limitě součtu, rozdílu, součinu a podílu posloupností
Nechť posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou konvergentní a c je libovolné reálné číslo. Pak jsou konvergentní i posloupnosti $(a_n + b_n)_{n=1}^{\infty}$, $(a_n - b_n)_{n=1}^{\infty}$, $(a_n \cdot b_n)_{n=1}^{\infty}$, $(c \cdot a_n)_{n=1}^{\infty}$, je-li $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, je konvergentní také posloupnost $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ a platí

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$,

c) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$,

d) $\lim\limits_{n\to\infty} c a_n = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n$,

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$.

Poznámka. Matematickou indukcí lze rozšířit platnost věty o limitě součtu a součinu na libovolný počet posloupností.

Speciálně pro aritmetické a geometrické posloupnosti platí tyto *věty:*

V.5. a) Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je aritmetická posloupnost, jejíž diference je $d = 0$, resp. geometrická posloupnost s kvocientem $q = 1$, a jejich první člen je $a_1 = a$. Pak tato posloupnost s konstantními členy a má limitu

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

b) Žádná aritmetická posloupnost s diferencí $d \neq 0$ nemá vlastní limitu.

c) Každá geometrická posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, kde $a_n = q^n$, popř. $a_n = a_1 q^{n-1}$, pro jejíž kvocient q platí $|q| < 1$, je konvergentní, má limitu rovnou nule. Tedy platí:

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0, \quad \lim_{n\to\infty} a_1 q^{n-1} = 0 \text{ pro } |q| < 1.$$

d) Žádná geometrická posloupnost, pro jejíž kvocient q platí $q = -1$ nebo $|q| > 1$, nemá vlastní limitu.

Pro praktický výpočet limit posloupností je často užitečná *věta:*

V.6. Posloupnosti $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$, $\left(-\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$, $\left((-1)^n \cdot \frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ mají limity $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{n}\right) = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \left[(-1)^n \cdot \frac{1}{n}\right] = 0$.

Důsledek: Pro každé $k \in \mathsf{N}$ posloupnosti $\left(\frac{1}{n^k}\right)_{n=1}^{\infty}$, $\left((-1)^n \cdot \frac{1}{n^k}\right)_{n=1}^{\infty}$ mají limity $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \left[(-1)^n \cdot \frac{1}{n^k}\right] = 0$.

Poznámka. Posloupnosti, jejichž limity jsou rovny nule, se nazývají **nulové posloupnosti.**

Příklady výpočtu limit posloupnosti užitím vět o limitách

1. Určete $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n+1}{6n+5}$.

Řešení
Zlomek $\frac{3n+1}{6n+5}$ upravíme tak, že čitatele a jmenovatele dělíme číslem n a pak užijeme pro výpočet vět o limitách posloupností V.4 a V.6:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{6n+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{1}{n}}{6+\frac{5}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{1}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(6+\frac{5}{n}\right)} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 3 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} 6 + 5 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}} = \frac{3+0}{6+0} = \frac{1}{2}$$

2. Určete $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^2-1}{n^2+5}$.

Řešení

Zlomek $\dfrac{4n^2+5}{n^2+5}$ upravíme tak, že čitatele a jmenovatele dělíme číslem n^2 a dále postupujeme obdobně jako v předcházejícím příkladu. Dostáváme:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-1}{n^2+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{4-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{5}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}4-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n^2}}=\frac{4-0}{1+0}=4$$

3. Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^2+3n+2}{2n^3+n-1}$.

Řešení

Čitatele a jmenovatele zlomku dělíme číslem n^3 (nejvyšší mocninou n), pak postupujeme jako v předchozích příkladech:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+3n+2}{2n^3+n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{2}{n^3}}{2+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}}=\frac{0+0+0}{2+0-0}=\frac{0}{2}=0$$

4. Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+1}{3n-5}\right)^3$.

Řešení

Užitím věty V.4 o limitě součinu posloupností a dále obdobným postupem jako v 1. příkladu dostáváme:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{3n-5}\right)^3=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n-5}\right)^3=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{3-\frac{5}{n}}\right)^3=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$$

5. Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5\cdot 2^n-3\cdot 5^n}{2\cdot 2^n+2\cdot 5^n}$.

Řešení

Posloupnosti $(2^n)_{n=1}^{\infty}$ a $(5^n)_{n=1}^{\infty}$ jsou podle věty V.5d divergentní, avšak posloupnost $\left(\left(\frac{2}{5}\right)^n\right)_{n=1}^{\infty}$ je podle věty V.5c konvergentní, má limitu $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n=0$. Proto vydělíme čitatele i jmenovatele daného zlomku 5^n (čili rozšíříme zlomek $\frac{1}{5^n}$) a vypočteme:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5\cdot 2^n-3\cdot 5^n}{2\cdot 2^n+2\cdot 5^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^n-3}{2\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^n+2}=\frac{0-3}{0+2}=-\frac{3}{2}$$

Některé další významné věty o vlastních limitách posloupností

Věta o limitě posloupnosti vybrané z konvergentní posloupnosti
Je-li posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergentní a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$, pak také každá posloupnost vybraná z posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní a má touž limitu a.

Příklad

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$, a tedy také $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2n}=0$ a $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2n-1}=0$.

Důsledky této věty (důležité pro vyšetřování divergence posloupnosti):

1. Každá posloupnost, z níž lze vybrat dvě konvergentní posloupnosti mající různé limity, je divergentní.
2. Každá posloupnost, z níž lze vybrat divergentní posloupnost, je též divergentní.

Při určování vlastních limit posloupností je často užitečná následující *věta*:

Věta o sevření pro vlastní limity posloupností
Jestliže posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou konvergentní, přičemž mají tutéž limitu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} b_n=a$, a jestliže pro posloupnost $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ platí nerovnosti $a_n\leqq c_n\leqq b_n$ pro všechna $n\in\mathsf{N}$, $n\geqq n_0$, pak tato („sevřená“) posloupnost je také konvergentní a má touž limitu $\lim\limits_{n\to\infty} c_n=a$.

Jedním z *důsledků* této věty je *věta*:

Věta o limitě součinu nulové a omezené posloupnosti
Jestliže pro posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$ a posloupnost $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ je omezená, pak

$$\lim_{n\to\infty}(a_nb_n)=0.$$

S větou o sevření pro vlastní limity posloupností souvisí také následující *věta*:

Věta o racionálních aproximacích reálných čísel
Pro každé reálné číslo a existuje neklesající posloupnost racionálních čísel $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a nerostoucí posloupnost racionálních čísel $(a'_n)_{n=1}^{\infty}$ tak, že platí

$$a_n\leqq a\leqq a'_n \text{ pro všechna } n\in\mathsf{N} \text{ a } \lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} a'_n=a.$$

Poznámka. Prakticky je tato věta užívána pro iracionální čísla a. Přitom se často volí $a_n=a_{n,d}$, $a'_n=a_{n,h}$, kde $a_{n,d}$ jsou dolní desetinné aproximace a $a_{n,h}$ horní desetinné aproximace čísla řádu n (viz kap. 2.5). Racionální aproximace a_n, a'_n čísla a mohou však být obecně i jiného tvaru, viz následující příklady.

1. *Definice Ludolfova čísla* π

Již starověký řecký matematik a fyzik *Archimedes* ukázal, že podíl obvodu kruhu o a jeho průměru d je konstanta, jež byla později označena π a nazvána **Ludolfovým číslem**:

$$\pi = \frac{o}{d}.$$

K odhadu hodnoty této konstanty Archimedes odhadoval obvod kruhu pomocí obvodů vepsaných a opsaných pravidelných n-úhelníků pro různě velká n. (Dospěl tak k jednoduchému odhadu $\frac{223}{71} < \frac{o}{d} < \frac{22}{7}$ i k odhadům přesnějším.)

V současné matematické terminologii lze tyto úvahy formulovat takto: Uvažujme kružnici o jednotkovém poloměru, jež má délku 2π. Označme $(o_n)_{n=3}^{\infty}$ posloupnost obvodů pravidelných n-úhelníků vepsaných do dané kružnice a $(o'_n)_{n=3}^{\infty}$ posloupnost obvodů pravidelných n-úhelníků, které jsou této kružnici opsány. Obě posloupnosti jsou zřejmě monotónní (první je rostoucí, druhá klesající) a omezené, a tedy jsou konvergentní (viz větu V.3). Dále pro každé přirozené číslo $n \geqq 3$ je

$$o_n < 2\pi < o'_n,$$

takže

$$2\pi = \lim_{n\to\infty} o_n = \lim_{n\to\infty} o'_n \text{ čili } \pi = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} o_n = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} o'_n.$$

Odtud lze určit aproximace čísla π se zvoleným počtem platných desetinných míst. Např. s přesností na pět platných desetinných míst dostáváme

$$\pi \doteq 3{,}141\,59.$$

2. *Definice Eulerova čísla* e

Lze dokázat, že posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, kde $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, je rostoucí a omezená (zdola číslem 2, shora číslem 3), takže je konvergentní. Má tedy vlastní limitu, která se značí e a nazývá se **Eulerovo číslo**. *Definuje se* tedy

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Lze též dokázat, že posloupnost $(a'_n)_{n=1}^{\infty}$, kde $a'_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$, je klesající a omezená (zdola číslem 2, shora číslem 3), takže je konvergentní. Má tedy vlastní limitu a ta je také rovna Eulerovu číslu e, neboť

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \mathrm{e}\cdot 1 = \mathrm{e}.$$

Přitom platí, že pro každé $n \in \mathrm{N}$ je

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Odkud lze určit aproximace čísla e se zvoleným počtem platných desetinných míst. Např. s přesností na pět platných desetinných míst dostáváme

$$\mathrm{e} \doteq 2{,}718\,28.$$

Poznámka. Takto definované Eulerovo číslo e patří spolu s Ludolfovým číslem π k nejdůležitějším matematickým konstantám. Setkali jsme se s ním jako se základem přirozených logaritmů (kap. 4.3) a často se s ním pracuje v matematické analýze (kap. 8) i v přírodovědných a technických aplikacích matematiky. Obdobně jako číslo π je také číslo e *iracionální* (důkaz tohoto tvrzení však přesahuje možnosti středoškolské matematiky).

Definice nevlastních limit posloupnosti

Jak jsme již uvedli v úvodu této kapitoly, rozlišujeme dva případy **nevlastní limity posloupnosti**. Nyní uvedeme jejich *definice*:

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má **nevlastní limitu plus nekonečno**, právě když ke každému reálnému číslu h existuje takové číslo $n_0 \in \mathrm{N}$, že pro všechna přirozená čísla $n \geqq n_0$ platí $a_n > h$.

Zapisujeme

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty.$$

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má **nevlastní limitu minus nekonečno**, právě když ke každému reálnému číslu d existuje takové číslo $n_0 \in \mathrm{N}$, že pro všechna přirozená čísla $n \geqq n_0$ platí $a_n < d$.

Zapisujeme

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

Příklady nevlastních limit posloupností

Pro každé $q > 1$ je $\lim_{n\to\infty} q^n = +\infty$, $\lim_{n\to\infty}(-q^n) = -\infty$, zatímco $\lim_{n\to\infty}(-q)^n$ neexistuje; $\lim_{n\to\infty}(1+n) = +\infty$, $\lim_{n\to\infty}(1-n) = -\infty$, pro každé $k \in \mathrm{N}$: $\lim_{n\to\infty} n^k = +\infty$.

6.3 Nekonečná řada a její součet

Nechť je dána posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, pak výraz

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots,$$

zapisovaný často též ve tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

(čteme: suma a_n od n rovno jedné do nekonečna), se nazývá **nekonečná řada** (**číselná nekonečná řada**) a číslům $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ se říká **členy nekonečné řady**.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2n^2+1) = 3+9+\ldots+(2n^2+1)+\ldots,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}10^{-n} = 10^{-1}+10^{-2}+\ldots+10^{-n}+\ldots =$$
$$= \frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\ldots+\frac{1}{10^n}+\ldots$$

Součet nekonečné řady

Je třeba si uvědomit, že nekonečná řada reálných čísel nepředstavuje obvyklý jejich součet, neboť ten je definován pouze pro konečný počet sčítanců (kap. 4.1). Pojem součet nekonečné řady lze však *definovat* takto:

Pro danou nekonečnou řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ vytvoříme posloupnost $(s_n)_{n=1}^{\infty}$, jejímiž členy jsou

$$\begin{aligned}
s_1 &= a_1,\\
s_2 &= a_1 + a_2,\\
s_3 &= a_1 + a_2 + a_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Posloupnost $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá **posloupnost částečných součtů nekonečné řady** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Její n-tý člen s_n, zvaný **n-tý částečný součet nekonečné řady** se zapisuje často též ve tvaru $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ (čteme: suma a_k od k rovno jedné do n).

Existuje-li pro posloupnost $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ částečných součtů nekonečné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ limita

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s \in \mathsf{R},$$

pak tuto limitu nazýváme **součtem nekonečné řady** a říkáme, že **nekonečná řada je konvergentní**. Jestliže posloupnost $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ nemá limitu $s \in \mathsf{R}$, říkáme, že **nekonečná řada je divergentní.**

Skutečnost, že nekonečná řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní a má součet s, vyjadřujeme zápisem

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s.$$

Pro konvergentní řadu tedy označujeme symbolem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nejen nekonečnou řadu, ale též její součet.

Důležitá je následující *věta:*

Věta o nutné podmínce pro konvergenci nekonečné řady

Jestliže nekonečná řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, pak

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Poznámka. Tato podmínka je pouze nutnou, nikoli však postačující podmínkou pro konvergenci nekonečné řady.

Příklady vyšetření konvergence, resp. divergence nekonečné řady

Vyšetřete, zda konvergují, resp. divergují nekonečné řady

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n+1}$, c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$.

Řešení

a) Platí rovnost $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ a jejím užitím odvodíme, že je

$$s_n = \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = 1-\frac{1}{n+1}.$$

(Ověření rovnosti $s_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ můžete provést důkazem matematickou indukcí.) Odtud $s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 1$. Daná řada je tedy konvergentní a má součet

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Poznámka. Zobecněním uvedeného postupu lze dokázat, že platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+m)} = \frac{1}{m}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{m}\right) \text{ pro každé } m \in \mathsf{N}.$$

Využijeme přitom rovnosti $\frac{1}{n(n+m)} = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+m}\right)$.

b) Protože $\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1} = 2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 2\cdot 1 = 2 \neq 0$, není splněna nutná podmínka konvergence dané nekonečné řady, a tedy je tato řada divergentní.

c) Posloupnost částečných součtů $(s_n)_{n=1}^{\infty} = (1, 0, 1, 0, \ldots)$ nemá limitu, takže daná řada je divergentní.

Některé druhy nekonečných řad:

1. **aritmetické nekonečné řady** (přiřazené aritmetické posloupnosti), tj. nekonečné řady tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_1+(n-1)d) = a_1+(a_1+d)+\ldots+(a_1+(n-1)d)+\ldots,$$

a_1 je první člen, d **diference aritmetické řady**;

2. **geometrické nekonečné řady** (přiřazené geometrické posloupnosti), tj. nekonečné řady tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1q^{n-1} = a_1+a_1q+\ldots+a_1q^{n-1}+\ldots,$$

a_1 je první člen, q **kvocient geometrické řady**;

3. **harmonická nekonečná řada** (přiřazená posloupnosti převrácených hodnot přirozených čísel), tj. nekonečná řada

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

Věty o konvergenci, resp. divergenci uvedených druhů nekonečných řad

1. Každá aritmetická nekonečná řada je vždy divergentní, pokud není $a_1 = 0 \wedge d = 0$.
2. Geometrická nekonečná řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_1q^{n-1}$ je
   a) konvergentní, je-li $q\in(-1;1)$, tj. $|q|<1$; pro její součet platí
   $$s=\frac{a_1}{1-q},$$
   b) divergentní, je-li $|q|\geqq 1$.
3. Harmonická nekonečná řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ je divergentní.

Důkaz věty o konvergenci geometrické nekonečné řady

Dokažte větu o konvergenci geometrické nekonečné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_1q^{n-1}$ s kvocientem $q\in(-1;1)$.

Důkaz

Protože podle předpokladu je $q\neq 1$, platí pro n-tý částečný součet s_n dané geometrické řady vzorec (viz kap. 6.1 str. 294)

$$s_n = a_1\frac{q^n-1}{q-1} = \frac{a_1}{q-1}(q^n-1).$$

Vzhledem k tomu, že $|q|<1$, podle věty o konvergenci geometrické posloupnosti je $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$. Existuje tedy limita

$$s=\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\frac{a_1}{q-1}(q^n-1) = \frac{a_1}{q-1}\cdot(0-1) = \frac{a_1}{1-q}.$$

Tím je věta dokázána.

Příklady konvergentních geometrických nekonečných řad

1. Určete součet nekonečné řady $\sum_{n=1}^{\infty}(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^{n-1}$.

Řešení

Daná řada je geometrická: $a_1 = 2+\sqrt{3}$, $q = 2-\sqrt{3} \doteq 0{,}27$, tedy $q\in(0;1)$, a proto je konvergentní se součtem

$$s=\frac{a_1}{1-q} = \frac{2+\sqrt{3}}{1-(2-\sqrt{3})} = \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}\cdot\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = \frac{5+3\sqrt{3}}{2} \doteq 5{,}098.$$

2. Určete konvergentní geometrickou řadu, jejíž součet je $s = 2\frac{2}{3}$ a součet jejích prvních pěti členů je $s_5 = \frac{11}{4}$.

Řešení

Ze vzorce $s=\frac{a_1}{1-q}$ dostáváme $\frac{a_1}{q-1} = -\frac{8}{3}$, ze vzorce $s_5 = a_1\frac{q^5-1}{q-1}$ plyne: $q^5-1 = s_5 : \frac{a_1}{q-1}$ čili $q^5-1 = \frac{11}{4} : \left(-\frac{8}{3}\right)$, takže $q^5 = 1-\frac{33}{32} = -\frac{1}{32}$, a tedy $q = -\frac{1}{2}$ (neboť $\left(-\frac{1}{2}\right)^5 = -\frac{1}{32}$); $a_1 = \frac{8}{3}(1-q) = \frac{8}{3}\cdot\frac{3}{2} = 4$.

Výsledek: Hledaná geometrická řada je $\sum_{n=1}^{\infty} 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

3. Řešte v oboru R rovnici s neznámou x:

$$2^x+4^x+8^x+16^x+\ldots = 1.$$

Řešení

Rovnici upravíme na tvar

$$2^x+(2^x)^2+(2^x)^3+(2^x)^4+\ldots = 1.$$

Nekonečná geometrická řada na levé straně této rovnice má kvocient $q = 2^x$ ($2^x>0$ pro každé $x\in\mathrm{R}$). Aby byla konvergentní, musí být $2^x<1$ čili $2^x<2^0$, a tedy $x<0$. Její součet pak je

$$\frac{a_1}{1-q} = \frac{2^x}{1-2^x}.$$

Daná rovnice tím nabývá tvaru $\frac{2^x}{1-2^x} = 1$ čili po úpravě $2^{x+1} = 2^0$, odkud $x=-1$. (Nalezený kořen vyhovuje podmínce $x<0$.)

Reálné číslo jako součet konvergentní nekonečné řady

Z kap. 2.5 víme, že každé reálné číslo a lze vyjádřit ve tvaru desetinného rozvoje. Přitom nekonečný desetinný rozvoj zřejmě představuje konvergentní nekonečnou řadu.

Věta o vyjádření kladného reálného čísla jako součtu konvergentní nekonečné řady
Pro každé číslo $a > 0$ platí

$$a = a_0{,}a_1a_2 \dots a_n \dots = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n} + \dots,$$

tj. kladné číslo $a = a_0{,}a_1a_2 \dots a_n \dots$ je součtem konvergentní řady $a_0 + \dfrac{a_1}{10} + \dfrac{a_2}{10^2} + \dots + \dfrac{a_n}{10^n} + \dots$

Důkaz
n-tým částečným součtem této nekonečné řady je $s_n = a_0 + \dfrac{a_1}{10} + \dfrac{a_2}{10^2} + \dots + \dfrac{a_n}{10^n} = a_{n,d}$, tj. dolní desetinná aproximace řádu n čísla a. Posloupnost $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ je monotónní (neklesající), neboť pro každé $n \in \mathsf{N}$ platí $a_{n+1,d} \geqq a_{n,d}$ (viz kap. 2.5), a omezená, neboť zřejmě pro každé $n \in \mathsf{N}$ platí $a_0 \leqq a_{n,d} \leqq a_0 + 1$. Podle věty V.3, uvedené na str. 300, je proto posloupnost $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergentní, přičemž $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n,d} = a$.

Poznámka. Obdobně lze dokázat, že také $a = \lim\limits_{n\to\infty} s'_n$, kde $s'_n = a_{n,h}$ je horní desetinná aproximace řádu n čísla a.

Věta o vyjádření kladného reálného čísla jako součtu konvergentní nekonečné řady se užívá spolu s vzorcem pro součet konvergentní geometrické řady při *převodech racionálních čísel daných periodickými desetinnými rozvoji na tvar zlomku s celočíselným čitatelem i jmenovatelem.*

Příklady převodu racionálního čísla ve tvaru periodického desetinného rozvoje na tvar zlomku

1. Racionální číslo dané ryze periodickým desetinným rozvojem $0{,}\overline{72}$ vyjádřete ve tvaru zlomku, jehož čitatel a jmenovatel jsou nesoudělná přirozená čísla.

Řešení
Protože lze psát

$$0{,}\overline{72} = \frac{72}{10^2} + \frac{72}{10^4} + \dots + \frac{72}{10^{2n}} + \dots,$$

což představuje konvergentní nekonečnou geometrickou řadu s prvním členem $a_1 = \dfrac{72}{10^2}$ a s kvocientem $q = \dfrac{1}{10^2}$, je podle vzorce pro její součet

$$0{,}\overline{72} = \frac{a_1}{1-q} = \frac{72 \cdot 10^{-2}}{1 - 10^{-2}} = \frac{72}{10^2 - 1} = \frac{72}{99} = \frac{8}{11}.$$

2. Racionální číslo dané neryze periodickým desetinným rozvojem $0{,}3\overline{75}$ vyjádřete ve tvaru zlomku, jehož čitatel a jmenovatel jsou nesoudělná přirozená čísla.

Řešení
Analogicky jako v 1. příkladu dostáváme

$$0{,}3\overline{75} = \frac{3}{10} + \frac{75}{10^3} + \frac{75}{10^5} + \dots + \frac{75}{10^{2n+1}} + \dots = \frac{3}{10} + \frac{a_1}{1-q} =$$
$$= \frac{3}{10} + \frac{75 \cdot 10^{-3}}{1 - 10^{-2}} = \frac{3}{10} + \frac{75}{10^3 - 10} = \frac{3}{10} + \frac{75}{990} = \frac{3 \cdot 99 + 75}{990} =$$
$$= \frac{372}{990} = \frac{62}{165}.$$

3. Racionální čísla daná ryze, resp. neryze periodickým desetinným rozvojem:
a) $0{,}\overline{37}$, b) $0{,}\overline{625}$, c) $4{,}\overline{8}$,
d) $0{,}6\overline{25}$, e) $-0{,}62\overline{5}$, f) $-3{,}1\overline{7}$
vyjádřete ve tvaru zlomku, jehož čitatel a jmenovatel jsou nesoudělná celá čísla.

Řešení
Obdobnými postupy jako v předchozích příkladech dostáváme

a) $0{,}\overline{37} = \dfrac{37}{99}$, b) $0{,}\overline{625} = \dfrac{625}{999}$, c) $4{,}\overline{8} = 4\dfrac{8}{9} = \dfrac{44}{9}$,

d) $0{,}6\overline{25} = \dfrac{619}{990}$, e) $-0{,}62\overline{5} = -\dfrac{563}{900}$, f) $-3{,}1\overline{7} = -3\dfrac{8}{45} = -\dfrac{143}{45}$.

7 Kombinatorika, počet pravděpodobnosti, statistika

7.1 Základní kombinatorická pravidla

Kombinatorika je součástí **finitní matematiky**, která studuje konečné soubory (množiny a uspořádané k-tice, $k \in \mathsf{N}$).

Základními větami kombinatoriky jsou tzv. kombinatorické pravidlo součtu a kombinatorické pravidlo součinu.

První kombinatorické pravidlo (kombinatorické pravidlo součtu) je založeno na *větě o počtu prvků sjednocení k konečných disjunktních množin* (viz kap. 1.2):

Jsou-li $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \dots, \mathsf{A}_k$ konečné množiny, které mají po řadě $n_1, n_2, \dots, n_k$ prvků, a jsou-li každé dvě z těchto množin disjunktní (tj. $\mathsf{A}_i \cap \mathsf{A}_j = \emptyset$ pro každé $i \neq j$), pak jejich sjednocení $\mathsf{A}_1 \cup \mathsf{A}_2 \cup \dots \cup \mathsf{A}_k$ má $n_1 + n_2 + \dots + n_k$ prvků.
Kombinatorické pravidlo součtu (kombinatorické vyjádření předchozí věty): Počet všech možných způsobů výběru právě jednoho prvku ze sjednocení $\mathsf{A}_1 \cup \mathsf{A}_2 \cup \dots \cup \mathsf{A}_k$, po dvou disjunktních množin $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \dots, \mathsf{A}_k$ o $n_1, n_2, \dots, n_k$ prvcích je roven $n_1 + n_2 + \dots + n_k$.

Druhé kombinatorické pravidlo (kombinatorické pravidlo součinu) je založeno na *větě o počtu prvků kartézského součinu k konečných množin* (viz kap. 1.2):

Jsou-li $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \dots, \mathsf{A}_k$ konečné množiny, které mají po řadě $n_1, n_2, \dots, n_k$ prvků, pak jejich kartézský součin (tj. množina všech uspořádaných k-tic $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ takových, že $x_1 \in \mathsf{A}_1, x_2 \in \mathsf{A}_2, \dots, x_k \in \mathsf{A}_k$) má $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ prvků.
Kombinatorické pravidlo součinu (kombinatorické vyjádření předchozí věty): Počet všech možných způsobů výběru (vytvoření) uspořádané k-tice $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ prvků $x_1 \in \mathsf{A}_1, x_2 \in \mathsf{A}_2, \dots, x_k \in \mathsf{A}_k$ z množin $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \dots, \mathsf{A}_k$ o $n_1, n_2, \dots, n_k$ prvcích je roven $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$.

V tomto základním kombinatorickém pravidle součinu se předpokládá, že výběr prvků $x_1 \in \mathsf{A}_1, x_2 \in \mathsf{A}_2, \dots, x_k \in \mathsf{A}_k$ je na sobě nezávislý. Kombinatorické pravidlo součinu je však možné *zobecnit* i pro případy, kdy výběry následujících členů uspořádaných k-tic prvků $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ budou závislé na výběrech předchozích členů.

Kombinatorické pravidlo součinu (zobecněné): Jestliže z prvků dané množiny (resp. daných množin) vytváříme uspořádané k-tice prvků $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ tak, že první člen x_1 lze vybrat n_1 způsoby, druhý člen x_2 lze vybrat po výběru prvního členu n_2 způsoby atd., až k-tý člen x_k lze vybrat po výběru všech předcházejících členů n_k způsoby, pak počet všech možných uspořádaných k-tic $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ je roven $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$.

Příklady užití kombinatorických pravidel součtu a součinu

1. Čtverec o straně 4 cm je rozdělen rovnoběžkami s jeho stranami na 16 jednotkových čtverců (obr. 7.1). Určete, kolik lze v něm nalézt všech možných čtverců.

Řešení
Všechny čtverce rozdělíme do čtyř množin $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \mathsf{A}_3, \mathsf{A}_4$ tak, že v množině A_i jsou všechny čtverce o straně délky i ($i = 1, 2, 3, 4$). Z obr. 7.1 je patrné, že počty čtverců v nich jsou $n_1 = |\mathsf{A}_1| = 16$, $n_2 = |\mathsf{A}_2| = 9$, $n_3 = |\mathsf{A}_3| = 4$, $n_4 = |\mathsf{A}_4| = 1$. Podle kombinatorického pravidla součtu je proto celkový počet čtverců roven $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 16 + 9 + 4 + 1 = 30$.

2. Určete počet všech možných tanečních párů z 15 chlapců a 10 děvčat.

Řešení
Každý z možných tanečních párů lze z kombinatorického hlediska reprezentovat uspořádanou dvojicí (x_1, x_2), kde x_1 je kterýkoliv z uvažovaných 15 chlapců a x_2 je kterákoliv z uvažovaných 10 dívek. Podle kombinatorického pravidla součinu je proto celkový počet možných tanečních párů roven $15 \cdot 10 = 150$.

Jiný způsob řešení této úlohy viz v 2. příkladu kapitoly 7.3 na str. 321.

3. Určete, kolik dvojjazyčných slovníků je potřebných k tomu, aby byla zajištěna možnost přímého překladu z anglického, francouzského, německého a ruského jazyka do každého z nich.

Řešení
Každý dvojjazyčný slovník lze z kombinatorického hlediska reprezentovat uspořádanou dvojicí (x_1, x_2), jejímž prvním členem x_1 je jazyk, z něhož se překládá, a druhým členem x_2 je jazyk, do něhož se překládá. Pro výběr 1. členu x_1 máme 4 možnosti a pro výběr 2. členu x_2 máme (po výběru 1. členu) již jen 3 možnosti. Proto podle zobecněného kombinatorického pravidla součinu je celkový počet potřebných dvojjazyčných slovníků $4 \cdot 3 = 12$.

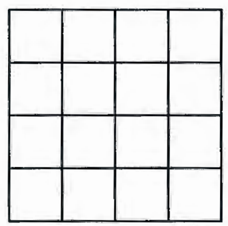
4. Na vrchol hory vedou čtyři turistické cesty a lanovka (obr. 7.2). Určete počet všech způsobů, kterými je možné se dostat

a) na vrchol a zpět,

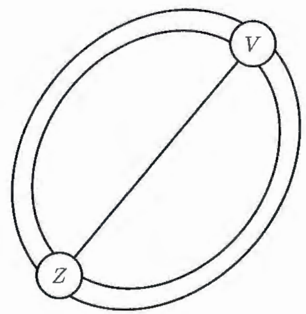
b) na vrchol a zpět tak, aby zpáteční cesta byla jiná než cesta na vrchol,

c) na vrchol a zpět tak, aby alespoň jednou byla použita lanovka,

d) na vrchol a zpět tak, aby lanovka byla použita právě jednou.



Obr. 7.1



Obr. 7.2

Řešení
Z kombinatorického hlediska představují jednotlivé způsoby, jak se dostat na vrchol hory a zpět, uspořádané dvojice (x_1, x_2), kde x_1 je realizovaná cesta na vrchol a x_2 cesta zpět. Jejich hledané počty jsou

a) $5 \cdot 5 = 25$ (podle kombinatorického pravidla součinu),

b) $5 \cdot 4 = 20$ (podle zobecněného kombinatorického pravidla součinu),

c) $1 + 2 \cdot 4 = 9$ (podle kombinatorického pravidla součtu aplikovaného na množinu uspořádaných dvojic (x_1, x_2) takových, že alespoň jeden z členů x_1, x_2 je lanovka),

d) $2 \cdot 4 = 8$ (podle kombinatorického pravidla součtu aplikovaného na množinu uspořádaných dvojic (x_1, x_2) takových, že právě jeden z členů x_1, x_2 je lanovka).

Poznámka. Konečné množiny a uspořádané k-tice prvků vyšetřované v kombinatorice se v ní nazývají **skupiny** prvků. Přitom se rozlišují **skupiny bez opakování** a **skupiny s opakováním** prvků. Jejich významné typy uvedeme v následujících odstavcích.

7.2 Variace, permutace

Symbol n faktoriál

Ke stručnému označení součinu všech přirozených čísel od 1 do n ($n \in \mathsf{N}$) se zavádí symbol $n!$, který se čte n **faktoriál**. *Definuje* se tedy:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \text{ pro každé } n \in \mathsf{N}.$$

Dále je účelné *dodefinovat* též

$$0! = 1.$$

Příklady počítání s faktoriály
Zjednodušte na tvar bez zlomků

a) $\dfrac{(n+2)!}{n!}$, b) $\dfrac{(n+4)!}{(n+2)!} - \dfrac{(n+2)!}{(n+1)!} - \dfrac{(n-1)!}{(n-3)!}$, $n \in \mathsf{N}$.

Řešení

a) $\dfrac{(n+2)!}{n!} = \dfrac{n!(n+1)(n+2)}{n!} = n^2 + 3n + 2$

b) $\dfrac{(n+4)(n+3)(n+2)!}{(n+2)!} - \dfrac{(n+2)(n+1)!}{(n+1)!} - \dfrac{(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!} =$
$= (n+4)(n+3) - (n+2) - (n-1)(n-2) = n^2 + 7n + 12 - n - 2 - n^2 +$
$+ 3n - 2 = 9n + 8$

k-členná variace z n prvků(k, $n \in \mathsf{N}$, $k \leqq n$) je každá uspořádaná k-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý prvek se v ní vyskytuje nejvýše jednou (tj. žádný prvek se v ní neopakuje).

Permutace z n prvků (nebo **permutace n prvků**) je každá n-členná variace z daných n prvků neboli každá uspořádaná n-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý prvek se v ní vyskytuje právě jednou.

Počet všech k-členných variací z n prvků se značí $V(k, n)$, počet všech permutací z n prvků se značí $P(n)$ [resp. $V(n, n)$]. Lze je určit podle vzorců z následujících vět:

Věty o počtu variací a permutací
Pro počet $V(k, n)$ všech k-členných variací z n prvků (k, $n \in \mathsf{N}$, $k \leqq n$) platí vzorec

$$V(k, n) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$$

neboli

$$V(k, n) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Pro počet $P(n)$ všech permutací (pořadí) n prvků platí vzorec:

$$P(n) = n!$$

Příklady variací a permutací, určení jejich počtu
Všechny 2členné variace ze tří prvků a, b, c jsou uspořádané dvojice prvků

$$(a, b), (a, c), (b, a), (b, c), (c, a), (c, b).$$

Jejich počet podle vzorce pro $V(k, n)$ je $V(2, 3) = 3 \cdot 2 = 6$.

Všechny permutace tří prvků a, b, c jsou uspořádané trojice prvků

$$(a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a).$$

Jejich počet podle vzorce pro $P(n)$ je

$$P(3) = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6.$$

Příklady užití variací a permutací

1. Kolika způsoby může 36 členů organizace zvolit ze svého středu předsedu, místopředsedu, kulturního referenta a sportovního referenta? (Přepokládá se, že každý člen může mít jen jednu z uvedených funkcí.)

   Řešení
   Z 36 prvků lze vybrat 4 prvky, přičemž záleží na pořadí (první zvolený bude předsedou, druhý místopředsedou atd.), tolika způsoby, kolik je 4členných variací z 36 prvků:

$$V(4, 36) = 36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33 = 1\,413\,720 \text{ způsoby.}$$

2. Kolik různých přirozených čísel je možno utvořit z číslic 0, 1, 2, 3, 4, smí-li každá tato číslice být v čísle obsažena nejvýš jednou?

Řešení

Z daných 5 číslic lze takto vytvořit čísla jednociferná až pěticiferná. Protože záleží na pořadí číslic v čísle, půjde tu o variace, spec. (při číslech pěticiferných) o permutace. Jednociferná čísla jsou čtyři (totiž 1, 2, 3, 4). Dvojciferných čísel z 5 číslic je $V(2, 5) = 5 \cdot 4 = 20$, z nich však čísla 01, 02, 03, 04 jsou vlastně jednociferná, takže skutečně dvojciferných čísel je jen 16. Trojciferných čísel je $V(3, 5) = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$, z nichž však čísla 012, 013, ..., 043 jsou čísla dvojciferná; je jich $V(2, 4) = 4 \cdot 3 = 12$, takže skutečně trojciferných čísel je $60 - 12 = 48$. Podobně čísel čtyřciferných je $V(4, 5) - V(3, 4) = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120 - 24 = 96$ a čísel pěticiferných je $P(5) - P(4) = 5! - 4! = 120 - 24 = 96$. Z daných číslic lze tedy utvořit $4 + 16 + 48 + 96 + 96 = 260$ žádaných čísel.

3. V urně je šest lístků téhož tvaru očíslovaných 1, 2, ..., 6. Kolika různými způsoby je lze postupně vytáhnout, jestliže se tažený lístek do urny nevrací a přihlíží se k pořadí, v jakém byly lístky taženy?

Řešení

V jednotlivých tazích dostaneme permutace šesti tažených lístků, počet všech těchto permutací je $P(6) = 6! = 720$.

4. Určete součet všech čtyřciferných čísel sestavených z číslic 1, 3, 5 a 7 (bez opakování číslic).

Řešení

Všechna taková čísla jsou permutace daných 4 číslic; je jich $P(4) = 4! = 24$. Na místě jednotek se každá číslice opakuje tolikrát, kolik je permutací zbývajících tří číslic, tj. $P(3) = 3! = 6$krát. Proto součet na místě jednotek bude $6(1 + 3 + 5 + 7) = 96$. Stejně tomu bude na ostatních místech, takže součet všech takto utvořených čísel bude

$$(1\,000 + 100 + 10 + 1) \cdot 96 = 106\,656.$$

Variace a permutace s opakováním

k-členná variace s opakováním z n prvků ($k, n \in \mathrm{N}$) je každá uspořádaná k-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý prvek se v ní vyskytuje nejvýše k-krát (tj. prvky se v ní mohou opakovat až k-krát).

Poznámka. Uvědomme si, že zatímco k-členné variace (bez opakování) z n prvků existují jen pro $k \leqq n$, k-členné variace s opakováním z n prvků existují také pro $k > n$.

Počet všech k-člených variací s opakováním z n prvků se značí $V'(k, n)$ a lze ho vyjádřit vzorcem uvedeným v následující *větě*:

Věta o počtu variací s opakováním

Pro počet $V'(k, n)$ všech k-členných variací s opakováním z n prvků ($k, n \in \mathrm{N}$) platí vzorec:

$$V'(k, n) = n^k$$

Příklady variací s opakováním a určení jejich počtu

1. Všechny 2členné variace s opakováním ze tří prvků a, b, c jsou uspořádané dvojice prvků

$$(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c).$$

Jejich počet je $V'(2, 3) = 3^2 = 9$.

2. Všechny 3členné variace s opakováním ze 2 prvků a, b jsou

$$(a, a, a), (a, a, b), (a, b, a), (a, b, b), (b, a, a), (b, a, b), (b, b, a), (b, b, b).$$

Jejich počet je $V'(3, 2) = 2^3 = 8$.

k-členná permutace (nebo **permutace k prvků**) **s opakováním z n prvků** ($k, n \in \mathrm{N}$, $k \geqq n$) je každá uspořádaná k-tice sestavená z těchto n prvků tak, že se v ní každý prvek vyskytuje alespoň jednou. Speciálně pro $k = n$ jde o permutace bez opakování a pro $k > n$ se některé prvky opakují.

Počet všech k-členných permutací s opakováním z n prvků se značí $P'(k_1, k_2, \ldots, k_n)$, kde $k_1, k_2, \ldots, k_n$ označují počty opakování 1., 2., ..., k-tého prvku a je dán vzorcem uvedeným v následující *větě*:

Věta o počtu permutací s opakováním

Pro počet $P'(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ všech permutací k prvků s opakováním z n daných prvků ($k > n$), přičemž 1. prvek se opakuje k_1-krát, 2. prvek k_2-krát, ..., n-tý prvek k_n-krát ($k_1 + k_2 + \ldots + k_n = k$), platí vzorec:

$$P'(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \frac{k!}{k_1!k_2! \ldots k_n!}$$

Příklad permutací s opakováním a určení jejich počtu

Všechny permutace čtyř prvků a, a, b, c ze tří daných prvků a, b, c ($k_1 = 2$, $k_2 = 1$, $k_3 = 1$, $k = 4$, $n = 3$) jsou uspořádané čtveřice prvků

$$(a, a, b, c), (a, a, c, b), (a, b, a, c), (a, b, c, a), (a, c, a, b), (a, c, b, a),$$

$$(b, a, a, c), (b, a, c, a), (b, c, a, a), (c, a, a, b), (c, a, b, a), (c, b, a, a).$$

Jejich počet je $P'(2, 1, 1) = \dfrac{4!}{2!1!1!} = \dfrac{24}{2} = 12$.

Příklady užití variací a permutací s opakováním

1. Kolik různých hodů lze provést a) dvěma, b) třemi kostkami, je-li na každé ze šesti stěn 1 až 6 teček?

Řešení

a) Jde o 2členné variace s opakováním ze šesti prvků, jejichž počet je $V'(2, 6) = 6^2 = 36$.

b) Obdobně dostáváme $V'(3, 6) = 6^3 = 216$.

2. Kolik je všech možných trojciferných přirozených čísel?

Řešení

Trojciferná čísla jsou 3členné variace s opakováním (v čísle se číslice mohou opakovat) z 10 prvků (z číslic 0, 1, 2, . . . , 9), jichž je $V'(3, 10) = 10^3 = 1\,000$; z nich však čísla začínající nulou nejsou trojciferná, je jich $V'(2, 10) = 10^2 = 100$. Čísel trojciferných tedy je $V'(3, 10) - V'(2, 10) = 900$; jsou to čísla od 100 do 999.

3. Kolik permutací s opakováním lze vytvořit z písmen slova PRAHA?

Řešení

Všech písmen je pět, A se opakuje dvakrát, počet všech permutací s opakováním je tedy

$$P'(2, 1, 1, 1) = \frac{5!}{2!} = \frac{120}{2} = 60.$$

7.3 Kombinace, binomická věta

Kombinace

k-členná kombinace z n prvků ($k, n \in \mathrm{N}_0$, $k \leqq n$) je každá neuspořádaná k-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý prvek se v ní vyskytuje nejvýše jednou (tj. žádný prvek se v ní neopakuje), neboli každá k-prvková podmnožina množiny těchto n prvků. Speciálně 0-členná kombinace z n prvků je její prázdná podmnožina.

Počet všech k-členných kombinací z n prvků se značí $K(k, n)$ a lze jej určit podle vzorců uvedených v následujících *větách:*

Věty o počtu kombinací

Počet $K(k, n)$ všech k-členných kombinací z n prvků ($k, n \in \mathrm{N}$, $k \leqq n$) je dán vzorcem:

$$K(k, n) = \frac{V(k, n)}{k!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k}$$

Počet $K(0, n)$ všech 0-členných kombinací z n prvků ($n \in \mathrm{N}_0$) je roven jedné (neboť každá n-prvková množina má právě jednu prázdnou podmnožinu):

$$K(0, n) = 1$$

Oba tyto vzorce lze vyjádřit souhrnně (pro $k, n \in \mathrm{N}_0$, $k \leqq n$) ve tvaru:

$$K(k, n) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Příklad kombinací a určení jejich počtu

Všechny 2členné kombinace tří prvků a, b, c jsou neuspořádané dvojice (tj. 2prvkové množiny)

$$\{a, b\},\ \{a, c\},\ \{b, c\}.$$

Jejich počet je $K(2, 3) = \dfrac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} = 3.$

K označení zlomku $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ ve vzorci pro $K(k, n)$ se používá symbol $\dbinom{n}{k}$, který se čte: „n nad k“ a nazývá se **kombinační číslo**. *Definuje* se tedy: Pro každé $n, k \in \mathrm{N}_0$, $k \leqq n$, je

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Základní vlastnosti kombinačních čísel vyjadřují vzorce uvedené v následujících *větách:*

Věty o základních vlastnostech kombinačních čísel

Pro každé $n \in \mathrm{N}$ platí

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{1} = n, \quad \binom{0}{0} = 1. \tag{1}$$

Pro každé $n, k \in \mathrm{N}_0$, $k \leqq n$, platí

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}. \tag{2}$$

Pro každé $n, k \in \mathrm{N}_0$, $k < n$, platí

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}. \tag{3}$$

Uvedených vlastností kombinačních čísel lze užít k zjednodušení jejich postupného výpočtu pomocí trojúhelníkového schématu zvaného **Pascalův trojúhelník** [čti: paskalův trojúhelník]. V jeho řádcích jsou postupně kombinační čísla $\dbinom{n}{0}, \dbinom{n}{1}, \dbinom{n}{2}, \ldots, \dbinom{n}{n}$ pro $n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$

Pascalův trojúhelník

$$\begin{array}{r|ccccccccccccccc}
\text{Pro } n = 0 & & & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & & & \\
n = 1 & & & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & & \\
n = 2 & & & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & & \\
n = 3 & & & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & & \\
n = 4 & & & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & & \\
n = 5 & & & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} & & \\
n = 6 & & \binom{6}{0} & & \binom{6}{1} & & \binom{6}{2} & & \binom{6}{3} & & \binom{6}{4} & & \binom{6}{5} & & \binom{6}{6} & \\
n = 7 & \binom{7}{0} & & \binom{7}{1} & & \binom{7}{2} & & \binom{7}{3} & & \binom{7}{4} & & \binom{7}{5} & & \binom{7}{6} & & \binom{7}{7} \\
\cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

neboli po dosazení hodnot kombinačních čísel

$$
\begin{array}{r|ccccccccccccccc}
\text{Pro } n = 0 & & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
n = 1 & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
n = 2 & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
n = 3 & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
n = 4 & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
n = 5 & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
n = 6 & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
n = 7 & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 \\
\dots\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}
$$

Z vlastností kombinačních čísel vyplývá, že každý řádek Pascalova trojúhelníku začíná a končí číslem 1. V každém jeho řádku čísla stejně vzdálená od začátku a konce jsou si rovna (na základě vzorce (2)), libovolné číslo uvnitř Pascalova trojúhelníku lze dostat sečtením dvojice čísel ležících bezprostředně nad ním (na základě vzorce (3)).

Dále platí, že součet kombinačních čísel v n-tém řádku Pascalova trojúhelníku je

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

(Důkaz této rovnosti je možné provést jednoduchou kombinatorickou úvahou. Na levé straně dokazované rovnosti je součet počtů všech prázdných, jednoprvkových, dvouprvkových, . . . , $(n-1)$prvkových a n-prvkových podmnožin n-prvkové množiny, tedy počet všech podmnožin n-prvkové množiny. Metodou matematické indukce snadno dokážeme, že n-prvková množina má právě 2^n podmnožin. Dokazovaná rovnost plyne též bezprostředně z binomické věty uvedené na str. 124, dosadíme-li do binomického vzorce $a = b = 1$.)

Poznámka. Pascalův trojúhelník umožňuje výpočet kombinačních čísel pouhým užitím operace sčítání. Přitom lze užít jeho symetrie podle svislé osy.

Příklady užití kombinací

1. Ze šesti kandidátů je třeba vybrat do komise tři. Kolika způsoby je to možné?

Řešení

Ze šesti prvků dané množiny kandidátů máme vybrat tři prvky, přičemž nezáleží na pořadí, takže jde o 3členné kombinace ze 6 prvků. Jejich počet je

$$K(3, 6) = \binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20.$$

Odpověď: Kandidáty je možné vybrat 20 způsoby.

2. Určete užitím kombinací počet všech možných tanečních párů z 15 chlapců a 10 dívčat.

Řešení

Tuto úlohu jsme v kap. 7.1 řešili pomocí kombinatorického pravidla součinu. Můžeme ji však řešit takto: Všech možných dvojic z 25 lidí (tj. 2členných kombinací z 25 prvků) je $\binom{25}{2} = 300$. Z toho je však $\binom{15}{2}$ dvojic chlapeckých a $\binom{10}{2}$ dvojic dívčích. Tanečních párů je tedy celkem

$$\binom{25}{2} - \binom{15}{2} - \binom{10}{2} = 300 - 105 - 45 = 150.$$

3. Určete, kolika způsoby je možné z 18 mužů a 16 žen vybrat sedmičlennou skupinu, ve které jsou 4 muži a 3 ženy.

Řešení

Protože na pořadí ve skupinách vybraných mužů a žen nezáleží, jde tu o kombinace. 4 z 18 mužů lze vybrat $K(4, 18) = \binom{18}{4}$ způsoby, 3 ze 16 žen $K(3, 16) = \binom{16}{3}$ způsoby. Protože kterákoli skupina 4 vybraných mužů může být přidružena ke kterékoli skupině 3 vybraných žen, je výběr možný celkem $\binom{18}{4} \cdot \binom{16}{3} = \frac{18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{16 \cdot 15 \cdot 14}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 3\,060 \cdot 560 = 1\,713\,600$ způsoby.

4. V sérii 12 výrobků jsou právě 3 vadné. Kolika způsoby z nich lze vybrat a) 6 libovolných výrobků, b) 6 výrobků bezvadných, c) 6 výrobků, z nichž právě 1 je vadný, d) 6 výrobků, z nichž právě 2 jsou vadné, e) 6 výrobků, z nichž právě 3 jsou vadné?

Řešení

U vybíraných skupin 6 výrobků nezáleží na pořadí prvků ve skupině, takže představují kombinace.

a) Počet způsobů výběru kterýchkoli 6 výrobků ze všech 12 výrobků je

$$K(6, 12) = \binom{12}{6} = 924.$$

b) Počet způsobů výběru 6 výrobků z 9 bezvadných je

$$K(6, 9) = \binom{9}{6} = \binom{9}{3} = 84.$$

c) Počet způsobů výběru 1 vadného výrobku ze 3 vadných a 5 bezvadných z 9 bezvadných je roven

$$K(1, 3) \cdot K(5, 9) = \binom{3}{1} \cdot \binom{9}{5} = 3 \cdot 126 = 378.$$

d) Analogicky dostáváme:

$$K(2,3)\cdot K(4,9)=\binom{3}{2}\cdot\binom{9}{4}=3\cdot 126=378.$$

e) A obdobně:

$$K(3,3)\cdot K(3,9)=\binom{3}{3}\cdot\binom{9}{3}=84.$$

Kontrola: V souladu s kombinatorickým pravidlem součtu (**kap. 7.1**) je $84+378+378+84=924$.

5. Je dáno $n>2$ různých bodů. Určete, kolik různých přímek určují, jestliže a) žádné tři neleží v jedné přímce, b) právě tři leží v jedné přímce.

Řešení

Přímka je určena 2 různými body, takže v případě

a) jde o 2členné kombinace z n prvků (bodů), jejichž počet je $\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$,

b) hledaný počet je $\binom{n}{2}-\binom{3}{2}+1=\frac{n(n-1)}{2}-2.$

Příklady užití vlastností kombinačních čísel

1. Vypočtěte součty kombinačních čísel:

a) $s_a=\binom{18}{3}+\binom{18}{14}$, b) $s_b=\binom{15}{8}+\binom{15}{7}$,

c) $s_c=\binom{4}{4}+\binom{5}{4}+\binom{6}{4}+\binom{7}{4}+\binom{8}{4}+\binom{9}{4}$.

Řešení

Použijeme-li vzorce z vět o základních vlastnostech kombinačních čísel, dostáváme:

a) $s_a=\binom{18}{3}+\binom{18}{14}=\binom{18}{3}+\binom{18}{4}=\binom{19}{4}=\frac{19\cdot 18\cdot 17\cdot 16}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=19\cdot 17\cdot 12=3\,876$

b) $s_b=\binom{15}{8}+\binom{15}{7}=\binom{15}{7}+\binom{15}{8}=\binom{16}{8}=12\,870$

c) Protože $\binom{4}{4}=\binom{5}{5}=1$, je $\binom{4}{4}+\binom{5}{4}=\binom{5}{5}+\binom{5}{4}=\binom{6}{5}$, $\binom{6}{5}+\binom{6}{4}=\binom{7}{5}$, $\binom{7}{5}+\binom{7}{4}=\binom{8}{5}$, $\binom{8}{5}+\binom{8}{4}=\binom{9}{5}$, $\binom{9}{5}+\binom{9}{4}=\binom{10}{5}$, takže $s_c=\binom{10}{5}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=252.$

4. Řešte rovnici s neznámou $x\in\mathrm{N}$:

$$12\binom{x}{x-1}+\binom{x+4}{x+2}=162$$

Řešení

Upravíme-li obě kombinační čísla podle vzorce $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$, nabývá rovnice tvaru

$$12\binom{x}{1}+\binom{x+4}{2}=162 \text{ čili } 12x+\frac{1}{2}(x+4)(x+3)=162.$$

Vynásobíme-li tuto rovnici dvěma a anulujeme, dostáváme kvadratickou rovnici

$$x^2+31x-312=0.$$

Její kořen $x=8$ je přirozené číslo, které dané rovnici vyhovuje, neboť $L(8)=12\binom{8}{7}+\binom{12}{10}=12\cdot 8+\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 11=96+66=162$, $P(8)=162$, $L(8)=P(8)$; kořen $x=-39$ není přirozené číslo.

Výsledek: $\mathrm{K}=\{8\}$

Binomická věta

V kap. 3.1 jsme uvedli vzorce pro $(a+b)^2$, $(a+b)^3$, kde a, b jsou libovolná reálná, resp. komplexní čísla. Nyní pomocí kombinačních čísel vyjádříme v následující větě vzorec pro $(a+b)^n$, kde n je libovolné přirozené číslo.

Binomická věta

Pro každá dvě komplexní čísla a, b a pro každé přirozené číslo n platí

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\ldots+$$
$$+\binom{n}{k}a^{n-k}b^k+\ldots+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+\binom{n}{n}b^n$$

neboli

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k.$$

Všimněte si, že na pravé straně této tzv. **binomické formule** (**binomického vzorce**) rostou exponenty mocnin se základem b a klesají exponenty mocnin se základem a; přitom součet obou exponentů je v každém členu roven n. Celkem je v binomické formuli $n+1$ členů. Obecně člen stojící na $(k+1)$ním místě ($k=0, 1, 2, \ldots, n$) binomické formule má tvar $\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$.

Vyjádříme-li výraz $(a+b)^n$ pomocí binomické věty, říkáme též, že jsme utvořili **binomický rozvoj** výrazu $(a+b)^n$. Jednotliví sčítanci v něm se nazývají **členy binomického rozvoje**. Protože koeficienty binomického rozvoje výrazu $(a+b)^n$ jsou **kombinační čísla**, říkáme těmto číslům také **binomické koeficienty**. Tvoří n-tý řádek Pascalova trojúhelníku.

1. Užitím binomické věty určete a) $(a+b)^4$, b) $(a+b)^5$ pro libovolná čísla a, b ∈ (

Řešení
Podle binomické formule je

$$(a+b)^4 = a^4 + \binom{4}{1}a^3b + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}ab^3 + b^4 =$$
$$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,$$
$$(a+b)^5 = a^5 + \binom{5}{1}a^4b + \binom{5}{2}a^3b^2 + \binom{5}{3}a^2b^3 + \binom{5}{4}ab^4 + b^5 =$$
$$= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

2. Utvořte binomický rozvoj výrazu $\left(2x - \frac{y}{3}\right)^4$.

Řešení

$$\left(2x - \frac{y}{3}\right)^4 = \left[(2x) + \left(-\frac{y}{3}\right)\right]^4 =$$
$$= (2x)^4 + \binom{4}{1}(2x)^3\left(-\frac{y}{3}\right) + \binom{4}{2}(2x)^2\left(-\frac{y}{3}\right)^2 + \binom{4}{3}(2x)\left(-\frac{y}{3}\right)^3 + \left(-\frac{y}{3}\right)^4$$
$$= 16x^4 + 4\cdot 8x^3\cdot\left(-\frac{y}{3}\right) + 6\cdot 4x^2\cdot\frac{y^2}{9} + 4\cdot 2x\left(-\frac{y^3}{27}\right) + \frac{y^4}{81} =$$
$$= 16x^4 - \frac{32}{3}x^3y + \frac{8}{3}x^2y^2 - \frac{8}{27}xy^3 + \frac{y^4}{81}$$

3. Podle binomické věty vypočtěte mocninu komplexního čísla

$$\left(\sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{3}\right)^5.$$

Řešení
Užitím binomické formule pro $a = \sqrt{2}$, $b = \mathrm{i}\sqrt{3}$, $n = 5$ dostáváme

$$\binom{5}{0}\sqrt{2^5} + \binom{5}{1}\cdot\sqrt{2^4}\cdot\mathrm{i}\sqrt{3} + \binom{5}{2}\cdot\sqrt{2^3}\cdot\left(\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2 +$$
$$+ \binom{5}{3}\sqrt{2^2}\cdot\left(\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^3 + \binom{5}{4}\sqrt{2}\cdot\left(\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^4 + \binom{5}{5}\left(\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^5 =$$
$$= 1\cdot 4\sqrt{2} + 5\cdot 4\cdot \mathrm{i}\sqrt{3} - 10\cdot 2\sqrt{2}\cdot 3 - 10\cdot 2\cdot 3\mathrm{i}\sqrt{3} + 5\sqrt{2}\cdot 9 + 1\cdot 9\mathrm{i}\sqrt{3} =$$
$$= 4\sqrt{2} + 20\mathrm{i}\sqrt{3} - 60\sqrt{2} - 60\mathrm{i}\sqrt{3} + 45\sqrt{2} + 9\mathrm{i}\sqrt{3} = -11\sqrt{2} - 31\mathrm{i}\sqrt{3}.$$

4. Pomocí binomické formule vypočtěte mocninu $0{,}98^{10}$ s přesností na 5 desetinných míst.

Řešení

$$0{,}98^{10} = (1 - 0{,}02)^{10} = \left(1 - 2\cdot 10^{-2}\right)^{10} =$$
$$= 1^{10} - \binom{10}{1}\cdot 2\cdot 10^{-2} + \binom{10}{2}\cdot\left(2\cdot 10^{-2}\right)^2 - \binom{10}{3}\cdot\left(2\cdot 10^{-2}\right)^3 +$$
$$+ \binom{10}{4}\cdot\left(2\cdot 10^{-2}\right)^4 - \binom{10}{5}\cdot\left(2\cdot 10^{-2}\right)^5 + \ldots =$$
$$= 1 - 20\cdot 10^{-2} + 180\cdot 10^{-4} - 960\cdot 10^{-6} + 3\,360\cdot 10^{-8} - 8\,064\cdot 10^{-10} + \ldots =$$
$$= 1 - 0{,}20 + 0{,}018\,0 - 0{,}000\,960 + 0{,}000\,033\,60 - 0{,}000\,000\,806\,4 + \ldots \doteq$$
$$\doteq 1{,}018\,03 - 0{,}200\,96 = 0{,}817\,07.$$

Vynechané členy již nezasahují do 5. desetinného místa.

Kombinace s opakováním

k-členná kombinace s opakováním z n prvků ($k, n \in \mathbb{N}$) je každá neuspořádaná k-tice sestavená z těchto n prvků tak, že každý prvek se v ní vyskytuje nejvýše k-krát (tj. prvky se v ní mohou opakovat až k-krát).

Počet všech takových kombinací s opakováním se značí $K'(k, n)$ a lze ho vyjádřit vzorcem, který je uveden v následující větě:

Věta o počtu kombinací s opakováním
Pro počet $K'(k, n)$ všech k-členných kombinací s opakováním z n prvků ($k, n \in \mathbb{N}$) platí vzorec

$$K'(k, n) = \binom{n+k-1}{k}.$$

Příklad kombinací s opakováním a určení jejich počtu
Všechny 2členné kombinace s opakováním ze tří prvků a, b, c jsou neuspořádané dvojice

$$a, a;\quad a, b;\quad a, c;\quad b, b;\quad b, c;\quad c, c.$$

Jejich počet podle vzorce pro $K'(k, n)$ je $K'(2, 3) = \binom{4}{2} = \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2} = 6.$

Příklad užití kombinací s opakováním
V prodejně mají výběr 12 různých pohledů. Určete, kolika způsoby si lze z nich koupit a) 15 pohledů, b) 7 pohledů, c) 7 různých pohledů.
Řešení
V případech a), b) jde o kombinace s opakováním, zatímco v případě c) jde o kombinace bez opakování. S užitím vzorců pro $K'(k, n)$ a $K(k, n)$ dostáváme pro počty uvažovaných způsobů výběru pohledů:

a) $K'(15, 12) = \binom{26}{15} = 7\,726\,160,$

b) $K'(7, 12) = \binom{18}{7} = 31\,824,$

c) $K(7, 12) = \binom{12}{7} = 792.$

7.4 Počet pravděpodobnosti

Ve fyzice, v chemii i dalších přírodních vědách se provádějí **pokusy** (**experimenty**), které při splnění předepsaných podmínek vedou vždy k určitému stejnému výslednému jevu. Takovýmito *deterministickými pokusy* zjišťujeme, resp. ověřujeme objektivní *fyzikální a jiné přírodovědecké zákony.*

Náhodné pokusy

V běžném životě, v praxi a ve výzkumu se však též setkáváme s pokusy, při kterých realizace daných podmínek může vést k různým výsledkům vzhledem k působení ne zcela zjistitelných a předvídatelných činitelů (vlivů), jejichž souhrnu se říká **náhoda**.

Každá opakovatelná činnost prováděná za stejných nebo přibližně stejných podmínek, jejíž výsledek je nejistý a závisí na náhodě, se nazývá **náhodný pokus**.

Příklady náhodných pokusů

Náhodné hry (jako rozdávání karet, házení hracími kostkami, házení mincemi, roztočení kola rulety, tahání losů z osudí, tahy sportky), zkoušky životnosti výrobků, zkoušky účinnosti nových léků či výnosů nových odrůd zemědělských plodin, sledování pohlaví novorozenců apod.

I v náhodných pokusech se projevují jisté zákonitosti, jejichž matematickým modelováním a využitím se zabývá **počet pravděpodobnosti**.

Náhodné jevy

Předpokládá se, že u každého náhodného pokusu lze předem stanovit (vyjmenovat) všechny možné **výsledky náhodného pokusu**, které se *navzájem vylučují* (tj. nastal-li jeden z nich, nemůže nastat druhý), přičemž *jeden z nich nastane vždy* (tj. nemůže nastat žádný jiný výsledek než jeden z vyjmenovaných).

Množina takto stanovených výsledků se nazývá **množina všech možných výsledků náhodného pokusu**. Značí se písmenem Ω, její libovolný (proměnný) prvek je označován ω a její určité prvky se značí ω_i ($i = 1, 2, \ldots$). Ve školské matematice je množina Ω vždy konečná.

Poznámka. Při stanovení množiny Ω je často možná jistá libovůle. Záleží na tom, podle jakých hledisek chceme výsledky náhodného pokusu rozlišovat, popř. jak podrobně (jemně) je chceme rozlišovat.

Náhodnými jevy (stručněji jen **jevy**) nazýváme jakákoliv tvrzení o výsledcích náhodného procesu, u nichž lze po realizaci pokusu jednoznačně rozhodnout, zda takové tvrzení je, anebo není pravdivé. Je-li pravdivé, říkáme, že **jev nastává**, v opačném případě říkáme, že **jev nenastává**.

Pro moderní počet pravděpodobnosti je významné *množinové pojetí náhodných jevů:*

Náhodné jevy se vyjadřují jako podmnožiny množiny všech možných výsledků náhodného pokusu Ω. Značí se A, B, C ($A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$, $C \subset \Omega$) apod. Mezi náhodné jevy se zařazuje speciálně i **jistý jev** představovaný celou množinou Ω a **nemožný jev** reprezentovaný prázdnou množinou $\emptyset$. **Pro možný jev A platí** $A \subset \Omega$, $A \neq \emptyset$.

Příklady náhodných jevů

Pro náhodný pokus házení hrací kostkou je množina všech možných výsledků $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Celá množina Ω představuje jistý jev „padne právě jedno z čísel (bodů neboli ok stěn kostky) 1, 2, 3, 4, 5, 6". Nemožným jevem reprezentovaným prázdnou množinou $\emptyset$ je zde jev „padne číslo větší než 6 nebo menší než 1". Možným náhodným jevem je např. jev „padne sudé číslo", který reprezentuje množina výsledků $A = \{2, 4, 6\} \subset \Omega$.

Poznámky.

1. Jev představovaný jednoprvkovou množinou $\{\omega\}$ se nazývá **elementární jev**. Často se však nerozlišuje mezi označením elementárního jevu a výsledku, tj. místo $\{\omega\}$ se píše jen ω.
2. V kap. 7.3 jsme ukázali, že každá n-prvková množina má právě 2^n podmnožin. A proto v každém náhodném pokusu s právě n různými výsledky (elementárními jevy), může nastat právě 2^n různých jevů.

Vztahy a operace s náhodnými jevy

Pro náhodné jevy jako množiny lze uvažovat množinové vztahy a provádět množinové operace známé z kap. 1.2. Dají se charakterizovat takto:

Jev A je **podjevem (částí) jevu** B ($A \subset B$), jestliže jev B nastane vždy, když nastane jev A.

Jevy A, B jsou sobě **rovné jevy** ($A = B$), právě když $A \subset B$ a zároveň $B \subset A$.

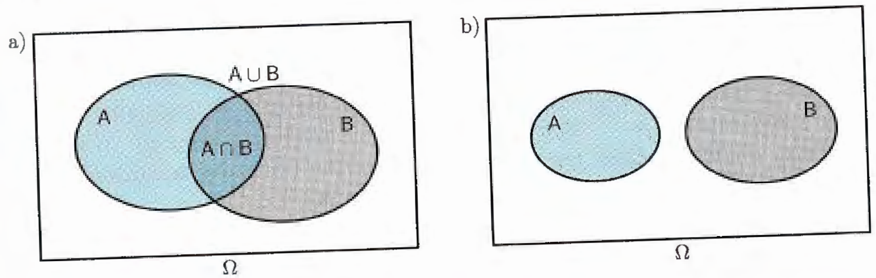
Příklady podjevu a sobě rovných jevů

Při hodu hrací kostkou elementární jev A: „padne číslo 6" je podjevem (částí) jevu B: „padne sudé číslo". Jevy A: „padne číslo 6" a B: „padne sudé číslo dělitelné třemi" jsou si rovny.

Sjednocení jevů A, B je jev $A \cup B$, který nastane právě tehdy, když nastane (při realizaci náhodného pokusu) jev A nebo jev B.

Průnik jevů A, B je jev $A \cap B$, který nastane právě tehdy, když nastane (při realizaci náhodného pokusu) jev A a zároveň jev B.

Ke grafickému znázorňování jevů se užívají množinové diagramy (kap. 1.2). Např. v obr. 7.3a jsou znázorněny Vennovy diagramy sjednocení a průniku jevů A, B.



Obr. 7.3

Opačný (doplňkový) jev k jevu A je takový jev A', který nastává právě tehdy, když jev A nenastává.

Příklady opačných jevů, sjednocení a průniku jevů

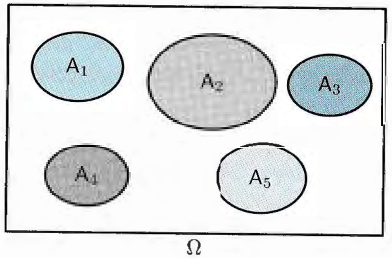
Při hodu hrací kostkou k jevům A: „padne číslo dělitelné třemi“, B: „padne liché číslo“ jsou opačné (doplňkové) jevy A′: „padne číslo, které není dělitelné třemi“, B′: „padne sudé číslo“; sjednocením a průnikem jevů A, B jsou jevy $A \cup B$: „padne právě některé z čísel 1, 3, 5, 6“, $A \cap B$: „padne číslo 3“.

Jevy A, B, pro které platí $A \cap B = \emptyset$ (tj. nemohou zároveň nastat), se nazývají **jevy disjunktní (navzájem neslučitelné)**. O jevech A, B se pak též říká, že se **navzájem vylučují** (obr. 7.3b).

Příklady disjunktních jevů

Při házení hrací kostkou jsou disjunktními jevy A: „padne sudé číslo“, B: „padne liché číslo“.

Jestliže pro jevy $A_1, A_2, \dots, A_m$ ($m \in \mathbb{N}$) platí, že pro každé dva různé jevy A_i, A_j ($i, j = 1, 2, \dots, m$) platí $A_i \cap A_j = \emptyset$, říkáme, že jsou **po dvou disjunktní (neslučitelné) jevy** nebo že se **párově vylučují** (obr. 7.4, kde $m = 5$).



Obr. 7.4

Pravděpodobnost jevu

Pravděpodobnost jevu je mírou očekávání toho, že daný náhodný jev nastane. Nejobecněji ji lze zavést soustavou *axiomů*, které vymezují její základní vlastnosti. V důležitých speciálních případech je však možné definovat ji jednodušeji, jak nyní ukážeme.

Nejprve se budeme zabývat takovými náhodnými pokusy, kde množina všech výsledků je konečná a všechny výsledky (elementární jevy) jsou **stejně možné**, tj. vzhledem k charakteru náhodného pokusu lze předpokládat, že není žádný důvod, aby některý výsledek (elementární jev) nastal spíše než jiný. Rozhodnutí o tom, zda výsledky (elementární jevy) jsou, či nejsou stejně možné, přesahuje ovšem rámec matematiky; může se učinit jen na základě samotné podstaty náhodného pokusu a ověřovat praxí (jeho mnohonásobným opakováním).

Např. při řádných hodech hrací kostkou, která je zhotovena z homogenního materiálu, má tvar krychle a těžiště totožné se středem souměrnosti, jsou stejně možné výsledky (elementární jevy) $\omega_i = i$: „padne číslo i“ ($i = 1, 2, \dots, 6$); obdobně při řádných tazích z urny (osudí), kde je n předmětů téhož tvaru, jež nejsou rozlišitelné hmatem, výsledky (elementární jevy) ω_i: „vytáhneme i-tý předmět“ ($i = 1, 2, \dots, n$) jsou stejně možné.

Platí-li pro určitý výsledek ω náhodného pokusu pro jev A, že $\omega \in A$, říkáme, že jde o **výsledek příznivý jevu** A (neboli **výsledek, při němž nastává jev** A). V opačném případě říkáme, že jde o **výsledek nepříznivý jevu** A.

Klasická (Laplaceova) definice pravděpodobnosti

Nechť náhodný pokus splňuje předpoklady:

a) všech možných výsledků je konečný počet,

b) všechny výsledky jsou stejně možné,

c) všechny výsledky se navzájem vylučují (tj. žádné dva nemohou nastat současně).

Pak **pravděpodobností jevu** A se nazývá číslo

$$P(A) = \frac{m(A)}{m},$$

kde m je počet všech možných výsledků náhodného pokusu a $m(A)$ je počet výsledků příznivých jevu A (tj. výsledků, při nichž nastává jev A); $m = |\Omega|$, $m(A) = |A|$.

Poznámka. Speciálně, je-li A *elementární jev* (reprezentovaný jediným výsledkem), pak $m(A) = |A| = 1$, takže

$$P(A) = \frac{1}{m}.$$

Např. při hodu mincí jsou elementární jevy A: „padne líc (L)“, B: „padne rub (R)“, takže $\Omega = \{L, R\}$, $m = |\Omega| = 2$, $|A| = |B| = 1$, a tedy $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$.

Příklady výpočtu pravděpodobnosti jevů náhodných pokusů, u nichž jsou splněny předpoklady užití klasické (Laplaceovy) definice pravděpodobnosti

1. Jaká je pravděpodobnost, že při hodu hrací kostkou, na jejíchž stěnách je 1 až 6 teček (ok), padnou tyto jejich počty: a) „padne číslo 5“ (jev A), b) „nepadne číslo 5“ (jev B), c) „padne číslo sudé“ (jev C), d) „padne číslo dělitelné třemi“ (jev D)?

   Řešení

   Možné výsledky hodů jsou $\omega_i = i$ („padne číslo i“, $i = 1, 2, \dots, 6$); $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$, $m = |\Omega| = 6$.

   a) Elementárnímu jevu A je příznivý jediný výsledek $\omega_5 = 5$, tj. $A = \{5\}$, $m(A) = |A| = 1$, a tedy

   $$P(A) = \frac{m(A)}{m} = \frac{1}{6} \doteq 0{,}167.$$

   b) Jevu B jsou příznivé všechny výsledky kromě ω_5, tj. $B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$, $m(B) = |B| = 5$, a tedy

   $$P(B) = \frac{m(B)}{m} = \frac{5}{6} \doteq 0{,}833.$$

c) Jevu C jsou příznivé právě tři výsledky $\omega_2, \omega_4, \omega_6$, tj. $C = \{2, 4, 6\}$, $m(C) = |C| = 3$, a tedy

$$P(C) = \frac{m(C)}{m} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5.$$

d) Jevu D jsou příznivé výsledky $\omega_3 = 3$, $\omega_6 = 6$, tj. $D = \{3, 6\}$, $m(D) = |D| = 2$, a tedy

$$P(D) = \frac{m(D)}{m} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \doteq 0{,}333.$$

2. Zvolíme náhodně dvojciferné přirozené číslo. Jaká je pravděpodobnost, že

a) zvolené číslo má ciferný součet větší než 15 (jev A),

b) zvolené číslo je dělitelné třinácti (jev B)?

Řešení

Výsledky náhodné volby mohou být všechna dvojciferná čísla od 10 do 99, $\Omega = \{10, 11, \ldots, 99\}$, $m = |\Omega| = 90$.

a) Ciferný součet dvojciferného čísla větší než 15 může být 16, 17 nebo 18. Ciferný součet 16 mají čísla 79, 88 a 97, ciferný součet 17 mají čísla 89 a 98, ciferný součet 18 má číslo 99. Tato čísla představují výsledky příznivé jevu A, tj. $A = \{79, 88, 89, 97, 98, 99\}$, takže $m(A) = |A| = 6$, a tedy hledaná pravděpodobnost je

$$P(A) = \frac{m(A)}{m} = \frac{6}{90} = \frac{1}{15} \doteq 0{,}067.$$

b) Dvojciferná přirozená čísla dělitelná třinácti jsou 13, 26, 39, 52, 65, 78, 91. Tato čísla představují výsledky příznivé jevu B, tj. $B = \{13, 26, 39, 52, 65, 78, 91\}$, takže $m(B) = |B| = 7$, a tedy hledaná pravděpodobnost je

$$P(B) = \frac{m(B)}{m} = \frac{7}{90} \doteq 0{,}078.$$

3. Jaká je pravděpodobnost, že při hodu dvěma hracími kostkami a) „padne součet 7" (jev A), b) „padne součet 8" (jev B)?

Řešení

Výsledky hodů jsou uspořádané dvojice čísel $[i, j]$, kde $i, j = 1, 2, \ldots, 6$. Jejich počet je $m = |\Omega| = 6^2 = 36$.

a) Jevu A jsou příznivé výsledky: $[1, 6]$, $[2, 5]$, $[3, 4]$, $[4, 3]$, $[5, 2]$, $[6, 1]$. Jejich počet $m(A) = |A| = 6$, a tedy hledaná pravděpodobnost je

$$P(A) = \frac{m(A)}{m} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \doteq 0{,}167.$$

b) Jevu B jsou příznivé výsledky: $[2, 6]$, $[3, 5]$, $[4, 4]$, $[5, 3]$, $[6, 2]$. Jejich počet $m(B) = |B| = 5$, a tedy hledaná pravděpodobnost je

$$P(B) = \frac{m(B)}{m} = \frac{5}{36} \doteq 0{,}139.$$

4. Před zkouškou dostane každý student 30 různých otázek, z nichž si při zkoušce náhodně vybere 3. K úspěšnému absolvování zkoušky je třeba, aby dvě z nich dovedl řádně zodpovědět. Jaká je pravděpodobnost, že si určitý student, který přistupuje ke zkoušce a zvládl před zkouškou jen 70 % otázek, vytáhne alespoň dvě otázky, na něž dovede odpovědět (jev A)?

Řešení

Výsledky všech možných výběrů (tahů) otázek jsou kombinace 3 otázek z daných 30 otázek, jejichž počet je $m = |\Omega| = \binom{30}{3}$. Jevu A jsou příznivé ty výsledky, které lze získat právě dvěma způsoby:

a) Jsou to všechny výběry (tahy) tvořené libovolnou kombinací kterýchkoliv 3 otázek z 21 otázek, které uvažovaný student ovládá; jejich počet je $\binom{21}{3}$.

b) Jsou to všechny výběry (tahy) tvořené libovolnou kombinací kterýchkoliv 2 otázek z 21 otázek, jež uvažovaný student ovládá, a libovolnou ze zbývajících 9 otázek. Jejich počet je podle kombinatorického pravidla součinu $\binom{21}{2} \cdot 9$.

Celkový počet výsledků příznivých jevu A je podle kombinatorického pravidla součtu $m(A) = |A| = \binom{21}{3} + \binom{21}{2} \cdot 9$, a hledaná pravděpodobnost jevu A je tedy

$$P(A) = \frac{m(A)}{m} = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{21}{3} + \binom{21}{2} \cdot 9}{\binom{30}{3}} = \frac{3\,220}{4\,060} = \frac{23}{29} \doteq 0{,}793.$$

Statistický odhad pravděpodobnosti výsledku

Nejsou-li splněny podmínky pro použití klasické definice pravděpodobnosti nebo chceme-li ověřit splnění podmínky o všech stejně možných výsledcích náhodného pokusu, provedeme jeho hromadné (mnohonásobné) opakování a statistické vyhodnocení.

Uvažujme náhodný pokus s konečnou množinou možných výsledků $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$. Proveďme tento pokus celkem N-krát. Pro každý možný výsledek ω_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ zaznamenejme počet pokusů $N(\omega_i)$, které skončily právě tímto výsledkem. Toto číslo $N(\omega_i)$ se nazývá **četnost výsledku** ω_i a číslo $\nu(\omega_i) = \dfrac{N(\omega_i)}{N}$ se nazývá **relativní četnost výsledku** ω_i (v N pokusech). Četnosti $N(\omega_i)$ jsou nezáporná celá čísla, jejichž součet se rovná číslu N, a příslušné relativní četnosti jsou nezáporná čísla, jejichž součet je roven číslu 1:

$$N(\omega_1) + N(\omega_2) + \ldots + N(\omega_n) = N, \qquad \nu(\omega_1) + \nu(\omega_2) + \ldots + \nu(\omega_n) = 1.$$

Jak ukazuje praxe při rostoucím počtu na sobě nezávisle provedených náhodných pokusů, má relativní četnost $\nu(\omega_i)$ výsledku ω_i tendenci stále více se přibližovat jisté číselné hodnotě, kterou lze pokládat za pravděpodobnost $p(\omega_i)$ výsledku ω_i v náhodném pokusu. Pro velká N je tedy

$$p(\omega_i) \approx \frac{N(\omega_i)}{N}.$$

Tento vztah představuje **statistický odhad pravděpodobnosti výsledku** ω_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) náhodného pokusu.

Příklady statistického odhadu pravděpodobnosti výsledků náhodného pokusu

1. Při 4 040 hodech mincí padl rub 2 048krát, při 12 000 hodech 6 019krát, při 24 000 hodech 12 012krát. Proveďte na základě toho odhad pravděpodobnosti výsledku ω_1: „padne rub mince".

   Řešení

   Určíme relativní četnosti $\nu(\omega_1) = \dfrac{N(\omega_1)}{N}$ při rostoucím N:

$$\text{pro } N = 4\,040 \text{ je } \nu(\omega_1) = \frac{2\,048}{4\,040} \doteq 0{,}506\,9,$$
$$\text{pro } N = 12\,000 \text{ je } \nu(\omega_1) = \frac{6\,019}{12\,000} \doteq 0{,}501\,6,$$
$$\text{pro } N = 24\,000 \text{ je } \nu(\omega_1) = \frac{12\,012}{24\,000} \doteq 0{,}500\,5.$$

   Při rostoucím N má $\nu(\omega_1)$ tendenci přiblížit se k hodnotě pravděpodobnosti výsledku ω_1: $p(\omega_1) = 0{,}5$.

   Poznámka. Vzhledem k tomu, že v uvažovaném náhodném pokusu jsou oba výsledky ω_1: „padne rub mince", ω_2: „padne líc mince" stejně možné (pravděpodobné), je také $p(\omega_2) = 0{,}5$.

2. V sérii 4 000 výrobků bylo 16 výrobků vadných. Určete přibližnou hodnotu pravděpodobnosti $p(\omega)$ výsledku ω: „vyrobení vadného výrobku".

   Řešení

   Na základě statistického odhadu pravděpodobnosti jevu je

$$p(\omega) \approx \frac{N(\omega)}{N} = \frac{16}{4\,000} = 0{,}004.$$

Zobecnění klasické definice pravděpodobnosti jevu

Uvažujme náhodný pokus s konečnou množinou možných výsledků $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$. Nechť jsou dány **pravděpodobnosti výsledků** $p(\omega_i)$, pro něž platí

$$0 \leqq p(\omega_i) \leqq 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$
$$p(\omega_1) + p(\omega_2) + \ldots + p(\omega_n) = 1. \tag{2}$$

Pravděpodobnost jevu A, označovanou $P(\mathsf{A})$, definujeme jako součet pravděpodobností těch výsledků ω_i, které jsou příznivé jevu A čili při kterých nastává jev A (píšeme $\omega_i \in \mathsf{A}$). Tuto definici lze vyjádřit vzorcem

$$P(\mathsf{A}) = \sum_{\omega_i \in \mathsf{A}} p(\omega_i), \tag{3}$$

kde symbol na pravé straně značí součet pravděpodobností všech těch výsledků ω_i, pro něž platí $\omega_i \in \mathsf{A}$.

V důležitém speciálním případě, kdy náhodný pokus má m stejně možných (pravděpodobných) výsledků ω_i, z nichž každý má pravděpodobnost $p(\omega_i) = \dfrac{1}{m}$, pak podle definičního vztahu (3) je $P(\mathsf{A}) = \dfrac{m(\mathsf{A})}{m}$, kde $m(\mathsf{A})$ je počet výsledků ω_i příznivých jevu A. Klasická definice pravděpodobnosti jevu A je tedy speciálním případem definičního vztahu (3). Jinak řečeno definiční vztah (3) představuje **zobecnění klasické definice pravděpodobnosti jevu** A.

Příklady výpočtu pravděpodobnosti jevů užitím zobecněné definice pravděpodobnosti

1. Mějme náhodný jev s množinou všech možných výsledků $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$ o pravděpodobnostech $p(\omega_1) = 0{,}1$, $p(\omega_2) = 0{,}3$, $p(\omega_3) = 0{,}05$, $p(\omega_4) = 0{,}15$, $p(\omega_5) = 0{,}4$. Jevu A nechť jsou příznivé výsledky ω_2, ω_4 a ω_5, tj. $\mathsf{A} = \{\omega_2, \omega_4, \omega_5\}$. Vypočtěte pravděpodobnost jevu A.

   Řešení

   Protože všechny výsledky ω_i nemají stejnou pravděpodobnost, výpočet pravděpodobnosti $P(\mathsf{A})$ provedeme podle definičního vztahu (3):

$$P(\mathsf{A}) = \sum_{\omega_i \in \mathsf{A}} p(\omega_i) = p(\omega_2) + p(\omega_4) + p(\omega_5) = 0{,}85.$$

2. Při hodech nehomogenní („falešnou") kostkou nepadají všechny stěny se stejnou pravděpodobností. Označme $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$, kde výsledek ω_i znamená, že padne stěna s počtem ok i. Nechť pro pravděpodobnosti výsledků ω_i platí: $p(\omega_1) = p(\omega_2) = \dfrac{1}{9}$, $p(\omega_3) = p(\omega_4) = \dfrac{2}{9}$, $p(\omega_5) = p(\omega_6) = \dfrac{1}{6}$ [pro součet všech $p(\omega_i)$ musí platit vztah (2)]. Vypočtěte pravděpodobnosti jevů A: „padne stěna se sudým počtem ok", B: „padne stěna s počtem ok větším než 3".

   Řešení

   Podle definičního vzorce (3) dostáváme:

$$P(\mathsf{A}) = \sum_{\omega_i \in \mathsf{A}} p(\omega_i) = p(\omega_2) + p(\omega_4) + p(\omega_6) = \frac{1}{2},$$
$$P(\mathsf{B}) = \sum_{\omega_i \in \mathsf{B}} p(\omega_i) = p(\omega_4) + p(\omega_5) + p(\omega_6) = \frac{5}{9}.$$

3. V urně (osudí) jsou jedna bílá koule, dvě modré koule a tři červené koule. Nechť způsob tahu koule nemá vliv na to, která koule je vytažena. Označme $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, kde ω_i jsou možné výsledky: ω_1 vytažení bílé koule, ω_2 vytažení modré koule a ω_3 vytažení červené koule. Pravděpodobnosti výsledků ω_i ($i = 1, 2, 3$) jsou zřejmě různé, neboť koulí všech tří barev je různý počet. Určete tyto pravděpodobnosti možných výsledků $p(\omega_1)$, $p(\omega_2)$, $p(\omega_3)$ a dále vypočtěte pravděpodobnosti jevů A: „je tažena bílá nebo modrá koule“, B: „je tažena bílá nebo červená koule“, C: „je tažena modrá nebo červená koule“.

Řešení

Představme si, že uvažovaných šest koulí je označeno písmeny a, b, c, d, e, f tak, že bílá koule je označena písmenem a, modré koule písmeny b, c a červené koule písmeny d, e, f. Pravděpodobnost vytažení kterékoliv z takto označených koulí je stejná, rovná $\frac{1}{m}$, kde $m = 6$: $P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = P(e) = P(f) = \frac{1}{6}$. Dále podle klasické definice pravděpodobnosti je $P(b, c) = \frac{m(b, c)}{m} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $P(d, e, f) = \frac{m(d, e, f)}{m} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Odtud vyplývá: $p(\omega_1) = P(a) = \frac{1}{6}$, $p(\omega_2) = P(b, c) = \frac{1}{3}$, $p(\omega_3) = P(d, e, f) = \frac{1}{2}$. [Kontrola: $p(\omega_1) + p(\omega_2) + p(\omega_3) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = 1$.] Nakonec podle definičního vzorce (3) vypočteme
$P(\mathsf{A}) = p(\omega_1) + p(\omega_2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$, $P(\mathsf{B}) = p(\omega_1) + p(\omega_3) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$,
$P(\mathsf{C}) = p(\omega_2) + p(\omega_3) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$.

Poznámky k definicím pravděpodobnosti jevů. Uvedli jsme klasickou definici pravděpodobnosti a její zobecnění, se kterými se setkáváme v gymnaziálních učebnicích matematiky. Stručně se zmíníme ještě o dalších možnostech definice pravděpodobnosti jevů, s nimiž se lze také setkat v učebnicích teorie pravděpodobnosti:

1. *Statistická definice pravděpodobnosti jevu* je založena na statistickém odhadu pravděpodobnosti jevu. Mějme náhodný pokus s konečnou množinou všech možných výsledků $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$. Nechť při n-násobném nezávislém provedení pokusu nastane určitý jev $\mathsf{A} \subset \Omega$ právě $N(\mathsf{A})$-krát (tj. jevu A jsou příznivé výsledky opakovaných pokusů $N(\mathsf{A})$-krát). Pak číslo $N(\mathsf{A})$ se nazývá **četnost jevu** A a číslo $\nu(\mathsf{A}) = \frac{N(\mathsf{A})}{N}$ se nazývá **relativní četnost jevu** A v N opakovaných pokusech. Jak ukazuje praxe, lze **pravděpodobnost jevu** A *odhadnout statisticky* jako relativní četnost $\nu(\mathsf{A})$ při velkém počtu N opakovaných pokusů:

$$P(\mathsf{A}) \approx \frac{N(\mathsf{A})}{N} \quad \text{pro velká } N.$$

2. *Geometricky definovaná pravděpodobnost* jevu, tzv. *geometrická pravděpodobnost*, byla zavedena již na počátku rozvoje počtu pravděpodobnosti, když se zjistilo, že klasická definice pravděpodobnosti jevu není použitelná v případech, kdy výsledků náhodného pokusu může být nekonečně mnoho. Avšak také geometrická pravděpodobnost se zavádí za silně omezujících podmínek: Nechť Ω je nějaká množina bodů přímky, roviny nebo prostoru a A nějaká její podmnožina ($\mathsf{A} \subset \Omega$), přičemž *množiny* Ω a A jsou *měřitelné*, tj.

lze jim jednoznačně přiřadit určitou jejich míru (velikost), …
Pak **geometrická pravděpodobnost jevu** A: „bod X náhodně zvolený v množině Ω ($X \in \Omega$) leží také v množině A ($X \in \mathsf{A}$)“, se definuje vzorcem

$$P(\mathsf{A}) = \frac{m(\mathsf{A})}{m(\Omega)},$$

kde $m(\Omega) = |\Omega|$ a $m(\mathsf{A}) = |\mathsf{A}|$ jsou po řadě míry množin Ω a A. Přitom se předpokládá, že pravděpodobnost volby bodu X v množině $\mathsf{A} \subset \Omega$ nezávisí na tvaru ani poloze této množiny v Ω, tj. všechny výsledky volby bodu X jsou stejně možné (stejně pravděpodobné).

3. *Axiomaticky definovaná pravděpodobnost jevu* spočívá ve vymezení jejích základních vlastností soustavou axiomů. S ní se setkáte ve vysokoškolských učebnicích teorie pravděpodobnosti.

Příklady základních úloh o geometrických pravděpodobnostech

1. Nechť je dána úsečka AB délky d a úsečka $A_1B_1 \subset AB$ délky d_1. Jaká je pravděpodobnost jevu A: „náhodně zvolený bod $X \in AB$ leží na úsečce A_1B_1 (tj. $X \in A_1B_1$)“?

Řešení

Podle definičního vzorce geometrické pravděpodobnosti jevu A:

$$P(\mathsf{A}) = \frac{d_1}{d}$$

2. Nechť je dán úhel AVB velikosti α, který je částí plného úhlu Ω velikosti 2π. Jaká je pravděpodobnost jevu A: „náhodně zvolený bod $X \in \Omega$ leží v úhlu AVB“?

Řešení

$$P(\mathsf{A}) = \frac{\alpha}{2\pi}$$

3. Nechť je dán v rovině obrazec Ω o obsahu S a obrazec $\mathsf{A} \subset \Omega$ o obsahu S_1. Jaká je pravděpodobnost jevu A: „náhodně zvolený bod $X \in \Omega$ leží v obrazci A“?

Řešení

$$P(\mathsf{A}) = \frac{S_1}{S}$$

4. Nechť je dáno těleso Ω o objemu V a těleso $\mathsf{A} \subset \Omega$ o objemu V_1. Jaká je pravděpodobnost jevu A: „náhodně zvolený bod $X \in \Omega$ leží v tělese A“?

Řešení

$$P(\mathsf{A}) = \frac{V_1}{V}$$

Věty o pravděpodobnostech

Užitím uvedených definic pravděpodobnosti jevů lze dokázat *věty*:

V. 1. Pravděpodobnost $P(\mathsf{A})$ libovolného náhodného jevu A je nezáporné číslo menší nebo rovné jedné:

$$0 \leq P(\mathsf{A}) \leq 1 \quad \text{čili} \quad P(\mathsf{A}) \in \langle 0; 1 \rangle$$

…pravděpodobnost jistého jevu Ω je rovna jedné:

$$P(\Omega) = 1.$$

Pravděpodobnost nemožného jevu $\emptyset$ je rovna nule:

$$P(\emptyset) = 0.$$

V.3. Věta o pravděpodobnosti sjednocení jevů

Pro pravděpodobnost sjednocení dvou jevů A, B (obr. 7.3a) platí

$$P(\mathsf{A} \cup \mathsf{B}) = P(\mathsf{A}) + P(\mathsf{B}) - P(\mathsf{A} \cap \mathsf{B}).$$

Speciálně, jsou-li jevy A, B *disjunktní* ($\mathsf{A} \cap \mathsf{B} = \emptyset$), pro pravděpodobnost sjednocení jevů A, B (obr. 7.3b) platí

$$P(\mathsf{A} \cup \mathsf{B}) = P(\mathsf{A}) + P(\mathsf{B}).$$

Tento vztah lze rozšířit matematickou indukcí na více jevů: Jsou-li každé dva z jevů $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \dots, \mathsf{A}_m$ *po dvou disjunktní* ($\mathsf{A}_i \cap \mathsf{A}_j = \emptyset$, $i, j = 1, 2, \dots, m$), pak pro sjednocení daných jevů (obr. 7.4) platí

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{m} \mathsf{A}_i\right) = \sum_{i=1}^{m} P(\mathsf{A}_i) = P(\mathsf{A}_1) + P(\mathsf{A}_2) + \dots + P(\mathsf{A}_m).$$

V.4. Věta o pravděpodobnostech opačných jevů

Pro pravděpodobnost jevu A′ opačného k jevu A platí

$$P(\mathsf{A}') = 1 - P(\mathsf{A}).$$

Příklady výpočtu pravděpodobnosti jevů užitím vět o pravděpodobnostech

1. Určete pravděpodobnost, že při hodu dvěma kostkami
   a) „padne alespoň jedna šestka“ (jev A),
   b) „padne součet 7 nebo součet 8“ (jev B),
   c) „nepadne součet 7 ani součet 8“ (jev C).

Řešení

Množinou všech výsledků hodů je množina $\Omega = \{[i, j] \in \mathsf{R}^2;\ i, j = 1, 2, \dots, 6\}$, která má počet prvků $m = |\Omega| = 6^2 = 36$.

a) Sledujeme jev A_1: „na 1. kostce padne šestka“, tj. $\mathsf{A}_1 = \{[6; 1], [6; 2], \dots, [6; 6]\}$ a jev A_2: „na 2. kostce padne šestka“, tj. $\mathsf{A}_2 = \{[1; 6], [2; 6], \dots, [6; 6]\}$; oba mají $m(\mathsf{A}_1) = m(\mathsf{A}_2) = 6$ prvků. Podle klasické definice pravděpodobnosti je $P(\mathsf{A}_1) = P(\mathsf{A}_2) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. Průnik jevů A_1, A_2 je $\mathsf{A}_1 \cap \mathsf{A}_2$: „na 1. kostce a zároveň na 2. kostce padne šestka“, tj. $\mathsf{A}_1 \cap \mathsf{A}_2 = \{[6; 6]\}$,

takže $m(\mathsf{A}_1 \cap \mathsf{A}_2) = |\mathsf{A}_1 \cap \mathsf{A}_2| = 1$. Podle klasické definice pravděpodobnosti je $P(\mathsf{A}_1 \cap \mathsf{A}_2) = \frac{1}{36}$. Jev A: „na 1. kostce nebo na 2. kostce padne šestka“, tj. jev $\mathsf{A} = \mathsf{A}_1 \cup \mathsf{A}_2$, má podle věty V.3 pravděpodobnost

$$P(\mathsf{A}_1 \cup \mathsf{A}_2) = P(\mathsf{A}_1) + P(\mathsf{A}_2) - P(\mathsf{A}_1 \cap \mathsf{A}_2) = \frac{6}{36} + \frac{6}{36} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36} \doteq 0{,}306.$$

(K tomuto výsledku lze dospět též na základě toho, že $\mathsf{A}_1 \cup \mathsf{A}_2 = \{[1; 6], [6; 1], [2; 6], [6; 2], \dots, [6; 6]\}$, takže $m(\mathsf{A}_1 \cup \mathsf{A}_2) = |\mathsf{A}_1 \cup \mathsf{A}_2| = 11$.)

b) Uvažujeme jev B_1: „na kostkách padne součet 7“ a jev B_2: „na kostkách padne součet 8“. Podle klasické definice pravděpodobnosti jevu jsou jejich pravděpodobnosti $P(\mathsf{B}_1) = \frac{6}{36}$, $P(\mathsf{B}_2) = \frac{5}{36}$. Jevy B_1, B_2 nemohou nastat současně, tj. jsou disjunktní ($\mathsf{B}_1 \cap \mathsf{B}_2 = \emptyset$). Jev B: „na kostkách padne součet 7 nebo 8“ neboli $B = \mathsf{B}_1 \cup \mathsf{B}_2$ má proto podle věty V.3 pravděpodobnost

$$P(\mathsf{B}) = P(\mathsf{B}_1 \cup \mathsf{B}_2) = P(\mathsf{B}_1) + P(\mathsf{B}_2) = \frac{6}{36} + \frac{5}{36} = \frac{11}{36} \doteq 0{,}306.$$

c) Jev C: „na kostkách nepadne ani součet 7, ani součet 8“ je opačný (doplňkový) jev k jevu B, tedy $\mathsf{C} = \mathsf{B}'$, a podle věty V.4 má proto pravděpodobnost

$$P(\mathsf{C}) = P(\mathsf{B}') = 1 - P(\mathsf{B}) = 1 - \frac{11}{36} = \frac{25}{36} \doteq 0{,}694.$$

2. V tombole se prodávalo 500 slosovatelných lístků, ze kterých pět vyhrává první ceny, deset druhé ceny a čtyřicet třetí ceny. Jaká je pravděpodobnost výhry na právě jeden zakoupený lístek?

Řešení

Označme jako jev A: výhru první ceny, jev B: výhru druhé ceny a jev C: výhru třetí ceny. Pravděpodobnosti výhry jednotlivých cen na jeden lístek jsou

$$P(\mathsf{A}) = \frac{5}{500} = 0{,}01, \quad P(\mathsf{B}) = \frac{10}{500} = 0{,}02, \quad P(\mathsf{C}) = \frac{40}{500} = 0{,}08.$$

Protože se vytažené lístky nevracejí zpět do osudí, nelze vyhrát na jeden lístek více než jednou, takže jevy A, B, C se vzájemně vylučují (jsou disjunktní). Proto podle věty V.3 pravděpodobnost výhry první, druhé nebo třetí ceny je

$$P(\mathsf{A} \cup \mathsf{B} \cup \mathsf{C}) = P(\mathsf{A}) + P(\mathsf{B}) + P(\mathsf{C}) = 0{,}01 + 0{,}02 + 0{,}08 = 0{,}11.$$

3. Ve vyrobené sérii 50 tranzistorů je jich 6 nekvalitních. Když se náhodně vybere 10 z nich, jaká je pravděpodobnost, že jsou mezi nimi nejvýše 2 nekvalitní tranzistory (jev A)?

Řešení

Mají-li být z vybraných 10 tranzistorů nejvýše 2 nekvalitní, mohou být buď 2 nekvalitní a 8 kvalitních (jev A_1), nebo 1 nekvalitní a 9 kvalitních (jev A_2), anebo všech 10 kvalitních (jev A_3). Počet všech možných výsledků výběru je ve všech 3 eventualitách týž, $m = \binom{50}{10}$. Počty výsledků výběru příznivých jednotlivým jevům A_1, A_2, A_3 jsou $m(A_1) = \binom{6}{2} \cdot \binom{44}{8}$, $m(A_2) = \binom{6}{1} \cdot \binom{44}{9}$, $m(A_3) = \binom{44}{10}$. Pravděpodobnost jevu $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ podle věty V.3 je

$$P(A) = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) =$$
$$= \left[\binom{6}{2} \cdot \binom{44}{8} + \binom{6}{1} \cdot \binom{44}{9} + \binom{44}{10}\right] : \binom{50}{10} =$$
$$= (2\,658\,489\,405 + 4\,253\,583\,048 + 2\,481\,256\,778) : 10\,272\,278\,170 =$$
$$= 9\,393\,329\,231 : 10\,272\,278\,170 \doteq 0{,}914\,4.$$

Podmíněná pravděpodobnost

Začneme-li náhodný pokus sledovat až ve stadiu, kdy již nastal určitý jev B, a přiřadíme-li tuto podmínku k původní množině podmínek, při nichž je pokus realizován, pak pravděpodobnost libovolného dalšího jevu A v pokusu za nových podmínek se může, ale nemusí změnit. Pravděpodobnost jevu A určovaná za podmínky, že již nastal určitý jev B s pravděpodobností $P(B) \neq 0$, se nazývá **podmíněná pravděpodobnost jevu A za podmínky, že nastal jev B** (nebo kratčeji **pravděpodobnost jevu A podmíněná jevem B**); značí se $P(A|B)$. *Definuje* se kvantitativně vztahem

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ kde } P(B) \neq 0.$$

Za předpokladu, že všechny výsledky jsou *stejně možné*, lze tento vztah přepsat podle klasické definice pravděpodobnosti ve tvaru:

$$P(A|B) = \frac{m(A \cap B)}{m(B)},$$

kde $m(B) = |B| \neq 0$ je počet všech výsledků příznivých jevu B, $m(A \cap B) = |A \cap B|$ počet všech výsledků příznivých zároveň jevům A, B.

Příklady výpočtu podmíněné pravděpodobnosti jevu

1. Máme určit, jaká je při hodu dvěma hracími kostkami pravděpodobnost, že „padne součet 5" (jev A), jestliže „na první kostce padne 2" (jev B).

   Řešení
   Výsledky hodu příznivé jevu A jsou uspořádané dvojice [1; 4], [2; 3], [3; 2], [4; 1]; jejich počet je $m(A) = |A| = 4$. Výsledky hodu příznivé jevu B jsou uspořádané dvojice $\omega_j = [2; j]$, kde $j = 1, 2, \ldots, 6$; jejich počet je $m(B) = |B| = 6$. Odtud plyne: jevu $A \cap B$ je příznivý pouze jeden výsledek [2; 3], a tedy $m(A \cap B) = |A \cap B| = 1$. Podle definičního vztahu pro podmíněnou pravděpodobnost

jevu A za podmínky, že nastal jev B, ... jsou stejně možné)

$$P(A|B) = \frac{m(A \cap B)}{m(B)} = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{1}{6}.$$

(Srovnejte s hodnotou pravděpodobnosti $P(A) = \dfrac{m(A)}{m(\Omega)} = \dfrac{|A|}{|\Omega|} = \dfrac{4}{36} = \dfrac{1}{9}$.)

2. 120 studentů absolvovalo zkoušky z matematiky a z fyziky. 30 z nich nesložilo obě zkoušky, 8 nesložilo pouze zkoušku z matematiky, 5 nesložilo pouze zkoušku z fyziky. Určete pravděpodobnost toho, že náhodně vybraný student složil zkoušku z matematiky (jev A), víme-li, že nesložil zkoušku z fyziky (jev B′), a pravděpodobnost toho, že složil zkoušku z fyziky (jev B), víme-li, že nesložil zkoušku z matematiky (jev A′).

   Řešení
   Všechny výsledky zkoušek jsou stejně možné. Pro určení podmíněných pravděpodobností $P(A|B')$ a $P(B|A')$ lze proto vyjít ze vztahů

$$P(A|B') = \frac{m(A \cap B')}{m(B')} = \frac{|A \cap B'|}{|B'|}, \quad P(B|A') = \frac{m(B \cap A')}{m(A')} = \frac{|B \cap A'|}{|A'|}.$$

   Odtud dostáváme

$$P(A|B') = \frac{5}{35} = \frac{1}{7} \doteq 0{,}143, \quad P(B|A') = \frac{8}{38} = \frac{4}{19} \doteq 0{,}211.$$

Nezávislé jevy, závislé jevy

Říkáme, že náhodné jevy A, B jsou navzájem **nezávislé jevy**, jestliže pravděpodobnost jednoho z nich nezávisí na tom, zda druhý jev nastal, či nikoli, tj. platí-li

$$P(A|B) = P(A) \text{ a } P(B|A) = P(B).$$

(Oba tyto vztahy jsou ekvivalentní pro $P(A) \neq 0$ a $P(B) \neq 0$.)

V.5. Věta o pravděpodobnosti průniku dvou nezávislých jevů
Náhodné jevy A, B jsou nezávislé, právě když platí

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Poznámka. V literatuře se tímto způsobem často ekvivalentně *definuje nezávislost jevů* A, B.

Příklady vyšetřování nezávislosti a závislosti jevů

1. Při hodu dvěma mincemi jevy A: „na první minci padl líc", B: „na obou mincích padl zároveň líc nebo rub" *jsou nezávislé* (podle věty V.5), neboť

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\text{a } P(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} = \frac{1}{4} = P(A) \cdot P(B).$$

(Výsledek je ve shodě s uvedenou definicí nezávislosti jevů A, B, neboť $P(A|B) = \frac{1}{2} = P(A)$.)

2. Při hodu dvěma kostkami jevy A: „padne součet 5“, B: „na první kostce padne 2“ *nejsou nezávislé* (podle věty V.5), neboť $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$, $P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$, takže $P(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} = \frac{1}{36} \neq P(A) \cdot P(B)$. (K témuž výsledku můžeme dospět též z uvedené definice nezávislosti jevů A, B, neboť podle příkladu 1 na str. 338 je $P(A|B) = \frac{1}{6} \neq \frac{1}{9} = P(A)$.)

Pojem nezávislosti jevů lze zavést obecněji pro m jevů ($m \in \mathbb{N}$, $m \geqq 2$):

Říkáme, že náhodné jevy $A_1, A_2, \ldots, A_m$ jsou navzájem nezávislé jevy, jestliže každý z nich je nezávislý na každém z ostatních jevů a na všech jejich průnicích, tj. jestliže pro libovolnou skupinu z nich vybraných jevů $A_{k_1}, A_{k_2}, \ldots, A_{k_r}$ platí

$$P(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap \ldots \cap A_{k_r}) = P(A_{k_1}) \cdot P(A_{k_2}) \cdot \ldots \cdot P(A_{k_r}).$$

Poznámka. Z definice vzájemné nezávislosti m jevů bezprostředně plyne *věta*: Každé dva z m nezávislých jevů ($n \in \mathbb{N}$, $m \geqq 2$) jsou navzájem nezávislé. *Obrácená věta však neplatí*, z nezávislosti m jevů po dvou (tzv. párové nezávislosti) neplyne vzájemná nezávislost všech m jevů. *Např.* při hodu dvou mincí uvažujeme jevy A_1: „na první minci padl líc“, A_2: „na druhé minci padl rub“, A_3: „na obou mincích padl zároveň líc nebo zároveň rub“. Jejich pravděpodobnosti jsou

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{2}$$

a pravděpodobnosti jejich průniků jsou

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1 \cap A_3) = P(A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4},$$

takže jevy A_1, A_2, A_3 jsou párově nezávislé. Avšak zároveň je

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 0 \neq P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3),$$

takže všechny tři jevy A_1, A_2, A_3 nejsou navzájem nezávislé.

Příklad výpočtu pravděpodobnosti průniku m navzájem nezávislých jevů

Na výrobku se objevují tři druhy závad (jevy Z_1, Z_2, Z_3), přičemž $P(Z_1) = 0{,}1$, $P(Z_2) = 0{,}05$ a $P(Z_3) = 0{,}02$. Předpokládejte, že jednotlivé závady jsou jevy navzájem nezávislé, a vypočtěte pravděpodobnost, že výrobek bude bez závady (jev A).

Řešení

Pravděpodobnost, že výrobek nebude mít první závadu, je $P(Z_1') = 1 - P(Z_1) = 0{,}9$, druhou $P(Z_2') = 1 - P(Z_2) = 0{,}95$, třetí $P(Z_3') = 1 - P(Z_3) = 0{,}98$. Pravděpodobnost, že nebude mít ani jednu ze tří závad, neboli pravděpodobnost průniku jevů $Z_1' \cap Z_2' \cap Z_3'$ podle věty V.6, je

$$P(Z_1' \cap Z_2' \cap Z_3') = P(Z_1') \cdot P(Z_2') \cdot P(Z_3') = 0{,}9 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}98 \doteq 0{,}838.$$

Nezávislé pokusy

Mějme náhodný pokus, který se skládá z n dílčích náhodných pokusů. Jinak řečeno výsledný náhodný pokus spočívá ve sdruženém uskutečnění n dílčích náhodných pokusů, a proto se mu též říká sdružený náhodný pokus. Označme ω_1 libovolný výsledek 1. dílčího pokusu, ω_2 libovolný výsledek 2. dílčího pokusu, ..., ω_n libovolný výsledek n-tého dílčího pokusu. Pak uspořádaná n-tice $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$ značí libovolný výsledek sdruženého pokusu.

Jestliže kterýkoliv z výsledků $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ nezávisí na ostatních výsledcích, pak říkáme, že dílčí náhodné pokusy jsou nezávislé. Označíme-li $p_i(\omega_i)$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) pravděpodobnosti výsledků ω_i dílčích náhodných pokusů a $p(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$ pravděpodobnost výsledku $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$ sdruženého náhodného pokusu, lze ukázat, že dílčí náhodné pokusy jsou nezávislé, právě když pro všechny možné výsledky platí

$$p(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) = p_1(\omega_1) \cdot p_2(\omega_2) \cdot \ldots \cdot p_n(\omega_n).$$

Příklady nezávislých náhodných pokusů

1. Typickými příklady nezávislých pokusů jsou náhodné pokusy *opakované* za zcela stejných podmínek, např. opakované házení kostkou, resp. současné házení několika stejnými kostkami, vybírání prvků z nějakého souboru, jestliže vybraný prvek *vracíme* po výběru zpět do souboru, výroba na automatickém stroji, pěstování plodiny za stejných podmínek apod.

2. Ukažte, že náhodné hody dvěma kostkami jsou nezávislé pokusy.

   Řešení

   Pravděpodobnost kteréhokoliv z výsledků 1. dílčího náhodného pokusu (hodu 1. kostkou) je $p_1(\omega_1) = \frac{1}{6}$, pravděpodobnost kteréhokoliv z výsledků 2. dílčího náhodného pokusu (hodu 2. kostkou) je $p_2(\omega_2) = \frac{1}{6}$, pravděpodobnost kteréhokoliv z výsledků sdruženého náhodného pokusu (hodu obou kostek) je $p(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{36}$. Protože platí $\frac{1}{36} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$, jsou oba dílčí pokusy nezávislé.

Pro nezávislé dílčí pokusy platí důležitá *věta*:

> Je-li n dílčích náhodných pokusů nezávislých a je-li náhodný jev A_1 určen jen výsledkem 1. dílčího pokusu, jev A_2 určen jen výsledkem 2. dílčího pokusu, ..., jev A_n určen jen výsledkem n-tého dílčího pokusu, pak náhodné jevy $A_1, A_2, \ldots, A_n$ jsou nezávislé jevy, tj. platí
>
> $$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n).$$

Příklady užití předchozí věty

1. Házejme dvěma kostkami a uvažujme dva náhodné jevy A: „na první kostce padne 3 nebo 4 nebo 5“, B: „na druhé kostce padne 2 nebo 3“. Určete pravděpodobnost průniku obou jevů $A \cap B$.

Řešení
Oba dílčí náhodné pokusy (hody první a druhou kostkou) jsou nezávislé a podle předchozí věty jsou náhodné jevy A, B na sobě nezávislé, takže platí

$$P(\mathsf{A} \cap \mathsf{B}) = P(\mathsf{A}) \cdot P(\mathsf{B}) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

(Kontrola přímým výpočtem: $P(\mathsf{A} \cap \mathsf{B}) = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$.)

2. V osudí je 8 bílých koulí, 4 červené a 6 modrých. Táhneme z osudí postupně 3 koule, přičemž každou vytaženou kouli *vracíme* do osudí zpět před tím, než vytáhneme další kouli. Jaká je pravděpodobnost jevu, že první tažená koule bude bílá, druhá červená a třetí modrá?

Řešení
Protože koule do osudí vracíme, konají se všechny tři tahy ze stejného složení osudí, takže představují trojí nezávislé opakování náhodného pokusu čili tři dílčí nezávislé pokusy. Náhodné jevy A_1: „první tažená koule je bílá“, A_2: „druhá tažená koule je červená“, A_3: „třetí tažená koule je modrá“ jsou tedy podle předchozí věty nezávislé jevy a platí

$$P(\mathsf{A}_1 \cap \mathsf{A}_2 \cap \mathsf{A}_3) = P(\mathsf{A}_1) \cdot P(\mathsf{A}_2) \cdot P(\mathsf{A}_3) = \frac{8}{18} \cdot \frac{4}{18} \cdot \frac{6}{18} = \frac{8}{243} \doteq 0{,}033.$$

Dále se budeme zbývat *prakticky velmi významným speciálním případem n nezávislých dílčích náhodných pokusů* představovaných opakovanými pokusy, kdy každý z nich má právě jeden ze dvou opačných výsledků ω: „zdar pokusu“, ω': „nezdar pokusu“, jimž odpovídá dvojice navzájem opačných elementárních jevů E: „pokus se zdařil“, E′: „pokus se nezdařil“. Jejich pravděpodobnosti nechť jsou ve všech pokusech tytéž: $P(\mathsf{E}) = p$, $P(\mathsf{E}') = q = 1 - p$. Pro tuto tzv. **Bernoulliovu posloupnost n nezávislých pokusů** [čti: bernuliovu posloupnost] platí *věta:*

Mějme n nezávislých pokusů, z nichž každý skončí buď zdarem s pravděpodobností p, nebo nezdarem s pravděpodobností $q = 1 - p$. Pak pravděpodobnost $P(\mathsf{A}_k)$ jevu A_k: „právě k pokusů skončí zdarem“ je dán vzorcem

$$P(\mathsf{A}_k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad \text{pro } k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Výrazy pro vyjádření pravděpodobností $P(\mathsf{A}_k)$ na pravých stranách těchto vzorců jsou členy rozvoje $(p+q)^n$ podle binomické věty, a proto se říká, že pravděpodobnosti $P(\mathsf{A}_k)$ tvoří **binomické rozdělení pravděpodobností** nebo **Bernoulliovo schéma**.

Příklad užití Bernoulliova schématu
Jaká je pravděpodobnost, že při 5-krát opakovaném hodu hrací kostkou padne šestka právě dvakrát?
Řešení
Pravděpodobnost jevu A: „padne šestka“ je v opakovaných hodech stále stejná $p = \dfrac{1}{6}$, a proto lze hledanou pravděpodobnost určit podle Bernoulliova schématu, do

něhož dosadíme $n = 5$, $k = 2$:

$$P(\mathsf{A}_2) = \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 10 \cdot \frac{5^3}{6^5} \doteq 0{,}16.$$

Poznámka o některých důsledcích Bernoulliova schématu. Speciálně z něho plyne, že v Bernoulliově posloupnosti n nezávislých pokusů nastane
a) jev A_n: „všechny pokusy jsou zdařilé“ (tj. $k = n$) s pravděpodobností $P(\mathsf{A}_n) = p^n$,
b) jev A_0: „všechny pokusy jsou nezdařilé“ (tj. $k = 0$) s pravděpodobností $P(\mathsf{A}_0) = q^n$,
c) jev B_k: „alespoň k pokusů je zdařilých“ ($\mathsf{B}_k = \mathsf{A}_k \cup \mathsf{A}_{k+1} \cup \ldots \cup \mathsf{A}_n$) s pravděpodobností $P(\mathsf{B}_k) = \sum\limits_{m=k}^{n} P(\mathsf{A}_m) = \sum\limits_{m=k}^{n} \binom{n}{m} p^m q^{n-m}$,
d) jev C_k: „nejvýše k pokusů je zdařilých“ ($\mathsf{C}_k = \mathsf{A}_0 \cup \mathsf{A}_1 \cup \ldots \cup \mathsf{A}_k$) s pravděpodobností $P(\mathsf{C}_k) = \sum\limits_{m=0}^{k} P(\mathsf{A}_m) = \sum\limits_{m=0}^{k} \binom{n}{m} p^m q^{n-m}$.

7.5 Statistika

Statistické údaje neboli **statistická data** jsou kvantitativní (číselné) údaje zjištěné zkoumáním tzv. **hromadných jevů**, tj. přírodních, společenských či jiných jevů sledovaných ne jednotlivě, ale ve velkém počtu případů (tedy hromadně). Analýzou statistických údajů lze objevit vztahy a zákonitosti, které se projevují teprve při studiu hromadných jevů.

Příklady statistických údajů
Číselné údaje o počtu obyvatelstva, o objemu výroby ve státě či v jednotlivých podnicích, o dovozu nebo vývozu určitého zboží, o příjmech a výdajích obyvatelstva, o kvantitativně určených technologických vlastnostech výrobků a mnohé další.

Statistika ve smyslu **statistické činnosti** znamená získávání statistických údajů (pozorováním, měřením, vážením apod.), jejich zpracování (třídění, výpočet statistických charakteristik, předkládání výsledků) a hodnocení.

Statistika jako **statistická teorie** je věda o metodách sběru, zpracování a vyhodnocování statistických údajů. **Matematická statistika** vychází ze shromážděných statistických údajů a zabývá se jejich matematickým (statistickým) zpracováním a rozborem získaných výsledků.

Statistický soubor, statistické jednotky

Množinu všech objektů statistického pozorování (osob, věcí, jevů apod.) shromážděných na základě toho, že mají jisté společné vlastnosti, nazýváme **statistickým souborem**. Jednotlivé prvky této množiny se nazývají **prvky (elementy) statistického souboru** nebo též **statistické jednotky**. Počet všech prvků statistického souboru se nazývá **rozsah souboru n**.

Příklady statistických souborů
Při sčítání lidu je statistickým souborem množina všech obyvatel státu nebo množina všech domácností, při soupisu domů v určitém místě představuje statistický

soubor množina všech domů v daném místě, při zkoumání průmyslové produkce v podnicích určitého resortu je statistickým souborem množina všech podniků daného resortu apod.

Věcné, časové a prostorové vymezení statistického pozorování (zjišťování) jednoznačně určuje *soubor všech* statistických jednotek přicházejících v dané situaci v úvahu. Nazývá se **základní statistický soubor**. Statistické zjišťování zaměřené na všechny jednotky základního souboru nazýváme *úplné (vyčerpávající) zjišťování.* Často však statistika provází zjišťování zaměřené jen na část jednotek základního souboru. Takové zjišťování se nazývá výběrové a odpovídající statistické soubory jsou **výběrové soubory**. Důvodem k výběrovému zjišťování je především okolnost, že základní soubory mohou být natolik rozsáhlé, že zkoumání všech jednotek by bylo příliš pracné, zdlouhavé, nákladné, nebo dokonce neproveditelné. Dalším důvodem je i skutečnost, že při **náhodném výběru** můžeme využít teorie pravděpodobnosti k dostatečně spolehlivým a přesným úsudkům o charakteru základního souboru.

Statistické znaky

Společnou vlastnost statistických jednotek (prvků statistického souboru), jejíž proměnnost je předmětem statistického zkoumání (pozorování a zpracování), nazýváme **statistickým znakem**; zpravidla se značí x. Jednotlivé údaje znaku se nazývají **hodnoty znaku**; značí se $x_1, x_2, \dots, x_n$. ($1, 2, \dots, n$ jsou očíslovány vyšetřované statistické jednotky.)

Příklady statistických znaků

Při sčítání lidu je jimi věk, pohlaví, zaměstnání obyvatel apod., při zkoumání průmyslové produkce podniků výše plánované a skutečné produkce, počet pracovníků, velikost mzdových fondů apod.

Hodnoty znaků mohou být vyjádřeny buď čísly, nebo jiným způsobem (zpravidla slovním popisem). V prvním případě mluvíme o **znacích kvantitativních**, např. to může být tělesná výška, váha, množství produkce, počet pracovníků apod. Ve druhém případě mluvíme o **znacích kvalitativních**, které se mohou vyskytovat ve dvou druzích (*znaky alternativní*, např. muž–žena, voják–nevoják, prospěl–neprospěl) nebo ve více druzích (např. povolání, národnost, náboženství, rodinný stav).

Četnost a relativní četnost, tabulky jejich rozdělení

Často může sledovaný statistický znak x nabývat jen určitého počtu r různých hodnot, jež budeme značit $x_1^*, x_2^*, \dots, x_r^*$, přičemž je $r < n$, kde n je rozsah statistického souboru. (Rovnost $r = n$ platí jen v případě, že každá jednotka souboru nabývá jiné hodnoty sledovaného znaku. V praxi je tento případ výjimečný, zejména u rozsáhlých souborů dochází k opakovanému výskytu stejného znaku pro různé statistické jednotky.)

Počet statistických jednotek, jimž přísluší stejná určitá hodnota znaku x_j^* ($j = 1, 2, \dots, r$), se nazývá **četnost (absolutní četnost) hodnoty znaku x_j^***,

označíme ji n_j. Udává, kolikrát se hodnota znaku x_j^* vyskytuje mezi všemi hodnotami znaku $x_1, x_2, \dots, x_n$. Podíl četnosti n_j hodnoty znaku x_j^* a rozsahu souboru n se nazývá **relativní četnost hodnoty znaku x_j^***; budeme ji značit ν_j, tedy

$$\nu_j = \frac{n_j}{n}.$$

Součet všech četností je rozsah souboru:

$$\sum_{j=1}^{r} n_j = n_1 + n_2 + \dots + n_r = n,$$

a proto součet všech relativních četností je roven jedné:

$$\sum_{j=1}^{r} \nu_j = \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_r = \frac{n_1}{n} + \frac{n_2}{n} + \dots + \frac{n_r}{n} = \frac{1}{n}(n_1 + n_2 + \dots + n_r) = 1$$

V praxi se relativní četnosti vyjadřují v procentech; číselnou hodnotu v procentech získáme vynásobením relativní četnosti stem.

Uspořádáme-li všechny různé hodnoty znaku a jim odpovídající četnosti do tabulky 7.1, nazýváme ji **tabulka rozdělení četností**. Obdobně se sestavuje **tabulka rozdělení relativních četností**, resp. spojená **tabulka rozdělení četností a relativních četností**.

Tab. 7.1

Tabulka rozdělení četností

j	x_j^*	n_j
1	x_1^*	n_1
2	x_2^*	n_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
r	x_r^*	n_r

Poznámka. Nejjednodušší způsob, jak sestavit tabulku rozdělení četností, je *čárkovací metoda*: Jednotlivé různé hodnoty sledovaného znaku zapíšeme pod sebe, pak probíráme postupně jednotky statistického souboru a zaznamenáváme čárkou výskyt hodnoty znaku do příslušného řádku. (Výhodné je pro přehlednost umístit každou pátou čárku vodorovně přes předchozí čtyři.) Sečtením čárek v jednotlivých řádcích obdržíme četnosti.

Příklad sestavení tabulky rozdělení četností

Při zjišťování počtu nezletilých dětí ve třiceti vybraných rodinách byly získány tyto výsledky: 1, 1, 0, 2, 3, 4, 2, 2, 3, 0, 1, 2, 2, 4, 3, 3, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 0, 2, 1, 1, 2, 3, 3, 2. Uspořádejte získané údaje do tabulky rozdělení četností, vypočítejte relativní četnosti a vyjádřete je v procentech.

Řešení

Označme x sledovaný znak (počet nezletilých dětí v domácnosti), x_j^* ($j = 1, 2, \dots, 5$) jeho hodnoty, n_j četnosti, ν_j relativní četnosti jejich výskytu ve vyšetřovaných domácnostech. Jsou uvedeny v tabulce 7.2.

Tabulka rozdělení četností a relativních četností řešené úlohy Tab. 7.2

j	x_j^*	n_j	ν_j	ν_j v %
1	0	4	0,13	13
2	1	8	0,27	27
3	2	10	0,33	33
4	3	6	0,20	20
5	4	2	0,07	7
součet		30	1,00	100

Skupinové rozdělení četností

V praxi se často stává, že rozsah statistického souboru je velký a také počet zjištěných hodnot kvantitativního statistického znaku je značný, takže z tohoto rozsáhlého a nepřehledného statistického materiálu se obtížně vyvozují praktické závěry. Proto se blízké hodnoty znaku sdružují do **skupin (tříd)** tvořených obvykle **intervaly (třídními intervaly)**. Pokud je to možné, je nejjednodušší volit všechny intervaly téže délky (šířky). Hodnoty znaku, jež se dostaly do téhož intervalu, lze potom reprezentovat jedinou hodnotou – **středem intervalu**, tzv. **třídním znakem**. Třídní znaky budeme značit písmeny x_j^* pro $j = 1, 2, \dots, r$, kde r je celkový počet třídních intervalů uvažovaného statistického souboru.

Poznámka. K určení vhodného počtu r intervalů se užívají různé empirické vzorce, např. tzv. *Sturgesův vzorec:*

$$r \doteq 1 + 3{,}3 \log n,$$

kde n je rozsah statistického souboru.

Četnost výskytu hodnot statistického znaku v určitém třídním intervalu charakterizovaném třídním znakem x_j^* budeme opět značit n_j a příslušnou relativní četnost ν_j. Jejich určením pro $j = 1, 2, \dots, r$ získáváme **skupinové (intervalové) rozdělení četností**, které zapisujeme zpravidla ve formě tabulky.

Příklad sestavení tabulky skupinového rozdělení četností
Byly naměřeny výšky 300 osob v mezích od 153 do 197 cm. Navrhněte (podle Sturgesova vzorce) jejich rozdělení do skupin (intervalů) a popište sestavení tabulky skupinového (intervalového) rozdělení četností.
Řešení
Zvolíme výškové intervaly téže délky, jejichž počet je podle Sturgesova vzorce $r \doteq 1 + 3{,}3 \log 300 \doteq 9$.

Pro každý j-tý interval ($j = 1, 2, \dots, 9$) určíme počet naměřených dat (výšek osob), které v něm leží, tj. jejich četnost n_j. Získáme tak např. tabulku 7.3.

Grafická znázornění rozdělení četností

Na základě tabulek rozdělení četností, resp. relativních četností lze provést **grafické znázornění rozdělení četností** (resp. **relativních četností**) hodnot znaku.

Tabulka skupinového (intervalového) rozdělení četností řešené úlohy Tab. 7.3

j	Intervaly výšky x (v cm)	Středy intervalů x_j^* (v cm)	Četnosti n_j
1	153–157	155	7
2	158–162	160	20
3	163–167	165	35
4	168–172	170	49
5	173–177	175	84
6	178–182	180	60
7	183–187	185	27
8	188–192	190	14
9	193–197	195	4
Součet četností (rozsah souboru) n			300

V případě *kvantitativního znaku* se grafické znázornění rozdělení četností provádí zpravidla v pravoúhlé soustavě souřadnic těmito způsoby: **Polygon četností** neboli **spojnicový diagram** získáme spojením bodů, jejichž první souřadnice je hodnota znaku, resp. třídního znaku x_j a druhá souřadnice je odpovídající četnost n_j. **Histogram četností** neboli **sloupkový diagram** tvoří množina obdélníků (s jednou stranou zpravidla na ose x), jejichž obsahy S_j jsou přímo úměrné četnostem n_j. Nejčastěji se užívá pro grafické znázornění skupinového (intervalového) rozdělení četností, kdy jednu stranu obdélníků tvoří uvažované třídní intervaly; pokud mají všechny stejnou délku, pak výšky obdélníků udávají odpovídající četnosti n_j.

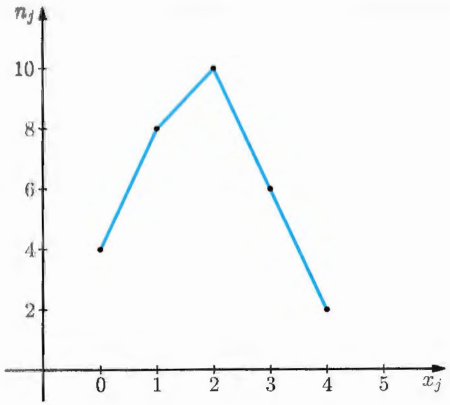
Příklady sestrojení polygonu četností (spojnicového diagramu) a histogramu četností (sloupkového diagramu)
Znázorněte graficky rozdělení četností podle tabulky 7.2 a skupinové (intervalové) rozdělení četností podle tabulky 7.3.
Řešení
V obr. 7.5 a 7.6 jsou sestrojeny polygony četností (spojnicové diagramy) k tabulce 7.2 a k tabulce 7.3. V obr. 7.7 je sestrojen histogram četností (sloupkový diagram) k tabulce 7.3.

V případě *kvalitativního znaku* se znázorňuje rozdělení relativních četností **kruhovým diagramem** tak, že hodnoty znaku x_j jsou znázorněny kruhovými výsečemi, jejichž obsahy S_j jsou přímo úměrné relativním četnostem ν_j v % (obr. 7.8).

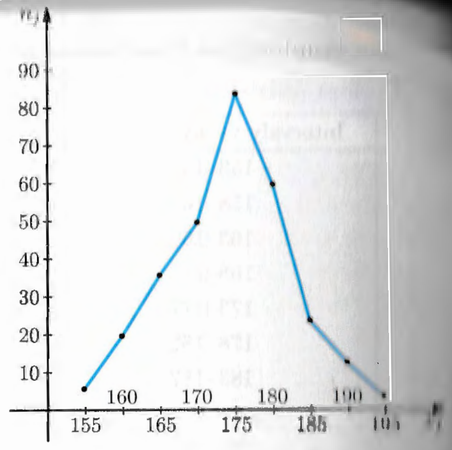
Charakteristiky znaku statistického souboru

Charakteristikami znaku statistického souboru (neboli stručně **statistickými charakteristikami**) nazýváme čísla, která podávají stručnou souhrnnou informaci o něm z různých hledisek. Je-li předmětem statistického šetření **jediný** kvantitativní znak, jde především o tzv. charakteristiky polohy (úrovně) a **charakteristiky variability** (proměnnosti, rozptýlení) znaku.

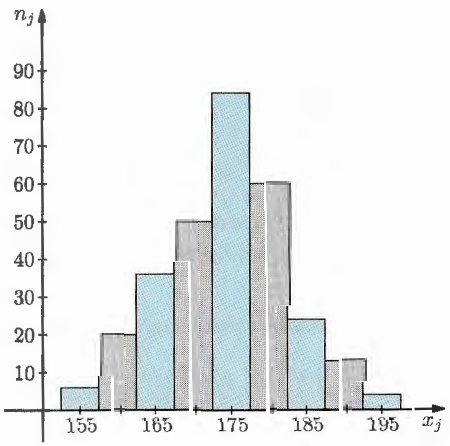
Charakteristiky polohy (úrovně) znaku neboli jeho **střední hodnoty** jsou čísla, která nějak charakterizují „průměrnou hodnotu" sledovaného kvantitativního



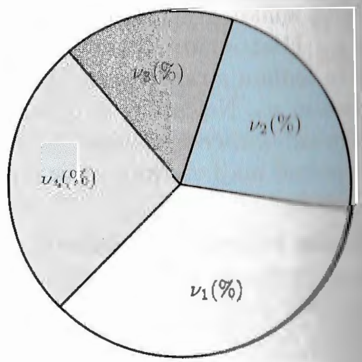
Obr. 7.5



Obr. 7.6



Obr. 7.7



Obr. 7.8

znaku. Patří mezi ně zejména aritmetický průměr, dále medián, modus, harmonický průměr a geometrický průměr.

Aritmetický průměr $\bar{x}$ hodnot $x_1, x_2, \dots, x_n$ kvantitativního znaku x je *definován* jako podíl součtu hodnot znaku a jejich počtu (rozsahu souboru) n, tj. je dán vzorcem

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i. \qquad (1)$$

Nabývá-li znak x jen r různých hodnot $x_1^*, x_2^*, \dots, x_r^*$, zjednodušujeme si výpočet aritmetického průměru užitím tabulky rozdělení četností znaku x. Má-li hodnota znaku x_1^* četnost n_1, hodnota x_2^* četnost n_2 atd. až hodnota x_r^* četnost n_r

(kde $n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$), pak aritmetický průměr je dán vzorcem

$$\bar{x} = \frac{n_1 x_1^* + n_2 x_2^* + \dots + n_r x_r^*}{n} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{r} n_j x_j^*. \qquad (2)$$

Poznámka. V souvislosti se vzorcem (2) poznamenejme, že *obecně je definován* tzv. **vážený aritmetický průměr** čísel $u_1, u_2, \dots, u_n$ *s váhami* $v_1 > 0, v_2 > 0, \dots, v_n > 0$ vzorcem

$$\bar{u}_v = \frac{\sum_{j=1}^{n} v_j u_j}{\sum_{j=1}^{n} v_j}. \qquad (3)$$

Odtud je patrné, že aritmetický průměr hodnot znaku $x_1^*, x_2^*, \dots, x_r^*$ počítaný podle vzorce (2) lze považovat za jejich *vážený aritmetický průměr s váhami danými četnostmi* $n_1, n_2, \dots, n_r$.

Některé *vlastnosti aritmetického průměru*:

a) Součet všech rozdílů $x_i - \bar{x}$ jednotlivých hodnot znaku x_i a jejich aritmetického průměru $\bar{x}$ se rovná nule: $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = 0$.

b) Přičteme-li, resp. odečteme-li od každé hodnoty znaku x_i konstantní číslo $a > 0$, pak aritmetický průměr nových hodnot znaku $u_i = x_i + a$, resp. $u_i = x_i - a$ se rovná aritmetickému průměru původních hodnot zvětšenému, resp. zmenšenému o číslo a: $\bar{u} = \bar{x} + a$, resp. $\bar{u} = \bar{x} - a$.

c) Násobíme-li každou hodnotu znaku x_i určitou konstantou $b \neq 0$, pak aritmetický průměr nových hodnot znaku $u_i = b x_i$ se rovná aritmetickému průměru původních hodnot násobenému konstantou $b \neq 0$: $\bar{u} = b\bar{x}$.

Poznámka. Vlastnosti b), c) se užívá k zjednodušení ručního výpočtu aritmetického průměru $\bar{x}$ podle vzorce (1) při velkých hodnotách x_i znaku x, resp. podle vzorce (2) při velkých hodnotách $n_j x_j^*$. Metoda výpočtu aritmetického průměru $\bar{x}$ založená na jeho uvedených vlastnostech se nazývá *metoda vhodně zvoleného počátku* (nebo též *metoda transformace hodnot znaku*) a postupuje se při ní takto: V případě velkých hodnot x_i znaku x přejdeme k novým (transformovaným) hodnotám $u_i = x_i - a$ znaku $u = x - a$, kde $a = x_{\min}$ je nejmenší z hodnot x_i. Vypočteme aritmetický průměr $\bar{u}$ hodnot u_i pomocného znaku u podle vzorce $\bar{u} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} u_i$ a pak hledaný aritmetický průměr $\bar{x}$ užitím vztahu

$$\bar{x} = \bar{u} + a. \qquad (4)$$

V případě zadaného skupinového (intervalového) rozdělení četností n_j a středů intervalů x_j^* s krokem $x_{j+1}^* - x_j^*$ = konst. přejdeme od hodnot x_j^* znaku x k novým (transformovaným) hodnotám $u_j^* = \frac{x_j^* - a}{b}$ znaku $u = \frac{x - a}{b}$, kde $a = x_{\min}^*$ je nejmenší z hodnot x_j^* a $b = x_{j+1}^* - x_j^*$. Vypočteme aritmetický průměr $\bar{u}$ hodnot u_j^* pomocného znaku u podle vzorce $\bar{u} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{r} n_j u_j^*$ a pak hledaný aritmetický průměr $\bar{x}$ užitím vztahu

$$\bar{x} = b\bar{u} + a. \qquad (5)$$

Příklady výpočtu aritmetického průměru hodnot kvantitativního znaku

1. Vypočtěte aritmetický průměr počtu nezletilých dětí ve třiceti vyšetřovaných rodinách s výsledky uvedenými v tabulce 7.2.

Řešení

Aritmetický průměr počtu dětí vypočteme podle vzorce (2):

$$\bar{x} = \frac{4\cdot 0 + 8\cdot 1 + 10\cdot 2 + 6\cdot 3 + 2\cdot 4}{30} = \frac{8+20+18+8}{30} = 1{,}8$$

2. Vypočtěte aritmetický průměr výšek 300 osob, jež jsou uvedeny v tabulce 7.4.

Řešení

Aritmetický průměr výšek osob vypočteme opět podle vzorce (2):

$$\bar{x} = (7\cdot 155 + 20\cdot 160 + 35\cdot 165 + 49\cdot 170 + 84\cdot 175 + \\ + 60\cdot 180 + 27\cdot 185 + 14\cdot 190 + 4\cdot 195) : 300 \doteq 174{,}4 \text{ (cm)}$$

3. Úlohu z předchozího příkladu 2 řešte pro porovnání ještě užitím metody vhodně zvoleného počátku (metody transformace hodnot znaku).

Řešení

Zvolíme $a = x^*_{\min} = x^*_1 = 155$, $b = x^*_{j+1} - x^*_j = 5$ (v cm) a zavedeme nové (transformované) hodnoty znaku $u^*_j = \dfrac{x^*_j - a}{b} = \dfrac{x^*_j - 155}{5}$. Původním hodnotám x^*_j znaku x (v cm): 155, 160, 165, 170, 175, 180, 185, 190, 195 tak odpovídají hodnoty u^*_j nového (pomocného) znaku u: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Vypočteme jejich aritmetický průměr

$$\bar{u} = (7\cdot 0 + 20\cdot 1 + 35\cdot 2 + 49\cdot 3 + 84\cdot 4 + \\ + 60\cdot 5 + 27\cdot 6 + 14\cdot 7 + 4\cdot 8) : 300 \doteq 3{,}883$$

a užitím vztahu (5) určíme hledaný aritmetický průměr:

$$\bar{x} = b\bar{u} + a \doteq 5\cdot 3{,}883 + 155 \doteq 174{,}4 \text{ (cm)}.$$

Užití aritmetického průměru hodnot kvalitativního znaku statistického souboru je velmi časté. Avšak ne vždy musí být aritmetický průměr vhodnou charakteristikou polohy (úrovně) hodnot statistického znaku. Méně vhodný je především v situacích, kdy hodnoty znaku nejsou rovnoměrně rozložené kolem aritmetického průměru, a v případech, kdy v souboru jsou extrémně nízké nebo vysoké hodnoty. Použití aritmetického průměru je zcela nevhodné, jestliže součet hodnot sledovaného znaku nemá věcný smysl.

V některých situacích se uplatňují v praxi další specifické druhy průměrů: geometrický průměr a harmonický průměr.

Geometrický průměr $\bar{x}_G$ kladných hodnot kvantitativního znaku $x_1, x_2, \dots, x_n$ je *definován* vzorcem

$$\bar{x}_G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}. \qquad (6)$$

Máme-li sestavenou tabulku rozdělení četností znaku x, podle níž hodnota znaku x^*_1 má četnost n_1, hodnota znaku x^*_2 četnost n_2 atd. až hodnota x^*_r četnost n_r (kde $n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n$), pak geometrický průměr těchto hodnot znaku je dán vzorcem

$$\bar{x}_G = \sqrt[n]{x_1^{*n_1} \cdot x_2^{*n_2} \cdot \ldots \cdot x_r^{*n_r}}. \qquad (7)$$

Poznámka. Geometrický průměr hodnot znaku $x^*_1, x^*_2, \dots, x^*_r$ počítaný podle vzorce (7) se považuje za jejich *vážený geometrický průměr s váhami danými četnostmi* $n_1, n_2, \dots, n_r$.

Geometrického průměru se ve statistice užívá prakticky jen při vyšetřování některých *národohospodářských časových řad*, jimiž se rozumějí národohospodářské údaje sledované v jistých časových obdobích. Nechť jsou jednotlivá období očíslována 0, 1, 2, ..., n a nechť jsou $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ sledované údaje (hodnoty znaku) v těchto obdobích. Jejich *tempo růstu* vyjadřují podíly hodnot za dvě po sobě následující období: $z_1 = \dfrac{x_1}{x_0}$, $z_2 = \dfrac{x_2}{x_1}$, ..., $z_n = \dfrac{x_n}{x_{n-1}}$. Obvykle se udávají v procentech. *Průměrné tempo růstu* za jedno období pak vyjadřuje geometrický průměr

$$\bar{z}_G = \sqrt[n]{z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n} = \sqrt[n]{\frac{x_n}{x_0}}. \qquad (8)$$

V následujících příkladech ukážeme, jak se pomocí geometrického průměru prakticky provádí výpočet průměrného tempa růstu výroby, míry inflace, mezd fyzických osob apod.

Příklady užití geometrického průměru hodnot kvantitativního znaku

1. Jsou dány v procentech tyto údaje o růstu určitého druhu výroby v devíti po sobě jdoucích letech: 3,5 %, 4,7 %, 7,6 %, 5,8 %, 12,7 %, 16,5 %, 15,3 %, 8,5 %, 10,6 %. Vypočtěte:

a) o kolik procent vzrostla celkem výroba za sledované devítileté období,

b) jaké bylo v tomto období průměrné roční tempo růstu výroby vyjádřené v procentech.

Řešení

Za základ výpočtu procent růstu výroby se bere výroba na počátku 1. roku sledovaného období.

a) V průběhu 1. roku vzrostla výroba na 1,035násobek základu, ve 2. roce na 1,047násobek výroby v 1. roce, tj. na násobek základu $1{,}035 \cdot 1{,}047$, atd. až v 9. roce vzrostla na jeho násobek: $1{,}035 \cdot 1{,}047 \cdot 1{,}076 \cdot 1{,}058 \cdot 1{,}127 \cdot 1{,}165 \cdot 1{,}153 \cdot 1{,}085 \cdot 1{,}106 = 2{,}241\,036\,78 \Rightarrow$ Výroba vzrostla za 9 let přibližně o 124,1 %.

b) K určení průměrného ročního tempa růstu za sledované devítileté období se používá geometrický průměr koeficientů růstu výroby vypočtených v a); podle vzorce (8) je $\sqrt[9]{1{,}035 \cdot \ldots \cdot 1{,}106} = \sqrt[9]{2{,}241\,036\,78} \doteq 1{,}093\,802\,158 \Rightarrow$ Průměrné roční tempo růstu výroby ve sledovaném období bylo přibližně 9,4 %.

2. Podle vývoje úhrnného indexu spotřebitelských cen a služeb činila průměrná roční míra inflace v České republice: v r. 1990 9,9 %, v r. 1991 56,6 %, v r. 1992 11,1 %, v r. 1993 20,8 %, v r. 1994 10,0 %, v r. 1995 9,1 %, v r. 1996 8,8 %, v r. 1997 8,5 %, v r. 1998 10,7 %, v r. 1999 2,1 %, v r. 2000 3,9 %, v r. 2001 4,7 %, v r. 2002 1,8 %, v r. 2003 0,1 %, v r. 2004 2,8 %, v r. 2005 1,9 %, v r. 2006 2,5 %. Vypočtěte:

a) o kolik procent vzrostla míra inflace celkově za období 17 let 1990–2006,

b) jaká byla průměrná roční míra inflace v tomto období v České republice.

Řešení

Obdobným postupem jako v 1. úloze dostáváme:

a) Oproti základu (míře inflace na počátku sledovaného období) míra inflace vzrostla celkově na tento násobek: $1{,}099 \cdot 1{,}566 \cdot 1{,}111 \cdot 1{,}208 \cdot 1{,}1 \cdot 1{,}091 \cdot 1{,}088 \cdot 1{,}085 \cdot 1{,}107 \cdot 1{,}021 \cdot 1{,}039 \cdot 1{,}047 \cdot 1{,}018 \cdot 1{,}001 \cdot 1{,}028 \cdot 1{,}019 \cdot 1{,}025 = 4{,}402\,051\,553 \Rightarrow$ Míra inflace vzrostla za sledované období celkově o přibližně 340,2 %.

b) $\sqrt[17]{4{,}402\,051\,553} \doteq 1{,}091\,093\,745 \Rightarrow$ Průměrná roční míra inflace v tomto období byla přibližně 9,1 %.

3. Jsou známy statistické údaje o průměrné hrubé měsíční mzdě zaměstnanců v národním hospodářství České republiky (na fyzické osoby) v letech 1989–2006: v r. 1989 3 170 Kč, v r. 1990 3 286 Kč, v r. 1991 3 792 Kč, v r. 1992 4 644 Kč, v r. 1993 5 817 Kč, v r. 1994 6 894 Kč, v r. 1995 8 307 Kč, v r. 1996 9 679 Kč, v r. 1997 10 696 Kč, v r. 1998 11 705 Kč, v r. 1999 12 651 Kč, v r. 2000 13 614 Kč, v r. 2001 14 793 Kč, v r. 2002 15 866 Kč, v r. 2003 16 920 Kč, v r. 2004 18 035 Kč, v r. 2005 19 030 Kč, v r. 2006 20 211 Kč. Vypočtěte:

a) o kolik procent vzrůstala průměrná hrubá mzda v jednotlivých letech oproti předchozímu roku,

b) o kolik procent vzrostla průměrná hrubá mzda celkově ve sledovaném období,

c) jaký byl roční průměrný procentní nárůst hrubé mzdy v tomto období.

Řešení

a) Pro r. 1990: $\dfrac{3\,286}{3\,170} = 1{,}036\,593\,06 \Rightarrow$ Nárůst průměrné hrubé měsíční mzdy v r. 1990 o přibližně 3,7 %. Obdobně pro následující roky dostáváme, že průměrné měsíční hrubé mzdy vzrostly přibližně o 15,4 %, 22,5 %, 25,3 %, 18,5 %, 20,5 %, 16,5 %, 10,5 %, 9,4 %, 8,1 %, 7,6 %, 8,7 %, 7,3 %, 6,6 %, 6,6 %, 5,5 %, 6,2 %.

b) $\dfrac{3\,286}{3\,170} \cdot \dfrac{3\,792}{3\,286} \cdot \dfrac{4\,644}{3\,792} \cdot \ldots \cdot \dfrac{18\,035}{16\,920} \cdot \dfrac{19\,030}{18\,035} \cdot \dfrac{20\,211}{19\,030} = \dfrac{20\,211}{3\,170} =$ $= 6{,}375\,709\,779$ (resp. $\dfrac{20\,211}{31{,}7} = 637{,}570\,977\,9$) $\Rightarrow$ Průměrná hrubá měsíční mzda vzrostla celkově za období let 1990–2006 přibližně o 537,6 %.

c) $\sqrt[17]{6{,}375\,709\,779} \doteq 1{,}115\,129\,252 \Rightarrow$ Průměrná hrubá měsíční mzda vzrůstala v letech 1990–2006 ročně přibližně o 11,5 %.

Harmonický průměr $\bar{x}_H$ kladných hodnot znaku $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je definován jako převrácená hodnota aritmetického průměru převrácených hodnot znaku, tj. je dán vzorcem:

$$\bar{x}_H = \frac{1}{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}} \tag{9}$$

Máme-li sestavenou tabulku rozdělení četností, podle níž hodnota znaku x_1^* má četnost n_1, hodnota x_2^* četnost n_2 atd. až hodnota x_r^* četnost n_r (kde $n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n$), pak harmonický průměr těchto hodnot znaku vypočteme podle vzorce:

$$\bar{x}_H = \frac{1}{\frac{1}{n}\left(\frac{n_1}{x_1^*} + \frac{n_2}{x_2^*} + \ldots + \frac{n_r}{x_r^*}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{r}\frac{n_j}{x_j^*}} \tag{10}$$

Poznámka. Harmonický průměr hodnot znaku $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_k^*$ počítaný podle vzorce (10) lze považovat za jejich *vážený harmonický průměr s váhami danými četnostmi* $n_1, n_2, \ldots, n_k$.

Užití harmonického průměru přichází v úvahu poměrně zřídka, má-li věcný smysl součet převrácených hodnot sledovaného znaku.

Příklady užití harmonického průměru hodnot kvantitativního znaku

1. V určité dílně, v níž se vyrábějí stejné výrobky, byly naměřeny šesti dělníkům tyto časy potřebné ke zhotovení jednoho výrobku: 3, 4, 5, 6, 10, 12 minut. Určete dobu, která je v průměru třeba ke zhotovení jednoho výrobku.

Řešení

Výkony jednotlivých dělníků jsou velmi rozsáhlé, např. první vyrobí za tutéž dobu čtyřikrát více výrobků než poslední, proto postrádá věcný smysl počítat aritmetický průměr naměřených časů. Avšak součet jejich převrácených hodnot udává celkovou část produkce všech dělníků za 1 minutu, a tedy průměrná doba potřebná ke zhotovení jednoho výrobku je dána harmonickým průměrem podle vzorce (9):

$$\bar{x}_H = 6 : \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12}\right) =$$
$$= 6 : \frac{20 + 15 + 12 + 10 + 6 + 5}{60} = 6 \cdot \frac{60}{68} \doteq 5{,}3 \text{ (min)}$$

Poznámka. K témuž výsledku lze dospět touto úvahou: Za 1 hodinu, tj. za 60 minut, vyrobí jednotliví dělníci 20, 15, 12, 10, 6, 5 výrobků. Celkem tedy vyrobí 68 výrobků za $6 \cdot 60$ minut čili jeden výrobek vyrobí průměrně za $\dfrac{6 \cdot 60 \text{ minut}}{68} \doteq 5{,}3$ minuty.

2. Máme údaje o plánované hrubé produkci (objemu výroby), skutečné hrubé produkci (objemu výroby) a odtud vypočteném procentu splnění plánu 5 závodů průmyslového podniku, uvedené v tabulce 7.4. (Procento splnění plánu = $\dfrac{\text{skutečná hrubá produkce}}{\text{plánovaná hrubá produkce}} \cdot 100$.) Určete průměrné procento splnění plánu za celý podnik.

Tabulka údajů o výrobě závodů průmyslového podniku pro řešenou úlohu 2 Tab. 7.4

Závod	Plánovaná hrubá produkce (v tis. Kč)	Skutečná hrubá produkce (v tis. Kč)	Procento splnění plánu
1	2 500	2 630	105,2
2	1 700	1 654,1	97,3
3	2 900	3 279,9	113,1
4	2 400	2 820	117,5
5	1 450	1 444,2	99,6
Celkem	10 950	11 828,2	$\bar{x}_H$

Řešení

Průměrné procento splnění plánu lze určit jako vážený harmonický průměr procent splnění plánu jednotlivých závodů podle vzorce (10), přičemž jako váhy (četnosti) vystupují skutečné hrubé produkce (objemy výroby) jednotlivých závodů:

$$\bar{x}_H = 11\,828{,}2 : \left(\frac{2\,630}{105{,}2} + \frac{1\,654{,}1}{97{,}3} + \frac{3\,279{,}9}{113{,}1} + \frac{2\,820}{117{,}5} + \frac{1\,444{,}2}{99{,}6}\right) =$$
$$= 11\,828{,}2 : (25 + 17 + 29 + 24 + 14{,}5) = 11\,828{,}2 : 109{,}5 \doteq 108$$

Poznámka. K témuž výsledku lze dospět takto: Průměrné procento splnění plánu = $\dfrac{\text{celková skutečná hrubá produkce}}{\text{celková plánovaná hrubá produkce}} \cdot 100$. Z plánované hrubé produkce jednotlivých závodů v tabulce 7.4 je určena plánovaná hrubá produkce celého podniku 10 950 (v tis. Kč). Po dosazení do uvedeného vztahu dostáváme hledané průměrné procento splnění plánu $\dfrac{11\,828{,}2}{10\,950} \cdot 100 \doteq 108$.

Doplňující charakteristiky polohy (úrovně) kvantitativních znaků jsou modus a medián.

Definujeme: **Modus** znaku x je jeho hodnota, která má největší četnost. Značí se $\mathrm{Mod}(x)$.

Modus je užíván k odhadu střední hodnoty znaku souboru nejčastěji tehdy, máme-li sestavenou tabulku rozdělení četností pro statistický soubor s velkým rozsahem nebo když modus má v souboru specifický význam.

Příklad, kdy je prakticky používán modus jako charakteristika polohy

Při sledování počtu úrazů na jednotlivých pracovištích v určitém podniku v průběhu dne nás zajímá především modus, tj. nejčetnější hodnota počtu úrazů, abychom tak zjistili, na kterém pracovišti a v kterou denní dobu dochází k úrazům nejčastěji. Podle toho lze pak provést příslušná opatření.

Medián znaku x, jehož hodnoty $x_1, x_2, \dots, x_n$ jsou uspořádány podle velikosti ($x_1 \leqq x_2 \leqq \dots \leqq x_n$), je prostřední hodnota znaku. Značí se $\mathrm{Med}(x)$. Určitěji lze jeho definici vyjádřit takto:

$$\text{Je-li } n \text{ liché, je } \mathrm{Med}(x) = x_{\frac{n+1}{2}}. \qquad \text{Je-li } n \text{ sudé, je } \mathrm{Med}(x) = \frac{1}{2}\left(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}\right). \tag{11}$$

Medián je užíván jako střední hodnota znaku souboru zejména tehdy, když jsou v něm zastoupeny prvky s hodnotami znaku mimořádně odlišnými (malými nebo velkými) oproti ostatním hodnotám znaku. V těchto případech je medián lepší charakteristikou polohy hodnot znaku než aritmetický průměr, který závisí na všech, tedy i na extrémních hodnotách znaku.

Příklad určení $\mathrm{Mod}(x)$ ***a*** $\mathrm{Med}(x)$ ***hodnot kvantitativního znaku*** x ***statistického souboru***

Pro rozdělení četností podle tabulky 7.5 určete aritmetický průměr, modus a medián hodnot znaku x.

Tabulka rozdělení četností hodnot znaku řešené úlohy Tab. 7.5

Hodnoty znaku x_j^*	Četnosti n_j
1	8
2	9
3	19
4	50
5	14
6	7
7	2
8	1
Součet n	110

Řešení

$\bar{x} \doteq 3{,}79$ (podle vzorce (2)), $\mathrm{Mod}(x) = 4$ (neboť největší četnost 50 má hodnota znaku 4), $\mathrm{Med}(x) = 4$ (neboť $\dfrac{x_{55} + x_{56}}{2} = 4$).

Střední hodnoty jako charakteristiky polohy (úrovně) hodnot kvalitativního znaku statistického souboru představují jistou jeho hodnotu, kolem níž je v jistém smyslu nejvíce soustředěno rozdělení četností hodnot znaku. Kromě charakteristik polohy se zavádějí charakteristiky variability hodnot kvantitativního znaku, jimiž se budeme zabývat v následujících odstavcích.

Charakteristiky variability (proměnlivosti, rozptýlení) znaku jsou čísla, která nějak charakterizují, jak se hodnoty znaku prvků souboru liší od zvolené charakteristiky polohy (střední hodnoty), resp. od sebe navzájem. Patří mezi ně variační rozpětí, průměrná absolutní odchylka, rozptyl, směrodatná odchylka a variační koeficient.

Variační rozpětí R je rozdíl mezi největší a nejmenší hodnotou znaku prvků daného souboru:

$$R = x_{\max} - x_{\min}. \tag{12}$$

Je pouze orientační charakteristikou variability znaku.

Poznámka. Rozdíl mezi hodnotou znaku x_j a zvolenou střední hodnotou, např. aritmetickým průměrem $\bar{x}$, se nazývá **odchylka hodnoty znaku** x_j od střední hodnoty.

Dokonalejší charakteristika variability znaku:

Průměrná absolutní odchylka $\bar{d}$ hodnot znaku je aritmetický průměr absolutních hodnot odchylek hodnot znaku všech prvků souboru od aritmetického průměru hodnot znaku:

$$\bar{d} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|, \tag{13}$$

resp. pro dané rozdělení četností (má-li hodnota x_1^* četnost n_1, ..., hodnota x_r^* četnost n_r, $\sum_{j=1}^{r} n_j = n$) *ve váženém tvaru:*

$$\bar{d} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{r} n_j |x_j^* - \bar{x}|. \tag{14}$$

Poznámka. Absolutní hodnoty odchylek se zde berou vzhledem k tomu, že průměrná odchylka hodnot x_i od aritmetického průměru $\bar{x}$ je vždy nulová, neboť pro součet odchylek x_i od aritmetického průměru $\bar{x}$ platí $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = 0$.

Nejdůležitějšími charakteristikami variability znaku v statistickém souboru jsou rozptyl a směrodatná odchylka.

Rozptyl s_x^2 (značí se též s^2) hodnot znaku x je aritmetický průměr druhých mocnin odchylek hodnot znaku od aritmetického průměru:

$$s_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2; \tag{15}$$

resp. pro dané rozdělení četností (při obdobném označení jako u vzorce (14)) *ve váženém tvaru:*

$$s_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{r} n_j (x_j^* - \bar{x})^2. \tag{16}$$

Provedeme-li ve vzorcích (15), (16) naznačené umocnění, lze je upravit na tvary, v nichž se rozptyl zpravidla počítá při „ručních" výpočtech:

$$s_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2, \tag{17}$$

tj. rozptyl se rovná rozdílu aritmetického průměru druhých mocnin hodnot znaku a druhé mocniny jejich aritmetického průměru; resp. pro dané rozdělení četností (má-li hodnota x_1^* četnost n_1, ..., hodnota x_r^* četnost n_r) *ve váženém tvaru:*

$$s_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{r} n_j x_j^{*2} - \bar{x}^2. \tag{18}$$

Poznámka. Při „ručním" výpočtu rozptylu podle vzorce (17), resp. (18) je někdy vhodné použít obdobně jako při „ručním" výpočtu aritmetického průměru (viz str. 349) *metodu vhodně zvoleného počátku* (*metodu transformace hodnot znaku*): Zavedeme nové (transformované) hodnoty znaku $u_i = \frac{x_i - a}{b}$, resp. $u_j^* = \frac{x_j^* - a}{b}$ (přičemž zpravidla volíme konstanty a, b obdobně jako na str. 349), vypočteme rozptyl nových (transformovaných) hodnot znaku

$$s_u^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i^2 - \bar{u}^2, \tag{19}$$

resp. pro dané rozdělení četností *ve váženém tvaru:*

$$s_u^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{r} n_j u_j^{*2} - \bar{u}^2 \tag{20}$$

a pak vypočteme hledaný rozptyl původních hodnot znaku, pro který platí

$$s_x^2 = b^2 \cdot s_u^2 \text{ čili } s_x = |b| s_u. \tag{21}$$

Směrodatná odchylka s_x (značí se též s) hodnot znaku x je druhá odmocnina z rozptylu daného některým ze vzorců (15) až (18): $s_x = \sqrt{s_x^2}$. Výhodou směrodatné odchylky je, že charakterizuje variabilitu znaku v měřicích jednotkách znaku, zatímco rozptyl je vyjádřen ve druhých mocninách těchto jednotek.

Poznámka. Směrodatná odchylka je citlivější charakteristikou variability znaku v porovnání s průměrnou absolutní odchylkou, neboť zesiluje váhu odchylek pro jeho extrémní hodnoty.

Příklad výpočtu charakteristik variability ilustrující jejich význam v porovnání s charakteristikou polohy (aritmetickým průměrem)

Určíme průměrnou absolutní odchylku a směrodatnou odchylku pro tři soubory o témž rozsahu $n = 5$ (pro jednoduchost a názornost výpočtu volíme n malé), které mají týž aritmetický průměr $\bar{x}$ hodnot sledovaného znaku x:

a) 10, 10, 10, 10, 10, b) 8, 9, 10, 11, 12, c) 0, 5, 10, 15, 20.

	Soubor a)	Soubor b)	Soubor c)
Aritmetický průměr:	$\bar{x} = 10$	$\bar{x} = 10$	$\bar{x} = 10$
Průměrná absolutní odchylka:	$\bar{d} = 0$	$\bar{d} = \frac{6}{5} = 1{,}2$	$\bar{d} = 6$
Rozptyl:	$s_x^2 = 0$	$s_x^2 = 2$	$s_x^2 = 50$
Směrodatná odchylka:	$s_x = 0$	$s_x = \sqrt{2} \doteq 1{,}41$	$s_x = 5\sqrt{2} \doteq 7{,}07$

Z řešeného příkladu je patrné, že aritmetický průměr charakterizuje průměrnou hodnotu znaku, ale nevyjadřuje nic bližšího o hodnotách znaku, z nichž byl vypočten. Lze říci, že čím větší je variabilita hodnot znaku, tím méně reprezentativní je aritmetický průměr či jiná charakteristika polohy. Informaci o rozptýlení hodnot znaku kolem aritmetického průměru podává průměrná absolutní odchylka nebo lépe rozptyl, resp. směrodatná odchylka.

Poznámka. V těch případech, kdy máme důvod volit místo aritmetického průměru za charakteristiku polohy znaku x medián Med(x), pak z téhož důvodu volíme místo směrodatné odchylky jinou charakteristiku variability znaku x, zpravidla tzv. **mezikvartilovou odchylku** označovanou $Q(x)$ a *definovanou* takto: Nechť jsou hodnoty znaku x uspořádány podle velikosti $x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_n$ a nechť Q_1 je tzv. první kvartil („čtvrtinová hodnota“), tj. medián z hodnot $x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq \mathrm{Med}(x)$, Q_3 je tzv. třetí kvartil („tříčtvrtinová hodnota“), tj. medián z hodnot $x_n \geqq x_{n-1} \geqq \ldots \geqq \mathrm{Med}(x)$. [Např. pro $n = 20$ je $Q_1 = \frac{1}{2}(x_5 + x_6)$ a $Q_3 = \frac{1}{2}(x_{15} + x_{16})$.] Pak

$$Q(x) = \frac{1}{2}(Q_3 - Q_1). \tag{22}$$

Pro dva nebo více statistických souborů se ke vzájemnému porovnání variability hodnot sledovaných znaků výrazně odlišné úrovně nebo vyjádřených v různých měřicích jednotkách zavádějí tyto *charakteristiky*:

Poměrná průměrná absolutní odchylka $\bar{p}$ je podíl průměrné absolutní odchylky a příslušného aritmetického průměru sledovaného znaku x:

$$\bar{p} = \frac{\bar{d}}{\bar{x}}. \tag{23}$$

Variační koeficient v_x (značí se též v) je definován jako podíl směrodatné odchylky a aritmetického průměru sledovaného znaku x:

$$v_x = \frac{s_x}{\bar{x}}, \tag{24}$$

resp. v procentech

$$v_x = \frac{s_x}{\bar{x}} \cdot 100\ \%. \tag{25}$$

Příklad užití variačního koeficientu

Porovnejte diferenciaci (variabilitu) mezd pracovníků dvou podniků na základě údajů o jejich příjmech v tabulce 7.6.

Tabulka údajů o příjmech pracovníků pro řešenou úlohu Tab. 7.6

1. podnik		2. podnik	
Měsíční mzda x_i (v Kč)	Počet pracovníků n_i	Hodinová mzda x_i (v Kč)	Počet pracovníků n_i
12 000	20	60	30
15 000	30	90	30
18 000	30	120	15
21 000	15	150	10
24 000	5	180	5

Řešení.

Sledovaný statistický znak x (příjem pracovníka) je v podnicích vyjádřen v různých jednotkách (měsíční a hodinová mzda). K porovnání variability mezd užijeme proto variační koeficienty. Podle vzorců (2), (18), (24) postupně dostáváme

pro 1. podnik $\bar{x} = 16\,650$, $s_x \doteq 3\,350$, $v_x \doteq 0{,}201$,

pro 2. podnik $\bar{x} \doteq 96{,}67$, $s_x \doteq 35{,}45$, $v_x \doteq 0{,}367$.

Výsledek: Diferenciace (variabilita) mezd v 1. podniku je nižší než ve 2. podniku.

Statistická závislost znaků, koeficient korelace

Vyšetřujeme-li zároveň dvojici znaků x, y v statistickém souboru o rozsahu n, pak výsledkem šetření jsou uspořádané dvojice hodnot znaků $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$. Kromě charakteristik polohy a variability, počítaných samostatně pro každý z obou znaků x, y, se v tomto případě zajímáme též o tzv. **statistickou závislost znaků**. Volíme-li za charakteristiky polohy aritmetické průměry $\bar{x}$, $\bar{y}$ a za charakteristiky variability směrodatné odchylky s_x, s_y, pak za charakteristiku statistické závislosti znaků x, y volíme **koeficient korelace** r_{xy}, jenž je definován vzorcem:

$$r_{xy} = \frac{k_{xy}}{s_x s_y} \tag{26}$$

V něm k_{xy} je tzv. *kovariance* znaků x, y daná vzorcem:

$$k_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}), \tag{27}$$

který lze po roznásobení výrazů v závorkách upravit na tvar výhodnější pro „ruční“ výpočet:

$$k_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}\bar{y}, \tag{28}$$

kde

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \tag{29}$$

jsou aritmetické průměry. Dále s_x, s_y ve vzorci (26) jsou **směrodatné odchylky** dané vzorci:

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}, \quad s_y = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}, \tag{30}$$

které lze upravit po umocnění výrazů v závorkách na tvary vhodné pro ruční výpočet:

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2}, \quad s_y = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \bar{y}^2} \tag{31}$$

Pro koeficient korelace r_{xy} vždy platí (plyne z Cauchyovy nerovnosti), že

$$|r_{xy}| \leqq 1 \quad \text{čili} \quad r_{xy} \in \langle -1; 1\rangle .$$

Čím blíže je $|r_{xy}|$ k 1, tím považujeme *statistickou závislost mezi znaky x, y za větší.* Krajních hodnot 1 a -1 nabývá r_{xy} tehdy, když mezi znaky x, y je *lineární funkční závislost* (nejenom statistická): $y = ax + b$, kde $a, b \in \mathsf{R}$, $a \neq 0$, přičemž pro $a > 0$ jde o hodnotu $r_{xy} = 1$ a pro $a < 0$ o $r_{xy} = -1$. (Lze se o tom přesvědčit dosazením $y_i = ax_i + b_i$, kde $i = 1, 2, \ldots, n$.)

Poznámka. Kdy v obecném případě vychází koeficient korelace r_{xy} kladný a kdy záporný, odvodíme touto úvahou: Je-li statistická závislost mezi znaky x a y taková, že nadprůměrným hodnotám znaku x odpovídají zpravidla nadprůměrné hodnoty znaku y a podprůměrným hodnotám znaku x odpovídají zpravidla podprůměrné hodoty znaku y, pak ve výrazu k_{xy} daném vzorcem (27) bude většina součinů *kladných*, a tedy i koeficient korelace r_{xy} definovaný vzorcem (26) bude *kladný*. Jestliže nadprůměrným hodnotám znaku x odpovídají zpravidla podprůměrné hodnoty znaku y a naopak, pak ve výrazu k_{xy} bude většina součinů *záporných*, takže i koeficient korelace r_{xy} bude *záporný*. Povšimněme si ještě případů, kdy mezi znaky x, y není žádná statistická závislost: v těchto případech kladné a záporné součiny ve výrazu k_{xy} mají tendenci se v součtu *vyrušit*, a tedy koeficient korelace bude *blízký nule.*

Příklad výpočtu koeficientu korelace

Ze šesti států byly získány údaje o roční spotřebě cigaret na 1 obyvatele (znak x) a o roční míře úmrtnosti na plicní rakovinu na 100 000 obyvatel (znak y). Hodnoty x_i znaku x jsou zaokrouhleny na stovky a hodnoty y_i znaku y jsou zaokrouhleny na jednotky:

x_i	3 400	2 600	2 200	2 400	2 900	2 100
y_i	24	20	17	19	26	20

Vypočtěte koeficient korelace r_{xy} mezi oběma znaky x, y.

Řešení. Při ručním výpočtu určíme nejprve podle vzorců (29) a (31):

$$\bar{x} = 2\,600, \quad \bar{y} = 21, \quad s_x \doteq 443{,}471, \quad s_y \doteq 3{,}055$$

a pak podle vzorců (28) a (26):

$$k_{xy} \doteq 1\,066{,}667, \quad r_{xy} \doteq 0{,}787.$$

V praxi se často setkáváme s případem, kdy znak x může nabývat jen r různých hodnot $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_r^*$ a znaky y jen s různých hodnot $y_1^*, y_2^*, \ldots, y_s^*$. (Sem patří i případ, kdy se hodnoty znaku x i znaku y sdružují v intervaly; x_j^* a y_k^* jsou pak středy těchto intervalů.) V těchto případech pro každou možnou uspořádanou dvojici (x_j^*, y_k^*) zjistíme, kolikrát se vyskytla mezi všemi uspořádanými dvojicemi $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$, tj. zjistíme její **četnost** n_{jk} v souboru n jednotek. Pak **rozdělením četností dvojice znaků** (x, y) nazýváme tabulku:

$x \backslash y$	y_1^*	y_2^*	$\ldots$	y_s^*
x_1^*	n_{11}	n_{12}	$\ldots$	n_{1s}
x_2^*	n_{21}	n_{22}	$\ldots$	n_{2s}
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
x_r^*	n_{r1}	n_{r2}	$\ldots$	n_{rs}

Při výpočtu koeficientu korelace r_{xy} znaků x, y s danou tabulkou rozdělení četností této dvojice znaků postupujeme takto:

a) Sečteme četnosti n_{jk} v jednotlivých řádcích tabulky a dostaneme tak rozdělení četností n_j hodnot x_j^* samotného znaku x. Z tohoto rozdělení vypočteme $\bar{x}$ a s_x:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{r} n_j x_j^*, \quad s_x = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{r} n_j x_j^{*2} - \bar{x}^2}. \tag{32}$$

b) Sečteme četnosti n_{jk} v jednotlivých sloupcích tabulky a dostaneme tak rozdělení četností n'_j hodnot y_j^* samotného znaku y. Z tohoto rozdělení vypočteme $\bar{y}$ a s_y:

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{r} n'_j y_j^*, \quad s_y = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{r} n'_j y_j^{*2} - \bar{y}^2}. \tag{33}$$

c) Vypočteme součet $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, kde každý nenulový součin $x_i y_i$ je roven některému $x_j^* y_k^*$ s četností n_{jk}:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = n_{11}x_1^* y_1^* + n_{12}x_1^* y_2^* + \ldots + n_{1s}x_1^* y_s^* + \ldots + \\ + n_{r1}x_r^* y_1^* + n_{r2}x_r^* y_2^* + \ldots + n_{rs}x_r^* y_s^*. \tag{34}$$

d) Podle vzorce (28) vypočteme k_{xy} a podle vzorce (26) pak r_{xy}.

…výpočtu koeficientu korelace dvojice znaků se zadaným rozdělením četností této dvojice znaků

Žáci byli v matematice klasifikováni známkami 1, 2, 3, 4 na konci 1. ročníku (znak x) a na konci 2. ročníku (znak y). Je dána tabulka rozdělení četností dvojice znaků x, y:

x \ y	1	2	3	4
1	3	1		
2	2	6	5	
3		7	8	
4			2	1

Vypočtěte koeficient korelace r_{xy} mezi oběma známkami.

Řešení (podle uvedeného postupu)

a) Rozdělení četností znaku x je

Známka v 1. roce	1	2	3	4
Četnost	4	13	15	3

Podle vzorců (32) vypočteme: $\bar{x} \doteq 2{,}485\,7$, $s_x \doteq 0{,}806\,1$.

b) Rozdělení četností znaku y je

Známka v 2. roce	1	2	3	4
Četnost	5	14	15	1

Podle vzorců (33) vypočteme: $\bar{y} \doteq 2{,}342\,9$, $s_y \doteq 0{,}753\,6$.

c) Podle vzorce (34) vypočteme součet: $\sum_{i=1}^{35} x_i y_i = 217$.

d) Podle vzorce (28) vypočteme: $k_{xy} \doteq 0{,}376\,2$ a podle vzorce (26): $r_{xy} \doteq 0{,}619$.

8 Matematická analýza

8.1 Limity a spojitost funkce

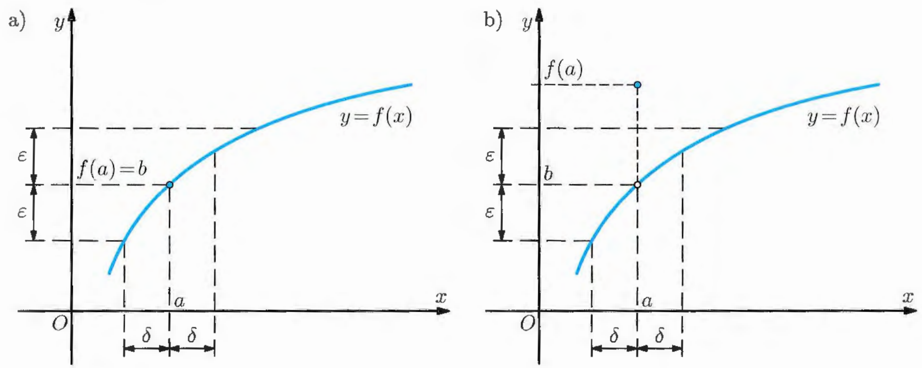
Matematická analýza jako součást středoškolské matematiky navazuje na poznatky uvedené v kap. 4. Tvoří ji základy **diferenciálního počtu** a **integrálního počtu**.

Vlastní limita funkce ve vlastním bodě

V kap. 6.2 jsme definovali limitu posloupnosti pro $n \to \infty$. Nyní se budeme zabývat funkcemi, jejichž definičním oborem je interval, resp. sjednocení intervalů. U takovýchto funkcí lze zavést pojem limity funkce pro $x \to a$, kde $a \in \mathsf{R}$ nebo $a = +\infty$, popř. $a = -\infty$.

Motivace pojmu vlastní (tj. konečné) limity funkce v bodě $a \in \mathsf{R}$: Vyjdeme z grafického znázornění funkcí v obr. 8.1 až 8.5.

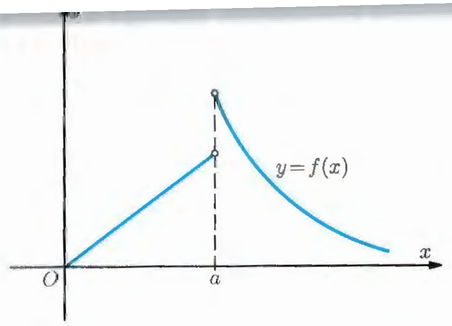
Pro funkce f znázorněné graficky v obr 8.1a,b platí: Jestliže x se blíží neomezeně k a, pak $f(x)$ se blíží k b. (Píšeme: $x \to a \Rightarrow f(x) \to b$.) V tomto případě říkáme, že *funkce f má v bodě a limitu b* ($a, b \in \mathsf{R}$). Přitom může být $b = f(a)$ (obr. 8.1a) anebo $b \neq f(a)$ (obr. 8.1b).



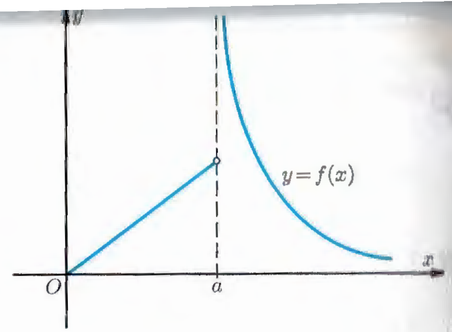
Obr. 8.1

Naproti tomu pro funkce f znázorněné graficky v obr. 8.2 až 8.5 (a obdobně pro další možné průběhy funkce f pro $x \to a$) toto tvrzení neplatí.

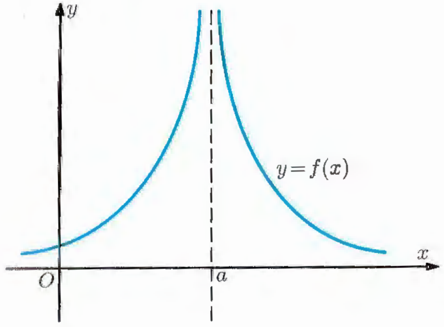
Obdobně jako v případě limity posloupnosti (kap. 6.2) je ovšem nutné limitu funkce v bodě $a \in \mathsf{R}$ definovat, tj. vyjádřit přesně, co se rozumí slovy „blížit se k a, resp. k b“.



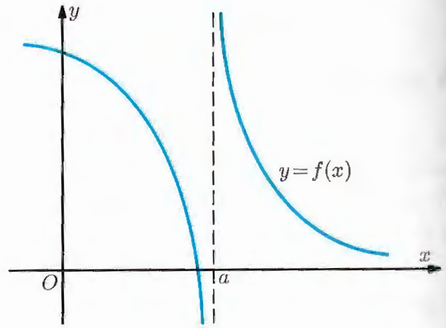
Obr. 8.2



Obr. 8.3



Obr. 8.4

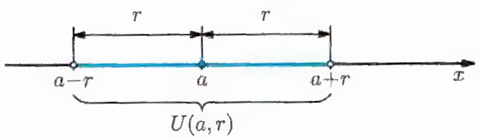


Obr. 8.5

K tomu použijeme pojem okolí bodu a, který nyní zavedeme:

r-okolím bodu a ($r > 0$, $a \in \mathsf{R}$) označovaným $\mathsf{U}(a, r)$ se rozumí otevřený interval (obr. 8.6)

$$\mathsf{U}(a, r) = (a - r, a + r).$$



Obr. 8.6

Přitom, jak víme z kap. 2.5, je

$$(a - r, a + r) = \{x \in \mathsf{R};\ a - r < x < a + r\} =$$
$$= \{x \in \mathsf{R};\ |x - a| < r\}.$$

Číslo $r > 0$ se nazývá **poloměr okolí** $\mathsf{U}(a, r)$.

Místo $\mathsf{U}(a, r)$ se někdy píše stručněji $\mathsf{U}(a)$, pokud hodnota poloměru okolí není v dané situaci podstatná.

Definice vlastní limity funkce v bodě $a \in \mathsf{R}$

Funkce f má v bodě $a \in \mathsf{R}$ limitu $b \in \mathsf{R}$, právě když

1. je funkce f definována v nějakém okolí bodu a, popřípadě s výjimkou samotného bodu a,
2. ke každému (libovolně zvolenému) ε-okolí $\mathsf{U}(b, \varepsilon)$ bodu b existuje takové δ-okolí $\mathsf{U}(a, \delta)$ bodu a, že pro všechna reálná $x \neq a$, platí

$$x \in \mathsf{U}(a, \delta) \Rightarrow f(x) \in \mathsf{U}(b, \varepsilon).$$

Skutečnost, že funkce f má v bodě a limitu b, vyjadřujeme zápisem

$$\lim_{x \to a} f(x) = b,$$

který též čteme: limita $f(x)$ pro x jdoucí (blížící se) k a je rovna b.

Pro praktické použití definice limity $b \in \mathsf{R}$ funkce f v bodě $a \in \mathsf{R}$ je účelné v ní vyjádřit okolí $\mathsf{U}(a, \delta)$, $\mathsf{U}(b, \varepsilon)$ pomocí nerovností. Dospíváme tak k této formulaci definice limity:

$\lim_{x \to a} f(x) = b$ ($a, b \in \mathsf{R}$), právě když platí:

1. funkce f je definována v nějakém okolí bodu a, popřípadě s výjimkou bodu a samého,
2. k libovolnému (libovolně malému) $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna reálná $x \neq a$, pro něž je $|x - a| < \delta$, platí $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Geometrický výklad definice limity funkce $\lim_{x \to a} f(x) = b$ ($a, b \in \mathsf{R}$)

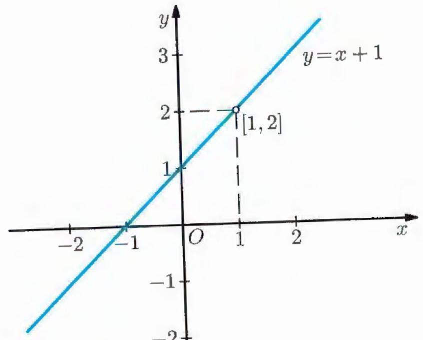
Sestrojíme ε-pás s hraničními přímkami kolmými k ose y kartézské soustavy souřadnic a procházejícími body $b - \varepsilon$, $b + \varepsilon$ osy y. Pak ať je šířka 2ε tohoto pásu jakákoliv (libovolně malá), existuje vždy takové δ-okolí bodu a, že pro každé $x \neq a$ z tohoto δ-okolí příslušný bod $[x, f(x)]$ grafu funkce f leží ve zvoleném ε-pásu.

Příklad určení vlastní limity funkce ve vlastním bodě

Odhadněte $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ a odhad ověřte přímým užitím její definice.

Řešení

Funkce $f\colon y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ je definována pro všechna $x \in \mathsf{R} \setminus \{1\}$ a pro každé $x \in \mathsf{D}(f)$ platí $y = x + 1$, takže grafem funkce f je přímka s výjimkou bodu $[1; 2]$ (obr. 8.7).



Obr. 8.7

Zřejmě pro $x \to 1$ bude $f(x) \to 2$, tj. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = 2$, což podle definice limity znamená: Ke každému (libovolně malému) číslu $\varepsilon > 0$ musí existovat takové číslo $\delta > 0$, že pro všechna $x \in \mathrm{D}(f)$, pro která $0 < |x-1| < \delta$, platí $\left|\dfrac{x^2-1}{x-1} - 2\right| < \varepsilon$. Poslední nerovnice je však pro $x \neq 1$ ekvivalentní s nerovnicí $|x-1| < \varepsilon$. Stačí proto položit $\delta = \varepsilon$ (nebo vzít kterékoliv $\delta < \varepsilon$), a ke každému $\varepsilon > 0$ tedy existuje [illegible] takové $\delta > 0$, že platí pro každé $x \in \mathrm{D}(f) = \mathrm{R} \setminus \{1\}$: $|x-1| < \delta \Rightarrow |f(x) - 2| < \varepsilon$, čímž je důkaz proveden.

Věty o limitách funkcí (vlastních limitách ve vlastním bodě)

V.1. Věta o jednoznačnosti limity funkce
Funkce f má v bodě $a \in \mathrm{R}$ nejvýše jednu limitu.

Důsledek věty V.1. Existuje-li v bodě $a \in \mathrm{R}$ limita funkce f, pak je jediná (právě jedna).

V.2. Je-li f konstantní funkce, tj. $f(x) = c$ pro každé $x \in \mathrm{R}$, pak $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$ pro každé $a \in \mathrm{R}$.

V.3. Věta o limitě součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí
Mají-li funkce f, g v bodě a limity, tj. existují-li limity $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, pak mají v tomto bodě limitu i funkce $f+g$, $f-g$, fg, cf, kde $c \in \mathrm{R}$ je konstanta, a je-li $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$, pak má limitu také funkce $\dfrac{f}{g}$ a platí:

$$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$
$$\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$$
$$\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$$
$$\lim_{x\to a}[cf(x)] = c\lim_{x\to a} f(x)$$
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$$

Příklady výpočtu limity funkce užitím vět V.2, V.3
Určete limity funkcí

a) $\lim\limits_{x\to1}(x^2-5x+7)$, b) $\lim\limits_{x\to-3} \dfrac{x^2+x-6}{x^2-x-2}$, c) $\lim\limits_{x\to0}(1-\cos x)$.

Řešení

a) $\lim\limits_{x\to1}(x^2-5x+7) = 1^2 - 5\cdot1 + 7 = 3$

b) Protože $\lim\limits_{x\to-3}(x^2-x-2) = 10 \neq 0$, je

$$\lim_{x\to-3} \frac{x^2+x-6}{x^2-x-2} = \frac{\lim\limits_{x\to-3}(x^2+x-6)}{\lim\limits_{x\to-3}(x^2-x-2)} = \frac{9-3-6}{9+3-2} = \frac{0}{10} = 0.$$

c) $\lim\limits_{x\to0}(1-\cos x) = \lim\limits_{x\to0} 1 - \lim\limits_{x\to0}\cos x = 1 - 1 = 0$

Z definice limity funkce f v bodě $a \in \mathrm{R}$ plyne, že existence této limity nezávisí na tom, zda funkce f je, anebo není v bodě a definována. Pro výpočet limit je často užitečná *věta:*

V.4. Jestliže pro dvě funkce f, g platí, že pro všechna $x \neq a$ z jistého okolí bodu a je $f(x) = g(x)$, potom $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existuje, právě když existuje $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ a platí

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x).$$

Příklady výpočtu limity užitím věty V.4
Určete limity funkcí

a) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^2-a^2}{x-a}$, b) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x^2+x-6}{x^2-x-2}$, c) $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x+1}{\sqrt{x+5}-2}$.

Řešení
Bezprostřední použití věty o limitě podílu není možné, neboť limity jmenovatelů zlomků jsou rovny nule. Na základě věty V.4 však dostáváme:

a) Pro všechna $x \neq a$ je $\dfrac{x^2-a^2}{x-a} = x + a$, takže $\lim\limits_{x\to a} = \dfrac{x^2-a^2}{x-a} = \lim\limits_{x\to a}(x+a) = 2a$.

b) Pro všechna $x \neq 2$ je $\dfrac{(x+3)(x-2)}{(x+1)(x-2)} = \dfrac{x+3}{x+1}$, takže $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x^2+x-6}{x^2-x-2} =$

$$= \lim_{x\to2} \frac{(x+3)(x-2)}{(x+1)(x-2)} = \frac{\lim\limits_{x\to2}(x+3)}{\lim\limits_{x\to2}(x+1)} = \frac{5}{3}.$$

c) V tomto případě musíme nejprve zlomek usměrnit, tj. rozšířit výrazem $\sqrt{x+5} + 2$:

$$\lim_{x\to-1} \frac{x+1}{\sqrt{x+5}-2} = \lim_{x\to-1} \frac{(x+1)(\sqrt{x+5}+2)}{(\sqrt{x+5}-2)(\sqrt{x+5}+2)} =$$
$$= \lim_{x\to-1} \frac{(x+1)(\sqrt{x+5}+2)}{x+1} =$$
$$= \lim_{x\to-1}(\sqrt{x+5}+2) = \sqrt{-1+5}+2 = 4$$

V.5. Věta o sevření pro vlastní limity funkcí (věta o třech limitách funkcí)
Jestliže pro tři funkce f, g, h platí, že pro všechna $x \neq a$ z nějakého okolí $\mathrm{U}(a)$ bodu $a \in \mathrm{R}$ je $f(x) \leqq h(x) \leqq g(x)$ a funkce f, g mají v bodě a sobě rovné vlastní limity $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = b$, pak také funkce h má v bodě a vlastní limitu a platí $\lim\limits_{x\to a} h(x) = b$.

Příklady významných vlastních limit funkcí
Užitím předchozí věty V.5 lze odvodit významnou limitu:

$$\lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Pomocí této limity a goniometrických vzorců $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, $1 - \cos x = 2\sin^2 \dfrac{x}{2}$ lze odvodit další důležité limity:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$$

Poznámka. Uvedené limity lze též vypočítat užitím l'Hospitalova pravidla (viz kap. 8.3).

Jednostranné limity funkcí

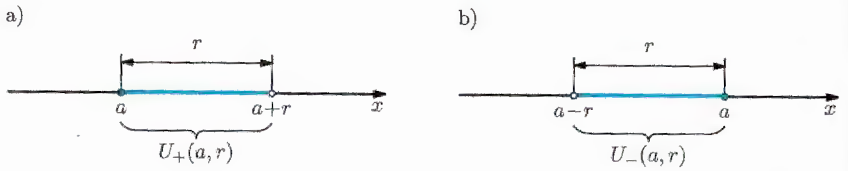
Při definování jednostranných limit funkcí se používají pojmy pravé a levé okolí bodu a:

Pravým r-okolím bodu a ($r > 0$, $a \in \mathsf{R}$) označovaným $\mathsf{U}_+(a, r)$ se rozumí polouzavřený interval (obr. 8.8a)

$$\mathsf{U}_+(a, r) = \langle a, a + r).$$

Levým r-okolím bodu a ($r > 0$, $a \in \mathsf{R}$) označovaným $\mathsf{U}_-(a, r)$ se rozumí polouzavřený interval (obr. 8.8b)

$$\mathsf{U}_-(a, r) = (a - r, a\rangle\,.$$



Obr. 8.8

Přitom, jak víme z kap. 2.5, je

$$\langle a, a + r) = \{x \in \mathsf{R};\, a \leqq x < a + r\}, \qquad (a - r, a\rangle = \{x \in \mathsf{R};\, a - r < x \leqq a\}.$$

Definice jednostranných vlastních limit funkce v bodě $a \in \mathsf{R}$

Funkce f má v bodě $a \in \mathsf{R}$ limitu zprava $b_1 \in \mathsf{R}$, právě když

1. je definována v nějakém pravém okolí bodu a, popřípadě s výjimkou samého bodu a,
2. ke každému (libovolně zvolenému) ε-okolí $\mathsf{U}(b_1, \varepsilon)$ bodu b_1 existuje pravé δ-okolí $\mathsf{U}_+(a, \delta)$ bodu a tak, že pro všechna reálná $x \neq a$ platí

$$x \in \mathsf{U}_+(a, \delta) \Rightarrow f(x) \in \mathsf{U}(b_1, \varepsilon).$$

Značí se $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$.

Funkce f má v bodě $a \in \mathsf{R}$ limitu zleva $b_2 \in \mathsf{R}$, právě když

1. je definována v nějakém levém okolí bodu a, popřípadě s výjimkou samého bodu a,
2. ke každému (libovolně zvolenému) ε-okolí $\mathsf{U}(b_2, \varepsilon)$ bodu b_2 existuje levé δ-okolí $\mathsf{U}_-(a, \delta)$ bodu a tak, že pro všechna reálná $x \neq a$ platí

$$x \in \mathsf{U}_-(a, \delta) \Rightarrow f(x) \in \mathsf{U}(b_2, \varepsilon).$$

Značí se $\lim\limits_{x\to a-} f(x)$.

Souhrnně se limitám funkce v bodě zprava a zleva říká **jednostranné limity**.

V obr. 8.2 je graf funkce f, která má v bodě $a \in \mathsf{R}$ obě jednostranné vlastní limity, jež jsou navzájem různé, limita (oboustranná) v bodě a neexistuje.

Platí *věta:*

Limita funkce f v bodě $a \in \mathsf{R}$ existuje, právě když existují v bodě a limity zprava i zleva a jsou si rovny. Potom je

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a-} f(x).$$

Další druhy limit a jednostranných limit funkce v bodě

V úvodu této kapitoly jsme definovali pojem **limity funkce f v bodě** a a označili ji $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, kde $a, b \in \mathsf{R}$. Tento pojem lze *rozšířit* (*zobecnit*) pro případy, kdy a, popř. b jsou $+\infty$, resp. $-\infty$ (tzv. *nevlastní body*). V této souvislosti limita funkce f v bodě $a \in \mathsf{R}$ se určitěji nazývá **vlastní limita funkce f ve vlastním bodě** a. Obdobně se pro $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = b_1$, $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = b_2$, kde $a, b_1, b_2 \in \mathsf{R}$, užívají názvy **jednostranné vlastní limity funkce f ve vlastním bodě** a.

Další druhy limit funkce v bodě jsou tyto:

a) **Nevlastní limity funkce f ve vlastním bodě** $a \in \mathsf{R}$: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

b) **Jednostranné nevlastní limity funkce f ve vlastním bodě** $a \in \mathsf{R}$: $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = \pm\infty$.

c) **Vlastní limity funkce f v nevlastním bodě:** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b \in \mathsf{R}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b \in \mathsf{R}$.

d) **Nevlastní limity funkce f v nevlastním bodě:** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \pm\infty$.

Intuitivní pojetí (názorná představa) všech druhů limit funkce v bodě:

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, kde $a, b \in \mathsf{R}$ nebo $a = +\infty$, resp. $a = -\infty$, $b = +\infty$, resp. $b = -\infty$, znamená, že pro x neomezeně se blížící k a ($x \to a$) se $f(x)$ blíží k b ($f(x) \to b$);

$\lim\limits_{x\to a+} f(x) = b_1$, kde $a, b_1 \in \mathsf{R}$ nebo $b_1 = +\infty$, resp. $b_1 = -\infty$, znamená, že pro x neomezeně se blížící k a zprava ($x \to a+$) se $f(x)$ blíží k b_1 ($f(x) \to b_1$);

$\lim\limits_{x \to a-} f(x) = b_2$, kde $a, b_2 \in \mathsf{R}$ nebo $b_2 = +\infty$, resp. $b_2 = -\infty$, znamená, že pro x neomezeně se blížící k a zleva ($x \to a-$) se $f(x)$ blíží k b_2 ($f(x) \to b_2$).

Příklady

Funkce f znázorněná graficky v obr. 8.3 má v bodě $a \in \mathsf{R}$ nevlastní limitu zprava rovnou $+\infty$ a má v něm vlastní limitu zleva, v obr. 8.4 má funkce f v bodě $a \in \mathsf{R}$ nevlastní limitu $+\infty$, v obr. 8.5 má funkce f v bodě $a \in \mathsf{R}$ zprava nevlastní limitu $+\infty$ a zleva nevlastní limitu $-\infty$.

Obdobně jako v případě vlastní limity funkce ve vlastním bodě také v případech ostatních druhů limit funkce není možné vystačit jen s intuitivním pojetím, ale je nutné formulovat jejich přesné definice. Vyslovíme zde na ukázku jen dvě z nich (další definice lze vyslovit analogicky).

Definice nevlastní limity funkce f ve vlastním bodě a ($\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$)

Funkce f má v bodě $a \in \mathsf{R}$ limitu $+\infty$, právě když platí:

1. Funkce f je definována pro všechna $x \neq a$ z nějakého okolí bodu $a \in \mathsf{R}$.
2. Ke každému (libovolně zvolenému) číslu $K \in \mathsf{R}$ existuje číslo $\delta > 0$ tak, že pro všechna $x \neq a$ z okolí $\mathsf{U}(a, \delta)$ (tj. splňující nerovnosti $0 < |x - a| < \delta$) jsou příslušné funkční hodnoty $f(x) > K$.

Definice vlastní limity funkce f v nevlastním bodě $+\infty$ ($\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b \in \mathsf{R}$)

Funkce f má v bodě $+\infty$ limitu $b \in \mathsf{R}$, právě když platí:

1. Funkce f je definována na nějakém intervalu $(c, +\infty)$.
2. Ke každému (libovolně zvolenému) číslu $\varepsilon > 0$ existuje takové číslo $K \in (c, +\infty)$, že pro všechna $x > K$ jsou příslušné funkční hodnoty $f(x)$ v okolí $\mathsf{U}(b, \varepsilon)$ (tj. platí pro ně $|f(x) - b| < \varepsilon$).

Poznámka. Podrobněji se s definicemi a větami o všech uvedených druzích limit funkcí i s jejich užitím můžete seznámit v publikaci Polák, J. *Středoškolská matematika v úlohách II.*

Příklady dalších významných limit funkcí

Uvedeme limity funkcí důležité pro aplikace (např. pro odvození derivací některých základních elementárních funkcí, viz kap. 8.2):

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{x \to 0+} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e} \\ \lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{x \to 0-} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e} \end{aligned}\right\} \lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \ (a > 0, a \neq 1)$$

Poznámka. Uvedené limity funkcí se ve středoškolských učebnicích obvykle nedokazují. Limity uvedené v posledním řádku lze odvodit z předchozí limity užitím vhodných úprav a substitucí.

Spojitost funkce v bodě

Máme-li zaveden pojem vlastní limity ve vlastním bodě, pak pro funkci f definovanou na nějakém okolí bodu $a \in \mathsf{R}$ lze *definovat* pojem spojitosti funkce f v bodě takto:

Říkáme, že funkce f je spojitá v bodě $a \in \mathsf{R}$ takovém, že f je definovaná v jeho okolí, právě když existuje $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ a platí

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Geometrický výklad spojitosti funkce v bodě: Spojitost funkce f v bodě $a \in \mathsf{R}$, v jehož okolí je f definovaná, znamená, že její graf je pro hodnotu argumentu $x = a$ „nepřetržený“, tj. obsahuje bod $[a, f(a)]$.

Např. funkce f znázorněná graficky v obr. 8.1a je v bodě a spojitá, zatímco funkce f znázorněná v obr. 8.1b je v bodě a nespojitá.

Platí následující *věty o funkcích spojitých v bodě*:

Věta o spojitosti součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí

Jsou-li funkce f, g spojité v bodě a, pak jsou v tomto bodě též spojité funkce $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, a je-li kromě uvedeného předpokladu splněna podmínka $g(a) \neq 0$, je v bodě a spojitá též funkce $\dfrac{f}{g}$.

Větu o spojitosti součtu a součinu funkce lze (matematickou indukcí) zobecnit pro libovolný počet funkcí: Jsou-li funkce $f_1, f_2, \ldots, f_n$ spojité v bodě a, pak jsou v tomto bodě spojité též funkce $f_1 + f_2 + \ldots + f_n$, $f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n$ $(n \in \mathsf{N})$.

Věta o limitě složené funkce v bodě, v němž je spojitá

Je-li funkce $u = g(x)$ spojitá v bodě a, tj. $\lim\limits_{x \to a} g(x) = g(a)$, a funkce $y = f(u)$ spojitá v bodě $g(a)$, tj. $\lim\limits_{u \to g(a)} f(u) = f[g(a)]$, pak existuje $\lim\limits_{x \to a} f[g(x)]$ a platí

$$\lim_{x \to a} f[g(x)] = f\left[\lim_{x \to a} g(x)\right] = f[g(a)].$$

Věta o spojitosti základních elementárních funkcí v bodech jejich definičního oboru

Každá základní elementární funkce f (mocninná, exponenciální, logaritmická, goniometrická) je spojitá v každém vnitřním bodě svého definičního oboru $\mathsf{D}(f)$.

Důsledek uvedených tří vět: Každá elementární funkce f je spojitá v každém vnitřním bodě svého definičního oboru $\mathsf{D}(f)$.

Příklady vyšetřování spojitosti funkcí užitím vět o funkcích spojitých v bodě

Stanovte, v kterých bodech jsou spojité a v kterých jsou nespojité funkce

a) $f_1\colon y = 1 + x \cos x$, b) $f_2\colon y = \dfrac{x}{x^2-1}$,

c) $f_3\colon y = \dfrac{1}{\sin x}$, d) $f_4\colon y = \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2$.

Řešení

Z uvedených vět o spojitosti funkcí v bodě plyne, že

a) funkce f_1 je spojitá ve všech bodech $x \in \mathsf{R}$,

b) funkce f_2 je spojitá ve všech bodech $x \in \mathsf{R} \setminus \{\pm 1\}$,

c) funkce f_3 je spojitá ve všech bodech $x \in \mathsf{R} \setminus \bigcup_{k\in\mathsf{Z}} \{k\pi\}$,

d) funkce f_4 je spojitá ve všech bodech $x \in \mathsf{R} \setminus \{1\}$.

Jednostranná spojitost funkce v bodě a spojitost funkce na intervalu

Nechť je funkce f definována na nějakém pravém okolí bodu $a \in \mathsf{R}$. Říkáme, že **funkce f je spojitá zprava v bodě** a, právě když v něm má vlastní limitu zprava, která se rovná funkční hodnotě v tomto bodě:

$$\lim_{x\to a+} f(x) = f(a).$$

Nechť je funkce f definována na nějakém levém okolí bodu $a \in \mathsf{R}$. Říkáme, že **funkce f je spojitá zleva v bodě** a, právě když v něm má vlastní limitu zleva, která se rovná funkční hodnotě v tomto bodě:

$$\lim_{x\to a-} f(x) = f(a).$$

Věta o spojitosti funkce v bodě

Funkce f je spojitá v bodě a, právě když je v něm spojitá zprava i zleva.

Funkce f je spojitá na otevřeném intervalu (a, b), je-li spojitá v každém bodě tohoto intervalu.

Funkce f je spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$, je-li spojitá na (a, b) a v bodě a je spojitá zprava, v bodě b je spojitá zleva. Obdobně lze definovat **spojitost funkce f na polouzavřených intervalech** $\langle a, b)$, $(a, b\rangle$.

Významné *věty o funkcích spojitých na uzavřeném intervalu*:

V.1. Věta Weierstrassova [čti: vajerštrasova] *o globálních extrémech*

Je-li funkce f spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$, pak na něm nabývá v alespoň jednom bodě x_1 nejmenší hodnoty (globálního minima) $\min\limits_{x\in\langle a,b\rangle} f(x) = f(x_1)$ a v alespoň jenom bodě x_2 největší hodnoty (globálního maxima) $\max\limits_{x\in\langle a,b\rangle} f(x) = f(x_2)$, tj. existuje dvojice takových bodů $x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$, že pro každé $x \in \langle a, b\rangle$ platí $f(x_1) \leqq f(x) \leqq f(x_2)$.

Důsledek Weierstrassovy věty V.1. Je-li funkce f spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$, pak je na něm omezená.

Poznámka. Na otevřeném intervalu (a, b) a polouzavřených intervalech $\langle a, b)$, $(a, b\rangle$ věta V.1 a její důsledek neplatí.

V.2. Věta o „mezihodnotách“

Je-li funkce f spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ a $f(a) \neq f(b)$, pak ke každému číslu K ležícímu mezi čísly $f(a)$, $f(b)$, existuje alespoň jeden takový bod $c \in (a, b)$, že platí $f(c) = K$. (Tj. funkce f nabývá na (a, b) všech *„mezihodnot“* mezi $f(a)$ a $f(b)$; této její vlastnosti se říká *Darboauxova vlastnost* [čti: darbúova].)

V.3. Věta Bolzanova o nulové hodnotě

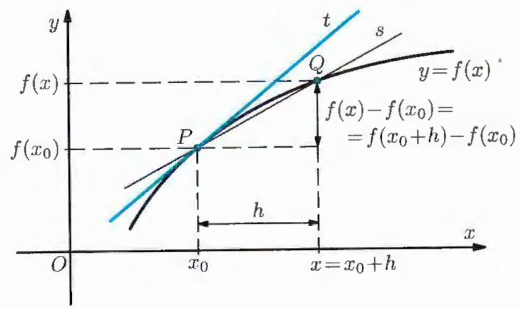
Je-li funkce f spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ a mají-li funkční hodnoty $f(a)$, $f(b)$ různá znaménka, tj. platí-li $f(a) \cdot f(b) < 0$, pak existuje alespoň jeden takový bod $c \in (a, b)$, že je v něm $f(c) = 0$.

Důsledek Bolzanovy věty V.3: Je-li funkce f mající vlastnosti podle věty V.3 navíc ryze monotónní (rostoucí, resp. klesající) na intervalu (a, b), pak existuje *právě jeden* bod $c \in (a, b)$ takový, že je v něm $f(c) = 0$.

8.2 Derivace funkce

Motivace pojmu derivace funkce v bodě. Zvolme na grafu spojité funkce $f\colon y = f(x)$ dva body $P[x_0, f(x_0)]$, $Q[x_0 + h, f(x_0 + h)]$ a označme φ velikost orientovaného úhlu, který svírá **sečna** $s = \leftrightarrow PQ$ **grafu funkce** f s kladnou poloosou $+x$ (obr. 8.9). Směrnice sečny je

$$k_s = \operatorname{tg} \varphi = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$



Obr. 8.9

Pro $h \to 0$ se bod Q blíží po grafu funkce f k bodu P, přičemž v mezním případě, kdy bod Q splyne s bodem P, přejde sečna s v **tečnu** t **grafu funkce** f

v bodě dotyku P. Označme α velikost orientovaného úhlu, který svírá tečna t s kladnou poloosou $+x$. Směrnice tečny t je

$$k_t = \operatorname{tg}\alpha = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Tato limita má velký význam i pro další aplikace, a proto se pro ni zavádí speciální název.

Derivace funkce v bodě

Je-li funkce $f\colon y = f(x)$ definována v nějakém okolí $\mathsf{U}(x_0)$ bodu $x_0 \in \mathsf{R}$ a existuje-li vlastní limita $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, pak se tato limita nazývá **derivace funkce f v bodě x_0**. Značí se $f'(x_0)$, tj. platí

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}. \qquad (1)$$

Často je též užitečné alternativní vyjádření derivace $f'(x_0)$, které dostaneme, položíme-li $x = x_0 + h$ čili $h = x - x_0$:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \qquad (2)$$

Poznámka. V případě, že je limita $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ nevlastní, tj. rovná se $+\infty$, resp. $-\infty$, nazývá se **nevlastní derivace funkce f v bodě** x_0. Značí se opět $f'(x_0)$. Ve středoškolské matematice se však převážně pracuje s **vlastní derivací funkce f v bodě** x_0 a přívlastek vlastní se pak vynechává (viz uvedenou definici).

Příklady výpočtu derivace funkce v bodě přímým užitím definice

Určete na základě definičního vztahu (1) derivace daných funkcí f v bodě $x_0 \in \mathsf{R}$:

a) $f\colon y = f(x) = k$, kde k je reálná kontstanta, $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$,

b) $f\colon y = x$, $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$, c) $f\colon y = x^2$, $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}$.

Řešení

a) $f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{k-k}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 0 = 0$

b) $f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 1 = 1$

c) $f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2x_0h+h^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(2x_0+h) = 2x_0$

Poznámka. Přesvědčte se, že k týmž výsledkům dospějeme také užitím definičního vztahu (2).

Z motivace derivace funkce f v bodě $x_0 \in \mathsf{R}$ plyne:
Derivace (vlastní derivace) funkce f v bodě x_0 je rovna směrnici k_t tečny t ke grafu funkce f v bodě $[x_0, f(x_0)]$; tedy platí

$$k_t = f'(x_0); \quad t\colon y - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0).$$

Nevlastní derivace funkce f v bodě $x_0 \in \mathsf{R}$ $[f'(x_0) = +\infty$, resp. $f'(x_0) = -\infty]$, znamená, že tečna t ke grafu funkce f v bodě $[x_0, f(x_0)]$ je rovnoběžná s osou y; tedy platí

$$t\colon x = x_0.$$

Jednostranné derivace funkce v bodě

Ukazuje se účelné zavést také **jednostranné derivace funkce f v bodě** $x_0 \in \mathsf{R}$ těmito *definicemi*:

Je-li funkce f definovaná v nějakém pravém okolí $\mathsf{U}_+(x_0)$ bodu $x_0 \in \mathsf{R}$ a existuje-li limita zprava $\lim\limits_{h\to 0+}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, nazývá se **derivace zprava funkce f v bodě x_0**. Značí se $f'_+(x_0)$. Je tedy

$$f'_+(x_0) = \lim_{h\to 0+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Je-li funkce f definovaná v nějakém levém okolí $\mathsf{U}_-(x_0)$ bodu $x_0 \in \mathsf{R}$ a existuje-li limita zleva $\lim\limits_{h\to 0-}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, nazývá se **derivace zleva funkce f v bodě x_0**. Značí se $f'_-(x_0)$. Je tedy

$$f'_-(x_0) = \lim_{h\to 0-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Poznámka. Zřejmě platí, že derivace $f'(x_0)$ existuje, právě když existují jednostranné derivace $f'_+(x_0)$, $f'_-(x_0)$ a jsou si rovny. Pak platí

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0).$$

Příklad výpočtu jednostranných derivací v bodě přímým užitím definice

Určete jednostranné derivace funkce $f\colon y = |x-1|$ v bodě $x_0 = 1$.

Řešení

a) $f'_+(1) = \lim\limits_{h\to 0+}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0+}\dfrac{|h|}{h} = \lim\limits_{h\to 0+}\dfrac{h}{h} = 1$

b) $f'_-(1) = \lim\limits_{h\to 0-}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0-}\dfrac{|h|}{h} = \lim\limits_{h\to 0-}\dfrac{-h}{h} = -1$

Protože $f'_+(1) \neq f'_-(1)$, nemá funkce f v bodě 1 oboustrannou derivaci $f'(1)$.

Derivace funkce na množině

Je-li f funkce, která má derivaci $f'(x)$ v každém bodě x jisté množiny $\mathsf{M} \subset \mathsf{D}(f)$, potom je na množině M definována funkce, která každému $x \in \mathsf{M}$ přiřazuje právě jedno číslo $f'(x)$. Tuto funkci značíme f' a nazýváme ji derivace funkce f na množině M.

Hodnotu derivace v bodě x_0 dostaneme, když za argument dosadíme do funkčního předpisu pro f' hodnotu argumentu x_0.

Poznámka. Je-li funkce f daná analytickým funkčním předpisem $y = f(x)$, označuje se derivace funkce f často místo f' též y' a její hodnota v bodě x_0 místo $f'(x_0)$ také $y'(x_0)$.

Podle uvedené *definice* **funkce f má derivaci f' na otevřeném intervalu** (a, b), právě když má v každém bodě $x \in (a, b)$ derivaci $f'(x)$. Pomocí jednostranných derivací v bodech a, b lze tuto definici rozšířit i pro uzavřený interval $\langle a, b\rangle$ a polouzavřené intervaly $\langle a, b)$, $(a, b\rangle$.

Dále *definujeme*: **Funkce f má derivaci f' na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$, resp. na polouzavřeném intervalu** $\langle a, b)$ nebo $(a, b\rangle$, právě když má derivaci $f'(x)$ v každém bodě $x \in (a, b)$ a derivaci zprava $f'_+(a)$ v bodě a, když interval obsahuje bod a, popř. derivaci zleva $f'_-(b)$ v bodě b, když interval obsahuje bod b.

Věty o derivacích funkcí

V.1. Věta o vztahu mezi derivací a spojitostí funkce v bodě
Má-li funkce f v bodě $x_0 \in \mathsf{R}$ derivaci $f'(x_0) \in \mathsf{R}$, je v tomto bodě spojitá.

Poznámka. Věta V.1 platí jen pro vlastní derivaci. V případě existence nevlastní derivace funkce f v bodě $x_0 \in \mathsf{R}$ nemusí v něm být funkce f spojitá. *Např.* pro funkci $f(x) = \operatorname{sgn} x$ (viz kap. 4.1) je $f'_+(0) = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{1 - 0}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{1}{x} = +\infty$, $f'_-(0) = \lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{-1 - 0}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0-} \left(-\dfrac{1}{x}\right) = +\infty$, a tedy funkce $f\colon y = \operatorname{sgn} x$ má v bodě 0 nevlastní derivaci $f'(0) = +\infty$, avšak není v bodě 0 spojitá.

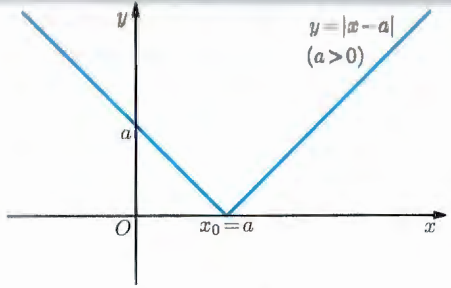
Obrácená věta k větě V.1 neplatí; funkce spojitá v bodě $x_0 \in \mathsf{R}$ v něm nemusí mít derivaci (rozumí se vlastní derivaci). Vzhledem ke geometrickému významu derivace funkce f v bodě $x_0 \in \mathsf{R}$ může tato situace nastat ve dvou případech:

a) Když *graf funkce f nemá v bodě* $[x_0, f(x_0)]$ *tečnu* (viz např. graf funkce f v obr. 8.10), tj. neexistuje v něm vlastní (ani nevlastní) derivace $f'(x_0)$.

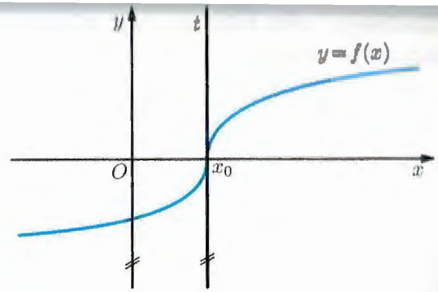
b) Když *graf funkce f má v bodě* $[x_0, f(x_0)]$ *tečnu rovnoběžnou s osou y* (viz např. graf funkce f v obr. 8.11), tj. existuje v něm jen nevlastní derivace $f'(x_0)$ $[f'(x_0) = +\infty$, resp. $f'(x_0) = -\infty]$.

Užitím definice derivace funkce v bodě a vět o limitách funkcí se dokazují následující důležité *věty*:

V.2. Věta o derivaci základních elementárních funkcí
Základní elementární funkce (kap. 4.3) mají derivace uvedené v tabulce 8.1.



Obr. 8.10



Obr. 8.11

Vzorce pro derivace elementárních funkcí Tab. 8.1

Funkce $f\colon y = f(x)$	Vzorce pro derivaci funkce f	Podmínky platnosti vzorce ($x \in \mathsf{D}(f')$)
$y = c$ ($c \in \mathsf{R}$)	$y' = 0$	$x \in (-\infty, +\infty)$
$y = x^n$, $n \in \mathsf{N}$	$y' = nx^{n-1}$	$x \in (-\infty, +\infty)$
$y = x^k$, $k \in \mathsf{Z}$	$y' = kx^{k-1}$	$x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
$y = x^r$, $r \in \mathsf{R}$	$y' = rx^{r-1}$	$x \in (0, +\infty)$
$y = \mathrm{e}^x$	$y' = \mathrm{e}^x$	$x \in (-\infty, +\infty)$
$y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$)	$y' = a^x \ln a$	$x \in (-\infty, +\infty)$
$y = \ln x$	$y' = \dfrac{1}{x}$	$x \in (0, +\infty)$
$y = \log_a x$ ($a > 0$)	$y' = \dfrac{1}{x \ln a}$	$x \in (0, +\infty)$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$	$x \in (-\infty, +\infty)$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$	$x \in (-\infty, +\infty)$
$y = \operatorname{tg} x$	$y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$x \in \bigcup\limits_{k\in\mathsf{Z}} \left((2k-1)\dfrac{\pi}{2}, (2k+1)\dfrac{\pi}{2}\right)$
$y = \operatorname{cotg} x$	$y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$x \in \bigcup\limits_{k\in\mathsf{Z}} (k\pi, (k+1)\pi)$
$y = \arcsin x$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$x \in (-1; 1)$
$y = \arccos x$	$y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$x \in (-1; 1)$
$y = \operatorname{arctg} x$	$y' = \dfrac{1}{1 + x^2}$	$x \in (-\infty, +\infty)$
$y = \operatorname{arccotg} x$	$y' = -\dfrac{1}{1 + x^2}$	$x \in (-\infty, +\infty)$
$y = \sinh x$	$y' = \cosh x$	$x \in (-\infty, +\infty)$
$y = \cosh x$	$y' = \sinh x$	$x \in (-\infty, +\infty)$
$y = \operatorname{tgh} x$	$y' = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$	$x \in (-\infty, +\infty)$
$y = \operatorname{cotgh} x$	$y' = -\dfrac{1}{\sinh^2 x}$	$x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

Poznámka. Při odvození některých ze vzorců uvedených v tabulce 8.1 se užívají následující věty V.3 a V.4. (Odvození viz v publikaci Polák, J. *Středoškolská matematika v úlohách II.*)

V.3. Věta o derivaci součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí
Mají-li funkce f, g v bodě x_0 derivaci $f'(x_0)$ a $g'(x_0)$, pak v tomto bodě mají derivaci i funkce $f+g$, $f-g$, fg, cf, kde $c \in \mathsf{R}$ je konstanta, a pro $g(x_0) \neq 0$ také funkce $\frac{f}{g}$, přičemž platí:

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$
$$(f-g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$$
$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$
$$(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

Pro zapamatování těchto vzorců je vhodný jejich stručný tvar uvedený v tabulce 8.2.

Vzorce pro derivaci součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí Tab. 8.2

Jestliže funkce f: $u = f(x)$, g: $v = g(x)$ mají derivaci v každém bodě $x \in \mathsf{M}$ (kde množina M je interval, resp. sjednocení intervalů), pak vzorce pro derivaci součtu, rozdílu, součinu a podílu těchto funkcí platí pro všechna $x \in \mathsf{M}$ (u podílu za předpokladu, že $g(x) \neq 0$) a stručně je zapisujeme takto:

$$(u+v)' = u' + v'$$
$$(u-v)' = u' - v'$$
$$(uv)' = u'v + uv'$$
$$(cu)' = cu', \quad c \in \mathsf{R}$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \quad v \neq 0$$

Poznámka. Vzorce pro derivaci součtu a součinu funkcí lze (za předpokladu existence příslušných derivací) rozšířit matematickou indukcí pro n funkcí u_i ($i = 1, 2, \ldots, n$):
$(u_1 + u_2 + \ldots + u_n)' = u_1' + u_2' + \ldots + u_n'$,
$(u_1 \cdot u_2 \cdot \ldots \cdot u_n)' = u_1' \cdot u_2 \cdot \ldots \cdot u_n + u_1 \cdot u_2' \cdot \ldots \cdot u_n + \ldots + u_1 \cdot u_2 \cdot \ldots \cdot u_n'$.

V.4. Věta o derivaci složené funkce
Nechť funkce g: $u = g(x)$ má v bodě x_0 derivaci $g'(x_0)$ a nechť funkce f: $y = f(u)$ má v bodě $u_0 = g(x_0)$ derivaci $f'(u_0)$. Pak složená funkce h: $f(g(x))$ má derivaci v bodě x_0, přičemž platí

$$h'(x_0) = f'(u_0)g'(x_0).$$

K zapamatování vzorce pro derivaci složené funkce je vhodný tvar vyjadřující tuto derivaci v obecném (proměnném) bodě x, který uvádíme v tabulce 8.3. Vzorec vyjadřuje, že derivace složené funkce (podle proměnné x) je rovna součinu derivace vnější funkce (podle proměnné u) a derivace vnitřní funkce (podle proměnné x).

Vzorec pro derivaci složené funkce Tab. 8.3

Jestliže je dána složená funkce h: $y = f(g(x))$, přičemž vnitřní funkce g má derivaci v každém bodě $x \in \mathsf{M}$ a vnější funkce f má derivaci f' v každém odpovídajícím bodě $u = g(x)$, pak složená funkce $h = f \circ g$ má derivaci h' v každém bodě $x \in \mathsf{M}$, pro niž platí

$$h'(x) = f'(u)g'(x).$$

Poznámka. Výpočet derivace funkce se stručně nazývá **derivování funkce.**

Příklady výpočtu derivací na základě vzorců
Pokud nepřipisujeme k výsledku podmínku platnosti, předpokládá se, že jak daná funkce, tak její derivace jsou definovány pro všechna $x \in \mathsf{R}$.

1. Vypočtěte v přípustných bodech derivace funkcí daných funkčními předpisy:

a) $y = x^3$, b) $y = \pi x^2$,

c) $y = 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 + x - 1$, d) $y = x^5 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x$,

e) $y = (x-1)(4x^2 + 5x + 7)$, f) $y = \frac{x-1}{x+1}$.

Řešení
Užitím vzorce $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ pro $n \in \mathsf{N}$ (viz tab. 8.1) a věty V.3 o derivaci součtu, součinu a podílu (popř. tab. 8.2) dostáváme:

a) $y' = 3x^2$

b) $y' = 2\pi x$

c) $y' = 3 \cdot 4x^3 - 2 \cdot 3x^2 + 5 \cdot 2x + 1 = 12x^3 - 6x^2 + 10x + 1$

d) $y' = 5x^4 - \frac{2}{3} \cdot 3x^2 + \frac{1}{5} = 5x^4 - 2x^2 + \frac{1}{5}$

e) $y' = (x-1)'(4x^2 + 5x + 7) + (x-1)(4x^2 + 5x + 7)' = 4x^2 + 5x + 7 + (x-1)(8x+5) = 12x^2 + 2x + 2 = 2(6x^2 + x + 1)$

f) $y' = \frac{(x-1)'(x+1) - (x-1)(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$, $x \neq -1$

2. Vypočtěte derivaci složené funkce f: $y = (3x^2 - 2)^4$.

Řešení
Položíme $u = 3x^2 - 2$, $y = f(u) = u^4$. Pak podle věty V.4 (popř. tab. 8.3) o derivaci složené funkce je

$$y' = f'(u) \cdot u'(x) = 4u^3 \cdot 6x = 4(3x^2 - 2)^3 \cdot 6x = 24x(3x^2 - 2)^3.$$

Poznámka. Při derivování složené funkce je zřejmě možné prováděnou substituci $u = g(x)$ si pouze myslet a zapisovat ihned výsledek jako funkci proměnné x.

3. Odvoďte vzorec pro výpočet derivace funkce f: $y = \sqrt{x}$, kde $x \in (0, +\infty)$.

Řešení

Užitím vzorce $(x^r)' = rx^{r-1}$ pro $r \in \mathsf{R}$, $x \in (0, +\infty)$ (viz tab. 8.1) dostáváme:

$$y' = (\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Poznámka. K témuž výsledku lze dospět též takto: $y' = (\sqrt{x})' = \left(\frac{x}{\sqrt{x}}\right)' = \frac{\sqrt{x} - x(\sqrt{x})'}{x} = \frac{\sqrt{x} - xy'}{x}$, odtud plyne $xy' = \sqrt{x} - xy'$, a tedy $y' = \frac{\sqrt{x}}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

4. Určete derivace funkcí, jejichž funkční předpisy jsou

a) $y = \sin 7x$, b) $y = 5 \sin^2 x$, c) $y = \cos(1 - 2x)$,

d) $y = \frac{2}{\cos^3 x}$, e) $y = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x$.

Řešení

a) Užitím věty V.4 (popř. tab. 8.2) o derivaci složené funkce dostáváme (položíme-li $y = \sin u$, $u = 7x$):

$$y' = (\sin u)' \cdot u' = (\cos 7x) \cdot (7x)' = 7 \cdot \cos 7x$$

Obdobně budeme postupovat v dalších dvou příkladech (se stručnějším zápisem):

b) $y' = 5 \cdot 2 \sin x \cdot (\sin x)' = 5 \cdot 2 \sin x \cos x = 5 \sin 2x$

c) $y' = -\sin(1 - 2x) \cdot (1 - 2x)' = 2 \sin(1 - 2x)$

d) Derivování lze provést buď podle věty V.3 o derivaci podílu, nebo jednodušeji takto: $y' = \left(2 \cdot \cos^{-3} x\right)' = 2 \cdot (-3) \cos^{-4} x \cdot (\cos x)' = \frac{6 \sin x}{\cos^4 x}$, $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$

e) Použitím věty V.4 o derivaci složené funkce: $y' = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \operatorname{tg} x \cdot (\operatorname{tg} x)' = \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^3 x}$, $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$

5. Vypočtěte derivace daných funkcí v přípustných bodech:

a) $y = e^x + 2x$, b) $y = x^2 e^x$, c) $y = e^x \cos x$.

Řešení

Užitím věty V.3 o derivaci součtu a součinu funkcí dostáváme:

a) $y' = e^x + 2$

b) $y' = 2xe^x + x^2 e^x = x(x+2)e^x$

c) $y' = e^x \cos x + e^x(-\sin x) = e^x(\cos x - \sin x)$

6. Určete derivace daných funkcí v přípustných bodech:

a) $y = e^{-x}$, b) $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, c) $y = e^{x^2}$,

d) $y = e^{3x^2+x}$, e) $y = e^{\sin x}$, f) $y = \cos e^x$.

Řešení

Užitím věty V.4 o derivaci složené funkce dostáváme:

a) $y' = e^{-x} \cdot (-x)' = -e^{-x}$

b) $y' = \frac{1}{2}\left[e^x + (e^{-x})'\right] = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

c) $y' = e^{x^2} \cdot (x^2)' = 2xe^{x^2}$

d) $y' = e^{3x^2+x} \cdot (3x^2 + x)' = (6x+1)e^{3x^2+x}$

e) $y' = e^{\sin x} \cdot (\sin x)' = e^{\sin x} \cdot \cos x$

f) $y' = (-\sin e^x) \cdot (e^x)' = -e^x \sin e^x$

7. Vypočtěte derivace daných funkcí v přípustných bodech:

a) $y = 2^x - x^3 + 3$, b) $y = \frac{3^x + 1}{3^x - 1}$, c) $y = 2^{5x} + 2^3$.

Řešení

Užitím vět V.2, V.3 a V.4 dostáváme:

a) $y' = 2^x \ln 2 - 3x^2$

b) $y' = \frac{3^x \ln 3\,(3^x - 1) - (3^x + 1)3^x \ln 3}{(3^x - 1)^2} = \frac{3^x \ln 3\,(3^x - 1 - 3^x - 1)}{(3^x - 1)^2} = -\frac{2 \cdot 3^x \ln 3}{(3^x - 1)^2}$, $x \neq 0$

c) $y' = 2^{5x} \ln 2 \cdot (5x)' = \left(2^{5x} \ln 2\right) \cdot 5 = 5 \cdot 2^{5x} \ln 2$

8. Vypočtěte derivace daných funkcí v přípustných bodech:

a) $y = \ln(x+1)$, b) $y = \ln x^2$, c) $y = \ln \frac{x+1}{x-1}$,

d) $y = \log(x - 3)$, e) $y = \frac{\log x + 1}{\log x - 1}$.

Řešení

Užitím vět V.2, V.3 a V.4 dostáváme:

a) $y' = \frac{1}{x+1}$, $x > -1$

b) $y' = \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{2}{x}$, $x \neq 0$

c) $y' = \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{x - 1 - (x+1)}{(x-1)^2} = -\frac{2}{x^2 - 1}$, $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

d) $y' = \frac{1}{(x-3) \cdot \ln 10}$, $x > 3$

e) $y' = \dfrac{\frac{1}{x \cdot \ln 10}(\log x - 1) - \frac{1}{x \cdot \ln 10}(\log x + 1)}{(\log x - 1)^2} = -\dfrac{2}{\ln 10} \cdot \dfrac{1}{x(\log x - 1)^2}$,
$x > 0 \wedge x \neq 10$

Geometrické a fyzikální aplikace derivace funkce

Geometrická aplikace derivace funkce

Jak víme, derivace (vlastní derivace) funkce $f'(x_0)$ představuje geometricky *směrnici k_t tečny t ke grafu funkce v bodě $[x_0, f(x_0)]$.*

Rovnice přímky dané směrnicí k a bodem $[x_0, y_0]$ je (viz kap. 10.9)

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Pro tečnu t v našem případě je $y_0 = f(x_0)$, $k_t = f'(x_0)$, takže platí *věta:*

Existuje-li v bodě x_0 derivace funkce f, pak tečna ke grafu funkce f v bodě $[x_0, f(x_0)]$ má rovnici

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Příklady určení rovnice tečny ke grafu funkce v daném bodě

1. Určete tečnu k parabole, jež je grafem funkce $f\colon y = x^2$ v bodě o souřadnici $x_0 = 1$.

Řešení

Dotykový bod určované tečny a grafu funkce f je $T[1; 1]$, neboť $f(1) = 1$. Derivace funkce f je $f'(x) = 2x$, takže hledaná tečna t má směrnici $k_t = f'(1) = 2$. Rovnice tečny t je proto podle předchozí věty $y - 1 = 2(x - 1)$ čili $y = 2x - 1$.

Poznámka. Prostředky analytické geometrie lze k témuž výsledku dospět bez užití derivací (viz kap. 10.15).

2. Určete rovnici tečny ke grafu funkce f v bodě o souřadnici x_0, je-li

a) $f\colon y = e^x - 1$, $x_0 = 0$, b) $f\colon y = \ln \dfrac{1}{x} = -\ln x$, $x_0 = 1$.

Řešení

a) $y_0 = f(0) = 0$; $f'(x) = e^x$, $k = f'(0) = 1$, takže tečna v bodě $T[0; 0]$ má rovnici $y = x$,

b) $y_0 = f(1) = \ln 1 = 0$; $f'(x) = -\dfrac{1}{x}$, $k = f'(1) = -1$, a tedy tečna v bodě $T[1; 0]$ má rovnici $y = (-1) \cdot (x - 1)$ čili $y = -x + 1$.

Fyzikální aplikace derivace funkce

Nechť $s = s(t)$ je rovnice dráhy přímočarého pohybu hmotného bodu, přičemž t značí čas měřený od jistého počátečního okamžiku a s značí dráhu, kterou hmotný bod urazil po přímce od zvoleného počátečního bodu. Ve fyzice i v dalších aplikacích je zvykem označovat přírůstky veličin symbolem Δ; označme tedy Δs přírůstek dráhy s za dobu Δt od okamžiku t_0, tj. $\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$. Veličina

$$v_p = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$$

se nazývá *průměrná rychlost* pohybu hmotného bodu v intervalu $\langle t_0, t_0 + \Delta t)$. Limita průměrné rychlosti v_p pro $\Delta t \to 0$ neboli derivace dráhy $s(t)$ podle času t pro $t = t_0$ definuje *okamžitou rychlost* (*velikost vektoru okamžité rychlosti*) pohybu hmotného bodu v čase t_0:

$$v = s'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$$

Obecněji, je-li dána funkční závislost hodnot libovolné fyzikální veličiny na čase, lze říci, že její derivace vyjadřuje *okamžitou rychlost změny hodnot veličiny.*

Příklady užití derivace ve fyzice

1. Hmotný bod koná přímočarý pohyb tak, že pro dráhu $s(t)$ uraženou za čas t (od počátečního okamžiku $t_0 = 0\,\mathrm{s}$) platí rovnice $s(t) = 5t^2 + 200t + 12$ (s v metrech, t v sekundách). Určete okamžitou rychlost (velikost vektoru okamžité rychlosti) tohoto nerovnoměrného pohybu v čase t a její hodnoty v časových okamžicích $t_0 = 0\,\mathrm{s}$, $t_1 = 10\,\mathrm{s}$.

Řešení

Hledaná okamžitá rychlost nerovnoměrného pohybu je derivace dráhy podle času: $v(t) = s'(t) = 10t + 200$. V čase $t_0 = 0\,\mathrm{s}$ je $v(t_0) = 200\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ (počáteční okamžitá rychlost), v čase $t_1 = 10\,\mathrm{s}$ je $v(t_1) = 300\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

2. Hmotný bod koná jednoduchý kmitavý pohyb po ose y kolem rovnovážné polohy v počátku O, přičemž výchylka z rovnovážné polohy je dána harmonickou funkcí (kap. 4.5, 4.6): $y(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$, kde A, ω, φ_0 jsou konstanty ($A > 0$, $\omega > 0$, $\varphi_0 \in \mathrm{R}$) a proměnná t je čas. Určete: a) okamžitou rychlost (velikost vektoru okamžité rychlosti) tohoto kmitavého pohybu v čase t, b) její maximální, minimální hodnoty a v kterých polohách kmitajícího hmotného bodu nastávají.

Řešení

a) Jde opět o přímočarý nerovnoměrný pohyb, pro jehož okamžitou rychlost ve směru osy y platí $v_y(t) = y'(t) = A\omega \cos(\omega t + \varphi_0)$, a tedy $v(t) = |v_y(t)| = A\omega |\cos(\omega t + \varphi_0)|$.

b) Protože pro každé $x \in \mathrm{R}$ platí $|\cos x| = 1 \Leftrightarrow \sin x = 0$, $|\sin x| = 1 \Leftrightarrow \cos x = 0$, dostáváme $\max v(t) = A\omega$ pro $|\cos(\omega t + \varphi_0)| = 1$ čili $\sin(\omega t + \varphi_0) = 0$, tj. když $y(t) = 0$ neboli v rovnovážné poloze kmitajícího hmotného bodu, $\min v(t) = 0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ pro $\cos(\omega t + \varphi_0) = 0$ čili $|\sin(\omega t + \varphi_0)| = 1$, tj. když $y(t) = \pm A$ neboli v obou krajních polohách.

Derivace vyšších řádů

Je-li f funkce, která má v každém bodě x nějakého otevřeného intervalu (a, b) derivaci $f'(x)$, potom f' je funkcí definovanou na tomto intervalu. Má-li funkce f' v nějakém bodě $x_0 \in (a, b)$ derivaci, tj. existuje-li limita $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h}$ nazýváme ji **druhou derivací funkce f v bodě x_0** a značíme $f''(x_0)$. Existuje-li druhá derivace v každém bodě $x \in (a, b)$, pak lze definovat na (a, b) **funkci $f''(x)$** tak, že její hodnota v každém bodě x je rovna $f''(x)$. Místo $f''(x)$ se píše často též y''. Analogicky lze definovat **třetí a obecně n-tou derivaci**.

Poznámka. Na střední škole se *neuvažují nevlastní druhé a vyšší derivace.*

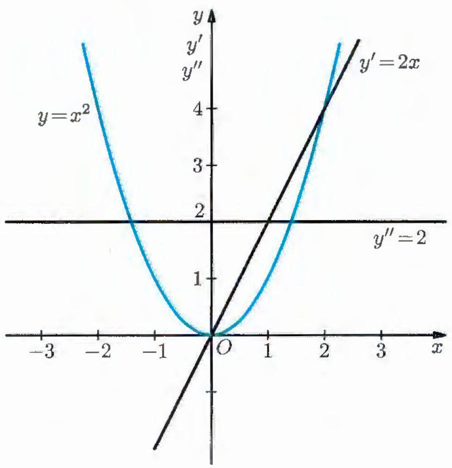
Příklady výpočtu druhých derivací

1. Vypočtěte druhou derivaci funkcí f daných rovnicemi
a) $y = x^2$, b) $y = x^3$ a znázorněte graficky funkce f, f', f''.

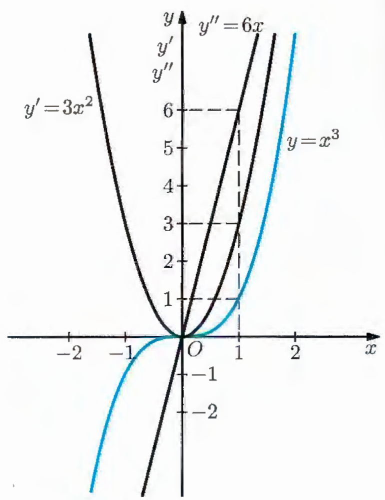
Řešení

a) $y' = 2x$, $y'' = 2$ pro každé $x \in (-\infty, +\infty)$, grafy funkcí f, f', f'' jsou v obr. 8.12,

b) $y' = 3x^2$, $y'' = 6x$ pro každé $x \in (-\infty, +\infty)$, grafy funkcí f, f', f'' jsou v obr. 8.13.



Obr. 8.12



Obr. 8.13

2. Určete druhou derivaci funkcí daných rovnicemi

a) $y = 3x^5$, b) $y = \cos 3x$.

Řešení

a) $y' = 15x^4$, $y'' = 60x^3$

b) $y' = -3 \sin 3x$, $y'' = -9 \cos 3x$

Fyzikální význam druhé derivace

Nechť $v = v(t)$ vyjadřuje funkční závislost okamžité rychlosti přímočarého pohybu hmotného bodu na čase, pak $a = v'(t) = s''(t)$, tj. druhá derivace dráhy podle času představuje zrychlení tohoto pohybu v čase t.

Příklady užití druhé derivace ve fyzice

Určete zrychlení přímočarých pohybů z příkladů na užití prvních derivací ve fyzice.

Řešení

a) $a = v'(t) = s''(t) = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$, zrychlení je konstantní, jde tedy o rovnoměrně zrychlený pohyb.

b) Pro okamžité zrychlení ve směru osy y platí

$$a_y(t) = v'(t) = y''(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 y(t),$$

odkud $a(t) = |a_y(t)| = \omega^2 |y(t)|$, tj. zrychlení je přímo úměrné okamžité výchylce, má však opačný směr.

8.3 Užití diferenciálního počtu k vyšetřování průběhu funkcí

Je-li analyticky zadaná funkce definována v intervalu nebo ve sjednocení intervalů, nelze určit všechny body jejího grafu, ale jen některé. Určení vlastností funkce, které nám usnadní, resp. upřesní sestrojení jejího grafu, nazýváme **vyšetřováním průběhu funkce**. Částečně jsme se jím zbývali již v kapitole 4. Podstatné zjednodušení a obecné metody vyšetřování průběhu funkcí přináší matematická analýza.

Vyšetřování monotónnosti funkce užitím derivací

Definici funkce monotónní a ryze monotónní na množině jsme podali v kap. 4.2. Speciálně k vyšetřování monotónnosti funkce na intervalech (tzv. **intervalech monotónnosti funkce**) lze výhodně užít vět, které se dokazují na základě následující Lagrangeovy [čti: lagránžovy] věty.

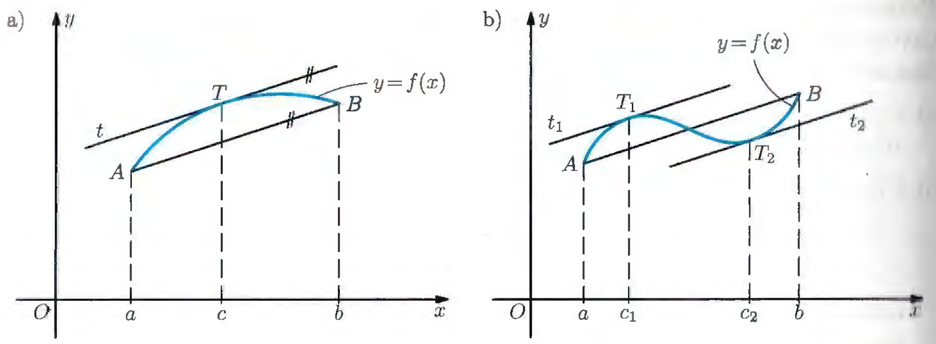
V.1. Lagrangeova věta diferenciálního počtu

Nechť funkce f má tyto vlastnosti:
1. je spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$,
2. má derivaci $f'(x)$ v každém bodě $x \in (a, b)$.

Potom existuje alespoň jeden bod $c \in (a, b)$, pro který platí

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

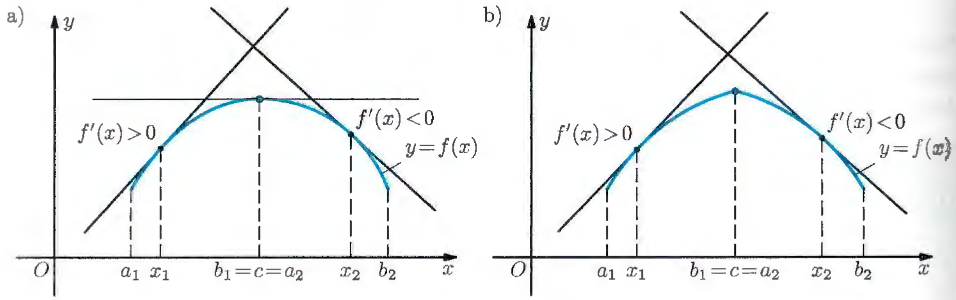
Věta V.1 má názorný *geometrický význam*: Jestliže funkce f má uvedené vlastnosti, pak existuje alespoň jeden bod $c \in (a, b)$ takový, že tečna t v příslušném bodě $[c, f(c)]$ grafu funkce f je rovnoběžná se sečnou s určenou body $A[a, f(a)]$, $B[b, f(b)]$, jejíž směrnice je číslo $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ (obr. 8.14a, b).



Obr. 8.14

> *V.2. Věta o postačujících podmínkách ryzí monotónnosti funkce na intervalu*
> Nechť funkce f má v každém bodě $x \in (a, b)$ derivaci $f'(x)$. Pak platí:
> a) Je-li $f'(x) > 0$ pro každé $x \in (a, b)$, je funkce f rostoucí na (a, b).
> b) Je-li $f'(x) < 0$ pro každé $x \in (a, b)$, je funkce f klesající na (a, b).
> Je-li navíc funkce f spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$, potom je rostoucí, resp. klesající na $\langle a, b\rangle$.

Např. ilustrujeme větu V.2 na grafech funkcí f v obr. 8.15a, b: tyto funkce jsou spojité a v intervalu (a_1, b_1) je $f'(x) > 0$, v intervalu (a_2, b_2) je $f'(x) < 0$, takže funkce f jsou rostoucí na intervalu $\langle a_1, b_1\rangle$ a klesající na intervalu $\langle a_2, b_2\rangle$.



Obr. 8.15

Poznámka k větě V.2. Podmínky $f'(x) > 0$, resp. $f'(x) < 0$, jsou postačující, nikoli však nutné pro ryzí monotónnost funkce na intervalu. Např. Funkce f: $y = x^3$ je rostoucí na intervalu $\mathsf{D}(f) = (-\infty, +\infty)$ a přitom v bodě $x_0 = 0$ je $f'(0) = 0$ (viz grafy v obr. 8.13).

Příklady vyšetření intervalů ryzí monotónnosti funkce

Určete intervaly, v nichž jsou rostoucí, resp. klesající funkce:

a) f_1: $y = x^2$, b) f_2: $y = \dfrac{2x+3}{x-1}$, c) f_3: $y = \sin x$.

Řešení (užitím věty V.2)

a) $y' = 2x$ pro $x \in (-\infty, +\infty)$. Protože daná funkce f_1 je spojitá v $\mathsf{D}(f_1) = (-\infty, +\infty)$ a $f_1'(x) < 0$ pro $x \in (-\infty, 0)$, $f_1'(x) > 0$ pro $x \in (0, +\infty)$, je funkce f_1 klesající v intervalu $(-\infty, 0\rangle$ a rostoucí v intervalu $\langle 0, +\infty)$.

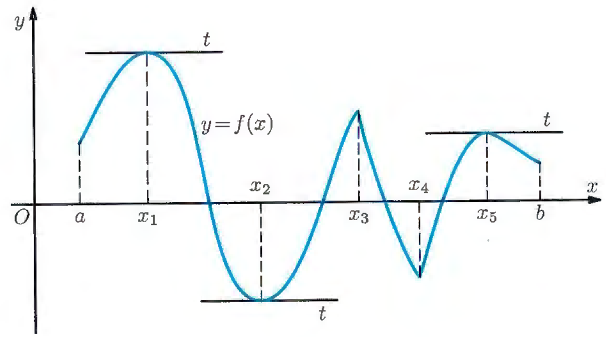
b) $y' = -\dfrac{5}{(x-1)^2}$ pro $x \in \mathsf{D}(f_2) = (-\infty, 1) \cup (1 + \infty)$. Protože $f_2'(x) < 0$ pro všechna $x \in \mathsf{D}(f_2)$, je daná funkce f_2 klesající v celém definičním oboru $\mathsf{D}(f_2)$.

c) $y' = \cos x$ pro $x \in (-\infty, +\infty)$. Protože funkce f_3': $y' = \cos x$ je spojitá v $\mathsf{D}(f_3) = \mathsf{R}$, $f_3'(x) > 0$ pro $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)$, kde $k \in \mathsf{Z}$ a $f_3'(x) < 0$ pro $x \in \left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{3}{2}\pi + k\pi\right)$, kde $k \in \mathsf{Z}$, je funkce sinus rostoucí v intervalech $\left\langle (2k-1)\dfrac{\pi}{2}, (2k+1)\dfrac{\pi}{2} \right\rangle$, kde $k \in \mathsf{Z}$, a klesající v intervalech $\left\langle (2k+1)\dfrac{\pi}{2}, (2k+3)\dfrac{\pi}{2} \right\rangle$, kde $k \in \mathsf{Z}$.

Lokální extrémy funkce a jejich určování užitím derivací

Uvažujme funkci f: $y = f(x)$ definovanou v bodě x_0 a jeho jistém okolí. Říkáme, že **funkce f má v bodě x_0 lokální minimum**, právě když existuje takové okolí $\mathsf{U}(x_0)$ bodu x_0, že pro všechna $x \in \mathsf{U}(x_0) \cap \mathsf{D}(f)$ platí $f(x) \geqq f(x_0)$. Říkáme, že **funkce f má v bodě x_0 lokální maximum**, právě když existuje takové okolí $\mathsf{U}(x_0)$ bodu x_0, že pro všechna $x \in \mathsf{U}(x_0) \cap \mathsf{D}(f)$ platí $f(x) \leqq f(x_0)$. Platí-li přitom pro každé $x \neq x_0$ pouze ostré nerovnosti, mluvíme o **ostrém lokálním minimu**, resp. **ostrém lokálním maximu**.

Souhrnně se lokální minima a lokální maxima nazývají **lokální extrémy funkce**. Tak *např.* funkce f graficky znázorněná v obr. 8.16 má tyto lokální extrémy: v bodech x_1, x_3, x_5 ostrá lokální maxima a v bodech x_2, x_4 ostrá lokální minima.



Obr. 8.16

V.3. Věta o nutné podmínce pro lokální extrém funkce v bodě, ve kterém má derivaci

Má-li funkce f v bodě x_0 lokální extrém a existuje-li v tomto bodě derivace $f'(x_0)$, pak je

$$f'(x_0) = 0.$$

Poznámka k větě V.3. Věta V.3 vyjadřuje nutnou podmínku pro existenci lokálního extrému funkce f, která má v uvažovaném bodě x_0 derivaci. Tato podmínka však není postačující; i když je $f'(x_0) = 0$, nemusí mít funkce f v bodě x_0 lokální extrém. Tak např. funkce f: $y = x^3$ má v bodě $x_0 = 0$ derivaci $f'(0) = 0$, přesto však v tomto bodě nemá lokální extrém (viz obr. 8.13).

Definice: Body x_k, ve kterých je $f'(x_k) = 0$, se nazývají **stacionární body funkce f**.

Důsledek věty V.3. Spojitá funkce f může mít na otevřeném intervalu lokální extrémy pouze buď ve stacionárních bodech, anebo v bodech, ve kterých derivace neexistuje.

Geometrický význam: Lokální extrém může nastat jen v těch bodech, pro které buď graf funkce má tečnu rovnoběžnou s osou x viz např. bod c v obr. 8.15a), anebo pro které graf funkce tečnu nemá (viz např. bod c v obr. 8.15b).

V.4. První věta o postačujících podmínkách pro lokální extrém

Nechť x_0 je buď stacionárním bodem funkce f (tj. bodem, v němž $f'(x_0) = 0$), anebo bodem, ve kterém derivace f' neexistuje. Je-li funkce f spojitá v nějakém okolí bodu x_0 a má-li derivaci v každém bodě $x \neq x_0$ tohoto okolí, pak platí:

Jestliže pro $x < x_0$ je $f'(x) < 0$ a pro $x > x_0$ je $f'(x) > 0$, tj. znaménko derivace $f'(x)$ se mění v bodě x_0 ze záporného na kladné, má funkce f v bodě x_0 ostré lokální minimum.

Jestliže pro $x < x_0$ je $f'(x) > 0$ pro $x > x_0$ je $f'(x) < 0$, tj. znaménko derivace $f'(x)$ se mění v bodě x_0 z kladného na záporné, má funkce f v bodě x_0 ostré lokální maximum.

Jestliže v bodě x_0 nemění $f'(x)$ znaménko, nemá funkce f v bodě x_0 lokální extrém.

Poznámka. Podle věty V.4 můžeme zjistit lokální extrémy funkce f z její monotónnosti. Má-li funkce f druhou derivaci f'', bývá však jednodušší rozhodnout o existenci lokálních extrémů podle následující věty.

V.5. Druhá věta o postačujících podmínkách pro lokální extrém

Nechť x_0 je stacionárním bodem funkce f. Existuje-li $f''(x_0)$, pak platí:

Je-li $f''(x_0) > 0$, má funkce f v bodě x_0 ostré lokální minimum.

Je-li $f''(x_0) < 0$, má funkce f v bodě x_0 ostré lokální maximum.

Je-li $f''(x_0) = 0$, může, ale nemusí mít funkce f v bodě x_0 lokální extrém.

Příklady vyšetření lokálních extrémů dané funkce

Určete body, v nichž mají lokální extrémy funkce:

a) f_1: $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, b) f_2: $y = x^5$, c) f_3: $y = \frac{1}{2}x + \cos x$.

Řešení (užitím vět V.4, V.5)

Dané funkce jsou vesměs spojité ve svých definičních oborech R.

a) $y' = 2ax + b$, $y'' = 2a$ pro každé $x \in (-\infty, +\infty)$. Lokální extrém může nastat jen v bodě x_0, pro který platí $f_1'(x_0) = 2ax_0 + b = 0$, tj. v bodě $x_0 = -\frac{b}{2a}$. Protože $f_1''(x_0) = 2a$, má daná kvadratická funkce v bodě x_0 lokální minimum, je-li $a > 0$ a lokální maximum, je-li $a < 0$.

b) $y' = 5x^4$, $y'' = 20x^3$ pro každé $x \in (-\infty, +\infty)$. Lokální extrém může funkce mít jen v bodě x_0, ve kterém platí $f_2'(x_0) = 5x_0^4 = 0$, tj. v bodě $x_0 = 0$. Protože však také $f_2''(x_0) = 0$, nelze na základě věty V.5 rozhodnout, zda v bodě $x_0 = 0$ nastává lokální extrém. Užijeme proto věty V.4: Jelikož je $f_2'(x) > 0$ pro $x \in (-\infty, 0)$ i pro $x \in (0, +\infty)$, funkce f_2 v bodě $x_0 = 0$ nemá lokální extrém.

c) $y' = \frac{1}{2} - \sin x$, $y'' = -\cos x$ pro každé $x \in (-\infty, +\infty)$. Lokální extrémy mohou nastat jen v bodech, kde $f_3'(x) = 0$ čili $\sin x = \frac{1}{2}$, tj. v bodech $x_k = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ nebo $x_k = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$, kde $k \in$ Z. Pro $x_k = \frac{\pi}{6} + 2k\pi = (12k+1)\frac{\pi}{6}$ je $f_3''(x_k) = -\frac{\sqrt{3}}{2} < 0$, a proto v těchto bodech má daná funkce lokální maxima, zatímco v bodech $x_k = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi = (12k+5)\frac{\pi}{6}$ je $f_3''(x_k) = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$, a proto v těchto bodech má funkce lokální minima.

Konvexnost a konkávnost funkce, inflexní body, určování užitím 2. derivace

Funkce f spojitá na intervalu J se nazývá **funkce konvexní na intervalu J**, právě když pro libovolnou trojici čísel x_1, x, $x_2 \in$ J takových, že splňují nerovnost $x_1 < x < x_2$, platí: bod $P[x, f(x)]$ grafu funkce f leží buď pod přímkou procházející body $P_1[x_1, f(x_1)]$, $P_2[x_2, f(x_2)]$ nebo na ní, tj. analyticky vyjádřeno platí:

$$f(x) \leqq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Speciálně: Funkce f se nazývá **funkce ryze konvexní na intervalu J**, když bod $P[x, f(x)]$ grafu funkce f leží pod přímkou procházející body $P_1[x_1, f(x_1)]$, $P_2[x_2, f(x_2)]$, tj. platí-li ostrá nerovnost:

$$f(x) < f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Funkce f se nazývá **funkce konkávní na intervalu J**, právě když pro libovolnou trojici čísel x_1, x, $x_2 \in$ J takových, že splňují nerovnost $x_1 < x < x_2$, platí:

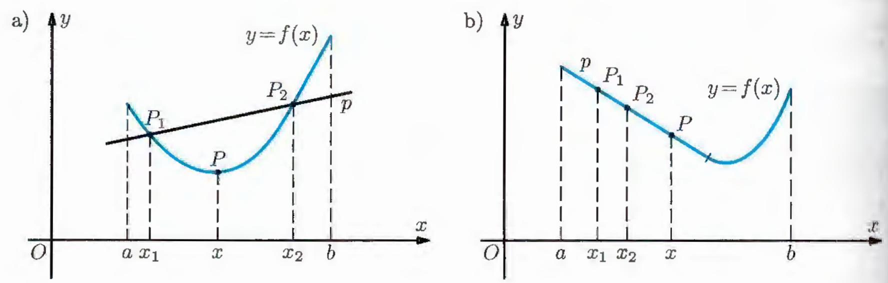
bod $P[x, f(x)]$ grafu funkce f leží buď nad přímkou procházející body $P_1[x_1, f(x_1)]$, $P_2[x_2, f(x_2)]$ nebo na ní, tj. analyticky vyjádřeno platí:

$$f(x) \geqq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

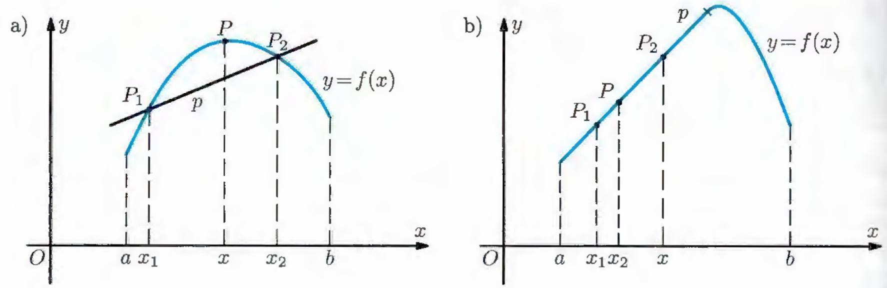
Speciálně: Funkce f se nazývá **funkce ryze konkávní na intervalu J**, když bod $P[x, f(x)]$ grafu funkce f leží nad přímkou procházející body $P_1[x_1, f(x_1)]$, $P_2[x_2, f(x_2)]$, tj. platí-li ostrá nerovnost:

$$f(x) > f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Např. funkce f s grafem v obr. 8.17a je ryze konvexní na intervalu $\langle a, b\rangle$, v obr. 8.17b je konvexní (ne ovšem ryze konvexní) na intervalu $\langle a, b\rangle$, v obr. 8.18a je ryze konkávní na intervalu $\langle a, b\rangle$ a v obr. 8.18b je konkávní (ne však ryze konkávní) na intervalu $\langle a, b\rangle$.



Obr. 8.17



Obr. 8.18

Pro funkci f, která má na intervalu J druhou derivaci f'', lze provést vyšetření její konvexnosti, resp. konkávnosti na intervalu J jednodušeji než přímým užitím definice pomocí následujících *vět*.

V.6. Věty o postačujících podmínkách konvexnosti, resp. konkávnosti funkce na intervalu

Nechť funkce f je spojitá na intervalu J a má druhou derivaci na jeho vnitřku, tj. pro všechny vnitřní body x intervalu J. Potom platí:

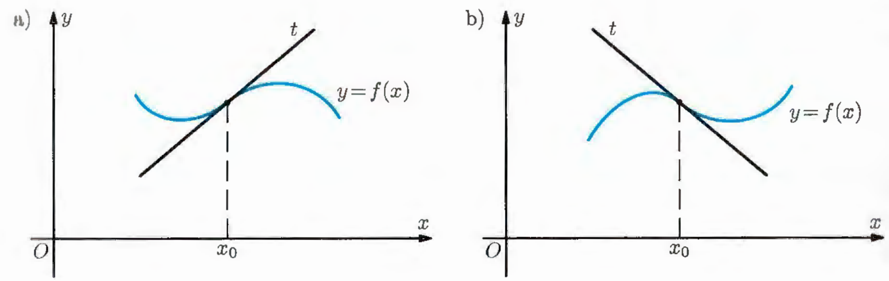
Jestliže pro všechny vnitřní body x je $f''(x) \geqq 0$, pak je funkce f konvexní na intervalu J.

Jestliže pro všechny vnitřní body x je $f''(x) > 0$, resp. s výjimkou konečného počtu bodů x, ve kterých je $f''(x) = 0$, pak je funkce f ryze konvexní na intervalu J.

Jestliže pro všechny vnitřní body x je $f''(x) \leqq 0$, pak je funkce f konkávní na intervalu J.

Jestliže pro všechny vnitřní body x je $f''(x) < 0$, resp. s výjimkou konečného počtu bodů x, ve kterých je $f''(x) = 0$, pak je funkce f ryze konkávní na intervalu J.

Dále se budeme zabývat takovými body $x_0 \in \mathrm{D}(f)$, ve kterých se funkce f mění z konvexní na konkávní, anebo naopak, a pro něž má graf funkce f v bodě $T[x_0, f(x_0)]$ tečnu t. Za těchto předpokladů graf funkce f přechází v tomto bodě T z polohy „nad tečnou" do polohy „pod tečnou" (obr. 8.19a), resp. z polohy „pod tečnou" do polohy „nad tečnou" (obr. 8.19b). Pro takovéto body x_0 zavádíme speciální název *definicí*:



Obr. 8.19

Nechť funkce f je spojitá v bodě x_0 a má v něm derivaci $f'(x_0)$, tj. graf funkce f má v bodě $T[x_0, f(x_0)]$ tečnu t. Mění-li se v bodě x_0 funkce f z konvexní na konkávní, tj. přechází-li v bodě $[x_0, f(x_0)]$ graf funkce f z polohy „nad tečnou" do polohy „pod tečnou" (obr. 8.19a), resp. naopak mění-li se v bodě x_0 funkce f z konkávní na konvexní, tj. přechází-li v bodě $[x_0, f(x_0)]$ graf funkce f z polohy „pod tečnou" do polohy „nad tečnou" (obr. 8.19b), potom bod x_0 se nazývá **inflexní bod funkce** f a říká se též, že **funkce** f **má v bodě** x_0 **inflexi**. Bod $[x_0, f(x_0)]$ se pak nazývá *inflexní bod grafu funkce* f.

Poznámka. Tečna t grafu funkce v inflexním bodě $[x_0, f(x_0)]$ *má rovnici:*
a) $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, jestliže v bodě x_0 existuje vlastní derivace $f'(x_0)$,
b) $x = x_0$, jestliže v bodě x_0 je $f'(x_0) = +\infty$, resp. $f'(x_0) = -\infty$.

K praktickému určení inflexních bodů funkce se používají *věty:*

V.7. Věta o nutné podmínce pro inflexní bod funkce, v němž má druhou derivaci
Je-li bod x_0 inflexní bod funkce f a má-li v něm funkce f druhou derivaci $f''(x_0)$, pak platí

$$f''(x_0) = 0.$$

Poznámka. *Obrácená věta k větě V.7 neplatí.* Uvedená podmínka není postačující k tomu, aby bod x_0 byl inflexním bodem funkce f.

Důsledek věty V.7. Funkce f může mít inflexní bod jen v takovém bodě x_0, ve kterém druhá derivace funkce $f''(x_0)$ je rovna nule, anebo v němž neexistuje.

V.8. Věta o postačující podmínce pro inflexní bod funkce
Jestliže v bodě $x_0 \in \mathsf{D}(f)$ existuje vlastní derivace $f'(x_0)$ (tj. graf funkce f má v bodě $[x_0, f(x_0)]$ tečnu t se směrnicí $f'(x_0)$) a existuje-li nějaké okolí $\mathsf{U}(x_0)$ bodu x_0, v němž pro každé $x \neq x_0$ má funkce f druhou derivaci $f''(x)$, která v bodě x_0 mění znaménko, tj. platí-li $f''(x) > 0$ pro $x < x_0$ a $f''(x) < 0$ pro $x > x_0$, anebo $f''(x) < 0$ pro $x < x_0$ a $f''(x) > 0$ pro $x > x_0$, pak bod x_0 je inflexním bodem funkce f.

Příklad vyšetření intervalů konvexnosti a konkávnosti funkce, inflexních bodů funkce
Zjistěte intervaly, na nichž je konvexní a na nichž je konkávní funkce

$$f\colon y = x^3 - 3x^2 + 1, \quad \mathsf{D}(f) = \mathsf{R},$$

a určete její inflexní body.
Řešení
Vypočteme první a druhou derivaci funkce f:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x, \quad \mathsf{D}(f') = \mathsf{R}, \qquad f''(x) = 6x - 6, \quad \mathsf{D}(f'') = \mathsf{R}.$$

Odtud plyne, že funkce f je konvexní na intervalu, pro který platí $f''(x) > 0$ čili $6x - 6 > 0 \Leftrightarrow x > 1 \Leftrightarrow x \in (1, +\infty)$, a konkávní na intervalu, pro který platí $f'' < 0$ čili $6x - 6 < 0 \Leftrightarrow x < 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1)$. Bod $x_0 = 1$, ve kterém je $f(x_0) = 0$, je inflexním bodem funkce f, neboť se v něm mění funkce f z konkávní na konvexní.

Asymptoty grafu funkce

Rozlišují se *dva druhy asymptot grafu funkce:*

a) Jestliže se graf funkce f: $y = f(x)$ pro $x \to +\infty$ nebo $x \to -\infty$ neomezeně blíží k přímce p: $y = kx + q$ (viz např. obr. 8.20a pro $x \to +\infty$, tj. platí, že

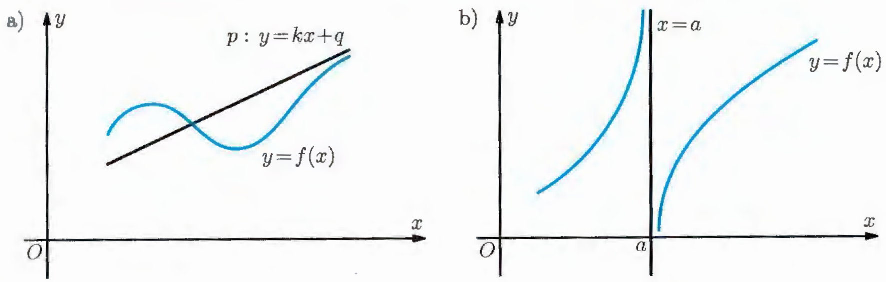
$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (kx + q)] = 0 \quad \text{nebo} \quad \lim_{x\to-\infty} [f(x) - (kx + q)] = 0,$$

pak se přímka p nazývá **asymptota se směrnicí** k **grafu funkce** f **v bodě** $+\infty$, resp. $-\infty$ (tj. pro $x \to +\infty$, resp. $x \to -\infty$).
Speciálně: Pro $k = 0$ je přímka p: $y = q$ **horizontální (vodorovná) asymptota.** Pro $k \neq 0$ je přímka p: $y = kx + q$ **šikmá asymptota.**

b) Jestliže graf funkce f: $y = f(x)$ se pro $x \to a+$ nebo $x \to a-$ neomezeně blíží k přímce p: $x = a$ (viz např. obr. 8.20b pro $x \to a+$ i pro $x \to a-$), tj. platí-li alespoň jedna z rovností

$$\lim_{x\to a+} f(x) = +\infty, \ \lim_{x\to a+} f(x) = -\infty, \ \lim_{x\to a-} f(x) = +\infty, \ \lim_{x\to a-} f(x) = -\infty,$$

pak se přímka p nazývá **asymptota bez směrnice grafu funkce** f nebo též **vertikální (svislá) asymptota grafu funkce** f **v bodě** a.



Obr. 8.20

Asymptota se směrnicí grafu funkce se určuje užitím *věty:*

Věta o rovnici asymptoty se směrnicí grafu funkce
Přímka p: $y = kx + q$ je asymptota se směrnicí k grafu funkce f: $y = f(x)$ v bodě $x = +\infty$ (tj. pro $x \to +\infty$), právě když platí

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{a} \quad q = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - kx].$$

Platí též $k = \lim_{x\to+\infty} f'(x)$, pokud tato limita existuje. Obdobná věta platí i pro $x \to -\infty$.

Asymptota bez směrnice se určuje vyšetřením příslušných jednostranných limit.

Příklad vyšetření asymptot grafu dané funkce
Určete asymptoty grafu funkce f: $y = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$, $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R} \setminus \{1\}$.
Řešení
a) $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2}{(x-1)^2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\dfrac{x}{x-1}\right)^2 = 1^2 = 1,$

$q = \lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x^2 - x}{(x-1)^2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2 - \frac{1}{x}}{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = 2$, a tedy asymptotou se směrnicí (šikmou asymptotou) je přímka o rovnici $y = x + 2$,

b) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3}{(x-1)^2} = \lim\limits_{x\to 1} x^3 \cdot \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{(x-1)^2} = 1\cdot(+\infty) = +\infty$, a tedy vertikální asymptotou je přímka o rovnici $x = 1$.

Vyšetřování průběhu funkce

Vyšetřováním průběhu analyticky zadané funkce se rozumí určení vlastností funkce, které slouží k sestrojení jejího grafu.

Postup vyšetřování průběhu funkce se skládá z následujících kroků (jejich pořadí je vhodné, ne však zcela nutné dodržovat):

1. Stanovení maximálního definičního oboru funkce a zjištění jejích speciálních vlastností (sudosti, lichosti, periodičnosti, omezenosti zdola, shora).
2. Zjištění intervalů, v nichž je funkce spojitá, a určení bodů nespojitosti funkce.
3. Výpočet limit funkce v bodech její nespojitosti a v bodech $+\infty$, $-\infty$, pokud to má význam (vzhledem k definičnímu oboru funkce).
4. Určení nulových bodů funkce (tj. bodů, ve kterých je funkční hodnota rovna nule) a intervalů, v nichž je funkce kladná, resp. záporná.
5. Výpočet derivace funkce, stanovení maximálního definičního oboru derivace, určení jejích nulových bodů (tj. stacionárních bodů funkce) a bodů, v nichž derivace funkce neexistuje.
6. Výpočet 2. derivace funkce, stanovení maximálního definičního oboru 2. derivace, určení jejích nulových bodů a bodů, v nichž 2. derivace funkce neexistuje.
7. Určení intervalů monotónnosti, popř. ryzí monotónnosti funkce a zjištění jejích lokálních, popř. globálních extrémů.
8. Určení intervalů konvexnosti, resp. konkávnosti funkce, inflexních bodů funkce a určení rovnic tečen grafu funkce v těchto bodech.
9. Nalezení asymptot grafu funkce
   a) se směrnicí (tj. horizontálních a šikmých asymptot),
   b) bez směrnice (tj. vertikálních asymptot).
10. Sestrojení grafu funkce. (K tomu též vypočteme funkční hodnoty ve významných zjištěných bodech a popř. pro zpřesnění konstrukce grafu ještě v dalších bodech definičního oboru funkce.)

Příklad vyšetřování průběhu analyticky zadané funkce

Vyšetřete průběh funkce $f\colon y = f(x) = \dfrac{12(x+2)}{x^2}$.

Řešení

1. $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}\setminus\{0\} = (-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$. Funkce f není ani sudá, ani lichá, není periodická. Je omezená zdola, neboť pro každé $x\in\mathsf{D}(f)$ je $\dfrac{12(x+2)}{x^2} \geqq 1{,}5 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (x+4)^2 \geqq 0$.

2. **Funkce f je spojitá na $\mathsf{D}(f) = \mathsf{R}\setminus\{0\}$, tj. má jediný bod nespojitosti 0.**

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{12(x+2)}{x^2} = +\infty$, neboť $\lim\limits_{x\to 0} 12(x+2) = 24$ a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$,
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{12(x+2)}{x^2} = 12 \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right) = 12\cdot(0+0) = 0$.

4. $\dfrac{12(x+2)}{x^2} = 0$ pro $x=-2$ (nulový bod funkce f, $f(-2)=0$), $\dfrac{12(x+2)}{x^2} > 0$ pro $x > -2 \wedge x \neq 0$, tj. $x\in(-2;0)\cup(0,\infty)$, $\dfrac{12(x+2)}{x^2} < 0$ pro $x < -2$, tj. $x\in(-\infty,-2)$.

5. $f'(x) = 12\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)' = 12\left(x^{-1}+2x^{-2}\right)' = 12\left[-x^{-2}+2\cdot\left(-2x^{-3}\right)\right] = 12\left(-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{4}{x^3}\right) = -\dfrac{12(x+4)}{x^3}$, $\mathsf{D}(f') = \mathsf{R}\setminus\{0\} = \mathsf{D}(f)$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -4$ (stacionární bod funkce f).

6. $f''(x) = -12\left(x^{-2}+4x^{-3}\right)' = -12\left[-2x^{-3}+4\cdot(-3)x^{-4}\right] = \dfrac{24(x+6)}{x^4}$, $\mathsf{D}(f'') = \mathsf{R}\setminus\{0\} = \mathsf{D}(f)$; $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -6$.

7. $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{x+4}{x^3} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{x+4}{x} < 0 \Leftrightarrow -4 < x < 0 \Leftrightarrow x\in(-4;0)$, takže funkce f je rostoucí na intervalu $(-4;0)$ a vzhledem k tomu, že funkce f je spojitá v bodě $x=-4$, je rostoucí též v intervalu $\langle -4;0)$;

   $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \dfrac{x+4}{x^3} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{x+4}{x} > 0 \Leftrightarrow x < -4 \vee x > 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x\in(-\infty,-4)\cup(0,+\infty)$, takže funkce f je klesající na intervalech $(-\infty,-4\rangle$ (vzhledem ke spojitosti funkce f v bodě -4) a $(0,+\infty)$;

   ve stacionárním bodě $x=-4$ je lokální (a zároveň globální) minimum, neboť v intervalu $(-\infty,-4\rangle$ je funkce f klesající a v intervalu $\langle -4;0)$ je rostoucí; k témuž závěru dospíváme též z toho, že platí $f''(-4) = \dfrac{24\cdot(-4+6)}{(-4)^4} = \dfrac{24\cdot 2}{256} > 0$;

   v bodě lokálního minima nabývá funkce f hodnotu $f(-4) = -\dfrac{12}{8} = -\dfrac{3}{2} = -1{,}5$.

8. $f''(x) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{x+6}{x^4} > 0 \Leftrightarrow x > -6 \wedge x\neq 0 \Leftrightarrow x\in(-6;0)\cup(0,+\infty)$, a tedy funkce f je ryze konvexní na intervalech $(-6;0)$ a $(0,+\infty)$;

   $f''(x) < 0 \Leftrightarrow \dfrac{x+6}{x^4} < 0 \Leftrightarrow x < -6 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-6)$, a tedy funkce f je ryze konkávní na intervalu $(-\infty,-6)$;

   $f''(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x+6}{x^4} = 0 \Leftrightarrow x = -6$ a tento bod je inflexním bodem funkce f, neboť v něm se mění z konkávní na konvexní;

funkční hodnota v inflexním bodě je $f(-6) = -\frac{12}{9} = -\frac{4}{3}$ a tečna t v inflexním bodě má rovnici $y - f(-6) = f'(-6)(x+6)$ čili $y + \frac{4}{3} = -\frac{1}{9}(x+6) \Leftrightarrow y =$ $= -\frac{1}{9}x - 2 \Leftrightarrow x + 9y + 18 = 0$.

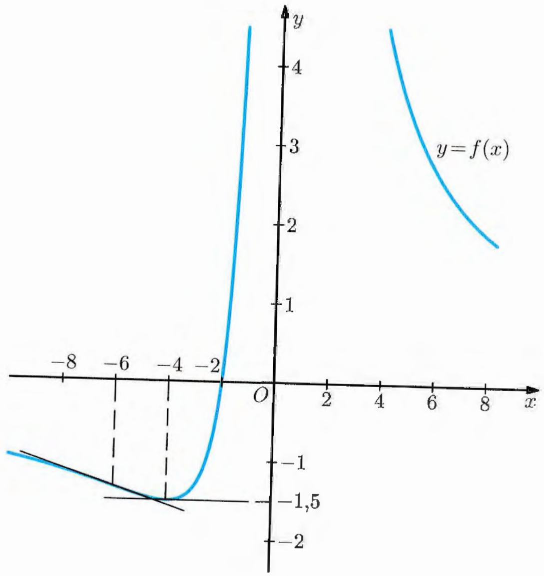
9. $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{12(x+2)}{x^3} = 12 \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right) = 0;$

$$q = \lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - kx] = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{12(x+2)}{x^2} = 0,$$

takže funkce f má asymptotu se směrnicí nulovou, tj. horizontální asymptotu, jíž je přímka o rovnici $y = 0$, tj. osa x;

dále vzhledem k tomu, že je $\lim\limits_{x\to 0} \frac{12(x+2)}{x^2} = +\infty$, má funkce f také vertikální asymptotu o rovnici $x = 0$, což je osa y.

10. Graf funkce f je na obr. 8.21.



Obr. 8.21

Určování globálních (absolutních) extrémů funkce na intervalu

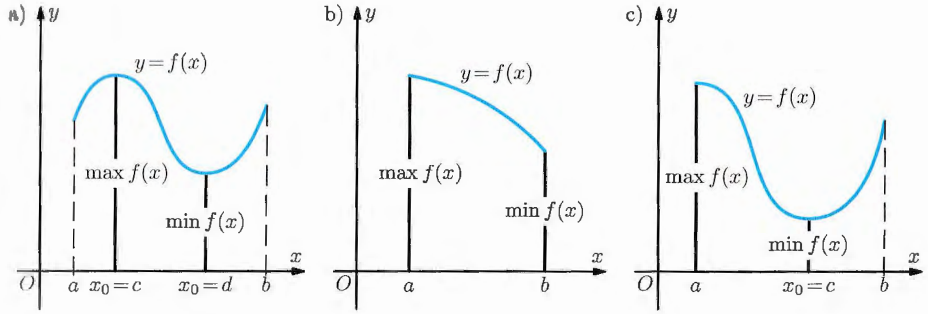
Pojmy globálního (absolutního) minima a maxima funkce f na množině $M \subset D(f)$ jsme definovali v kap. 4.2.

Globální (absolutní) extrémy funkce na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$

Pro spojitou funkci f zaručuje jejich existenci Weierstrassova věta, kterou jsme uvedli v kap. 8.1 na str. 372. Při praktickém určování globálních extrémů spojité

funkce f na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ se užívá tohoto *důsledku Weierstrassovy věty:*

Funkce f spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$ má na něm globální extrém v bodě x_0 jen tehdy, je-li bod x_0 buď bodem lokálního extrému, anebo krajním bodem intervalu $\langle a, b\rangle$, tj. $x_0 = a$ nebo $x_0 = b$ (viz obr. 8.22a, b, c).



Obr. 8.22

Odtud plyne tento *praktický postup určování globálních extrémů funkce f spojité na* $\langle a, b\rangle$:

1. Určíme všechny body $x_k \in (a, b)$, ve kterých nastávají lokální extrémy, a vypočteme funkční hodnoty $f(x_k)$.
2. Vypočteme funkční hodnoty $f(a)$, $f(b)$.
3. Určíme nejmenší a největší z vypočtených hodnot $f(x_k)$, $f(a)$, $f(b)$, čímž dostáváme hledané globální minimum a maximum dané spojité funkce f na $\langle a, b\rangle$.

Globální (absolutní) extrémy funkce na otevřeném intervalu (a, b)

Funkce f spojitá na otevřeném intervalu (a, b) nemusí mít na tomto intervalu žádný globální extrém (*např.* lineární funkce $f\colon y = 2x + 1$ nemá globální extrémy na žádném otevřeném intervalu (a, b)). Pokud ho má, je to minimální, resp. maximální hodnota z lokálních extrémů funkce f na (a, b).

Příklady určování globálních extrémů funkce na intervalu

Určete globální extrémy funkcí f:

a) $f_1\colon y = x^2 - 6x + 8$ na intervalu $\langle -4; 4\rangle$,

b) $f_2\colon y = 2x^3 - 3x^2 + 5$ na intervalu $(0; 2)$.

Řešení

a) $y' = 2x - 6$, $y'' = 2$; $f_1'(x) = 2x - 6 = 0$ pro $x_0 = 3$; v tomto bodě nabývá funkce f_1 lokálního minima, neboť $f_1''(x_0) = 2 > 0$. Vypočteme hodnotu $f_1(3) =$ $= -1$. V krajních bodech intervalu $\langle -4; 4\rangle$ nabývá funkce f_1 hodnot $f_1(-4) =$ $= 48$, $f_1(4) = 0$. Má tedy na tomto intervalu globální minimum $\min\limits_{x\in\langle -4;4\rangle} f_1(x) =$ $= f_1(3) = -1$ a globální maximum $\max\limits_{x\in\langle -4;4\rangle} f_1(x) = f_1(-4) = 48$.

b) $y' = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$, $y'' = 12x - 6 = 6(2x-1)$; $f_2'(x) = 0$ pro $x_0 = 1 \in (0; 2)$ a $x_1 = 0 \notin (0; 2)$, v bodě x_0 je $f_2''(1) = 6 > 0$, takže v něm nastává lokální a zároveň globální minimum $\min\limits_{x \in (0;2)} f_2(x) = f_2(1) = 2 - 3 + 5 = 4$.
Globálního maxima funkce f_2 na otevřeném intervalu $(0; 2)$ nenabývá.

Slovní úlohy na extrémy

V aplikacích matematiky se často setkáváme s problémy (slovními úlohami), jejichž matematizací dospíváme k úloze určit globální extrém (maximum nebo minimum) jisté analyticky vyjádřené funkce jedné proměnné na určitém intervalu, na němž je spojitá a má derivaci ve všech jeho vnitřních bodech. Některé z těchto úloh bychom s většími nebo menšími obtížemi mohli řešit bez užití diferenciálního počtu elementárními prostředky, např. užitím nerovností. Elementární způsob řešení je však třeba hledat případ od případu a mnohdy se nám to nemusí podařit. Naproti tomu užití diferenciálního počtu představuje obecnou, jednotnou metodu určování extrémů.

Příklady řešení slovních úloh na extrémy užitím diferenciálního počtu

1. Určete taková dvě přirozená čísla, jejichž součet je 10, aby součet jejich třetích mocnin byl co nejmenší.

Řešení
Hledaná čísla označíme x a $10 - x$, kde $x \in \langle 1; 9\rangle$. Součet třetích mocnin je $s = x^3 + (10-x)^3 = 1\,000 - 300x + 30x^2$. Derivováním dostáváme: $s' = -300 + 60x = 60(x-5)$, $s'' = 60$. Pro $x_0 = 5$ je $s' = 0$ a $s'' = 60 > 0$, takže v tomto bodě má funkce s lokální minimum $s_0 = 5^3 + 5^3 = 250$. Je to zároveň absolutní minimum, protože v krajních bodech intervalu $\langle 1; 9\rangle$ je $s = 730 > 250$. Obě hledaná čísla jsou tedy rovna 5. (Pro každou jinou dvojici přirozených čísel, jejichž součet je 10, např. 6 a 4 nebo 7 a 3, je součet třetích mocnin větší než 250, např. $6^3 + 4^3 = 280$, $7^3 + 3^3 = 370$).

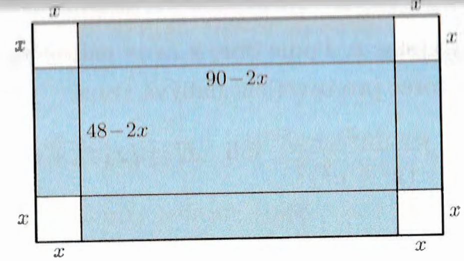
Poznámka. Následující dvě úlohy mají geometrický charakter. Příslušné vzorce najde čtenář v kap. 9.10 (tab. 9.9) a kap. 9.16 (tab. 9.14).

2. Z kusu kartónu tvaru obdélníku o rozměrech 90 cm a 48 cm je třeba vystřihnout v rozích shodné čtverce tak, aby ze zbytku složená otevřená krabice měla největší objem. Určete délku strany těchto čtverců.

Řešení (obr. 8.23)
Označme délku strany odřezávaných čtverců x cm. Pak objem získané krabice je vyjádřen funkcí

$$V(x) = (90 - 2x)(48 - 2x)x \quad \text{čili} \quad V(x) = 4\,320x - 276x^2 + 4x^3,$$

kde $x \in (0; 24)$. Vypočteme derivaci $V'(x) = 4\,320 - 552x + 12x^2$ a položíme $V'(x) = 0$. Po dosazení a zkrácení dvanácti dostáváme kvadratickou rovnici $x^2 - 46x + 360 = 0$, jež má kořeny $x_1 = 10$, $x_2 = 36$. Druhý kořen úloze nevyhovuje. Dále vypočteme $V''(x) = -552 + 24x$; pro $x_1 = 10$ je $V''(10) = -552 + 240 = -312 < 0$; max $V(x) = V(10) = 70 \cdot 28 \cdot 10 = 19\,600$. Je tedy



Obr. 8.23

nutno ustřihnout čtverce o délce strany 10 cm. Krabice má maximální objem 19 600 cm^3.

3. Které rozměry musí mít litrová konzerva tvaru válce, má-li být spotřeba plechu na její výrobu včetně odpadu co nejmenší? (Předpokládejte, že plech spotřebovaný na podstavu má tvar čtverce opsaného podstavě.)

Řešení
Označme $r = x$ dm poloměr podstavy a $v = y$ dm výšku válce. Obsah pláště válce je $2\pi xy$ dm^2, obsah podstavy (včetně odpadu) $2 \cdot (2x)^2$ dm$^2 = 8x^2$ dm^2. Spotřebu plechu tedy bude vyjadřovat funkce

$$S = 8x^2 + 2\pi xy, \quad x \in (0, +\infty),\ y \in (0, +\infty),$$

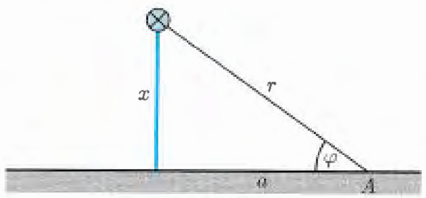
což je funkce dvou proměnných x a y. Z daného objemu $V = 1$ dm^3 však plyne, že $\pi x^2 y = 1$, odkud $y = \dfrac{1}{\pi x^2}$. Po dosazení do funkčního předpisu pro S a po zkrácení dostáváme $S = 8x^2 + 2x^{-1}$. Vypočteme derivaci $S' = 16x - 2x^{-2}$. Položíme-li $S' = 0$, dostaneme rovnici $16x - \dfrac{2}{x^2} = 0$ čili $x^3 = \dfrac{1}{8}$, jejímž řešením $(x > 0)$ je $x = 0{,}5$, $y = \dfrac{1}{0{,}25\pi} = \dfrac{4}{\pi} \doteq 1{,}27$. Jestliže do 2. derivace $S'' = 16 + 4x^{-3}$ dosadíme $x = 0{,}5$, vyjde $S''(0{,}5) = 16 + \dfrac{4}{0{,}125} = 16 + 32 = 48 > 0$, takže opravdu pro $x = 0{,}5$ je $\min S = S(0{,}5) = 8 \cdot (0{,}5)^2 + 2\pi \cdot 0{,}5 \cdot \dfrac{4}{\pi} = 2 + 4 = 6$. Minimální spotřeba plechu na výrobu litrové konzervy je 6 dm^2 pro poloměr podstavy $r = 0{,}5$ dm a výšku $v = \dfrac{4}{\pi}$ dm.

4. Ve které výšce nad osvětlovanou rovinou je třeba umístit bodový zdroj světla, aby osvětlení E bylo největší v dané vzdálenosti a od paty kolmice sestrojené z bodového zdroje k osvětlované rovině? (Podle známého fyzikálního zákona pro osvětlení platí vzorec: $E = I\dfrac{\sin\varphi}{r^2}$, kde je r vzdálenost osvětleného místa od bodového zdroje světla, φ velikost úhlu, který svírá světelný paprsek s osvětlovanou rovinnou plochou, I svítivost bodového zdroje v daném směru. Budeme předpokládat, že svítivost uvažovaného bodového zdroje je ve všech směrech stejná, tj. I je konstanta.)

Řešení

Označme hledanou výšku x. Podle obr. 8.24 je pak $r^2 = x^2 + a^2$, $\sin\varphi = \frac{x}{r}$, takže po dosazení vzorec pro osvětlení nabývá tvaru

$$E = I\frac{x}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{čili} \quad E = Ix(x^2+a^2)^{-\frac{3}{2}}.$$



Obr. 8.24

Osvětlení E je tedy funkcí jedné proměnné $x \in (0, +\infty)$. Vypočteme její derivaci

$$E' = I\Big[(x^2+a^2)^{-\frac{3}{2}} - x(x^2+a^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot 3x\Big] =$$

$$= I(x^2+a^2)^{-\frac{5}{2}}\,(x^2+a^2-3x^2) = I(x^2+a^2)^{-\frac{5}{2}}\,(a^2-2x^2).$$

Položíme-li $E' = 0$ (nutná podmínka pro extrém), pak vzhledem k tomu, že pro $a \neq 0$ je $x^2 + a^2 \neq 0$, dostáváme odtud rovnici: $a^2 - 2x^2 = 0$, jež má jediný kladný kořen $x = \frac{a}{2}\sqrt{2}$. Dále vypočteme 2. derivaci:

$$E'' = -\frac{5}{2}I(x^2+a^2)^{-\frac{7}{2}} \cdot 2x(a^2-2x^2) + I(x^2+a^2)^{-\frac{5}{2}}\,(-4x)$$

neboli po úpravě

$$E'' = -3Ix(x^2+a^2)^{-\frac{7}{2}}\,(3a^2-2x^2).$$

Pro $x = \frac{a}{2}\sqrt{2}$ je $E''\Big(\frac{a}{2}\sqrt{2}\Big) = -\frac{16\sqrt{3}}{27}Ia^{-4} < 0$, tj. při této výšce bodového zdroje nad osvětlovanou rovinou je v předepsaném místě maximální osvětlení

$$\max E = E\Big(\frac{a}{2}\sqrt{2}\Big) = I\frac{a}{2}\sqrt{2}\Big(\frac{a^2}{2}+a^2\Big)^{-\frac{3}{2}} = \frac{2I\sqrt{3}}{9a^2}.$$

L'Hospitalovo pravidlo pro výpočet limit funkcí

K aplikacím diferenciálního počtu patří metoda výpočtu limit pomocí derivací. Je založena na následující *větě*:

Věta o l'Hospitalově pravidle [čti: lopitalově pravidle]
Nechť pro dané funkce f, g a daný bod $a \in \mathsf{R}$, resp. $a = +\infty$ nebo $a = -\infty$ platí
a) buď $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, anebo $\lim\limits_{x\to a} |g(x)| = +\infty$ (tj. $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$, resp. $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$),
b) existuje limita $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (vlastní, anebo nevlastní).

Pak existuje také limita $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad \textbf{(l'Hospitalovo pravidlo)}.$$

Obdobná věta platí i pro limity jednostranné.

Poznámky.

1. Z neexistence limity $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ ovšem nevyplývá neexistence limity $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$. Pouze ji nelze v tomto případě vypočítat podle l'Hospitalova pravidla.
2. L'Hospitalova pravidla se nejčastěji užívá pro výpočet limity $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, u které je $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ (říkáme, že je to *limita typu* „$\frac{0}{0}$“), resp. je $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$ (pak říkáme, že je to *limita typu* „$\frac{\infty}{\infty}$“). Přitom se může stát, že také limita $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ je téhož typu. V tomto případě zkusíme použít l'Hospitalovo pravidlo znovu. Potom platí, že $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f''(x)}{g''(x)}$, pokud existuje limita na pravé straně této rovnosti. Tímto způsobem lze případně postupovat opakovaně.

Příklady užití l'Hospitalova pravidla

1. Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to a} \frac{\sin(x-a)}{x-a}$, kde $a \in \mathsf{R}$.

Řešení

Jsou splněny předpoklady věty o l'Hospitalově pravidle (jde o limitu typu „$\frac{0}{0}$“), a tedy:

$$\lim_{x\to a} \frac{\sin(x-a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{(\sin(x-a))'}{(x-a)'} = \lim_{x\to a} \frac{\cos(x-a)}{1} = \frac{\cos 0}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

2. Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x}$.

Řešení

Analogicky dostáváme (pro danou limitu typu „$\frac{0}{0}$“):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sin 3x)'}{(\sin 5x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{3\cos 3x}{5\cos 5x} = \frac{3}{5}\lim_{x\to 0} \frac{\cos 3x}{\cos 5x} = \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{1} = \frac{3}{5}$$

3. Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to 0+} x^2 \ln x$.

Řešení

Daná jednostranná limita je typu „$0 \cdot \infty$“ (protože $\lim\limits_{x\to 0+} x^2 = 0$ a $\lim\limits_{x\to 0+} \ln x = -\infty$). Lze ji však převést na limitu typu „$\frac{\infty}{\infty}$“, kterou lze vypočítat užitím l'Hospitalova pravidla takto:

$$\lim_{x\to 0+} x^2 \ln x = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x^2}\right)'} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = -\frac{1}{2} \lim_{x\to 0+} x^2 = 0$$

4. Vypočtěte limitu $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 3x}{2x^2}$.

Řešení

Danou limitu typu $„\frac{0}{0}“$ vypočteme dvojím užitím l'Hospitalova pravidla:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 3x}{2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos 3x)'}{(2x^2)'} = \lim_{x\to 0} \frac{3\sin 3x}{4x} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{(3\sin 3x)'}{(4x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{9\cos 3x}{4} = \frac{9}{4}$$

5. Vypočtěte limitu $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^2}$.

Řešení

Jde o limitu typu $„\frac{\infty}{\infty}“$, pro kterou jsou splněny předpoklady užití l'Hospitalova pravidla (opakovaně):

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{(e^x)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{(e^x)'}{(2x)'} = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$$

8.4 Primitivní funkce, neurčitý integrál

Jednou ze základních úloh diferenciálního počtu je k dané funkci určit v nějakém otevřeném intervalu její derivaci. Při řešení mnoha matematických, fyzikálních a technických problémů se setkáváme i s *úlohou obrácenou* řešenou v integrálním počtu: K dané funkci určit v nějakém otevřeném intervalu J takovou funkci, jejíž derivací v intervalu J je daná funkce. *Např.* ve fyzice je dána rychlost $v = v(t)$ (tj. průběh okamžité rychlosti v v závislosti na čase t) a určuje se dráha s (tj. její průběh v závislosti na čase t), přičemž víme, že platí $v = s'(t)$.

Nechť f je funkce, jejíž definiční obor obsahuje interval (a, b) [kde $a, b \in \mathsf{R}$, resp. může být $a = -\infty$ nebo $b = +\infty$]. Funkce F: $(a, b) \to \mathsf{R}$ se nazývá **primitivní funkce k funkci f na intervalu** (a, b), právě když platí

$$F'(x) = f(x) \text{ pro všechna } x \in (a, b).$$

Otázku jednoznačnosti primitivní funkce k dané funkci f zodpovídá *věta:*

V.1. Každé dvě primitivní funkce F, G k funkci f na intervalu (a, b) se liší o reálnou konstantu c, tj.

$$G(x) = F(x) + c.$$

Množinu všech primitivních funkcí k funkci f na daném intervalu (a, b) značíme symbolem $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ (čteme: „integrál $f(x)\,\mathrm{d}x$“) zvaným **neurčitý integrál funkce f**; píšeme

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c,$$

kde F je určitá primitivní funkce k f a c libovolná reálná konstanta. Nazývá se **integrační konstanta**.

V symbolu $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ je $\int$ tzv. **integrační znak**, funkce f se nazývá **integrovaná funkce** nebo **integrand** a proměnná x se nazývá **integrační proměnná**.

Poznámka. Symbol $\mathrm{d}x$ slouží k odlišení integrační proměnné od případných parametrů, např. v $\int tx^2\,\mathrm{d}x$ je x integrační proměnná a t parametr ($t \in \mathsf{R}$).

Ke každé funkci f na daném intervalu (a, b) nemusí ovšem existovat primitivní funkce (neurčitý integrál). Platí však tato důležitá *věta:*

V.2. Nechť funkce f je spojitá na intervalu (a, b). Pak k ní na (a, b) existuje primitivní funkce.

Při výpočtu neurčitých integrálů jsou často užívány následující *věty:*

V.3. Nechť k funkci f existuje neurčitý integrál $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ na (a, b) a nechť k je libovolná reálná konstanta. Pak existuje na (a, b) také neurčitý integrál $\int kf(x)\,\mathrm{d}x$ a platí

$$\int kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

V.4. Nechť k funkcím f, g existují neurčité integrály $\int f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int g(x)\,\mathrm{d}x$ na (a, b). Pak existuje také neurčitý integrál $\int [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x$ na (a, b) a platí

$$\int [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x.$$

(Větu lze rozšířit pro libovolný počet integrovaných funkcí.)

Stanovení (výpočet) neurčitého integrálu $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ nazýváme **integrováním** (nebo **integrací**) funkce f.

Vzorce pro integrování některých elementárních funkcí uvádíme v tabulce 8.4. Tyto vzorce plynou na základě definice neurčitého integrálu přímo ze vzorců pro derivace základních elementárních funkcí podle tabulky 8.1.

Vzorce pro neurčité integrály elementárních funkcí

Tab. 8.4

Funkce f: $y = f(x)$	Vzorec pro neurčitý integrál $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c$, $c \in \mathsf{R}$	Podmínky platnosti vzorce ($x \in \mathrm{D}(F)$)
$y = 0$	$\int 0\,\mathrm{d}x = c$	$x \in (-\infty, +\infty)$
$y = 1$	$\int \mathrm{d}x = x + c$	$x \in (-\infty, +\infty)$
$y = x^n$, $n \in \mathsf{N}$	$\int x^n\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$x \in (-\infty, +\infty)$
$y = x^k$, $k \in \mathsf{Z}$, $k \neq -1$	$\int x^k\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^{k+1}}{k+1} + c$	$x \in (-\infty, +\infty)$ pro $k > 0$ ($k \in \mathsf{N}$), $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ pro $k < 0$
$y = x^r$, $r \in \mathsf{R}$, $r \neq -1$	$\int x^r\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^{r+1}}{r+1} + c$	$x \in (0, +\infty)$
$y = \dfrac{1}{x}$	$\int \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln\lvert x\rvert + c$	$x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
$y = \mathrm{e}^x$	$\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + c$	$x \in (-\infty, +\infty)$
$y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$	$\int a^x\,\mathrm{d}x = \dfrac{a^x}{\ln a} + c$	$x \in (-\infty, +\infty)$
$y = \sin x$	$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + c$	$x \in (-\infty, +\infty)$
$y = \cos x$	$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + c$	$x \in (-\infty, +\infty)$
$y = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\int \dfrac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \operatorname{tg} x + c$	$x \in \bigcup\limits_{k \in \mathsf{Z}} \left((2k-1)\dfrac{\pi}{2}, (2k+1)\dfrac{\pi}{2}\right)$
$y = \dfrac{1}{\sin^2 x}$	$\int \dfrac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = -\operatorname{cotg} x + c$	$x \in \bigcup\limits_{k \in \mathsf{Z}} (k\pi, (k+1)\pi)$

Funkce f: $y = f(x)$	Vzorec pro neurčitý integrál $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c$, $c \in \mathsf{R}$	Podmínky platnosti vzorce ($x \in \mathrm{D}(F)$)
$y = \dfrac{1}{1+x^2}$	$\int \dfrac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arctg} x + c$	$(-\infty, +\infty)$
$y = -\dfrac{1}{1+x^2}$	$\int -\dfrac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arccotg} x + c$	$(-\infty, +\infty)$
$y = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin x + c$	$x \in (-1; 1)$
$y = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arccos x + c$	$x \in (-1; 1)$
$y = \sinh x$	$\int \sinh x\,\mathrm{d}x = \cosh x + c$	$(-\infty, +\infty)$
$y = \cosh x$	$\int \cosh x\,\mathrm{d}x = \sinh x + c$	$(-\infty, +\infty)$
$y = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$	$\int \dfrac{1}{\cosh^2 x}\,\mathrm{d}x = \operatorname{tgh} x + c$	$(-\infty, +\infty)$
$y = \dfrac{1}{\sinh^2 x}$	$\int \dfrac{1}{\sinh^2 x}\,\mathrm{d}x = -\operatorname{cotgh} x + c$	$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

Příklady výpočtu neurčitých integrálů

1. Vypočtěte:

a) $\displaystyle\int (x^3 - 6x^2 + 5x - 4)\,\mathrm{d}x$, b) $\displaystyle\int (2 - \sqrt{x})^2\,\mathrm{d}x$,

c) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{4}{\sqrt[3]{x^2}}\right)\mathrm{d}x$, d) $\displaystyle\int \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x}\,\mathrm{d}x$.

Řešení

Společnou metodou řešení všech těchto příkladů je užití vět V.3, V.4 pro neurčité integrály spolu se základními vzorci pro integrování elementárních funkcí (tab. 8.4):

a) $$\int (x^3 - 6x^2 + 5x - 4)\,\mathrm{d}x = \int x^3\,\mathrm{d}x - 6\int x^2\,\mathrm{d}x + 5\int x\,\mathrm{d}x - 4\int \mathrm{d}x =$$
$$= \frac{x^4}{4} - 6\cdot\frac{x^3}{3} + 5\cdot\frac{x^2}{2} - 4x + c = \frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{5x^2}{2} - 4x + c,\ x \in (-\infty, +\infty)$$

b) $$\int (2 - \sqrt{x})^2\,\mathrm{d}x = \int (4 - 4\sqrt{x} + x)\,\mathrm{d}x = 4\int \mathrm{d}x - 4\int x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x + \int x\,\mathrm{d}x =$$
$$= 4x - 4\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^2}{2} + c = 4x - \frac{8}{3}x\sqrt{x} + \frac{1}{2}x^2 + c,\ x \in \langle 0, +\infty)$$

c) $$\int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{4}{\sqrt[3]{x^2}}\right)\mathrm{d}x = \int \left(x^{-2} - 4x^{-\frac{2}{3}}\right)\mathrm{d}x = \frac{x^{-1}}{-1} - 4\cdot\frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + c =$$
$$= -\frac{1}{x} - 12\sqrt[3]{x} + c,\ x \in (0, +\infty)$$

d) $\int \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x-2\sqrt{x}+1}{x}\,\mathrm{d}x = \int\left(1-2x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x =$

$= x - 2\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \ln|x| + c = x - 4\sqrt{x} + \ln x + c,\ x \in (0, +\infty)$

2. K funkci $f\colon y = 3x^2 - 2x + 5$ určete tu primitivní funkci F, která v bodě $x_0 = 1$ nabývá hodnoty 4.

Řešení

Vypočteme neurčitý integrál funkce f:

$$\int (3x^2 - 2x + 5)\,\mathrm{d}x = x^3 - x^2 + 5x + c, \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

Tím je určena množina všech primitivních funkcí k f a z ní máme vybrat tu funkci F, pro kterou platí $F(1) = 4$ čili $1^3 - 1^2 + 5\cdot 1 + c = 4$, odkud $c = -1$. Hledaná funkce F tedy je určena rovnicí

$$F(x) = x^3 - x^2 + 5x - 1, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

3. Vypočtěte:

a) $\int \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}x$, b) $\int (2^x - 3^x)\,\mathrm{d}x$.

Řešení

Analogickým postupem jako v 1. příkladu dostáváme:

a) $\int \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x + \int \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}) + c,$
$x \in (-\infty, +\infty)$

b) $\int (2^x - 3^x)\,\mathrm{d}x = \int 2^x\,\mathrm{d}x - \int 3^x\,\mathrm{d}x = \frac{2^x}{\ln 2} - \frac{3^x}{\ln 3} + c,\ c \in (-\infty, +\infty)$

4. Vypočtěte:

a) $\int \cos^2 \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$, b) $\int \mathrm{tg}^2 x\,\mathrm{d}x$.

Řešení

Užitím goniometrických vzorců (kap. 4.5) upravíme integrovanou funkci na tvar vhodný k integrování:

a) $\int \cos^2 \frac{1}{2}x\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}(1 + \cos x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \cos x\,\mathrm{d}x =$
$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin x + c,\ x \in (-\infty, +\infty)$

b) $\int \mathrm{tg}^2 x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} = \int\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)\mathrm{d}x = \mathrm{tg}\,x - x + c,$
$x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left((2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2}\right)$

Příklad užití neurčitého integrálu ve fyzice

Určete dráhu v čase t pro přímočarý pohyb hmotného bodu, jehož rychlost je konstantní $v = v_0$ a dráha v čase $t = 0$ je $s = s_0$.

Řešení

Pro dráhu $s = s(t)$ v čase t platí

$$s = \int v\,\mathrm{d}t = \int v_0\,\mathrm{d}t = v_0 \int \mathrm{d}t = v_0 t + c.$$

Pro $t = 0$ je tedy

$$s = c = s_0, \quad \text{takže } s = v_0 t + s_0.$$

8.5 Určitý integrál a jeho aplikace

Četné geometrické problémy (zejména určování obsahů obrazců), fyzikální a technické úlohy vedou k zavedení pojmu *určitého integrálu funkce.* Přitom na střední škole se omezujeme pro jednoduchost na spojité funkce.

Mějme dánu funkci f spojitou na intervalu $\langle a, b\rangle$.

1. Interval $\langle a, b\rangle$ *rozdělíme na n částí takovými dělicími body* x_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$, že $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Získanou množinu dílčích intervalů $\langle x_0, x_1\rangle, \langle x_1, x_2\rangle, \ldots, \langle x_{n-1}, x_n\rangle$ nazýváme **dělením intervalu** $\langle a, b\rangle$ a značíme D.
2. V každém i-tém intervalu dělení D vezmeme nejmenší funkční hodnotu (globální minimum) funkce f, označíme ji m_i, a největší funkční hodnotu (globální maximum) funkce f, označíme ji M_i. (Jejich existence je zajištěna podle Weierstrassovy věty o globálních extrémech uvedené na str. 372.)
3. Utvoříme tzv. **dolní integrální součet**

$$s_n(\mathsf{D}, f) = m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + \ldots + m_n(x_n - x_{n-1}) = \\ = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

a tzv. **horní integrální součet**

$$S_n(\mathsf{D}, f) = M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + \ldots + M_n(x_n - x_{n-1}) = \\ = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}).$$

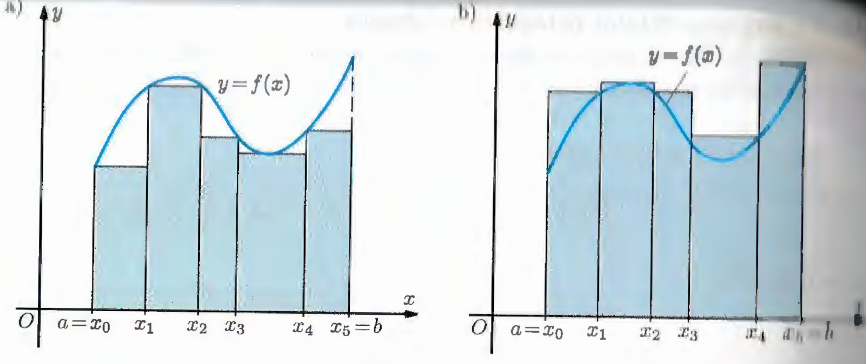
(Jejich *geometrický význam* je zřejmý z obr. 8.25a, b.)

Lze dokázat *větu:*

V.1. Je-li funkce f spojitá v každém bodě intervalu $\langle a, b\rangle$, pak existuje právě jedno číslo I takové, že platí

$$s_n(\mathsf{D}, f) \leqq I \leqq S_n(\mathsf{D}, f)$$

pro libovolné dělení D intervalu $\langle a, b\rangle$.



Obr. 8.25

Číslo I z věty V.1 je zřejmě společnou limitou posloupnosti dolních integrálních součtů $(s_n(\mathrm{D}, f))_{n=1}^{\infty}$ a posloupnosti horních integrálních součtů $(S_n(\mathrm{D}, f))_{n=1}^{\infty}$:

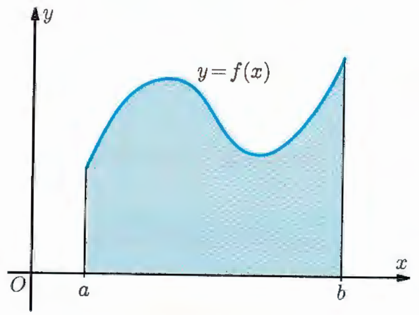
$$I = \lim_{n\to\infty} s_n(\mathrm{D}, f) = \lim_{n\to\infty} S_n(\mathrm{D}, f).$$

Nazývá se **určitý integrál funkce f od a do b** a značí se

$$I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Intervalu $\langle a, b\rangle$ se říká **integrační obor**, číslům a, b po řadě **dolní a horní mez určitého integrálu**.

Geometrický význam určitého integrálu $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *nezáporné funkce f je patrný* z obr. 8.26: Představuje obsah obrazce (tzv. *křivočarého lichoběžníku*) ohraničeného grafem funkce f, osou x a rovnoběžkami s osou y vedenými body a, b (vybarvený obrazec v obr. 8.26).



Obr. 8.26

Pro praktický výpočet určitého integrálu je důležitá následující *věta:*

V.2 Základní věta integrálního počtu

Nechť f je funkce spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť F je funkce k ní primitivní na (a, b) (tj. $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in (a, b)$), která je spojitá na $\langle a, b\rangle$. Pak existuje určitý integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ a platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Tento vztah se nazývá **vzorec Newtonův-Leibnizův** [čti: njútnův-lajbnycův].

Poznámka. Pravá strana tohoto vzorce se často stručněji zapisuje symbolem $[F(x)]_a^b$ (nebo $F(x)|_a^b$), tj. píšeme

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b\,.$$

Při výpočtu určitých integrálů jsou často užívány též následující *věty:*

V.3 Je-li f funkce spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ a k je libovolné reálné číslo, pak platí

$$\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

V.4 Jsou-li f a g funkce spojité na $\langle a, b\rangle$, pak platí

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

(Větu lze rozšířit pro libovolný počet funkcí.)

Příklady výpočtu určitých integrálů

Vypočtěte určité integrály:

a) $\displaystyle\int_{-1}^{2} 3x^2\,\mathrm{d}x$, b) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$, c) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x.$

Řešení

Užitím vět V.1 až V.4 dostáváme:

a) $\displaystyle\int_{-1}^{2} 3x^2\,\mathrm{d}x = \left[x^3\right]_{-1}^{2} = 2^3 - (-1)^3 = 9$

b) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = [\mathrm{e}^x]_0^1 = \mathrm{e}^1 - \mathrm{e}^0 = \mathrm{e} - 1$

c) $\displaystyle\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \frac{x}{2}\ \mathrm{d}x = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1+\cos x)\ \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2} +$

$\displaystyle + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\pi + 1$

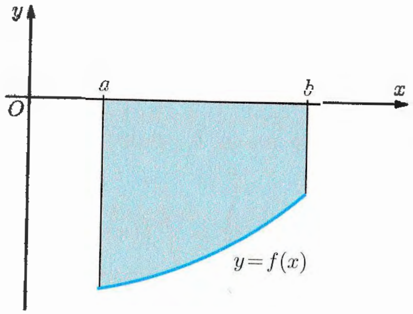
Geometrické aplikace určitého integrálu

Obsah rovinného obrazce složeného z křivočarých lichoběžníků (viz obr. 8.26) lze určit na základě geometrického významu určitého integrálu nezáporné spojité funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$. Podle něho obsah S křivočarého lichoběžníku v obr. 8.26 je

$$S = \int\limits_a^b f(x)\ \mathrm{d}x.$$

Obsah křivočarého lichoběžníku v obr. 8.27 je

$$S = \int\limits_a^b |f(x)|\ \mathrm{d}x = \int\limits_a^b -f(x)\ \mathrm{d}x.$$



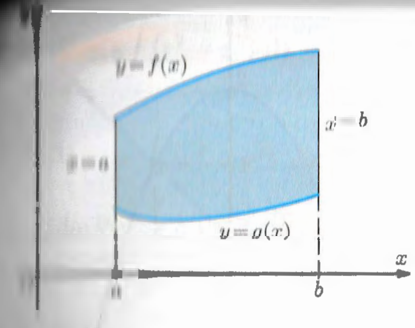
Obr. 8.27

Obsah obrazce ohraničeného grafy spojitých funkcí f, g a přímkami o rovnicích $x = a$, $x = b$, popř. jen grafy spojitých funkcí f, g (viz vyšrafované obrazce na obr. 8.28 až 8.31), je

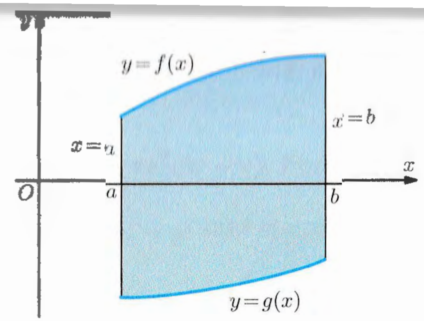
$$S = \int\limits_a^b [f(x) - g(x)]\ \mathrm{d}x.$$

Objem rotačního tělesa vzniklého rotací křivočarého lichoběžníku podle obr. 8.26, resp. obr. 8.27 kolem osy x je

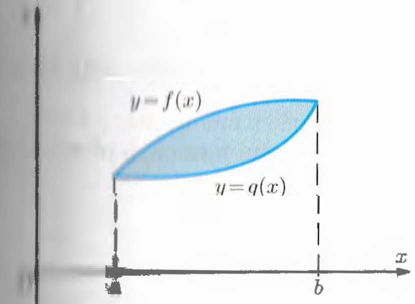
$$V = \pi\int\limits_a^b f^2(x)\ \mathrm{d}x.$$



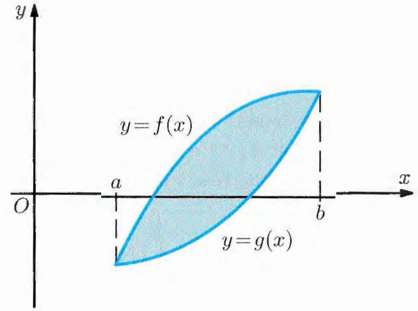
Obr. 8.28



Obr. 8.29



Obr. 8.30



Obr. 8.31

Příklady geometrických aplikací určitého integrálu

1. Vypočítejte obsah obrazce ohraničeného grafem funkce f: $y = \sin x$ v intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$ a osou x (obr. 8.32).

Řešení

Obsah tohoto obrazce je

$$S = \int\limits_0^{2\pi} |\sin x|\ \mathrm{d}x = \int\limits_0^{\pi} \sin x\ \mathrm{d}x - \int\limits_{\pi}^{2\pi} \sin x\ \mathrm{d}x =$$

$$= [-\cos x]_0^{\pi} - [-\cos x]_{\pi}^{2\pi} = -(\cos\pi - \cos 0) + (\cos 2\pi - \cos\pi) =$$

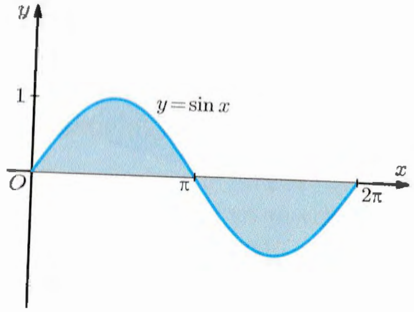
$$= -(-1-1) + (1+1) = 2 + 2 = 4.$$

2. Vypočítejte obsah obrazce ohraničeného grafy funkcí f: $y = 2 - x^2$, g: $y = x$ (obr. 8.33).

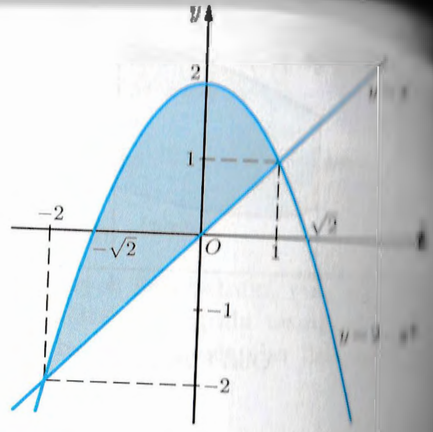
Řešení

Nejprve určíme x-ové souřadnice průsečíků grafů funkcí f, g řešením soustavy rovnic

$$y = 2 - x^2,$$
$$y = x.$$



Obr. 8.32



Obr. 8.33

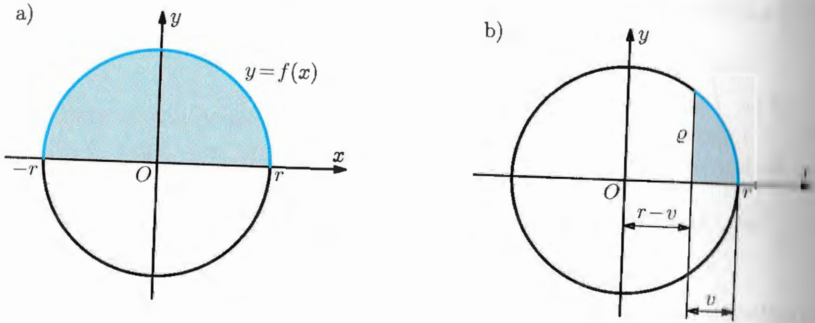
Dostáváme $x_1 = -2$, $x_2 = 1$, což jsou po řadě integrační meze a, b při výpočtu určitého integrálu vyjadřujícího obsah hledaného obrazce:

$$S = \int_{-2}^{1} \left[(2 - x^2) - x\right]\,\mathrm{d}x = \left[2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{1} =$$

$$= \left(2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) - \left(-4 + \frac{8}{3} - 2\right) = \frac{9}{2}$$

3. a) Odvoďte vzorec pro objem koule o poloměru r užitím toho, že vznikne rotací polokruhu (vybarveného v obr. 8.34a) kolem osy x.

b) Odvoďte vzorec pro objem kulové úseče výšky v, jež je částí koule o poloměru r; užijte toho, že kulová úseč vznikne rotací poloviny kruhové úseče (vybarvené v obr. 8.34b) kolem osy x.



Obr. 8.34

Řešení

Nezáporná funkce f, jejímž grafem je hraniční polokružnice vybarveného polokruhu v obr. 8.34a, je dána analyticky rovnicí $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, takže podle uvedeného vzorce pro objem rotačního tělesa vychází

a) $V = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\,\mathrm{d}x = \pi\left[r^2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-r}^{r} = \pi\left(r^3 - \frac{r^3}{3} + r^3 - \frac{r^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi r^3,$

b) $V = \pi \int_{r-v}^{r} (r^2 - x^2)\,\mathrm{d}x = \pi\left[r^2x - \frac{x^3}{3}\right]_{r-v}^{r} = \frac{1}{3}\pi v^2(3r - v)$. Podle Eukleidovy věty o výšce je $\varrho^2 = (2r - v)\cdot v$, odkud $2rv = \varrho^2 + v^2$. Dosadíme-li za r do odvozeného vzorce, vychází po úpravě

$$V = \frac{1}{6}\pi v(3\varrho^2 + v^2).$$

Fyzikální aplikace určitého integrálu

Dráha přímočarého pohybu konaného rychlostí $v = v(t)$ v časovém intervalu $\langle t_1, t_2\rangle$ je dána určitým integrálem

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,\mathrm{d}t.$$

Práce vykonaná na přímočaré dráze ve směru osy x silou velikosti $F = F(x)$ v intervalu $\langle a, b\rangle$ je dána určitým integrálem

$$W = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x.$$

Například je-li při jednoduchém kmitavém pohybu hmotného bodu na pružině síla ve směru osy x: $F = kx$, kde k je konstanta (tzv. *tuhost pružiny*), pak práce vykonaná na dráze $s = b - a$ je

$$W = \int_a^b kx\,\mathrm{d}x = k\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{1}{2}k(b^2 - a^2).$$

9 Geometrie (planimetrie a stereometrie)

9.1 Základní geometrické pojmy a základní věty planimetrie

Při soustavném výkladu geometrie se postupuje tak, že se vychází z několika **základních vět** (**axiomů**) obsahujících **základní pojmy** a popisujících vztahy mezi nimi. Na jejich základě se dokazuje platnost dalších **vět** a tvoří se další pojmy **definicemi**. Tomuto postupu se říká **axiomatická výstavba eukleidovské geometrie** (kap. 1.1). Poprvé v historii ji v podstatě užil řecký matematik *Eukleides* (jehož jméno se též přepisuje lat. *Euklides*) již ve třetím století před naším letopočtem v díle *Základy* (řec. Stoicheia, lat. Elementa). Avšak důsledně axiomatický výklad geometrie exaktně podal až německý matematik *David Hilbert* v knize *Základy geometrie* (něm. Grundlagen der Geometrie), která vyšla roku 1899. Takový výklad geometrie je však dosti zdlouhavý a značně abstraktní. Proto se při vyučování geometrie dodržuje jen rámcově, to znamená, že se mezi základní pojmy a věty zařazuje mnohem více pojmů a vět, než je při skutečně axiomatickém výkladu nutné. Přitom se zpravidla probírá nejprve **planimetrie** (**geometrie v rovině**) a poté **stereometrie** (**geometrie v prostoru**).

Body, přímky, roviny

Základní geometrické pojmy jsou **bod**, **přímka** a **rovina**.

Body označujeme zpravidla velkými písmeny latinské abecedy, přímky malými písmeny latinské abecedy. Roviny označujeme obvykle malými písmeny řecké abecedy. Na každé přímce a v každé rovině je nekonečně mnoho bodů, jsou to tedy příklady nekonečných bodových množin. Pro **množiny bodů** (**bodové množiny**) se v geometrii užívá též názvu **geometrický útvar**.

O bodech náležejících přímce či rovině a o přímkách náležejících rovině se říká, že jsou navzájem ve vztahu **incidence**. To, že **bod je incidentní** (**inciduje**) s přímkou (či rovinou), resp. **přímka je incidentní** (**inciduje**) s rovinou se vyjadřuje též často slovy: bod **leží** na přímce (v rovině), resp. přímka leží v rovině, přímka (rovina) **prochází** bodem, resp. rovina prochází přímkou. V případě incidence bodu A s přímkou p, resp. rovinou ϱ se užívá zápisů $A \in p$, $A \in \varrho$, v případě incidence přímky p s rovinou ϱ se užívá zápisu $p \subset \varrho$. V opačných případech se píše $A \notin p$, $A \notin \varrho$, $p \not\subset \varrho$.

Základní věta o přímce
Dvěma různými body prochází právě jedna přímka.

Prochází-li přímka p dvojicí bodů A, B ($A \neq B$), mluví se o ní jako o přímce AB a značí se symbolem $\leftrightarrow AB$. V symbolických zápisech pak píšeme $p = \leftrightarrow AB$.

Vzájemná poloha dvou přímek v rovině
Z uvedené základní věty plyne, že dvě různé přímky ležící v téže rovině buď mají právě jeden společný bod (tzv. **různoběžky**), anebo nemají žádný společný bod (tzv. **různé rovnoběžky**). Z mnoha důvodů je vhodné pokládat také jedinou přímku za dvě **splývající (totožné) rovnoběžky**. Společný bod P různoběžek a, b se nazývá **průsečík přímek** a, b; píšeme $a \cap b = \{P\}$.

Základní věty o rovnoběžkách
1. Leží-li přímky a, b, c v téže rovině tak, že $a \parallel b$, $b \parallel c$, pak je také $a \parallel c$.
2. Daným bodem lze vést k dané přímce právě jednu přímku s ní rovnoběžnou.

Polopřímky, úsečka

Zvolme na přímce p dva různé body P, A (obr. 9.1). Bod P rozděluje přímku p na dvě části zvané polopřímky.

Obr. 9.1

Bod P náleží každé z nich a nazývá se **počáteční bod polopřímky**. Říkáme, že tyto dvě polopřímky jsou **navzájem opačné polopřímky**. Polopřímka s počátečním bodem P obsahující bod $A \neq P$ se nazývá polopřímka PA. V symbolických zápisech se značí $\mapsto PA$. Bodu A říkáme **vnitřní bod polopřímky** PA.

Nechť B je libovolný vnitřní bod polopřímky opačné k polopřímce PA. Potom říkáme, že **bod P leží mezi body** A, B nebo že **bod P odděluje body** A, B.

Základní věta o vzájemné poloze tří různých bodů na přímce
Ze tří různých bodů téže přímky právě jeden leží mezi zbývajícími dvěma.

Nechť A, B jsou různé body. Potom průnik polopřímek AB, BA se nazývá úsečka AB (obr. 9.2).

Obr. 9.2

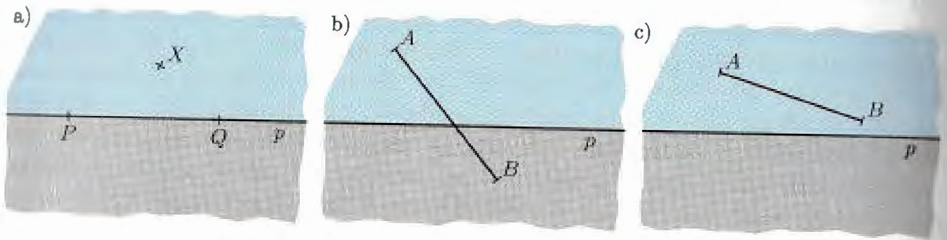
V symbolických zápisech se stručně značí AB. Bodům A, B říkáme **krajní body úsečky** AB. Libovolný bod X, který leží mezi body A, B, se nazývá **vnitřní bod úsečky** AB. Množina všech vnitřních bodů úsečky se nazývá **vnitřek úsečky**. Polopřímka opačná k polopřímce AB se nazývá **prodloužení úsečky** AB **za bod** A a obdobně polopřímce opačné k polopřímce BA se říká **prodloužení úsečky** AB **za bod** B.

O úsečce AB s vnitřním bodem X říkáme, že je **grafický součet úseček** AX, XB; píšeme $AB = AX + XB$. Zároveň je $AX = AB - XB$; úsečka AX je **grafickým rozdílem úseček** AB, XB. Obdobně je $XB = AB - AX$.

Polorovina, rovinný pás

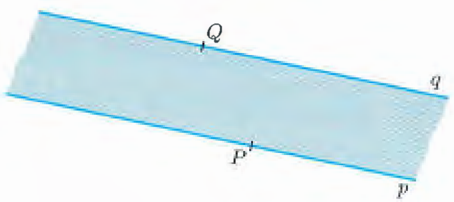
Libovolná přímka p ležící v rovině ϱ rozděluje tuto rovinu na dvě části, z nichž každá včetně přímky p se nazývá **polorovina**.

Přímce p se říká **hraniční přímka poloroviny**. Každý bod X poloroviny, který neleží na její hraniční přímce p (obr. 9.3a), se nazývá **vnitřní bod poloroviny**. Množina všech vnitřních bodů poloroviny se nazývá **vnitřek poloroviny**. Polorovina určená hraniční přímkou p a vnitřním bodem X se značí polorovina pX nebo $\mapsto pX$ a speciálně, je-li $p = PQ$, se pak značí polorovina PQX nebo $\mapsto PQX$. Poloroviny pA, pB $(A \neq B)$ se nazývají **opačné poloroviny**, jestliže přímka p protíná úsečku AB v jejím vnitřním bodě; říkáme pak, že **přímka p odděluje body** A, B (obr. 9.3b). **Poloroviny pA, pB splývají (jsou totožné)**, jestliže buď $A = B$, anebo $A \neq B$ a přímka p neprotíná úsečku AB; říkáme pak, že **přímka p body A, B neodděluje** (obr. 9.3c).



Obr. 9.3

Nechť p, q jsou dvě různé rovnoběžky ležící v rovině ϱ; libovolný bod přímky p označme P a libovolný bod přímky q označme Q (obr. 9.4). Potom průnik polorovin pQ, qP se nazývá **pás** (nebo **rovinný pás**) **s hraničními přímkami** p, q. Libovolný bod pásu neležící na p nebo q se nazývá **vnitřní bod pásu**.



Obr. 9.4

Shodné útvary v rovině

Nechť U_1, U_2 jsou libovolné dva geometrické útvary v dané rovině. Jestliže můžeme útvar U_1 přemístit tak, že splyne s útvarem U_2, pak říkáme, že **útvary U_1, U_2 jsou shodné**; píšeme $\mathsf{U}_1 \cong \mathsf{U}_2$.

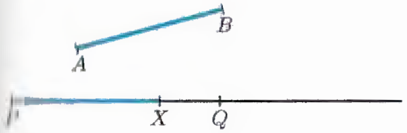
Příklady shodných rovinných útvarů

Každé dvě přímky, každé dvě polopřímky, každé dvě poloroviny.

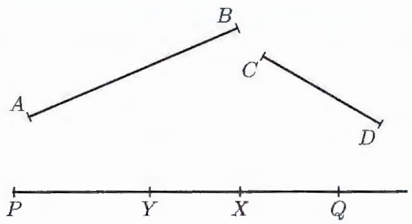
Porovnávání úseček, délka úsečky

Z názoru je zřejmé, že platí tato *věta* (obr. 9.5):

Na libovolné polopřímce PQ lze sestrojit právě jednu úsečku PX, která je shodná s danou úsečkou AB.



Obr. 9.5



Obr. 9.6

Říkáme pak, že **úsečka AB je přenesena (nanesena) na polopřímku PQ**; tím už rozumíme, že bod A splynul s bodem P. Na tom je založeno **porovnávání úseček**: Nechť AB, CD jsou dané úsečky. Naneseme je na polopřímku PQ a dostaneme tak úsečky PX, PY (v tomto pořadí). Je-li bod Y mezi body P, X (obr. 9.6), říkáme, že **úsečka CD je menší než úsečka AB**; píšeme $CD < AB$ nebo $AB > CD$. Je-li $Y = X$, **jsou úsečky AB, CD shodné**; píšeme $CD = AB$. Je-li bod X mezi body P, Y, **úsečka CD je větší než úsečka AB**.

K *měření úseček* se zavádí míra zvaná *délka* (*velikost*) *úsečky*:

Zvolíme určitou úsečku PQ, jejíž délku vezmeme za **délkovou jednotku** 1 dj; tato úsečka se nazývá **jednotková úsečka**. Libovolné úsečce AB pak přiřazujeme **délku (velikost) úsečky** AB, kterou značíme $|AB|$ a vyjadřujeme ji ve tvaru $|AB| = K$ dj, kde K je kladné číslo zvané číselná hodnota délky úsečky AB a dj je zvolená délková jednotka. Toto vyjádření se získává porovnáním úsečky AB se zvolenou jednotkovou úsečkou PQ.

Základní (*charakteristické*) *vlastnosti délky úsečky* jsou:

1. Každé dvě shodné úsečky mají sobě rovné délky.
2. Grafický součet libovolných dvou úseček má délku rovnou součtu délek těchto úseček.

Délku úsečky AB označujeme často nejen symbolem $|AB|$. Pokud nemůže dojít k nedorozumění, připouští se také označení malými písmeny latinské abecedy pro úsečku i pro její délku.

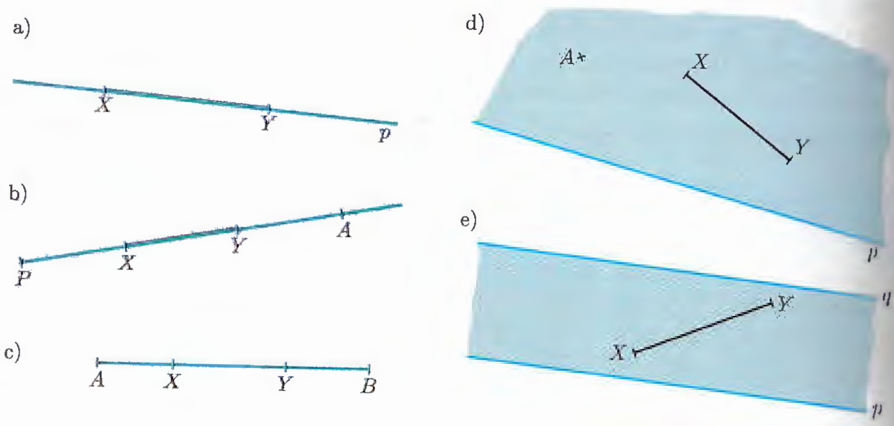
Poznámka. Nejčastěji užívané délkové jednotky jsou metr (m) [základní jednotka délky v měrové soustavě SI], jeho díly: decimetr (dm), centimetr (cm), milimetr (mm) a násobky: zejména kilometr (km).

Někdy se uvažuje také tzv. **nulová úsečka** AB, jež je tvořena dvojicí splývajících bodů $A = B$. Její délka je $|AB| = 0$ dj.

Nechť A, B jsou libovolné body (tj. $A \neq B$ nebo $A = B$). Potom **vzdáleností bodů** A, B rozumíme délku $|AB|$ (nenulové nebo nulové) úsečky AB.

Geometrický útvar (**bodová množina**) se nazývá **konvexní**, jestliže má tuto vlastnost: Jsou-li X, Y libovolné různé body množiny M, je každý bod úsečky XY také bodem množiny M (úsečka XY je podmnožinou množiny M). Za konvexní útvar se pokládá také jednobodová množina a prázdná množina.

Příklady konvexních geometrických útvarů (obr. 9.7)
Přímka, polopřímka, úsečka, polorovina, pás.



Obr. 9.7

Z uvedené definice konvexních geometrických útvarů plyne, že platí *věta:*

Průnik libovolných dvou konvexních geometrických útvarů je rovněž konvexní útvar.

9.2 Úhly, trojúhelník

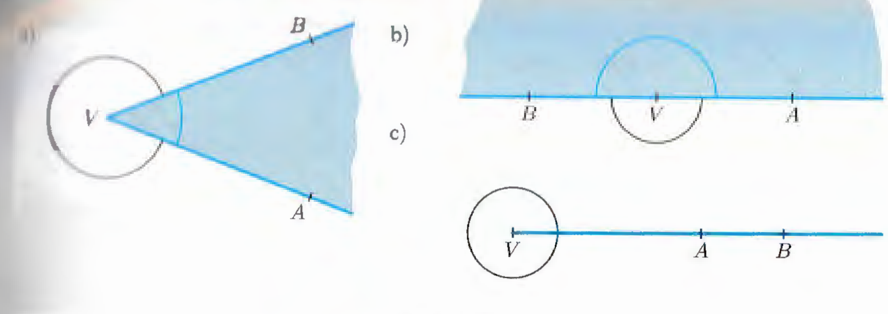
Libovolné dvě různé polopřímky VA, VB (které mohou být i navzájem opačné) rozdělí rovinu, v níž leží, ve dvě části (obr. 9.8). Každá z těchto částí roviny včetně obou polopřímek VA, VB se nazývá **úhel** AVB.

Bodu V se říká **vrchol úhlu**, polopřímkám VA, VB **ramena úhlu** AVB. Každý bod úhlu AVB, který neleží na žádném jeho rameni, se nazývá **vnitřní bod úhlu** AVB. Množina všech vnitřních bodů úhlu AVB tvoří jeho **vnitřek**. Úhly se značí též malými řeckými písmeny.

Jestliže jsou polopřímky VA, VB různé, ale nejsou opačné, pak

a) jeden z úhlů AVB je průnikem polorovin VAB, VBA; tento úhel AVB je konvexní geometrický útvar, nazývá se **konvexní úhel** AVB a značí se $\sphericalangle AVB$ (na obr. 9.8 je konvexní úhel AVB vybarven);

b) druhý z úhlů AVB je sjednocením polorovin opačných k polorovinám VAB, VBA; tento úhel AVB není konvexním útvarem, nazývá se **nekonvexní úhel** AVB a značí se $\not\sphericalangle AVB$.



Obr. 9.8

Navzájem opačné polopřímky VA, VB rozdělují rovinu, v níž leží, ve dvě poloroviny se společnou hraniční přímkou AB. Každé z těchto polorovin říkáme **přímý úhel** AVB. Je to tedy polorovina, na jejíž hraniční přímce je vyznačen vrchol V úhlu.

Uvažujme dále dvě splývající polopřímky VA, VB v dané rovině. Pak tato rovina se nazývá **plný úhel** AVB s vrcholem V a s rameny $VA = VB$. Je to tedy rovina, v níž je vyznačen vrchol V úhlu a splývající ramena VA, VB. Všechny body této roviny s výjimkou polopřímky $VA = VB$ tvoří vnitřek plného úhlu AVB. Zavádí se též pojem **nulový úhel** AVB, jímž se rozumějí polopřímky $VA = VB$.

Také nulové, přímé a plné úhly AVB jsou konvexní útvary, a proto se o ně rozšiřuje výše zavedený pojem **konvexní úhel** AVB ($\sphericalangle AVB$).

Porovnávání úhlů

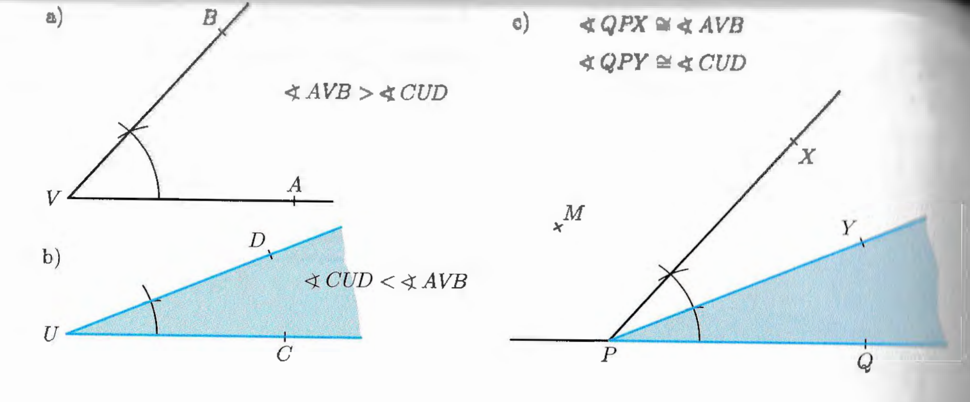
Z názoru je zřejmé, že platí *věta:*

V dané polorovině PQM lze sestrojit právě jeden úhel QPX, který je shodný s daným konvexním úhlem AVB, jehož ramena nejsou splývající polopřímky.

Říkáme pak, že **konvexní úhel** AVB (s rameny $VA \neq VB$) **je přenesen k polopřímce** PQ **do poloroviny** PQM. Na tom je založeno **porovnávání konvexních úhlů** (obr. 9.9): Nechť jsou dány konvexní úhly AVB, CUD s nesplývajícími rameny. Naneseme je ke zvolené polopřímce PQ do zvolené poloroviny PQM. Tak dostaneme úhly QPX, QPY. Jestliže polopřímky PX, PY splynou, jsou úhly AVB, CUD shodné. Jestliže je $PX \neq PY$, nejsou úhly AVB, CUD shodné. Jestliže např. polopřímka PY je podmnožinou úhlu QPX (obr. 9.9), říkáme, že **úhel** CUD je **menší než úhel** AVB a úhel AVB je **větší než úhel** CUD. Píšeme $\sphericalangle CUD < \sphericalangle AVB$, $\sphericalangle AVB > \sphericalangle CUD$.

Velikost úhlu

K *měření úhlů* (*konvexních i nekonvexních*) se zavádí míra zvaná *velikost úhlu:* Zvolí se určitý úhel, jehož velikost se vezme za **jednotku velikosti úhlu**; tento úhel se nazývá **jednotkový úhel**. Libovolnému úhlu AVB se pak přiřazuje **velikost úhlu** ve tvaru nezáporného násobku zvolené jednotky velikosti úhlu. (Číselná



Obr. 9.9

hodnota velikosti úhlu je pro nulový úhel 0 a pro nenulový úhel kladná.) Toto vyjádření se získává porovnáním úhlu AVB se zvoleným jednotkovým úhlem. Pro konvexní úhel AVB se jeho velikost označuje symbolem $|\sphericalangle AVB|$ a pro nekonvexní úhel AVB se značí symbolem $|\text{≮} AVB|$. Pokud nemůže dojít k nedorozumění, připouští se také označení malými písmeny řecké abecedy pro úhel i jeho velikost ($\alpha, \beta, \ldots$).

Základní (charakteristické) vlastnosti velikosti úhlu jsou:

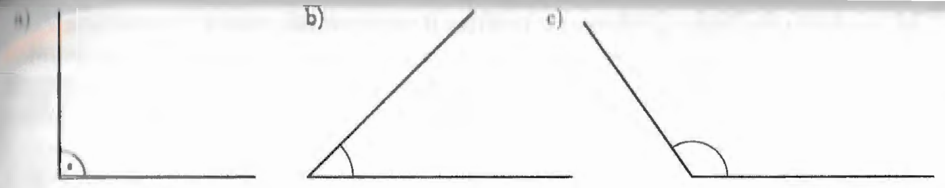
1. Každé dva shodné úhly mají sobě rovné velikosti.
2. Je-li libovolný úhel AVB rozdělen polopřímkou VX na dva úhly AVX a BVX, pak velikost úhlu AVB je rovna součtu velikostí úhlů AVX a BVX.

Poznámka. O jednotkách velikosti úhlů v **míře stupňové** a **míře obloukové** jsme hovořili již v úvodu ke goniometrickým funkcím (kap. 4.5). V míře stupňové je jednotkou velikosti úhlu **úhlový stupeň** (označení 1°), který je $\frac{1}{90}$ velikosti pravého úhlu. Menší jednotky jsou úhlová minuta ($1'$) a úhlová vteřina ($1''$), přičemž platí $1^\circ = 60' = 3\,600''$. Užívá se též **úhlový stupeň setinný** neboli **grad** (označení 1^{g}), který je $\frac{1}{100}$ velikosti pravého úhlu. Dělí se na 100 setinných minut a setinná minuta se dělí na 100 setinných vteřin. V míře obloukové je jednotkou velikosti úhlu **radián** (rad). Je to velikost středového úhlu na jednotkové kružnici, který přísluší oblouku jednotkové délky.

Klasifikace úhlů podle velikosti

Rozdělíme-li přímý úhel na poloviny, dostáváme dvojici shodných konvexních úhlů, z nichž každý se nazývá **pravý úhel**. Označuje se písmenem R a v obrázcích symbolem ⦜. Jeho velikost je 90°. Konvexní úhel, který je menší než pravý úhel, se nazývá **ostrý úhel**. Konvexní úhel, který je větší než pravý úhel a menší než přímý, se nazývá **tupý úhel**. (Na obr. 9.10a, b, c jsou zobrazeny vedle sebe pravý, ostrý a tupý úhel.)

V tabulce 9.1 uvádíme souhrnně klasifikaci úhlů a jejich velikosti ve stupňové míře.



Obr. 9.10

Klasifikace úhlů podle jejich velikosti α Tab. 9.1

úhly
- konvexní
  - nulové ($\alpha = 0^\circ$)
  - ostré ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$)
  - pravé ($\alpha = 90^\circ$)
  - tupé ($90^\circ < \alpha < 180^\circ$)
  - přímé ($\alpha = 180^\circ$)
- nekonvexní ($180^\circ < \alpha < 360^\circ$)
  - plné ($\alpha = 360^\circ$)

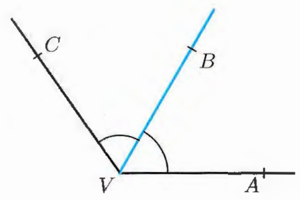
Dvojice úhlů doplňkových a výplňkových

Libovolné dva ostré úhly, jejichž součet velikostí je 90°, se nazývají **doplňkové úhly**. Libovolný ostrý úhel a tupý úhel, jejichž součet velikostí je 180°, se nazývají **výplňkové úhly**.

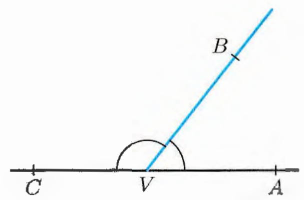
Dvojice konvexních úhlů se společným ramenem

Konvexní úhly AVB, BVC, které leží v rovině tak, že jejich průnikem je právě jen rameno VB, se nazývají **styčné úhly** (obr. 9.11). Úhel AVC, jehož vnitřním bodem je bod B, se potom nazývá **grafický součet úhlů** AVB, BVC. O úhlu BVC říkáme, že je **grafickým rozdílem úhlů** AVC, AVB; obdobně je úhel AVB grafickým rozdílem úhlů AVC, BVC.

Styčným úhlům AVB, BVC, jejichž grafickým součtem je přímý úhel AVC, říkáme **vedlejší úhly**; jejich nesplývající ramena jsou opačné polopřímky (obr. 9.12).

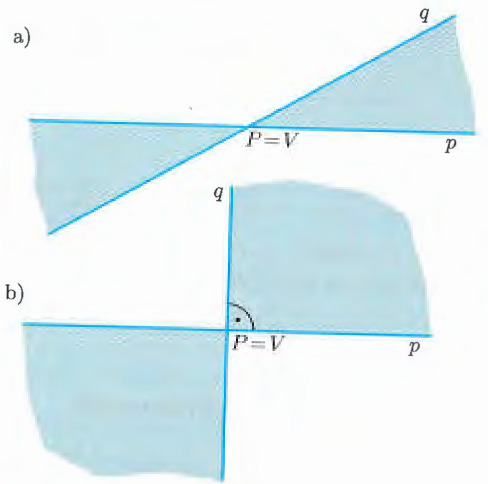


Obr. 9.11



Obr. 9.12

Libovolné dvě různoběžky p, q s průsečíkem P rozdělují rovinu, v níž leží, ve *čtyři konvexní* **úhly** se společným vrcholem $V = P$ (obr. 9.13), o kterých říkáme, že jsou **sevřeny různoběžkami** p, q. Tyto čtyři úhly tvoří dvě dvojice shodných úhlů, jejichž ramena jsou opačné polopřímky. Dvojice těchto shodných konvexních úhlů se nazývají **vrcholové úhly** s vrcholem $V = P$. (Na obr. 9.13 je jedna dvojice vrcholových úhlů vybarvena a druhá nikoli.) Není-li žádný z těchto úhlů pravý, pak dva vrcholové úhly jsou ostré a zbývající dva vrcholové úhly jsou tupé (obr. 9.13a).



Obr. 9.13

Je-li jeden ze čtyř úhlů sevřených různoběžkami p, q pravý, jsou i ostatní tři úhly pravé (obr. 9.13b). O takových různoběžkách p, q říkáme, že jsou **přímkami k sobě (navzájem) kolmými** nebo že každá z nich je **kolmicí** k druhé přímce. Bod P se nazývá **pata kolmice** p, resp. q. Kolmost přímek p, q zapisujeme $p \perp q$, resp. $q \perp p$ (nebo $\leftrightarrow AB \perp \leftrightarrow CD$, je-li $p = \leftrightarrow AB$, $q = \leftrightarrow CD$).

Platí *věty*:

V.1. V dané rovině lze vést daným bodem k dané přímce právě jednu kolmici.

V.2. Nechť p, q, r jsou tři vesměs různé přímky, které leží v rovině. Potom platí:

a) Je-li $p \parallel q$ a $p \perp r$, je $q \perp r$.

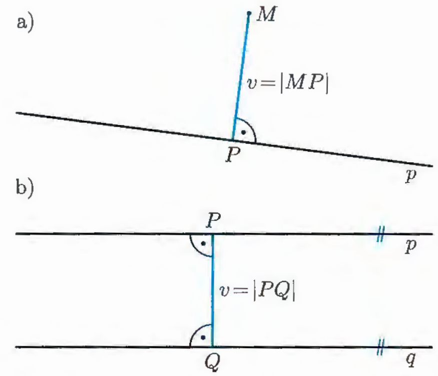
b) Je-li $p \perp q$ a $p \perp r$, je $q \parallel r$.

Metrické pojmy v rovině

Odchylkou dvou přímek p, q v rovině nazýváme: a) pro různoběžky p, q velikost ostrého nebo pravého úhlu, který svírají (obr. 9.13a, b); b) pro rovnoběžky p, q velikost nulového úhlu. Značí se $\alpha = |\sphericalangle\, p, q|$; $\alpha \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$, resp. $\alpha \in \langle 0°, 90° \rangle$.

Vzdáleností bodu M od přímky p nazýváme vzdálenost bodu M od paty P kolmice vedené bodem M k přímce p (obr. 9.14a). Značí se v, resp. $v(M, p)$; $v = |MP|$.

Vzdáleností dvou rovnoběžek p, q nazýváme vzdálenost pat P, Q libovolné jejich společné kolmice (obr. 9.14b). Značí se v, resp. $v(p, q)$; $v = |PQ|$. Pro pás o hraničních přímkách p, q (obr. 9.4) se tato vzdálenost nazývá **šířka pásu**.



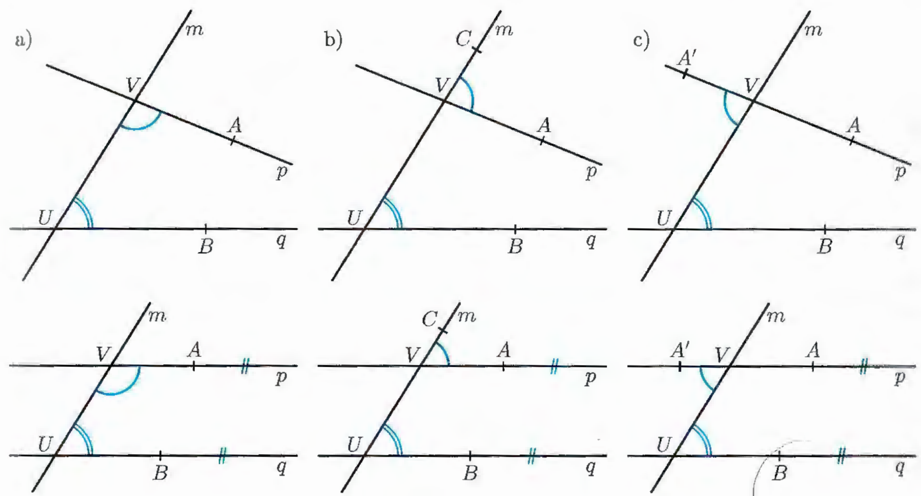
Obr. 9.14

Příčka dvojice různých přímek a úhly, jež s nimi svírá

Každou přímku m, která protíná dvě různé přímky p, q ve dvou různých bodech U, V, nazýváme **příčkou přímek** p, q.

Pro dvojice úhlů, jež svírá s přímkami p, q, se zavádějí tyto názvy: úhly přilehlé, úhly souhlasné, úhly střídavé.

a) **Úhly přilehlé** jsou každé dva úhly, které leží v téže polorovině s hraniční přímkou $m = VU$, přičemž rameno jednoho je polopřímka VU a rameno druhého je polopřímka UV. (Na obr. 9.15a jsou to např. úhly AVU a BUV.)



Obr. 9.15

b) **Úhly souhlasné** jsou každé dva úhly, které leží v téže polorovině s hraniční přímkou $m = VU$, přičemž buď rameno jednoho je polopřímka VU a rameno druhého je polopřímka opačná k polopřímce UV, anebo rameno prvního je polopřímka opačná k polopřímce VU a rameno druhého je polopřímka UV. (Na obr. 9.15b jsou to např. úhly AVC a BUV.)

c) **Úhly střídavé** jsou každé dva úhly, které leží v navzájem opačných polorovinách s hraniční přímkou $m = VU$, přičemž buď rameno jednoho je polopřímka VU a rameno druhého je polopřímka UV, anebo rameno jednoho je polopřímka opačná k polopřímce VU a rameno druhého polopřímka opačná k polopřímce UV. (Na obr. 9.15c jsou to např. úhly $A'VU$ a BUV.)

Věta o rovnoběžnosti dvojice různých přímek protťatých příčkou
Nechť příčka m protíná přímku p v bodě V a přímku $q \neq p$ v bodě U. Potom platí:

a) Přímky p, q jsou rovnoběžné, právě když libovolné dva přilehlé úhly jsou výplňkové.

b) Přímky p, q jsou rovnoběžné, právě když libovolné dva souhlasné úhly jsou shodné.

c) Přímky p, q jsou rovnoběžné, právě když libovolné dva střídavé úhly jsou shodné.

Střed a osa úsečky, osa úhlu, osy dvojice přímek v rovině

Střed úsečky AB je její vnitřní bod S, který je stejně vzdálený od krajních bodů úsečky A, B.

Osa úsečky AB je přímka o, která prochází středem S úsečky AB a je kolmá k přímce $p = AB$.

Osa úhlu AVB je polopřímka o, která prochází vrcholem V úhlu a rozděluje ho na dvě shodné části.

Osy dvou různoběžek p, q jsou přímky o_1, o_2, které procházejí jejich průsečíkem P a každá je sjednocením os jedné dvojice vrcholových úhlů s rameny na různoběžkách p, q.

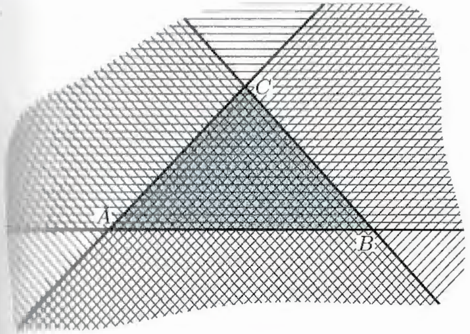
Osa rovnoběžek p, q neboli **osa pásu** s hraničními přímkami p, q je přímka o, která je množinou všech středů úseček PQ takových, že $P \in p$, $Q \in q$.

Trojúhelník

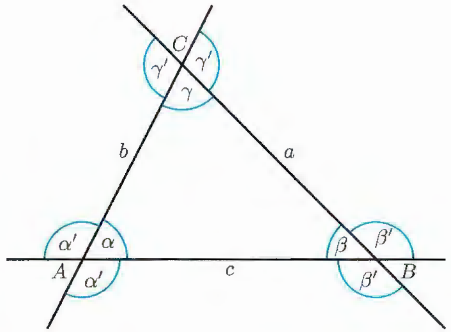
Mějme dány tři různé body A, B, C, které neleží v jedné přímce. **Trojúhelník** ABC (obr. 9.16) je průnik polorovin ABC, BCA, CAB, tj. množina všech bodů, jež leží zároveň v těchto třech polorovinách. Označuje se symbolicky $\triangle ABC$.

Body A, B, C se nazývají **vrcholy trojúhelníku**, úsečky AB, BC, CA **strany trojúhelníku**, konvexní úhly $\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle BCA$ **vnitřní úhly trojúhelníku** při vrcholech A, B, C. Strany trojúhelníku ABC se stručně značí též a, b, c (obr. 9.17), často se takto označují i jejich délky $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$. Vnitřní úhly trojúhelníku se obdobně označují α, β, γ (obr. 9.17), často se však takto značí i jejich velikost $\alpha = |\sphericalangle BAC|$, $\beta = |\sphericalangle ABC|$, $\gamma = |\sphericalangle BCA|$. Ke každému

vnitřnímu úhlu trojúhelníku existují dva shodné vedlejší úhly. Kterýkoli z vedlejších úhlů vnitřního úhlu trojúhelníku nazýváme odpovídajícím **vnějším úhlem trojúhelníku**. (V obr. 9.17 jsou vnější úhly příslušné k vnitřním úhlům α, β, γ označeny α', β', γ'.)



Obr. 9.16



Obr. 9.17

Sjednocení všech stran trojúhelníku nazýváme **hranicí trojúhelníku**. Bodům hranice trojúhelníku se říká **hraniční body trojúhelníku**. Všechny ostatní body trojúhelníku se nazývají **vnitřní body trojúhelníku**. Množinu všech vnitřních bodů trojúhelníku nazýváme **vnitřkem trojúhelníku**.

Poznámka. Trojúhelník ABC lze též definovat jako množinu všech úseček AX, kde X je libovolný bod úsečky BC.

Základní věta o trojúhelníkové nerovnosti
Jsou-li A, B, C tři různé body, které neleží na přímce (jsou vrcholy trojúhelníku), pak pro jejich vzdálenosti (délky stran trojúhelníku) platí vztah

$$|AC| + |BC| > |AB| \qquad \textbf{(trojúhelníková nerovnost)}$$

Zobecnění této věty viz str. 427 příklad 3.

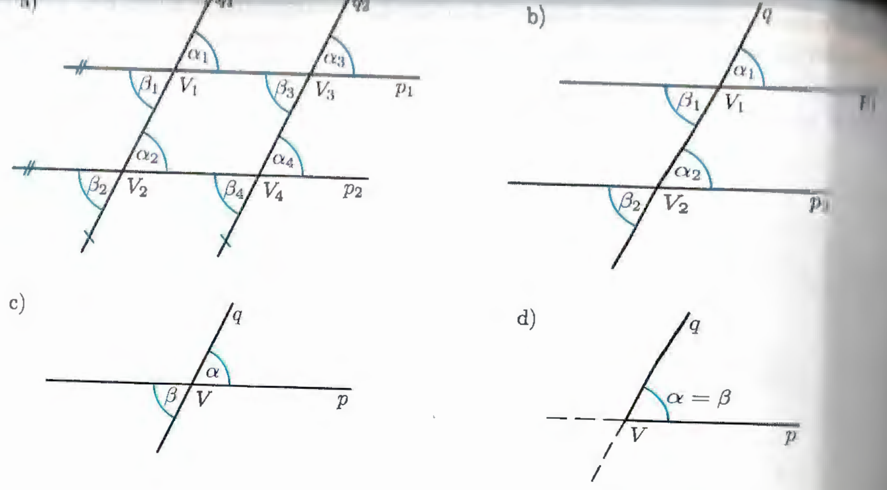
Věta o konvexnosti trojúhelníku
Každý trojúhelník ABC je konvexní geometrický útvar.

Příklady důkazových planimetrických úloh

1. Dokažte *větu*:
Každé dva ostré úhly (v téže rovině), jejichž ramena leží na rovnoběžkách, jsou shodné.

Důkaz
Všechny možné typy vzájemné polohy dvojice ostrých úhlů, jejichž ramena leží na rovnoběžkách, jsou znázorněny na obr. 9.18a, b, c, d.

a) Dvojice úhlů α_1, α_2; α_1, α_3; α_2, α_4; α_3, α_4 a dvojice úhlů β_1, β_2; β_1, β_3; β_2, β_4; β_3, β_4 jsou souhlasné úhly, a tedy podle věty uvedené na str. 424 jsou



Obr. 9.18

shodné. Dvojice úhlů α_1, β_1; α_2, β_2; α_3, β_3; α_4, β_4 jsou vrcholové úhly, které jsou shodné (viz str. 422). Odtud plyne, že libovolné dvojice úhlů α_i, α_j; β_i, β_j; α_i, β_j; α_i, β_i (pro každé $i, j = 1, 2, 3, 4$, $i \neq j$) jsou shodné úhly.

b) V tomto speciálním případě je $q_1 = q_2 = q$, takže opět podle důkazu v a) jsou úhly $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ shodné.

c) V tomto speciálním případě je $p_1 = p_2 = p$ a $q_1 = q_2 = q$, úhly α, β jsou vrcholové, a tedy shodné.

d) V tomto případě jsou úhly α, β totožné, a tedy samozřejmě shodné.

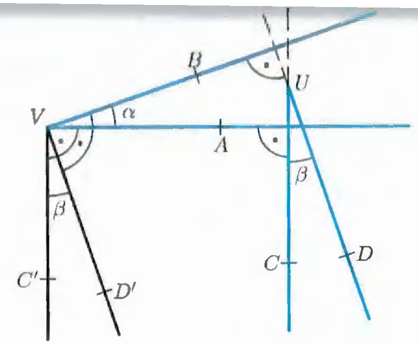
Poznámka. Obecněji platí *věta:* Dva konvexní úhly s rovnoběžnými rameny jsou buď shodné, jsou-li oba ostré nebo tupé, anebo jsou výplňkové (součet jejich velikostí je 180°), je-li jeden z nich ostrý a druhý tupý.

2. Dokažte *větu:*
Každé dva ostré úhly takové, že ramena jednoho úhlu leží na kolmicích k ramenům druhého úhlu, jsou shodné.

Důkaz
Označme uvažované ostré úhly $\sphericalangle AVB$ a $\sphericalangle CUD$, přičemž $AV \perp CU$ a $BV \perp DU$ (obr. 9.19); $\sphericalangle CUD$ přemístíme do polohy $\sphericalangle C'VD'$, kde $VC' \parallel UC$ a $VD' \parallel UD$. Z vět o kolmosti přímek v rovině pak plyne, že $VC' \perp VA$ a $VD' \perp VB$, takže $\sphericalangle C'VA$ a $\sphericalangle D'VB$ jsou oba pravé, a proto shodné úhly. První z nich je grafickým součtem úhlů $\sphericalangle C'VD'$ a $\sphericalangle D'VA$, druhý je grafickým součtem úhlů $\sphericalangle D'VA$ a $\sphericalangle AVB$. Odtud plyne, že

$$|\sphericalangle C'VD'| + |\sphericalangle D'VA| = |\sphericalangle D'VA| + |\sphericalangle AVB|,$$

takže $|\sphericalangle C'VD'| = |\sphericalangle AVB|$, a tedy (vzhledem k tomu, že $|\sphericalangle C'VD'| = |\sphericalangle CUD|$) je $|\sphericalangle CUD| = |\sphericalangle AVB|$, a tedy $\sphericalangle CUD \cong \sphericalangle AVB$.



Obr. 9.19

3. Dokažte *větu:*
Pro vzdálenosti libovolných tří bodů A, B, M ($A \neq B$) platí

$$|AM| + |MB| \geqq |AB| \text{ (\textbf{trojúhelníková nerovnost})},$$

přičemž rovnost nastává, právě když bod M je bodem úsečky AB.

Důkaz

a) Neleží-li bod M na přímce AB, pak pro body A, B, M platí podle věty na str. 425 trojúhelníková nerovnost

$$|AM| + |MB| > |AB|. \tag{1}$$

b) Leží-li bod M na přímce AB, avšak nepatří k bodům úsečky AB, je buď $|AM| > |AB|$, nebo $|MB| > |AB|$, takže platí opět (1).

c) Je-li bod M bodem úsečky AB a je $M = A$ nebo $M = B$, je

$$|AM| + |MB| = |AB|. \tag{2}$$

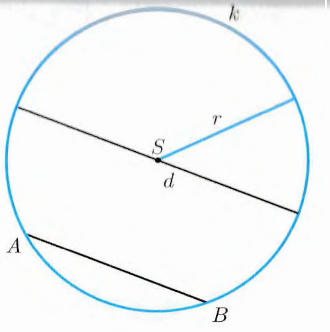
d) Je-li bod M bodem úsečky AB a $M \neq A$, $M \neq B$, je úsečka AB grafickým součtem úseček AM a MB, takže opět platí (2).

Poznámka. Nerovnost $|AM| + |MB| \geqq |AB|$ se někdy nazývá **neostrá trojúhelníková nerovnost**, zatímco nerovnost $|AM| + |MB| > |AB|$ je **ostrá trojúhelníková nerovnost**.

9.[illegible] Kružnice

Kružnice je množina všech bodů roviny, které mají od daného bodu S této roviny (**středu kružnice**) danou vzdálenost r (obr. 9.20).

Úsečka, jejímž jedním krajním bodem je střed kružnice S a druhým libovolný bod kružnice, se nazývá **poloměr kružnice**; stejně je nazývána délka r této úsečky. Libovolnou úsečku, jejímiž krajními body jsou dva různé body kružnice, nazýváme **tětivou kružnice**. Prochází-li středem kružnice, nazývá se **průměr kružnice**; stejně je nazývána délka $d = 2r$ této úsečky.



Obr. 9.20

Kružnice se označuje zpravidla k nebo l, podrobněji kružnice k se středem S a poloměrem r se značí $k(S, r)$.

Množinu všech bodů roviny ϱ, pro jejichž vzdálenost v od středu S dané kružnice k o poloměru r

platí $\begin{cases} v < r, & \text{nazýváme } \textbf{vnitřní oblastí kružnice } k, \\ v > r, & \text{nazýváme } \textbf{vnější oblastí kružnice } k. \end{cases}$

Sjednocení kružnice $k(S, r)$ a její vnitřní oblasti se nazývá **kruh**.

Značí se např. $\mathsf{K}(S, r)$. Bod S se pak též nazývá **střed kruhu** a r **poloměr kruhu**. Kružnici $k(S, r)$ nazýváme **hraniční kružnicí** nebo **hranicí kruhu** $\mathsf{K}(S, r)$, její vnitřní oblasti se říká též **vnitřek kruhu** a vnější oblasti **vnějšek kruhu**.

Pro **délku kružnice** $k(S, r)$ neboli **obvod kruhu** $\mathsf{K}(S, r)$ platí vzorec

$$o = 2\pi r,$$

kde π je Ludolfovo číslo ($\pi \doteq 3{,}141\,59$), r poloměr kružnice k.

Vzájemné polohy přímky a kružnice, dvou kružnic v rovině

Pro *vzájemnou polohu přímky a kružnice v rovině* platí *věta:*

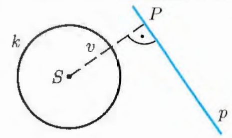
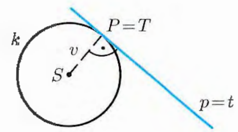
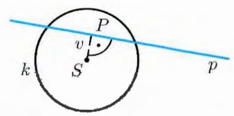
Libovolná přímka má s kružnicí v téže rovině buď právě dva různé společné body (**sečna kružnice**), nebo právě jeden společný bod (**tečna kružnice**), nebo žádný společný bod (**vnější přímka kružnice**).

Označíme-li v vzdálenost přímky p od středu S kružnice $k(S, r)$, platí pro vzájemnou polohu přímky p a kružnice k nutné a postačující podmínky uvedené v tabulce 9.2.

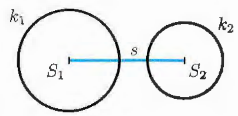
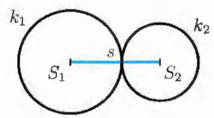
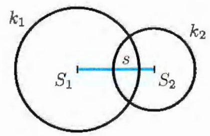
Dvě kružnice v rovině se společným středem nazýváme **soustředné kružnice** a dvě kružnice s různými středy **nesoustředné kružnice**. Úsečka, jejímiž krajními body jsou tyto středy, se nazývá **středná**; téhož názvu se užívá i pro délku této úsečky.

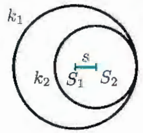
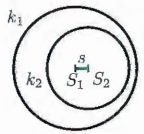
Vzájemné polohy dvou nesoustředných kružnic v rovině spolu s nutnými a postačujícími podmínkami pro tyto polohy jsou uvedeny v tabulce 9.3.

Vzájemné polohy přímky a kružnice v rovině Tab. 9.2

Vzájemná poloha přímky p a kružnice $k(S, r)$	Náčrtek	Společné body	Nutná a postačující podmínka (pro $v = \lvert SP \rvert$)
p je vnější přímkou k		žádný společný bod	$v > r$
p je tečnou k		právě jeden společný bod (bod dotyku p a k)	$v = r$
p je sečnou k		právě dva společné body (průsečíky p a k)	$v < r$

Vzájemné polohy dvou nesoustředných kružnic v rovině Tab. 9.3

Vzájemná poloha nesoustředných kružnic $k_1(S_1, r_1)$, $k_2(S_2, r_2)$ (kde $r_1 \geqq r_2$)	Náčrtek	Společné body	Nutná a postačující podmínka (pro $s = \lvert S_1S_2 \rvert$)
k_2 leží ve vnější oblasti k_1 (a naopak)		žádný společný bod; všechny body k_2 náleží vnější oblasti k_1 (a naopak)	$s > r_1 + r_2$
k_1, k_2 mají vnější dotyk		právě jeden společný bod (bod dotyku k_1 a k_2), zbývající body k_2 leží ve vnější oblasti k_1	$s = r_1 + r_2$
k_1, k_2 se protínají		právě dva společné body (průsečíky k_1, k_2)	$r_1 - r_2 < s < r_1 + r_2$

Vzájemná poloha nesoustředných kružnic $k_1(S_1, r_1)$, $k_2(S_2, r_2)$ (kde $r_1 \geqq r_2$)	Náčrtek	Společné body	Nutná a postačující podmínka (pro $s = \lvert S_1S_2 \rvert$)
k_1, k_2 mají vnitřní dotyk		právě jeden společný bod (bod dotyku k_1 a k_2); všechny ostatní body k_2 leží ve vnitřní oblasti k_1	$s = r_1 - r_2 > 0$
k_2 leží ve vnitřní oblasti k_1		žádný společný bod; všechny body k_2 leží ve vnitřní oblasti k_1	$s < r_1 - r_2$

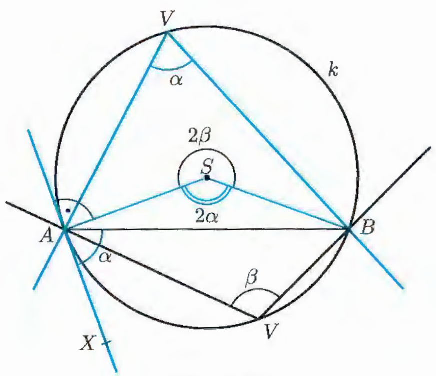
Poznámka. Dvě nesoustředné shodné kružnice (o poloměrech $r_1 = r_2$) mají právě jednu z poloh z části tabulky na str. 429.

Oblouky kružnice, obvodové, středové a úsekové úhly

Libovolná sečna p rozdělí kružnici k průsečíky A, B na dvě části zvané oblouky kružnice s krajními body A, B.

Každý bod oblouku různý od bodů A, B je jeho **vnitřním bodem**. Oblouku s krajními body A, B a s vnitřním bodem X se říká **oblouk** AXB, značí se $\widehat{AXB}$; pokud nemůže dojít k nedorozumění, mluví se stručněji o **oblouku** AB a značí se $\widehat{AB}$.

Jestliže je AB průměr, nazýváme oba oblouky kružnice k **polokružnicemi** (**půlkružnicemi**). Jestliže AB není průměr, pak oblouk ležící v polorovině ABS se nazývá **větší oblouk** AB a oblouk zbývající **menší oblouk** AB kružnice k (obr. 9.21).



Obr. 9.21

Nechť AB je daný oblouk kružnice $k(S, r)$. Úhel ASB, jehož vrcholem je střed kružnice k, rameny polopřímky SA, SB a v němž leží daný oblouk AB (obr. 9.21), se nazývá **středový úhel** *příslušný k oblouku AB (nad obloukem AB)*, který v tomto úhlu leží. Jestliže je daným obloukem AB speciálně polokružnice, pak příslušným středovým úhlem je přímý úhel. Jestliže polopřímky AS, BS nejsou opačné, pak středovým úhlem příslušným k menšímu oblouku AB je konvexní úhel a středovým úhlem příslušným k většímu oblouku AB je nekonvexní úhel.

Úhel AVB, jehož vrcholem V je libovolný bod kružnice k, který nenáleží danému oblouku AB (obr. 9.21), se nazývá **obvodový úhel** *příslušný k oblouku AB (nad obloukem AB)*, který v tomto úhlu leží. Oblouk AB je celý obsažen v příslušném obvodovém úhlu, který je vždy konvexní.

Úhel BAX (resp. ABX) s rameny AB, AX (resp. BA, BX), kde X je libovolný bod na tečně ke kružnici k v bodě A (resp. B) zvolený tak, že daný oblouk AB je částí tohoto úhlu (obr. 9.21), se nazývá **úsekový úhel** *příslušný k oblouku AB*, který v tomto úhlu leží.

Věty o obvodových, středových a úsekových úhlech kružnice

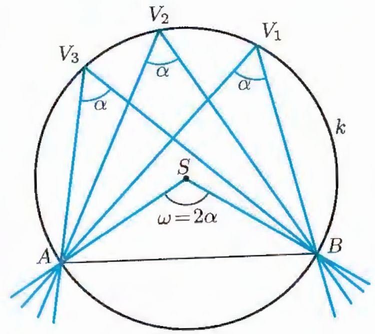
V.1. Všechny obvodové úhly příslušné k témuž oblouku kružnice jsou shodné, jejich velikost je rovna polovině velikosti středového úhlu příslušného k témuž oblouku (obr. 9.22).

Speciálním případem věty V.1 je *věta:*

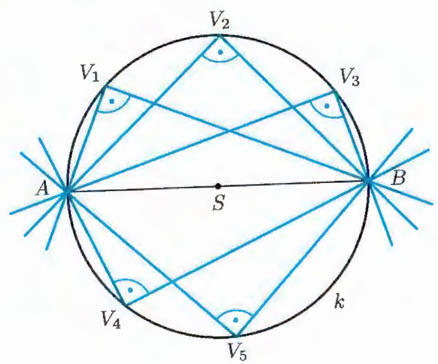
V.2. **Thaletova věta**
Všechny obvodové úhly nad průměrem kružnice jsou pravé (obr. 9.23).

V.3. Obvodové úhly příslušné k menšímu a většímu oblouku AB téže kružnice jsou výplňkové ($\alpha + \beta = 180°$, obr. 9.21).

V.4. Úsekový úhel příslušný k danému oblouku kružnice je shodný s obvodovými úhly příslušnými k témuž oblouku, tj. jeho velikost je rovna polovině velikosti středového úhlu příslušného k tomuto oblouku.



Obr. 9.22



Obr. 9.23

Příklady důkazových úloh o kružnici

1. Dokažte, že přímka t je tečnou kružnice $k(S, r)$ v bodě T právě tehdy, když je kolmá k přímce ST.

Důkaz

a) Nechť t je kolmice k přímce ST vedená bodem T. Protože bod $T \in k$, je $|ST| = r$. Pro každý jiný bod $X \in t$ $(X \neq T)$ plyne z pravoúhlého trojúhelníku STX s přeponou SX, že $|SX| > |ST|$ čili $|SX| > r$, takže každý bod X přímky t různý od bodu T je bodem vnější oblasti kružnice k. Přímka t má tedy s kružnicí k společný právě jeden bod T, tj. je tečnou kružnice k v bodě T.

b) Obráceně: Nechť t je tečnou ke kružnici k s dotykovým bodem T; tento bod je jejich jediným společným bodem a $|ST| = r$. Pro všechny ostatní body tečny t platí $|SX| > |ST|$, takže $|ST|$ je vzdálenost bodu S od přímky t. Odtud plyne, že přímka ST je kolmá k tečně t.

2. Dokažte, že délka oblouku AB kružnice $k(S, r)$ je rovna součinu jejího poloměru r a velikosti středového úhlu ASB v obloukové míře.

Důkaz

Označme velikost středového úhlu ASB příslušného k oblouku délky $|\widehat{AB}|$ v míře stupňové α a v míře obloukové x. Z kap. 4.5 víme, že platí $x = \dfrac{\pi\alpha}{180°}$.

Délku uvažovaného oblouku AB vypočteme takto:

$$|\widehat{AB}| = \frac{2\pi r}{360°} \cdot \alpha = \frac{\pi r}{180°} \cdot \alpha = r \cdot \frac{\pi\alpha}{180°} = r \cdot x$$

9.4 Vlastnosti trojúhelníku

Trojúhelník jsme definovali v kap. 9.2.

Vztahy mezi stranami a úhly trojúhelníku vyjadřují *věty*:

V.1. Grafický součet libovolných dvou stran trojúhelníku je větší než třetí strana čili pro délky jeho stran a, b, c platí *trojúhelníkové nerovnosti*:

$$a + b > c, \quad b + c > a, \quad c + a > b$$

Odtud z první a třetí nerovnosti plyne, že je $a > c - b$ a zároveň $a > b - c$ čili $a > |b - c|$. Pro délku strany a tedy platí vztahy

$$|b - c| < a < b + c,$$

a analogické vztahy lze psát pro b, c.

V.2. Proti shodným stranám trojúhelníku leží shodné vnitřní úhly, proti větší straně trojúhelníku leží větší vnitřní úhel. Pro délky stran a velikosti vnitřních úhlů tedy platí

$$a = b \Leftrightarrow \alpha = \beta, \quad a > b \Leftrightarrow \alpha > \beta \quad \text{atd.}$$

V.3. Grafický součet vnitřních úhlů trojúhelníku je úhel přímý, a tedy součet velikostí vnitřních úhlů trojúhelníku je

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°.$$

V.4. Vnější úhel trojúhelníku při kterémkoli jeho vrcholu je roven grafickému součtu vnitřních úhlů při zbývajících dvou vrcholech. Pro velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku α, β, γ a jeho vnějších úhlů α', β', γ' tedy platí:

$$\alpha' = \beta + \gamma, \quad \beta' = \alpha + \gamma, \quad \gamma' = \alpha + \beta$$

Klasifikace trojúhelníků

Trojúhelníky rozdělujeme (klasifikujeme) podle stran a podle úhlů, jak je ukázáno v tabulce 9.4.

Klasifikace trojúhelníků Tab. 9.4

Klasifikace trojúhelníků podle stran

různostranné	rovnoramenné	rovnostranné
(žádné dvě strany △ nejsou shodné)	(právě dvě strany △ jsou shodné)	(všechny strany △ jsou shodné)

Klasifikace trojúhelníků podle úhlů

ostroúhlé	pravoúhlé	tupoúhlé
(všechny vnitřní úhly △ jsou ostré)	(právě jeden vnitřní úhel △ je pravý)	(právě jeden vnitřní úhel △ je tupý)

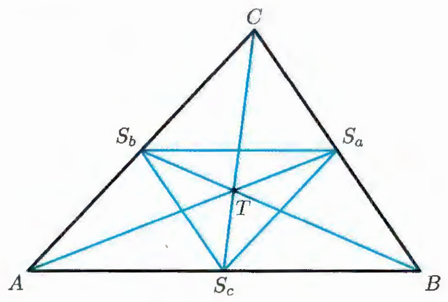
V rovnoramenném trojúhelníku nazýváme shodné strany **rameny** a zbývající stranu **základnou**.

Poznámka. V učebnicové literatuře není úplná jednota v pojetí vztahu mezi rovnostranným trojúhelníkem a rovnoramenným trojúhelníkem. Kromě pojetí uvedeného v tab. 9.4 se lze setkat s tím, že rovnoramenný trojúhelník je definován tak, že má alespoň dvě strany shodné, a rovnostranný trojúhelník je jeho speciálním případem.

V **pravoúhlém trojúhelníku** nazýváme nejdelší stranu ležící proti pravému úhlu **přeponou** a zbývající dvě strany **odvěsnami**.

Důležité body a úsečky trojúhelníku

Úsečka, jejímž krajními body jsou středy dvou stran trojúhelníku, se nazývá **střední příčka trojúhelníku** (obr. 9.24).



Obr. 9.24

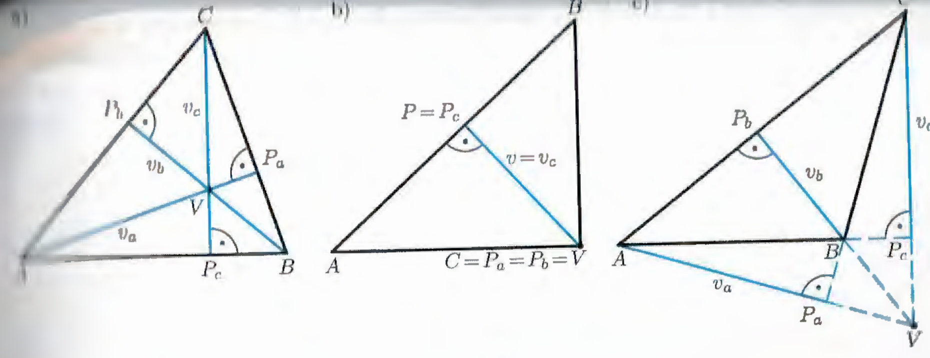
> *Věta o středních příčkách trojúhelníku*
> Každá střední příčka trojúhelníku je rovnoběžná s jeho protější stranou[1] a její délka je rovna polovině délky této strany, tj. platí
>
> $$S_aS_b \parallel AB, \qquad S_bS_c \parallel BC, \qquad S_aS_c \parallel CA,$$
> $$|S_aS_b| = \frac{1}{2}|AB|, \qquad |S_bS_c| = \frac{1}{2}|BC|, \qquad |S_aS_c| = \frac{1}{2}|CA|.$$

Úsečka, jejímiž krajními body jsou vrchol trojúhelníku a střed jeho protější strany, se nazývá **těžnice trojúhelníku** *příslušná k této straně* (obr. 9.24).

> *Věta o těžnicích trojúhelníku*
> Všechny tři těžnice trojúhelníku se protínají v jediném bodě T zvaném **těžiště trojúhelníku**; vzdálenost těžiště od středu kterékoliv strany je rovna jedné třetině délky příslušné těžnice. Označíme-li $|AS_a| = t_a$, $|BS_b| = t_b$, $|CS_c| = t_c$, je tedy
>
> $$|TS_a| = \frac{1}{3}t_a, \quad |TS_b| = \frac{1}{3}t_b, \quad |TS_c| = \frac{1}{3}t_c.$$

Úsečka, jejímiž krajními body jsou vrchol trojúhelníku a pata kolmice vedené tímto vrcholem k jeho protější straně, se nazývá **výška trojúhelníku** *příslušná k této straně* (obr. 9.25a, b, c).

[1] **Rovnoběžností úseček** se rozumí, že přímky, na nichž úsečky leží, jsou rovnoběžné. A obdobně **kolmostí úseček** se rozumí, že přímky, na nichž úsečky leží, jsou kolmé.



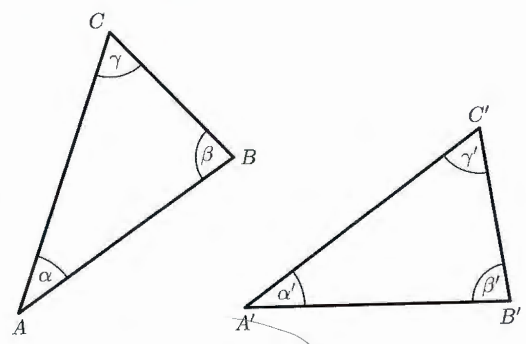
Obr. 9.25

> *Věty o výškách trojúhelníku*
> a) Všechny tři přímky, v nichž leží výšky trojúhelníku, se protínají v jediném bodě V zvaném **průsečík výšek (ortocentrum)**; v ostroúhlém trojúhelníku leží uvnitř trojúhelníku (obr. 9.25a), v pravoúhlém trojúhelníku splývá s vrcholem pravého úhlu (obr. 9.25b), v tupoúhlém trojúhelníku leží vně tohoto trojúhelníku (obr. 9.25c).
> b) Označíme-li délky stran trojúhelníku a, b, c a délky příslušných výšek v_a, v_b, v_c, platí
> $$v_a : v_b : v_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}.$$

Poznámka. Pro zjednodušení formulace vět se často názvu výška trojúhelníku užívá nejen pro úsečku, ale též pro její délku a někdy i pro přímku, v níž úsečka leží, je-li z kontextu zřejmý význam, ve kterém bylo názvu použito. Obdobná konvence se užívá i pro střední příčky a těžnice.

Shodnost trojúhelníků

Dva trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ se nazývají **shodné trojúhelníky** (obr. 9.26), právě když je lze přemístit tak, že se úplně kryjí, tj. mají-li shodné všechny sobě odpovídající strany i vnitřní úhly.



Obr. 9.26

Zápisem $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ vyjadřujeme, že $\triangle ABC$ *je shodný s* $\triangle A'B'C'$, přičemž $A'B' \cong AB$, $B'C' \cong BC$, $C'A' \cong CA$, a tedy $|A'B'| = |AB|$, $|B'C'| = |BC|$, $|C'A'| = |CA|$; $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta$, $\gamma' = \gamma$.

Máme-li zjistit, zda jsou trojúhelníky shodné, není nutné ověřovat shodnost všech tří dvojic stran a tří dvojic vnitřních úhlů; *stačí ověřit*, je-li splněno některé z *kritérií* (*postačujících podmínek*) shodnosti trojúhelníků.

Věty o shodnosti trojúhelníků
Dva trojúhelníky jsou shodné, jestliže se shodují
a) ve všech třech stranách (*věta sss*),
b) ve dvou stranách a v úhlu jimi sevřeném (*věta sus*),
c) ve dvou stranách a v úhlu proti větší z nich (*věta Ssu*),
d) v jedné straně a ve dvou úhlech k ní přilehlých (*věta usu*).

Na základě vět o shodnosti trojúhelníků lze dokázat následující *věty*.

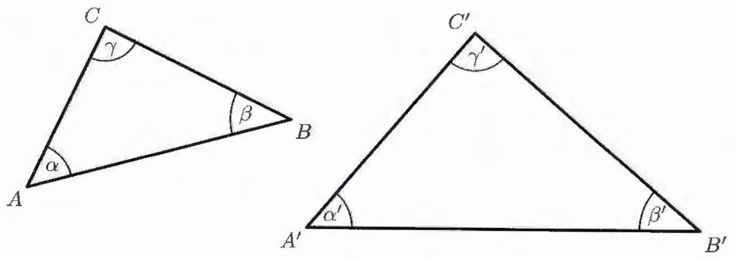
Věty o určenosti trojúhelníků
Trojúhelník je určen (lze ho sestrojit), jsou-li dány
a) tři jeho strany splňující trojúhelníkové nerovnosti,
b) dvě strany a konvexní vnitřní úhel, který tyto strany svírají,
c) dvě strany a konvexní úhel proti větší z nich,
d) jedna strana a dva konvexní vnitřní úhly, jejichž grafický součet je menší než úhel přímý.

Podobnost trojúhelníků

Dva trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ se nazývají **podobné trojúhelníky** (obr. 9.27), pravé když existuje takové kladné číslo k (zvané **koeficient podobnosti**), že platí $|A'B'| = k \cdot |AB|$, $|B'C'| = k \cdot |BC|$, $|A'C'| = k \cdot |AC|$ čili

$$\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|B'C'|}{|BC|} = \frac{|A'C'|}{|AC|} = k.$$

Píšeme pak $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.



Obr. 9.27

Je-li $k > 1$, představuje podobnost *zvětšení*, je-li $0 < k < 1$, představuje *zmenšení*, pro $k = 1$ je to *shodnost*.

Pro podobné trojúhelníky lze na základě definice dokázat *větu*:

V podobných trojúhelnících ABC, $A'B'C'$ jsou odpovídající si úhly shodné, a tedy platí

$$\alpha = \alpha', \qquad \beta = \beta', \qquad \gamma = \gamma'.$$

Máme-li zjistit, zda dva trojúhelníky jsou podobné, *stačí ověřit*, je-li splněno některé z *kritérií* (*postačujících podmínek*) podobnosti trojúhelníků.

Věty o podobnosti trojúhelníků
Dva trojúhelníky jsou podobné, jestliže
a) se shodují ve dvou úhlech (*věta uu*),
b) jsou si rovny poměry délek dvou stran a jsou-li shodné úhly jimi sevřené (*věta sus*),
c) jsou si rovny poměry délek dvou stran a jsou-li shodné úhly proti větší z nich (*věta Ssu*),

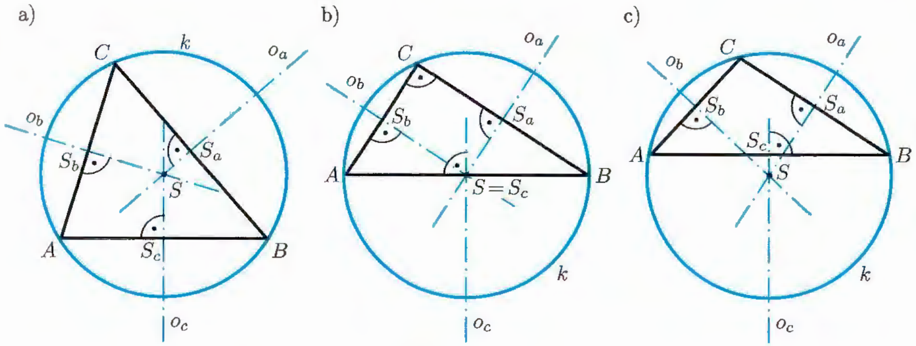
Z vět o podobnosti trojúhelníků plyne speciálně pro pravoúhlé, rovnoramenné a rovnostranné trojúhelníky *věta*:

Dva pravoúhlé trojúhelníky jsou podobné, shodují-li se v jednom ostrém úhlu nebo v poměru délek dvou odpovídajících si stran. Dva rovnoramenné trojúhelníky jsou podobné, shodují-li se v úhlu při základně nebo v úhlu při vrcholu. Každé dva rovnostranné trojúhelníky jsou podobné.

Kružnice opsaná, vepsaná a kružnice připsané trojúhelníku

V.1. Osy stran každého trojúhelníku se protínají právě v jednom bodě. Vzdálenosti tohoto bodu od všech tří vrcholů trojúhelníku jsou si rovny.

Kružnici se středem S v průsečíku os stran a poloměrem $r = |SA| = |SB| = |SC|$ nazýváme **kružnicí opsanou trojúhelníku** ABC (obr. 9.28a, b, c).

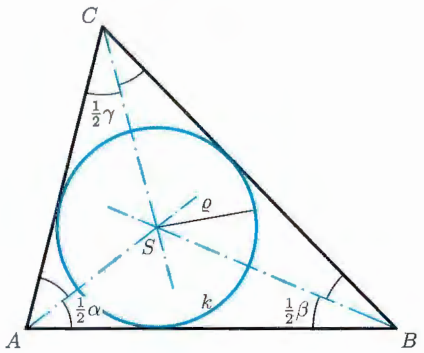


Obr. 9.28

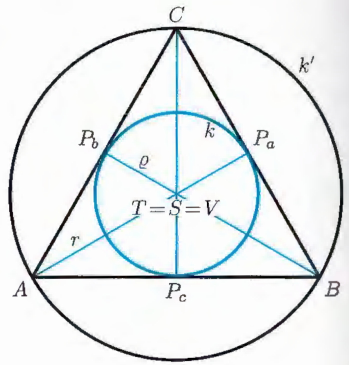
Je-li daný trojúhelník ostroúhlý, leží bod S uvnitř trojúhelníku (obr. 9.28a), je-li tupoúhlý, leží vně tohoto trojúhelníku (obr. 9.28c), je-li pravoúhlý, leží ve středu jeho přepony (obr. 9.28b).

V.2. Osy vnitřních úhlů každého trojúhelníku se protínají právě v jednom bodě. Vzdálenosti tohoto bodu od všech tří přímek, v nichž leží strany trojúhelníku, jsou si rovny; značíme je ϱ.

Kružnici se středem S v průsečíku os vnitřních úhlů a poloměrem ϱ nazýváme **kružnicí vepsanou trojúhelníku** ABC (obr. 9.29).



Obr. 9.29



Obr. 9.30

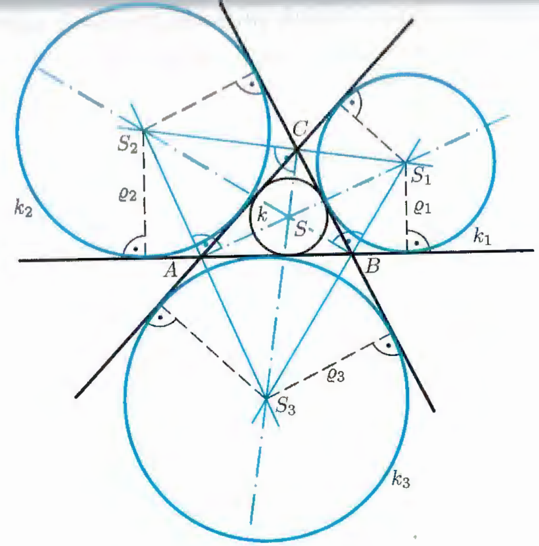
Speciálně v rovnostranném trojúhelníku splývají spolu středy S kružnice vepsané i opsané, průsečík výšek V a těžiště T (obr. 9.30). Výšky rovnostranného trojúhelníku mají velikost $v = \frac{a}{2}\sqrt{3}$, kde a je délka strany, a protože výšky splývají s těžnicemi, je poloměr kružnice opsané $r = \frac{a}{3}\sqrt{3}$ a poloměr kružnice vepsané $\varrho = \frac{a}{6}\sqrt{3}$.

V.3. Osy vnějších úhlů při libovolných dvou vrcholech trojúhelníku a osa vnitřního úhlu při třetím vrcholu se protínají právě v jednom bodě (obr. 9.31). Vzdálenosti každého z těchto tří bodů S_1, S_2, S_3 od všech tří přímek, ve kterých leží strany trojúhelníku, jsou stejné.

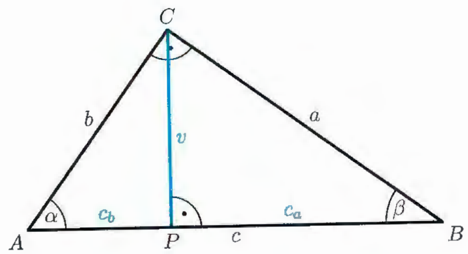
Kružnice se středy S_1, S_2, S_3 a s poloměry ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 nazýváme **kružnicemi připsanými trojúhelníku** ABC po řadě proti vrcholům A, B, C.

Věty o pravoúhlém trojúhelníku

Nechť $\triangle ABC$ je pravoúhlý; označíme v něm délky odvěsen a, b, přepony c, výšky (k přeponě) v. Tato výška dělí přeponu na dvě úsečky zvané **úseky přepony**, délku úseku přepony přilehlého k odvěsně a označme c_a a délku úseku přepony přilehlého k odvěsně b označíme c_b (obr. 9.32).



Obr. 9.31



Obr. 9.32

Eukleidovy věty o výšce a o odvěsně
V každém pravoúhlém trojúhelníku ABC (při uvedeném označení, obr. 9.32) platí

$$v^2 = c_a c_b,$$
$$a^2 = c c_a, \qquad b^2 = c c_b.$$

Pythagorova věta
V každém pravoúhlém trojúhelníku ABC (při uvedeném označení, obr. 9.32) platí

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

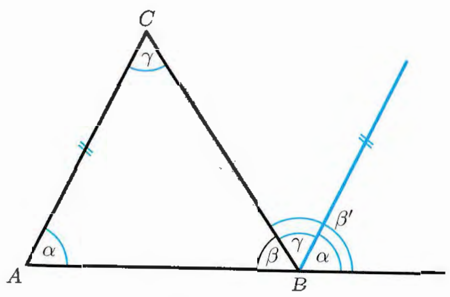
Obrácená věta k Pythagorově větě
Jestliže v trojúhelníku ABC, jehož strany mají délky a, b, c, kde $c > a$, $c > b$, platí

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

pak tento trojúhelník je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu C.

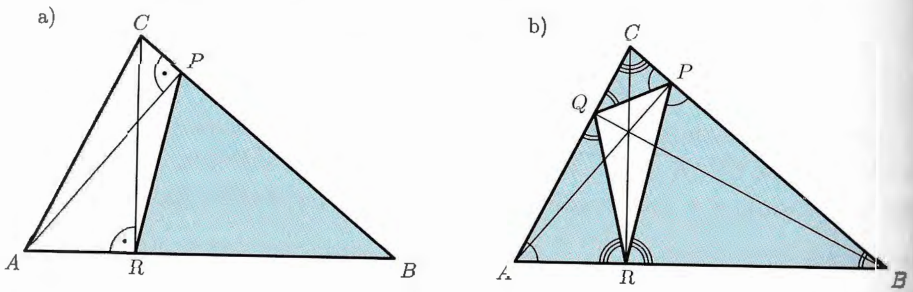
1. Dokažte, že součet vnitřních úhlů trojúhelníku je úhel přímý a vnější úhel trojúhelníku při kterémkoliv vrcholu je roven součtu vnitřních úhlů při zbývajících vrcholech.

Návod k důkazu: Sestrojte libovolným vrcholem trojúhelníku rovnoběžku s přímkou určenou ostatními vrcholy (obr. 9.33) a užijte věty o rovnoběžnosti dvojice přímek proťatých příčkou (kap. 9.2).



Obr. 9.33

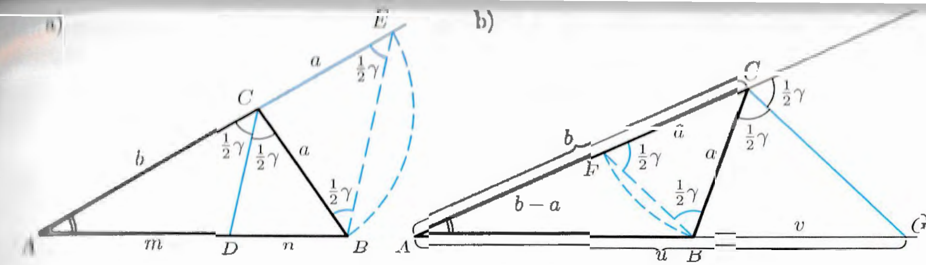
2. Dokažte, že spojnice pat dvou výšek ostroúhlého trojúhelníku odděluje od něho trojúhelník danému trojúhelníku podobný.



Obr. 9.34

Důkaz (obr. 9.34a)
V daném trojúhelníku ABC sestrojme výšky $AP \perp BC$ a $CR \perp AB$. Podle věty *uu* o podobnosti trojúhelníků platí, že $\triangle ABP \sim \triangle CBR$, neboť tyto trojúhelníky mají společný $\sphericalangle ABC$ a $|\sphericalangle APB| = |\sphericalangle CRB| = 90°$. Důsledkem je úměrnost délek stran $\dfrac{|BP|}{|AB|} = \dfrac{|BR|}{|BC|}$ čili $\dfrac{|BP|}{|BR|} = \dfrac{|AB|}{|BC|}$. Z toho pak již plyne, že $\triangle ABC \sim \triangle PBR$ podle věty *sus*, neboť se shodují v $\sphericalangle ABC$ a v poměru délek stran $\dfrac{|BP|}{|BR|} = \dfrac{|AB|}{|BC|}$, které $\sphericalangle ABC$ svírají. Tím je důkaz proveden pro spojnici PR. Obdobným způsobem se dokáže pro spojnice PQ a QR (obr. 9.34b), že $\triangle ABC \sim \triangle PQC$ a $\triangle ABC \sim \triangle AQR$.

3. Dokažte, že v trojúhelníku a) osa vnitřního úhlu dělí protější stranu v poměru stran přilehlých, b) osa vnějšího úhlu dělí jeho prodlouženou protější stranu též v poměru stran přilehlých.



Obr. 9.35

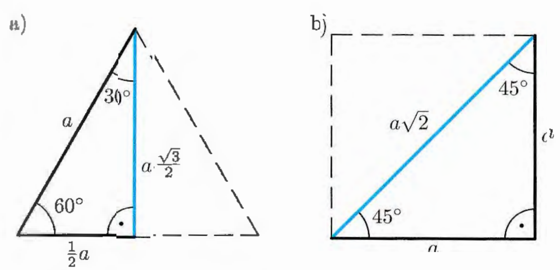
Důkaz

a) V trojúhelníku ABC osa úhlu $\gamma = \sphericalangle ACB$ protne protější stranu AB v bodě D (obr. 9.35a). Označme $|AD| = m$, $|DB| = n$. Máme dokázat, že $\dfrac{m}{n} = \dfrac{b}{a}$. Proto prodloužíme stranu AC za vrchol C o úsečku $CE \cong CB$. V rovnoramenném trojúhelníku BCE jsou shodné úhly při základně BE rovny polovině úhlu vnějšího u vrcholu C ($\sphericalangle ACB$), tj. $\dfrac{\gamma}{2}$. Proto je $\triangle ACD \sim \triangle AEB$ podle věty *uu* (neboť $\sphericalangle EAB$ mají společný a $\sphericalangle ACD \cong \sphericalangle AEB$). Z toho plyne úměrnost délek stran $\dfrac{|AD|}{|AC|} = \dfrac{|AB|}{|AE|}$ čili $\dfrac{m}{b} = \dfrac{m+n}{a+b}$, takže $am + bm = bm + bn$ čili $am = bn$, tedy $\dfrac{m}{n} = \dfrac{b}{a}$. Tím je důkaz prvního tvrzení proveden.

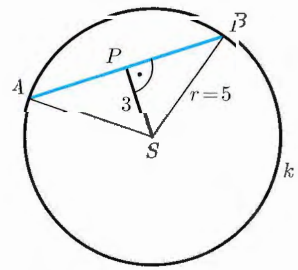
b) Důkaz druhého tvrzení proveďte analogicky (obr. 9.35b).

4. Určete velikost výšky rovnostranného trojúhelníku o straně délky a (obr. 9.36a) a velikost úhlopříčky čtverce o straně délky a (obr. 9.36b).

Řešení
Užitím Pythagorovy věty dostáváme a) $v = \dfrac{a}{2}\sqrt{3}$, b) $u = a\sqrt{2}$.



Obr. 9.36



Obr. 9.37

5. Je dána kružnice $k(S, r = 5 \text{ cm})$. Vypočtěte délku tětivy AB na sečně, která je od středu S vzdálena 3 cm.

Řešení
Kolmice vedená středem S k přímce AB ji protne v patě P. Tento bod je středem úsečky AB, protože $\triangle ASB$ je rovnoramenný (obr. 9.37). Podle Pythagorovy

... trojúhelník APS platí

$$|AP| = \sqrt{|SA|^2 - |SP|^2} = \sqrt{5^2 - 3^2}\ \text{cm} = 4\ \text{cm}$$

a odtud $|AB| = 2|AP| = 8$ cm.

9.5 Trigonometrie

Řešením trojúhelníku se rozumí úloha určit z daných prvků trojúhelníku všechny ty jeho základní prvky, které nejsou dány. Početní metody řešení trojúhelníků užitím goniometrických funkcí tvoří tzv. trigonometrii, která se široce uplatňuje nejen v planimetrii, ale i ve stereometrii a též ve fyzikálních a technických aplikacích.

Trigonometrie pravoúhlého trojúhelníku

Při **řešení pravoúhlého trojúhelníku** se využívá *Pythagorovy věty* a *definic hodnot goniometrických funkcí* argumentu α, který představuje velikost ostrého úhlu pravoúhlého trojúhelníku ($0° < \alpha < 90°$). Tyto definice jsou založeny na tom, že všechny pravoúhlé trojúhelníky s ostrým úhlem dané velikosti α jsou navzájem podobné (podle důsledku věty *uu* pro pravoúhlé trojúhelníky), a tedy poměry délek dvojic odpovídajících si stran těchto pravoúhlých trojúhelníků jsou si rovny.

Definice hodnot goniometrických funkcí sinus, kosinus, tangens a kotangens velikosti α ostrého úhlu pravoúhlého trojúhelníku ABC (obr. 9.32);

sinus α je poměr protilehlé odvěsny k přeponě $\qquad \sin\alpha = \dfrac{a}{c}$;

kosinus α je poměr přilehlé odvěsny k přeponě $\qquad \cos\alpha = \dfrac{b}{c}$;

tangens α je poměr protilehlé odvěsny k přilehlé odvěsně $\qquad \mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{a}{b}$;

kotangens α je poměr přilehlé odvěsny k protilehlé odvěsně $\qquad \sin\alpha = \dfrac{b}{a}$.

Poznámka. Uvedené definice jsou ekvivalentní s definicemi hodnot goniometrických funkcí formulovanými v kapitole 4.5, jestliže se omezíme na argumenty $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ (velikosti ostrých úhlů v míře obloukové). K důkazu ekvivalence stačí položit ve shora uvedených definicích $c = 1$ a umístit uvažovaný pravoúhlý trojúhelník odpovídajícím způsobem v I. kvadrantu soustavy souřadnice Oxy.

Příklad řešení pravoúhlého trojúhelníku

V pravoúhlém trojúhelníku ABC jsou dány délky přepony $c = 14$ cm a odvěsny $a = 6$ cm. Určete délku odvěsny b a velikosti vnitřních úhlů α, β.

Řešení

Podle Pythagorovy věty je

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{14^2 - 6^2}\ \text{cm} = \sqrt{160}\ \text{cm} = 4\sqrt{10}\ \text{cm} \doteq 12{,}65\ \text{cm},$$

dále vypočteme

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7} \doteq 0{,}428\,57 \Rightarrow \alpha \doteq 25°\,22'\,37'',$$

$$\alpha + \beta = 90° \Rightarrow \beta = 90° - \alpha \doteq 64°\,37'\,23''.$$

Trigonometrie obecného trojúhelníku

Při řešení obecného trojúhelníku se užívá *trigonometrických vět*, z nichž nejvýznamnějšími jsou věta sinová a věta kosinová.

V.1. **Věta sinová**
Pro každý trojúhelník ABC, jehož strany mají délky a, b, c a vnitřní úhly velikosti α, β, γ (obr. 9.17), platí

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r,$$

kde r je poloměr kružnice opsané trojúhelníku, neboli

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}, \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}, \quad \frac{c}{a} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha},$$

tj. poměr délek stran trojúhelníku se rovná poměru sinů velikostí příslušných protilehlých úhlů.

V.2. **Věta kosinová**
Pro každý trojúhelník ABC, jehož strany mají délky a, b, c a vnitřní úhly velikosti α, β, γ (obr. 9.17), platí

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Poznámky.

1. Pomocí každého ze vzorců vyjadřujících sinovou větu, resp. kosinovou větu lze určit zbývající dva vzorce tak, že provedeme tzv. *cyklickou záměnu* prvků podle schématu:

Při důkazu sinové a kosinové věty stačí tedy odvodit právě jeden z uvedených vzorců.

2. Zvláštními případy sinové a kosinové věty jsou trigonometrické vzorce pro pravoúhlý trojúhelník a Pythagorova věta (dostaneme je, položíme-li v sinové a kosinové větě $\gamma = 90°$).

V.3. Věta tangentová
V každém trojúhelníku ABC (s označením podle obr. 9.17) platí

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\operatorname{tg}\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}}.$$

(*Další vzorce* získáme *cyklickou záměnou* prvků.)

V.4. Věta o polovičních úhlech trojúhelníku
V každém trojúhelníku ABC (s označením podle obr. 9.17) platí pro hodnoty goniometrických funkcí polovin velikostí vnitřních úhlů trojúhelníku vzorce

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}},\quad \cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}},\quad \text{kde } s=\frac{a+b+c}{2}.$$

(*Další vzorce* dostaneme *cyklickou záměnou* prvků.)

Příklady důkazů trigonometrických vět pro obecný trojúhelník

1. Dokažte sinovou větu (V.1).

Důkaz
Lze provést mnoha různými způsoby. Jednoduchý je např. následující důkaz užívající kružnice trojúhelníku opsané, jejíž střed S je průsečík os stran trojúhelníku ABC (obr. 9.28a, b, c).

Nejprve uvažujeme případy, kdy $\triangle ABC$ je ostroúhlý nebo tupoúhlý. Je-li $\sphericalangle ACB$ ostrý nebo tupý (obr. 9.28a, c), tj. $|\sphericalangle ACB|=\gamma\neq 90°$, pak strana AB není průměrem kružnice $k(S,r)$ opsané trojúhelníku ABC. Existuje proto rovnoramenný $\triangle ASB$, který lze rozdělit na dva shodné pravoúhlé trojúhelníky AS_cS, BS_cS, kde S_c je střed strany AB. Z věty o vztahu mezi obvodovým a příslušným středovým úhlem (věta V.1 kap. 9.3) plyne, že $|\sphericalangle ASS_c|=\gamma$ pro $0°<\gamma<90°$ a $|\sphericalangle ASS_c|=180°-\gamma$ pro $90°<\gamma<180°$. Z pravoúhlého $\triangle AS_cS$ plyne v obou případech (neboť $\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha$)

$$\sin\gamma=\frac{\frac{c}{2}}{r}\quad\text{čili}\quad\frac{c}{\sin\gamma}=2r.$$

Zbývá uvažovat případ, že $\triangle ABC$ je pravoúhlý. Je-li $\sphericalangle ACB$ pravý (obr. 9.28b), tj. $|\sphericalangle ACB|=\gamma=90°$, pak strana AB je průměrem kružnice $k(S,r)$ opsané trojúhelníku ABC, tj. $c=2r$ a zároveň $\sin\gamma=1$, takže opět platí, že $\dfrac{c}{\sin\gamma}=$ $=2r$.

Další vyjádření sinové věty dostaneme *cyklickou záměnou* prvků.

Poznámka. Jednoduchý důkaz kosinové věty (V.2) založený na užití skalárního součinu geometrických vektorů uvádíme v kap. 10.8.

2. Dokažte tangentovou větu (V.3).

Důkaz
Užitím sinové věty a goniometrických vzorců ze str. 180 (kap. 4.5) dostáváme

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{a-a\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}}{a+a\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}}=\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\sin\alpha+\sin\beta}=\frac{2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}=$$

$$=\frac{\operatorname{tg}\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}}.$$

Další vyjádření tangentové věty získáme *cyklickou záměnou* prvků.

3. Dokažte větu o polovičních úhlech trojúhelníku (V.4).

Důkaz
Podle goniometrických vzorců pro $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ ze str. 180 (kap. 4.5), do nichž dosadíme podle kosinové věty $\cos\alpha=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, dostáváme

$$2\sin^2\frac{\alpha}{2}=1-\cos\alpha=\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}=\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}=$$

$$=\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{2bc},$$

$$2\cos^2\frac{\alpha}{2}=1+\cos\alpha=\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}=$$

$$=\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}.$$

Pro trojčleny v čitatelích posledních zlomků plyne ze vztahu pro $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$:

$$a+b-c=2(s-c),\quad a-b+c=2(s-b),$$
$$b+c-a=2(s-a),\quad b+c+a=2s.$$

Po dosazení dostáváme:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{(s-b)(s-c)}{bc},\qquad \cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{s(s-a)}{bc},$$

odkud plynou po odmocnění dokazované vzorce (neboť $\sin\frac{\alpha}{2}>0$, $\cos\frac{\alpha}{2}>0$).

Způsoby **postupu trigonometrického řešení trojúhelníků** podle typu zadaných prvků uvádíme přehledně v tabulce 9.5.

Přehled o trigonometrickém řešení trojúhelníku daného stranami a vnitřními úhly daných velikostí Tab. 9.6

Dané prvky trojúhelníku	Způsob řešení (výchozí věta)	Diskuse řešení (na základě vět o určenosti trojúhelníku)
délky všech tří stran (sss)	věta kosinová, resp. věta o polovičních úhlech trojúhelníku – vypočteme velikost některého úhlu	Jsou-li splněny trojúhelníkové nerovnosti pro dané velikosti stran, úloha má právě jedno řešení.
délky dvou stran a velikost úhlu jimi sevřeného (sus)	věta kosinová, resp. věta tangentová – vypočteme délku třetí strany	Je-li daná velikost (nenulového) úhlu menší než 180°, úloha má právě jedno řešení.
délka jedné strany a velikosti dvou úhlů (usu, resp. suu)	věta sinová – vypočteme délku další strany	Je-li součet daných velikostí úhlů menší než 180°, úloha má právě jedno řešení. (Případ suu lze převést na případ usu.)
délky dvou stran a velikost úhlu proti jedné z nich (Ssu, resp. ssu)	věta sinová – vypočteme velikost dalšího úhlu	Je-li dána velikost úhlu (menší než 180°) proti větší straně (případ Ssu) nebo jsou-li zadané strany shodné, úloha má právě jedno řešení. Je-li dána velikost úhlu (menší než 180°) proti menší straně, úloha může mít dvě, jedno, anebo žádné řešení.

Poznámky k trigonometrickému řešení trojúhelníku. *Kosinová věta* má při určování velikosti vnitřního úhlu trojúhelníku výhodu před sinovou větou v tom, že její užití vede vždy k jednoznačnému výsledku (neboť na intervalu (0°, 180°) je funkce kosinus prostá, přičemž kosinus velikosti ostrého úhlu je kladný, zatímco kosinus velikosti tupého úhlu je záporný). Avšak numerický výpočet pomocí *sinové věty* je zpravidla jednodušší. Při jejím užití je však třeba si uvědomit, že dané kladné hodnotě sinu velikosti vnitřního úhlu trojúhelníku může příslušet nejen úhel ostrý, ale též tupý. Proto je vhodné počítat sinovou větou nejprve velikost úhlu, který leží proti dané kratší straně, neboť tento úhel je jistě ostrý.

Příklady trigonometrického řešení obecného trojúhelníku a jeho užití

1. Řešte početně trojúhelník ABC, je-li dáno $a = 32{,}5$ cm, $b = 58{,}4$ cm, $c = 72{,}6$ cm.

Řešení

$a + b > c$, tj. 90,9 cm > 72,6 cm (stačí uvažovat součet délek dvou nejmenších stran, pak už nerovnosti $a + c > b$, $b + c > a$ jsou jistě splněny), $c - a < b$, tj. 40,1 cm < 58,4 cm (stačí uvažovat rozdíl délek největší a nejmenší strany, pak už nerovnosti $b - a < c$, $c - b < a$ jsou jistě též splněny); proto trojúhelník ABC s těmito délkami stran existuje. Protože trojúhelník je určen délkami všech tří stran, vypočteme velikosti jeho vnitřních úhlů buď užitím věty kosinové, nebo podle trigonometrické věty o polovičních úhlech trojúhelníku (tab. 9.5).

a) Výpočet úhlu podle věty kosinové:

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{58{,}4^2+72{,}6^2-32{,}5^2}{2\cdot 58{,}4\cdot 72{,}6} \doteq 0{,}899\,216\,715,$$
$$\cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{32{,}5^2+72{,}6^2-58{,}4^2}{2\cdot 32{,}5\cdot 72{,}6} \doteq 0{,}618\,022\,886,$$
$$\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{32{,}5^2+58{,}4^2-72{,}6^2}{2\cdot 32{,}5\cdot 58{,}4} \doteq -0{,}211\,788\,725,$$

odkud

$$\alpha \doteq 25°\,56'\,41'', \qquad \beta \doteq 51°\,49'\,41'', \qquad \gamma \doteq 102°\,13'\,38''.$$

(Kontrola $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.)

b) Výpočet úhlů pomocí věty o polovičních úhlech trojúhelníku:

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{163{,}5}{2} = 81{,}75, \qquad s-a = 49{,}25,\quad s-b = 23{,}35,\quad s-c = 9{,}15,$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} = \sqrt{\frac{23{,}35\cdot 9{,}15}{81{,}75\cdot 49{,}25}} \doteq 0{,}230\,359\,958,$$
$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}} = \sqrt{\frac{49{,}25\cdot 9{,}15}{81{,}75\cdot 23{,}35}} \doteq 0{,}485\,877,$$
$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}} = \sqrt{\frac{49{,}25\cdot 23{,}35}{81{,}75\cdot 9{,}15}} \doteq 1{,}239\,915\,623,$$

odkud

$$\frac{\alpha}{2} \doteq 12°\,58'\,20{,}5'', \qquad \frac{\beta}{2} \doteq 25°\,54'\,50{,}6'', \qquad \frac{\gamma}{2} \doteq 51°\,06'\,49'',$$
$$\alpha \doteq 25°\,56'\,41'', \qquad \beta \doteq 51°\,49'\,41'', \qquad \gamma \doteq 102°\,13'\,38''.$$

2. Řešte početně trojúhelník ABC, je-li dáno $a = 56{,}28$ dm, $c = 34{,}75$ dm, $\beta = 63°\,24'$.

Řešení

Protože $\beta < 180°$, existuje trojúhelník ABC určený danými prvky, totiž délkami dvou stran a velikostí úhlu jimi sevřeného. Početní řešení lze provést užitím věty kosinové nebo věty tangentové (tab. 9.5).

a) Řešení užitím věty kosinové:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cdot\cos\beta =$$
$$= (56{,}28^2 + 34{,}75^2 - 2\cdot 56{,}28\cdot 34{,}75\cdot\cos 63°24')\ \mathrm{dm}^2 \doteq 2\,623{,}6\ \mathrm{dm}^2,$$

odtud $b \doteq 51{,}22$ dm.

Dále je jednodušší použít věty sinové:

$$\sin\gamma = \frac{c}{b}\sin\beta \doteq \frac{34{,}75}{51{,}22}\cdot\sin 63^\circ\,24' \doteq 0{,}606\,6,$$

takže (vzhledem k tomu, že γ je velikost úhlu proti nejmenší straně, tj. ostrého úhlu)

$$\gamma \doteq 37^\circ\,21', \text{ a tedy } \alpha = 180^\circ - (\beta+\gamma) \doteq 79^\circ\,15'.$$

b) Řešení užitím věty tangentové:

$$(a+c):(a-c) = \operatorname{tg}\frac{\alpha+\gamma}{2} : \operatorname{tg}\frac{\alpha-\gamma}{2}$$

Protože $\dfrac{\alpha+\gamma}{2} = 90^\circ - \dfrac{\beta}{2}$, dostáváme po dosazení

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha-\gamma}{2} = \frac{a-c}{a+c}\cdot\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} = \frac{21{,}53}{91{,}03}\cdot\operatorname{cotg} 31^\circ\,42' \doteq 0{,}382\,95.$$

Odkud je $\dfrac{\alpha-\gamma}{2} \doteq 20^\circ\,57'$, a protože $\dfrac{\alpha+\gamma}{2} = 90^\circ - \dfrac{\beta}{2} \doteq 58^\circ\,18'$, z těchto dvou rovnic vyplývá, že $\alpha \doteq 79^\circ\,15'$ a $\gamma \doteq 37^\circ\,21'$.

Dále opět užijeme sinové věty:

$$b = c\cdot\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} \doteq 34{,}75\text{ dm}\cdot\frac{\sin 63^\circ\,24'}{\sin 37^\circ\,21'} \doteq 51{,}22\text{ dm}$$

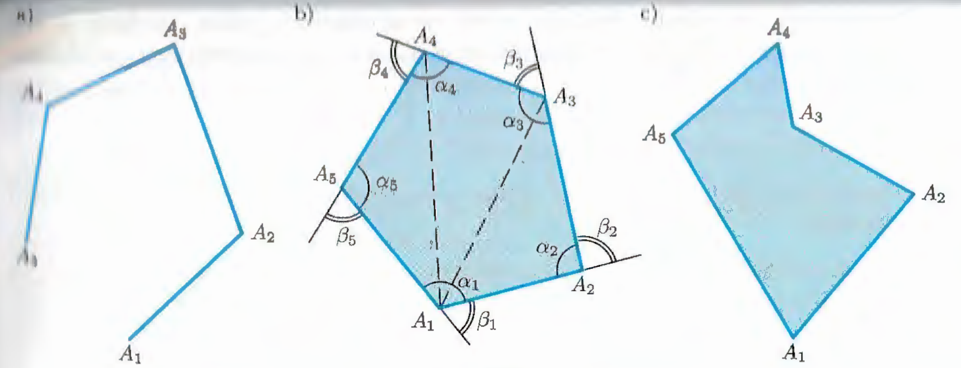
9.6 Mnohoúhelníky, kruh a jeho části

Nechť je dáno n takových úseček A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, ..., $A_{n-1}A_n$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$), že každé dvě sousední úsečky mají společný právě jeden krajní bod a neleží v téže přímce. Pak sjednocení množiny všech úseček A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, ..., $A_{n-1}A_n$ (obr. 9.38a) nazýváme **lomenou čarou** $A_1A_2 \ldots A_{n-1}A_n$. Uzavřená lomená čára $A_1A_2 \ldots A_nA_1$, jež leží v rovině a sama sebe neprotíná (obr. 9.38b), ohraničuje část roviny, která se nazývá **mnohoúhelník** či určitěji **n-úhelník** $A_1A_2A_3 \ldots A_{n-1}A_n$ (obr. 9.38b, c).

O lomené čáře $A_1A_2 \ldots A_{n-1}A_nA_1$ se říká, že je **hranice mnohoúhelníku** (**n-úhelníku**), body A_1, A_2, ..., A_n se nazývají **vrcholy mnohoúhelníku**, úsečky A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 **strany mnohoúhelníku**. Bodům mnohoúhelníku, které nepatří k jeho hranici, se říká **vnitřní body mnohoúhelníku**; množina všech vnitřních bodů tvoří **vnitřek mnohoúhelníku**.

Vrcholy n-úhelníku, které jsou krajními body některé jeho strany, se nazývají **sousední vrcholy**. Úsečka, jejíž krajní body jsou libovolné dva nesousední vrcholy, se nazývá **úhlopříčka** n-úhelníku.

n-úhelník má n vrcholů, n stran a $\dfrac{n(n-3)}{2}$ úhlopříček.



Obr. 9.38

Každý mnohoúhelník (n-úhelník), který je konvexním geometrickým útvarem (konvexní bodovou množinou), se nazývá **konvexní mnohoúhelník**. Konvexní n-úhelník $A_1A_2A_3 \ldots A_{n-1}A_n$ lze vytvořit jako průnik polorovin $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_5$, ..., $A_{n-1}A_nA_1$, $A_nA_1A_2$. Každý mnohoúhelník, který není konvexní, nemá tuto vlastnost a nazývá se **nekonvexní mnohoúhelník**.

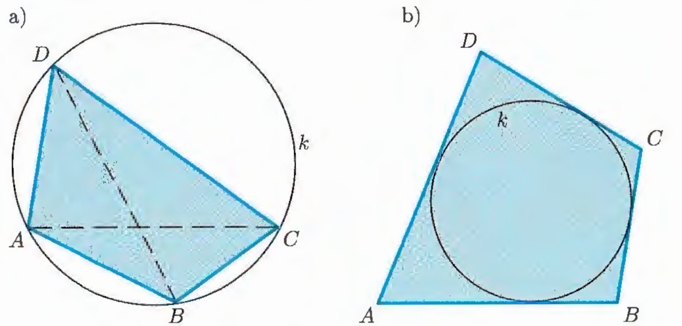
Na obr. 9.38b je konvexní mnohoúhelník, na obr. 9.38c nekonvexní mnohoúhelník.

Nechť body A_{i-1}, A_i a A_i, A_{i+1} jsou dvojice sousedních vrcholů mnohoúhelníku. Polopřímky A_iA_{i-1}, A_iA_{i+1} jsou rameny dvou úhlů a ten z nich, který obsahuje alespoň jeden vnitřní bod mnohoúhelníku, se nazývá **vnitřní úhel mnohoúhelníku**. Vnitřními úhly konvexního n-úhelníku jsou konvexní úhly $A_nA_1A_2$, $A_1A_2A_3$, ..., $A_{n-1}A_nA_1$, z nichž každý obsahuje všechny body tohoto n-úhelníku. Vedlejší úhel k vnitřnímu úhlu konvexního n-úhelníku se nazývá **vnější úhel konvexního n-úhelníku**. (V obr. 9.38b jsou vnitřní úhly označeny α_i, vnější úhly β_i, $i = 1, 2, \ldots$)

Platí *věta:*

Součet velikostí všech vnitřních úhlů konvexního n-úhelníku je $(n-2)\cdot 180^\circ$ a součet velikostí všech jeho vnějších úhlů je 360°.

Konvexní mnohoúhelník, k němuž lze sestrojit **opsanou kružnici**, tj. kružnici procházející všemi jeho vrcholy, se nazývá **tětivový mnohoúhelník**, neboť jeho strany jsou tětivami opsané kružnice (obr. 9.39a, pro $n = 4$). Konvexní mnohoúhelník, v němž lze sestrojit **vepsanou kružnici**, tj. kružnici dotýkající se všech jeho stran, se nazývá **tečnový mnohoúhelník** (obr. 9.39b, pro $n = 4$).



Obr. 9.39

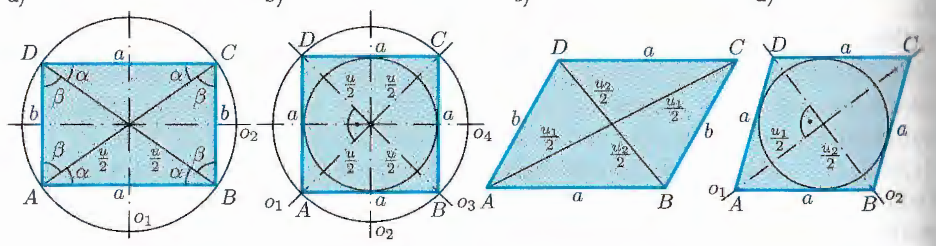
Pravidelný mnohoúhelník je každý mnohoúhelník, jehož všechny strany a všechny vnitřní (a tedy i vnější) úhly jsou shodné. Každý pravidelný n-úhelník je tětivový i tečnový, opsaná i vepsaná kružnice mají společný střed, který se nazývá **střed pravidelného mnohoúhelníku**. Konstrukce některých pravidelných mnohoúhelníků budou uvedeny v kap. 9.9.

Z mnohoúhelníků mají zvláštní význam trojúhelníky (viz kap. 9.2, 9.4, 9.10) a čtyřúhelníky.

Konvexní čtyřúhelníky dělíme (klasifikujeme) podle vzájemné polohy stran na různoběžníky, rovnoběžníky a lichoběžníky:

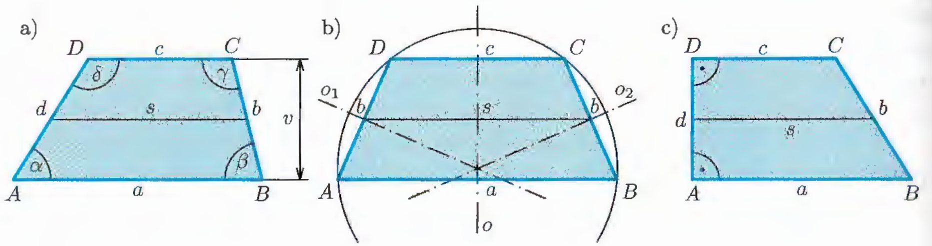
Různoběžník je konvexní čtyřúhelník, jehož každé dvě protější strany jsou vesměs různoběžné (obr. 9.39).

Rovnoběžník je konvexní čtyřúhelník, jehož každé dvě protější strany jsou rovnoběžné (obr. 9.40). Úsečky, jejichž krajními body jsou středy jeho dvou protějších stran, se nazývají **střední příčky rovnoběžníku**. Stejně se mnohdy nazývají i jejich délky. Vzdálenostem protějších stran se říká **výšky rovnoběžníku**.



Obr. 9.40

Lichoběžník je konvexní čtyřúhelník, jehož dvě protější strany jsou rovnoběžné a zbývající dvě strany jsou různoběžné (obr. 9.41). Jeho rovnoběžné strany se nazývají **základny** a různoběžné strany se nazývají **ramena lichoběžníku**. Úsečka, jejímiž krajními body jsou středy těchto ramen, se nazývá **střední příčka lichoběžníku**. Stejně se mnohdy nazývá i její délka. Vzdálenosti základen se říká **výška lichoběžníku**.



Obr. 9.41

Věty o vlastnostech rovnoběžníků

V každém rovnoběžníku platí:

a) protilehlé strany jsou shodné,

b) protilehlé vnitřní úhly jsou shodné a vnitřní úhly přilehlé k téže straně jsou výplňkové,

c) úhlopříčky se navzájem půlí, tj. průsečík úhlopříček je středem každé z nich a je středem souměrnosti rovnoběžníku.

Platí *též obráceně*: Jestliže konvexní čtyřúhelník splňuje kteroukoli z vlastností a), b), c), pak je to rovnoběžník.

Druhy rovnoběžníků:

Obdélník je rovnoběžník, který má všechny vnitřní úhly pravé (obr. 9.40a). Velikosti dvou sousedních stran se nazývají **rozměry obdélníku**. V praxi se obvykle předpokládá, že rozměry obdélníku si nejsou rovny.

Čtverec je rovnoběžník, který má všechny vnitřní úhly pravé a všechny strany shodné (obr. 9.40b). Je to tedy *pravidelný čtyřúhelník*.

Poznámka. Pro obdélník a čtverec se někdy užívá též společný název **pravoúhelník** (**pravoúhlý rovnoběžník**).

Kosodélník je rovnoběžník, jehož žádný vnitřní úhel není pravý a jehož sousední strany nejsou shodné (obr. 9.40c). Velikosti dvou sousedních stran se nazývají *rozměry kosodélníku*.

Kosočtverec je rovnoběžník, jehož žádný vnitřní úhel není pravý a jehož všechny strany jsou shodné (obr. 9.40d).

Věty o specifických vlastnostech druhů rovnoběžníků

a) Úhlopříčky obdélníku jsou shodné. Úhlopříčky čtverce jsou shodné, navzájem kolmé a půlí jeho vnitřní úhly. Úhlopříčky kosočtverce jsou navzájem kolmé a půlí jeho vnitřní úhly.

b) Obdélník je tětivový čtyřúhelník. Čtverec je tětivový i tečnový čtyřúhelník. Kosočtverec je tečnový čtyřúhelník. (Naproti tomu kosodélník není ani tětivový, ani tečnový čtyřúhelník.)

Věty o vlastnostech lichoběžníků

V každém lichoběžníku platí (obr. 9.41):

a) základny nejsou shodné, ramena mohou být shodná,

b) vnitřní úhly při každém rameni jsou výplňkové úhly:

$$\alpha + \delta = 180°, \qquad \beta + \gamma = 180°,$$

c) střední příčka leží na rovnoběžce se základnami a její velikost je rovna aritmetickému průměru velikostí základen: $s = \dfrac{a+c}{2}$.

Zvláštní druhy lichoběžníků:

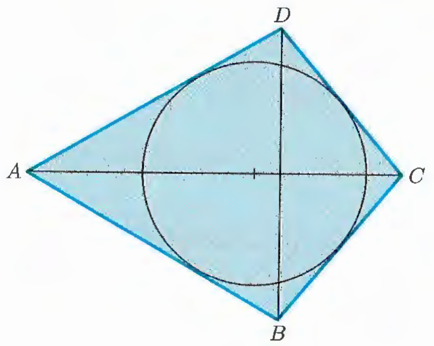
Rovnoramenný lichoběžník je každý lichoběžník, jehož ramena jsou shodné úsečky (obr. 9.41b). Je souměrný podle osy o spojující středy obou základen; vnitřní úhly přilehlé k téže základně jsou shodné.

Pravoúhlý lichoběžník je každý takový lichoběžník, jehož právě jedno rameno je kolmé k jeho základnám (obr. 9.41c).

Platí *věty:*

Lichoběžník je tětivový, právě když je rovnoramenný. Lichoběžník je tečnový, právě když součet délek jeho základen je roven součtu délek jeho ramen.

Tečnovým čtyřúhelníkem je též různoběžník $ABCD$ souměrný podle osy AC (obr. 9.42) zvaný **deltoid**.



Obr. 9.42

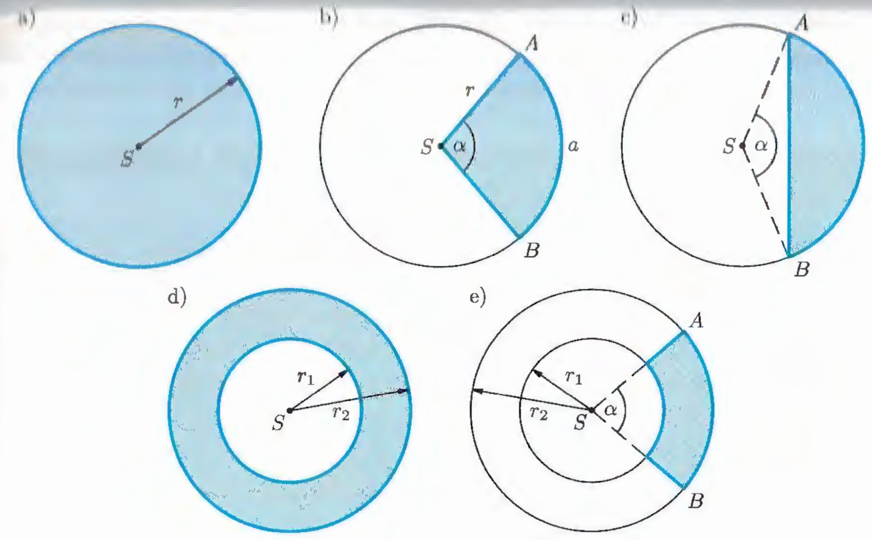
Celkový přehled o klasifikaci konvexních čtyřúhelníků poskytuje tabulka 9.6.

Klasifikace konvexních čtyřúhelníků Tab. 9.6

- čtyřúhelníky
  - rovnoběžníky
    - pravoúhlé
      - obdélníky
      - čtverce
    - kosoúhlé
      - kosoúhelníky
      - kosočtverce
  - lichoběžníky
  - různoběžníky

Kruh a jeho části

Kruh (obr. 9.43a) $\mathsf{K}(S, r)$ jsme definovali v kap. 9.3, je to množina všech bodů roviny, které mají od daného bodu S této roviny (**střed kruhu**) vzdálenost menší nebo rovnou danému kladnému číslu r (**poloměr kruhu**).



Obr. 9.43

Kruhová výseč (obr. 9.43b) je průnik kruhu $\mathsf{K}(S, r)$ a daného středového úhlu ASB.

Kruhová úseč (obr. 9.43c) je průnik kruhu $\mathsf{K}(S, r)$ a poloroviny s hraniční přímkou AB, kde A, B jsou dva různé body hranice kruhu. Daná tětiva AB kružnice $k(S, r)$ rozděluje tedy kruh $\mathsf{K}(S, r)$ ve dvě kruhové úseče. Prochází-li tětiva AB středem kruhu, nazývají se příslušné kruhové úseče **půlkruhy** (**polokruhy**).

Mezikruží (obr. 9.43d) se středem S a poloměry r_1, r_2 ($r_1 < r_2$) je množina všech bodů roviny, které mají od bodu S této roviny vzdálenosti r vymezené nerovnostmi $r_1 \leqq r \leqq r_2$. Jsou to body kruhu $K_2(S, r_2)$, které nejsou vnitřními body kruhu $\mathsf{K}_1(S, r_1)$.

Výseč mezikruží (obr. 9.43e) je průnik mezikruží a středového úhlu jeho hraničních kružnic.

Mnohoúhelníky, kruh a jeho části patří mezi tzv. **geometrické obrazce**.

Příklad důkazové úlohy vlastností geometrického obrazce

Dokažte, že přímka spojující středy základen lichoběžníku $ABCD$ prochází průsečíkem P přímek AD, BCa průsečíkem Q úhlopříček AC, BD.

Důkaz

a) Nechť M je střed základny AB, pak přímka MP protíná úsečku CD v bodu N (obr. 9.44a). Protože $AB \parallel CD$, jsou souhlasné úhly BAP, CDP shodné. Z toho plyne, že je $\triangle AMP \sim \triangle DNP$ (podle věty uu), a tedy

$$\frac{|AM|}{|MP|} = \frac{|DN|}{|NP|}. \tag{1}$$

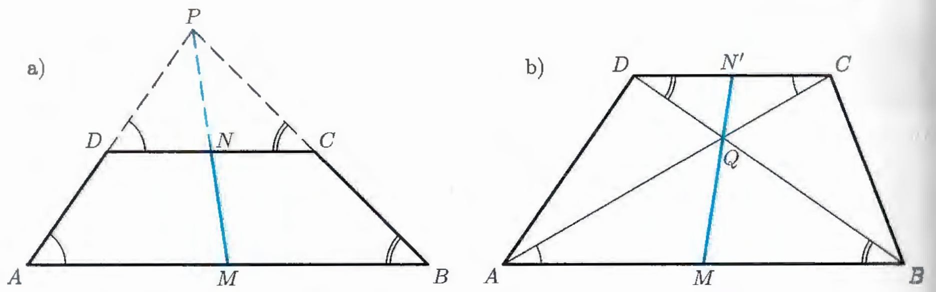
Zcela obdobně zjistíme, že je

$$\frac{|BM|}{|MP|} = \frac{|CN|}{|NP|}. \tag{2}$$

Protože $|AM| = |BM|$, plyne z (1) a (2), že je

$$\frac{|DN|}{|NP|} = \frac{|CN|}{|NP|} \quad \text{čili } |DN| = |CN|,$$

takže bod N je středem úsečky CD. Přímka MP tedy prochází středem N úsečky CD.



Obr. 9.44

b) Spojíme-li střed M základny AB s průsečíkem Q úhlopříček AC, BD, přímka MQ protne stranu CD v bodu N' (obr. 9.44b). Protože $AB \parallel CD$, jsou střídavé úhly BAQ, DCA shodné a také vrcholové úhly MQA, $N'QC$ jsou shodné. Odtud plyne, že $\triangle AMQ \sim \triangle CN'Q$, a tedy

$$\frac{|AM|}{|MQ|} = \frac{|CN'|}{|N'Q|}. \tag{3}$$

Obdobně zjistíme

$$\frac{|BM|}{|MQ|} = \frac{|DN'|}{|N'Q|}. \tag{4}$$

Protože $|AM| = |BM|$, plyne z (3) a (4), že je

$$\frac{|CN'|}{|N'Q|} = \frac{|DN'|}{|N'Q|} \quad \text{čili } |CN'| = |DN'|,$$

takže bod N' je středem úsečky CD neboli $N' = N$. Přímka MQ tedy prochází středem N úsečky CD.

Závěr: Dokázali jsme, že přímka MN prochází body P, Q. (Poněkud jednodušší důkaz by bylo možné podat užitím stejnolehlostí (kap. 9.8) se středy P, Q.)

9.7 Množiny všech bodů dané vlastnosti v rovině

Množinou M všech bodů dané vlastnosti V (daných vlastností) nazýváme takový geometrický útvar G, jehož body splňují tyto dvě podmínky:

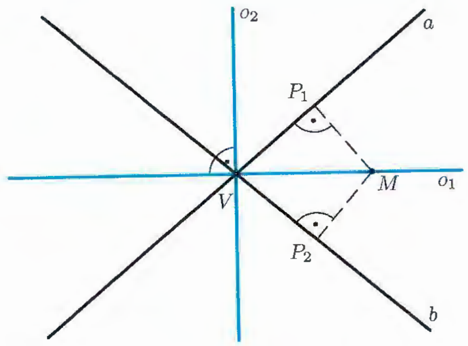
a) Každý bod útvaru G má danou vlastnost V.

b) Každý bod, který má danou vlastnost V, je bodem útvaru G.

V následujícím přehledu uvádíme *nejdůležitější množiny všech bodů* (*m. v. b.*) *dané vlastnosti v rovině*, které jsou velmi využívány při řešení planimetrických konstrukčních úloh (viz kap. 9.9). Ukázky důkazů tvrzení o uváděných m. v. b. naleznete v řešených úlohách. Velmi účinnou metodou vyjadřování m. v. b. je též metoda souřadnic, s níž se seznámíte v analytické geometrii (viz kap. 10.17).

1. M. v. b., které mají od daného bodu S danou vzdálenost $r \geqslant 0$, je kružnice $k(S, r)$. Tato kružnice je také m. v. středů kružnic, které mají daný poloměr r a procházejí daným bodem S. (V prvním případě se jedná o *definici*, ve druhém případě o *větu*. V následujících případech jde vesměs o *věty*.)
2. M. v. b., které mají od dané přímky p danou vzdálenost $r > 0$, jsou dvě přímky p_1, p_2 rovnoběžné s přímkou p a ležící v opačných polorovinách s hraniční přímkou p ve vzdálenosti r od ní. Tyto dvě rovnoběžky $p_1 \parallel p_2 \parallel p$ jsou také m. v. středů kružnic, které mají daný poloměr r a dotýkají se dané přímky p.
3. M. v. b., z nichž každý je stejně vzdálen od dvou daných bodů A, B ($A \neq B$), je osa úsečky AB (viz str. 424). Tato osa úsečky je také m. v. středů kružnic, které procházejí dvěma danými body A, B.
4. M. v. b., které mají stejnou vzdálenost od dvou daných rovnoběžek p, q ($p \neq q$), je osa o pásu jimi omezeného (viz str. 424). Tato osa pásu je také m. v. středů kružnic, které se dotýkají daných rovnoběžek p, q; jejich poloměr je zřejmě roven polovině vzdálenosti těchto rovnoběžek.
5. M. v. b., z nichž každý je stejně vzdálen od dvou daných různoběžek a, b, jsou dvě přímky $o_1 \perp o_2$ představující sjednocení os čtyř úhlů sevřených přímkami a, b (obr. 9.45).

   Tyto dvě přímky o_1, o_2 s výjimkou jejich průsečíku V jsou také m. v. středů kružnic, které se dotýkají dvou daných různoběžek a, b.



Obr. 9.45

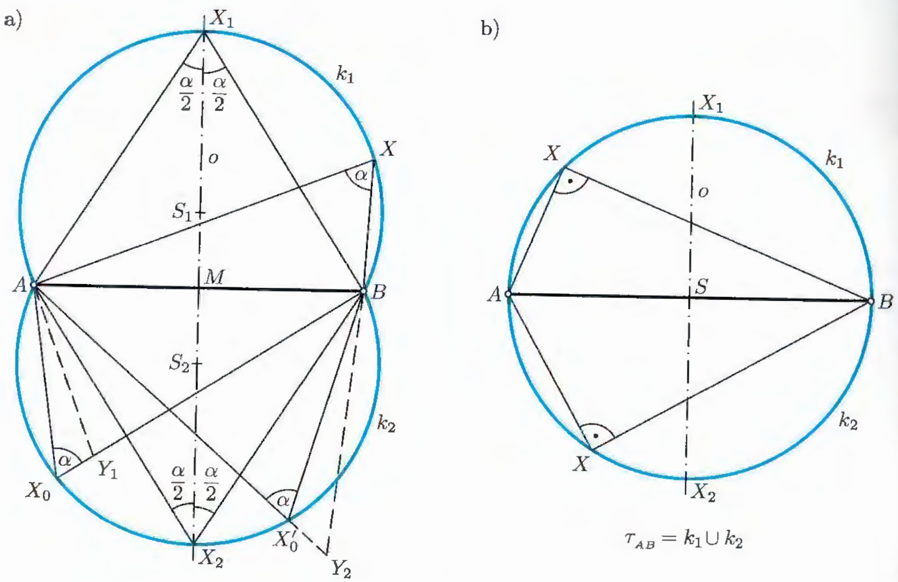
6. M. v. b., které jsou vrcholy úhlů shodných s daným konvexním úhlem velikosti α ($0° < \alpha < 180°$) a jejichž ramena procházejí dvěma danými body A, B ($A \neq B$), čili m. v. bodů X, z nichž vidíme úsečku AB pod úhlem α (tzv. **zorným úhlem** úsečky AB), jsou dva shodné kružnicové oblouky k_1, k_2 s výjimkou bodů A, B (obr. 9.46a, b). Tyto oblouky jsou souměrně sdružené podle přímky AB a pro jejich průsečíky X_1, X_2 s osou o úsečky AB platí

$$|AX_1| = |BX_1| = |AX_2| = |BX_2| = \frac{|AB|}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}. \qquad (1)$$

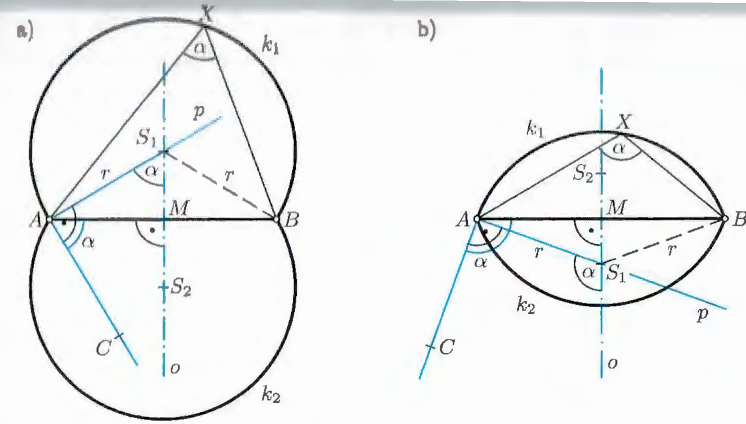
Pro $\alpha \neq 90°$ střed S_1 oblouku k_1 určíme konstrukčně tak, že sestrojíme takovou polopřímku AC, že $|\sphericalangle BAC| = \alpha$ a přímku $p \perp \leftrightarrow AC$ (obr. 9.47a, b). Střed S_1 je průsečíkem přímky p s osou o úsečky AB. Střed S_2 je obrazem bodu S_1 v souměrnosti podle přímky AB a platí

$$|AS_1| = |AS_2| = r = \frac{|AB|}{2\sin\alpha}. \qquad (2)$$

7. Speciálně pro $\alpha = 90°$ (obr. 9.46b): M. v. vrcholů pravých úhlů, jejichž ramena procházejí dvěma danými body A, B ($A \neq B$), čili m. v. b., z nichž je vidět úsečku AB pod pravým úhlem, je kružnice sestrojená nad průměrem AB s výjimkou bodů A, B (tzv. **Thaletova kružnice**). Budeme ji značit τ_{AB}.



Obr. 9.46



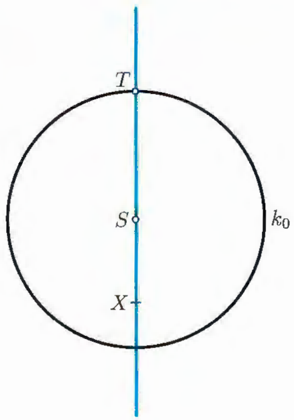
Obr. 9.47

8. M. v. středů kružnic, které se dotýkají dané přímky p v jejím daném bodě T, je přímka q kolmá k přímce p a procházející bodem T, ale s výjimkou tohoto bodu.

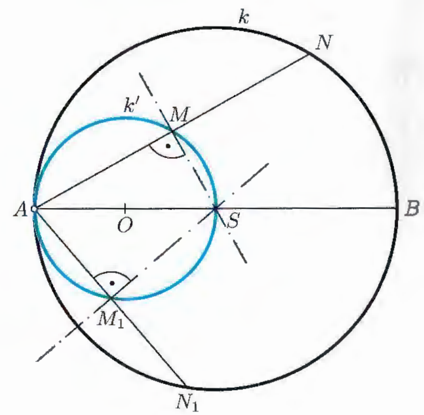
9. M. v. středů kružnic, které se dotýkají dané kružnice $k_0(S, r)$ v bodě T, je přímka ST s výjimkou bodů S, T (obr. 9.48).

10. M. v. středů všech shodných tětiv (velikosti $t < 2r$) dané kružnice $k(S, r)$ je kružnice k' s danou kružnicí soustředná, která se těchto tětiv dotýká a má poloměr $r' = \sqrt{r^2 - \left(\frac{1}{2}t\right)^2}$.

11. M. v. středů tětiv kružnice $k(S, r)$, které mají společný jeden krajní bod A, je kružnice k' sestrojená nad průměrem AS s výjimkou bodu A (obr. 9.49).



Obr. 9.48



Obr. 9.49

12. M. v. středů kružnic, které mají daný poloměr ϱ a mají s danou kružnicí $k(S, r)$ dotyk

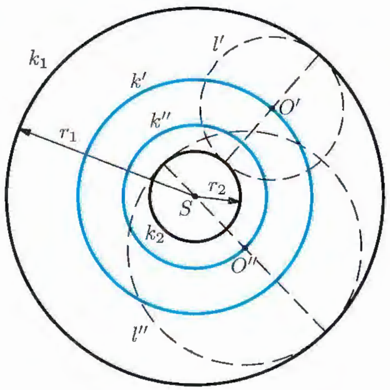
a) vnější, je s danou kružnicí soustředná kružnice $k'(S, r + \varrho)$,

b) vnitřní, je s danou kružnicí soustředná kružnice $k''(S, |r - \varrho|)$, je-li $\varrho \neq r$.

13. M. v. středů kružnic, které se dotýkají (obr. 9.50) dvou daných soustředných kružnic o poloměrech r_1 a r_2 ($r_1 > r_2$) a mají

a) s menší kružnicí vnější dotyk a s větší kružnicí vnitřní dotyk, je s nimi soustředná kružnice k' o poloměru $\frac{1}{2}(r_1 + r_2)$, přičemž poloměr těch kružnic (např. kružnice l' v obr. 9.50) je $\frac{1}{2}(r_1 - r_2)$,

b) s oběma kružnicemi vnitřní dotyk, je s nimi soustředná kružnice k'' o poloměru $\frac{1}{2}(r_1 - r_2)$, přičemž poloměr těch kružnic (např. kružnice l'' v obr. 9.50) je $\frac{1}{2}(r_1 + r_2)$.



Obr. 9.50

Příklady důkazů vět o m. v. b. daných vlastností

1. Dokažte *větu:* Množinou všech bodů, které mají stejnou vzdálenost od dvou různých různoběžek a, b, jsou přímky (osy) o_1, o_2 ($o_1 \perp o_2$), které představují sjednocení os čtyř úhlů sevřených přímkami a, b (obr. 9.45).

Důkaz

a) Průsečík různoběžek a, b označme V. Mějme bod $M \neq V$, který je stejně vzdálen od obou různoběžek, tj. pro nějž platí $MP_1 = MP_2$, kde $P_1 \neq V$, $P_2 \neq V$ jsou paty kolmic z bodu M k přímkám a, b. Proto $|\sphericalangle MP_1V| = |\sphericalangle MP_2V| = 90°$ a $\triangle MP_1V \cong \triangle MP_2V$ (*Ssu*); z toho plyne, že $\sphericalangle MVP_1 \cong \sphericalangle MVP_2$ čili bod M leží na ose $\sphericalangle P_1VP_2$, tj. na ose jednoho z úhlů tvořeného přímkami a, b. Pro bod V věta zřejmě platí (bod V leží na osách o_1, o_2 a má od různoběžek a, b tutéž nulovou vzdálenost).

b) Nechť je $M \neq V$ bod přímky o_1. Sestrojme z bodu M kolmice k přímkám a, b, jejich paty označme P_1, P_2. Je tedy $|\sphericalangle MP_1V| = |\sphericalangle MP_2V| = 90°$, a protože podle předpokladu $\sphericalangle MVP_1 \cong \sphericalangle MVP_2$, je $\triangle MVP_1 \cong \triangle MVP_2$ (*usu*), a tedy také $|MP_1| = |MP_2|$, tj. bod M má od přímek a, b stejné vzdálenosti.

Obdobným způsobem by se důkaz provedl i pro libovolný bod osy o_2.

2. Dokažte *větu:* Množinou všech bodů X, z nichž je vidět úsečku AB pod úhlem α, jsou kružnicové oblouky AX_1B, AX_2B (s výjimkou bodů A, B) souměrně sdružené podle přímky AB, přičemž pro body X_1, X_2 (obr. 9.46a, b) platí vztahy (1) uvedené na str. 456. Zdůvodněte též konstrukci středu S_1 oblouku AX_1B (obr. 9.47a, b).

Důkaz

a) Nechť AX_1B, AX_2B jsou kružnicové oblouky procházející takovými body X_1, X_2, že platí vztahy (1). Pak leží body X_1, X_2 na ose úsečky AB, takže $|\sphericalangle AX_1X_2| = \frac{1}{2}|\sphericalangle AX_1B|$ a $|AM| = \frac{1}{2}|AB|$, kde M je průsečík přímek AB a X_1X_2, a pro úhel AX_1X_2 potom platí

$$\sin |\sphericalangle AX_1X_2| = \frac{|AM|}{|AX_1|} = \frac{1}{2}|AB| : \frac{|AB|}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} = \sin \frac{\alpha}{2},$$

takže $|\sphericalangle AX_1X_2| = \frac{1}{2}\alpha$, a tedy $|\sphericalangle AX_1B| = \alpha$. Totéž platí o úhlu AX_2B. Podle známé věty o obvodových úhlech v kružnici platí pro každý další bod X oblouků AX_1B i AX_2B, že $|\sphericalangle AXB| = |\sphericalangle AX_1B| = \alpha$. Když $X = A$ nebo $X = B$, pak ovšem $|\sphericalangle AXB| \neq \alpha$; body A, B proto k vyšetřované m. v. b. dané vlastnosti nepatří.

b) Je třeba ještě dokázat, že když bod Y neleží na obloucích AX_1B, AX_2B, pak $|\sphericalangle AYB| \neq \alpha$. Jestliže bod Y leží kdekoliv na přímce AB, pak zřejmě $|\sphericalangle AYB| \neq \alpha$. Uvažujme libovolný bod Y_1 ležící uvnitř plochy ohraničené kružnicovými oblouky AX_1B a AX_2B. Pak na prodloužení úsečky BY_1 za bod Y_1 existuje bod X_0 oblouku AX_1B nebo AX_2B. Jak bylo dokázáno v a), je $|\sphericalangle AX_0B| = \alpha$. Protože $\sphericalangle AY_1B$ je vnějším úhlem trojúhelníku AX_0Y_1, je $|\sphericalangle AY_1B| = |\sphericalangle AX_0B| + |\sphericalangle X_0AY_1| > |\sphericalangle AX_0B|$ čili $|\sphericalangle AY_1B| > \alpha$, tj. $|\sphericalangle AY_1B| \neq \alpha$. Nyní uvažujme libovolný bod Y_2 ležící vně plochy ohraničené kružnicovými oblouky AX_1B a AX_2B, např. v polorovině ABX_2. Označme X_0' průsečík úsečky AY_2 a oblouku AX_2B. Jak bylo dokázáno v a), je $|\sphericalangle AX_0'B| = \alpha$. Protože $\sphericalangle AX_0'B$ je vnějším úhlem trojúhelníku $BX_0'Y_2$, platí $|\sphericalangle AX_0'B| = |\sphericalangle AY_2B| + |\sphericalangle X_0'BY_2| > |\sphericalangle AY_2B|$ čili $|\sphericalangle AY_2B| < \alpha$, tj. $|\sphericalangle AY_2B| \neq \alpha$. Tím je dokázáno, že když bod Y neleží na obloucích AX_1B a AX_2B, nepatří k uvažované m. v. b. dané vlastnosti.

Zbývá tedy dokázat správnost konstrukce středu S_1, jež je provedena na obr. 9.47a, b:

a) Je-li $\alpha < 90°$ (obr. 9.47a), je $|\sphericalangle BAC| = \alpha$, $|\sphericalangle CAS_1| = 90°$. Odtud plyne, že $|\sphericalangle MAS_1| = 90° - \alpha$, takže $|\sphericalangle AS_1M| = |\sphericalangle BS_1M| = \alpha$, a proto velikost konvexního středového úhlu je $|\sphericalangle AS_1B| = 2\alpha$ a velikost příslušného obvodového úhlu je $|\sphericalangle AXB| = \alpha$.

b) Je-li $90° < \alpha < 180°$ (obr. 9.47b), je $|\sphericalangle BAC| = \alpha$, $|\sphericalangle CAS_1| = 90°$. Odtud plyne, že $|\sphericalangle MAS_1| = \alpha - 90°$, takže $|\sphericalangle AS_1M| = |\sphericalangle BS_1M| = 180° - \alpha$ čili $|\sphericalangle AS_1B| = 360° - 2\alpha$, a proto velikost nekonvexního středového úhlu je $|\sphericalangle AS_1B| = 2\alpha$ a velikost příslušného obvodového úhlu je $|\sphericalangle AXB| = \alpha$.

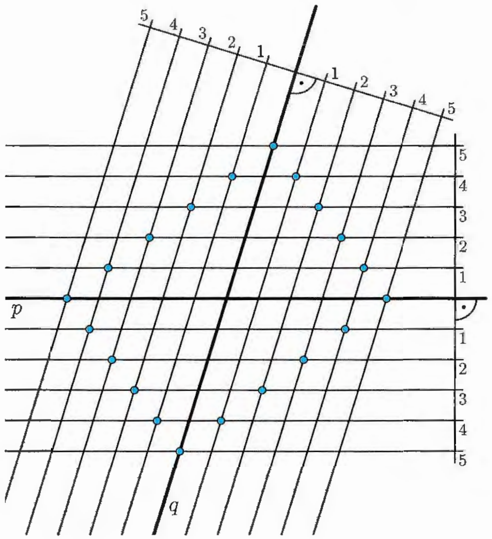
Příklady vyšetřování (určování) m. v. b. daných vlastností

V předchozích úlohách jsme *dokazovali*, že určitý (známý) útvar je množinou všech bodů majících danou vlastnost. V následujících úlohách se budeme zabývat *hledáním* takového útvaru. Sestrojíme několik jeho bodů, odhadneme, co je hledaným útvarem (vyslovíme hypotézu), a pak se pokusíme hypotézu dokázat.

1. Určete množinu všech bodů, jejichž součet vzdáleností od dvou daných různoběžek p, q je roven danému číslu a.

Řešení

Nejprve sestrojíme několik bodů hledané bodové množiny. Je-li např. $a = 5$, sestrojíme množiny bodů, které mají od přímky p, resp. q vzdálenosti 1, 2, 3, 4, 5; jsou to vždy rovnoběžky v uvedené vzdálenosti (obr. 9.51). Průsečíky přímek ve vzdálenostech 0 a 5, 1 a 4, 2 a 3, 3 a 2, 4 a 1, 5 a 0 jsou body hledané m. v. b. dané vlastnosti. Provedená konstrukce ukazuje, že hledanou bodovou množinou asi je *hranice obdélníku*, jehož vrcholy leží na daných přímkách p, resp. q ve vzdálenosti a od q, resp. p.



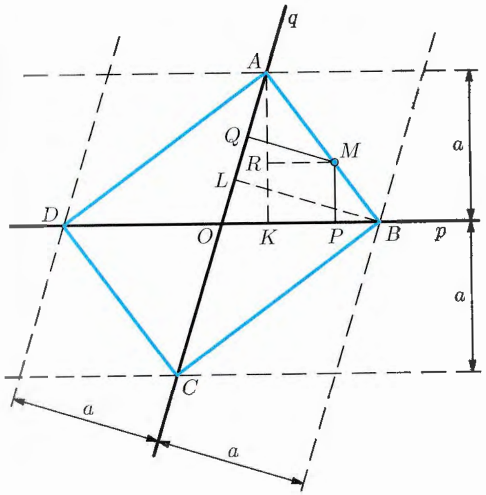
Obr. 9.51

Důkaz

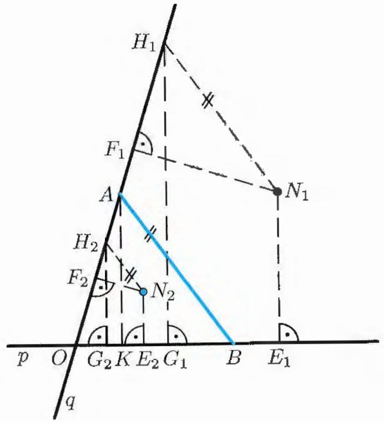
Vrcholy tohoto obdélníku $ABCD$ jsou zřejmě 4 body hledané bodové množiny. Budiž M libovolný vnitřní bod strany AB (obr. 9.52). Sestrojíme $AK \perp p$, $BL \perp q$, $MP \perp p$, $MQ \perp q$, $MR \perp AK$ ($K \in p$, $P \in p$, $L \in q$, $Q \in q$, $R \in AK$). Dále dokážeme, že i bod M je bodem hledané množiny: Pravoúhlé trojúhelníky ABK a ABL jsou shodné, neboť mají společnou přeponu AB a shodné odvěsny ($|AK| = |BL| = a$). Z toho plyne, že $\sphericalangle ABK \cong \sphericalangle BAL$ čili že $\sphericalangle ABO \cong \sphericalangle BAO$, kde O je průsečík daných různoběžek p, q. Protože však $\sphericalangle AMR \cong \sphericalangle ABK$ (úhly souhlasné), je $\sphericalangle AMR \cong \sphericalangle MAQ$. Je tedy $\triangle AMR \cong \triangle MAQ$, neboť mají přeponu společnou a jeden ostrý úhel shodný; z toho však vyplývá, že $AR \cong MQ$. Součet vzdáleností bodu M od daných přímek p a q je: $|MP| + |MQ| = |RK| + |AR| = |AK| = a$. Tím jsme dokázali, že ke hledané bodové množině patří libovolný vnitřní bod úsečky AB, a tedy úsečka AB celá. Jiné body uvnitř úhlu AOB k této množině nepatří. Zvolíme-li totiž uvnitř úhlu AOB takové body N_1, N_2, že $N_1 \notin \triangle AOB$, $N_2 \in \triangle AOB \wedge N_2 \notin AB$ (obr. 9.53), a sestrojíme úsečky $N_1E_1 \perp p$, $N_1F_1 \perp q$, $N_1H_1 \parallel AB$, $H_1G_1 \perp p$, $N_2E_2 \perp p$, $N_2F_2 \perp q$, $N_2H_2 \parallel AB$, $H_2G_2 \perp p$, přičemž $E_1 \in p$, $F_1 \in q$, $H_1 \in q$, $G_1 \in p$, $E_2 \in p$, $F_2 \in q$, $H_2 \in q$, $G_2 \in p$, pak obdobně jako v první části důkazu vyplývá, že pro součty vzdáleností bodů N_1, N_2 od přímek p, q platí:

$$|N_1E_1| + |N_1F_1| = |H_1G_1| > |AK| = a, \text{ tj. } |N_1E_1| + |N_1F_1| > a$$

$$|N_2E_2| + |N_2F_2| = |H_2G_2| < |AK| = a, \text{ tj. } |N_2E_2| + |N_2F_2| < a$$



Obr. 9.52



Obr. 9.53

Podobným způsobem jako pro úsečku AB lze dokázat, že ke hledané množině patří též úsečky BC, CD, DA. Hledanou množinou je tedy hranice čtyřúhelníku $ABCD$, jímž je obdélník. (Ze shodnosti trojúhelníků OAK a OBL (*usu*) plyne $OA \cong OB$, ze souměrnosti podle středu O plyne $OA \cong OC$ a $OB \cong OD$; úhlopříčky čtyřúhelníku $ABCD$ jsou shodné a půlí se, je to tedy obdélník.)

2. Určete množinu všech bodů X v rovině, jejichž vzdálenosti od dvou daných různých bodů A, B této roviny mají podíl rovný dané konstantě λ ($\lambda > 0$, $\lambda \neq 1$):

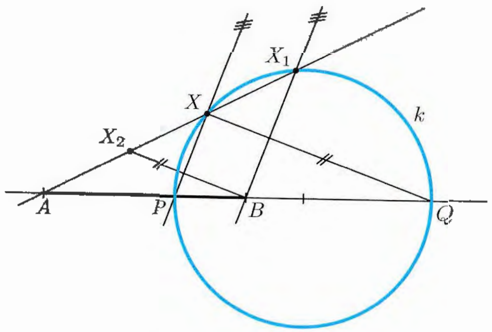
$$\frac{|AX|}{|BX|} = \lambda$$

Řešení

Sestrojíme-li několik bodů X dané vlastnosti, dospíváme k hypotéze: Množinou všech bodů této vlastnosti je kružnice, jejíž průměr leží na přímce AB a má krajní body P a Q, pro které platí $|AP| : |BP| = |AQ| : |BQ| = \lambda$.

Důkaz

a) Body P a Q zřejmě patří ke hledané bodové množině. Nechť X je libovolný bod této množiny, který neleží na přímce AB (obr. 9.54) a pro který platí $|AX| = \lambda \cdot |BX|$. Průsečík přímky AX a rovnoběžky vedené bodem B s přímkou PX označme X_1, průsečík přímky AX a rovnoběžky vedené bodem B s přímkou QX označme X_2. Z podobnosti trojúhelníků APX a ABX_1 plyne $|AX| : |X_1X| = |AP| : |BP| = \lambda$, takže $|AX| = \lambda \cdot |X_1X|$. Protože podle předpokladů je $|AX| = \lambda \cdot |BX|$, plyne odtud $|X_1X| = |BX|$. Z podobnosti trojúhelníků AQX a ABX_2 plyne $|AX| : |X_2X| = |AQ| : |BQ| = \lambda$, takže $|AX| = \lambda \cdot |X_2X|$. Jelikož $|AX| = \lambda \cdot |BX|$, plyne odtud $|X_2X| = |BX|$. Tím bylo dokázáno, že $|X_1X| = |X_2X| = |BX|$, což znamená, že kružnice sestrojená nad průměrem X_1X_2 prochází bodem B, takže podle Thaletovy věty je $BX_1 \perp BX_2$. Protože však $BX_1 \parallel PX$ a $BX_2 \parallel QX$, je $PX \perp QX$, tj. bod X leží na kružnici k sestrojené nad průměrem PQ.



Obr. 9.54

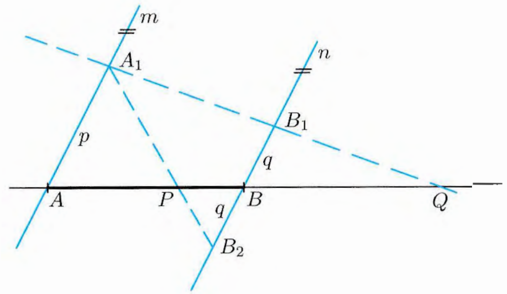
b) Nechť bod X je libovolný bod této kružnice k, který neleží na přímce AB; průměr je úsečka PQ, a proto $PX \perp QX$. Jsou-li X_1 a X_2 průsečíky přímky AX s rovnoběžkami vedenými bodem B s PX a QX, je $\triangle APX \sim \triangle ABX_1$ a $\triangle AQX \sim \triangle ABX_2$, takže $|AX| : |X_1X| = |AP| : |BP| = \lambda$ a $|AX| : |X_2X| = |AQ| : |BQ| = \lambda$. Je tedy $|AX| = \lambda \cdot |X_1X| = \lambda \cdot |X_2X|$, takže $|X_1X| = |X_2X|$, tj. bod X je středem kružnice sestrojené nad průměrem X_1X_2. Z předpokladu $PX \perp QX$ (vzhledem k tomu, že $BX_1 \parallel PX$ a $BX_2 \parallel QX$) plyne $BX_1 \perp BX_2$; podle Thaletovy věty leží tedy bod B na kružnici sestrojené nad průměrem X_1X_2, takže $|BX| = |X_1X|$. Z odvozeného vztahu $\dfrac{|AX|}{|X_1X|} = \lambda$ po dosazení $|X_1X| = |BX|$ dostáváme $\dfrac{|AX|}{|BX|} = \lambda$. Tím je dokázáno, že pro každý bod X kružnice k platí vztah $\dfrac{|AX|}{|BX|} = \lambda$.

Kružnice sestrojená v příkladu 2 se nazývá **Apolloniova kružnice**. V kap. 10.17 provedeme vyšetření množiny bodů z příkladu 2 prostředky analytické geometrie (metodou souřadnic).

Konstrukce bodů P, Q Apolloniovy kružnice: Pro dané body A, B a daný poměr $\lambda = \dfrac{p}{q}$ sestrojíme body P a Q takto (obr. 9.55): Body A, B vedeme dvě libovolné rovnoběžky m, n. Na přímce m sestrojíme bod A_1, pro který $|AA_1| = p$, na přímce n body B_1 a B_2 tak, aby bylo $|BB_1| = |BB_2| = q$. Potom přímky A_1B_2 a A_1B_1 protnou přímku AB v bodech P a Q. (Z podobnosti trojúhelníků AA_1P a BB_2P, resp. AA_1Q a BB_1Q totiž plyne

$$\frac{|AA_1|}{|BB_2|} = \frac{|AP|}{|BP|} = \frac{p}{q} = \lambda, \qquad \frac{|AA_1|}{|BB_1|} = \frac{|AQ|}{|BQ|} = \frac{p}{q} = \lambda.$$

Jsou tedy P a Q hledané body.)



Obr. 9.55

9.8 Geometrická zobrazení v rovině

V kap. 1.2 jsme definovali pojem zobrazení množiny A do množiny B. Jestliže speciálně A, B jsou bodové množiny v téže rovině, pak každému zobrazení množiny A do množiny B říkáme **geometrické zobrazení v rovině.**

Na střední škole se z takových zobrazení probírají jen případy, kdy množina A i množina B je celá rovina. V každém takovém zobrazení přiřazujeme tedy libovolnému bodu X roviny jako jeho *obraz* právě jeden bod X' téže roviny (píšeme $X \mapsto X'$). Jestliže speciálně obraz X' bodu X s ním splývá, pak bod $X = X'$ se nazývá **samodružný bod** daného geometrického zobrazení. *Obrazem geometrického útvaru* U v daném zobrazení je geometrický útvar U$'$. Jestliže speciálně obraz U$'$ geometrického útvaru U s ním splývá (přičemž ovšem každý bod X útvaru U nemusí splývat se svým obrazem X'), pak se geometrický útvar U$'$ = U nazývá **samodružný útvar** daného geometrického zobrazení.

Shodná zobrazení v rovině

Prosté zobrazení v rovině nazýváme **shodným zobrazením** nebo krátce **shodností**, právě když pro každé dva body X, Y roviny a jejich obrazy X', Y' ($X \mapsto X'$, $Y \mapsto Y'$) v tomto zobrazení platí

$$|X'Y'| = |XY|.$$

Zvláštním případem shodnosti je **identické zobrazení (identita)**, jež každému bodu X dané roviny přiřazuje jako obraz týž bod $X' = X$.

Každé shodné zobrazení, které není identitou, můžeme názorně realizovat pohybem (přemístěním), např. takto: Obkreslíme rovinný útvar U na průsvitný papír, pak průsvitku přemístíme (přitom ji můžeme i obrátit „na rub") a útvar v přemístěné poloze opět obkreslíme na uvažovanou rovinu (nákresnu). Dostaneme tak shodný útvar U′, který je obrazem útvaru U. Podle toho, zda průsvitku ponecháme „lícem" nebo ji obrátíme „na rub", rozlišujeme názorně *shodnosti přímé a nepřímé*, na str. 465 je ještě ukázáno, jak je lze charakterizovat přesněji.

Základní vlastnosti shodných zobrazení v rovině vyjadřují následující *věty*:

V každém shodném zobrazení platí:

a) Obrazem každé úsečky AB je úsečka $A'B'$ s ní shodná.

b) Obrazem každé polopřímky AB je polopřímka $A'B'$; obrazy navzájem opačných polopřímek jsou navzájem opačné polopřímky.

c) Obrazem každé přímky AB je přímka $A'B'$; obrazy rovnoběžných přímek jsou rovnoběžné přímky.

d) Obrazem každé poloroviny pA je polorovina $p'A'$, obrazy navzájem opačných polorovin jsou navzájem opačné poloroviny.

e) Obrazem každého konvexního úhlu AVB je konvexní úhel $A'V'B'$ s ním shodný.

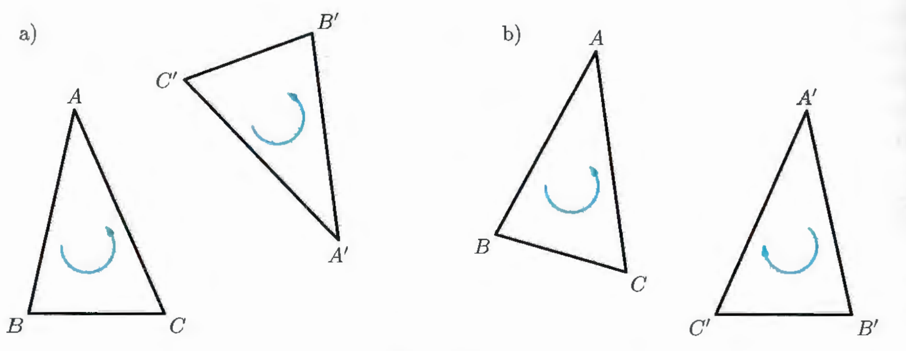
f) Obrazem každého trojúhelníku ABC je trojúhelník $A'B'C'$ s ním shodný.

Poznámka. Věty o shodnosti trojúhelníků jsou uvedeny v kap. 9.4.

Uvažujme libovolnou dvojici shodných trojúhelníků ABC a $A'B'C'$. Jestliže při „obíhání" jejich hranic od bodu A přes bod B do bodu C a od bodu A' přes B' do bodu C' postupujeme:

a) ve stejném smyslu otáčení (obr. 9.56a), říkáme, že $\triangle ABC$ a $\triangle A'B'C'$ jsou **přímo shodné trojúhelníky**,

b) v nestejných (opačných) smyslech otáčení (obr. 9.56b), říkáme, že $\triangle ABC$ a $\triangle A'B'C'$ jsou **nepřímo shodné trojúhelníky**.



Obr. 9.56

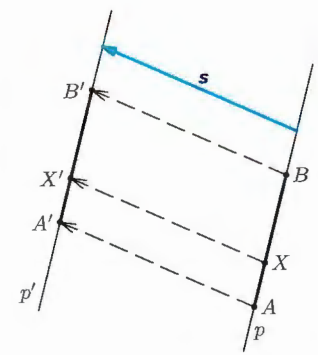
Přímá shodnost je každá shodnost, ve které libovolný $\triangle ABC$ a jeho obraz $\triangle A'B'C'$ jsou přímo shodné trojúhelníky. **Nepřímá shodnost** je každá taková shodnost, v níž libovolný $\triangle ABC$ a jeho obraz $\triangle A'B'C'$ jsou nepřímo shodné trojúhelníky.

Druhy přímých a nepřímých shodností

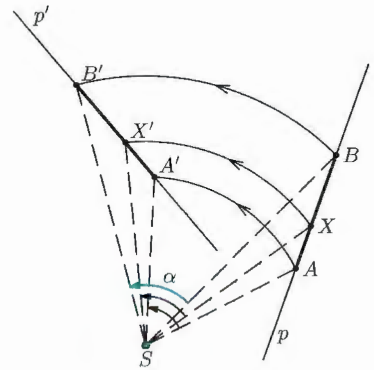
Přímé shodnosti jsou
a) **identita** I, b) **posunutí (translace)** T, c) **otočení (rotace)** R, d) **středová souměrnost** S.

Nepřímé shodnosti jsou
a) **osová souměrnost** O, b) **posunutá souměrnost** Ps.

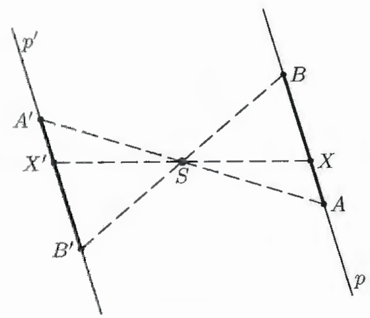
Definici identity jsme již uvedli. Definice a další důležité vlastnosti posunutí, otočení, středové souměrnosti a osové souměrnosti uvádíme přehledně v tabulce 9.7. (Pro ilustraci jsou na obr. 9.57 až 9.60 znázorněna příslušná zobrazení úsečky AB v obecné poloze.)



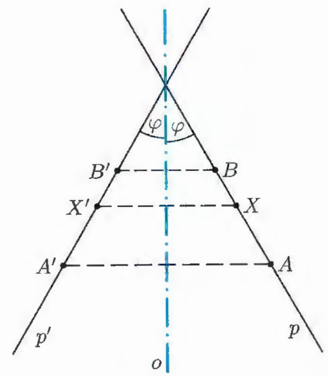
Obr. 9.57



Obr. 9.58



Obr. 9.59



Obr. 9.60

Definice posunutí, otočení a souměrnosti podle středu a souměrnosti podle osy Tab. 9.7

Posunutí (translace) v rovině je přímá shodnost, která každému bodu X roviny přiřazuje takový obraz X', že platí (obr. 9.57)

$\boldsymbol{XX'} = \boldsymbol{s}$, kde $\boldsymbol{s}$ je daný vektor (viz kap. 10.5).

Vektoru $\boldsymbol{s}$ se říká **vektor posunutí**, jeho velikost (délka) udává **délku posunutí** a jeho směr určuje **směr posunutí**.

Posunutí je určeno jednoznačně vektorem posunutí.

Posunutí nemá žádné samodružné body. Samodružnými přímkami posunutí jsou všechny rovnoběžky s XX', kde X je libovolný bod roviny a X' je jeho obraz v posunutí.

Otočení (rotace) kolem středu S o úhel velikosti $0° < \alpha \leqq 360°$ v daném (kladném, resp. záporném) smyslu je přímá shodnost, která přiřazuje bodu S týž bod $S' = S$ a každému bodu $X \neq S$ roviny přiřazuje takový obraz X', že platí (obr. 9.58)

a) bod X' leží na kružnici o středu S a poloměru $|SX|$,

b) polopřímka SX' se získá otáčením polopřímky SX o úhel otočení $X'SX$ velikosti α v daném smyslu (kladném, tj. proti pohybu hodinových ručiček, nebo záporném, tj. souhlasně s pohybem hodinových ručiček).

Otočení je jednoznačně určeno **středem otočení** S, velikostí **úhlu otočení** α a daným (kladným, resp. záporným) **smyslem otočení**. Úhel otočení je orientovaný úhel.

Samodružným bodem otočení je buď právě jen střed otočení S (je-li velikost úhlu otočení $\alpha \neq 360°$), anebo všechny body jsou samodružné (je-li $\alpha = 360°$). Otočení buď nemá žádné samodružné přímky (je-li $\alpha \neq 180°$ a $\alpha \neq 360°$), nebo jsou samodružné všechny přímky procházející středem otočení S (je-li $\alpha = 180°$), nebo jsou samodružné všechny přímky roviny (je-li $\alpha = 360°$).

Souměrnost podle středu S **(středová souměrnost se středem** S**)** v rovině je přímá shodnost, která přiřazuje středu souměrnosti S týž bod $S' = S$ a každému bodu $X \neq S$ roviny přiřazuje takový obraz X', že platí (obr. 9.59)

a) bod X' leží na polopřímce opačné k polopřímce SX,

b) $|SX'| = |SX|$.

Středová souměrnost je speciálním případem otočení o úhel velikosti $\alpha = 180°$. Je jednoznačně určena **středem souměrnosti** S.

Samodružným bodem středové souměrnosti je právě jen střed souměrnosti S. Jejími samodružnými přímkami jsou všechny přímky procházející tímto bodem S.

Souměrnost podle osy o **(osová souměrnost s osou** o**)** v rovině je nepřímá shodnost, která každému bodu X roviny přiřazuje takový obraz X', že platí (obr. 9.60)

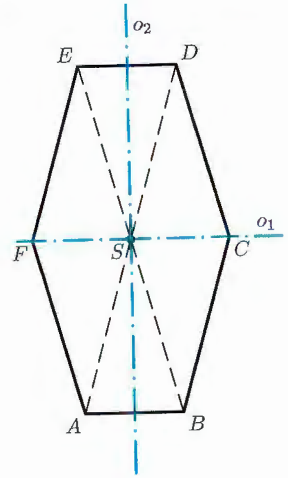
a) bod X' leží na kolmici k ose o vedené bodem X,

b) $|PX| = |PX'|$, kde P je pata této kolmice na ose o.

Osová souměrnost je jednoznačně určena **osou souměrnosti** o.

Samodružnými body osové souměrnosti jsou právě jen všechny body osy o. Jejími samodružnými přímkami jsou v dané rovině osa o a všechny přímky k ní kolmé.

Poznámka. **Souměrnosti** (podle středu, resp. podle osy) jsou taková shodná zobrazení, která vzájemně vyměňují body a jejich obrazy ($X \mapsto X'$, $X' \mapsto X$), útvary a jejich obrazy (U → U′, U → U′). Proto útvar U a jeho obraz U′ v souměrnosti podle středu S, resp. podle osy o nazýváme **útvary souměrně sdruženými podle středu** S**, resp. podle osy** o. Jestliže souměrnost podle středu S, resp. podle osy o převádí útvar U v týž útvar U′ = U, říkáme, že je to **útvar souměrný podle středu** S**, resp. podle osy** o nebo krátce, že je **středově, resp. osově souměrný**. Např. šestiúhelník v obr. 9.61 je souměrný podle středu S a podle os o_1, o_2.



Obr. 9.61

Skládání shodných zobrazení

Pojem skládání množinových zobrazení, jehož výsledkem je složené zobrazení, jsme vysvětlili v kap. 1.2. Pro skládání shodností platí *věty:*

a) Složením dvou přímých shodností nebo dvou nepřímých shodností vznikne přímá shodnost. Složením přímé a nepřímé shodnosti vznikne nepřímá shodnost.

b) Každou přímou shodnost lze složit ze dvou osových souměrností. Každá nepřímá shodnost je buď osová souměrnost, anebo ji lze složit ze tří osových souměrností (resp. z osové souměrnosti a posunutí podél její osy).

Shodnost vzniklá složením osové souměrnosti a posunutí podél této osy se nazývá **posunutá souměrnost**. Lze ji též získat složením středové souměrnosti a osové souměrnosti, jejíž osa neprochází středem souměrnosti. Posunutá souměrnost nemá žádné samodružné body.

Užitím uvedených vět o shodnostech lze dokázat následující *větu:*

Věta o určenosti shodného zobrazení v rovině

Nechť jsou dány v rovině dva shodné trojúhelníky: $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$. Pak v ní existuje právě jedno shodné zobrazení, které přiřazuje bodu A bod A', bodu B bod B' a bodu C bod C'.

Poznámka. Shodná zobrazení umožňují zpřesnit pojem shodnosti geometrických útvarů, který byl dosud chápán na základě intuitivní představy, že shodné útvary jsou takové, jež lze přemístit tak, aby splynuly. Nyní *definujeme*: Dva geometrické útvary U, U′ jsou **shodné útvary v rovině**, právě když existuje shodné zobrazení této roviny na sebe, v němž jeden z útvarů je obrazem druhého. Píšeme pak $\mathsf{U} \cong \mathsf{U}'$.

Podobná zobrazení v rovině

Prosté zobrazení v rovině nazýváme **podobným zobrazením** nebo krátce **podobností**, právě když každé dvojici bodů X, Y roviny přiřazujeme jako obrazy takové body X', Y' ($X \mapsto X'$, $Y \mapsto Y'$), že platí

$$|X'Y'| = k|XY|,$$

kde $k > 0$ je daná konstanta zvaná **koeficient podobnosti**.

Zvláštním případem podobnosti pro $k = 1$ je **shodnost**.

Základní vlastnosti podobných zobrazení v rovině vyjadřují *věty*:

a) Obrazem každé úsečky AB v podobnosti s koeficientem k je úsečka $A'B'$ délky $|A'B'| = k|AB|$.

b) Obrazem každé polopřímky AB je polopřímka $A'B'$; obrazy navzájem opačných polopřímek jsou navzájem opačné polopřímky.

c) Obrazem každé přímky AB je přímka $A'B'$; obrazy rovnoběžných přímek jsou rovnoběžné přímky.

d) Obrazem každé poloroviny pA je polorovina $p'A'$; obrazy navzájem opačných polorovin jsou navzájem opačné poloroviny.

e) Obrazem každého konvexního úhlu AVB je úhel $A'V'B'$ s ním shodný.

f) Obrazem každého trojúhelníku ABC je podobný trojúhelník $A'B'C'$.

Poznámka. Věty o podobnosti trojúhelníků jsou uvedeny v kap. 9.4.

Analogicky jako u shodnosti lze *definovat* **přímou podobnost** (nemění smysl obíhání trojúhelníku) a **nepřímou podobnost** (mění smysl obíhání trojúhelníku).

Užitím uvedených vět o vlastnostech podobností lze dokázat následující *větu*:

Věta o určenosti podobného zobrazení v rovině
Nechť jsou dány v rovině dva podobné trojúhelníky: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. Pak v ní existuje právě jedno podobné zobrazení, které přiřazuje bodu A bod A', bodu B bod B' a bodu C bod C'.

Poznámka. Podobná zobrazení umožňují *definovat* pojem podobnosti geometrických útvarů: Dva geometrické útvary U, U′ jsou **podobné útvary** v rovině, právě když existuje podobné zobrazení této roviny na sebe, ve kterém jeden z útvarů je obrazem druhého. Píšeme pak $\mathsf{U} \sim \mathsf{U}'$.

Stejnolehlost

Velmi významným případem podobného zobrazení v rovině je stejnolehlost (homotetie) označovaná $H(S, \kappa)$ se středem stejnolehlosti S a s koeficientem stejnolehlosti κ ($\kappa \in \mathsf{R}$, $\kappa \neq 0$), která

a) bodu S přiřazuje obraz $S' = S$,

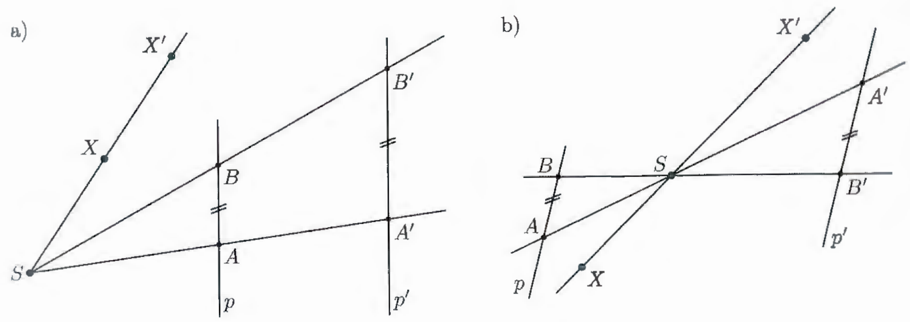
b) bodu $X \neq S$ přiřazuje takový obraz X', že platí

$$|SX'| = |\kappa| \cdot |SX|,$$

přitom X' leží na polopřímce SX pro $\kappa > 0$ (obr. 9.62a), resp. na polopřímce opačné k polopřímce SX pro $\kappa < 0$ (obr. 9.62b).

Poznámka. Podmínky b) lze též vyjádřit souhrnně užitím vektorů (kap. 10.5) takto: Pro vektory $\mathbf{SX}$, $\mathbf{SX'}$ platí

$$\mathbf{SX'} = \kappa \cdot \mathbf{SX}.$$



Obr. 9.62

Zřejmě každá stejnolehlost s koeficientem κ je *podobnost* s koeficientem $k = |\kappa|$. Stejnolehlost se středem S a koeficientem $\kappa = -1$ je *středová souměrnost* se středem S. Stejnolehlost s koeficientem $\kappa = 1$ je *identita*.

Každá stejnolehlost s koeficientem $\kappa \neq 1$ má právě jeden samodružný bod, jímž je střed stejnolehlosti, a jejími samodružnými přímkami jsou všechny přímky roviny, které procházejí středem stejnolehlosti. Ve stejnolehlosti s koeficientem $\kappa = 1$ jsou samodružné všechny body roviny.

Významné specifické vlastnosti stejnolehlostí vyjadřují *věty*:

V.1. V každé stejnolehlosti je obrazem libovolné přímky p přímka p' s ní rovnoběžná (obr. 9.62a, b).

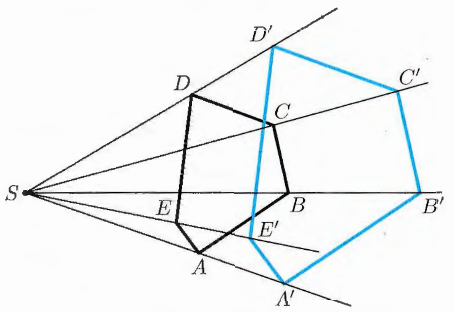
V.2. Obrazem libovolné úsečky AB v každé stejnolehlosti $H(S, \kappa)$ je úsečka $A'B'$ o velikosti $|A'B'| = |\kappa| \cdot |AB|$, přičemž (v důsledku věty V.1) je úsečka $A'B'$ rovnoběžná s úsečkou AB (obr. 9.62a, b).

Je-li útvar U′ obrazem útvaru U v libovolné stejnolehlosti o středu S, říkáme, že **útvary U, U′ jsou stejnolehlé podle středu** S. Platí pro ně *věta*:

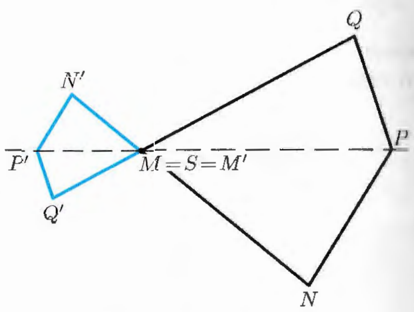
V.3. V každé stejnolehlosti $H(S, \kappa)$ jsou stejnolehlé útvary podobné s koeficientem podobnosti $k = |\kappa|$. Jsou-li útvary U, U′ omezené, pak při $|\kappa| > 1$ je útvar U′ *zvětšený* a při $|\kappa| < 1$ je *zmenšený* oproti U.

Příklady stejnolehlých útvarů

a) V obr. 9.63 jsou sestrojeny pětiúhelníky $ABCDE$, $A'B'C'D'E'$ stejnolehlé podle středu S ve stejnolehlosti $H(S, \kappa = 1{,}5)$; v obr. 9.64 jsou sestrojeny čtyřúhelníky $MNPQ$, $M'N'P'Q'$ stejnolehlé podle středu $S = M = M'$ ve stejnolehlosti $H\left(S, \kappa = -\dfrac{5}{12}\right)$.

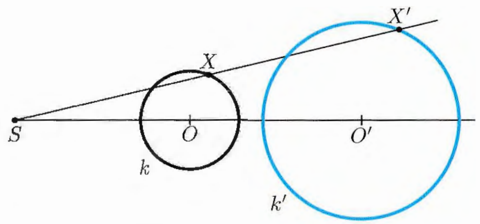


Obr. 9.63

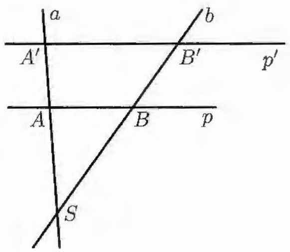


Obr. 9.64

b) V obr. 9.65 jsou sestrojeny kružnice k, k' stejnolehlé podle středu S ve stejnolehlosti $H(S, \kappa = 2)$.



Obr. 9.65



Obr. 9.66

c) Nechť a, b jsou dvě různoběžky s průsečíkem S a nechť p, p' jsou dvě různé rovnoběžky, které neprocházejí bodem S a jež protínají přímky a, b po řadě v bodech A, B a A', B' (obr. 9.66). Pak trojúhelníky ABS, $A'B'S$ jsou stejnolehlé podle středu S a odtud plyne, že pro délky úseček SA, SA', SB, SB' (tzv. *úseky* na daných různoběžkách a, b vyťaté rovnoběžnými příčkami p, p') platí

$$|SA| : |SA'| = |SB| : |SB'|, \qquad |SA| : |SA'| = |AB| : |A'B'|.$$

Příklady užití rovinných geometrických zobrazení v důkazových úlohách

1. a) Dokažte větu: Úhlopříčky rovnoběžníku se půlí.

b) Dokažte větu obrácenou k větě v a).

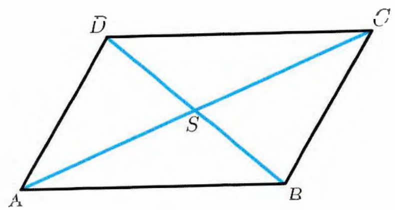
Řešení (obr. 9.67)

a) Dokazovanou větu můžeme vyjádřit ve tvaru implikace: Jestliže čtyřúhelník $ABCD$ je rovnoběžník (*předpoklad*), pak jeho úhlopříčky AC a BD se půlí (*tvrzení*). Při důkazu vyjdeme z předpokladu $AB \parallel CD$, $BC \parallel DA$ a označíme S střed úhlopříčky AC; chceme dokázat, že úhlopříčka BD má týž střed S.

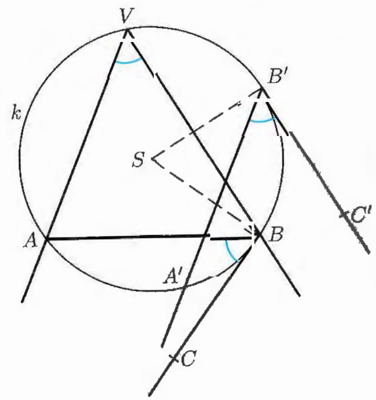
Důkaz
Užijeme *středové souměrnosti* se středem S. Podle předpokladu jsou body A, C souměrně sdružené podle středu S. Přímky AB, CD a obdobně přímky AD a BC jsou dvojice přímek souměrně sdružených podle středu S, neboť jsou to dvojice rovnoběžných přímek procházejících souměrně sdruženými body. Bod souměrně sdružený k průsečíku B přímek AB, BC je průsečík D přímek AD, CD. Body B, D jsou proto souměrně sdružené podle středu S a tento bod je středem úsečky BD.

b) Větu obrácenou můžeme vyjádřit ve tvaru implikace: Jestliže se ve čtyřúhelníku $ABCD$ úhlopříčky AC, BD půlí (*předpoklad*), pak je to rovnoběžník (*tvrzení*). Při důkazu vyjdeme z předpokladu, že úsečky AC, BD mají společný střed S, a chceme dokázat, že pak $AB \parallel CD$, $BC \parallel DA$.

Důkaz
Užijeme opět *středové souměrnosti*, jejímž středem je uvažovaný bod S. V této souměrnosti jsou body A, C souměrně sdružené a rovněž tak body B, D. Spojnice vzorů a obrazů jsou rovnoběžné, tedy $AB \parallel CD$, $BC \parallel DA$.



Obr. 9.67



Obr. 9.68

2. Dokažte, že všechny obvodové úhly příslušné k témuž oblouku kružnice jsou shodné s příslušným úhlem úsekovým (viz kap. 9.3).

Důkaz (užitím *otočení*)
Nechť $\sphericalangle AVB$ je libovolný obvodový úhel příslušný k oblouku AB kružnice k a nechť $\sphericalangle ABC$ je úsekový úhel příslušný k témuž oblouku (obr. 9.68). Otočíme tento úhel kolem středu S kružnice tak, že bod B přejde do bodu B', který je středem oblouku BV (tj. B' je průsečík oblouku BV s osou úsečky BV). Přitom bod A přejde do bodu A' kružnice k, bod C do bodu C'. Z vlastností otočení

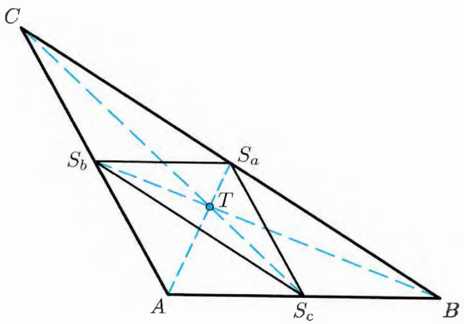
plyne, že $AA' \cong BB' \cong VB'$, takže je $AV \parallel A'B'$ a $BV \parallel B'C'$. Podle věty o) o rovnoběžnosti dvojice přímek proťatých příčkou a střídavých úhlech (kap. 9.2) odtud plyne, že $\sphericalangle AVB \cong \sphericalangle A'B'C'$. Protože však je $\sphericalangle A'B'C' \cong \sphericalangle ABC$ (úhel $A'B'C'$ vznikl otočením úhlu ABC), je také $\sphericalangle AVB \cong \sphericalangle ABC$.

3. Užitím stejnolehlosti dokažte, že vzdálenost těžiště od vrcholu trojúhelníku je rovna dvěma třetinám těžnice.

Důkaz

Protože střední příčky trojúhelníku S_aS_b, S_bS_c, S_cS_a (obr. 9.69) jsou rovnoběžné s jeho stranami a jejich velikosti se rovnají polovinám těchto stran, stejnolehlost se středem v těžišti T a koeficientem stejnolehlosti $-\frac{1}{2}$ převádí $\triangle ABC$ v $\triangle S_aS_bS_c$. Odtud plyne, že

$$|AT| = 2|TS_a|, \qquad |BT| = 2|TS_b|, \qquad |CT| = 2|TS_c|.$$



Obr. 9.69

9.9 Konstrukční planimetrické úlohy

Kromě **důkazových úloh** a **výpočtových úloh** se v planimetrii řeší především **konstrukční úlohy**, v nichž se má sestrojit (zkonstruovat) geometrický útvar předepsaných vlastností. Přitom se ve středoškolské matematice užívají konstrukce pomocí pravítka a kružítka zvané **eukleidovské konstrukce**. Jsou složeny z konečného počtu elementárních kroků spočívajících v konstrukcích bodů, přímek a kružnic, jež se provádějí takto:

a) *Bod se sestrojí* tak, že zvolíme jeho polohu v rovině nebo ho určíme jako společný bod přímek nebo kružnic.

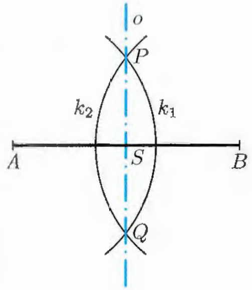
b) *Přímka se sestrojí* tak, že se určí (sestrojí) dva její body.

c) *Kružnice se sestrojí* tak, že se určí (sestrojí) její střed a poloměr.

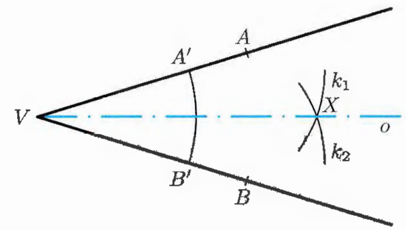
Základní eukleidovské konstrukce jsou tyto: nanesení dané úsečky na danou polopřímku, přenesení konvexního úhlu k dané polopřímce do dané poloroviny, sestrojení osy dané úsečky, sestrojení středu dané úsečky, sestrojení osy daného úhlu, sestrojení kolmice a rovnoběžky k dané přímce daným bodem. První dvě z těchto konstrukcí jsou nám známy z kap. 9.1, 9.2. Další nyní popíšeme.

Příklady provedení základních eukleidovských konstrukcí

1. Osu *o* dané úsečky AB ($A \neq B$) sestrojíme na základě kap. 9.7 (m. v. b. daných vlastností) takto (obr. 9.70): Opíšeme kružnice $k_1(A, r)$, $k_2(B, r)$ o stejném poloměru $r > \frac{1}{2}|AB|$ (např. $r = |AB|$) a označíme jejich průsečíky P, Q. Pak přímka PQ je hledaná osa o a její průsečík S s úsečkou AB je **středem** této úsečky.



Obr. 9.70

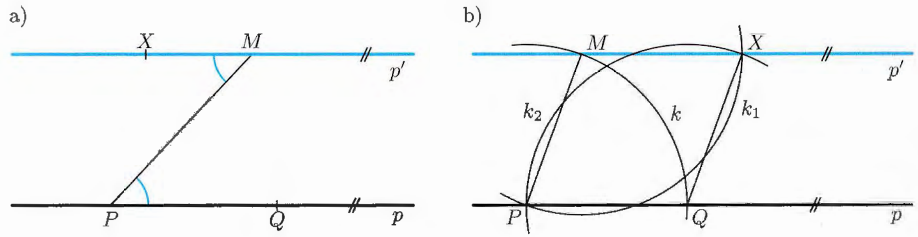


Obr. 9.71

2. Osu *o* daného konvexního úhlu AVB ($0° < |\sphericalangle AVB| \leqq 180°$) sestrojíme takto (obr. 9.71): Opíšeme kružnici $k(V, r)$ o libovolném poloměru r a její průsečíky s rameny VA, VB označíme po řadě A', B'. Dále sestrojíme osu úsečky $A'B'$, tj. opíšeme kružnice $k_1(A', r')$, $k_2(B', r')$ o stejném poloměru $r' > \frac{1}{2}|A'B'|$ (např. $r' = r$) a označíme X ten z jejich průsečíků, který leží v polorovině $A'VB'$; přímka VX je osa úsečky $A'B'$. A odtud plyne: Polopřímka VX je hledaná **osa konvexního úhlu** AVB, zatímco polopřímka k ní opačná je **osa nekonvexního úhlu** AVB ($180° < |\sphericalangle AVB| < 360°$).

3. Rovnoběžku s danou přímkou p **daným bodem** $M \notin p$ lze sestrojit takto (obr. 9.72a, b):

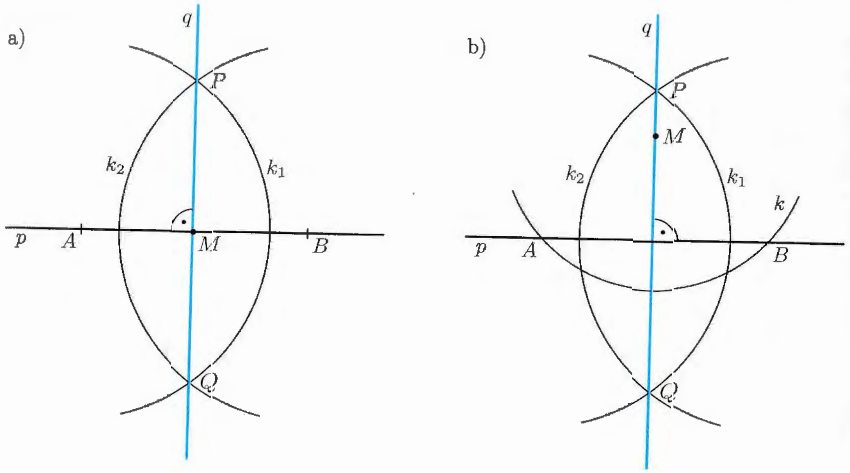
1. způsob (na základě věty o rovnoběžnosti dvou přímek proťatých příčkou z kap. 9.2). Na přímce p zvolíme dva různé body P, Q. Konvexní úhel QPM přeneseme do poloroviny opačné k polorovině PMQ, získáme tak $\sphericalangle PMX$ (obr. 9.72a); $\sphericalangle PMX$ a QPM tvoří dvojici shodných střídavých úhlů ($\sphericalangle PMX \cong \sphericalangle QPM$). Odkud plyne, že MX je hledaná rovnoběžka ($MX \parallel p$).



Obr. 9.72

2. způsob (na základě vlastnosti kosočtverce). Na přímce p zvolíme bod P. Sestrojíme kružnici $k(P, |PM|)$ a označíme Q jeden z jejích průsečíků s přímkou p (obr. 9.72b). Dále sestrojíme kružnice $k_1(M, |PM|)$, $k_2(Q, |PM|)$ a jejich průsečík různý od bodu P označíme X. Pak čtyřúhelník $PQXM$ je kosočtverec a odtud plyne, že přímka MX je hledanou rovnoběžkou ($MX \parallel p$).

4. **Kolmici k dané přímce** p **daným bodem** M lze sestrojit takto (obr. 9.73a, b):



Obr. 9.73

a) Je-li bod $M \in p$, zvolíme ho za střed libovolné úsečky $AB \subset p$ (obr. 9.73a) a sestrojíme podle úlohy 1 osu úsečky AB. Tato přímka je hledanou kolmicí q k přímce p ($q \perp p$).

b) Leží-li bod M mimo přímku p, sestrojíme kružnici k o středu M tak, aby protínala přímku p ve dvou různých bodech A, B (obr. 9.73b), a podle úlohy 1 sestrojíme osu PQ úsečky AB. Tato přímka je hledanou kolmicí q k přímce p ($p \perp q$).

Poznámka. Rovnoběžky a kolmice se zpravidla rýsují pomocí dvou trojúhelníkových pravítek. Úlohy 3 a 4 však ukazují, že v podstatě jde o eukleidovské konstrukce.

Polohové a nepolohové konstrukční úlohy

Konstrukční úlohy, které budeme řešit, jsou v podstatě dvojího druhu. V úlohách prvního druhu, tzv. *polohových úlohách*, je určeno umístění daných prvků (úseček, úhlů apod.), tj. jejich poloha v rovině. Řešení polohové konstrukční úlohy spočívá v tom, že hledáme jeden nebo více neznámých bodů sestrojovaného geometrického útvaru. Podle jejich počtu rozlišujeme konstrukční (polohové) úlohy s jedním, dvěma, resp. více neznámými body. V úlohách druhého druhu, tzv. *nepolohových úlohách*, je poloha aspoň jednoho z daných prvků libovolně volitelná. Řešení úlohy nepolohové lze vždy převést umístěním některého z daných prvků na úlohu polohovou.

Části postupu řešení konstrukční úlohy

Postup řešení konstrukční úlohy se vždy skládá ze tří základních částí zvaných **rozbor (analýza)**, **konstrukce**, **zkouška**. Jestliže jsou v zadání konstrukční úlohy obsaženy **parametry** (proměnné prvky), pak se mluví o **konstrukční úloze s parametry** a součástí postupu jejího řešení je čtvrtá část zvaná **diskuse** řešení (konstrukční úlohy s parametry).

1. **Rozbor**: Předpokládáme, že konstrukční úloha je řešitelná, tj. existuje aspoň jeden hledaný (konstruovaný) útvar v nějakém umístění. Načrtneme ilustrační obrázek a snažíme se najít vztahy mezi danými a hledanými útvary, a to zpravidla tak, že si uvědomíme, které význačné body jsou neznámé, a snažíme se najít pro ně *podmínky*, jež musí splňovat.

Poznámka. V ilustračním obrázku k rozboru nejprve načrtneme výsledný hledaný útvar (kružnici, obdélník apod.) a dodatečně do něj zakreslíme dané prvky (přímku procházející jistým vrcholem, danou kružnici, která se má hledané kružnice dotýkat v daném bodě apod.).

2. **Konstrukce**: Ve druhé fázi postupu řešení se podle výsledků rozboru formuluje **konstrukční předpis** (jeho stručnému symbolickému zápisu se říká **zápis konstrukce**). Vyjadřuje postup, kterým z daných prvků (bodů) postupně získáme hledané prvky (neznámé body) a vytvoříme tak hledaný geometrický útvar. Vychází se přitom z podmínek pro hledané prvky (body) získaných rozborem. Na základě konstrukčního předpisu se provádí *konstrukce graficky*.

3. **Zkouška**: Cílem zkoušky je kontrola správnosti konstrukce. Zjišťuje se, zda konstrukční předpis získaný rozborem vede pouze k útvarům, jež mají *všechny požadované vlastnosti* ze zadání úlohy. Útvary, které některou z těchto vlastností nemají, je třeba na základě zkoušky vyloučit.

Poznámka. V případě, že zadání neobsahuje parametricky zadané prvky, je součástí zkoušky zdůvodnění tvrzení, kolik má úloha výsledků.

4. **Diskuse**: U konstrukčních úloh *s parametry* (proměnnými prvky) se v diskusi řešení stanovuje, za kterých podmínek je úloha *řešitelná* (tzv. *podmínky řešitelnosti*), a *počet řešení*. Postupujeme přitom tak, že sledujeme postupně jednotlivé kroky konstrukčního předpisu získaného jako závěr rozboru a zjistíme podmínky (nutné a postačující), za nichž jsou proveditelné.

Poznámka. Konstrukční úloha s parametry představuje množinu konstrukčních úloh, které získáme volbou všech možných určitých údajů za parametry. V diskusi pak *klasifikujeme tyto úlohy* podle jejich řešitelnosti.

Stanovení *počtu řešení u polohových úloh* je jednoduché a jednoznačné: kolik útvarů vyhovujících podmínkách polohové úlohy lze sestrojit, tolik má úloha řešení. *U úloh nepolohových* se lze omezit na určení podmínek řešitelnosti; chceme-li určovat též počet řešení, je nutné vyslovit přesnou úmluvu o tom, která řešení v těchto úlohách budeme pokládat za různá. Učiníme tuto *úmluvu*: Při určení *počtu řešení nepolohové úlohy* vycházíme z počtu řešení polohové úlohy, na kterou ji převedeme, avšak pokud některými jejími řešeními jsou shodné geometrické útvary, pokládáme je za jediné řešení nepolohové úlohy.

Metody řešení konstrukčních úloh v rovině

Při řešení konstrukčních úloh se obvykle užívají tyto metody:

1. **metoda množin všech bodů dané vlastnosti,**
2. **metoda geometrických zobrazení v rovině,**
3. **metoda algebraická** (neboli **metoda konstrukce na základě výpočtu**),
4. **metoda souřadnic** (neboli **metoda užití analytické geometrie**).

První tři z těchto metod podrobněji popíšeme a ilustrujeme na příkladech v následujících článcích této kapitoly. Metodou souřadnic se zabývá kap. 10.17.

Metoda množin všech bodů dané vlastnosti v rovině

Řešení konstrukční úlohy užitím množin všech bodů dané vlastnosti (kap. 9.7) spočívá v tom, že pro každý z hledaných bodů X stanovíme dvě nutné podmínky, které musí splňovat, a pak určíme množiny M_1, M_2 všech bodů splňujících po řadě první a druhou podmínku. Hledaný bod X náleží *průniku množin* M_1, M_2. Body tohoto průniku sestrojujeme pomocí základních eukleidovských konstrukcí.

Příklady řešení konstrukčních úloh metodou množin všech bodů dané vlastnosti

1. Sestrojte a) kružnici procházející danými třemi různými body A, B, C, které neleží v jedné přímce, tj. kružnici opsanou trojúhelníku ABC, b) kružnici vepsanou trojúhelníku ABC.

Řešení

a) *Rozbor: Úloha je polohová* s jedním neznámým bodem, jímž je střed S kružnice opsané $\triangle ABC$. Tento bod je průsečíkem os stran (kap. 9.4, obr. 9.28), jež jsou m. v. b. stejně vzdálených od libovolných dvou sousedních vrcholů trojúhelníku (podle m. v. b. 3 kap. 9.7).

Konstrukce (obr. 9.28):

K_1: Sestrojíme dvě z os o_a, o_b, o_c stran $\triangle ABC$, např. o_a, o_b.
K_2: Určíme průsečík S os o_a, o_b ($o_a \cap o_b = \{S\}$).
K_3: Sestrojíme kružnici $k(S, |SA|)$.

Symbolický zápis konstrukce:

K_1: o_a, o_b; $o_a = \{X \in \varrho;\ |BX| = |CX|\}$, $o_b = \{X \in \varrho;\ |AX| = |CX|\}$
K_2: S; $S \in o_a \cap o_b$
K_3: k; $k = k(S, |SA|)$

Zkouška: Podle této konstrukce kružnice k prochází bodem A. Z rozboru dále plyne, že pro její poloměr platí $r = |SA| = |SB| = |SC|$, tj. sestrojená kružnice k prochází též body B, C.

Diskuse: Body A, B, C mohou být proměnné (parametry). Pro každou jejich polohu existuje právě jeden bod S, který je středem kružnice opsané $\triangle ABC$. Úloha má tedy vždy právě jedno řešení.

b) Řešte obdobně sami užitím toho, že střed S kružnice vepsané $\triangle ABC$ je průsečíkem os jeho vnitřních úhlů (kap. 9.4, obr. 9.29).

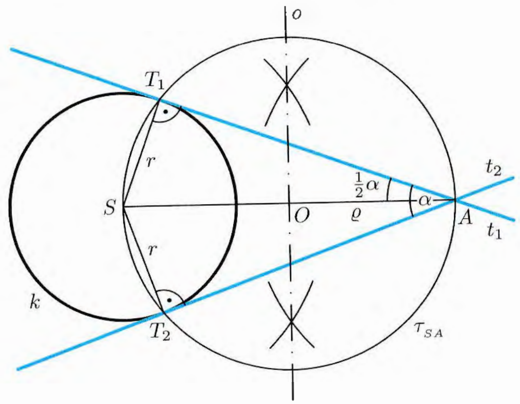
2. Sestrojte tečny k dané kružnici $k(S, r)$ procházející daným bodem A, který leží ve vnější oblasti kružnice k.

Řešení

Rozbor: Úloha je polohová, hledaným bodem je bod dotyku T kružnice k a sestrojované tečny $t = \leftrightarrow AT$. Z vlastností tečny plyne, že je $\leftrightarrow AT \perp \leftrightarrow ST$, a proto bod T leží na Thaletově kružnici τ_{SA} nad průměrem SA (podle m. v. b. 7, kap. 9.7).

Konstrukce (obr. 9.74):

K_1: Sestrojíme osu o úsečky SA a její průsečík O s úsečkou SA ($o \cap SA = \{O\}$), který je středem úsečky SA.
K_2: Sestrojíme Thaletovu kružnici $\tau_{SA}\left(O, r = \frac{1}{2}|SA|\right)$.
K_3: Určíme průsečíky T_1, T_2 kružnic k, τ_{SA} ($k \cap \tau_{SA} = \{T_1, T_2\}$).
K_4: Sestrojíme přímky $t_1 = \leftrightarrow AT_1$, $t_2 = \leftrightarrow AT_2$.



Obr. 9.74

Symbolický zápis konstrukce:

K_1: o; $o = \{X \in \varrho;\ |SX| = |AX|\}$
K_2: O; $O \in o \cap SA$
K_3: τ_{SA}; $\tau_{SA} = \tau_{SA}\left(O, r = \frac{1}{2}|SA|\right)$
K_4: T_1, T_2; $T_1, T_2 \in k \cap \tau_{SA}$
K_5: t_1, t_2; $t_1 = \leftrightarrow AT_1$, $t_2 = \leftrightarrow AT_2$

Zkouška: Přímky t_1, t_2 procházejí bodem A a po řadě body T_1, T_2 kružnice τ_{SA}, pro něž platí $|ST_1| = |ST_2| = r$. Je proto $t_1 \perp \leftrightarrow ST_1$, $t_2 \perp \leftrightarrow ST_2$.

Diskuse: Podle trojúhelníkové nerovnosti pro $\triangle SOT_1$ a $\triangle SOT_2$ platí (označíme-li $\varrho = |OT_1| = |OT_2|$)

$$|r - \varrho| < |SO| < r + \varrho,$$

a tedy (viz tab 9.3 v kap. 9.3) kružnice k, τ_{SA} mají právě dva společné body T_1, T_2. Úloha má proto vždy právě dvě řešení (tečny t_1, t_2).

Poznámka. Promyslete, jak se změní řešení úlohy 2, jestliže bod A bude ležet na kružnici k, resp. ve vnitřní oblasti kružnice k.

3. Sestrojte kružnici, která prochází daným bodem A a dotýká se dané přímky t v jejím daném bodě T.

Řešení

Rozbor: Daná *úloha je polohová* s jedním neznámým bodem, kterým je střed S hledané kružnice k. Ta má splňovat tyto 3 podmínky: a) procházet bodem A, b) dotýkat se přímky t, c) procházet bodem T. M. v. středů kružnic, které splňují podmínky a) a c), je osa úsečky AT. M. v. středů kružnic, které splňují podmínky b) a c), je kolmice n k přímce t v bodě T.

Konstrukce (obr. 9.75):

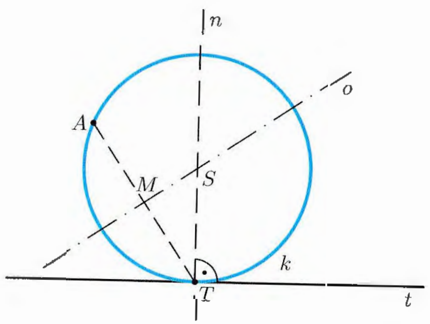
K_1: Sestrojíme osu o úsečky AT.
K_2: Sestrojíme kolmici n k přímce t v bodě T ($n \perp t$, $T \in n$).
K_3: Určíme společný bod S přímek n a o, pokud existuje ($n \cap o = \{S\}$).
K_4: Sestrojíme kružnici $k(S, |ST|)$.

Symbolický zápis konstrukce:

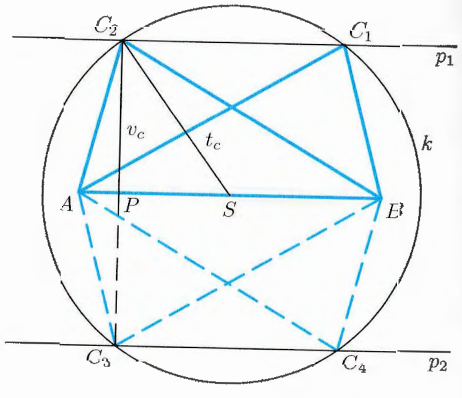
K_1: o; $o = \{X \in \varrho; |AX| = |TX|\}$
K_2: n; $n \perp t$, $T \in n$
K_3: S; $S \in n \cap o$
K_4: k; $k = k(S, |ST|)$

Zkouška: Podle konstrukčního předpisu je $|ST|$ poloměr sestrojené kružnice k a zároveň $\leftrightarrow ST \perp t$, proto přímka t je tečnou této kružnice v bodě T. Budiž M střed úsečky AT. Pak $\triangle AMS \cong \triangle TMS$ podle věty *sus* ($|AM| = |MT|$, strana SM je společná, $|\sphericalangle AMS| = |\sphericalangle TMS| = 90°$). Z toho plyne, že $|AS| = |TS|$, a tedy hledaná kružnice prochází i bodem A.

Diskuse: Konstrukce K_1 a K_2 mají vždy jediné řešení. Konstrukce K_3 má řešení, pokud přímky n a o jsou různoběžné. Leží-li bod A na přímce t, je $o \parallel n$, takže úloha nemá řešení, ve všech ostatních případech má úloha právě jedno řešení.



Obr. 9.75



Obr. 9.76

4. Sestrojte trojúhelník, je-li dána délka jedné jeho strany, příslušné výšky a těžnice.

Řešení

Rozbor: Nechť je dána délka c strany AB, výška v_c a těžnice t_c. Předpokládejme, že úloha má aspoň jedno řešení. Je to *úloha nepolohová*, kterou lze převést na úlohu polohovou tak, že umístíme některou z úseček, např. stranu AB. Pak bude jediný neznámý bod, totiž vrchol C. Ten má splňovat tyto 2 podmínky: a) jeho vzdálenost od přímky AB je v_c, b) jeho vzdálenost od středu S strany AB je t_c. M. v. b., které splňují podmínku a), jsou dvě rovnoběžky p_1, p_2 s přímkou AB ve vzdálenosti v_c. M. v. b., které splňují podmínku b), je kružnice $k(S, t_c)$.

Konstrukce (obr. 9.76):

K_1: Umístíme úsečku AB dané délky c.
K_2: Sestrojíme rovnoběžky p_1, p_2 s přímkou AB ve vzdálenosti v_c.
K_3: Sestrojíme střed S úsečky AB.
K_4: Sestrojíme kružnici $k(S, t_c)$.
K_5: Určíme společné body C kružnice k s přímkami p_1, p_2. Sestrojíme $\triangle ABC$.

Symbolický zápis konstrukce:

K_1: AB; $|AB| = c$
K_2: p_1, p_2; $p_1 \parallel p_2 \parallel \leftrightarrow AB$, $|p_1 \leftrightarrow AB| = |p_2 \leftrightarrow AB| = v_c$
K_3: S; $|AS| = |BS|$
K_4: k; $k = k(S, t_c)$
K_5: C; $C \in k \cap (p_1 \cup p_2)$

Zkouška: Snadno se provede obrácením postupu z rozboru.

Diskuse: Konstrukce K_1 až K_4 jsou vždy jednoznačné. Počet řešení úlohy závisí na počtu průsečíků kružnice k s přímkami p_1, p_2:

a) Je-li $v_c < t_c$, jsou přímky p_1, p_2 sečnami kružnice k (obr. 9.76). Polohová úloha má 4 řešení: $\triangle ABC_1$, $\triangle ABC_2$, $\triangle ABC_3$, $\triangle ABC_4$, přičemž však je $\triangle ABC_1 \cong \triangle ABC_4$ a $\triangle ABC_2 \cong ABC_3$. Podle úmluvy uvedené na str. 475 má proto řešená nepolohová úloha 2 řešení ($\triangle ABC_1$ a $\triangle ABC_2$).

b) Je-li $v_c = t_c$, jsou přímky p_1, p_2 tečnami kružnice k. Řešením polohové úlohy je dvojice shodných rovnoramenných trojúhelníků. Řešená nepolohová úloha má tedy 1 řešení (rovnoramenný $\triangle ABC_1$).

c) Je-li $v_c > t_c$, jsou přímky p_1, p_2 vnějšími přímkami kružnice k. Úloha nemá žádné řešení.

Poznámka. Kdybychom při řešení vyšli z umístění úsečky CS délky t_c, měla by úloha 2 neznámé body (A, B), kdybychom vyšli z umístění úsečky CP délky v_c, měla by úloha 3 neznámé body (S, A, B).

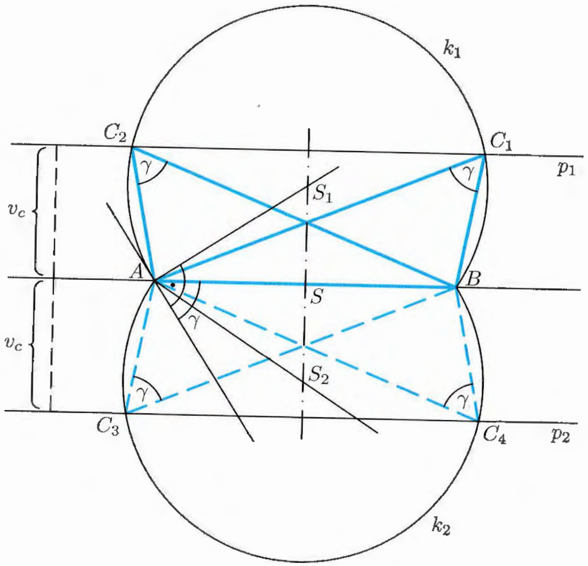
5. Sestrojte trojúhelník, je-li dána délka jedné jeho strany, příslušné výšky a protilehlého vnitřního úhlu.

Řešení

Rozbor: Nechť je dána délka c strany AB, výška v_c a vnitřní úhel velikosti γ. Řešená *úloha je nepolohová*, umístěním strany AB ji převedeme na úlohu polohovou. Neznámým bodem bude vrchol C. Musí splňovat tyto 2 podmínky: a) jeho vzdálenost od přímky AB je v_c, b) úsečka AB je z něho vidět pod zorným úhlem velikosti γ. M. v. b., které splňují podmínku a), jsou dvě rovnoběžky p_1, p_2 s přímkou AB ve vzdálenosti v_c. M. v. b., které splňují podmínku b), jsou dva shodné oblouky AX_1B, AX_2B kružnic k_1, k_2 o poloměru $r = \dfrac{c}{2m}$, kde $m = \sin\gamma$ (podle 6. m v. b. z kap. 9.7).

Konstrukce (obr. 9.77):

K$_1$: Umístíme úsečku AB dané délky c.
K$_2$: Sestrojíme rovnoběžky p_1, p_2 s přímkou AB ve vzdálenosti v_c.
K$_3$: Sestrojíme kružnice k_1, k_2 z rozboru.
K$_4$: Určíme společné body C kružnic k_1, k_2 a přímek p_1, p_2. Sestrojíme $\triangle ABC$.



Obr. 9.77

Symbolický zápis konstrukce:

K$_1$: AB; $|AB| = c$
K$_2$: p_1, p_2; $p_1 \parallel p_2 \parallel \leftrightarrow AB$, $|p_1 \leftrightarrow AB| = |p_2 \leftrightarrow AB| = v_c$
K$_3$: k_1, k_2; $k_1 \cup k_2 = \{X \in \varrho;\ |\sphericalangle AXB| = \gamma\}$
K$_4$: C; $C \in (k_1 \cup k_2) \cap (p_1 \cup p_2)$

Zkouška: Z obrácení postupu rozboru plyne, že nalezené body C splňují všechny podmínky požadované v zadání úlohy.

Diskuse: Úloha je řešitelná, právě když kružnice k_1, k_2 a přímky p_1, p_2 mají společné body, tj. platí-li tato podmínka řešitelnosti:

$$v_c \leqq \frac{c}{2} \operatorname{cotg} \frac{\gamma}{2}$$

Počet řešení dané nepolohové úlohy určíme obdobnou úvahou jako v předchozí úloze:

a) Je-li $v_c < \dfrac{c}{2} \operatorname{cotg} \dfrac{\gamma}{2}$, má daná nepolohová úloha 2 řešení ($\triangle ABC_1$, $\triangle ABC_2$).

b) Je-li $v_c = \dfrac{c}{2} \operatorname{cotg} \dfrac{\gamma}{2}$, má 1 řešení (rovnoramenný $\triangle ABC_1$).

c) Je-li $v_c > \dfrac{c}{2} \operatorname{cotg} \dfrac{\gamma}{2}$, nemá žádné řešení.

Metoda geometrických zobrazení v rovině

Geometrických zobrazení lze užít k řešení konstrukčních úloh v zásadě dvojím způsobem:

1. Geometrického zobrazení použijeme na *část* geometrických útvarů, které se vyskytují v pomocném náčrtku při rozboru konstrukční úlohy. V mnoha případech nám to umožní najít takové vztahy mezi danými a hledanými útvary, které by jinak bylo těžké objevit.
2. Geometrické zobrazení aplikujeme na *celou* geometrickou situaci představovanou náčrtkem při rozboru konstrukční úlohy. V tomto případě samozřejmě nepřicházejí v úvahu shodnosti, které by převedly všechny geometrické útvary v útvary s nimi shodné, tj. dostali bychom tutéž geometrickou situaci. Z uvedených zobrazení lze tedy použít podobnosti, zejména stejnolehlosti.

Příklady užití rovinných geometrických zobrazení k řešení konstrukčních úloh

Užití osové souměrnosti

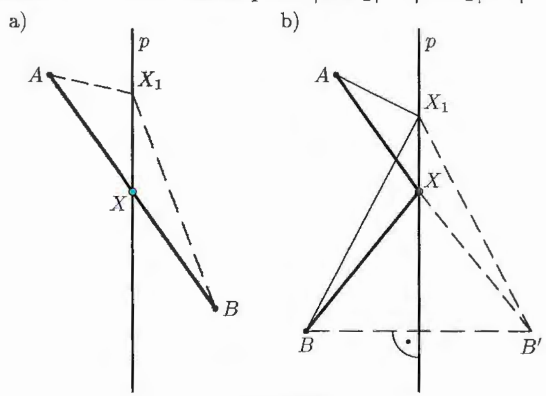
Touto metodou se řeší úlohy o nejkratším spojení několika bodů lomenou čarou, některé úlohy o odrazu, konstrukční úlohy o trojúhelníku, je-li jedním z daných prvků součet nebo rozdíl stran, a řada dalších úloh.

1. Je dána přímka p a dva body A, B uvnitř a) opačných polorovin, b) téže poloroviny s hraniční přímkou p. Najděte na přímce p bod X tak, aby součet jeho vzdáleností od bodů A, B byl co nejmenší.

Řešení

Rozbor: Jde o *polohovou úlohu* s jedním neznámým bodem X.

a) Leží-li body A, B uvnitř opačných polorovin s hraniční přímkou p (obr. 9.78a), je hledaný bod X zřejmě průsečík úsečky AB s přímkou p, takže $|AX| + |BX| = |AB|$. Pro každý jiný bod $X_1 \neq X$ přímky p totiž podle trojúhelníkové nerovnosti platí $|AX_1| + |BX_1| > |AB|$.



Obr. 9.78

b) Leží-li body A, B uvnitř téže poloroviny s hraniční přímkou p (obr. 9.78b), je hledaný bod X zřejmě průsečík úsečky AB' s přímkou p, kde B' je bod souměrně sdružený k bodu B podle přímky p; pak $|AX| + |BX| = |AX| + |B'X| = |AB'|$. Pro každý jiný bod $X_1 \neq X$ přímky p totiž platí $|AX_1| + |BX_1| = |AX_1| + |B'X_1| > |AB'|$.

Konstrukci proveďte sami na základě rozboru.

Zkouška také bezprostředně plyne z rozboru:

a) Pro sestrojený bod $X \in p$ platí $|AX| + |BX| = |AB|$, zatímco pro každý jiný bod $X_1 \in p$ je $|AX_1| + |BX_1| > |AB|$.

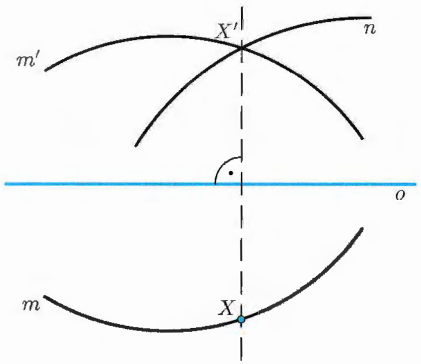
b) Pro sestrojený bod $X \in p$ platí $|AX| + |BX| = |AB'|$, zatímco pro každý jiný bod $X_1 \in p$ je $|AX_1| + |BX_1| > |AB'|$.

Diskuse: Úloha má vždy právě jedno řešení

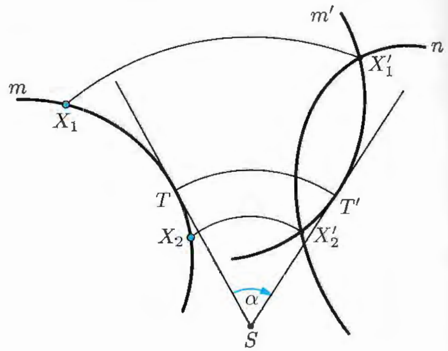
Poznámka. Různými modifikacemi této úlohy jsou fyzikální úlohy týkající se odrazů světelných paprsků, kulečníkových koulí apod.

2. V rovině ϱ jsou dány přímka o a trojúhelníky ABC a KLM. Určete na stranách těchto trojúhelníků všechny dvojice bodů souměrně sdružených podle osy o.

Řešení úlohy snadno provedeme užitím tohoto *principu*: Máme-li v rovině dánu přímku o a dvě čáry m, n, pak všechny dvojice bodů souměrně sdružených podle osy o, které leží na čarách m, n, dostaneme zřejmě jako průsečíky čáry n s čárou m', která je obrazem čáry m v uvažované osové souměrnosti (obr. 9.79), a čáry m s čarou n', která je obrazem čáry n. Stačí ovšem sestrojit jen průsečíky čar n, m' a body k nim souměrně sdružené podle osy o na čáře m.



Obr. 9.79



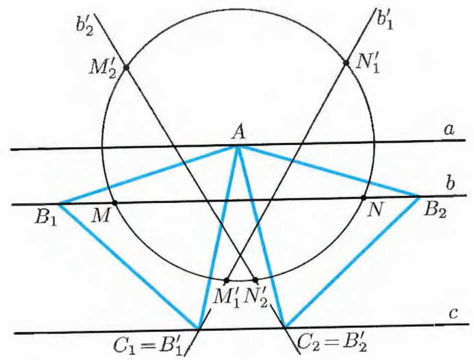
Obr. 9.80

Užití otočení

Tato metoda je založena na následujícím *principu*: Je-li v rovině dán bod S, úhel velikosti α a dvě různé čáry m, n, pak všechny body čáry m, které po otočení o úhel dané velikosti ve zvoleném smyslu (kladném, resp. záporném) budou ležet na čáře n, dostaneme jako body průniku čáry n a čáry m' vzniklé otočením čáry m (obr. 9.80).

3. Jsou dány tři různé rovnoběžky a, b, c a na přímce a bod A. Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC tak, aby jeho vrcholy A, B, C ležely po řadě na rovnoběžkách a, b, c.

Řešení
Nechť přímka b leží uvnitř pásu ohraničeného rovnoběžkami a, c (obr. 9.81).
Rozbor: Jde o *polohovou úlohu* se dvěma neznámými body B, C. Převedeme ji na úlohu s jedním neznámým bodem B otočeným kolem středu A o úhel velikosti $\alpha = 60°$ (rovnající se velikosti vnitřních úhlů rovnostranného trojúhelníku) v kladném, resp. záporném smyslu. Obrazem B' vrcholu B v tomto otočení bude totiž vrchol $C \in c$, tj. $C = B'$. Protože přitom $B' \in b'$, kde b' je obraz přímky b, dostaneme tento bod jako společný bod přímek c, b'. Po získání bodu $B' = C$ určíme již snadno neznámý bod B z podmínky rovnostrannosti trojúhelníku ABC.



Obr. 9.81

Konstrukce (obr. 9.81):

K_1: Přímku b otočíme kolem středu A o úhel velikosti $\alpha = 60°$ v kladném smyslu a v záporném smyslu tak, že otočíme libovolné dva její body M, N. Dostaneme tak obrazy této přímky $b_1' = \leftrightarrow M_1'N_1'$, $b_2' = \leftrightarrow M_2'N_2'$ (kde indexy 1, 2 odpovídají po řadě prvnímu a druhému zobrazení).

K_2: Společný bod přímek b_1', c je vrchol $B_1' = C_1$ a společný bod přímek b_2', c je vrchol $B_2' = C_2$.

K_3: Vrcholy B_1 a B_2 sestrojíme na základě podmínky $|B_1C_1| = |AC_1|$ a $|B_2C_2| = |AC_2|$.

K_4: Sestrojíme rovnostranné trojúhelníky AB_1C_1 a AB_2C_2.

Zkouška: Z rozboru bezprostředně plyne, že sestrojené trojúhelníky splňují všechny požadované vlastnosti.

Diskuse: úloha má vždy právě dvě řešení.

Užití středové souměrnosti

Tato metoda je speciálním případem metody otočení (pro velikost úhlu otočení $\alpha = 180°$). Její *princip* proto plyne z principu metody otočení (slovo „otočení" stačí nahradit slovem „středová souměrnost").

4. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno: $\gamma = 82°$, $t_a = 4{,}7$ cm, $t_b = 3{,}5$ cm.

Řešení (obr. 9.82)

Rozbor: Daná *úloha je nepolohová*. Převedeme ji v polohovou úlohu se dvěma neznámými body (vrcholy) B, C umístěním těžnice AM dané délky $|AM| = t_a$ (M je střed strany BC) na zvolenou polopřímku AX. Nechť T' je obraz těžiště T trojúhelníku ABC ve středové souměrnosti podle středu M ($|AT'| = |TT'| = \frac{2}{3}t_a$, $|AM| = t_a$). Obrazem $\triangle MTB$ v tomto zobrazení je $\triangle MT'C$, takže platí $\triangle MT'C \cong \triangle MTB$ a odtud plyne, že $|CT'| = |BT| = \frac{2}{3}t_b$. Bod C musí proto splňovat tyto 2 podmínky: a) od bodu T' má vzdálenost $\frac{2}{3}t_b$, b) leží na kružnicovém oblouku, z něhož je vidět úsečku AM v zorném úhlu dané velikosti γ. Bod B musí vyhovovat těmto 2 podmínkám: a) od těžiště T má vzdálenost $\frac{2}{3}t_b$, b) leží na polopřímce CM.

Konstrukce (obr. 9.82):

K$_1$: Umístíme úsečku AM dané délky t_a na zvolenou polopřímku AX a sestrojíme těžiště T jako vnitřní bod úsečky AM ve vzdálenosti $|AT| = \frac{2}{3}t_a$.

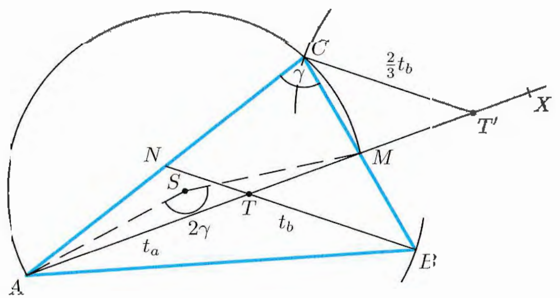
K$_2$: Sestrojíme obraz T' těžiště T ve středové souměrnosti podle středu M.

K$_3$: Sestrojíme body B, C splňující uvedené dvojice podmínek, užijeme k tomu množin všech bodů daných vlastností.

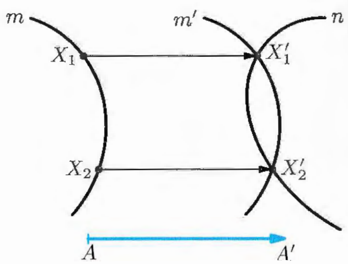
K$_4$: Sestrojíme $\triangle ABC$; při daném číselném zadání prvků existuje právě jedno řešení.

Zkouška: Z rozboru vyplývá, že sestrojený $\triangle ABC$ má všechny vlastnosti požadované v zadání úlohy.

Poznámka. Úlohu z příkladu 4 by bylo možné řešit též užitím stejnolehlosti.



Obr. 9.82



Obr. 9.83

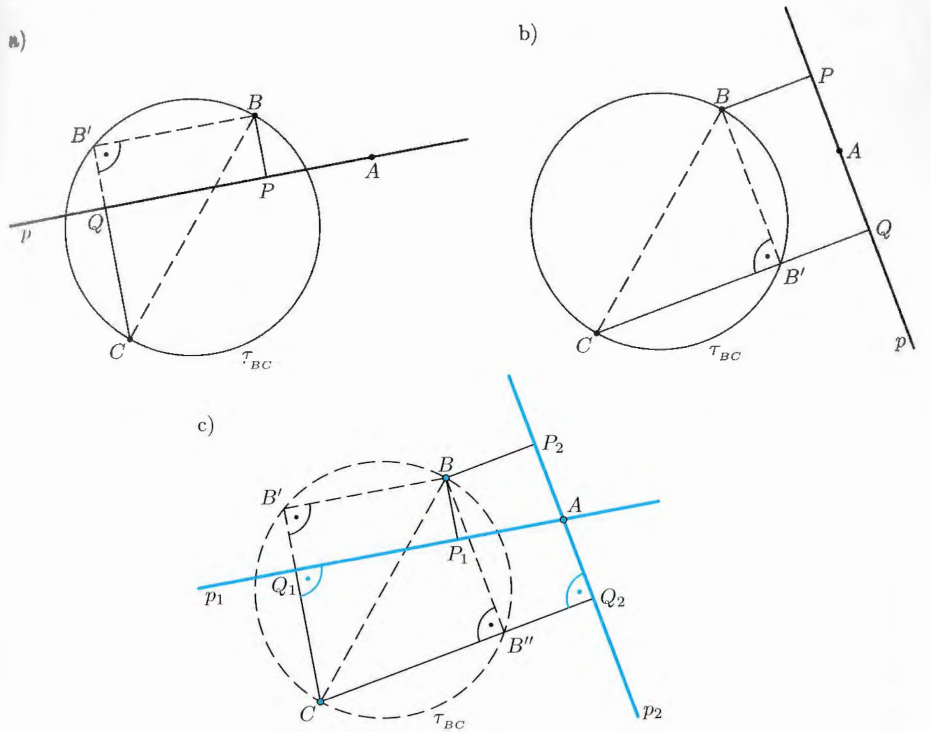
Užití posunutí

Tato metoda je založena na následujícím *principu*: Nechť jsou v rovině dány dvě čáry m, n. Všechny body čáry m, které po posunutí daném vektorem posunutí $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{AA'}$ budou ležet na čáře n, dostaneme jako průsečíky čáry n a čáry m', jež je obrazem čáry m v tomto posunutí (obr. 9.83).

5. Mějme dány tři různé body A, B, C, které neleží v jedné přímce. Bodem A veďte přímku p tak, aby a) součet nebo b) absolutní hodnota rozdílu vzdáleností této přímky od bodů B, C byly rovny danému číslu $d > 0$.

Řešení

Rozbor (obr. 9.84a, b): Vzdálenosti bodů B a C od hledané přímky p při označení podle obrázku jsou $|BP|$ a $|CQ|$. Má být $|\,|BP| \pm |CQ|\,| = d$. Posunutím úsečky BP do polohy $B'Q$ dostaneme úsečku $B'C$ o délce $|B'C| = d$. a) Je-li bod B' vnějším bodem úsečky CQ, je $|B'C| = |BP| + |CQ| = d$ (obr. 9.84a). b) Je-li bod B' vnitřním bodem úsečky CQ, je $|\,|BP| - |CQ|\,| = d$ (obr. 9.84b). V pravoúhlém trojúhelníku $BB'C$ známe tedy v obou případech přeponu BC a odvěsnu $B'C$.



Obr. 9.84

Konstrukce (obr. 9.84c):

Nad průměrem BC sestrojíme Thaletovu kružnici τ_{BC} a na ní najdeme body B', resp. B'', pro něž $|B'C| = |B''C| = d$. Bodem A vedeme pak hledané přímky p_1, p_2 jako kolmice k přímkám $B'C$, $B''C$.

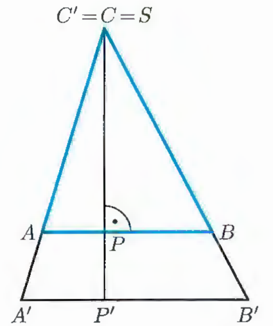
Zkoušku proveďte sami na základě rozboru.

Diskuse [souhrnná pro oba případy a), b)]: Je-li $d < |BC|$, má úloha 2 různá řešení ($p_1 \perp\ \leftrightarrow B'C$, $p_2 \perp\ \leftrightarrow B''C$). Je-li $d = |BC|$, má právě jedno řešení ($p \perp\ \leftrightarrow BC$). Je-li $d > |BC|$, nemá úloha řešení.

Užití stejnolehlosti

Této metody používáme k řešení těch konstrukčních úloh, v nichž lze určit mezi útvarem daným a hledaným vztah stejnolehlosti. Zejména ji však užíváme při řešení těch konstrukčních úloh, u nichž je možno podmínky, které má hledaný geometrický útvar splňovat, rozdělit na dvě části: první skupina podmínek určuje tvar, druhá (bývá v ní zpravidla jen jedna podmínka) určuje velikost a polohu hledaného útvaru. V tomto případě sestrojíme nejprve pomocný geometrický útvar splňující jen všechny podmínky první skupiny a určíme střed stejnolehlosti, která tento útvar převede v útvar hledaný. V této stejnolehlosti pak sestrojíme útvar vyhovující i podmínkám (podmínce) druhé skupiny. Takto postupujeme *např.* při sestrojení trojúhelníku, je-li jeden z daných prvků úsečka dané délky a ostatní prvky jsou úhly dané velikosti nebo poměr délek jeho stran či příček, nebo při sestrojení útvaru, který má obsahovat daný bod nebo jehož strany mají ležet na rovnoběžce s danou přímkou.

6. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dána velikost jednoho vnitřního úhlu, poměr délek stran svírajících tento úhel a délka výšky příslušné k vrcholu tohoto úhlu.



Obr. 9.85

Řešení (obr. 9.85)

Rozbor: Označme γ danou velikost úhlu, $\dfrac{a}{b}=\dfrac{m}{n}$ daný poměr délek stran a v_c danou délku výšky. Snadno můžeme sestrojit takový $\triangle A'B'C'$, že $|A'C'|=n$, $|B'C'|=m$, $|\sphericalangle A'B'C'|=\gamma$, a v něm výšku $C'P'$ délky $|C'P'|=v_c'$. Pokud by bylo $v_c'=v_c$, pak by $\triangle A'B'C'=\triangle ABC$, čímž by úloha byla vyřešena. Je-li $v_c'\neq v_c$, vyhovuje však $\triangle A'B'C'$ jen prvním dvěma podmínkám úlohy. V tomto případě sestrojíme $\triangle ABC$ jako takový obraz $\triangle A'B'C'$ ve stejnolehlosti se středem $S=C'=C$, že výška $\triangle ABC$ příslušná k vrcholu C má délku $|CP|=v_c$.

Konstrukce:

K_1: Sestrojíme libovolný $\triangle A'B'C'$ takový, že $|\sphericalangle A'B'C'|=\gamma$, $|A'C'|=n$, $|B'C'|=m$; jeho výšku příslušnou k vrcholu C' označíme $C'P'$.

K_2: Na polopřímku $C'P'$ naneseme úsečku CP délky $|CP|=v_c$.

K_3: Bodem P vedeme přímku p rovnoběžnou s přímkou $A'B'$.

K_4: Určíme body A, B jako průsečíky přímky p po řadě s přímkami $C'A'$ a $C'B'$.

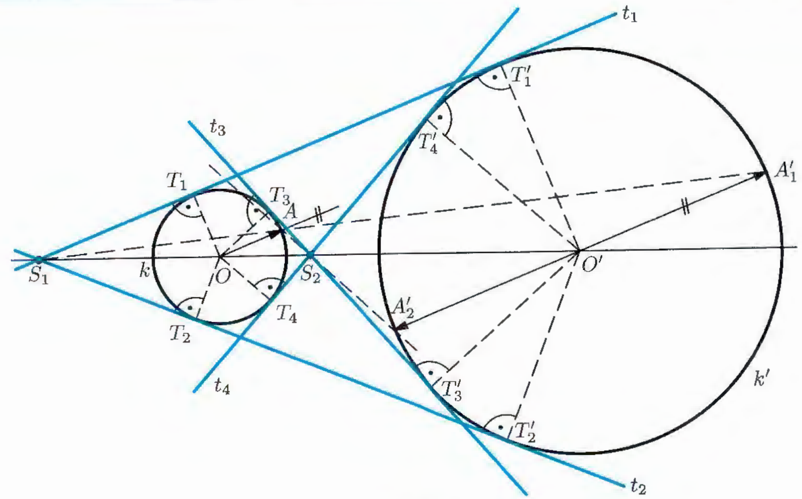
Zkouška: Z rozboru plyne, že sestrojený trojúhelník ABC splňuje všechny dané vlastnosti.

Diskuse: Pokud $\gamma<180°$, jsou všechny části konstrukce jednoznačné, úloha má jediné řešení.

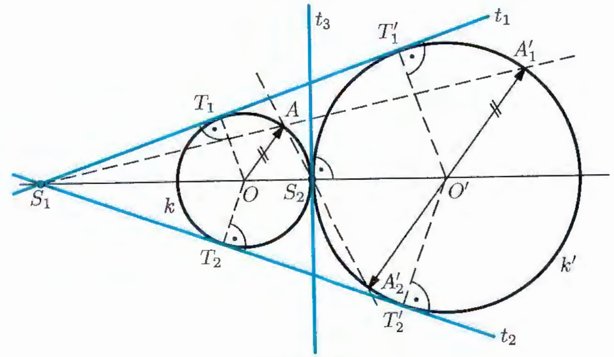
Při řešení dalších příkladů využijeme tyto důležité *věty o zobrazování kružnic ve stejnolehlých zobrazeních*:

V.1. Obrazem libovolné kružnice $k(O,r)$ v každé stejnolehlosti $H(S,\kappa)$ se středem S a koeficientem stejnolehlosti κ je kružnice $k'(O',r')$, jejíž střed O' je obrazem středu O kružnice k v této stejnolehlosti a pro jejíž poloměr r' platí $r'=|\kappa|\cdot r$ (obr. 9.65, kap. 9.8).

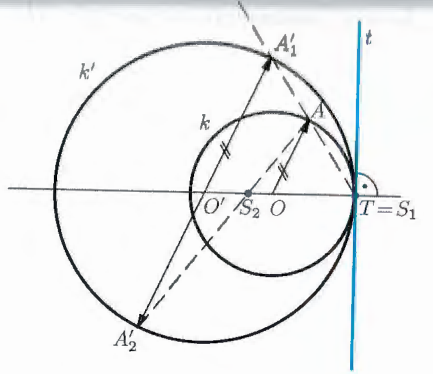
V.2. Jsou-li dány libovolné dvě kružnice $k(O,r)$, $k'(O',r')$ s různými poloměry r, r', pak existují právě dvě stejnolehlosti $H_1(S_1,\kappa_1)$, $H_2(S_2,\kappa_2)$ zobrazující kružnici k na kružnici k'. Středy S_1, S_2 těchto stejnolehlostí leží na přímce procházející body O, O' (obr. 9.86 až 9.88) a jejich koeficienty jsou po řadě čísla $\kappa_1=\dfrac{r'}{r}$, $\kappa_2=-\dfrac{r'}{r}$.



Obr. 9.86



Obr. 9.87



Obr. 9.88

Bod S_1, který leží vně úsečky OO', tj. středné kružnic k, k', se nazývá **vnější střed stejnolehlosti kružnic** k, k'; bod S_2 ležící uvnitř úsečky OO' se nazývá **vnitřní střed stejnolehlosti kružnic** k, k'. Body S_1, S_2 sestrojíme takto: Určíme obrazy libovolného bodu $A \in k$ v obou stejnolehlostech H_1, H_2, jsou to po řadě body A_1', $A_2' \in k'$, které leží na přímce rovnoběžné s přímkou OA a procházející středem O' kružnice k', přičemž bod A_1' leží v téže polorovině s hraniční přímkou OO' jako bod A a bod A_2' leží v polorovině opačné (obr. 9.86). Průsečík přímek OO', AA_1' je bod S_1 a průsečík přímek OO', AA_2' je bod S_2.

Speciálně: Jestliže k, k' jsou dotýkající se kružnice, pak jejich dotykový bod je jedním ze středů stejnolehlostí H_1, H_2; bod vnějšího dotyku (obr. 9.87) je vnitřní střed stejnolehlosti ($T = S_2$), bod vnitřního dotyku (obr. 9.88) je vnější střed stejnolehlosti ($T = S_1$).

Poznámka. Věta V.1 platí pro nesoustředné kružnice, ale také pro soustředné kružnice. V tomto případě středy obou stejnolehlostí H_1, H_2 splývají se společným středem obou kružnic ($S_1 = S_2 = O = O'$).

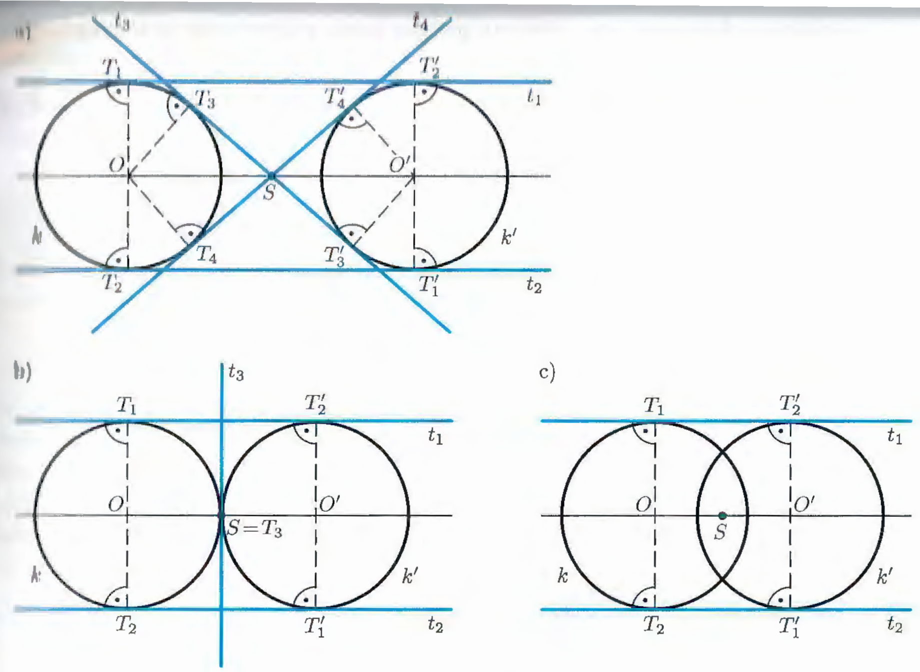
V.3. Jsou-li dány libovolné dvě nesoustředné kružnice $k(O, r)$, $k'(O', r')$ s týmž poloměrem $r = r'$, pak existuje právě jedna stejnolehlost $H(S, \kappa)$ zobrazující kružnici k na kružnici k'. Tato stejnolehlost je středovou souměrností podle středu S, který je středem úsečky OO' (obr. 9.89a, b, c).

K některým dvojicím kružnic existuje přímka, která je tečnou obou kružnic zároveň, tato přímka se nazývá **společná tečna dvou kružnic**.

K jejímu sestrojení lze výhodně užít stejnolehlosti těchto kružnic, neboť platí věty:

V.4. Každá přímka, která prochází středem stejnolehlosti dvou kružnic a je tečnou jedné z těchto kružnic, je jejich společnou tečnou (obr. 9.86, 9.87, 9.89).

Zdůvodnění je snadné: průměry kružnic kolmé ke společné tečně jsou navzájem rovnoběžné.



Obr. 9.89

V.5. Mají-li dvě kružnice o různých poloměrech společné tečny, pak každá z nich prochází buď vnějším, anebo vnitřním středem stejnolehlosti těchto kružnic (obr. 9.86, 9.87).

Poznámka. Pro dvojici kružnic o témž poloměru věta V.5 neplatí; tyto kružnice mají dvojici rovnoběžných společných tečen, které neprocházejí středem stejnolehlosti těchto kružnic, pouze případné ostatní společné tečny jím procházejí (obr. 9.89a, b, c).

7. Sestrojte společné tečny daných dvou nesoustředných kružnic $k(O, r)$, $k'(O', r')$: a) o různých poloměrech ($r \neq r'$), b) o témž poloměru ($r = r'$).

Řešení

Řešená *úloha je polohová.*

Rozbor: Sestrojení hledaných společných tečen lze provést užitím vět V.4, V.5 a připojené poznámky. Dotykové body těch tečen, které nejsou kolmé k přímce OO', určíme pomocí Thaletových kružnic nad průměry S_1O, S_1O', S_2O, S_2O'.

Konstrukce: viz obr. 9.86, 9.87, 9.89.

Zkouška: Sestrojené tečny splňují všechny vlastnosti společných tečen dvou kružnic.

Diskuse:

a) Počet společných tečen kružnic k, k' o poloměrech $r \neq r'$: 4 pro k, k' ležící navzájem ve svých vnějších oblastech (obr. 9.86); 3 pro k, k' s vnějším dotykem (obr. 9.87); 2 pro k, k' protínající se (obr. sestrojte sami); 1 pro k, k'

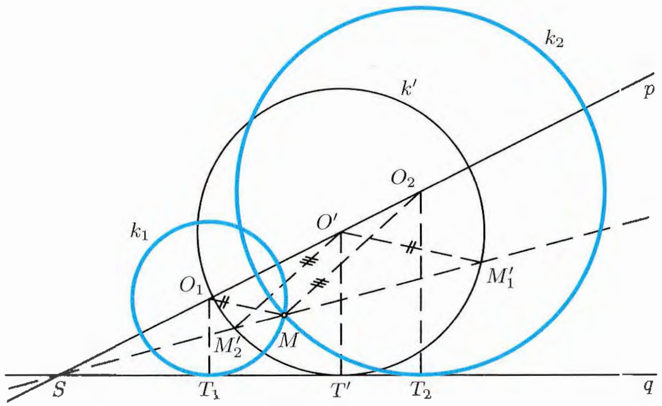
s vnitřním dotykem (obr. 9.88); 0, jestliže jedna z kružnic k, k' leží ve vnitřní oblasti druhé.

b) Počet společných tečen kružnic k, k' s týmž poloměrem $r = r'$: 4 pro k, k' ležící navzájem ve svých vnějších oblastech (obr. 9.89a); 3 pro k, k' s vnějším dotykem (obr. 9.89b); 2 pro k, k' protínající se (obr. 9.89c).

8. Nechť jsou dány dvě různoběžné přímky p, q a bod M, který neleží na žádné z nich. Sestrojte kružnici, která má střed na přímce p, dotýká se přímky q a prochází bodem M.

Řešení (obr. 9.90)
Řešená *úloha je polohová.*

Rozbor: Předpokládejme, že existuje hledaná kružnice k se středem $O \in p$, procházející bodem M a dotýkající se přímky q v bodě T. Zvolíme-li libovolnou kružnici k' se středem $O' \in p$ a dotýkající se přímky q v nějakém bodě dotyku T', pak podle vět V.2, V.6 jsou kružnice k, k' stejnolehlé ve stejnolehlosti se středem S, jímž je průsečík přímek p, q. Obrazem bodu $M \in k$ v této stejnolehlosti je bod $M' \in k'$, který je průsečíkem přímky SM s kružnicí k'. Stejnolehlé přímky OM a $O'M'$ jsou rovnoběžné.



Obr. 9.90

Konstrukce (obr. 9.90):

K_1: Určíme průsečík S přímek p, q.
K_2: Sestrojíme pomocnou kružnici k' se středem O' v libovolném bodě přímky p a s bodem dotyku $T' \in q$.
K_3: Určíme průsečíky M_1', M_2' přímky SM s kružnicí k'.
K_4: Bodem M vedeme rovnoběžky s přímkami $O'M_1'$ a $O'M_2'$.
K_5: Sestrojíme kružnice k_1, k_2 se středy O_1, O_2 a s body dotyku T_1, T_2 na přímce q; body T_1, T_2 leží na Thaletových kružnicích nad průměry SO_1 a SO_2.

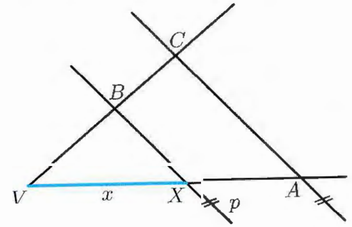
Zkouška: Z rozboru vyplývá, že sestrojené kružnice k_1, k_2 splňují všechny požadované vlastnosti.

Diskuse: Úloha je řešitelná, právě když přímka q leží v polorovině pM, a má pak dvě řešení (kružnice k_1, k_2).

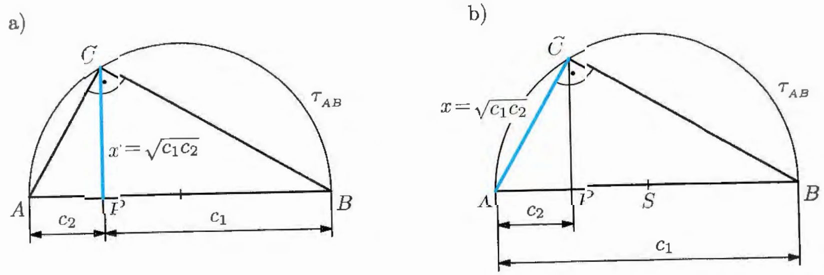
Algebraická metoda

Algebraická metoda řešení konstrukčních úloh v rovině je založena na konstruování úseček, jejichž délky jsou vyjádřeny nějakými (danými, resp. získanými) algebraickými výrazy.

Základní úlohy takto řešené jsou nepolohové konstrukční úlohy tohoto typu: Máme sestrojit úsečku, jejíž délka má číselnou hodnotu x rovnou předepsanému algebraickému výrazu $V(a, b, \ldots)$, kde a, b, ... jsou určitá kladná čísla, popř. parametry. Některé speciální případy konstrukčních úloh tohoto typu a jejich řešení (rozbor, popis konstrukce) uvádíme v tabulce 9.8 a v obr. 9.91, 9.92.



Obr. 9.91



Obr. 9.92

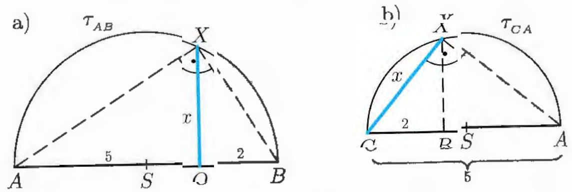
Poznámka. Při řešení konstrukčních úloh algebraickou metodou se obvykle pracuje s číselnými hodnotami délek úseček, i když se pro stručnější vyjadřování mluví o jejich délkách.

Příklady řešení konstrukčních úloh algebraickou metodou

1. Sestrojte úsečku, jejíž délka má číselnou hodnotu a) $x = \sqrt{10}$, b) $x = \sqrt{11}$, je-li zvolena jednotková úsečka.

Řešení

a) $x = \sqrt{5 \cdot 2}$, takže jde o základní úlohu typu 5 (tab. 9.8). Konstrukce je provedena na základě Eukleidovy věty o výšce v obr. 9.93a a na základě Eukleidovy věty o odvěsně v obr. 9.93b. ($|OA| = 5$, $|OB| = 2$, $|OX| = x$).



Obr. 9.93

Základní typy úloh o konstrukci úsečky, jejíž délka je určena daným algebraickým výrazem Tab. 9.8

Typ	Algebraické vyjádření délky x sestrojované úsečky	Rozbor, popis konstrukce
1.	$x = a + b$ $(a, b > 0)$, resp. $x = a - b$, $(a > b > 0)$	Z kap. 9.1 víme, že grafický součet úseček o délkách a, b má délku $x = a + b$; grafický rozdíl úseček o délkách a, b $(a > b)$ má délku $x = a - b$.
2.	$x = \dfrac{ab}{c}$ $(a, b, c > 0)$ neboli $\dfrac{x}{a} = \dfrac{b}{c}$ x se nazývá *čtvrtá geometrická úměrná*	Na ramenech libovolného konvexního úhlu s vrcholem V (o velikosti $0° < \alpha < 180°$) sestrojíme takové úsečky VA, VB, VC, že platí $\lvert VA\rvert = a$, $\lvert VB\rvert = b$, $\lvert VC\rvert = c$. Vedeme bodem B rovnoběžku p s přímkou AC a označíme X průsečík přímek p, VA (obr. 9.91). Pak $\triangle VAC \sim \triangle VXB$, takže $x = \lvert VX\rvert$.
3.	$x = \sqrt{a^2 + b^2}$ $(a, b > 0)$	Sestrojíme-li pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami o délkách a, b, pak podle Pythagorovy věty jeho přepona má délku x.
4.	$x = \sqrt{c^2 - b^2}$ $(c > b > 0)$	Sestrojíme-li pravoúhlý trojúhelník s přeponou délky c a odvěsnou délky b, pak podle Pythagorovy věty jeho druhá odvěsna má délku x.
5.	$x = \sqrt{c_1 c_2}$ $(c_1 > c_2 > 0)$ x se nazývá *střední geometrická úměrná*	a) Sestrojíme-li pomocí Thaletovy věty pravoúhlý trojúhelník s přeponou rozdělenou na úseky délek c_1, c_2 (obr. 9.92a), pak podle Eukleidovy věty o výšce je délka výšky rovna x. b) Sestrojíme-li pomocí Thaletovy věty pravoúhlý trojúhelník s přeponou délky $c = c_1$ a jedním jejím úsekem o délce c_2 (obr. 9.92b), pak podle Eukleidovy věty o odvěsnách odvěsna přilehlá k tomuto úseku má délku x.

Poznámka. Za uvedených předpokladů mají úlohy 1 až 5 právě jedno řešení.

b) $x = \sqrt{11} = \sqrt{11 \cdot 1}$, čímž je daná úloha převedena opět na úlohu typu 5.

Lze však též užít úpravy $x = \sqrt{11} = \sqrt{9+2} = \sqrt{3^2 + (\sqrt{2})^2}$ a sestrojit na základě Pythagorovy věty úsečku, jejíž délka má číselnou hodnotu x, jako přeponu pravoúhlého trojúhelníku o odvěsnách délek 3 a $\sqrt{2}$. (Přitom úsečku délky $\sqrt{2}$ můžeme sestrojit jako úhlopříčku čtverce o straně jednotkové délky.) Konstrukčně jednodušší je užití úpravy $x = \sqrt{11} = \sqrt{36 - 25} = \sqrt{6^2 - 5^2}$, podle níž je x délka odvěsny pravoúhlého trojúhelníku o přeponě délky 6 a druhé odvěsně délky 5.

Poznámka. Poslední způsob řešení lze zobecnit: Každou úsečku délky $\sqrt{2k+1}$, kde $k \in \mathsf{N}$, můžeme sestrojit užitím vztahu

$$2k + 1 = (k+1)^2 - k^2 \quad \text{pro každé } k \in \mathsf{N},$$

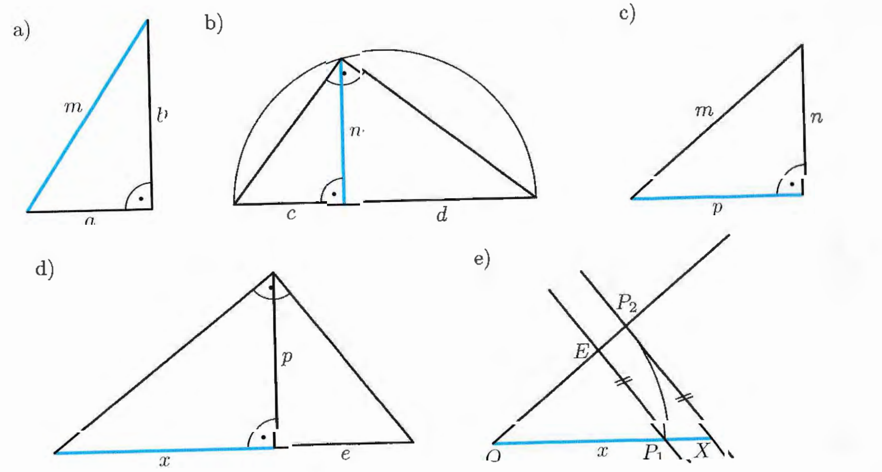
podle něhož je $\sqrt{2k+1}$ rovna délce jedné odvěsny pravoúhlého trojúhelníku, jehož přepona má délku $k + 1$ a druhá odvěsna má délku k.

2. Sestrojte úsečky, jejichž délky jsou dány algebraickými výrazy:

a) $x = \dfrac{a^2 + b^2 - cd}{e}$, b) $x = \sqrt[4]{abcd}$ $(a, b, c, d, e > 0)$.

Řešení

a) Převedeme na základní konstrukce podle tab. 9.8; postupně sestrojíme úsečky délek $m = \sqrt{a^2 + b^2}$, $n = \sqrt{cd}$, $p = \sqrt{m^2 - n^2}$, $x = \dfrac{p^2}{e}$. Konstrukce jsou provedeny v obr. 9.94a až e (sestrojení výsledné úsečky délky x je provedeno dvěma způsoby: v obr. 9.94d jako úloha typu 5 a v obr. 9.94e jako úloha typu 2 podle tab. 9.8, přičemž $\lvert OE\rvert = e$, $\lvert OP_1\rvert = \lvert OP_2\rvert = p$, $\lvert OX\rvert = x$). Úloha je jednoznačně řešitelná za předpokladu, že je $a^2 + b^2 > cd$.



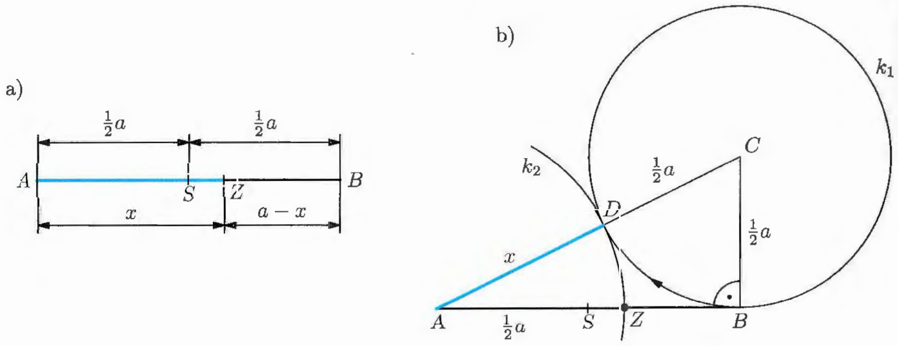
Obr. 9.94

b) $x = \sqrt[4]{abcd} = \sqrt{mn}$, kde $m = \sqrt{ab}$, $n = \sqrt{cd}$; úsečky o délkách m, n, x sestrojíme jednoznačně užitím Eukleidových vět (úloha typu 5 podle tab. 9.8).

3. **Zlatým řezem dané úsečky** AB se rozumí takové její rozdělení bodem Z na dvě části (úsečky) AZ, BZ, že platí (obr. 9.95a)

$$|AZ| : |BZ| = |AB| : |AZ| \quad (|AZ| > |BZ|),$$

tj. poměr délky větší části a menší části úsečky je roven poměru délky celé úsečky a její větší části. Odvoďte konstrukci zlatého řezu úsečky AB na základě algebraické metody.



Obr. 9.95

Řešení

Rozbor (obr. 9.95a): Označme $|AB| = a$, $|AZ| = x$, $|BZ| = a - x$. Pak podmínka pro zlatý řez nabývá tvaru

$$x : (a - x) = a : x \quad \text{čili} \quad x^2 = a(a - x)$$

(tj. délka úsečky AZ je geometrickým průměrem délek úseček AB a ZB neboli obsah čtverce nad větší částí AZ úsečky AB je roven obsahu obdélníku určeného celou úsečkou AB a její menší částí ZB). Odtud po ekvivalentních úpravách dostáváme kvadratickou rovnici pro neznámou x:

$$x^2 + ax = a^2 \quad \text{neboli} \quad \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}a^2.$$

Protože je $x + \dfrac{a}{2} > 0$, $a > 0$, plyne odtud po odmocnění

$$x + \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}a, \quad \text{a tedy } x = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1),$$

kde $\dfrac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) \doteq 0{,}618$.

Konstrukce zlatého řezu (tzv. *Heronova konstrukce*) je provedena v obr. 9.95b: Mějme dánu úsečku AB délky a. V bodě B sestrojme kolmici k AB a na ní

úsečku BC délky $\dfrac{a}{2}$. Dále sestrojme kružnici $k_1\left(C, \dfrac{a}{2}\right)$. Její průsečík s úsečkou AC označme D a sestrojme kružnici $k_2(A, |AD| = x)$. Její průsečík s úsečkou AB je bod Z, který tuto úsečku dělí v poměru zlatého řezu.

Zkouška: Správnost této konstrukce z obr. 9.95b vyplývá z Pythagorovy věty pro pravoúhlý trojúhelník ABC o přeponě délky $x + \dfrac{a}{2}$ a odvěsnách, jež mají délky a, $\dfrac{a}{2}$ $\left[\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right]$.

Diskuse: Konstrukce zlatého řezu je jednoznačně proveditelná pro každou úsečku AB.

Poznámka. Zlatý řez úsečky měl po dlouhé období významnou roli ve výtvarném umění a v architektuře. Také v přírodě nacházíme některé poměry délek odpovídající zlatému řezu. V geometrii se zlatého řezu užívá při konstrukci pravidelného desetiúhelníku a pětiúhelníku o stranách dané délky, jak ukážeme v následujícím příkladu.

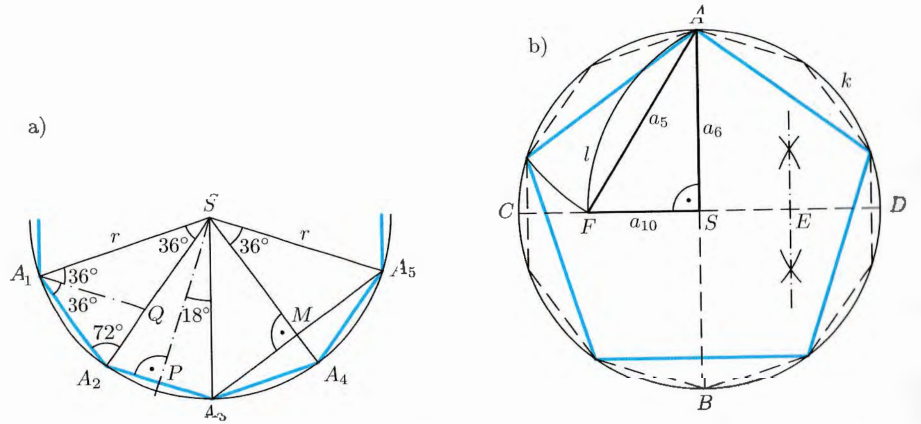
4. Do kružnice o daném poloměru r vepište: a) pravidelný šestiúhelník, b) pravidelný desetiúhelník, c) pravidelný pětiúhelník.

Řešení

Rozbor provedeme postupně pro pravidelné mnohoúhelníky v případech a), b), c).

a) Každý pravidelný šestiúhelník vepsaný kružnici $k(S, r)$ lze rozdělit na šest shodných rovnostranných trojúhelníků, jejichž strany procházející středem S jsou zároveň poloměry kružnice k, takže pro délky stran pravidelného šestiúhelníku platí $a_6 = r$.

b) Každý pravidelný desetiúhelník vepsaný kružnici $k(S, r)$ lze rozdělit na deset shodných rovnoramenných trojúhelníků s úhlem velikosti 36° při vrcholu S a s úhly velikosti 72° při základně délky a_{10}. Uvažujme jeden z těchto trojúhelníků A_1A_2S (obr. 9.96a); osa úhlu SA_1A_2 protne stranu A_2S v bodě Q. Podle věty *uu* o podobnosti trojúhelníků platí $\triangle A_1A_2Q \sim \triangle SA_1A_2$, přičemž $|A_1A_2| = |A_1Q| = |QS| = a_{10}$. Odtud plyne, že



Obr. 9.96

$$\frac{|A_1A_2|}{|A_2Q|} = \frac{|A_1S|}{|A_1A_2|} \quad \text{čili} \quad \frac{a_{10}}{r - a_{10}} = \frac{r}{a_{10}},$$

tj. a_{10} je délkou větší části úsečky délky r rozdělené zlatým řezem (viz příklad 3), a proto $a_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$.

Dále ze shodného trojúhelníku A_2A_3S ($\triangle A_2A_3S \cong \triangle A_1A_2S$) vyplývá: Osou úhlu A_2SA_3, která protíná stranu A_2A_3 v bodě P, je $\triangle A_2A_3S$ rozdělen ve dva shodné pravoúhlé trojúhelníky A_2PS a A_3PS. V $\triangle A_3PS$ je $|PA_3| = \frac{1}{2}|A_2A_3| = \frac{1}{2}a_{10}$ a zároveň $|PA_3| = r \sin 18°$. Odtud $a_{10} = 2r \sin 18° = 2r \cos 72° \Rightarrow \cos 72° = \frac{a_{10}}{2r}$ a po dosazení vypočtené hodnoty $a_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$ dostáváme, že $\cos 72° = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$, což využijeme v případě c).

c) Každý pravidelný pětiúhelník vepsaný kružnici $k(S, r)$ lze rozdělit na pět shodných rovnoramenných trojúhelníků s úhlem velikosti 72° při vrcholu S a s úhly velikosti 54° při základně délky a_5. Uvažujme jeden z těchto trojúhelníků A_3A_5S (obr. 9.96a): Osa úhlu A_3SA_5 protne stranu A_3A_5 v bodě M a rozdělí $\triangle A_3A_5S$ ve dva shodné pravoúhlé trojúhelníky A_3MS a A_5MS. V $\triangle A_5MS$ je $|MA_5| = \frac{1}{2}|A_3A_5| = \frac{1}{2}a_5$ a zároveň $|MA_5| = r \sin 36°$. Odtud plyne, že $a_5 = 2r \sin 36°$ a užitím goniometrického vzorce pro libovolné $\alpha \in \mathrm{R}$: $|\sin \frac{\alpha}{2}| = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$ dostáváme $a_5 = 2r\sqrt{\frac{1 - \cos 72°}{2}}$. Po dosazení hodnoty cos 72° vypočtené v b) vychází $a_5 = r\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}} = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$.

Z odvozených vztahů pro a_6, a_{10} a a_5 vyplývá:

$$a_6^2 + a_{10}^2 = a_5^2.$$

Konstrukce (obr. 9.96b): V kružnici $k(S, r)$ zvolíme dva k sobě kolmé průměry AB, CD. Sestrojíme střed E úsečky SD a kružnici $l(E, |AE|)$, která protne úsečku CS délky r v bodě F. Pak je $|AS| = a_6$, $|FS| = a_{10}$, $|AF| = a_5$.

Zkouška: V obr. 9.96b je $|AS| = r = a_6$, $|SE| = \frac{r}{2}$, takže $|FE| = |AE| = \sqrt{|AS|^2 + |SE|^2} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2} = \frac{r}{2}\sqrt{5}$, a tedy

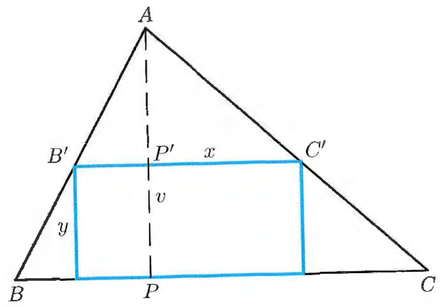
$$|FS| = |FE| - |SE| = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1) = a_{10};$$

$$|AF| = \sqrt{|FS|^2 + |AS|^2} = \sqrt{\frac{r^2}{4}(\sqrt{5} - 1)^2 + r^2} = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} = a_5.$$

Diskuse: Všechny použité konstrukce jsou jednoznačně proveditelné, úloha má tedy vždy právě jedno řešení (pro zvolenou polohu kružnice k).

Poznámka. Gauss dokázal, že eukleidovskou konstrukcí (tj. kružítkem a pravítkem) lze sestrojit každý pravidelný n-úhelník ($n \in \mathrm{N}$, $n \geqq 3$) takový, že v rozkladu čísla n na prvočinitele jsou obsaženy jen mocniny 2^m, kde $m \in \mathrm{N}$, nebo první mocniny prvočísel tvaru $p = 2^{2^k} + 1$, kde k je nezáporné celé číslo (tj. $p = 3, 5, 17, \ldots$, a tedy $n = 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, \ldots$).

5. Do daného trojúhelníku ABC vepište obdélník o daném obvodu $2p$.



Obr. 9.97

Řešení
Rozbor (obr. 9.97): Označme x, y délky stran vepsaného obdélníku. Má platit

$$2x + 2y = 2p \quad \text{čili} \quad x + y = p. \tag{1}$$

V obr. 9.97 je podle věty *uu* o podobnosti trojúhelníků $\triangle ABC \sim \triangle AB'C'$. Odtud plyne, že

$$|BC| : |B'C'| = |AP| : |AP'| \quad \text{čili} \quad a : x = v : (v - y),$$

kde v je výška příslušná ke straně a trojúhelníku ABC. Odtud

$$x = \frac{a(v - y)}{v}. \tag{2}$$

Rovnice (1), (2) představují soustavu dvou lineárních rovnic pro neznámé x, y. Dosazením z (2) do (1) dostáváme

$$\frac{av - ay}{v} + y = p \quad \text{čili} \quad (v - a)y = v(p - a), \tag{3}$$

takže

$$y = \frac{v(p - a)}{v - a}, \quad x = p - \frac{v(p - a)}{v - a} = \frac{a(v - p)}{v - a}, \quad \text{když} \quad v \neq a. \tag{4}$$

Konstrukce: Sestrojíme nejprve úsečky o délkách $v - p$, $p - a$, $v - a$ (úloha typu 1, tab. 9.8). Poté sestrojíme úsečky x, y dané algebraickými vztahy (4) (úloha typu 2, tab. 9.8).

Diskuse:

a) Protože je $x > 0$ a $y > 0$, musí být buď

$$v - a > 0,\ \ p - a > 0,\ \ v - p > 0 \quad \text{čili} \quad v > p > a, \tag{5}$$

nebo

$$v - a < 0,\ \ p - a < 0,\ \ v - p < 0 \quad \text{čili} \quad v < p < a. \tag{6}$$

Dále musí být $x < a$ čili $\dfrac{a(v-p)}{v-a} - a < 0$ čili $\dfrac{a(a-p)}{v-a} < 0$, tj. buď $a - p < 0$, $v - a > 0$, což je splněno podle nerovnosti (5), nebo $a - p > 0$, $v - a < 0$, což je splněno podle nerovnosti (6). Rovněž musí být $y < v$ čili $\dfrac{v(p-a)}{v-a} - v < 0$ čili $\dfrac{v(p-v)}{v-a} < 0$, tj. buď $v - a < 0$, $p - v > 0$, což je splněno podle nerovnosti (6), nebo $v - a > 0$, $p - v < 0$, což je splněno podle nerovnosti (5). Jsou-li tedy splněny nerovnosti (5) nebo (6), má daná úloha právě jedno řešení.

b) Je-li $v = a \neq p$, rovnice (3) nabývá tvaru $0 \cdot y \neq 0$, takže úloha nemá řešení.

c) Je-li $v = a = p$, má rovnice (3) tvar $0 \cdot y = 0$, takže úloha má nekonečně mnoho řešení, tj. každý vepsaný obdélník má obvod $2p$.

9.10 Obsahy geometrických obrazců

Geometrický obrazec (stručně **obrazec**) je rovinný geometrický útvar ohraničený uzavřenou čarou, která je též částí obrazce.

K *měření geometrických obrazců* se zavádí míra zvaná *obsah geometrického obrazce*:

Zvolí se čtverec o straně jednotkové délky, jemuž se přiřadí **jednotkový obsah** 1 dj^2; tento čtverec se nazývá **jednotkový čtverec**. Libovolnému měřitelnému obrazci O se pak přiřazuje **obsah obrazce** O označovaný S, pro který platí $S = K$ dj^2, kde K je kladná číselná hodnota obsahu obrazce a dj^2 je libovolná jednotka obsahu.

Základní (charakteristické) vlastnosti obsahu obrazce jsou:

1. Každé dva shodné geometrické obrazce mají sobě rovné obsahy.
2. Obsah libovolného geometrického obrazce složeného z několika nepřekrývajících se geometrických obrazců, se rovná součtu obsahů těchto obrazců.

Poznámka. Nejčastěji užívané jednotky obsahu jsou metr čtverečný (m^2), jeho díly: decimetr čtverečný (dm^2), centimetr čtverečný (cm^2), milimetr čtverečný (mm^2) a násobky: kilometr čtverečný (km^2), ar (a) [1 a = 100 m^2], hektar (ha) [1 ha = 100 a].

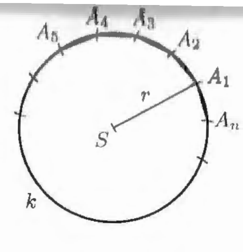
Obvodem obrazce se rozumí délka jeho hranice.

Délkou kružnice neboli **obvodem kruhu** nazýváme limitu posloupnosti (kap. 6.2), jejímiž členy jsou součty délek shodných úseček A_1A_2, A_2A_3, ..., A_nA_1 takových, že krajní body A_1, A_2, ..., A_n leží na kružnici (obr. 9.98).

Označíme-li délku kružnice o, je tedy

$$o = \lim_{n\to\infty} p_n, \quad \text{kde} \quad p_n = |A_1A_2| + |A_2A_3| + \ldots + |A_nA_1| = n \cdot |A_1A_2|$$

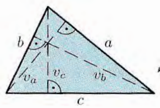
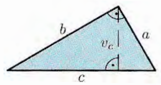
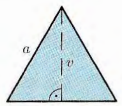
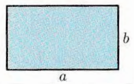
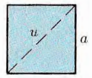
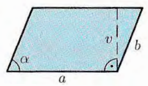
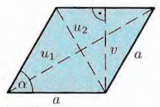
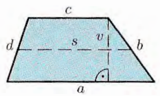
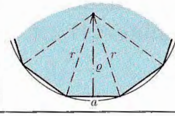
(p_n jsou obvody pravidelných mnohoúhelníků vepsaných kružnici).



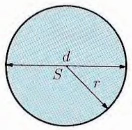
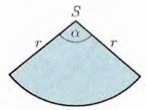
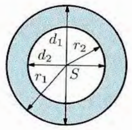
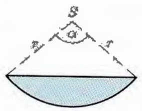
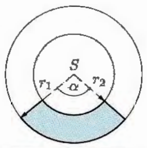
Obr. 9.98

V tabulce 9.9 jsou souhrnně uvedeny vzorce pro výpočet obsahů S některých obrazců. Zároveň jsou zde uvedeny také vzorce pro výpočet jejich obvodů o.

Obsahy a obvody geometrických obrazců Tab. 9.9

Trojúhelník obecný 	$S = \frac{1}{2}a \cdot v_a = \frac{1}{2}b \cdot v_b = \frac{1}{2}c \cdot v_c$ $S = \frac{1}{2}bc \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2}ac \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}ab \cdot \sin\gamma$ (tj. poloviční součin dvou stran a sinu úhlu jimi sevřeného) Heronův vzorec: $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, kde $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ $o = a+b+c$	**Trojúhelník pravoúhlý**  **Trojúhelník rovnostranný** 	$S = \frac{1}{2}ab$ $S = \frac{1}{2}c \cdot v_c$ $o = a+b+c$ $S = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = \frac{1}{2}av$, kde $v = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$ $o = 3a$
Obdélník 	$S = ab$ $o = 2 \cdot (a+b)$	**Čtverec** 	$S = a^2$ $S = \frac{1}{2}u^2$, kde $u = a\sqrt{2}$ $o = 4a$
Kosodélník 	$S = av$ $S = ab \cdot \sin\alpha$ $o = 2 \cdot (a+b)$	**Kosočtverec** 	$S = av$ $S = \frac{1}{2}u_1u_2$ $S = a^2 \cdot \sin\alpha$ $o = 4a$
Lichoběžník 	$S = \frac{a+c}{2} \cdot v = sv$ (tj. střední příčka krát výška), kde $s = \frac{1}{2}(a+c)$ $o = a+b+c+d$	**Pravidelný n-úhelník** 	$S = n \cdot \frac{a}{2} \cdot \varrho = \frac{o\varrho}{2}$ $o = na$

Tab. 9.9

Kruh 	$S = \pi r^2 = \frac{1}{4}\pi d^2$ $o = 2\pi r = \pi d$, kde π je Ludolfovo číslo: $\pi \doteq 3{,}141\ 59 \doteq \frac{22}{7}$	**Kruhová výseč** 	$S = \frac{\pi r^2}{360°}\alpha°$ $S = \frac{1}{2}r^2 \cdot x = \frac{1}{2}ar$, kde $a = \frac{\pi r}{180°}\alpha° = rx$ (délka kruhového oblouku)
Mezikruží 	$S = \pi\left(r_1^2 - r_2^2\right) =$ $= \pi(r_1 + r_2)\cdot(r_1 - r_2) =$ $= \frac{\pi}{4}\left(d_1^2 - d_2^2\right)$	**Kruhová úseč** 	$S = \frac{1}{2}r^2(x - \sin x)$
		Výseč mezikruží 	$S = \frac{\pi}{360°}\left(r_1^2 - r_2^2\right)\cdot\alpha° =$ $= \frac{1}{2}\left(r_1^2 - r_2^2\right)x$
Pro kruhovou výseč, úseč a výseč mezikruží je α velikost středového úhlu ve stupňové míře, x jeho velikost v obloukové míře			

Poznámky.

1. Prostředky, které přesahují rámec středoškolské matematiky, lze dokázat, že není možná tzv. *rektifikace kružnice*, jíž se rozumí určení (sestrojení) úsečky, jejíž délka by byla přesně rovna délce kružnice.
2. Při odvozování vzorců pro obsahy obrazců uvedených v tabulce 9.9 postupujeme zpravidla tak, že na základě definice obsahu obrazce odvodíme obsah obdélníku, odtud pak obsah trojúhelníku, lichoběžníku atd. U kruhu K o poloměru r dokazujeme, že mu lze jednoznačně přiřadit obsah $S = \pi r^2$ této vlastnosti: Pro jakkoli malé kladné číslo ε je možné najít mnohoúhelník kruhu K opsaný o obsahu S_n a mnohoúhelník tomuto kruhu vepsaný o obsahu S_n' tak, že platí

$$|S_n - S| < \varepsilon \text{ a } |S - S_n'| < \varepsilon, \text{ tj. } \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_n' = S.$$

Pro *obsahy podobných mnohoúhelníků* platí *věta:*

Je-li S obsah mnohoúhelníku a S' obsah podobného mnohoúhelníku, pak je $S' = k^2 \cdot S$, kde $k > 0$ je koeficient podobnosti.

Příklady důkazů vzorců pro obsahy geometrických obrazců

1. Dokažte, že pro obsah S každého trojúhelníku ABC, jehož strany mají délky a, b, c a vnitřní úhly velikosti α, β, γ, platí

$$S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ca\sin\beta = \frac{1}{2}ab\sin\gamma.$$

Důkaz

Vyjdeme ze vzorce

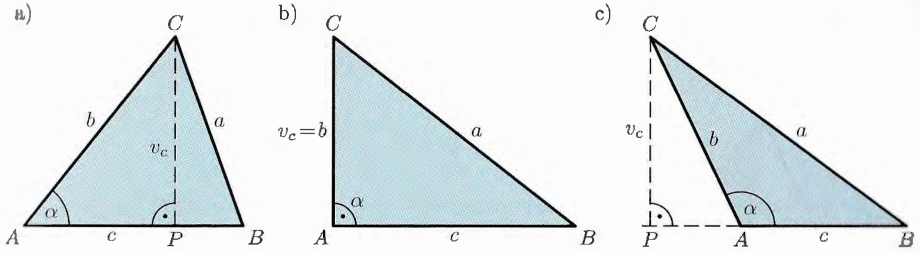
$$S = \frac{1}{2}cv_c \tag{1}$$

pro obsah trojúhelníku ABC.

Je-li $0° < \alpha < 90°$, pak $v_c = b\sin\alpha$ (obr. 9.99a), takže

$$S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha. \tag{2}$$

Je-li $\alpha = 90°$, pak $\sin\alpha = 1$ a $v_c = b$ (obr. 9.99b), takže opět platí pro obsah S vzorec (2). Je-li $90° < \alpha < 180°$, pak $v_c = b\sin(180° - \alpha)$ (obr. 9.99c), avšak $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$, a tedy i v tomto případě platí pro obsah S vzorec (2). Ostatní dokazované vzorce dostaneme ze vzorce (2) cyklickou záměnou prvků.



Obr. 9.99

2. Dokažte Heronův vzorec pro výpočet obsahu S trojúhelníku pomocí délek jeho stran a, b, c:

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

kde $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$.

Důkaz

Vyjdeme ze vzorce (2) pro obsah S trojúhelníku odvozeného v předchozím příkladu. Vyjádříme v něm $\sin\alpha$ podle goniometrického vzorce z kap. 4.5 (str. 180): $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$ a za $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ dosadíme z trigonometrických vzorců z věty V.4 kap. 9.5:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}, \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}, \quad \text{kde } s = \frac{1}{2}(a+b+c).$$

Po provedení těchto úprav dostáváme:

$$S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}bc\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

3. Nechť S je obsah trojúhelníku ABC, jehož strany mají délky a, b, c. Dokažte, že pak pro poloměr r kružnice opsané a poloměr ϱ kružnice vepsané tomuto trojúhelníku platí vzorce

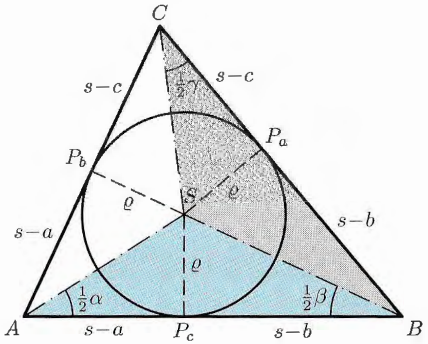
$$r = \frac{abc}{4S}, \quad \varrho = \frac{S}{s}, \quad \text{kde } s = \frac{a+b+c}{2}.$$

Důkaz

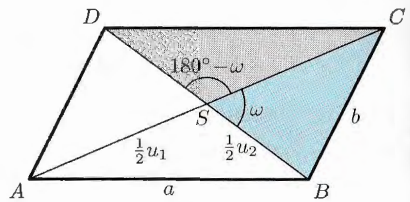
a) První vzorec vyplývá ze vzorce známého z formulace sinové věty (věta V.1 v kap. 9.5): $r = \dfrac{a}{2\sin\alpha}$, kde α je velikost vnitřního úhlu trojúhelníku ABC proti straně délky a. Dosadíme-li za $\sin\alpha$ ze vzorce (2) pro obsah S trojúhelníku ABC z příkladu 1: $S = \dfrac{1}{2}bc\sin\alpha$, dostáváme první dokazovaný vzorec.

b) Druhý vzorec dokážeme takto: Nechť S je střed kružnice vepsané trojúhelníku. Protože trojúhelník ABC se skládá ze tří nepřekrývajících se trojúhelníků ABS, BCS, CAS (obr. 9.100), je jeho obsah S roven součtu obsahů těchto tří trojúhelníků, jež mají vesměs výšku ϱ:

$$S = \frac{1}{2}c\varrho + \frac{1}{2}a\varrho + \frac{1}{2}b\varrho = \frac{1}{2}(a+b+c)\varrho = \varrho s \Rightarrow \varrho = \frac{S}{s}$$



Obr. 9.100



Obr. 9.101

Příklady výpočtu obsahů a obvodů geometrických obrazců

1. Vypočtěte obsah S trojúhelníku ABC, je-li dáno

a) $a = 56{,}28$ dm, $c = 34{,}75$ dm, $\beta = 63°\,24'$,

b) $a = 32{,}5$ cm, $b = 58{,}4$ cm, $c = 72{,}6$ cm.

Řešení

a) Podle vzorce $S = \dfrac{1}{2}ac\cdot\sin\beta$ pro obsah trojúhelníku dostáváme:

$$S = \left(\frac{1}{2}\cdot 56{,}28\cdot 34{,}75\cdot \sin 63°\,24'\right)\ \text{dm}^2 \doteq 874{,}36\ \text{dm}^2.$$

b) Výpočet provedeme užitím Heronova vzorce $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, kde $s = \dfrac{1}{2}(a+b+c)$; dostáváme $S = \sqrt{81{,}75\cdot 49{,}25\cdot 23{,}35\cdot 9{,}15\ \text{cm}^2} \doteq$ $\doteq 927{,}5\ \text{cm}^2$.

2. Vypočtěte obsah rovnoběžníku, jsou-li dány délky jeho stran $a = 25$ cm, $b =$ $= 15$ cm a velikost ostrého úhlu sevřeného jeho úhlopříčkami $\omega = 55°\,30'$ (obr. 9.101).

Řešení

Úhlopříčky o délkách u_1, u_2 dělí rovnoběžník na čtyři trojúhelníky se stejným obsahem: obsah $\triangle BCS$ je

$$S_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{u_1}{2}\cdot\frac{u_2}{2}\cdot\sin\omega = \frac{1}{8}u_1u_2\sin\omega,$$

obsah $\triangle CDS$ je

$$S_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{u_1}{2}\cdot\frac{u_2}{2}\cdot\sin(180° - \omega) = \frac{1}{8}u_1u_2\sin\omega.$$

Podle kosinové věty pro $\triangle BCS$ platí

$$b^2 = \left(\frac{u_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{u_2}{2}\right)^2 - 2\cdot\frac{u_1}{2}\cdot\frac{u_2}{2}\cos\omega \qquad (3)$$

a pro $\triangle CDS$ podle téže věty platí

$$a^2 = \left(\frac{u_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{u_2}{2}\right)^2 + 2\cdot\frac{u_1}{2}\cdot\frac{u_2}{2}\cos\omega, \qquad (4)$$

neboť $\cos(180° - \omega) = -\cos\omega$. Sečtením rovnic (3) a (4) dostáváme

$$\left(\frac{u_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{u_2}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2).$$

Odkud po dosazení do rovnice (4) vychází:

$$\frac{1}{2}u_1u_2\cos\omega = a^2 - \frac{1}{2}(a^2+b^2) \text{ čili } u_1u_2 = \frac{a^2-b^2}{\cos\omega}$$

Obsah S rovnoběžníku lze proto vyjádřit takto:

$$S = 4\cdot\frac{1}{8}u_1u_2\sin\omega = \frac{1}{2}\cdot\frac{a^2-b^2}{\cos\omega}\sin\omega = \frac{1}{2}(a^2-b^2)\cdot\operatorname{tg}\omega$$

a po dosazení číselných hodnot dostáváme:

$$S = \frac{1}{2}(25^2 - 15^2)\ \text{cm}^2\ \operatorname{tg} 55°\,30' \doteq 200\cdot 1{,}455\ \text{cm}^2 = 291\ \text{cm}^2$$

3. Určete trojice přirozených čísel udávajících číselné hodnoty délek stran pravoúhlého trojúhelníku, jehož obvod i obsah mají sobě rovné číselné hodnoty.

Řešení

Označme a, b délky odvěsen a c délku přepony uvažovaného pravoúhlého trojúhelníku, pro který má platit

$$a + b + c = \frac{1}{2}ab \qquad (5)$$

$$a^2 + b^2 = c^2. \qquad (6)$$

vyloučíme-li z rovnic (5) a (6) neznámou c, dostáváme

$$a^2 + b^2 = \left(\frac{1}{2}ab - a - b\right)^2,$$

odkud po umocnění a dalších úpravách

$$a = \frac{4b - 8}{b - 4} = 4 + \frac{8}{b - 4}. \tag{7}$$

Protože a i b mají být přirozená čísla, musí být číslo $b - 4$ dělitelem čísla 8, tj. může být rovno jednomu z čísel 1, 2, 4, 8 čili číslo b nabývá hodnot

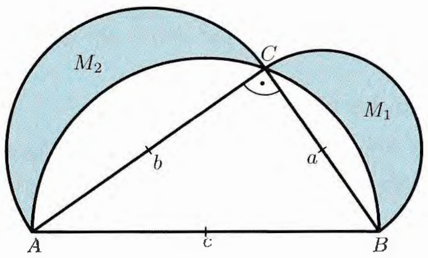
$$b_1 = 5, \quad b_2 = 6, \quad b_3 = 8, \quad b_4 = 12.$$

Příslušné hodnoty čísel a, c jsou podle (7) a (5):

$$a_1 = 12, \quad a_2 = 8, \quad a_3 = 6, \quad a_4 = 5$$
$$c_1 = 13, \quad c_2 = 10, \quad c_3 = 10, \quad c_4 = 13$$

Úloze tedy vyhovují dva pravoúhlé trojúhelníky s číselnými hodnotami délek 5, 12, 13 ($o = 30$, $S = 30$) a 6, 8, 10 ($o = 24$, $S = 24$).

4. Dokažte, že součet obsahů S_1, S_2 tzv. *Hippokratových měsíčků*, tj. obrazců M_1, M_2 (obr. 9.102) omezených oblouky polokružnic, které jsou sestrojeny nad stranami pravoúhlého trojúhelníku ABC v polorovině ABC, je roven obsahu S trojúhelníku ABC.



Obr. 9.102

Řešení

Jak vidíme z obr. 9.102, půlkruhy nad odvěsnami o délkách a, b jsou složeny z vybarvených obrazců M_1, M_2 a z těch částí půlkruhu sestrojeného nad přeponou délky c, jež nepatří vnitřku trojúhelníku ABC. Odtud plyne, že platí

$$S_1 + S_2 = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left[\frac{1}{2}\pi\left(\frac{c}{2}\right)^2 - S\right] =$$
$$= \frac{1}{8}\pi(a^2 + b^2 - c^2) + S = S$$

(neboť podle Pythagorovy věty je $a^2 + b^2 = c^2$).

Příklad užití vzorců pro obsahy obrazců při řešení konstrukční úlohy

Sestrojte trojúhelník ABC, jsou-li dány délky jeho výšek v_a, v_b, v_c.

Řešení

Rozbor: Označíme-li a, b, c délky stran trojúhelníku ABC jimž po řadě příslušejí dané výšky v_a, v_b, v_c, pak jeho obsah S lze vyjádřit vzorci

$$S = \frac{1}{2}av_a, \quad S = \frac{1}{2}bv_b, \quad S = \frac{1}{2}cv_c. \tag{8}$$

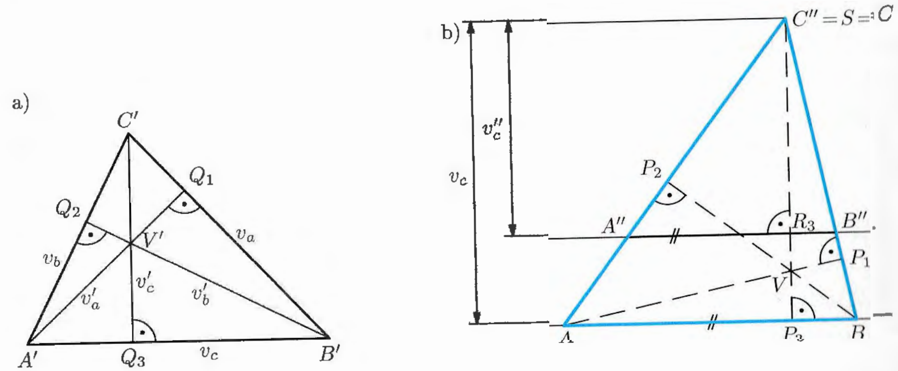
Sestrojíme-li trojúhelník $A'B'C'$ se stranami o délkách $a' = v_a$, $b' = v_b$, $c' = v_c$ a označíme-li délky jeho výšek v'_a, v'_b, v'_c (obr. 9.103a), pak pro jeho obsah platí:

$$S' = \frac{1}{2}v_a v'_a, \quad S' = \frac{1}{2}v_b v'_b, \quad S' = \frac{1}{2}v_c v'_c. \tag{9}$$

Z rovnic (8) a (9) plyne, že

$$v'_a = \frac{S'}{S}a, \quad v'_b = \frac{S'}{S}b, \quad v'_c = \frac{S'}{S}c, \tag{10}$$

a proto sestrojíme-li trojúhelník $A''B''C''$ se stranami o délkách $a'' = v'_a$, $b'' = v'_b$, $c'' = v'_c$, pak $\triangle A''B''C'' \sim \triangle ABC$ (s koeficientem podobnosti $k = \frac{S'}{S}$). Speciálně může být $\triangle A''B''C''$ stejnolehlý s $\triangle ABC$, např. podle středu $S = C = C''$ (obr. 9.103b).



Obr. 9.103

Konstrukce (obr. 9.103a, b):

K_1: Sestrojíme $\triangle A'B'C'$, jehož strany mají délky $|B'C'| = v_a$, $|C'A'| = v_b$, $|A'B'| = v_c$ (obr. 9.103a).
K_2: V $\triangle A'B'C'$ sestrojíme výšky $A'Q_1$, $B'Q_2$, $C'Q_3$, jejichž délky označíme $|A'Q_1| = v'_a$, $|B'Q_2| = v'_b$, $|C'Q_3| = v'_c$.
K_3: Sestrojíme $\triangle A''B''C''$ se stranami o délkách $|B''C''| = v'_a$, $|C''A''| = v'_b$, $|A''B''| = v'_c$ (obr. 9.103b).
K_4: V $\triangle A''B''C''$ sestrojíme výšku $C''R_3$ příslušnou ke straně $A''B''$.
K_5: Na polopřímce $C''R_3$ sestrojíme úsečku $C''P_3$ délky $|C''P_3| = v_c$.
K_6: Bodem P_3 vedeme rovnoběžku p s přímkou $A''B''$.
K_7: Určíme průsečíky A, B přímky p s polopřímkami $C''A''$ a $C''B''$.
K_8: Ze získaných vrcholů A, B, $C = C''$ sestrojíme hledaný $\triangle ABC$.

Zkouška: Sestrojený trojúhelník ABC má výšku CP_3 o délce $|CP_3| = v_c$ a je stejnolehlý s trojúhelníkem $A''B''C''$ podle středu $S = C'' = C$. Odtud na základě obrácení rozboru plyne, že zbývající dvě výšky AP_1, BP_2 trojúhelníku ABC mají délky $|AP_1| = v_a$, $|BP_2| = v_b$.

Diskuse: Úloha je jednoznačně řešitelná právě tehdy, když dané délky výšek v_a, v_b, v_c trojúhelníku ABC splňují trojúhelníkové nerovnosti.

9.11 Základní pojmy a věty stereometrie

V kap. 9.1 jsme uvedli, že **základní geometrické pojmy** jsou **bod**, **přímka** a **rovina**, popsali jsme jejich označování písmeny a připomněli jsme, že každá přímka a každá rovina obsahuje nekonečně mnoho bodů, jsou to tedy příklady nekonečných bodových množin.

Dále jsme se však zabývali jen **rovinnými geometrickými útvary**, tj. geometrickými útvary, které jsou částí roviny. Nyní se budeme zabývat **prostorovými geometrickými útvary**, tj. geometrickými útvary, které nelze umístit do roviny.

Pojmy **incidence** bodů, přímek a rovin jsme vyložili v kap. 9.1. V prostoru pro ně platí tyto jednoduché *základní věty* (jejichž platnost je zřejmá z názoru):

Základní věty o incidenci bodů, přímek a rovin v prostoru

V.1. Dvěma různými body A, B prochází právě jedna přímka p. Říkáme, že **přímka** p je **určena** body A, B, a píšeme $p = \leftrightarrow AB$ nebo $p = \leftrightarrow BA$.

V.2. Leží-li dva různé body A, B v rovině ϱ, leží i přímka jimi určená v rovině ϱ $(A \in \varrho \wedge B \in \varrho \Rightarrow \leftrightarrow AB \subset \varrho)$.

V.3. Danou přímkou p a daným bodem X ležícím mimo ni prochází právě jedna rovina ϱ.

V.4. Třemi danými body A, B, C, které neleží v přímce, prochází právě jedna rovina ϱ.

V.5. Dvěma různými přímkami p, q, které mají společný bod, prochází právě jedna rovina ϱ.

V případech uvedených ve větách 3, 4 a 5 říkáme, že **rovina** ϱ je **určena** danými body či přímkami, a píšeme $\varrho = \leftrightarrow pX$, $\varrho = \leftrightarrow ABC$, $\varrho = \leftrightarrow pq$.

V.6. Procházejí-li dvě různé roviny ϱ, σ týmž bodem A, obsahují právě jednu přímku p, která prochází bodem A. Mimo tuto přímku p nemají už žádný společný bod.

Vzájemná poloha přímek a rovin

Z kap. 9.1 víme, že každé dvě přímky v rovině jsou buď různoběžky, nebo rovnoběžky. V prostoru jsou tři možnosti *vzájemné polohy dvojice přímek*: Dvě různé přímky p, q, které mají právě jeden společný bod P, leží (podle věty V.5) v téže rovině; takové přímky se nazývají **různoběžné přímky** (**různoběžky**). Bodu P se říká **průsečík různoběžek**; píšeme $p \cap q = \{P\}$. Dvě různé přímky

p, q v prostoru, které leží v jedné rovině a nemají žádný společný bod, se nazývají **rovnoběžné přímky** (**rovnoběžky**). Je účelné pokládat též v prostoru dvě **splývající** (**totožné**) **přímky** p, q $(p = q)$ za rovnoběžky. Jsou-li p, q rovnoběžky, píšeme $p \parallel q$. Z věty V.4 plyne, že dvěma různými rovnoběžkami p, q prochází právě jedna rovina ϱ; je jimi tedy určena $(\varrho = \leftrightarrow pq)$. Dvě různé přímky p, q v prostoru, které nemají žádný společný bod a neleží v jedné rovině, se nazývají **mimoběžné přímky** (**mimoběžky**). Zápisem $p \nparallel q$ pro přímky p, q v prostoru se rozumí, že nejsou rovnoběžné, tj. jsou buď různoběžné, nebo mimoběžné. Přehledně uvádíme klasifikaci vzájemné polohy dvou přímek v prostoru v tabulce 9.10. Obdobně jako v planimetrii (viz str. 423) se zavádí i ve stereometrii pojem **příčka dvou přímek** p, q (i pro mimoběžky).

Vzájemná poloha dvou přímek v prostoru Tab. 9.10

přímky p, q

- leží v jedné rovině
  - mají společný právě jeden bod $(p \cap q = \{P\})$ — p, q jsou různoběžky
  - nemají žádný společný bod $(p \cap q = \emptyset)$, nebo splývají $(p = q)$ — p, q jsou rovnoběžky
- neleží v jedné rovině, přičemž nemají žádný společný bod — p, q jsou mimoběžky

Vzájemná poloha přímky a roviny může být dvojí: Neleží-li přímka p v rovině ϱ, má s ní (jak plyne z věty 2) společný nejvýše jeden bod. Jestliže má přímka p s rovinou ϱ společný právě jeden bod P, říkáme, že **přímka** p je **různoběžná s rovinou** ϱ. Bod P se pak nazývá **průsečík přímky** p **s rovinou** ϱ; píšeme $p \cap \varrho = \{P\}$. Nemá-li přímka p s rovinou ϱ žádný společný bod $(p \cap q = \emptyset)$ nebo leží-li v rovině ϱ $(p \subset \varrho)$, říkáme, že **přímka** p je **rovnoběžná s rovinou** ϱ; píšeme $p \parallel \varrho$. Zápisem $p \nparallel \varrho$ se rozumí, že přímka p není rovnoběžná s rovinou ϱ, tj. je s ní různoběžná. Klasifikace vzájemné polohy přímky a roviny je přehledně shrnuta v tabulce 9.11.

Vzájemná poloha přímky a roviny Tab. 9.11

přímka p, rovina ϱ

- mají společný právě jeden bod — p je různoběžná s ϱ
- nemají žádný společný bod $(p \cap \varrho = \emptyset)$ nebo každý bod přímky p je bodem roviny ϱ $(p \subset \varrho)$ — p je rovnoběžná s ϱ

Pro *vzájemnou polohu dvojice rovin* jsou tyto možnosti: Dvě různoběžné roviny ϱ, σ, které mají společnou právě jednu přímku p (a podle věty V.6 kromě ní nemají žádné další společné body), se nazývají **různoběžné roviny**. Přímku p nazýváme **průsečnicí rovin** ϱ, σ a píšeme $\varrho \cap \sigma = p$. Dvě různé roviny ϱ, σ, které nemají žádný společný bod, se nazývají **rovnoběžné roviny**. Je účelné pokládat také dvě splývající roviny ϱ, σ ($\varrho = \sigma$) za rovnoběžné roviny. Jsou-li ϱ, σ rovnoběžné roviny, píšeme $\varrho \parallel \sigma$. Zápisem $\varrho \nparallel \sigma$ se rozumí, že roviny ϱ, σ jsou různoběžné. Klasifikaci vzájemné polohy dvou rovin shrnujeme přehledně v tabulce 9.12.

Vzájemná poloha dvou rovin Tab. 9.12

roviny ϱ, σ	
průnikem je přímka ($\varrho \cap \sigma = p$) ϱ, σ jsou různoběžné	průnik je prázdný ($\varrho \cap \sigma = \emptyset$) nebo obě roviny splývají ($\varrho = \sigma$) ϱ, σ jsou rovnoběžné

V.7. Věta o vzájemné poloze tří různých rovin
Pro vzájemnou polohu libovolných tří různých rovin nastává vždy právě jedna z těchto pěti možností:

a) Každé dvě z daných rovin jsou rovnoběžné (obr. 9.104a).

b) Dvě z daných rovin jsou rovnoběžné, třetí je s nimi různoběžná a protíná je v rovnoběžných průsečnicích (obr. 9.104b).

c) Každé dvě z daných rovin jsou různoběžné a všechny tři průsečnice jsou navzájem rovnoběžné a různé (obr. 9.104c).

d) Každé dvě z daných rovin jsou různoběžné a všechny tři průsečnice splývají v jedinou přímku (obr. 9.104d).

e) Každé dvě z daných rovin jsou různoběžné, všechny tři průsečnice jsou různoběžné a procházejí jediným společným bodem všech tří rovin (obr. 9.104e).

Věty o rovnoběžnosti přímek a rovin

V.8. Daným bodem P prochází právě jedna rovina ϱ rovnoběžná s danou rovinou ϱ.

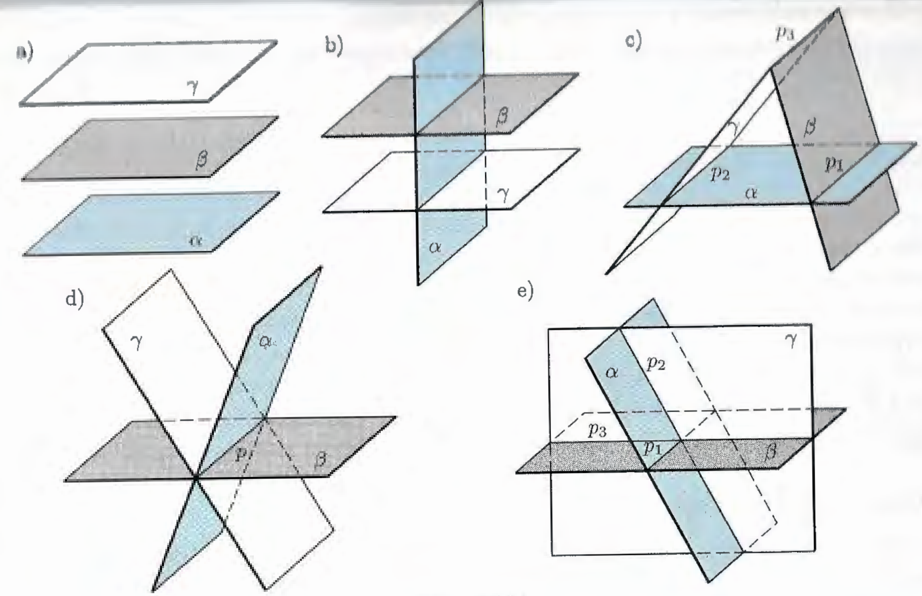
V.9. Pro každé tři přímky p, q, r a každé tři roviny ϱ, σ, τ platí:

a) Je-li $p \parallel q$, $q \parallel r$, pak je také $p \parallel r$.

b) Je-li $p \parallel q$, $p \parallel \varrho$, pak je také $q \parallel \varrho$.

c) Je-li $\varrho \parallel \sigma$, $\sigma \parallel \tau$, pak je také $\varrho \parallel \tau$.

d) Je-li $\varrho \parallel \sigma$, $p \parallel \varrho$, pak je také $p \parallel \sigma$.



Obr. 9.104

V.10. Kritérium rovnoběžnosti přímky a roviny
Je-li přímka p rovnoběžná s některou přímkou q roviny ϱ, pak je rovnoběžná s rovinou ϱ.

V.11. Kritérium rovnoběžnosti dvou rovin
Obsahuje-li rovina ϱ dvě různoběžky p, q, z nichž každá je rovnoběžná s rovinou σ, pak roviny ϱ, σ jsou rovnoběžné.

V.12. a) Nechť daná přímka p je rovnoběžná s danou rovinou ϱ. Potom každá rovina, která prochází přímkou p a je různoběžná s rovinou ϱ, protíná tuto rovinu v přímce q rovnoběžné s přímkou p.

b) Nechť přímka p je rovnoběžná s každou ze dvou různoběžných rovin ϱ, σ. Potom je přímka p rovnoběžná s průsečnicí q rovin ϱ, σ.

Poloprostor, vrstva

Libovolná rovina ϱ rozděluje prostor na dvě části, z nichž každá včetně roviny ϱ se nazývá **poloprostor**.

Rovině ϱ se říká **hraniční rovina poloprostoru**. Každý vnitřní bod X poloprostoru, který neleží v jeho hraniční rovině, se nazývá **vnitřní bod poloprostoru**. Množina všech vnitřních bodů poloprostoru se nazývá **vnitřek poloprostoru**. Poloprostor určený hraniční rovinou ϱ a vnitřním bodem X se značí: ϱX nebo $\mapsto \varrho X$. Poloprostory ϱA, ϱB ($A \neq B$) se nazývají **opačné poloprostory**, jestliže rovina ϱ protíná úsečku AB v jejím vnitřním bodě; říkáme pak, že **rovina ϱ odděluje body** A, B. **Poloprostory** ϱA, ϱB **splývají** (**jsou totožné**), jestliže buď $A = B$, anebo $A \neq B$ a rovina ϱ neprotíná úsečku AB; říkáme pak, že **rovina ϱ neodděluje body** A, B.

... o poloprostoru uvedeme dvě:

> Je-li přímka p rovnoběžná s rovinou ϱ, ale neleží v ní, pak všechny body přímky p náleží vnitřku téhož poloprostoru, jehož hraniční rovinou je rovina ϱ.
> Je-li rovina τ rovnoběžná s rovinou ϱ, ale $\tau \neq \varrho$, pak všechny body roviny τ náleží vnitřku téhož poloprostoru s hraniční rovinou ϱ.

Nechť ϱ, σ jsou dvě různé rovnoběžné roviny; libovolný bod roviny ϱ označme P a libovolný bod roviny σ označme Q. Potom průnik poloprostorů ϱQ, σP se nazývá **vrstva** s hraničními rovinami ϱ, σ. Libovolný bod vrstvy, který neleží v hraničních rovinách ϱ, σ, se nazývá **vnitřní bod vrstvy**; množina všech takových bodů se nazývá **vnitřek vrstvy**.

Pojem **konvexního útvaru** je v prostoru definován stejně jako v rovině (viz str. 418). *Příklady* konvexních prostorových útvarů jsou rovina, poloprostor, vrstva a jejich vnitřky.

Volné rovnoběžné promítání

Při řešení stereometrických úloh je možné pro názornost použít trojrozměrné modely prostorových útvarů, avšak prakticky je to obtížné. Řešení těchto úloh si proto usnadňujeme pomocí zobrazování prostorových útvarů do roviny. Systematicky se těmito zobrazovacími metodami zabývá samostatná disciplína nazývaná *deskriptivní geometrie*. Ve stereometrii se pro řešení jednodušších prostorových úloh (zejména polohových) používá tzv. *volné rovnoběžné promítání*, které je jednoduché a názorné; stručně ho nyní vysvětlíme.

Rovnoběžné promítání je určeno danou rovinou π zvanou **průmětna** a danou přímkou s, jež je s průmětnou π různoběžná. Množina všech rovnoběžek s přímkou s, zvaných **promítací přímky**, určuje **směr rovnoběžného promítání**. Libovolný bod X prostoru lze promítnout do průmětny π takto: Bodem X vedeme promítací přímku (tj. rovnoběžku s přímkou s) a určíme její průsečík X' s průmětnou π, jemuž se říká **průmět bodu** X. Množina průmětů všech bodů daného útvaru U se nazývá **průmět útvaru** U a značí se U′.

Při konstrukci průmětů prostorových útvarů v rovnoběžném promítání do průmětny π, za kterou obvykle volíme nákresnu, využíváme těchto *základních vlastností rovnoběžného promítání*:

1. Průmětem libovolné přímky je buď přímka, nebo bod.
2. Průměty libovolných dvou různých rovnoběžek jsou buď rovnoběžky (jež mohou případně splynout), nebo dva různé body.
3. Jestliže průměty rovnoběžek p, q jsou přímky, potom průměty úseček AB, CD, které leží po řadě na přímkách p, q, jsou úsečky $A'B'$, $C'D'$, pro něž platí

$$|A'B'| : |C'D'| = |AB| : |CD|.$$

(Tato vlastnost platí i tehdy, když úsečky AB, CD leží na jedné přímce p.)

4. Průmětem každého geometrického útvaru U, který leží v rovině rovnoběžné s průmětnou (tzv. **průčelné rovině**), je útvar U′ shodný s útvarem U.

Poznámky.

1. Geometrický útvar, který neleží v průčelné rovině, se rovnoběžným promítáním zpravidla zkresluje. Tak. *např.* průmětem roviny ϱ rovnoběžné s promítacími přímkami (směrem promítání) je přímka, takže potom průmětem libovolného konvexního n-úhelníku

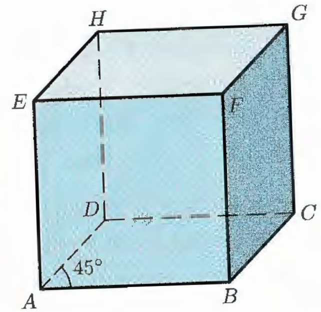
ležícího v rovině ϱ je úsečka. Jsou-li promítací přímky (směr promítání) ... s rovinou ϱ, je průmětem libovolného konvexního n-úhelníku $A_1A_2 \dots A_n$ ležícího v rovině ϱ opět konvexní n-úhelník $A_1'A_2' \dots A_n'$, který však zpravidla není s n-úhelníkem $A_1A_2 \dots A_n$ shodný.
2. Z uvedené třetí vlastnosti rovnoběžného promítání plyne tento *důsledek*: Je-li průmětem úsečky AB úsečka $A'B'$, je průmětem středu S úsečky AB střed S' úsečky $A'B'$. Příklad použití: Nechť rovnoběžným průmětem trojúhelníku ABC je trojúhelník $A'B'C'$. Pak podle uvedeného důsledku je průmětem každé těžnice trojúhelníku ABC těžnice trojúhelníku $A'B'C'$, a proto průmětem těžiště T daného trojúhelníku ABC je těžiště T' trojúhelníku $A'B'C'$.

Rovnoběžné promítání, u něhož nezadáváme obrazy průmětů os souřadnicové soustavy, se nazývá **volné rovnoběžné promítání** (krátce **volné promítání**). Podle uvedených čtyř vlastností rovnoběžného promítání můžeme ve volném rovnoběžném promítání kreslit přímo názorné obrázky jednoduchých těles, zejména krychle, kvádru, hranolu a jehlanu. Přitom pro obraz $A'B'$ každé úsečky AB, která je kolmá k průčelným rovinám, platí

$$\frac{|A'B'|}{|AB|} = q \leqq 1; \quad \text{obvykle se volí } q = \frac{1}{2}.$$

Příklad zobrazení tělesa ve volném rovnoběžném promítání

Krychli $ABCDEFGH$ ve volném rovnoběžném promítání zpravidla zobrazujeme tak, že stěny $ABFE$ a $DCGH$ leží v průčelných rovinách (obr. 9.105) a platí $|A'B'| = |AB|$, $|B'C'| = \frac{1}{2}|BC|$, $|\sphericalangle B'A'D'| = 45°$, $|\sphericalangle A'D'C'| = 135°$.



Obr. 9.105

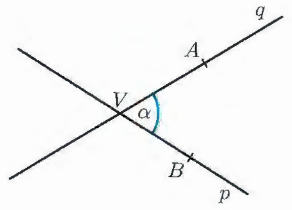
Poznámka. Na obrázcích těles ve volném rovnoběžném promítání se pro zjednodušení běžně označují obrazy bodů a přímek stejně jako body, resp. přímky samotné (tj. A místo A' atd.).

Ve volném rovnoběžném promítání řešíme úlohy o vzájemné poloze bodů, přímek a rovin, které určujeme pomocí zobrazených těles. Při řešení úloh o rovnoběžných rovinách užíváme tohoto *důsledku věty V.7 o vzájemné poloze tří různých rovin*:

> Jestliže je rovina různoběžná se dvěma rovnoběžnými rovinami, potom protíná tyto roviny v rovnoběžných přímkách (obr. 9.104b).

Odchylky přímek p, q v prostoru, kolmost přímek

V planimetrii jsme v kap. 9.2 definovali pojem **odchylky dvou přímek p, q pro různoběžky a pro rovnoběžky**. *Např.* pro různoběžky p, q znázorněné na obr. 9.106 je jejich odchylka $\alpha = |\sphericalangle p, q| = |\sphericalangle AVB|$ a pro rovnoběžky p, q je $\alpha = |\sphericalangle p, q| = 0°$. Ve stereometrii *rozšíříme pojem odchylky i pro mimoběžky.*



Obr. 9.106

Při definování odchylky přímek v prostoru se vychází z následujících dvou stereometrických *vět:*

V.1. Každým bodem v prostoru lze vést právě jednu rovnoběžku s danou přímkou.

V.2. Nechť p_1, q_1 jsou různoběžky a p_2, q_2 jsou rovněž různoběžky takové, že $p_1 \parallel p_2$, $q_1 \parallel q_2$. Pak pro odchylky $|\sphericalangle p_1, q_1|$, $|\sphericalangle p_2, q_2|$ platí $|\sphericalangle p_1, q_1| = |\sphericalangle p_2, q_2|$.

Odchylkou mimoběžných přímek p, q nazýváme odchylku různoběžných přímek p', q' vedených libovolným bodem prostoru tak, že $p' \parallel p$, $q' \parallel q$. Píšeme $\alpha = |\sphericalangle p, q| = |\sphericalangle p', q'|$, přičemž $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$, resp. $\alpha \in (0°, 90°\rangle$.

Poznámka. V důsledku uvedených vět V.1, V.2 odchylka mimoběžek nezávisí na volbě zmíněného bodu. Často se tento bod volí na jedné z mimoběžek.

Přímky p, q nazýváme **k sobě kolmými (navzájem kolmými) přímkami,** právě když pro jejich odchylku platí $|\sphericalangle p, q| = 90°$. Píšeme pak $p \perp q$, popř. $q \perp p$.

Poznámka. Touto definicí je rozšířen pojem kolmosti přímek i na mimoběžky. Obdobně jako v rovině také v prostoru se mluví o tom, že dvě **úsečky** jsou **navzájem kolmé**, právě když leží na navzájem kolmých přímkách.

Kolmost přímky a roviny

O **přímce** p a **rovině** ϱ říkáme, že jsou **navzájem kolmé (k sobě kolmé)**, jestliže přímka p je kolmá ke každé přímce roviny ϱ. Také říkáme, že **přímka p je kolmá (je kolmicí) k rovině** ϱ nebo že **rovina ϱ je kolmá k přímce** p; píšeme $p \perp \varrho$ nebo $\varrho \perp p$. Průsečík P přímky $p \perp \varrho$ s rovinou ϱ se nazývá **pata kolmice** p.

O **polopřímce** AB nebo **úsečce** AB říkáme, že je **kolmá k rovině** ϱ, právě když přímka AB je kolmá k rovině ϱ.

O kolmosti přímek a rovin platí *věty:*

V.3. *Kritérium kolmosti přímky a roviny*
Je-li přímka p kolmá ke dvěma různoběžným přímkám a, b roviny ϱ, pak je kolmá k této rovině.

V.4. Daným bodem lze vést k dané rovině právě jednu kolmici.

V.5. Všechny kolmice k téže rovině jsou navzájem rovnoběžné.

V.6. Daným bodem lze k dané přímce vést právě jednu kolmou rovinu.

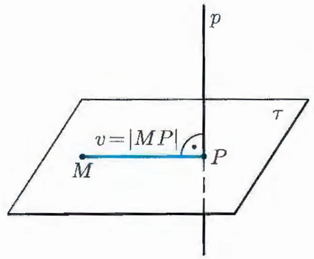
V.7. Všechny roviny kolmé k téže přímce jsou navzájem rovnoběžné.

Rovina ϱ, která prochází středem dané úsečky AB a je kolmá k přímce AB, se nazývá **rovina souměrnosti úsečky** AB.

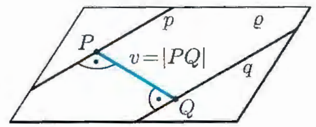
Vzdálenosti bodů, přímek a rovin

Vzdálenost dvou bodů M, N v prostoru je délka úsečky MN; značí se $v(M, N) = |MN|$.

Vzdálenost bodu M od přímky p v prostoru lze definovat jako vzdálenost bodu M od bodu P, který je průsečíkem přímky p a k ní kolmé roviny τ vedené bodem M (obr. 9.107). Značí se v, resp. $v(M, p)$; $v = |MP|$. Můžeme ji též vypočítat jako vzdálenost bodu M od přímky p v rovině jimi určené.



Obr. 9.107



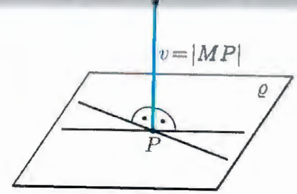
Obr. 9.108

Vzdálenost dvou rovnoběžek p, q v prostoru je rovna jejich vzdálenosti v rovině ϱ jimi určené (obr. 9.108). Značí se, jak víme z kap. 9.2, v, resp. $v(p, q)$; $v = |PQ|$.

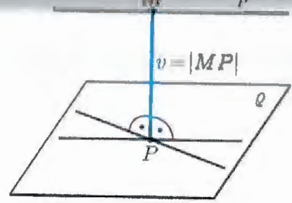
Vzdáleností dvou mimoběžek p, q se rozumí délka úsečky PQ, kde P, Q jsou po řadě průsečíky mimoběžek p, q s takovou příčkou mimoběžek (tj. přímkou, jež obě mimoběžky protíná), která je k oběma z nich kolmá. Značí se opět v, resp. $v(p, q)$; $v = |PQ|$.

Vzdáleností bodu M od roviny ϱ nazýváme vzdálenost bodu M od paty P kolmice vedené bodem M k rovině ϱ (obr. 9.109). Značí se v, resp. $v(M, \varrho)$; $v = |MP|$.

Vzdáleností přímky p od roviny ϱ s ní rovnoběžné rozumíme vzdálenost libovolného bodu M přímky p od roviny ϱ (obr. 9.110). Značí se v, resp. $v(p, \varrho)$ nebo $v = |MP|$, kde P je pata kolmice vedené bodem M k rovině ϱ.

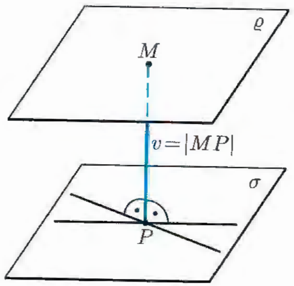


Obr. 9.109

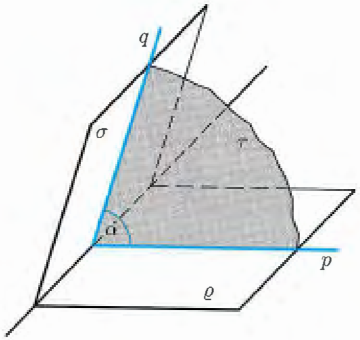


Obr. 9.110

Vzdáleností dvou rovnoběžných rovin ϱ, σ rozumíme vzdálenost libovolného bodu jedné roviny od druhé roviny, např. bodu M roviny ϱ od roviny σ (obr. 9.111). Pro vrstvu s hraničními rovinami ϱ, σ se tato vzdálenost nazývá **výška vrstvy** (též **šířka** nebo **tloušťka vrstvy**).



Obr. 9.111



Obr. 9.112

Odchylka dvou rovin

Tento pojem lze *definovat* pomocí odchylky dvou přímek takto:

Odchylka α **dvou rovin** ϱ, σ je rovna odchylce průsečnic p, q těchto rovin s libovolnou rovinou τ kolmou k oběma rovinám ϱ, σ (obr. 9.112). Značíme ji $\alpha = |\sphericalangle\, \varrho, \sigma|$. Podle definice je $\alpha = |\sphericalangle\, \varrho, \sigma| = |\sphericalangle\, p, q|$; $\alpha \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$, resp. $\alpha \in \langle 0^\circ, 90^\circ \rangle$.

Rovnoběžné roviny ϱ, σ mají odchylku $\alpha = 0^\circ$. Odchylka různoběžných rovin ϱ, σ je rovna odchylce přímek $p \in \varrho$, $q \in \sigma$ kolmých k průsečnici rovin ϱ, σ.

Jiný způsob určení odchylky rovin ukazuje *věta:*

V.8. Odchylka dvou rovin ϱ, σ je rovna odchylce přímek k_1, k_2 z nichž jedna je kolmá k rovině ϱ a druhá k rovině σ.

Kolmost dvou rovin

Roviny ϱ, σ se nazývají **roviny k sobě (navzájem) kolmé**, právě když jejich odchylka je $\alpha = |\sphericalangle\, \varrho, \sigma| = 90^\circ$. Také říkáme, že **rovina** ϱ **je kolmá k rovině** σ nebo že **rovina** σ **je kolmá k rovině** ϱ, a píšeme $\varrho \perp \sigma$ nebo $\sigma \perp \varrho$.

O kolmosti dvou rovin platí *věty:*

V.9. *Kritérium kolmosti dvou rovin*
Roviny ϱ, σ jsou k sobě kolmé, jestliže jedna z nich je kolmá k některé přímce druhé roviny. Platí i věta obrácená.

V.10. Jestliže dvě různoběžné roviny ϱ, σ jsou kolmé k rovině τ, pak průsečnice rovin ϱ, σ je kolmá k rovině τ.

V.11. Nechť roviny ϱ, σ jsou navzájem kolmé; jestliže přímka k leží v rovině ϱ a je kolmá k průsečnici rovin ϱ, σ, pak je kolmá k rovině σ.

Následující *věty* vyjadřují vztah mezi kolmostí a rovnoběžností přímek a rovin:

V.12. Jestliže přímka p a rovina ϱ jsou kolmé k rovině σ, pak jsou navzájem rovnoběžné.

V.13. Jestliže přímka p a rovina ϱ mají společný bod a jsou kolmé k rovině σ, pak přímka p leží v rovině ϱ.

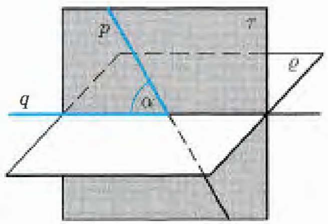
V.14. Jestliže rovina ϱ je rovnoběžná s přímkou p kolmou k rovině σ, pak jsou roviny ϱ, σ navzájem kolmé.

Pravoúhlé promítání

Jsou-li promítací přímky rovnoběžného promítání (kap. 9.11) speciálně kolmé k průmětně ϱ, pak se toto rovnoběžné promítání nazývá **pravoúhlé promítání** do roviny ϱ. **Pravoúhlým průmětem bodu** X do roviny ϱ je pata kolmice vedené bodem X k rovině ϱ. Množina pravoúhlých průmětů všech bodů útvaru U je **pravoúhlý průmět útvaru** U. Snadno se dokáže, že pravoúhlým průmětem přímky p do roviny ϱ, která k ní není kolmá, je přímka q a pravoúhlým průmětem přímky p do roviny ϱ k ní kolmé je bod.

Odchylka přímky a roviny

Odchylkou přímky p **a roviny** ϱ nazýváme odchylku přímky p a jejího pravoúhlého průmětu do roviny ϱ, tj. přímky q, která je průsečnicí roviny ϱ s rovinou τ, která prochází přímkou p a je kolmá k rovině ϱ (obr. 9.113). Značí se $\alpha = |\sphericalangle\, p, \varrho| = |\sphericalangle\, p, q|$.



Obr. 9.113

Jestliže přímka p není kolmá k rovině ϱ, potom přímka q z definice odchylky přímky a roviny je určena jednoznačně; je to pravoúhlý průmět přímky p do roviny ϱ. Přitom $\alpha = |\sphericalangle p, \varrho| = 0$, právě když $p \parallel \varrho$. Jestliže je $p \perp \varrho$, pak přímka q sice není určena jednoznačně, avšak vždy dostáváme $\alpha = |\sphericalangle p, \varrho| = |\sphericalangle p, q| = 90°$.

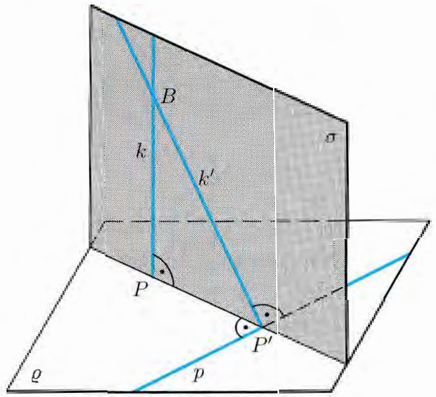
Poznámka. Mluví se též **o odchylce úsečky a roviny**, jíž se rozumí odchylka přímky obsahující tuto úsečku a dané roviny.

Příklady na metrické vlastnosti v prostoru

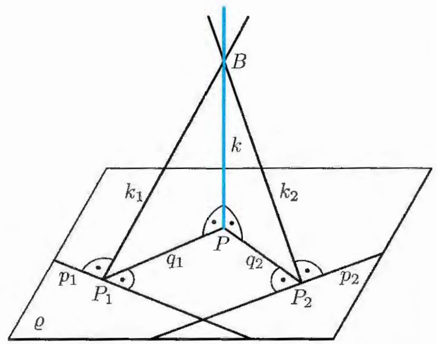
1. Dokažte tzv. *větu o třech kolmicích*: Je-li (obr. 9.114) P pata kolmice k vedené bodem B k rovině ϱ ($B \notin \varrho$) a P' pata kolmice k' vedené bodem B k libovolné přímce p roviny ϱ, která bodem P neprochází, je přímka PP' kolmá k přímce p.

   Důkaz

   Podle předpokladů věty je jednak $k \perp \varrho$, a tedy též $k \perp p$, jednak $k' \perp p$. Podle kritéria kolmosti přímky a roviny je proto $p \perp \sigma$, kde σ je rovina určená různoběžkami k, k'. Na základě definice kolmosti přímky a roviny jsou pak všechny přímky roviny σ kolmé k přímce p, a tedy též přímka PP' je kolmá k přímce p.



Obr. 9.114



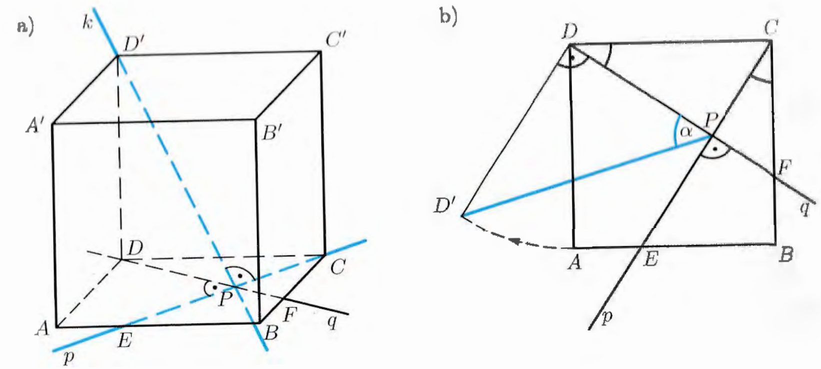
Obr. 9.115

Poznámka. Na základě věty dokázané v příkladu 1 lze vést daným bodem B kolmici k dané rovině ϱ takto (obr. 9.115): V rovině ϱ zvolíme dvě různoběžné přímky p_1, p_2 a k nim sestrojíme v rovinách Bp_1, Bp_2 bodem B kolmice k_1, k_2 s patami P_1, P_2. V rovině ϱ vedeme pak patou P_1 kolmici q_1 k přímce p_1 a patou P_2 kolmici q_2 k přímce p_2. Podle věty o třech kolmicích pak je průsečík P přímek q_1, q_2 patou kolmice k vedené bodem B k rovině ϱ.

2. Nechť je dána krychle $ABCDA'B'C'D'$ a vnitřní bod E hrany AB, $|BE| = 2|AE|$. Přímku CE označme p a vrcholem D' veďme přímku $k \perp p$, která protíná přímku p v bodě P. a) Zobrazte danou krychli a přímky p, k ve volném rovnoběžném promítání. b) Určete konstrukčně vzdálenost bodů P, D' a odchylku α přímky k od roviny stěny $ABCD$.

   Řešení

   a) Krychle $ABCDA'B'C'D'$ je zobrazena ve volném promítání v obr. 9.116a. Bod P určíme podle věty o třech kolmicích, tj. jako průsečík přímky p s přímkou $q \perp p$ vedenou bodem D. Označme F průsečík přímky $q = \leftrightarrow DP$ s přímkou BC. Polohu bodu F stanovíme podle obr. 9.116b, kde je sestrojen čtverec $ABCD$ shodný s podstavou dané krychle. Ostré úhly BCE a CDF jsou zřejmě shodné, a proto je $\triangle BCE \cong \triangle CDF$, takže $|CF| = |BE|$. Bod F je tedy takovým vnitřním bodem strany BC, že platí $|CF| = 2|BF|$.



Obr. 9.116

   b) V obr. 9.116 sestrojíme ve sklopené poloze pravoúhlý $\triangle PDD'$ s odvěsnou DD' rovnou hraně dané krychle. V něm $|PD'|$ je hledaná vzdálenost bodů P, D' a $|\sphericalangle DPD'|$ je hledaná odchylka α přímky $k = \leftrightarrow D'P$ od roviny stěny $ABCD$.

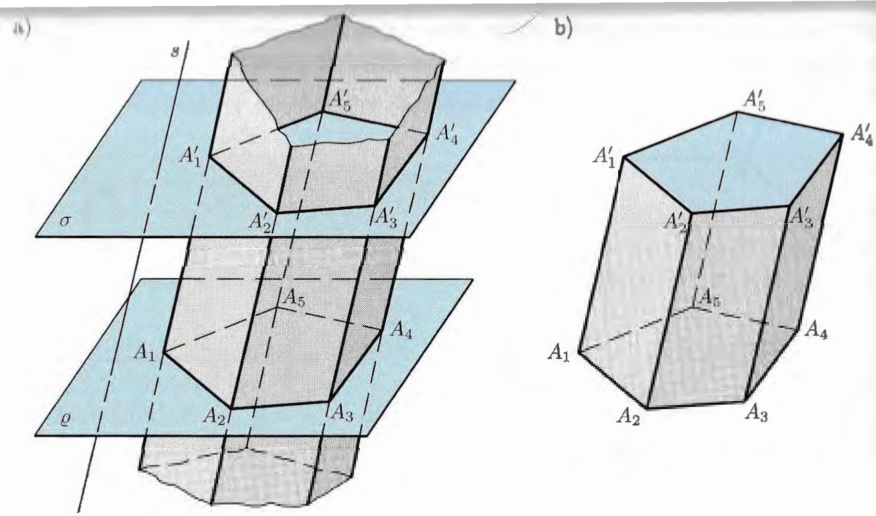
Poznámka. Hodnoty $|PD'|$ a α je možné určit též výpočtem.

9.13 Geometrická tělesa

Prostorové omezené souvislé útvary se nazývají **geometrická tělesa** (krátce tělesa). Jejich **hranicí** je uzavřená plocha.

Hranol

Nechť je dán konvexní n-úhelník $A_1A_2 \ldots A_n$ ležící v rovině ϱ a přímka s různoběžná s rovinou ϱ (obr. 9.117). Sjednocení všech přímek, které jsou rovnoběžné s přímkou s a protínají hranici mnohoúhelníku $A_1A_2 \ldots A_n$, se nazývá n-**boká hranolová plocha**. Sjednocení všech přímek, které jsou rovnoběžné s přímkou s a protínají mnohoúhelník $A_1A_2 \ldots A_n$, se nazývá n-**boký hranolový prostor**. Průnik tohoto hranolového prostoru a vrstvy s hraničními rovinami ϱ a $\sigma \parallel \varrho$ ($\sigma \neq \varrho$) se nazývá n-**boký hranol** (obr. 9.117). Shodné mnohoúhelníky $A_1A_2 \ldots A_n$, $A'_1A'_2 \ldots A'_n$, jež jsou průniky rovin ϱ, σ s hranolovým prostorem, se nazývají **podstavy hranolu**; stranám podstavy se říká **podstavné hrany hranolu**. Rovnoběžníky $A_1A_2A'_2A'_1$, $A_2A_3A'_3A'_2$, ..., $A_nA_1A'_1A'_n$ se nazývají **boční stěny hranolu**; jejich stranám $A_iA'_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) se říká **boční hrany hranolu**. Body A_i, A'_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) se nazývají **vrcholy hranolu**. Podstavy a boční stěny hranolu se souhrnně nazývají **stěny hranolu**. Sjednocení všech stěn hranolu je **hranice hranolu**. Sjednocení všech bočních stěn hranolu se nazývá **plášť hranolu**. Vzdálenost rovin ϱ, σ, v nichž leží podstavy hranolu, se nazývá



Obr. 9.117

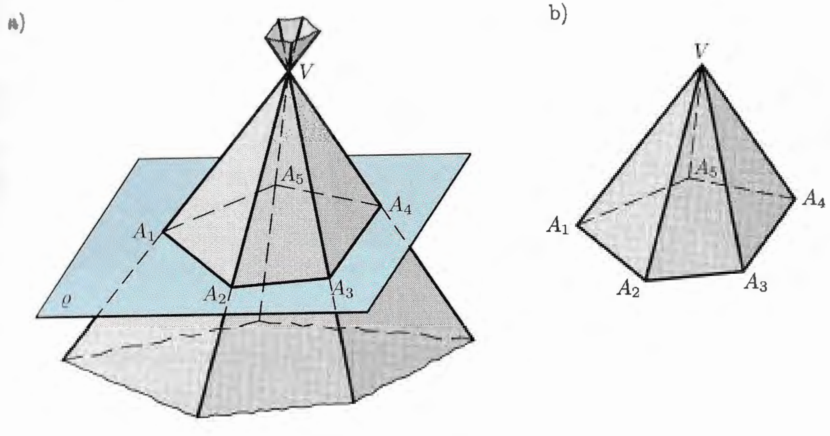
výška hranolu. Úsečky, jejichž krajními body jsou vrcholy hranolu, které neleží v téže stěně, se nazývají **tělesové úhlopříčky hranolu**. Úhlopříčky bočních stěn hranolu se nazývají **stěnové úhlopříčky**.

Druhy hranolů:
Hranolu, jehož boční hrany jsou kolmé k podstavám, se říká **kolmý hranol**. Hranolu, který není kolmý, se říká **kosý hranol**. Kolmý hranol, jehož podstavami jsou pravidelné n-úhelníky, se nazývá **pravidelný n-boký hranol**. Čtyřboký hranol, jehož všemi stěnami jsou rovnoběžníky, se nazývá **rovnoběžnostěn**. Speciálním případem je **kvádr**, tj. kolmý rovnoběžnostěn, jehož stěnami jsou obdélníky (popř. čtverce), z nichž dva protější jsou shodné. Má čtyři shodné tělesové úhlopříčky, které se protínají v jediném bodě a jsou jím půleny (tomuto bodu se říká *střed kvádru*). Kvádr, jehož všechny stěny jsou čtverce, se nazývá **krychle**. Má čtyři shodné tělesové úhlopříčky, které se protínají v jediném bodě a jsou jím půleny (tomuto bodu se říká *střed krychle*).

Jehlan

Nechť je dán konvexní n-úhelník $A_1A_2 \ldots A_n$ ležící v rovině ϱ a bod V, který neleží v této rovině (obr. 9.118). Sjednocení všech přímek, které procházejí bodem V a protínají hranici mnohoúhelníku $A_1A_2 \ldots A_n$, se nazývá **n-boká jehlanová plocha**. Sjednocení všech přímek, které procházejí bodem V a protínají mnohoúhelník $A_1A_2 \ldots A_n$, se nazývá **n-boký jehlanový prostor**. Průnik tohoto jehlanového prostoru a vrstvy, jejímiž hraničními rovinami jsou rovina ϱ a rovina $\sigma \parallel \varrho$ procházející vrcholem jehlanového prostoru, se nazývá **n-boký jehlan** (obr. 9.118). Mnohoúhelník $A_1A_2 \ldots A_n$ se nazývá **podstava jehlanu**; stranám podstavy se říká **podstavné hrany jehlanu**. Trojúhelníky A_1A_2V, A_2A_3V, ..., A_nA_1V se nazývají **boční stěny jehlanu**; jejich stranám A_iV ($i = 1, 2, \ldots, n$) se říká **boční hrany jehlanu**. Bodu V se říká **(hlavní) vrchol jehlanu**, bodům $A_1, A_2, \ldots, A_n$

se říká **vrcholy podstavy jehlanu**. Podstava a boční stěny hranolu se souhrnně nazývají **stěny jehlanu**. Sjednocení všech stěn jehlanu je **hranice jehlanu**. Sjednocení všech bočních stěn jehlanu se nazývá **plášť jehlanu**. Vzdálenost (hlavního) vrcholu V jehlanu od roviny ϱ jeho podstavy se nazývá **výška jehlanu**.



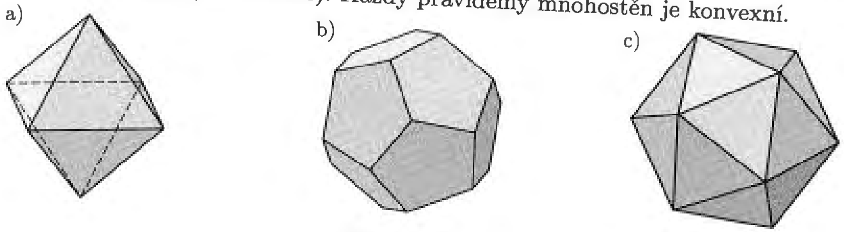
Obr. 9.118

Speciální druhy jehlanů:
Jehlan, jehož podstavou je pravidelný n-úhelník a pravoúhlým průmětem hlavního vrcholu do roviny podstavy je střed tohoto pravidelného mnohoúhelníku, se nazývá **pravidelný n-boký jehlan**. Jeho bočními stěnami jsou shodné rovnoramenné trojúhelníky. Rovina každé boční stěny má stejnou odchylku od roviny podstavy. Obdobná tvrzení platí též o odchylkách dvou sousedních stěn a o odchylkách bočních hran od roviny podstavy pravidelného jehlanu.

Komolý jehlan

Komolým jehlanem (speciálně **pravidelným**) nazýváme průnik jehlanu (speciálně pravidelného) a vrstvy, jejímiž hraničními rovinami jsou rovina podstavy ϱ a rovina $\sigma \parallel \varrho$ ($\sigma \neq \varrho$), která protíná jehlan a neprochází jeho vrcholem. Výška této vrstvy se pak nazývá **výška komolého jehlanu**. Průniky obou hraničních rovin ϱ, σ s jehlanem jsou mnohoúhelníky, jež se nazývají **podstavy komolého jehlanu**. Jejich stranám se říká **podstavné hrany komolého jehlanu**. Každý z jejich vrcholů je vrcholem některé z podstav komolého jehlanu. **Boční stěny komolého jehlanu** jsou lichoběžníky, jejichž výšky se nazývají **stěnové výšky**. Sjednocením bočních stěn je **plášť komolého jehlanu**.

Poznámka. Všechna dosud uvedená tělesa patří mezi tzv. mnohostěny. **Mnohostěnem** (**n-stěnem**) je každé těleso, jehož hranice je sjednocením takových n mnohoúhelníků (**stěn**), že strana každého z nich je zároveň stranou sousedního mnohoúhelníku a žádné dva mnohoúhelníky neleží v téže rovině. Tak *např.* **čtyřstěn** je těleso ohraničené čtyřmi trojúhelníkovými stěnami. (Zvolíme-li jednu z nich za podstavu, bude to **trojboký jehlan**.) Rozlišují se **konvexní mnohostěny** a **nekonvexní mnohostěny**. **Pravidelný mnohostěn** (**Platonovo** či **platonské těleso**) má shodné stěny, jimiž jsou pravidelné stěnami jsou shodné rovnostranné trojúhelníky, b) **krychle**, jejímiž stěnami jsou shodné čtverce, c) **pravidelný osmistěn**, který je sjednocením dvou pravidelných čtyřbokých jehlanů se společnou podstavou, jejichž boční stěny jsou shodné rovnostranné trojúhelníky (obr. 9.119a), d) **pravidelný dvanáctistěn**, jehož stěnami jsou shodné pravidelné pětiúhelníky (obr. 9.119b), e) **pravidelný dvacetistěn**, jehož stěnami jsou shodné rovnostranné trojúhelníky (obr. 9.119c). Každý pravidelný mnohostěn je konvexní.



Obr. 9.119

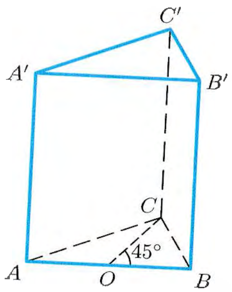
Příklady sestrojení obrazů mnohostěnů ve volném rovnoběžném promítání

Zobrazte ve volném rovnoběžném promítání a) pravidelný trojboký hranol, b) pravidelný trojboký jehlan, c) pravidelný čtyřboký komolý jehlan.

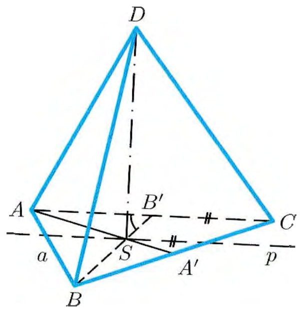
Řešení

Vycházíme z vlastností volného rovnoběžného promítání (kap. 9.11).

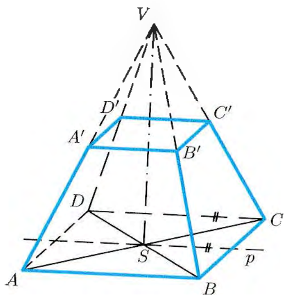
V případě a) (obr. 9.120) je průčelnou rovinou rovina stěny $ABB'A'$. Kolmicí k průčelné rovině je přímka OC, a proto je na obrázku délka úsečky OC rovna polovině ($q = \frac{1}{2}$) výšky rovnostranného trojúhelníku o straně AB, který je podstavou hranolu.



Obr. 9.120



Obr. 9.121



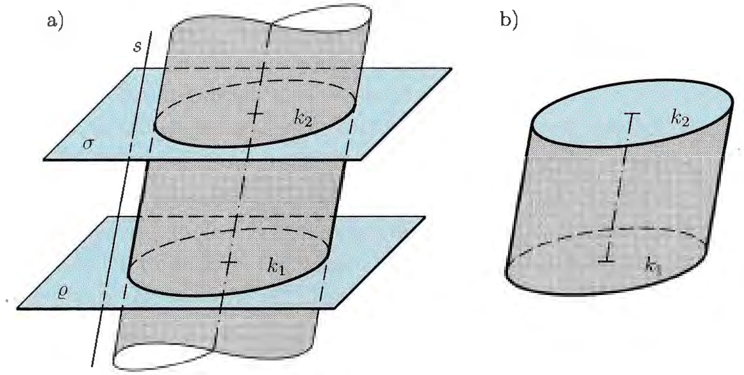
Obr. 9.122

V případě b) (obr. 9.121) prochází jedna průčelná rovina výškou DS jehlanu a přímkou $p \parallel \leftrightarrow AC$ vedenou těžištěm $T = S$ trojúhelníku ABC. Přímka AC je rovnoběžná s touto průčelnou rovinou, a proto úsečka AC je shodná se stranou podstavy ABC (rovnostranného $\triangle ABC$). Kolmicí k průčelné rovině je přímka BB', a proto je na obrázku úsečka BB' rovna polovině výšky rovnostranného $\triangle ABC$.

V případě c) (obr. 9.122) je jednou průčelnou rovinou rovina určená přímkou SV a přímkou $p \parallel \leftrightarrow AB$. Kolmicí k průčelné rovině je každá z přímek BC, $B'C'$, AD, $A'D'$; při zobrazení úseček BC, $B'C'$, AD, $A'D'$ je zvolen poměr zkrácení $q = \frac{1}{2}$.

Kruhový válec

Nechť je dána kružnice k v rovině ϱ a přímka s různoběžná s rovinou ϱ (obr. 9.123). Sjednocení všech přímek, které jsou rovnoběžné s přímkou s a protínají kružnici k, se nazývá **kruhová válcová plocha**. Sjednocení všech přímek, které jsou rovnoběžné s přímkou s a protínají kruh s hranicí k, se nazývá **kruhový válcový prostor.** Průnik tohoto válcového prostoru a vrstvy s hraničními rovinami ϱ a $\sigma \parallel \varrho$ ($\sigma \neq \varrho$) se nazývá **kruhový válec** (obr. 9.123); dále budeme stručně mluvit o **válci**. Shodné kruhy, jež jsou průniky rovin ϱ, σ s válcovým prostorem, se nazývají **podstavy válce**; jejich poloměru se říká **poloměr podstavy válce**. Vzdálenost rovin ϱ, σ, v nichž leží podstavy válce, se nazývá **výška válce**. Shodným úsečkám rovnoběžným s přímkou s, jejichž krajní body leží na hranicích kruhových podstav válce, se říká **strany válce** (týž název se často užívá i pro jejich délky). Sjednocení všech stran válce se říká **plášť válce**.



Obr. 9.123

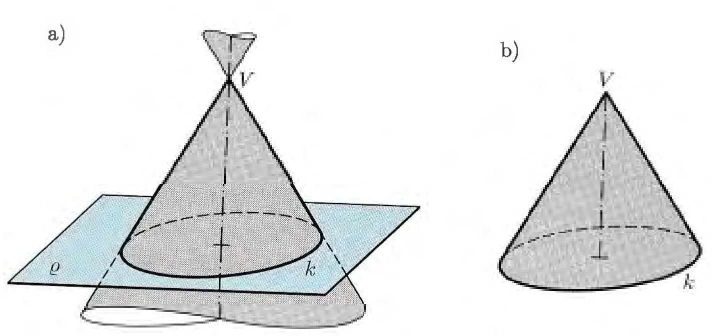
Druhy kruhových válců:

Je-li přímka s kolmá k rovině ϱ podstavy kruhového válce, pak se tomuto válci říká **rotační válec** (neboť ho lze získat rotací jistého obdélníku $ABCD$ kolem přímky AB). Přímce rovnoběžné s přímkou s a procházející středy kruhových podstav rotačního válce se říká **osa rotačního válce**. Kruhový válec, který není rotační, se nazývá **kosý kruhový válec**.

Kruhový kužel

Nechť je dána kružnice k v rovině ϱ a bod V, který neleží v této rovině (obr. 9.124). Sjednocení všech přímek, které procházejí bodem V a protínají kružnici k, se nazývá **kruhová kuželová plocha**. Sjednocení všech přímek, které procházejí bodem V a protínají kruh s hranicí k, se nazývá **kruhový kuželový prostor**. Průnik tohoto kuželového prostoru a vrstvy, jejímiž hraničními rovinami jsou rovina ϱ a rovina $\sigma \parallel \varrho$ procházející vrcholem kuželového prostoru, se nazývá **kruhový kužel** (obr. 9.124); dále budeme stručně mluvit o **kuželu**. Kruh, který je průnikem roviny ϱ s kuželovým prostorem, se nazývá **podstava kužele**; jejímu poloměru se říká **poloměr podstavy kužele**. Bodu V se říká **vrchol kužele**.

... vzdálenost vrcholu V od roviny ϱ podstavy kužele se nazývá **výška kužele**. Úsečkám, jejichž jedním krajním bodem je vrchol V kužele a druhým krajním bodem je libovolný bod kružnice k (hranice podstavy kužele), se říká **strany kužele** (stejný název se užívá často i pro jejich délky). Sjednocení všech stran kužele se říká **plášť kužele**.



Obr. 9.124

Druhy kruhových kuželů:
Je-li přímka určená vrcholem kruhového kužele a středem S jeho podstavy kolmá k rovině této podstavy, pak se tento kužel nazývá **rotační kužel** (neboť ho lze získat rotací jistého pravoúhlého trojúhelníku ASV kolem přímky SV obsahující odvěsnu tohoto trojúhelníku). Přímce procházející vrcholem V rotačního kužele a středem S jeho podstavy se říká **osa rotačního kužele**. Kruhový kužel, který není rotační, se nazývá **kosý kruhový kužel**.

Komolý kužel

Komolým kuželem (**rotačním**, resp. **kosým**) nazýváme průnik kužele (rotačního, resp. kosého) a vrstvy, jejímiž hraničními rovinami jsou rovina podstavy ϱ a rovina $\sigma \parallel \varrho$ $(\sigma \neq \varrho)$, která protíná kužel a neprochází jeho vrcholem. Výška této vrstvy se nazývá **výška komolého kužele**. Průniky obou hraničních rovin ϱ, σ s kuželem jsou kruhy, jimž se říká **podstavy komolého kužele**. Hranice komolého kužele je sjednocením jeho podstav s **pláštěm komolého kužele**.

Kulová plocha, koule a jejich části

Množina všech bodů prostoru, které mají od daného pevného bodu S danou vzdálenost $r > 0$, se nazývá **kulová plocha** se **středem** S a **poloměrem** r. Značí se $\kappa(S; r)$.

Kulová plocha rozděluje prostor na dvě části (oblasti): Oblast obsahující střed S kulové plochy se nazývá **vnitřní oblast kulové plochy**, oblast neobsahující střed S se nazývá **vnější oblast kulové plochy**.

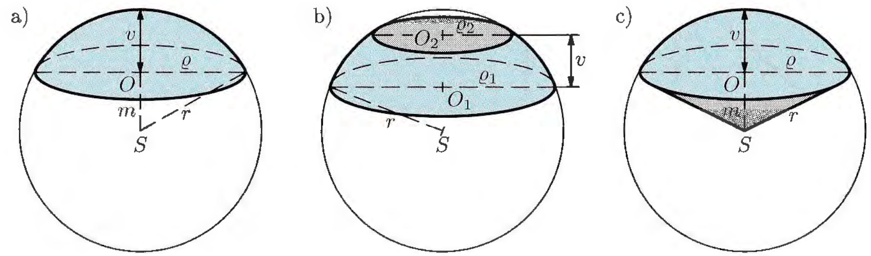
Průnikem kulové plochy a roviny je buď kružnice, nebo právě jeden bod, tzv. **bod dotyku** (**dotykový bod**), anebo je jím prázdná množina. Podle toho po řadě mluvíme o **sečné rovině**, **tečné rovině** a **vnější rovině kulové plochy**. Tečná rovina kulové plochy je kolmá k přímce určené bodem dotyku T a středem S

kulové plochy. Kolmice k tečné rovině kulové plochy vedená dotykovým bodem T se nazývá **normála** kulové plochy; prochází jejím středem S. Kružnice kulové plochy, která leží v rovině procházející jejím středem, se nazývá **hlavní kružnice**. Ostatní kružnice na kulové ploše se nazývají **vedlejší kružnice**.

Kulová plocha a přímka mají buď právě dva společné body, nebo právě jeden společný bod, tzv. **bod dotyku** (**dotykový bod**), anebo nemají žádný společný bod. Podle toho se pak mluví po řadě o **sečně**, **tečně** a **vnější přímce kulové plochy**. Každá přímka v tečné rovině kulové plochy jdoucí bodem dotyku je tečnou kulové plochy.

Množina všech bodů prostoru, které mají od daného pevného bodu S vzdálenost $v \leqq r$, kde $r > 0$ je dané číslo, tj. množina všech bodů, které náležejí buď kulové ploše $\kappa(S; r)$, nebo její vnitřní oblasti, se nazývá **koule** se **středem** S a **poloměrem** r. Značí se $\mathsf{K}(S; r)$.

Části kulové plochy a koule:
Část kulové plochy $\kappa(S; r)$, jež je průnikem této kulové plochy a poloprostoru s hraniční rovinou σ, jejíž vzdálenost m od středu S je menší než r, se nazývá **kulový vrchlík** (obr. 9.125a). **Výška kulového vrchlíku** je $v = r - m$, resp. $v = r + m$. Část koule ohraničená kulovým vrchlíkem a kruhem se nazývá **kulová úseč** (obr. 9.125a); je to průnik koule a poloprostoru, jehož hraniční rovina σ protíná kouli v kruhu. Ten pak nazýváme **podstavou kulové úseče** a výšce v příslušného kulového vrchlíku se říká **výška kulové úseče**. Pokud je hranicí podstavy kulové úseče speciálně hlavní kružnice kulové plochy κ, potom se tato kulová úseč nazývá **polokoule**. Část kulové plochy, která je průnikem kulové plochy a vrstvy, jejíž hraniční roviny σ_1, σ_2 jsou sečnými rovinami kulové plochy, se nazývá **kulový pás** (obr. 9.125b). Jejich vzdálenost v se nazývá **výška kulového pásu**. Část koule ohraničená kulovým pásem a dvěma kruhy se nazývá **kulová vrstva** (obr. 9.125b); je to průnik koule a vrstvy, jejíž hraniční roviny σ_1, σ_2 jsou sečnými rovinami koule. Jejich vzdálenost v se pak nazývá též **výška kulové vrstvy**. Hraniční kruhy kulové vrstvy v rovinách σ_1, σ_2 se nazývají **podstavy kulové vrstvy**. Části koule, která je sjednocením všech úseček SX, kde S je střed koule a X je libovolný bod daného kulového vrchlíku, se říká **kulová výseč** (obr. 9.125c).



Obr. 9.125

Užití trigonometrie při řešení stereometrických úloh

Trigonometrické řešení stereometrické úlohy spočívá v tom, že nalezneme trojúhelníky (nejčastěji pravoúhlé), ve kterých dovedeme z daných prvků určit pomocí trigonometrických vztahů hledané prvky.

1. Dvě mimoběžné stěnové úhlopříčky AD' a $A'B$ kvádru svírají s podstavou úhly $\alpha = 30°$ a $\beta = 60°$. Určete odchylku φ těchto mimoběžek.

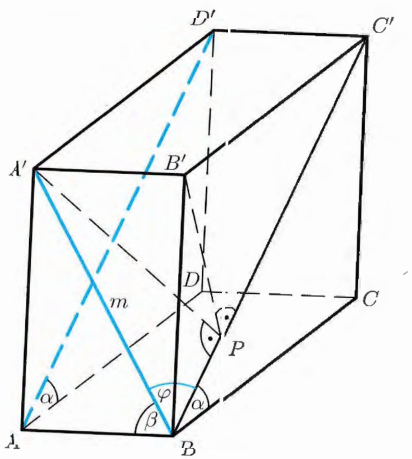
Řešení (obr. 9.126)
Pravoúhlým průmětem úhlopříčky AD' do roviny podstavy je hrana AD, proto $|\sphericalangle DAD'| = \alpha$; průmětem úhlopříčky $A'B$ do roviny podstavy je hrana AB, proto $|\sphericalangle ABA'| = \beta$. Sestrojíme-li $BC' \parallel AD'$, je podle definice odchylka mimoběžek AD' a $A'B$ rovna $\varphi = |\sphericalangle A'BC'|$. Abychom mohli určit velikost úhlu $A'BC'$, sestrojíme v rovině $BCC'B'$ kolmici z bodu B' na BC' a její patu označíme P; tedy $B'P \perp BC'$. Protože hrana $A'B'$ je kolmá ke stěně $BCC'B'$, je podle definice kolmosti přímky k rovině také $A'B' \perp BC'$. Je tedy úhlopříčka BC' kolmá ke dvěma různoběžkám $A'B'$ a $B'P$ roviny $A'B'P$, a proto podle kritéria kolmosti přímky k rovině (věta V.3, kap. 9.12) je kolmá k této rovině. Odtud a z definice kolmosti přímky k rovině plyne, že přímka $A'P$ je kolmá k přímce BC', takže trojúhelník $A'BP$ je pravoúhlý.
Označme $|A'B| = m$; v pravoúhlém trojúhelníku ABA' je $|AA'| = m \sin \beta$. Zřejmě $|\sphericalangle CBC'| = |\sphericalangle DAD'| = \alpha$, a tedy $|\sphericalangle B'BC'| = 90° - \alpha$. V pravoúhlém trojúhelníku $BB'C'$ je $|BB'| = |AA'| = m \sin \beta$, a tedy $|BP| = |BB'| \cos (90° - \alpha)$ čili

$$|BP| = m \sin \beta \sin \alpha. \tag{1}$$

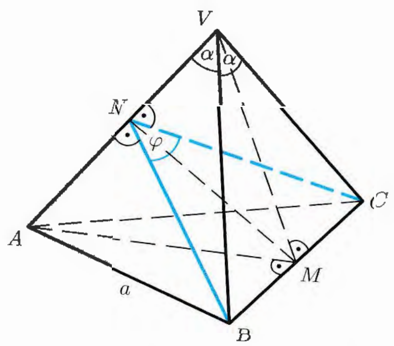
V pravoúhlém trojúhelníku $A'BP$ je

$$|BP| = |A'B| \cos \varphi \quad \text{čili} \quad |BP| = m \cos \varphi. \tag{2}$$

Z (1) a (2) plyne, že $\cos \varphi = \sin \alpha \sin \beta = \sin 30° \sin 60° = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{3}$, a odtud určíme $\varphi \doteq 64° 20'$.



Obr. 9.126



Obr. 9.127

2. V pravidelném trojbokém jehlanu $ABCV$ má podstavná hrana délku $a = 7{,}8$ cm, úhel při vrcholu V v boční stěně má velikost $\alpha = 63° 20'$. Určete odchylku φ dvou bočních stěn jehlanu a obsah řezu jehlanu rovinou, která prochází podstavnou hranou a je kolmá k protější boční hraně.

Řešení
V pravidelném jehlanu je odchylka kterýchkoli dvou sousedních bočních stěn táž. Určíme (obr. 9.127) např. odchylku stěn ABV a ACV; jejich průsečnice je AV. Podstavnou hranou BC proložíme rovinu kolmou k boční hraně AV. Protne uvažované boční stěny v jejich výškách BN a CN. Podle definice odchylky dvou rovin je hledaná odchylka $\varphi = |\sphericalangle BNC|$. Protože boční stěny jsou shodné, je $|BN| = |CN|$, takže trojúhelník BCN je rovnoramenný. V trojúhelníku BMV, kde $|BM| = \frac{a}{2}$, $|\sphericalangle BVM| = \frac{\alpha}{2}$, je

$$|BV| = \frac{\frac{a}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}.$$

Z pravoúhlého trojúhelníku BNV pak plyne

$$|BN| = |BV| \sin \alpha = \frac{a \sin \alpha}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{2a \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} = a \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Z pravoúhlého trojúhelníku BMN plyne

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{|BM|}{|BN|} = \frac{\frac{a}{2}}{a \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2 \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2 \cos 31° 40'},$$

odkud

$$\frac{\varphi}{2} \doteq 35° 59', \quad \text{a tedy } \varphi \doteq 71° 58'.$$

Obsah trojúhelníkového řezu BCN je

$$S = \frac{1}{2}|BC| \cdot |MN| = \frac{a}{2} \cdot \left(\frac{a}{2} \operatorname{cotg} \frac{\varphi}{2}\right) = 3{,}9^2 \text{ cm}^2 \cdot \operatorname{cotg} 35° 59' \doteq 20{,}95 \text{ cm}^2.$$

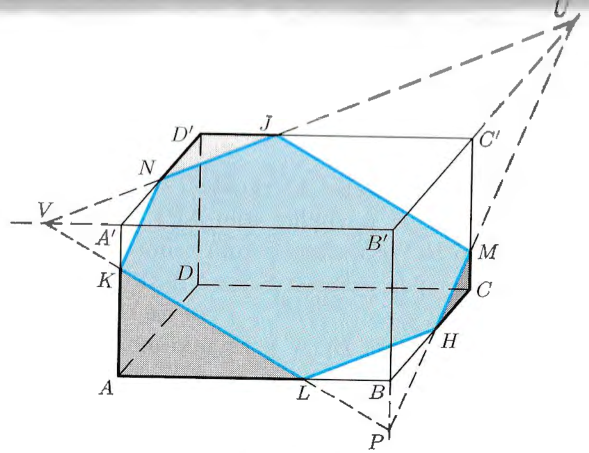
Řezy těles

Řezem tělesa rozumíme průnik tělesa a roviny. Je to rovinný útvar, jehož hranice je průnik hranice tělesa a roviny řezu.

Hranice řezu mnohostěnu se skládá z průniků roviny řezu se stěnami mnohostěnu.

Příklady na sestrojování řezů těles ve volném rovnoběžném promítání

1. Sestrojte řez kvádru $ABCDA'B'C'D'$ rovinou MNP, M je vnitřní bod hrany CC', pro který platí $4|CM| = |CC'|$, N je střed hrany $A'D'$ a bod P leží na prodloužení hrany $B'B$ za bod B a platí $3|BP| = |BB'|$.

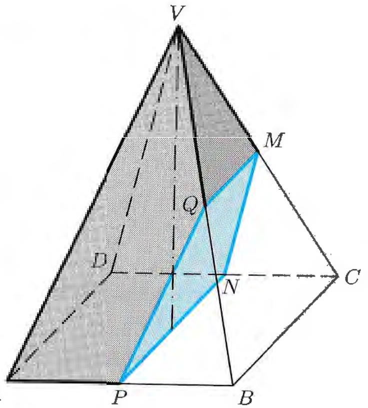


Obr. 9.128

Řešení

Stěna $ABB'A'$ nechť leží v průčelné rovině (obr. 9.128). Bod M leží ve čtvrtině hrany CC' od vrcholu C, úsečka BP je třetinou hrany BB'. Body P a M, a tedy i přímka PM leží v rovině $BCC'B'$. Průsečík této přímky s hranou BC označíme H a její průsečík s hranou $B'C'$ prodlouženou za bod C' označíme U. Body U a N, a tedy celá přímka UN leží v rovině $A'B'C'D'$. Její průsečíky s hranou $C'D'$ a s hranou $A'B'$ prodlouženou za bod A' označíme po řadě J a V. Body V a P, a tedy i přímka VP leží v rovině $ABB'A'$. Její průsečíky s hranami AA' a AB označíme po řadě K a L. Hledaným řezem je šestiúhelník $KLHMJN$, přičemž podle věty o vzájemné poloze tří různých rovin (věta V.7b, kap. 9.11) je $KL \parallel JM$, $LH \parallel NJ$ a $HM \parallel KN$.

2. Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$. Středem M hrany CV veďte rovinu ϱ rovnoběžnou s rovinou ADV a určete její řez s jehlanem.

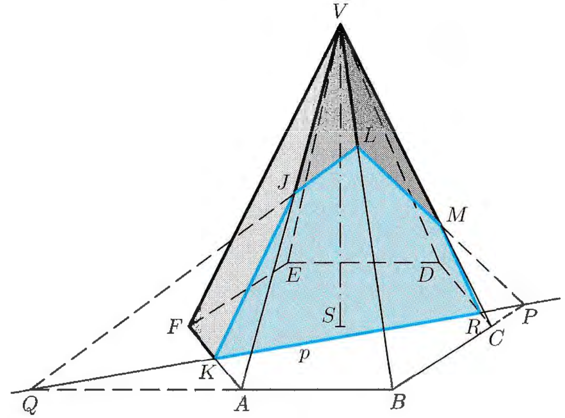


Obr. 9.129

Řešení

Nechť rovina ϱ protne stěnu CDV v úsečce MN, stěnu ABV v úsečce PQ, podstavu $ABCD$ v úsečce PN (obr. 9.129). Podle věty o vzájemné poloze tří různých rovin (věta V.7b, kap. 9.11) je $MN \parallel VD$, $PQ \parallel AV$, $PN \parallel BC$. Podle posledního vztahu jsou průsečnice roviny $ABCD$ s rovinami ϱ a BCV rovnoběžné, a proto podle citované věty je s nimi rovnoběžná také průsečnice roviny ϱ s rovinou BCV, takže $MQ \parallel BC$. Dále zřejmě je $|PQ| = |MN|$. Hledaným řezem $PNMQ$ je tedy rovnoramenný lichoběžník.

3. Sestrojte řez pravidelného šestibokého jehlanu $ABCDEFV$ rovinou KLM, kde body K, L, M jsou vnitřní body hran AF, BV a CV takové, že $|AK| = |FK|$, $|BL| = 2|VL|$ a $|VM| = 2|CM|$.



Obr. 9.130

Řešení (obr. 9.130)

Podle předpokladu úlohy je bod K středem hrany AF, bod L leží ve třetině hrany BV od vrcholu, bod M ve třetině hrany CV od podstavy. Body L a M, a tedy i celá přímka LM leží v rovině BCV. Průsečík této přímky s přímkou BC roviny podstavy označíme P. Rovina ϱ protíná tudíž rovinu podstavy jehlanu v přímce KP a hranu CD v průsečíku přímky p s CD; označíme ho R. Abychom určili průsečnici roviny ϱ s rovinou ABV, uvažujeme tyto dvě roviny a rovinu podstavy; jsou to tři navzájem různoběžné roviny, které tedy podle věty V.7e kap. 9.11 mají právě jeden společný bod. Podstava protíná rovinu ϱ v přímce p a rovinu ABV v přímce AB, přímka p protíná přímku AB v bodě Q, který je proto společným bodem uvažovaných tří rovin. Jím tedy prochází průsečnice roviny ϱ s rovinou ABV; druhým bodem této průsečnice je daný bod L na hraně BV. Proto průnikem rovin ϱ a ABV je přímka LQ; průsečík této přímky s hranou AV označme J. Řezem daného jehlanu rovinou ϱ je pětiúhelník $KRMLJ$.

9.14 Množiny všech bodů dané vlastnosti v prostoru

Podobně jako v rovině můžeme i v prostoru uvažovat **množiny všech bodů (m. v. b.) dané vlastnosti (daných vlastností)**.

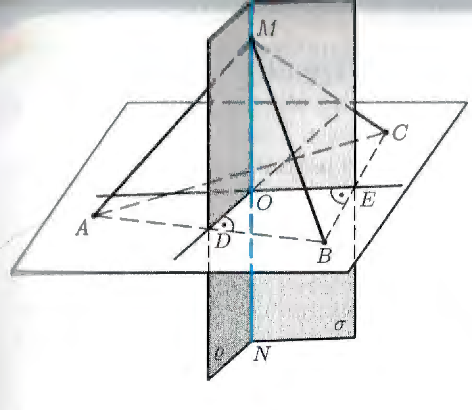
Uvedeme *nejdůležitější m. v. b.* v prostoru:

1. M. v. b., které mají od daného bodu A danou vzdálenost r, je kulová plocha o středu A a poloměru r; tato kulová plocha je rovněž m. v. středů kulových ploch, které mají daný poloměr r a procházejí daným bodem A.
2. M. v. b., které mají od dané přímky p danou vzdálenost r, je rotační válcová plocha o poloměru r, jejíž osou je přímka p; tato válcová plocha je rovněž m. v. středů kulových ploch, které mají daný poloměr r a dotýkají se dané přímky p.
3. M. v. b., které mají od dané roviny ϱ danou vzdálenost r, jsou dvě roviny rovnoběžné s rovinou ϱ ve vzdálenosti r; tyto roviny jsou rovněž m. v. středů kulových ploch, které mají daný poloměr r a dotýkají se dané roviny ϱ.
4. M. v. b. stejně vzdálených od obou daných bodů A, B je rovina souměrnosti úsečky AB (viz str. 513). Tato rovina je rovněž m. v. středů kulových ploch, které procházejí danými dvěma body A, B.
5. M. v. b. stejně vzdálených od dvou daných rovnoběžných rovin je rovina souměrnosti těchto rovin (viz str. 530). Je rovněž m. v. středů kulových ploch, které se daných rovnoběžných rovin dotýkají.
6. M. v. b. stejně vzdálených od dvou daných různoběžných rovin jsou dvě k sobě kolmé roviny souměrnosti daných rovin (viz str. 530). Tyto roviny jsou s výjimkou své průsečnice rovněž m. v. středů kulových ploch, které se obou daných rovin dotýkají.
7. M. v. přímek, které procházejí daným bodem V a mají od dané roviny ϱ danou odchylku α, je rotační kuželová plocha, která má vrchol V, osu kolmou k rovině ϱ a úhel osového řezu při vrcholu V má velikost $180° - 2\alpha$.
8. M. v. středů kulových ploch, které se dotýkají dané přímky t v daném jejím bodě T, je rovina, která prochází bodem T a je kolmá k přímce t; bod T do ní nepatří.
9. M. v. středů kulových ploch, které se dotýkají dané roviny τ v daném jejím bodě T, je přímka kolmá k rovině τ a procházející bodem T; bod T do ní nepatří.
10. M. v. středů kulových ploch, které se dotýkají vně nebo uvnitř dané kulové plochy o středu S v daném jejím bodě T, je přímka ST; body S a T do ní nepatří.
11. M. v. středů kulových ploch, které mají daný poloměr ϱ a dotýkají se dané kulové plochy o poloměru r vně (resp. uvnitř), je kulová plocha s danou kulovou plochou soustředná a mající poloměr $r_1 = r + \varrho$ (resp. $r_2 = |r - \varrho|$).

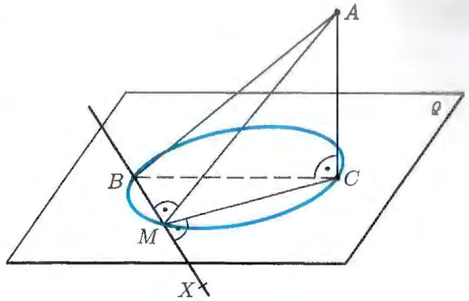
Příklady určování množin všech bodů daných vlastností v prostoru

1. Určete v prostoru m. v. b. stejně vzdálených od tří daných bodů A, B, C, které neleží v jedné přímce.

Řešení (obr. 9.131)
M. v. b. stejně vzdálených od bodů A, B je rovina ϱ kolmá k úsečce AB a procházející jejím středem D; podobně m. v. b. stejně vzdálených od bodů B, C



Obr. 9.131



Obr. 9.132

je rovina σ kolmá k úsečce BC a procházející jejím středem E. Body průsečnice MN rovin ϱ a σ mají tedy stejnou vzdálenost od bodů A, B a C; její průsečík O s rovinou trojúhelníku ABC je proto středem kružnice tomuto trojúhelníku opsané. Protože $\leftrightarrow AB \perp \varrho$, je podle definice kolmosti přímky k rovině $\leftrightarrow AB \perp MN$, a protože $\leftrightarrow BC \perp \sigma$, je rovněž $\leftrightarrow BC \perp MN$. Přímka MN je tedy kolmá ke dvěma různoběžkám AB a BC roviny ABC, a proto podle kritéria kolmosti přímky a roviny (věta V.3 kap. 9.12) je $\leftrightarrow MN \perp \leftrightarrow ABC$. Přímka MN je tudíž kolmice k rovině ABC vedená středem O kružnice opsané trojúhelníku ABC

Budiž obráceně M libovolný bod této kolmice. Protože $|OA| = |OB| = |OC|$, snadno dokážeme pomocí Pythagorovy věty, že $|MA| = |MB| = |MC|$, tj. bod M je bodem hledané m. v. b.

Tím jsme dokázali, že hledanou m. v. b. je přímka MN vedená středem O kružnice určené třemi danými body A, B, C a kolmá k rovině ABC.

2. Je dána rovina ϱ, v ní bod B a mimo ni bod A. Přímka AB není kolmá k rovině ϱ. Určete m. v. pat kolmic sestrojených z bodu A ke všem přímkám procházejícím v rovině ϱ bodem B.

Řešení (obr. 9.132)
Budiž C pata kolmice sestrojené z daného bodu A k dané rovině ϱ. K libovolné přímce BX (kde X je libovolný bod roviny ϱ) sestrojíme kolmici vedenou bodem A a její patu označíme M; tedy $\leftrightarrow AM \perp \leftrightarrow BX$. Bod M je jedním bodem hledané m. v. b. Protože $\leftrightarrow AC \perp \varrho$, je podle definice kolmosti přímky k rovině také $\leftrightarrow AC \perp \leftrightarrow BX$. Protože jsme sestrojili $\leftrightarrow AM \perp \leftrightarrow BX$, je přímka BX kolmá ke dvěma různoběžkám AC a AM roviny ACM, a proto podle věty V.3 kap. 9.12 je $\leftrightarrow BX \perp \leftrightarrow ACM$; podle definice kolmosti přímky k rovině je tedy také $\leftrightarrow BX \perp \leftrightarrow MC$ čili $|\sphericalangle BMC| = 90°$. Protože bod M je libovolný bod hledané m. v. b., je podle Thaletovy věty hledanou m. v. b. kružnice sestrojená v rovině ϱ nad průměrem BC. Výjimkou je případ, kdy $C = B$; pak je hledanou m. v. b. prostoru jednoprvková množina $\{B\}$.

Analogicky jako v kap. 9.8 o geometrických zobrazeních v rovině lze též studovat **geometrická zobrazení v prostoru**, kdy libovolnému bodu X prostoru přiřazujeme jako jeho *obraz právě jeden bod* X' prostoru. I další terminologie (obrazy útvaru, samodružný bod, samodružný útvar atd.) je obdobná jako u rovinných geometrických zobrazení.

Shodná zobrazení v prostoru

Prosté zobrazení v prostoru nazýváme **shodným zobrazením** nebo **shodností**, právě když pro každé dva body X, Y prostoru a jejich obrazy X', Y' v tomto zobrazení platí

$$|X'Y'| = |XY|.$$

Shodnost geometrických útvarů v prostoru *definujeme* pak takto: Dva útvary U_1, U_2 v prostoru jsou **shodné útvary**, právě když existuje shodné zobrazení v prostoru, které převádí jeden útvar ve druhý (tj. jeden z útvarů je obrazem druhého).

Druhy shodností v prostoru a jejich skládání

Speciálním případem shodností v prostoru je **identické zobrazení (identita)**, jež má všechny body samodružné.

Významnými druhy shodných zobrazení v prostoru jsou **souměrnosti (podle roviny, podle středu a podle osy)**. Jejich definice jsou uvedeny v tabulce 9.13. Rovinová souměrnost má v prostoru obdobný význam jako osová souměrnost v rovině.

Definice souměrností podle roviny, podle středu a podle osy Tab. 9.13

Souměrnost podle roviny ϱ (**rovinová souměrnost**) je shodné zobrazení, které každému bodu $X \in \varrho$ přiřazuje týž bod $X' = X$ a každému bodu $X \notin \varrho$ prostoru přiřazuje takový obraz X', že platí
a) bod X' leží na kolmici k rovině ϱ vedené bodem X,
b) $|PX| = |PX'|$, kde P je pata této kolmice k rovině ϱ.
Rovinová souměrnost je jednoznačně určena **rovinou souměrnosti** ϱ.

Souměrnost podle středu S (**středová souměrnost**) v prostoru je shodné zobrazení, které přiřazuje středu souměrnosti S týž bod $S' = S$ a každému bodu $X \neq S$ prostoru přiřazuje takový obraz X', že platí
a) bod X' leží na polopřímce opačné k polopřímce SX,
b) $|SX'| = |SX|$.
Středová souměrnost je jednoznačně určena **středem souměrnosti** S.

Souměrnost podle přímky (**osy**) o (**osová souměrnost**) v prostoru je shodné zobrazení, které každému bodu $X \in o$ přiřazuje týž bod $X' = X$ a každému bodu $X \notin o$ přiřazuje takový obraz X', že platí
a) bod X' leží na kolmici k ose o vedené bodem X v rovině určené bodem X a přímkou o,
b) $|PX| = |PX'|$, kde P je pata této kolmice k přímce o.
Osová souměrnost je jednoznačně určena **osou souměrnosti** o.

Poznámka. O geometrickém útvaru U v prostoru říkáme, že **je souměrný podle roviny (má rovinu souměrnosti** ϱ), resp. **je souměrný podle středu (má střed souměrnosti** S), popř. **je souměrný podle osy (má osu souměrnosti** o), právě když se v příslušné souměrnosti zobrazí sám v sebe (tj. *reprodukuje se* v ní, neboli je v ní *samodružný*).

Posunutí v prostoru je možné definovat zcela analogicky jako v rovině (kap. 9.8, tab. 9.7). Lze je též získat složením dvou rovinových souměrností podle rovin ϱ_1, ϱ_2, které jsou *rovnoběžné* ($\varrho_1 \parallel \varrho_2$).

Otočení (rotace) kolem přímky (tzv. **osy otočení**) o v prostoru o orientovaný úhel velikosti φ je shodné zobrazení, které přiřazuje každému bodu X prostoru takový obraz X', že platí
a) pro $X \in o$ je $X' = X$,
b) pro $X \notin o$ je $|X'P| = |XP|$, kde P je společná pata kolmic vedených body X, X' k ose o, přičemž rovina XPX' je kolmá k ose o a orientovaný úhel $\widehat{XPX'}$ má velikost φ.

Podobná zobrazení, stejnolehlost v prostoru

Pojem **podobné zobrazení** i jeho speciální případ **stejnolehlost**, jež jsme v rovině definovali v kap. 9.8, lze zcela obdobně definovat i v prostoru (pouze místo o bodech roviny mluvíme o bodech prostoru).

Příklady na geometrická zobrazení v prostoru

1. Určete všechny samodružné body, přímky a roviny v rovinové, středové a osové souměrnosti.

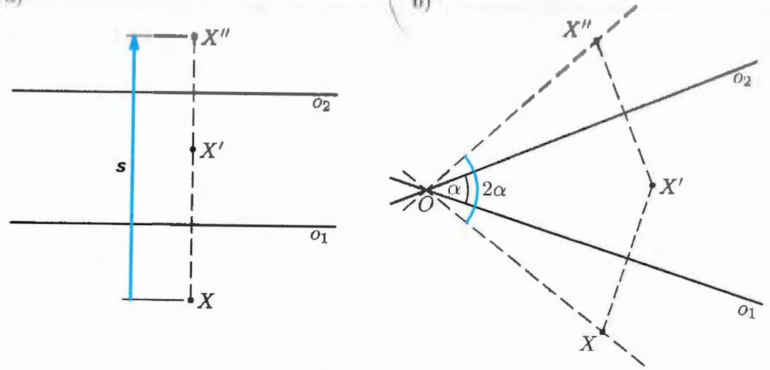
Řešení (pro rovinovou souměrnost; pro další souměrnosti formulujte obdobně sami)
V rovinové souměrnosti jsou samodružnými body právě všechny body roviny souměrnosti ϱ, samodružnými přímkami jsou všechny přímky roviny ϱ a všechny přímky k rovině ϱ kolmé, samodružnými rovinami jsou rovina ϱ a všechny roviny k ní kolmé.

2. Uveďte příklady středově, rovinově a osově souměrných těles.

Řešení
Např. krychle je souměrná podle středu (průsečíku tělesových úhlopříček) a je též rovinově i osově souměrná (má 9 rovin souměrnosti a 7 os souměrnosti), koule je souměrná podle středu koule a je také rovinově i osově souměrná (podle všech rovin procházejících jejím středem a podle všech os obsahujících její střed). Obdobně uvažte souměrnosti kvádru, pravidelného n-bokého hranolu a jehlanu ($n \in \mathsf{N}$, $n \geqq 3$), rotačního válce a kužele.

3. Ukažte, jaké geometrické zobrazení vznikne složením dvou rovinových souměrností S_1, S_2 podle rovin ϱ_1, ϱ_2, které jsou navzájem a) rovnoběžné, b) různoběžné.

Řešení
Zvolme libovolnou rovinu τ kolmou k oběma rovinám ϱ_1, ϱ_2 (v obr. 9.133a, b je tato rovina nákresnou) a označme její průsečnice s rovinami ϱ_1, ϱ_2 po řadě o_1, o_2. Složením dvou rovinových souměrností S_1, S_2 podle rovin ϱ_1, ϱ_2 vznikne v každé



Obr. 9.133

rovině τ rovinné geometrické zobrazení složené ze dvou osových souměrností podle os o_1, o_2.

a) Je-li $\varrho_1 \parallel \varrho_2$, pak je také $o_1 \parallel o_2$ a vzniklé složené zobrazení je v každé rovině τ posunutím (obr. 9.133a), a proto se složené prostorové zobrazení $S_1 \circ S_2$ nazývá **posunutí v prostoru**.

b) Je-li $\varrho_1 \nparallel \varrho_2$ (průsečnici rovin ϱ_1, ϱ_2 označíme o), pak je také $o_1 \nparallel o_2$ a vzniklé složené zobrazení je v každé rovině τ otočením kolem bodu $O \in o$, který je průsečíkem přímek o_1, o_2, o úhel velikosti 2α, kde α je odchylka rovin ϱ_1, ϱ_2 (obr. 9.133b), a proto se složené prostorové zobrazení $S_1 \circ S_2$ nazývá **otočení (rotace) kolem přímky** $o = \varrho_1 \cap \varrho_2$.

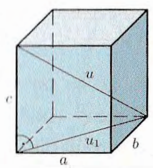
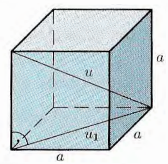
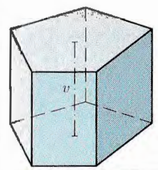
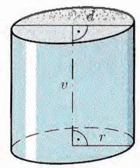
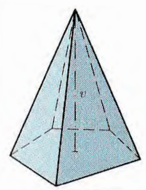
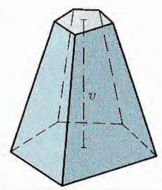
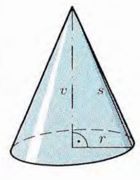
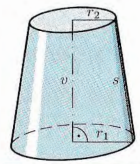
Užitím otočení (rotace) kolem přímky *definujeme*:
Říkáme, že těleso T je **rotační těleso**, existuje-li taková přímka o (zvaná **osa rotace**), že při každém otočení kolem této přímky se těleso zobrazí samo na sebe.
Zvolíme-li libovolnou polorovinu s hraniční přímkou o a označíme M průnik rotačního tělesa T s touto polorovinou, pak je zřejmé, že každý bod rotačního tělesa T dostaneme jako obraz některého bodu množiny M při určitém otočení kolem přímky o.

9.16 Objemy a povrchy těles

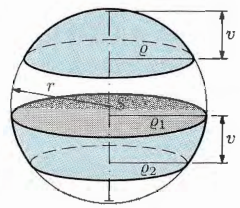
K *měření geometrických těles* se zavádí míra zvaná *objem tělesa*:
Zvolí se krychle o hraně jednotkové délky, které se přiřadí **jednotkový objem** 1 dj^3; tato krychle se nazývá **jednotková krychle**. Libovolnému měřitelnému geometrickému tělesu T se pak přiřazuje **objem tělesa** T označovaný V, pro který platí $V = K$ dj^3, kde K je kladná číselná hodnota objemu tělesa T a dj^3 je zvolená jednotka objemu.
Základní (charakteristické) vlastnosti objemu tělesa jsou:

1. Každá dvě shodná tělesa mají sobě rovné objemy.
2. Objem libovolného tělesa složeného z několika nepronikajících se těles, se rovná součtu objemů těchto těles.

V následujících vzorcích je V objem, S povrch, S_p obsah podstavy, S_pl obsah pláště, v výška tělesa, u tělesová úhlopříčka, r poloměr, d průměr.

Kvádr  $V = abc$ $S = 2(ab + ac + bc)$ $u = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$	**Krychle**  $V = a^3$ $S = 6a^2$ $u = a\sqrt{3}$ $u_1 = a\sqrt{2}$ stěnová úhlopříčka
Hranol  $V = S_\mathrm{p} \cdot v$ $S = 2S_\mathrm{p} + S_\mathrm{pl}$	**Rotační válec**  $V = \pi r^2 v = \frac{1}{4}\pi d^2 v$ $S = 2\pi r(r + v)$ $S_\mathrm{pl} = 2\pi r v = \pi d v$
Jehlan  $V = \frac{1}{3} S_\mathrm{p} \cdot v$ $S = S_\mathrm{p} + S_\mathrm{pl}$	**Komolý jehlan**  $V = \frac{v}{3}\left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2\right)$ $S = S_1 + S_2 + S_\mathrm{pl}$
Rotační kužel  $V = \frac{1}{3}\pi r^2 v$ $S = \pi r^2 + \pi r s =$ $= \pi r(r + s)$ $S_\mathrm{pl} = \pi r s$	**Komolý rotační kužel**  $V = \frac{1}{3}\pi v\left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right)$ $S = \pi r_1^2 + \pi r_2^2 +$ $+ \pi(r_1 + r_2)s =$ $= \pi\left[r_1^2 + r_2^2 + (r_1 + r_2)s\right]$ $S_\mathrm{pl} = \pi(r_1 + r_2)s$

Koule a její části



Objem koule $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

Povrch koule $S = 4\pi r^2$
(Obsah kulové plochy)

Obsah kulového vrchlíku a kulového pásu $S = 2\pi r v$

Objem kulové úseče $V = \frac{\pi v}{6}\left(3\varrho^2 + v^2\right) = \frac{\pi v^2}{3}(3r - v)$
[podle Eukleidovy věty o výšce $\varrho^2 = (2r - v)v$]

Objem kulové vrstvy $V = \frac{\pi v}{6}\left(3\varrho_1^2 + 3\varrho_2^2 + v^2\right)$

Objem kulové výseče $V = \frac{2}{3}\pi r^2 v$, v je výška příslušné kulové úseče
(součet objemů kulové úseče a rotačního kužele)

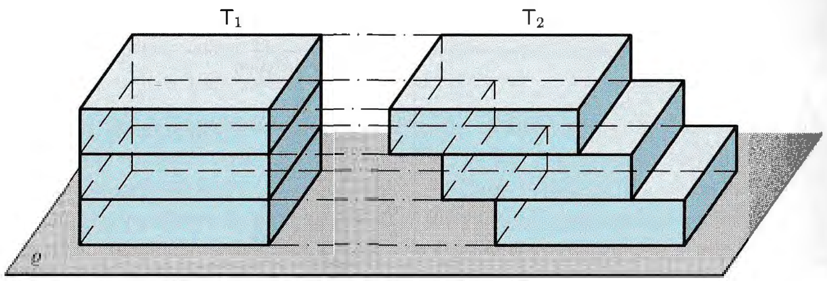
Poznámka. Nejčastěji používané jednotky objemu jsou metr krychlový (m^3) a jeho díly decimetr krychlový (dm^3), centimetr krychlový (cm^3), milimetr krychlový (mm^3).

Povrch tělesa je obsah jeho hranice.

Např. povrch mnohostěnu je součet obsahů všech mnohoúhelníků (**stěn**), jež tvoří jeho hranici.

V tabulce 9.14 jsou souhrnně uvedeny vzorce pro výpočet objemů a povrchů těles, s nimiž jsme se setkali ve středoškolské geometrii.

Poznámka. Při odvozování uvedených vzorců se zpravidla postupuje tak, že se na základě definice objemu tělesa odvodí nejprve vzorec pro objem kvádru. Objemy dalších těles (hranolu, jehlanu atd.) se pak odvozují na základě vlastnosti objemu zvané **Cavalierův princip**: Jestliže pro dvě tělesa T_1, T_2 existuje taková rovina ϱ, že každá s ní rovnoběžná rovina protíná tělesa T_1, T_2 v konvexních rovinných útvarech o témž obsahu $S_1 = S_2$, pak obě tělesa mají týž objem $V_1 = V_2$. (Názorně je ilustrován tento princip na obr. 9.134.)



Obr. 9.134

Příklady výpočtu objemů a povrchů těles

1. Podstavou kosého čtyřbokého jehlanu $ABCDV$ je čtverec o straně $a = 20$ cm, boční hrana VD je jeho výškou, $|VD| = 21$ cm (obr. 9.135). Vypočtěte povrch jehlanu.

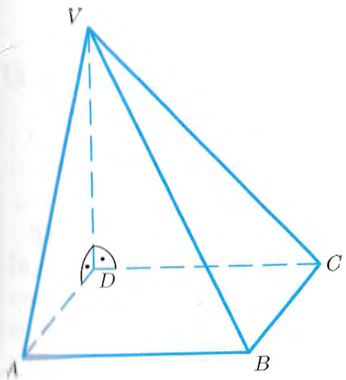
Řešení

Podstava má obsah $S_p = a^2 = 400\ \text{cm}^2$. Boční stěny ADV a CDV jsou pravoúhlé trojúhelníky shodné podle věty *sus*; každý z nich má obsah $S_1 = \frac{1}{2} \cdot 20\ \text{cm} \cdot 21\ \text{cm} = 210\ \text{cm}^2$, jejich přepona má délku

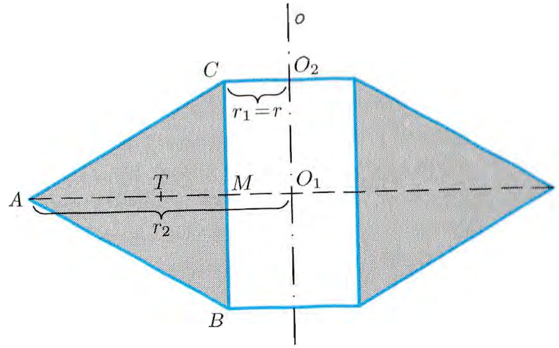
$$|AV| = |CV| = \sqrt{20^2 + 21^2}\ \text{cm} = \sqrt{400 + 441}\ \text{cm} = \sqrt{841}\ \text{cm} = 29\ \text{cm}.$$

Výška VD je kolmá k podstavě, je proto kolmá ke všem přímkám, které v podstavě leží, takže také $VD \perp AB$ a $VD \perp BC$. Z toho plyne, že hrana AB je kolmá k rovině stěny ADV (neboť je kolmá ke dvěma různoběžkám AD a VD této roviny), a proto také $AB \perp VA$ čili trojúhelník ABV je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu A; podobně hrana BC je kolmá k rovině stěny CDV (neboť je kolmá ke dvěma různoběžkám CD a VD této roviny), a proto také $BC \perp VC$ čili trojúhelník BCV je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu C.

Pravoúhlé trojúhelníky BAV a BCV jsou shodné podle věty *sus*; každý z nich má obsah $S_2 = \frac{1}{2} \cdot 20\ \text{cm} \cdot 29\ \text{cm} = 290\ \text{cm}^2$. Povrch daného jehlanu tedy je $S = S_p + 2S_1 + 2S_2 = (400 + 420 + 580)\ \text{cm}^2 = 1\,400\ \text{cm}^2$.



Obr. 9.135



Obr. 9.136

2. Rovnostranný trojúhelník o straně délky a se otáčí kolem vnější osy, která je rovnoběžná s jednou jeho stranou a je od ní vzdálena právě tolik jako těžiště trojúhelníku (obr. 9.136). Určete objem vzniklého rotačního tělesa.

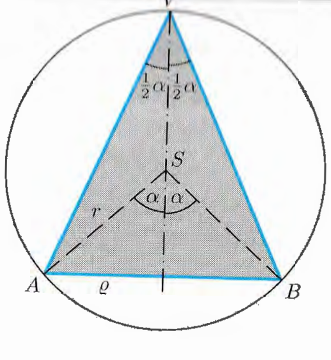
Řešení

Vzniklé těleso je složeno ze dvou komolých rotačních kuželů s dutinou tvaru válce ve směru osy. Každý kužel má výšku $v = |CM| = \frac{a}{2}$ a poloměry podstav $r_1 = |CO_2| = \frac{1}{3}|AM| = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, $r_2 = |AO_1| = 4|CO_2| = \frac{4a\sqrt{3}}{6}$; objem obou je $V_1 = 2 \cdot \frac{\pi v}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) = 2 \cdot \frac{\pi}{3} \cdot \frac{a}{2}\left(\frac{3a^2}{36} + \frac{12a^2}{36} + \frac{48a^2}{36}\right) = \frac{\pi a}{3} \cdot \frac{63a^2}{36} = \frac{7}{12}\pi a^3$. Válec má výšku $v' = |CB| = a$, poloměr podstavy $r = |CO_2| = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ objem $V_2 = \pi r^2 v' = \pi \frac{3a^2}{36} \cdot a = \frac{1}{12}\pi a^3$. Objem obou komolých kuželů s dutinou je $V = V_1 - V_2 = \frac{1}{2}\pi a^3$.

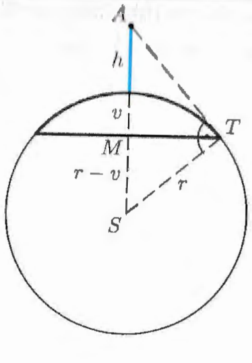
3. Do koule objemu V je vepsán rotační kužel, jehož osový řez má při vrcholu úhel α (obr. 9.137). Určete objem tohoto kužele.

Řešení

Osovým řezem kužele je rovnoramenný trojúhelník ABV. Obvodový úhel příslušný k oblouku AB má velikost $|\sphericalangle AVB| = \alpha$; příslušný středový úhel má velikost $|\sphericalangle ASB| = 2\alpha$. Daný objem koule $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Vepsaný kužel má poloměr podstavy $\varrho = r \sin\alpha$, výšku $v = \varrho \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} = r \sin\alpha \cdot \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} =$



Obr. 9.137



Obr. 9.138

$$= r \cdot 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} = 2r \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2}, \text{ a tedy objem}$$

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi\varrho^2 v = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \sin^2\alpha \cdot 2r \cos^2 \frac{\alpha}{2} =$$
$$= \frac{2}{3}\pi r^3 \sin^2\alpha \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} V \sin^2\alpha \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2}.$$

4. Z jaké výšky h může kosmonaut v každém okamžiku shlédnout 1 % povrchu Země? (Poloměr kulového modelu Země $r \doteq 6\,370$ km.)

Řešení

Kosmonaut v libovolném místě A vidí kulový vrchlík (obr. 9.138). Jeho obsah se má rovnat 0,01 povrchu Země, tj. $2\pi r v = 0{,}01 \cdot 4\pi r^2$, odtud výška vrchlíku $v = 0{,}02r$. Z pravoúhlého trojúhelníku AST plyne podle Eukleidovy věty o odvěsně:

$$|ST|^2 = |SA| \cdot |SM|$$

čili

$$r^2 = (h + r)(r - v), \quad \text{odtud } h + r = \frac{r^2}{r - v};$$

takže

$$h = \frac{r^2}{r - v} - r = \frac{rv}{r - v} = \frac{r \cdot 0{,}02r}{r - 0{,}02r} = \frac{1}{49} r \doteq 130 \text{ km}.$$

Odpověď: Hledaná výška, z níž kosmonaut vidí 1 % povrchu Země, je přibližně 130 km.

10 Analytická geometrie

10.1 Analytické vyjádření geometrického útvaru

Analytická geometrie je založena na vyjadřování geometrických útvarů a vztahů mezi nimi pomocí *metody souřadnic a vektorové algebry*. Těmto metodám se souhrnně říká **analytické metody** (odtud název analytická geometrie).

Analytickým vyjádřením geometrického útvaru nazýváme vztah, který splňují právě souřadnice bodů tohoto útvaru (tj. souřadnice všech bodů tohoto útvaru a žádných jiných bodů). Výrok „Útvar U má analytické vyjádření V“ tedy znamená:

Bod $X \in \mathsf{U} \Leftrightarrow$ souřadnice bodu X splňují analytické vyjádření V neboli platí konjunkce výroků:

1. Souřadnice každého bodu X útvaru U splňují analytické vyjádření V.
2. Každý bod X, jehož souřadnice splňují analytické vyjádření V, je bodem útvaru U.

Poznámka. Z *množinového hlediska* představuje analytické vyjádření geometrického útvaru *rovnost dvou množin*. Jednou množinou je uvažovaný geometrický útvar U, druhou množina bodů U′, jejichž souřadnice vyhovují danému analytickému vyjádření. Platí tedy U = U′.

Analytické vyjádření útvaru U má nejčastěji tvar rovnice nebo nerovnice, resp. jejich soustav, s případnými doplňkovými podmínkami. Proměnnými v analytickém vyjádření útvaru U jsou souřadnice x, y bodů $X \in \mathsf{U}$. V případě analytického vyjádření rovnicí mluvíme o **rovnici geometrického útvaru**, např. o rovnici přímky, úsečky apod.

Kromě tohoto *souřadnicového analytického vyjádření*, ve kterém vystupují souřadnice x, y proměnného bodu $X \in \mathsf{U}$ a dalších pevných bodů, event. vektorů, se užívá též *symbolické analytické vyjádření*, v němž vystupují symboly bodů a vektorů (X, A, $\boldsymbol{u}$ apod.).

Poznámka. V analytické geometrii se zavádí tato *úmluva*: Při zadávání konkrétních souřadnic bodů a vektorů, vzdáleností bodů a velikostí vektorů se v analytické geometrii zpravidla neuvádějí délkové jednotky; obdobně se tu neuvádějí ani jednotky obsahu a objemu. Tato úmluva je možná proto, že se zde prakticky vždy pracuje v zadané kartézské soustavě souřadnic se zvolenou délkovou jednotkou (stejnou na všech souřadnicových osách), ve které jsou udávány všechny délkové údaje. Tato délková jednotka určuje pak i příslušné jednotky obsahu a objemu.

10.2 Soustavy souřadnic v rovině a v prostoru

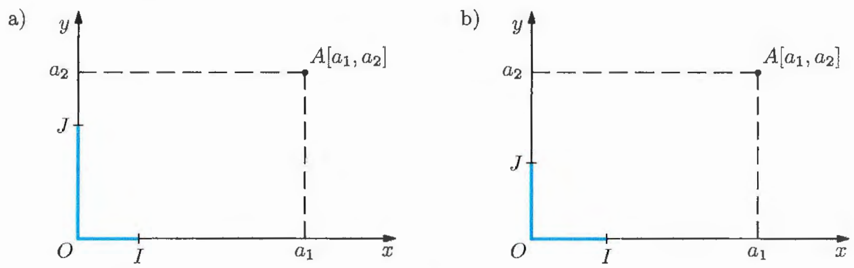
Připomeneme *pojem číselné osy*, kterou dále použijeme: Na libovolné přímce p zvolíme dvojici bodů O, I tak, že $|OI| = 1$ (tj. OI je jednotková úsečka) (obr. 10.1). Bodu O přiřadíme číslo 0 a bodu I číslo 1 (říkáme, že bod O je obrazem čísla 0 a bod I je obrazem čísla 1). Taková přímka p se nazývá **číselná osa** x, bodu O se říká **počátek číselné osy** a bodu I **jednotkový bod číselné osy**. Každému bodu X číselné osy x je vzájemně jednoznačně přiřazeno reálné číslo $x = |OX|$, jestliže bod X leží na polopřímce OI, resp. reálné číslo $x = -|OX|$, jestliže bod X leží na polopřímce opačné k polopřímce OI.

Množina všech bodů číselné osy x, jež jsou přiřazeny číslům $x \geqq 0$, se nazývá **kladná poloosa** číselné osy x a množina všech bodů číselné osy x, jež jsou přiřazeny číslům $x \leqq 0$, se nazývá **záporná poloosa** číselné osy x.

Obr. 10.1

Poznámka. Číslu x přiřazenému bodu X přímky (číselné osy) se říká též **souřadnice bodu** X přímky $p = x$ a píše se $X[x]$. Např. v obr. 10.1 má bod O souřadnici 0, bod I souřadnici 1 a bod A souřadnici a, což zapisujeme $O[0]$, $I[1]$, $A[a]$.

Pravoúhlá (ortogonální) soustava souřadnic v rovině se zavádí tak, že se v této rovině zvolí dvě k sobě kolmé číselné osy x, y se společným počátkem O. Jednotkový bod osy x označíme I, jednotkový bod osy y označíme J. Na obou číselných osách x, y jednotkové úsečky OI a OJ nemusí, ale mohou být shodné (obr. 10.2). Bod O se nazývá **počátek soustavy souřadnic** v rovině a číselné osy x, y se nazývají **osy soustavy souřadnic** (stručněji **osy souřadnic** nebo **souřadnicové osy**).

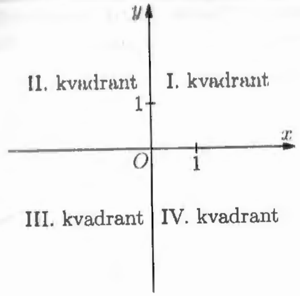


Obr. 10.2

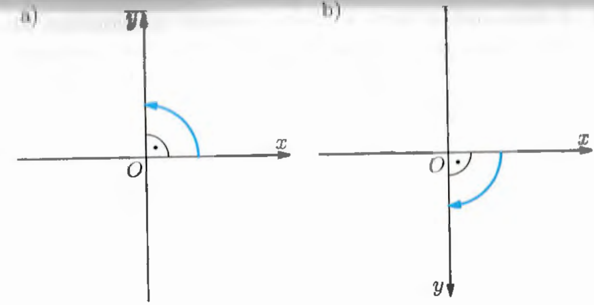
Jsou-li délkové jednotky na souřadnicových osách x, y pravoúhlé soustavy souřadnic stejné, tj. jednotkové úsečky OI, OJ shodné (obr. 10.2b), pak takovou soustavu souřadnic v rovině nazýváme **kartézskou (ortonormální) soustavou souřadnic v rovině**. Značíme ji Oxy.

Souřadnicové osy x, y pravoúhlé soustavy souřadnic v rovině rozdělují tuto rovinu na čtyři shodné části zvané **kvadranty** (obr. 10.3).

Polohu a orientaci os x, y pravoúhlé soustavy souřadnic volíme zpravidla podle obr. 10.4a, jen výjimečně podle obr. 10.4b.



Obr. 10.3



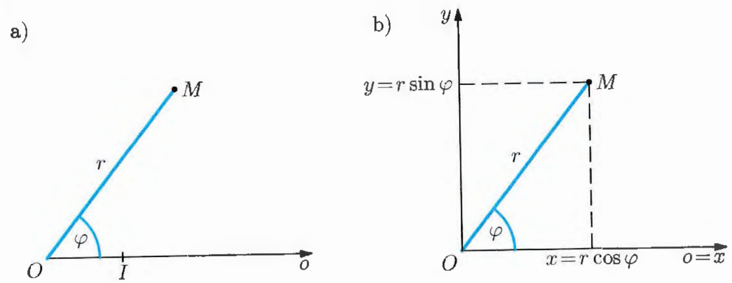
Obr. 10.4

Nechť A je libovolný bod roviny, ve které je zavedena pravoúhlá soustava souřadnic (obr. 10.2a, b). Veďme jím přímku p_1 rovnoběžnou s osou y a přímku p_2 rovnoběžnou s osou x. Přímka p_1 protne osu x v bodě odpovídajícím reálnému číslu a_1 a přímka p_2 protne osu y v bodě odpovídajícím reálnému číslu a_2. Číslo a_1 se nazývá **první souřadnice** (též **x-ová souřadnice**) **bodu** A a číslo a_2 se nazývá **druhá souřadnice** (též **y-ová souřadnice**) **bodu** A v uvažované pravoúhlé soustavě souřadnic. Chceme-li vyjádřit, že bod A má souřadnice a_1, a_2, píšeme $A[a_1, a_2]$. (Dvojice souřadnic je uspořádaná, tj. musíme při jejich psaní dodržet pořadí.)

Poznámky.

1. Kromě pravoúhlé soustavy souřadnic se používají i některé další soustavy souřadnic, zejména tzv. **polární soustava souřadnic** *definovaná* takto: Zvolíme libovolnou přímku roviny za číselnou osu, tzv. **polární osu** (obr. 10.5a). Její počátek O se nazývá **pól**. Jednotkový bod polární osy označíme I ($|OI| = 1$). Libovolnému bodu $M \neq O$ dané roviny přiřadíme jako jeho **polární souřadnice** uspořádanou dvojici čísel $[r, \varphi]$, kde $r = |\boldsymbol{OM}|$ je velikost průvodiče $\boldsymbol{OM}$ bodu M a φ je velikost tzv. **polárního úhlu** sevřeného kladnou poloosou OI polární osy a polopřímkou OM. V obloukové míře je $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$. [V literatuře se někdy též polární úhel definuje jako úhel otáčení kladné poloosy OI do polopřímky OM, přičemž otáčení se provádí buď v kladném smyslu (tj. proti otáčení hodinových ručiček), anebo v záporném smyslu (tj. souhlasně s otáčením hodinových ručiček) a pak je v obloukové míře $\varphi \in (-\pi, +\pi\rangle$.] Zvolíme-li kartézskou soustavu souřadnic Oxy, jejíž počátek je totožný s pólem O, kladná poloosa x je totožná s kladnou poloosou polární osy o a kladné poloose y přísluší polární úhel velikosti $\frac{\pi}{2}$ (v obloukové míře), pak mezi kartézskými souřadnicemi $[x, y]$ a polárními souřadnicemi $[r, \varphi]$ libovolného bodu $M \neq O$ dané roviny (obr. 10.5b) platí vztahy

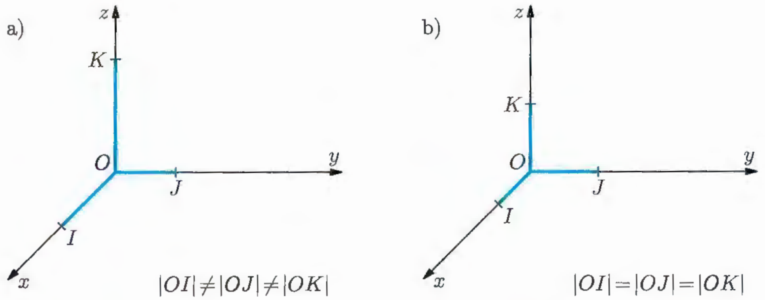
$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi.$$



Obr. 10.5

2. Polární souřadnice se užívají nejen v matematice, ale často i v praxi, např. v geodézii při mapování podrobného polohopisu, při přesunech v terénu (u orientačního běhu apod.), ve vojenství při řízení dělostřelecké či raketové palby.

Pravoúhlá (ortogonální) soustava souřadnic v prostoru se zavádí tak, že se v něm zvolí tři k sobě kolmé číselné osy x, y, z se společným počátkem O. Jednotkový bod osy x značíme I, jednotkový bod osy y označíme J a jednotkový bod osy z označíme K. Jednotkové úsečky OI, OJ, OK na číselných osách x, y, z nemusí, ale mohou být shodné (obr. 10.6a, b). Bod O se nazývá **počátek soustavy souřadnic** v prostoru a číselné osy x, y, z se nazývají **osy soustavy souřadnic** (nebo stručněji **souřadnicové osy**). Roviny OIJ, OJK, OKI se nazývají **roviny souřadnic** (nebo **souřadnicové roviny**), značí se v uvedeném pořadí xy, yz, zx.



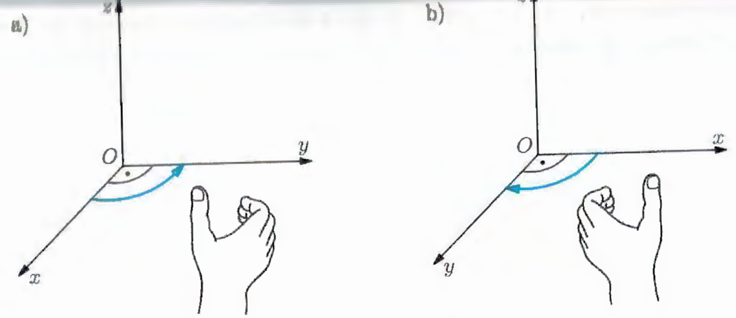
Obr. 10.6

Jsou-li délkové jednotky na souřadnicových osách x, y, z pravoúhlé soustavy souřadnic stejné, tj. jednotkové úsečky OI, OJ, OK jsou shodné (obr. 10.6b), pak takovou soustavu souřadnic v prostoru nazýváme kartézskou (ortonormální) soustavou souřadnic v prostoru. Značíme ji $Oxyz$.

Souřadnicové roviny xy, yz, zx pravoúhlé soustavy souřadnic v prostoru rozdělují prostor na osm shodných částí zvaných **oktanty**.

V aplikacích (ve fyzice, v technice) a též v analytické geometrii se volí osa z pravoúhlé soustavy souřadnic v prostoru tak, že její kladná poloosa směřuje „vzhůru" vůči rovině xy (obr. 10.7a, b). Pravoúhlé soustavě souřadnic v prostoru z obr. 10.7a se říká **pravotočivá**, neboť kladný smysl osy z je dán *pravidlem pravotočivého šroubu*: Položíme-li jeho hlavu do roviny xy a otáčíme jím v kladném smyslu, tj. od osy x k ose y, pak tělo šroubu postupuje v kladném smyslu osy z. Namísto tohoto pravidla lze též užít obdobně jako ve fyzice *pravidla pravé ruky*. Výjimečně, např. v deskriptivní geometrii, se volí pravoúhlá soustava souřadnic v prostoru, která je **levotočivá** (obr. 10.7b).

Nechť A je libovolný bod prostoru, ve kterém je zavedena pravoúhlá soustava souřadnic (obr. 10.6a, b). Tímto bodem prostoru veďme roviny rovnoběžné se souřadnicovými rovinami. Rovina ϱ_1 rovnoběžná s rovinou yz protne osu x v bodě, který označíme A_x. Rovina ϱ_2 rovnoběžná s rovinou zx protne osu y v bodě A_y. Rovina ϱ_3 rovnoběžná s rovinou xy protne osu z v bodě A_z. Bodům A_x, A_y, A_z na souřadnicových osách x, y, z odpovídají čísla a_1, a_2, a_3. Číslo a_1 se nazývá **první souřadnice** (též **x-ová souřadnice**) **bodu** A, číslo a_2 se nazývá **druhá souřadnice** (též **y-ová souřadnice**) **bodu** A a číslo a_3 se nazývá **třetí souřadnice**



Obr. 10.7

(též **z-ová souřadnice**) **bodu** A. Chceme-li vyjádřit, že bod A má souřadnice a_1, a_2, a_3, píšeme $A[a_1, a_2, a_3]$. (Trojice souřadnic je uspořádaná, tj. musíme při jejich psaní dodržet pořadí.)

Poznámka. Analogicky jako v rovině lze též v prostoru uvažovat i jiné než pravoúhlé soustavy souřadnic. S nimi se však seznámíte až ve vysokoškolské matematice.

10.3 Souřadnicové vyjádření vzdálenosti dvou bodů, středu úsečky a těžiště trojúhelníku

Souřadnicové vyjádření vzdálenosti $|AB|$ dvou bodů A, B

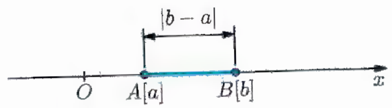
Pro body na přímce, resp. v rovině, resp. v prostoru platí *věty*:

Vzdálenost bodů $A[a]$, $B[b]$ na přímce (číselné ose, obr. 10.8) je dána vzorcem

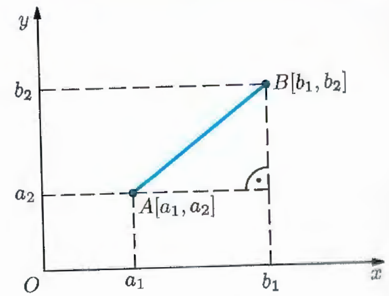
$$|AB| = |b - a|.$$

Vzdálenost bodů $A[a_1, a_2]$, $B[b_1, b_2]$ v kartézské soustavě souřadnic v rovině (obr. 10.9) je dána vzorcem

$$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}.$$



Obr. 10.8

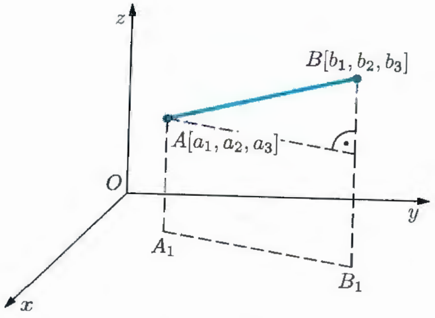


Obr. 10.9

Vzdálenost bodů $A[a_1, a_2, a_3]$, $B[b_1, b_2, b_3]$ v kartézské soustavě souřadnic v prostoru (obr. 10.10) je dána vzorcem

$$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}.$$

Poznámka. První z těchto vzorců vyplývá z geometrického významu absolutní hodnoty rozdílu reálných čísel (kap. 2.1). Druhý vzorec plyne pro úsečku AB v obecné poloze (obr. 10.9) z Pythagorovy věty a ve speciálních polohách (když přímka AB je rovnoběžná s osou x, resp. y) plyne z prvního vzorce. Třetí vzorec plyne pro úsečku AB v obecné poloze (obr. 10.10) opět z Pythagorovy věty, ve speciální poloze (když přímka AB je rovnoběžná s některou ze souřadnicových os, resp. souřadnicových rovin) plyne z prvního, resp. druhého vzorce.



Obr. 10.10

Obr. 10.11

Souřadnice středu úsečky

Pro souřadnice středu úsečky na přímce, resp. v rovině, resp. v prostoru platí *věty:*

Na přímce (číselné ose) má úsečka AB s krajními body $A[a]$, $B[b]$ střed $S[s]$ (obr. 10.11) určený souřadnicí

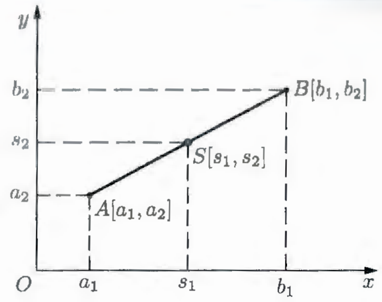
$$s = \frac{a+b}{2}.$$

V rovině s danou pravoúhlou soustavou souřadnic má úsečka AB s krajními body $A[a_1, a_2]$, $B[b_1, b_2]$ střed $S[s_1, s_2]$ (obr. 10.12) o souřadnicích

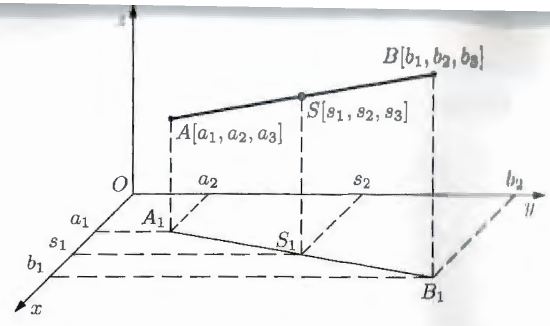
$$s_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}, \qquad s_2 = \frac{a_2 + b_2}{2}.$$

V prostoru s danou pravoúhlou soustavou souřadnic má úsečka AB s krajními body $A[a_1, a_2, a_3]$, $B[b_1, b_2, b_3]$ střed $S[s_1, s_2, s_3]$ (obr. 10.13) o souřadnicích

$$s_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}, \qquad s_2 = \frac{a_2 + b_2}{2}, \qquad s_3 = \frac{a_3 + b_3}{2}.$$



Obr. 10.12



Obr. 10.13

Poznámka. Uvedené vzorce v předcházejících větách lze vyjádřit souhrnně symbolickým zápisem

$$S = \frac{A+B}{2}.$$

Souřadnice těžiště trojúhelníku

Pro souřadnice těžiště trojúhelníku v rovině platí *věta:*

V rovině s danou pravoúhlou soustavou souřadnic má trojúhelník ABC s vrcholy $A[a_1, a_2]$, $B[b_1, b_2]$, $C[c_1, c_2]$ těžiště $T[t_1, t_2]$ o souřadnicích

$$t_1 = \frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}, \qquad t_2 = \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3}.$$

Poznámka. Vzorce uvedené v předchozí větě lze vyjádřit souhrnně symbolickým zápisem

$$T = \frac{A+B+C}{3}.$$

10.4 Transformace pravoúhlé soustavy souřadnic v rovině

Transformace pravoúhlé soustavy souřadnic posunutím

(obr. 10.14)

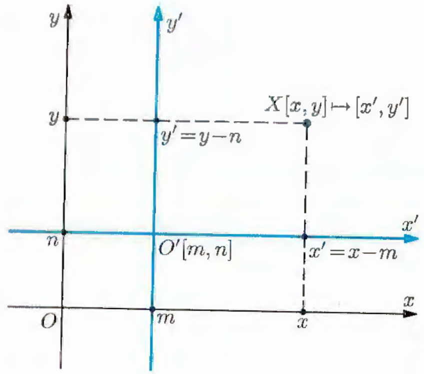
Nechť posunutím počátku O přejdou osy x, y původní pravoúhlé soustavy souřadnic Oxy po řadě v rovnoběžné osy x', y' nové pravoúhlé soustavy souřadnic $O'x'y'$. Pro libovolně zvolený bod X označme $[x, y]$ jeho souřadnice v původní souřadnicové soustavě Oxy a $[x', y']$ jeho souřadnice v nové souřadnicové soustavě $O'x'y'$. Zřejmě mezi nimi platí tyto *transformační vztahy:*

$$x = x' + m, \qquad y = y' + n$$

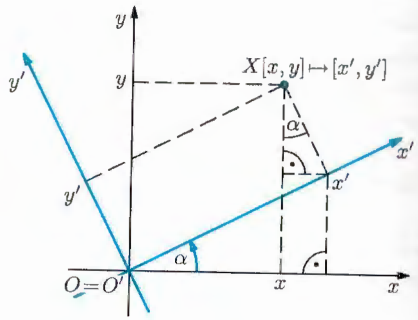
čili

$$x' = x - m, \quad y' = y - n,$$

kde $[m, n]$ jsou souřadnice počátku O' v původní soustavě souřadnic Oxy.



Obr. 10.14



Obr. 10.15

Transformace pravoúhlé soustavy souřadnic otočením
(obr. 10.15)

Nechť otočením kolem počátku O v kladném smyslu (tj. proti pohybu hodinových ručiček) o úhel velikosti α přejdou osy x, y původní pravoúhlé soustavy souřadnic Oxy po řadě v osy x', y' nové pravoúhlé soustavy souřadnic $O'x'y'$. Pro libovolně zvolený bod X označme $[x, y]$ jeho souřadnice v původní souřadnicové soustavě Oxy a $[x', y']$ jeho souřadnice v nové souřadnicové soustavě $O'x'y'$. Lze odvodit, že mezi nimi platí tyto *transformační vztahy*:

$$x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha, \quad y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha$$

čili

$$x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha, \quad y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha.$$

10.5 Orientované úsečky, vázané vektory

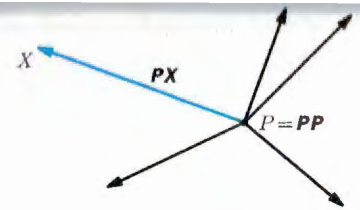
Orientovaná úsečka a její velikost

Orientovaná úsečka *AB* je úsečka AB doplněná o *orientaci*: bod A bereme jako **počáteční bod** a bod B jako **koncový bod** orientované úsečky ***AB***. Body A, B tedy u ní tvoří uspořádanou dvojici (A, B). Zavádí se též **nulová orientovaná úsečka *AA***, jež má týž počáteční i koncový bod A. Tvoří tedy uspořádanou dvojici (A, A).

Orientovaná úsečka s počátečním bodem A a koncovým bodem B se značí v tisku polotučným kurzívním gillem ***AB***, v psaném textu $\overrightarrow{AB}$, resp. $\underline{AB}$.

Graficky se znázorňuje orientovaná úsečka ***AB*** šipkou u koncového bodu B (obr. 10.16)

Obr. 10.16



Obr. 10.17

Velikostí |*AB*| orientované úsečky *AB* se rozumí velikost úsečky AB (při zvolené jednotkové úsečce), tj. $|\boldsymbol{AB}| = |AB|$. Pro nenulovou orientovanou úsečku ***AB*** je tedy $|\boldsymbol{AB}| > 0$ a pro nulovou orientovanou úsečku ***AA*** je $|\boldsymbol{AA}| = 0$.

Poznámka. Jak dále ukážeme, orientované úsečky se užívají k *definování* **geometrických vektorů (vázaných a volných)**. S jejich použitím se též setkáváme ve fyzice při *geometrickém modelování (znázornění)* **fyzikálních vektorů (vektorových veličin)**.

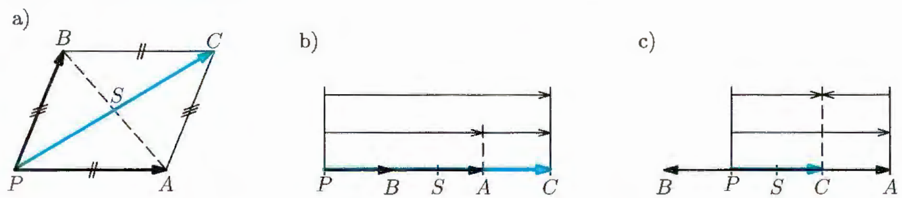
Vázané vektory

Zvolme pevný bod P prostoru. Označme ***PX*** orientovanou úsečku s daným počátečním bodem P a libovolným koncovým bodem X. Pro orientované úsečky ***PX*** se společným počátečním bodem P (obr. 10.17) budeme *definovat operaci sčítání* a *operaci násobení reálným číslem*; tyto orientované úsečky se pak nazývají **vázané vektory.** Množina V všech vázaných vektorů (se společným počátečním bodem P) se nazývá **vektorový prostor vázaných vektorů.**

Definice operací pro vázané vektory a jejich vlastnosti:

Součtem vázaných vektorů *PA*, *PB* se společným počátečním bodem P nazýváme vázaný vektor ***PC***, jehož koncový bod C určíme jako obraz bodu P ve středové souměrnosti podle středu S úsečky AB (obr. 10.18a). Značí se $\boldsymbol{PC} = \boldsymbol{PA} + \boldsymbol{PB}$.

Poznámka. Pokud vázané vektory ***PA***, ***PB*** leží v téže přímce, lze konstrukci součtu $\boldsymbol{PA} + \boldsymbol{PB}$ zjednodušit: v případě podle obr. 10.18b je $|\boldsymbol{PC}| = |\boldsymbol{PA} + \boldsymbol{PB}| = |\boldsymbol{PA}| + |\boldsymbol{PB}|$ a podle obr. 10.18c je $|\boldsymbol{PC}| = |\boldsymbol{PA} + \boldsymbol{PB}| = |\boldsymbol{PA}| - |\boldsymbol{PB}|$ $(|\boldsymbol{PA}| > |\boldsymbol{PB}|)$.



Obr. 10.18

Pro sčítání vázaných vektorů platí *věty*:

Pro každé tři vázané vektory PA, PB, PC platí

$$PA + PB = PB + PA; \quad (PA + PB) + PC = PA + (PB + PC),$$

tj. operace sčítání vázaných vektorů je *komutativní* a *asociativní*.

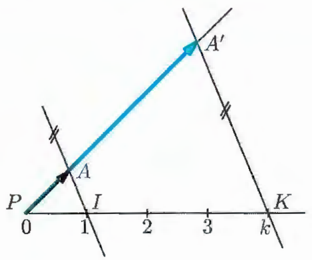
Ke každému vázanému vektoru $PX \in \mathrm{V}$ existuje právě jeden vázaný vektor $PX' \in \mathrm{V}$ takový, že platí

$$PX + PX' = PP.$$

Vázaný vektor PX' se nazývá **opačný vázaný vektor** k PX; značí se $PX' = -PX$. PP je **nulový vázaný vektor.**

Rozdílem vázaných vektorů PA, PB (v uvedeném pořadí) nazýváme vázaný vektor $PD = PA + (-PB)$. Značí se $PD = PA - PB$.

Násobek vázaného vektoru PA **reálným číslem** k je vázaný vektor PA', jehož koncový bod A' určíme jako obraz bodu A ve stejnolehlosti se středem P a koeficientem k (obr. 10.19), je-li $k \neq 0$; $A' = P$, je-li $k = 0$. Vázaný vektor PA' představující k-násobek vázaného vektoru PA se značí $PA' = k \cdot PA$.



Obr. 10.19

Pro násobení vázaných vektorů reálnými čísly platí *věta*:

Pro libovolné vázané vektory PA, $PB \in \mathrm{V}$ a libovolná reálná čísla k, m platí

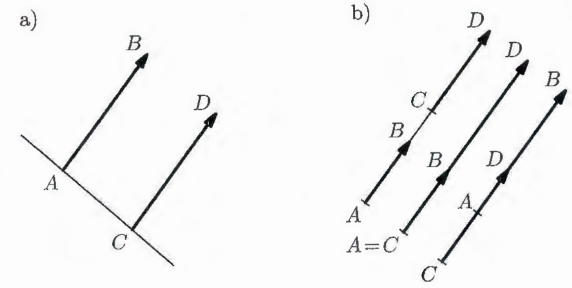
$$k \cdot (m \cdot PA) = km \cdot PA, \qquad k \cdot (-PA) = (-k) \cdot PA,$$
$$k \cdot (PA + PB) = k \cdot PA + k \cdot PB,$$
$$(k + m) \cdot PA = k \cdot PA + m \cdot PA.$$

Poznámka. Vázaný vektor PX často slouží (v matematice i v aplikacích) k určení polohy bodu X vůči danému (pevnému) bodu P (např. počátku soustavy souřadnic), pak se mu říká **polohový vektor** nebo **průvodič (rádiusvektor) bodu** X (vzhledem k bodu P). *Vázané vektory* se užívají i v mnoha dalších případech, zejména při matematickém modelování (geometrickém znázorňování) *vázaných vektorových fyzikálních veličin* (např. rychlostí, sil), jež jsou vázány do určitého bodu (*působiště*). V následujících odstavcích se setkáme s vázanými vektory jako *umístěními* tzv. *volných geometrických vektorů.*

10.6 Volné vektory

Pojem směru (v rovině, resp. v prostoru)

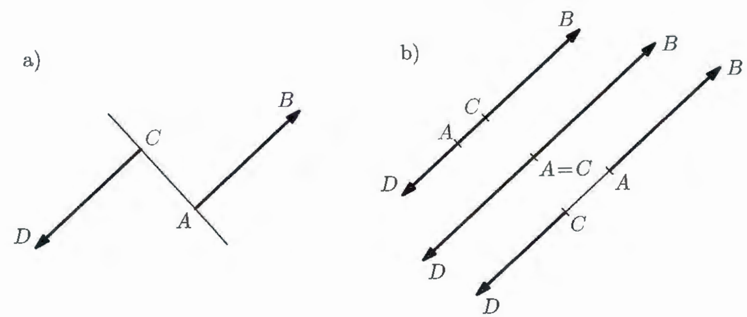
Říkáme, že polopřímky AB, CD jsou **souhlasně rovnoběžné polopřímky** a orientované úsečky AB, CD jsou **souhlasně rovnoběžné orientované úsečky** (píšeme $AB \uparrow\uparrow CD$), právě když buď přímky AB, CD jsou rovnoběžné různé a body B, D leží ve stejné polorovině s hraniční přímkou AC (obr. 10.20a), anebo přímky AB, CD jsou totožné a průnikem polopřímek AB, CD je opět polopřímka, tj. $\mapsto AB \subset \mapsto CD$ nebo $\mapsto CD \subset \mapsto AB$ (obr. 10.20b).



Obr. 10.20

O souhlasně rovnoběžných orientovaných úsečkách se říká, že *určují (udávají)* jistý směr. Každou z nich je směr určen jednoznačně.

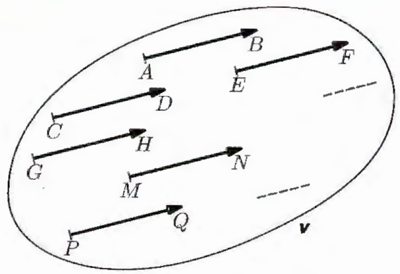
Poznámka. Obdobně jako v případě souhlasné rovnoběžnosti lze definovat **nesouhlasně rovnoběžné polopřímky** AB, CD a **nesouhlasně rovnoběžné orientované úsečky** AB, CD (píšeme $AB \uparrow\downarrow CD$). Viz situace v obr. 10.21a, b. O nesouhlasně rovnoběžných orientovaných úsečkách se říká, že *určují dva navzájem* **opačné směry**. Na dané přímce lze zvolit jeden ze dvou opačných směrů, čímž určíme (zadáme) **orientaci přímky**.



Obr. 10.21

Pojem volného vektoru a jeho umístění, rovnost volných vektorů a základní vektorové operace

O všech nenulových orientovaných úsečkách (na přímce, v rovině, v prostoru), které mají *stejnou velikost a stejný směr* (obr. 10.22), budeme říkat, že představují týž matematický objekt zvaný **nenulový volný vektor**. O všech nulových orientovaných úsečkách budeme říkat, že představují týž **nulový volný vektor**.



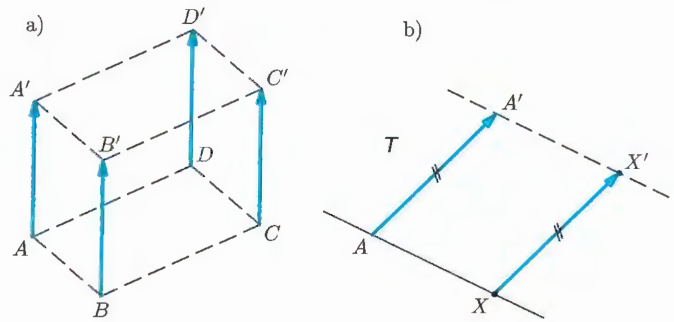
Obr. 10.22

Úmluva. Protože se v dalším textu zabýváme výhradně volnými vektory, budeme pro stručnost vyjadřování přívlastek „volný" zpravidla vynechávat, a budeme tedy hovořit jen o **vektorech**.

Vektory se značí v tisku polotučným kurzívním gillem: $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, apod., nulový vektor $\boldsymbol{o}$; v psaném textu: $\vec{u}$, $\vec{v}$, resp. $\underline{u}$, $\underline{v}$, nulový vektor $\vec{o}$, resp. $\underline{o}$.

Každou orientovanou úsečku $\boldsymbol{AB}$, která představuje vektor $\boldsymbol{v}$, nazýváme **umístění vektoru $\boldsymbol{v}$** (říká se též, že je **reprezentantem vektoru $\boldsymbol{v}$**). Zápisem $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{AB}$ budeme vyjadřovat, že orientovaná úsečka $\boldsymbol{AB}$ je umístěním vektoru $\boldsymbol{v}$, nebo jinak řečeno, že vektor $\boldsymbol{v}$ je jednoznačně určen svým umístěním $\boldsymbol{AB}$.

Například v obrázku 10.23a můžeme považovat orientované úsečky $\boldsymbol{AA'}$, $\boldsymbol{BB'}$, $\boldsymbol{CC'}$, $\boldsymbol{DD'}$ za čtyři umístění téhož vektoru $\boldsymbol{v}$; lze proto zapsat $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{AA'}$, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{BB'}$, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{CC'}$, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{DD'}$ a do obrázku připsat čtyři písmena $\boldsymbol{v}$.



Obr. 10.23

Pojem vektoru a jeho umístění úzce souvisí se shodným geometrickým zobrazením – nenulový vektor s posunutím a nulový vektor s identitou, jak ukazuje *věta:*

Množina všech umístění téhož nenulového vektoru se skládá z orientovaných úseček $\boldsymbol{XX'}$, jejichž koncový bod X' je obrazem počátečního bodu X v jednom a témž *posunutí* T $(A \mapsto A')$ (obr. 10.23b). Množina všech umístění nulového vektoru se skládá z nulových orientovaných úseček $\boldsymbol{XX}$, jejichž koncový bod X je obrazem téhož počátečního bodu X v *identitě*.

Definice rovnosti, kolineárních a komplanárních volných vektorů:

Dva **nenulové vektory** $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ jsou si **rovny** $(\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v})$, právě když jsou si rovny množiny všech jejich umístění.

Dva **vektory** $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ se nazývají **kolineární**, právě když libovolná jejich umístění jsou navzájem rovnoběžná (tj. oba vektory lze umístit na téže přímce). Jsou-li souhlasně rovnoběžná, říkáme, že vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ jsou **souhlasně kolineární**, jsou-li nesouhlasně rovnoběžná, říkáme, že vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ jsou **nesouhlasně kolineární**.

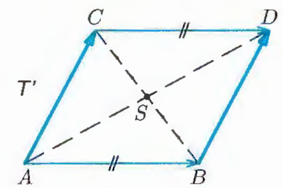
Tři **nenulové vektory** $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ se nazývají **komplanární**, právě když libovolná jejich umístění jsou rovnoběžná s touž rovinou (tj. všechny tři vektory lze umístit v téže rovině).

Definice základních operací s volnými vektory:

Operace s vektory se zavádějí a realizují pomocí jejich umístění. Můžeme přitom využít již zavedených operací s vázanými vektory, tj. orientovanými úsečkami se společným počátečním bodem (kap. 10.5).

Výsledek operací s vektory nezáleží na tom, která umístění vektorů použijeme, jak plyne z *věty:*

Jsou-li dvě orientované úsečky $\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{CD}$ umístěními téhož vektoru, pak geometrické zobrazení, které zobrazuje A na C a B na D, je buď identita, anebo posunutí T $(A \mapsto C,\ B \mapsto D)$ (obr. 10.24).

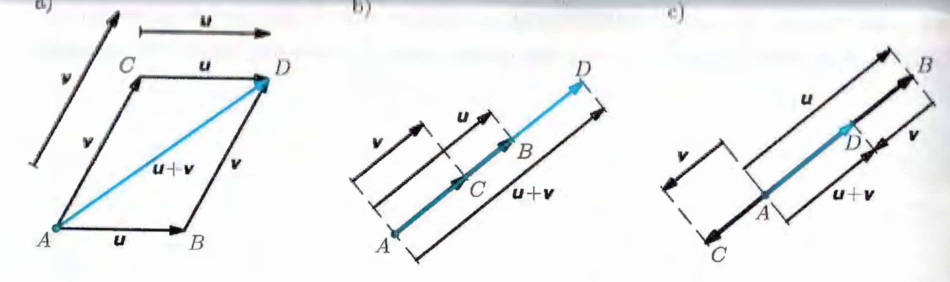


Obr. 10.24

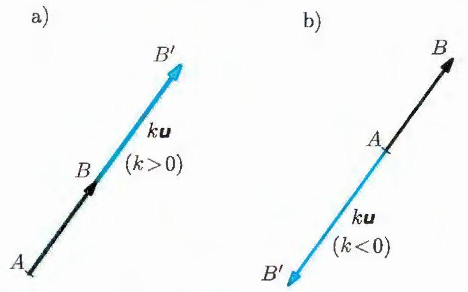
Pro základní operace s volnými vektory (sčítání vektorů a násobení vektorů reálnými čísly) *definujeme:*

Součtem vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, jejichž jedním umístěním jsou orientované úsečky $\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{AC}$ (tj. vektorů $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{AC}$), nazýváme vektor $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$, jehož jedním umístěním je orientovaná úsečka $\boldsymbol{AB} + \boldsymbol{AC}$ (tj. vektor $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{AC}$); viz obr. 10.25a pro nekolineární vektory, obr. 10.25b pro souhlasně kolineární vektory a obr. 10.25c pro nesouhlasně kolineární vektory.

Násobkem vektoru $\boldsymbol{u}$, jehož jedním umístěním je orientovaná úsečka $\boldsymbol{AB}$ (tj. vektoru $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{AB}$) **reálným číslem** k, nazýváme vektor $k \cdot \boldsymbol{u}$ (též se značí $k\boldsymbol{u}$), jehož jedním umístěním je orientovaná úsečka $k \cdot \boldsymbol{AB}$ (tj. vektor $k \cdot \boldsymbol{u} = k \cdot \boldsymbol{AB}$); viz obr. 10.26a pro $k > 0$ a obr. 10.26b pro $k < 0$; je-li $k = 0$, je $k\boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}$.



Obr. 10.25

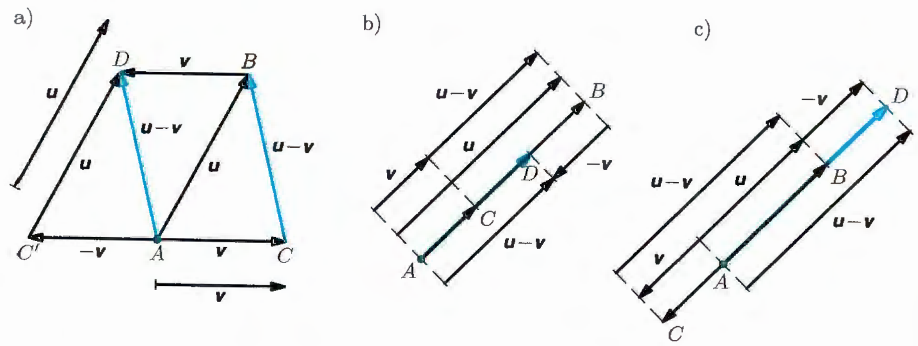


Obr. 10.26

Vektorem opačným k vektoru $\boldsymbol{u}$, jehož jedním umístěním je orientovaná úsečka $\boldsymbol{AB}$ (tj. k vektoru $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{AB}$) nazýváme vektor $-\boldsymbol{u}$, jehož jedním umístěním je orientovaná úsečka $-\boldsymbol{AB}$ (tj. vektor $-\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{AB}$).

Rozdílem vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ (v uvedeném pořadí), jejichž jedním umístěním jsou orientované úsečky $\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{AC}$ (tj. vektorů $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{AC}$), nazýváme vektor $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$, jehož jedním umístěním je orientovaná úsečka $\boldsymbol{AB} - \boldsymbol{AC}$ (tj. vektor $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} = \boldsymbol{AB} - \boldsymbol{AC}$); viz obr. 10.27a pro nekolineární vektory, obr. 10.27b pro souhlasně kolineární vektory a obr. 10.27c pro nesouhlasně kolineární vektory. Zřejmě platí

$$\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{v}).$$



Obr. 10.27

Základní vlastnosti rovnosti vektorů a operací s nimi

Nechť V je množina všech vektorů (na přímce, v rovině, v prostoru) neboli **vektorový prostor volných vektorů**. Vztah rovnosti a základní operace s volnými vektory mají vlastnosti vyjádřené následujícími *základními větami*.

Základní věty vektorové algebry

V.1. V množině V je definován vztah **rovnosti mezi vektory** ($\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$), který má tyto vlastnosti:

1. Pro každý vektor $\boldsymbol{u} \in$ V platí $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$,
2. $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} \Rightarrow \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}$,
3. $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{v} = \boldsymbol{w} \Rightarrow \boldsymbol{u} = \boldsymbol{w}$.

V.2. Ke každé uspořádané dvojici vektorů $\boldsymbol{u} \in$ V, $\boldsymbol{v} \in$ V je přiřazen právě jeden vektor $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ zvaný **součet vektorů** $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, který má tyto vlastnosti:

1. Pro každou dvojici vektorů $\boldsymbol{u} \in$ V, $\boldsymbol{v} \in$ V platí $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$ (*komutativnost sčítání vektorů*).
2. Pro každou trojici vektorů $\boldsymbol{u} \in$ V, $\boldsymbol{v} \in$ V, $\boldsymbol{w} \in$ V platí $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$ (*asociativnost sčítání vektorů*).
3. Existuje takový vektor $\boldsymbol{o} \in$ V zvaný **nulový vektor**, že pro každý vektor $\boldsymbol{u} \in$ V platí
$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{o} = \boldsymbol{u}.$$
4. Ke každému vektoru $\boldsymbol{u} \in$ V existuje takový vektor $-\boldsymbol{u} \in$ V zvaný **opačný vektor**, že
$$\boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{o}.$$

V.3. Ke každému číslu $k \in$ R a každému vektoru $\boldsymbol{u} \in$ V je přiřazen právě jeden vektor $k\boldsymbol{u} \in$ V zvaný **k-násobek vektoru** $\boldsymbol{u}$ s těmito vlastnostmi:

1. Pro každá dvě čísla $k \in$ R, $m \in$ R a každý vektor $\boldsymbol{u} \in$ V platí $k(m\boldsymbol{u}) = (km)\boldsymbol{u}$ (*asociativnost násobení vektorů čísly*).
2. Pro každá dvě čísla $k \in$ R, $m \in$ R a každý vektor $\boldsymbol{u} \in$ V platí $(k + m)\boldsymbol{u} = k\boldsymbol{u} + m\boldsymbol{u}$ (*distributivnost násobení vektorů čísly vzhledem ke sčítání čísel*).
3. Pro každé reálné číslo $k \in$ R a každé dva vektory $\boldsymbol{u} \in$ V, $\boldsymbol{v} \in$ V platí $k(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = k\boldsymbol{u} + k\boldsymbol{v}$ (*distributivnost násobení vektorů čísly vzhledem ke sčítání vektorů*).
4. Pro každý vektor $\boldsymbol{u} \in$ V platí
$$1\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}.$$

Z V.2 plyne *věta*:

Ke každým dvěma vektorům $\boldsymbol{u} \in$ V, $\boldsymbol{v} \in$ V existuje právě jeden vektor $\boldsymbol{x} \in$ V zvaný **rozdíl vektorů** $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ (označovaný $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$), pro který platí

$$\boldsymbol{v} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{v}).$$

Z definice rozdílu vektorů plyne:

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} \Leftrightarrow \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}$$

Důsledky jsou tyto další důležité *vlastnosti rovnosti vektorů:*

$$\forall \boldsymbol{c} \in \mathrm{V}: \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} \Leftrightarrow \boldsymbol{u} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{c}$$
$$\forall k \in \mathrm{R}: \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} \Rightarrow k\boldsymbol{u} = k\boldsymbol{v}$$
$$\forall k \in \mathrm{R}: k\boldsymbol{u} = k\boldsymbol{v} \Rightarrow k = 0 \vee \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$$

Poznámka. Obdobné vlastnosti k vlastnostem volných vektorů, uvedených ve větách V.1 a V.2, mají též vázané vektory (viz kap. 10.5). Na vysoké škole uvidíte, že těmito vlastnostmi jako axiomy se v lineární algebře *axiomaticky zavádí pojem vektoru*, jehož speciálními případy jsou *geometrické vektory*.

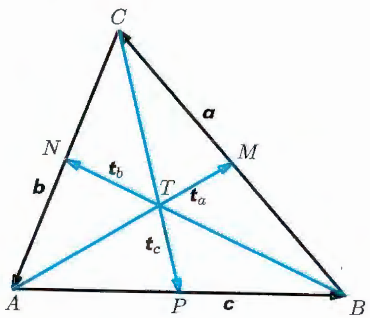
Lineární kombinace vektorů

Ve vektorové algebře často pracujeme se součty reálných násobků několika vektorů, a je proto pro ně zaveden speciální název.

Nechť je dáno n libovolných vektorů $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n$. Každý vektor ve tvaru $\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \dots + c_n\boldsymbol{v}_n$, kde $c_1, c_2, \dots, c_n$ jsou reálná čísla, nazýváme **lineární kombinací vektorů** $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n$.

Příklady lineárních kombinací daných vektorů

Nechť je dán trojúhelník ABC a v něm jsou označeny M, N, P středy stran proti vrcholům A, B, C (obr. 10.28). Vyjádřete vektory $\boldsymbol{t}_a = \boldsymbol{AM}$, $\boldsymbol{t}_b = \boldsymbol{BN}$, $\boldsymbol{t}_c = \boldsymbol{CP}$ jako lineární kombinace vektorů $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{BC}$, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{AB}$.



Obr. 10.28

Řešení

Označme $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{CA} = -\boldsymbol{AC} = -(\boldsymbol{c} + \boldsymbol{a})$, pak

$$\boldsymbol{t}_a = \boldsymbol{AM} = \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{BM} = \boldsymbol{AB} + \frac{1}{2}\boldsymbol{BC} = \boldsymbol{c} + \frac{1}{2}\boldsymbol{a},$$

$$\boldsymbol{t}_b = \boldsymbol{BN} = \boldsymbol{BC} + \boldsymbol{CN} = \boldsymbol{BC} + \frac{1}{2}\boldsymbol{CA} = \boldsymbol{a} - \frac{1}{2}(\boldsymbol{c} + \boldsymbol{a}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{a} - \frac{1}{2}\boldsymbol{c},$$
$$\boldsymbol{t}_c = \boldsymbol{CP} = \boldsymbol{CA} - \boldsymbol{AP} = \boldsymbol{CA} + \frac{1}{2}\boldsymbol{AB} = -(\boldsymbol{c} + \boldsymbol{a}) + \frac{1}{2}\boldsymbol{c} = -\boldsymbol{a} - \frac{1}{2}\boldsymbol{c}.$$

S pojmem lineární kombinace vektorů souvisejí pojmy lineární závislosti a lineární nezávislosti vektorů.

Definujeme: Vektory $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_k$ ($k \in \mathrm{N}$, $k > 1$) se nazývají **lineárně závislé vektory**, právě když lze jeden z nich vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních. Nejsou-li vektory $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_k$ lineárně závislé, tj. žádný z nich není lineární kombinací ostatních, nazývají se **lineárně nezávislé vektory**.

Pro nenulové geometrické vektory v rovině, resp. v prostoru platí *věty:*

Dva nenulové vektory jsou lineárně závislé, právě když jsou *kolineární*. *Tři nenulové vektory jsou lineárně závislé*, právě když jsou *komplanární*.

Poznámka. *Volné geometrické vektory* jsou velmi významně využívány v **analytické geometrii lineárních útvarů** (viz kap. 10.9). Uplatňují se i v dalších matematických i mimomatematických aplikacích, mj. při matematickém modelování *volných vektorových fyzikálních veličin.*

10.7 Souřadnice vektorů

Při zavedení souřadnic vektorů vycházíme z *věty:*

V.1. Nechť $\boldsymbol{e}$ je libovolný nenulový vektor, pak každý vektor $\boldsymbol{v}$, který je s ním kolineární, resp. je nulový, lze jednoznačně vyjádřit ve tvaru

$$\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{e}, \quad \text{kde } v \in \mathrm{R}, \tag{1}$$

tj. existuje právě jedno takové reálné číslo v, že vektor $\boldsymbol{v}$ je roven součinu $v\boldsymbol{e}$.

Při zavedení souřadnic vektorů v rovině vycházíme pak z *věty:*

V.2. Nechť $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ jsou libovolné dva nenulové nekolineární vektory v rovině (žádná umístění vektorů $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ tedy neleží na jedné přímce), pak libovolný vektor $\boldsymbol{v}$ v rovině lze jednoznačně vyjádřit ve tvaru

$$\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{e}_1 + v_2\boldsymbol{e}_2, \quad \text{kde } v_1, v_2 \in \mathrm{R}, \tag{2}$$

tj. jako lineární kombinaci vektorů $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$.

Analogicky při zavedení souřadnic vektorů v prostoru vycházíme z *věty*:

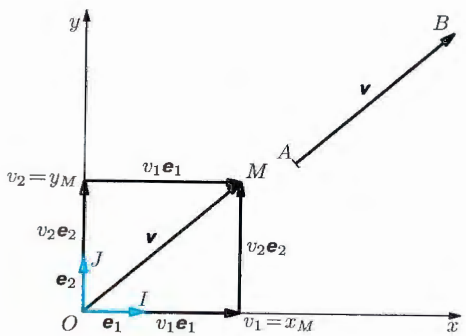
V.3. Nechť e_1, e_2, e_3 jsou libovolné tři nenulové nekomplanární vektory v prostoru (žádná umístění vektorů e_1, e_2, e_3 tedy neleží v jedné rovině), pak libovolný vektor $\boldsymbol{v}$ v prostoru lze vyjádřit ve tvaru

$$v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3, \quad \text{kde } v_1, v_2, v_3 \in \mathrm{R}, \tag{3}$$

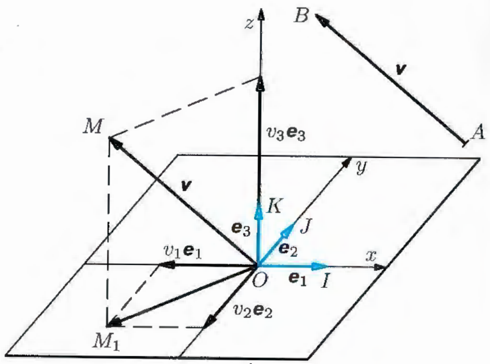
tj. jako lineární kombinaci vektorů e_1, e_2, e_3.

Uspořádaná dvojice nenulových nekolineárních vektorů e_1, e_2 v rovině, resp. uspořádaná trojice nenulových nekomplanárních vektorů e_1, e_2, e_3 v prostoru se nazývá **báze** vektorového prostoru vektorů v rovině, resp. v prostoru. Vektory e_1, e_2, resp. e_1, e_2, e_3 se nazývají **vektory báze** (nebo **bázové vektory**). Vyjádříme-li libovolný vektor $\boldsymbol{v}$ v rovině ve tvaru (2), resp. v prostoru ve tvaru (3), pak říkáme, že jsme provedli **rozklad vektoru $\boldsymbol{v}$ do vektorů báze** e_1, e_2, resp. e_1, e_2, e_3. Vektorům $v_1 e_1$, $v_2 e_2$, resp. $v_1 e_1$, $v_2 e_2$, $v_3 e_3$ se říká **složky vektoru $\boldsymbol{v}$ v dané bázi** a čísla v_1, v_2, resp. v_1, v_2, v_3 se nazývají **souřadnice vektoru $\boldsymbol{v}$**. Píšeme (vzhledem k tomu, že vektor $\boldsymbol{v}$ je podle uvedených vět určen svými souřadnicemi jednoznačně) $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$, resp. $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$.

Pracujeme-li s danou pravoúhlou soustavou souřadnic Oxy v rovině, resp. $Oxyz$ v prostoru, je účelné a vhodné volit jako bázové vektory e_1, e_2, resp. e_1, e_2, e_3 **souřadnicové vektory**, tj. jednotkové vektory, jež mají směry os x, y souřadnicové soustavy v rovině (obr. 10.29), resp. os x, y, z souřadnicové soustavy v prostoru (obr. 10.30); tedy $e_1 = \boldsymbol{OI}$, $e_2 = \boldsymbol{OJ}$, $e_3 = \boldsymbol{OK}$. Souřadnice vektoru $\boldsymbol{v}$ se pak často (zejména ve fyzice a v technických aplikacích) značí v_x, v_y v rovinném případě a v_x, v_y, v_z v prostorovém případě.



Obr. 10.29



Obr. 10.30

Obvykle pracujeme speciálně s kartézskou (ortonormální) soustavou souřadnic v rovině, resp. v prostoru, kde bázové (souřadnicové) vektory tvoří **ortonormální bázi**, tj. jsou k sobě kolmé (ortogonální) a jednotkové. Značí se pak zpravidla místo e_1, e_2, e_3 po řadě $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$; tedy $\boldsymbol{i} = \boldsymbol{OI}$, $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{OJ}$, $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{OK}$. Vztah (2) pro vektor $\boldsymbol{v}$

v rovině pak nabývá tvaru

$$\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{i} + v_2\boldsymbol{j}, \quad \text{kde } v_1, v_2 \in \mathrm{R}, \tag{2'}$$

a vztah (3) pro vektor $\boldsymbol{v}$ v prostoru nabývá tvaru

$$\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{i} + v_2\boldsymbol{j} + v_3\boldsymbol{k}, \quad \text{kde } v_1, v_2, v_3 \in \mathrm{R}. \tag{3'}$$

Věty o souřadnicovém vyjádření vztahu rovnosti a operací s vektory

V.4. Nechť je dána pravoúhlá (speciálně kartézská) souřadnicová soustava v prostoru.[1] Pro každé dva vektory $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ platí

a) $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} \Leftrightarrow u_1 = v_1,\ u_2 = v_2,\ u_3 = v_3,$ (4)
vektory jsou si rovny, právě když se rovnají jejich příslušné souřadnice,

b) $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (u_1 + v_1,\ u_2 + v_2,\ u_3 + v_3),$ (5)
souřadnice součtu vektorů jsou rovny součtu příslušných souřadnic těchto vektorů,

c) $k\boldsymbol{v} = (kv_1, kv_2, kv_3)$ pro každé $k \in \mathrm{R}$. (6)

Věta o vyjádření souřadnic vektoru pomocí souřadnic krajních bodů umístění vektoru

V.5. Nechť je dána pravoúhlá (speciálně kartézská) soustava souřadnic v prostoru.[1] Libovolný nenulový vektor $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$, jehož jedním umístěním je orientovaná úsečka $\boldsymbol{AB}$ s počátečním bodem $A[a_1, a_2, a_3]$ a koncovým bodem $B[b_1, b_2, b_3]$, tj. vektor $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{AB}$, má souřadnice rovné rozdílům souřadnic bodů B, A (v uvedeném pořadí):

$$v_1 = b_1 - a_1, \quad v_2 = b_2 - a_2, \quad v_3 = b_3 - a_3. \tag{7}$$

Úmluva. Rovnosti (7) se souhrnně vyjadřují symbolickým zápisem

$$\boldsymbol{v} = B - A. \tag{8}$$

Výraz na pravé straně této rovnosti se nazývá **rozdíl bodů** B, A (v uvedeném pořadí); vyjadřuje vektor $\boldsymbol{v}$, jehož jedním umístěním je orientovaná úsečka $\boldsymbol{AB}$. Někdy je účelné přepsat rovnosti (7) v ekvivalentních tvarech

$$b_1 = a_1 + v_1, \quad b_2 = a_2 + v_2, \quad b_3 = a_3 + v_3. \tag{9}$$

Souhrnně se rovnosti (9) vyjadřují symbolickým zápisem

$$B = A + \boldsymbol{v}. \tag{10}$$

Výraz na pravé straně tohoto vztahu se nazývá **součet bodu** A **a vektoru** $\boldsymbol{v}$; představuje koncový bod B umístění vektoru $\boldsymbol{v}$ s počátečním bodem A.

[1] Věty V.4, V.5 platí i pro soustavu souřadnic v rovině, kde nepíšeme třetí souřadnice, jež jsou nulové.

1. Dokažte větu V.4 o souřadnicovém vyjádření vztahu rovnosti a operací s vektory.

Důkazy tvrzení věty V.4 vycházejí ze vztahu (3), podle něhož je

$$\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{e}_1 + u_2\boldsymbol{e}_2 + u_3\boldsymbol{e}_3 = (u_1, u_2, u_3),$$
$$\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{e}_1 + v_2\boldsymbol{e}_2 + v_3\boldsymbol{e}_3 = (v_1, v_2, v_3),$$

takže platí:

a) $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} \Leftrightarrow u_1\boldsymbol{e}_1 + u_2\boldsymbol{e}_2 + u_3\boldsymbol{e}_3 = v_1\boldsymbol{e}_1 + v_2\boldsymbol{e}_2 + v_3\boldsymbol{e}_3 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (u_1, u_2, u_3) = (v_1, v_2, v_3) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow u_1 = v_1,\ u_2 = v_2,\ u_3 = v_3.$

b) $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (u_1\boldsymbol{e}_1 + u_2\boldsymbol{e}_2 + u_3\boldsymbol{e}_3) + (v_1\boldsymbol{e}_1 + v_2\boldsymbol{e}_2 + v_3\boldsymbol{e}_3) =$
$= (u_1 + v_1)\boldsymbol{e}_1 + (u_2 + v_2)\boldsymbol{e}_2 + (u_3 + v_3)\boldsymbol{e}_3 =$
$= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3),$

c) $k\boldsymbol{v} = k(v_1\boldsymbol{e}_1 + v_2\boldsymbol{e}_2 + v_3\boldsymbol{e}_3) = (kv_1)\boldsymbol{e}_1 + (kv_2)\boldsymbol{e}_2 + (kv_3)\boldsymbol{e}_3 =$
$= (kv_1, kv_2, kv_3)$

2. Dokažte větu V.5 o vyjádření souřadnic vektoru pomocí souřadnic krajních bodů libovolného jeho umístění.

Důkaz
Vektor $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{AB}$ lze vyjádřit jako rozdíl vektorů s umístěními $\boldsymbol{OA}$, $\boldsymbol{OB}$ (obr. 10.31):

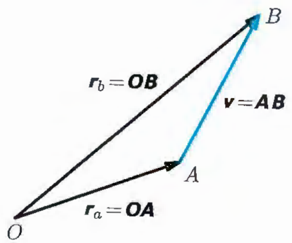
$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{OB} - \boldsymbol{OA}$$

Protože podle předpokladů věty V.5 je pro souřadnice bodů A, B zvoleno označení $A[a_1, a_2, a_3]$, $B[b_1, b_2, b_3]$, platí

$$\boldsymbol{OA} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3, \qquad \boldsymbol{OB} = b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + b_3\boldsymbol{e}_3,$$

kde $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{OI}$, $\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{OJ}$, $\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{OK}$, a tedy po dosazení dostáváme:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} &= (b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + b_3\boldsymbol{e}_3) - (a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3) =\\ &= (b_1 - a_1)\boldsymbol{e}_1 + (b_2 - a_2)\boldsymbol{e}_2 + (b_3 - a_3)\boldsymbol{e}_3 =\\ &= (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)\end{aligned}$$



Obr. 10.31

Poznámka. Jistě jste si povšimli, že při formulaci uvedených vět jsme pro souřadnice bodů A, B použili označení dvou typů:

$$A[x_A, y_A, z_A], \quad B[x_B, y_B, z_B] \quad \text{a} \quad A[a_1, a_2, a_3], \quad B[b_1, b_2, b_3].$$

Druhé označení je vhodné použít např. tehdy, když jsou zároveň obdobně označeny souřadnice vektorů: $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$.

10.8 Velikost vektoru a úhel dvou vektorů, skalární a vektorový součin vektorů

Pojmy velikost vektoru a úhel dvou vektorů

Velikostí $|\boldsymbol{v}|$ vektoru $\boldsymbol{v}$ nazýváme velikost libovolného jeho umístění $\boldsymbol{AB}$:

$$|\boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{AB}| = |AB|$$

Často, např. ve fyzice, se značí v místo $|\boldsymbol{v}|$.
Velikost nulového vektoru je 0.

Vektor $\boldsymbol{v}_0$, jehož velikost $|\boldsymbol{v}_0| = 1$, se nazývá **jednotkový vektor**. (Někdy se též značí $\boldsymbol{v}^0$.)
Pro velikost součinu reálného čísla a vektoru platí *věta:*

Pro každé $k \in \mathrm{R}$ je

$$|k\boldsymbol{v}| = |k| \cdot |\boldsymbol{v}|.$$

Věta o vyjádření velikosti vektoru pomocí jeho souřadnic
Pro každý vektor $\boldsymbol{v}$, který má v kartézské (ortonormální) soustavě souřadnic v prostoru souřadnice (v_1, v_2, v_3), platí

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}.$$

Speciálně: Pro každý vektor $\boldsymbol{v}$, který má v kartézské (ortonormální) soustavě souřadnic v rovině souřadnice (v_1, v_2), platí

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}.$$

Poznámka. Podle definice je velikost vektoru $\boldsymbol{v}$ rovna velikosti libovolného jeho umístění. Pro rovinný případ (obr. 10.29) je proto

$$|\boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{OM}| = |OM| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

a pro prostorový případ (obr. 10.30) je

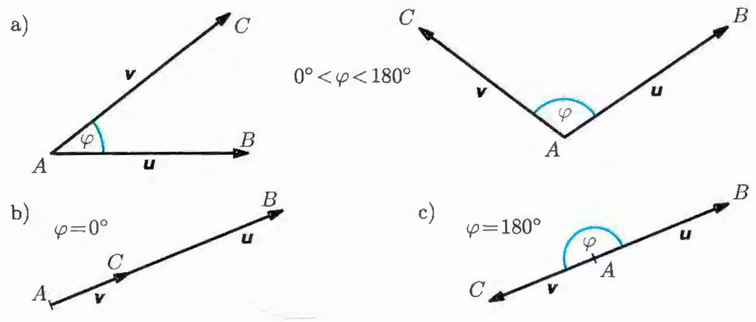
$$|\boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{OM}| = |OM| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2},$$

kde k výpočtu $|OM|$ jsme použili vzorec pro vzdálenost dvou bodů (kap. 10.3), přičemž v rovinném případě (obr. 10.29) je $O[0; 0]$, $M[v_1, v_2]$ a v prostorovém případě (obr. 10.30) je $O[0; 0; 0]$, $M[v_1, v_2, v_3]$.

Úhlem dvou nenulových vektorů $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{AC}$, tj. vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, jež mají umístění $\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{AC}$ se společným počátečním bodem A, nazýváme *konvexní úhel BAC o velikosti* $\varphi = |\sphericalangle BAC|$, pro kterou platí (obr. 10.32a, b, c)

$$0° \leqq \varphi \leqq 180° \quad \text{neboli v rad} \quad 0 \leqq \varphi \leqq \pi.$$

Poznámka. Úhel dvou vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, z nichž alespoň jeden je nulový, *se nedefinuje*.



Obr. 10.32

Skalární součin vektorů

Skalárním součinem $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ dvou nenulových vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ nazýváme reálné číslo, které dostaneme jako součin velikostí vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ a kosinu velikosti úhlu φ těchto vektorů (obr. 10.32):

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = |\boldsymbol{u}| \cdot |\boldsymbol{v}| \cos \varphi$$

Skalární součin dvou vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, z nichž **alespoň jeden je nulový,** se klade roven nule:

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 0$$

Název skalární součin vektorů pochází z toho, že fyzikálním veličinám, které jsou určeny jednoznačně svou číselnou hodnotou (tj. číselným údajem vyjádřeným jediným reálným číslem), se říká *skaláry* nebo *skalární veličiny*.

Operaci, jíž každé dvojici vektorů z daného vektorového prostoru $\boldsymbol{V}$ přiřazujeme jejich skalární součin, nazýváme **skalárním násobením vektorů.**

Věty o algebraických vlastnostech skalárního součinu vektorů

V.1. Pro libovolné dva vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ platí
$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}$ (*komutativnost skalárního součinu vektorů*).

V.2. Pro libovolné dva vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ a libovolné reálné číslo k platí
$(k\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{v} = k(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})$ (*asociativnost skalárního součinu vektorů vzhledem k násobení číslem*).

V.3. Pro libovolné tři vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ platí
$(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}$ (*distributivnost skalárního součinu vektorů vzhledem ke sčítání vektorů*).
Matematickou indukcí lze tuto vlastnost zobecnit pro libovolný počet sčítanců.

V.4. Pro skalární součin $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}$ ($\boldsymbol{u}$ je libovolný vektor), který značíme $\boldsymbol{u}^2$, platí

$$\boldsymbol{u}^2 = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} = |\boldsymbol{u}|^2.$$

V.5. Jsou-li $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ nenulové souhlasně kolineární vektory, je velikost jejich úhlu $\varphi = 0$, a tedy $\cos \varphi = 1$, takže $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = |\boldsymbol{u}| \cdot |\boldsymbol{v}|$; jsou-li $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ nenulové nesouhlasně kolineární vektory, je velikost jejich úhlu $\varphi = \pi$, a tedy $\cos \varphi = -1$, takže $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = -|\boldsymbol{u}| \cdot |\boldsymbol{v}|$.

V.6. Skalární součin dvou vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ je nulový právě tehdy, když buď alespoň jeden z vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ je nulový vektor, anebo když vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ jsou oba nenulové a navzájem **kolmé** (úhel jimi sevřený je pravý, takže $\varphi = \frac{\pi}{2}$, a tedy $\cos \varphi = 0$):

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{u} = \boldsymbol{o} \vee \boldsymbol{v} = \boldsymbol{o} \Leftrightarrow |\boldsymbol{u}| = 0 \vee |\boldsymbol{v}| = 0 \\ \boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{o},\ \boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{o},\ \boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v} \left(\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \varphi = 0\right) \end{cases}$$

Uvedené základní vlastnosti skalárního součinu vyjádřené větami V.1 až V.3 jsou *analogické vlastnostem operací s reálnými, resp. komplexními čísly* (kap. 2.5, 2.8). Z těchto vlastností vyplývá, že skalární násobení součtů vektorů lze provádět zcela obdobně jako násobení mnohočlenu mnohočlenem v oboru R, resp. C (kap. 3.1).

Je však třeba uvědomit si též *specifické vlastnosti skalárního součinu*, jimiž se podstatně liší od násobení čísel:

a) Skalární součin je definován pouze pro dva vektory, zatímco násobení čísel lze definovat pro libovolný počet činitelů.

b) Nechť pro nenulové vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ jsou si rovny skalární součiny

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w}.$$

Odtud plyne, že

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w} = 0$$

čili

$$\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}) = 0.$$

To však neznamená, že musí být $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} = \boldsymbol{o}$ čili $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}$, neboť podle věty V.6 o rovnosti skalárního součinu nule může být vektor $\boldsymbol{u}$ kolmý k vektoru $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}$.

Příklady výpočtu skalárního součinu vektorů užitím jeho definice a základních vlastností

1. Vypočtěte skalární součin vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, je-li $|\boldsymbol{u}| = 5$, $|\boldsymbol{v}| = 2$ a má-li úhel vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ velikost

   a) $\varphi = 45°$, b) $\varphi = 60°$, c) $\varphi = 120°$.

   Řešení
   Podle definice je $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = |\boldsymbol{u}|\,|\boldsymbol{v}| \cos\varphi$. Po dosazení dostáváme:

   a) $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 5 \cdot 2 \cos 45° = 10 \cos 45° = 10 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$

   b) $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 5 \cdot 2 \cos 60° = 10 \cos 60° = 10 \cdot \dfrac{1}{2} = 5$

   c) $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 5 \cdot 2 \cos 120° = 10 \cos (180° - 60°) = -10 \cos 60° = -5$

2. Vypočtěte skalární součiny všech dvojic bázových vektorů $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ kartézské (ortonormální) soustavy souřadnic v prostoru: $\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{i}^2$, $\boldsymbol{j}^2$, $\boldsymbol{k}^2$.

   Řešení
   Každý z daných bázových vektorů je jednotkový, tj. $|\boldsymbol{i}| = 1$, $|\boldsymbol{j}| = 1$, $|\boldsymbol{k}| = 1$. Každé dva z nich jsou k sobě kolmé a libovolný vektor sám se sebou svírá úhel nulový. Proto podle definice skalárního součinu je $\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j} = |\boldsymbol{i}| \cdot |\boldsymbol{i}| \cos 90° = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$ a obdobně $\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{i} = 0$, $\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{k} = 0$, $\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{i} = 0$, $\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{k} = 0$, $\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{j} = 0$, $\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} = |\boldsymbol{i}| \cdot |\boldsymbol{i}| \cos 0° = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$ a obdobně $\boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{j} = 1$, $\boldsymbol{k}^2 = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k} = 1$.

Poznámka. S pojmem skalárního součinu dvojice vektorů souvisejí dva pojmy užívané zejména ve fyzice a v technických vědách:

Složkou vektoru $\boldsymbol{u}$ do vektoru $\boldsymbol{v}$ ($\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{o}$, $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{o}$) nazýváme vektor

$$\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{v}} = |\boldsymbol{u}| \cos\varphi\, \boldsymbol{v}_0,$$

kde φ je velikost úhlu vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $|\boldsymbol{u}|$ je velikost vektoru $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}_0$ je jednotkový vektor souhlasně kolineární s vektorem $\boldsymbol{v}$.

Projekce vektoru $\boldsymbol{u}$ do vektoru $\boldsymbol{v}$ je reálné číslo

$$u_v = |\boldsymbol{u}| \cos\varphi.$$

Pro $\varphi \in \left\langle 0, \dfrac{\pi}{2} \right\rangle$ je projekce u_v rovna velikosti složky $\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{v}}$, pro $\varphi \in \left\langle \dfrac{\pi}{2}, \pi \right\rangle$ je projekce u_v rovna záporně vzaté velikosti složky $\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{v}}$.

Příklad užití skalárního součinu vektorů v geometrii

Dokažte kosinovou větu.

Důkaz

Označíme-li $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{BC}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{AC}$, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{AB}$, je $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$, takže

$$a^2 = \boldsymbol{a}^2 = (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c})^2 = \boldsymbol{b}^2 - 2\boldsymbol{b}\boldsymbol{c} + \boldsymbol{c}^2 = b^2 - 2bc \cos\alpha + c^2.$$

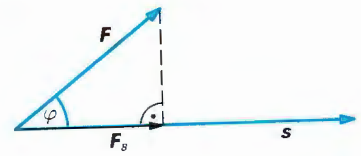
Vzorce pro b^2 a c^2 dostaneme cyklickými záměnami.

Příklad užití skalárního součinu dvou vektorů ve fyzice

Působí-li síla $\boldsymbol{F}$ po přímočaré dráze dané vektorem posunutí $\boldsymbol{s}$, pak je práce W síly $\boldsymbol{F}$ po této dráze definována vztahem

$$W = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{s} = |\boldsymbol{F}| \cdot |\boldsymbol{s}| \cos\varphi,$$

kde φ je velikost úhlu vektorů $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{s}$ (obr. 10.33).



Obr. 10.33

Vyjádření skalárního součinu vektorů a velikosti jejich úhlu pomocí souřadnic vektorů

Na základě vlastností skalárního součinu vektorů $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ odvozených v příkladu 2 na str. 560 plynou *věty:*

V.7. V kartézské (ortonormální) soustavě souřadnice v prostoru lze skalární součin vektorů $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vyjádřit ve tvaru

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = (u_1\boldsymbol{i} + u_2\boldsymbol{j} + u_3\boldsymbol{k}) \cdot (v_1\boldsymbol{i} + v_2\boldsymbol{j} + v_3\boldsymbol{k}) = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3.$$

V.8. V kartézské (ortonormální) soustavě souřadnic v rovině lze skalární součin vektorů $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$, $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$ vyjádřit ve tvaru

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = (u_1\boldsymbol{i} + u_2\boldsymbol{j}) \cdot (v_1\boldsymbol{i} + v_2\boldsymbol{j}) = u_1v_1 + u_2v_2.$$

Poznámka. Z definice skalárního součinu vektorů vyplývá, že je *invariantní*, tj. nezávislý vůči volbě soustavy souřadnic. Jsou-li proto v jiné kartézské soustavě souřadnic v prostoru, resp. v rovině souřadnice vektorů $\boldsymbol{u} = (u_1', u_2', u_3')$, $\boldsymbol{v} = (v_1', v_2', v_3')$, resp. $\boldsymbol{u} = (u_1', u_2')$, $\boldsymbol{v} = (v_1', v_2')$, pak platí

$$u_1'v_1' + u_2'v_2' + u_3'v_3' = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3,$$

resp.

$$u_1'v_1' + u_2'v_2' = u_1v_1 + u_2v_2.$$

Z definice skalárního součinu vektorů $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ a z uvedených vět o jeho vyjádření v kartézské (ortonormální) soustavě souřadnic plynou pro velikost φ úhlu nenulových vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ *věty:*

V.9. V kartézské (ortonormální) soustavě souřadnic v prostoru pro velikost φ úhlu nenulových vektorů $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ platí vzorec

$$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}|\,|\boldsymbol{v}|} = \frac{u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3}{\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}\cdot\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}}.$$

V.10. V kartézské (ortonormální) soustavě souřadnic v rovině pro velikost φ úhlu nenulových vektorů $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$, $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$ platí vzorec

$$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}|\,|\boldsymbol{v}|} = \frac{u_1v_1 + u_2v_2}{\sqrt{u_1^2+u_2^2}\cdot\sqrt{v_1^2+v_2^2}}.$$

Důsledkem věty V.6 a vět V.9, V.10 jsou tyto *věty o kolmosti vektorů*:

V.11. Nenulové vektory $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ v prostoru jsou k sobě kolmé, právě když pro ně platí

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = 0.$$

V.12. Nenulové vektory $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$, $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$ v rovině jsou k sobě kolmé, právě když pro ně platí

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = u_1v_1 + u_2v_2 = 0.$$

Příklady výpočtu skalárního součinu vektorů a velikosti jejich úhlu pomocí souřadnic vektorů

1. Vypočítejte skalární součin a velikost úhlu vektorů

a) $\boldsymbol{u} = (4; 7; 4)$, $\boldsymbol{v} = (3; -5; \sqrt{2})$, b) $\boldsymbol{u} = (4; -7)$, $\boldsymbol{v} = (7; 4)$.

Řešení

Užitím uvedených vět dostáváme:

a) $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = 4\cdot 3 + 7\cdot(-5) + 4\cdot\sqrt{2} =$
$= 12 - 35 + 4\sqrt{2} = -23 + 4\sqrt{2} \doteq -17{,}343\,1,$

$|\boldsymbol{u}| = \sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2} = \sqrt{4^2+7^2+4^2} = \sqrt{16+49+16} = \sqrt{81} = 9,$

$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2} = \sqrt{3^2+(-5)^2+(\sqrt{2})^2} = \sqrt{9+25+2} = \sqrt{36} = 6,$

takže

$$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}|\,|\boldsymbol{v}|} = \frac{-23+4\sqrt{2}}{9\cdot 6} \doteq -0{,}321\,2 \Rightarrow \varphi \doteq 108°\,44'.$$

b) $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = u_1v_1 + u_2v_2 = 4\cdot 7 + (-7)\cdot 4 = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{u}\perp\boldsymbol{v} \Leftrightarrow \varphi = 90°$

2. Určete v dané rovině vektor $\boldsymbol{v}$, který je kolmý k vektoru $\boldsymbol{u} = (5; 12)$ a má velikost $|\boldsymbol{v}| = 32{,}5$.

Řešení

Skalární součin kolmých vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ je roven 0. Odtud a z dané velikosti vektoru $\boldsymbol{v}$ dostáváme soustavu rovnic:

$$u_1v_1 + u_2v_2 = 0$$
$$v_1^2 + v_2^2 = 32{,}5^2$$

Po dosazení souřadnic vektoru $\boldsymbol{u}$ nabývá první rovnice tvaru $5v_1 + 12v_2 = 0$ čili $v_1 = -2{,}4v_2$. Z druhé rovnice pak plyne $(2{,}4^2+1)\cdot v_2^2 = 32{,}5^2$, takže

$$v_2^2 = \frac{32{,}5^2}{5{,}76+1} = \frac{32{,}5^2}{6{,}76} = \frac{32{,}5^2}{2{,}6^2} = \left(\frac{325}{26}\right)^2 = 12{,}5^2.$$

Odtud

$$v_2 = \pm 12{,}5, \text{ takže } v_1 = -2{,}4\cdot(\pm 12{,}5) = \mp 30.$$

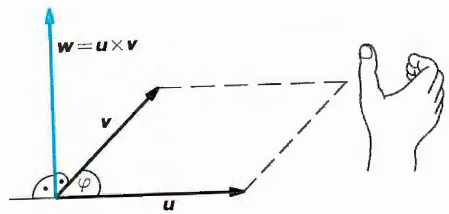
Odpověď: Hledaný vektor je $\boldsymbol{v} = (-30; 12{,}5)$, resp. vektor k němu opačný $-\boldsymbol{v} = (30; -12{,}5)$.

Vektorový součin vektorů

Definuje se pouze pro vektory *v trojrozměrném prostoru:*

Vektorovým součinem nenulových vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ (v uvedeném pořadí) nazýváme vektor $\boldsymbol{w}$ těchto vlastností:

1. jeho ***velikost*** je
$$|\boldsymbol{w}| = |\boldsymbol{u}|\cdot|\boldsymbol{v}|\cdot\sin\varphi,$$
kde $|\boldsymbol{u}|$, $|\boldsymbol{v}|$ jsou velikosti vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ a φ je úhel vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$,
2. ***směr*** vektoru $\boldsymbol{w} \neq \boldsymbol{o}$ je určen takto:
   a) vektor $\boldsymbol{w}$ je *kolmý* k vektoru $\boldsymbol{u}$ i k vektoru $\boldsymbol{v}$ (tedy k rovině určené vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$),
   b) vektor $\boldsymbol{w}$ je orientován vůči vektorům $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ *pravotočivě*, tj. podle *pravidla pravotočivého šroubu*, resp. *pravidla pravé ruky* (obr. 10.34). Říkáme též, že trojice vektorů $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ tvoří *pravotočivou bázi.*



Obr. 10.34

Vektorovým součinem vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, z nichž **alespoň jeden je nulový**, nazýváme nulový vektor $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{o}$.

Vektorový součin $\boldsymbol{w}$ vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ se značí symbolem $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$; píšeme pak $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$.

Název vektorový součin vektorů pochází z toho, že na rozdíl od skalárního součinu představuje *vektor*.

Operaci, jíž každé dvojici z daného vektorového prostoru $\boldsymbol{V}$ třírozměrných vektorů přiřazujeme jejich vektorový součin, nazýváme **vektorovým násobením vektorů**.

Věty o algebraických vlastnostech vektorového součinu vektorů

V.13. Pro každé dva vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ v trojrozměrném prostoru platí
$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}$ (*antikomutativnost vektorového součinu vektorů*).

V.14. Pro každé dva vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ v trojrozměrném prostoru a pro libovolné reálné číslo k platí
$k\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} \times k\boldsymbol{v} = k(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})$ (*asociativnost vektorového součinu vektorů vzhledem k násobení reálným číslem*).

V.15. Pro každé tři vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ v trojrozměrném prostoru platí
$(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$ (*distributivnost vektorového součinu vektorů vzhledem ke sčítání vektorů*).

Matematickou indukcí lze vlastnost z věty V.15 zobecnit pro libovolný počet sčítanců.

V.16. Pro každé dva nenulové vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ a libovolné nenulové reálné číslo k v trojrozměrném prostoru platí: Je-li $\boldsymbol{v} = k\boldsymbol{u}$, kde $k \in \mathrm{R} \setminus \{0\}$, pak

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u} = \boldsymbol{o} \quad \text{(nulový vektor).}$$

Příklady výpočtu vektorového součinu vektorů užitím jeho definice a základních vlastností

1. Vypočtěte vektorový součin vektorů $\boldsymbol{u} = 2\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{v} = 6\boldsymbol{j}$, kde $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ jsou jednotkové vektory os x, y kartézské (ortonormální) soustavy souřadnic $Oxyz$.

   Řešení

   Vektorový součin $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ má podle definice velikost

   $$|\boldsymbol{w}| = |\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{u}| \cdot |\boldsymbol{v}| \cdot \sin\varphi = 2 \cdot 6 \cdot \sin\frac{\pi}{2} = 12$$

   a má směr jednotkového vektoru $\boldsymbol{k}$ osy z. Je tedy

   $$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = 12\boldsymbol{k}.$$

2. Určete všechny vektorové součiny jednotkových vektorů os x, y, z ortonormální soustavy souřadnic $Oxyz$.

   Řešení

   Podle definice vektorového součinu dvou vektorů je

   $$\begin{array}{lll} \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{o}, & \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}, & \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{k} = -\boldsymbol{j}, \\ \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{o}, & \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{i} = -\boldsymbol{k}, & \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{i}, \\ \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{o}, & \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}, & \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{j} = -\boldsymbol{i}. \end{array}$$

Vyjádření vektorového součinu vektorů pomocí souřadnic vektorů

Na základě vlastností vektorového součinu vektorů $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ odvozených v příkladu 2 na str. 564 plyne *věta*:

V.17. V pravotočivé kartézské (ortonormální) soustavě souřadnic v prostoru lze vektorový součin vektorů $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vyjádřit ve tvaru

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} &= (u_1\boldsymbol{i} + u_2\boldsymbol{j} + u_3\boldsymbol{k}) \times (v_1\boldsymbol{i} + v_2\boldsymbol{j} + v_3\boldsymbol{k}) = \\ &= (u_2v_3 - v_2u_3)\boldsymbol{i} + (u_3v_1 - v_3u_1)\boldsymbol{j} + (u_1v_2 - v_1u_2)\boldsymbol{k} = \\ &= (u_2v_3 - v_2u_3,\ u_3v_1 - v_3u_1,\ u_1v_2 - v_1u_2). \end{aligned}$$

K *zapamatování souřadnic vektorového součinu* $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ může vhodně posloužit schéma dané tabulkou 10.1. Schéma začíná sloupcem druhých souřadnic daných vektorů, pokračuje po řadě sloupci jejich třetích souřadnic, prvních souřadnic a končí opět sloupcem druhých souřadnic. Souřadnice vektorového součinu $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ zapisujeme do třetího řádku v mezerách mezi sloupci. Získáme je tak, že postupně podle schématu po úhlopříčkách násobíme dvojice zapsaných souřadnic vektorů a druhý součin odčítáme od prvního.

Schéma pro zapamatování souřadnic vektorového součinu $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ Tab. 10.1

$\boldsymbol{u}$	u_2		u_3		u_1		u_2
$\boldsymbol{v}$	v_2		v_3		v_1		v_2
$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$		$u_2v_3 - v_2u_3$		$u_3v_1 - v_3u_1$		$u_1v_2 - v_1u_2$	

Příklad na výpočet kartézských (ortonormálních) souřadnic vektorového součinu vektorů

Vypočítejte souřadnice vektorového součinu $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$, je-li dáno $\boldsymbol{u} = 2\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{v} = 6\boldsymbol{j}$, kde $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ jsou jednotkové vektory os x, y kartézské (ortonormální) soustavy souřadnic $Oxyz$.

Řešení

Podle věty V.17 o kartézských (ortonormálních) souřadnicích vektorového součinu, resp. podle schématu uvedeného v tabulce 10.1 dostáváme pro vektorový součin daných vektorů $\boldsymbol{u} = (2; 0; 0)$, $\boldsymbol{v} = (0; 6; 0)$:

$\boldsymbol{u}$	0		0		2		0	
$\boldsymbol{v}$	6		0		0		6	
$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$		0		0		12		$\Rightarrow \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = (0; 0; 12)$

Tedy $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = 12\boldsymbol{k}$, což je ve shodě s výsledkem získaným na str. 564 přímým užitím definice vektorového součinu.

Užití vektorového součinu vektorů a smíšený součin vektorů

S použitím vektorového součinu vektorů se setkáváme v geometrii, ale též ve fyzice a v technických oborech.

V analytické geometrii se často setkáváme s úlohou určit vektor kolmý ke dvěma daným nenulovým vektorům $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$; lze za něj vzít jejich vektorový součin $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ nebo některý jeho nenulový násobek.

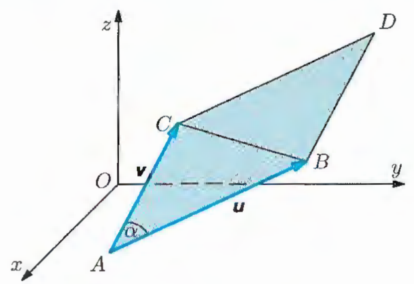
Vektorového součinu dvou nenulových vektorů lze též užít k určení obsahu rovnoběžníku, resp. trojúhelníku na základě *věty*:

V.18. Je dán rovnoběžník $ABCD$ v prostoru (obr. 10.35). Považujeme-li $\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{AC}$ za umístění vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, pak pro obsah S rovnoběžníku $ABCD$ platí:

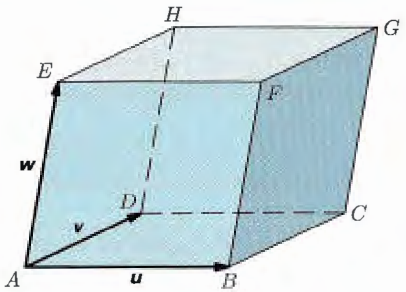
$$S(ABCD) = |\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}|$$

Pro obsah S $\triangle ABC$ tedy platí:

$$S(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot |\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}|$$



Obr. 10.35



Obr. 10.36

V geometrii a v aplikacích se setkáváme ještě se skalárním součinem $(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w}$, který se nazývá **smíšený součin vektorů** $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ (v tomto pořadí).

Lze dokázat, že platí:

$$(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w} = (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) \cdot \boldsymbol{u} = (\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{v}$$

Smíšený součin vektorů lze užít k výpočtu objemu rovnoběžnostěnu, trojbokého hranolu a čtyřstěnu na základě *věty*:

V.19. Nechť je dán rovnoběžnostěn $ABCDEFGH$ (obr. 10.36) a nechť orientované úsečky $\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{AD}$, $\boldsymbol{AE}$ představují po řadě umístění vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$. Pak objem V rovnoběžnostěnu $ABCDEFGH$ je dán vzorcem:

$$V = |(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w}|$$

Objem V_1 trojbokého hranolu $ABDEFH$ je roven polovině objemu V rovnoběžnostěnu $ABCDEFGH$:

$$V_1 = \frac{1}{2} V = \frac{1}{2} |(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w}|$$

Objem V_2 čtyřstěnu $ABDE$ je roven třetině objemu V_1 trojbokého hranolu $ABDEFH$:

$$V_2 = \frac{1}{3} V_1 = \frac{1}{6} V = \frac{1}{6} |(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w}|$$

Příklady užití vektorového a smíšeného součinu vektorů v geometrii

1. Najděte alespoň jeden vektor, který je kolmý ke dvěma daným vektorům $\boldsymbol{u} = (6; 2; -4)$, $\boldsymbol{v} = (-3; 0; 1)$.

Řešení

Užitím schématu podle tabulky 10.1 určíme souřadnice vektorového součinu $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$:

$\boldsymbol{u}$	2	-4	6	2
$\boldsymbol{v}$	0	1	-3	0
$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$	2	6	6	

$\Rightarrow \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = (2; 6; 6)$

Jako vektor kolmý k oběma daným vektorům $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ lze vzít vektorový součin $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ nebo jeho libovolný nenulový násobek, např. vektor $\boldsymbol{q} = 0{,}5 \cdot (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = (1; 3; 3)$. Ověříme, že vektor $\boldsymbol{q}$ je kolmý k vektorům $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$:

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{q} = 6 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + (-4) \cdot 3 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{q}$$
$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{q} = (-3) \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 3 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{q}$$

2. a) Vypočítejte obsah trojúhelníku ABC, je-li dáno $A[1; 2; 0]$, $B[3; 0; -3]$, $C[5; 2; 6]$.

b) Vypočítejte obsah trojúhelníku ABC, je-li v rovině dáno $A[-1; 1]$, $B[3; 3]$, $C[1; 5]$.

Řešení

a) Orientované úsečky $\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{AC}$ považujeme za umístění vektorů $\boldsymbol{u} = B - A = (2; -2; -3)$, $\boldsymbol{v} = C - A = (4; 0; 6)$. Vypočítáme $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = (-12; -24; 8)$, $|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}|^2 = (-12)^2 + (-24)^2 + 8^2 = 784$. Podle věty V.18 je tedy $S(\triangle ABC) = 0{,}5 \cdot \sqrt{784} = 14$.

b) Přejdeme do prostoru, zvolíme $A[-1; 1; 0]$, $B[3; 3; 0]$, $C[1; 5; 0]$ a obdobným postupem jako v a) získáme $\boldsymbol{u} = B - A = (4; 2; 0)$, $\boldsymbol{v} = C - A = (2; 4; 0)$. Vypočítáme $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = (0; 0; 12)$, $|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}|^2 = 12^2$, $S(\triangle ABC) = 0{,}5 \cdot 12 = 6$.

3. Vypočítejte objem V rovnoběžnostěnu $ABCDEFGH$, jestliže je dáno $A[3; -1; 2]$, $B[-4; 2; 1]$, $D[2; 2; 4]$, $E[5; -1; 2]$.

Řešení

Orientované úsečky $\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{AD}$, $\boldsymbol{AE}$ budeme považovat za umístění vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$; určíme $\boldsymbol{u} = B - A = (-7; 3; -1)$, $\boldsymbol{v} = D - A = (-1; 3; 2)$, $\boldsymbol{w} = E - A = (2; 0; 0)$. Vypočítáme $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = (9; 15; -18)$, $(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w} = 18$, takže hledaný objem je $V = |(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w}| = 18$.

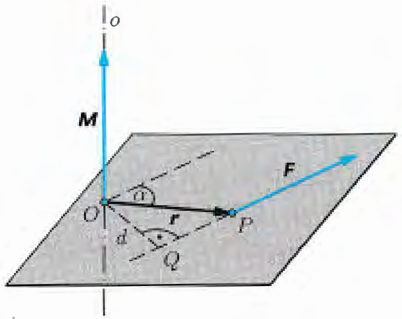
4. Určete objem V_1 trojbokého hranolu $ABDEFH$ a objem V_2 čtyřstěnu $ABDE$, jsou-li dány body A, B, D, E z předchozího příkladu.

$$V_1 = \frac{1}{2}V = \frac{1}{2}|(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w}| = \frac{1}{2} \cdot 18 = 9$$
$$V_2 = \frac{1}{6}V = \frac{1}{6}|(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w}| = \frac{1}{6} \cdot 18 = 3$$

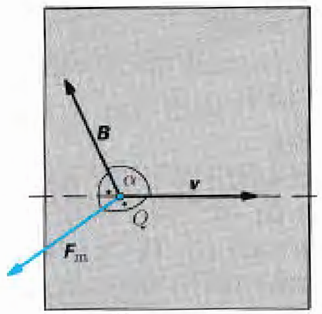
Příklady užití vektorového součinu vektorů ve fyzice

Uvedeme dva významné příklady aplikace vektorového součinu vektorů v mechanice a elektrodynamice.

1. *Moment síly.* Je-li tuhé těleso upevněno v bodě O a působí-li na ně síla $\boldsymbol{F}$ v bodě (působišti) P, pak se její působení projevuje otáčivým účinkem kolem osy o kolmé k rovině určené vektory $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{OP}$ a $\boldsymbol{F}$ (obr. 10.37). Mírou tohoto otáčivého účinku je veličina
$$\boldsymbol{M}_O = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$$
zvaná *moment síly* $\boldsymbol{F}$ *vzhledem k bodu* O resp. vzhledem k ose o kolmé k rovině určené bodem O a vektorem $\boldsymbol{F}$. Velikost momentu síly je
$$M_O = Fr \sin\alpha = Fd,$$
kde α je úhel vektorů $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{F}$ a $d = r \sin\alpha$ se nazývá *rameno síly* $\boldsymbol{F}$. Směr momentu síly $\boldsymbol{M}$ je dán tím, že vektory $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{M}$ jsou navzájem kolmé a tvoří (v uvedeném pořadí) pravotočivou soustavu.



Obr. 10.37



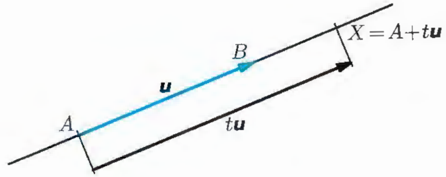
Obr. 10.38

2. *Lorentzova síla.* Na částici o náboji Q pohybující se rychlostí $\boldsymbol{v}$ v magnetickém poli o indukci $\boldsymbol{B}$ v daném bodě působí tzv. *Lorentzova síla* $\boldsymbol{F}_m$ určená vztahem
$$\boldsymbol{F}_m = Q[\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}].$$
Její velikost je
$$F_m = |Q|vB \sin\alpha,$$
kde α je úhel vektorů $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{B}$. Směr síly $\boldsymbol{F}_m$ je dán tím, že vektory $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{F}_m$ jsou navzájem kolmé a tvoří (v uvedeném pořadí) pravotočivou soustavu (obr. 10.38).

10.9 Rovnice přímky, polopřímky, úsečky

Parametrické vyjádření přímky v rovině

Nechť X je libovolný (proměnný) bod přímky $p \subset \varrho$ a A určitý (pevný) bod, jímž přímka p prochází. Každý *nenulový* vektor $\boldsymbol{u}$, který je kolineární s vektorem $\boldsymbol{AX} = X - A$, nazýváme **směrovým vektorem přímky** p. Je-li $p = \leftrightarrow AB$, můžeme zvolit za její směrový vektor $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{AB} = B - A$ (obr. 10.39). Přímku p danou (určenou) bodem A a směrovým vektorem $\boldsymbol{u}$ budeme zapisovat symbolem $p(A, \boldsymbol{u})$.



Obr. 10.39

Platí *věta*:

V.1. Každou přímku $p \subset \varrho$ danou bodem A a směrovým vektorem $\boldsymbol{u}$, jejíž libovolný bod označíme X, lze analyticky vyjádřit vektorovou rovnicí
$$X - A = t\boldsymbol{u} \quad \text{neboli} \quad X = A + t\boldsymbol{u}, \quad \text{kde } t \in \mathbb{R}.$$

Tato rovnice s **parametrem** $t \in \mathbb{R}$ se nazývá **parametrické vyjádření přímky** $p(A, \boldsymbol{u})$ **ve vektorovém tvaru** nebo krátce **vektorová (parametrická) rovnice přímky** $p(A, \boldsymbol{u})$.

Poznámka. V aplikacích ve fyzice a v technice se zpravidla vektor $\boldsymbol{AX} = X - A$ vyjadřuje pomocí umístění daného polohovými vektory $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{r}_A$ bodů X, A, takže vektorová rovnice přímky se píše ve tvaru
$$\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_A = t\boldsymbol{u} \quad \text{neboli} \quad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_A + t\boldsymbol{u}, \quad \text{kde } t \in \mathbb{R}.$$

V.2. Geometrický význam parametru t ve vektorové rovnici přímky

1. Je-li $|\boldsymbol{u}| = 1$ je $|t|$ rovna vzdálenosti bodů X, A.
2. Pro $t > 0$ jsou vektory $\boldsymbol{AX}$ a $\boldsymbol{u}$ souhlasně kolineární, pro $t < 0$ jsou nesouhlasně kolineární a pro $t = 0$ dostáváme $X = A$.

Nechť je v rovině pevně zvolena soustava souřadnic Oxy, ve které mají body X, A a vektor $\boldsymbol{u}$ souřadnice: $X[x, y]$, $A[a_1, a_2]$, $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$. Vektorovou parametrickou rovnici přímky $p(A, \boldsymbol{u})$ lze pak nahradit ekvivalentní soustavou rovnic
$$\begin{aligned} x &= a_1 + tu_1, \\ y &= a_2 + tu_2, \end{aligned} \qquad \text{kde } t \in \mathbb{R}.$$

Protože jde jen o rozepsání vektorové rovnice $X = A + t\boldsymbol{u}$; $t \in \mathsf{R}$, do souřadnic, nazýváme tuto soustavu **parametrickým vyjádřením přímky** $p(A, \boldsymbol{u})$ **v souřadnicích**.

Důsledkem věty V.1 je *věta:*

V.3. Každá přímka p v rovině může být dána (určena) parametrickým vyjádřením v souřadnicích, tj. soustavou rovnic s parametrem $t \in \mathsf{R}$:

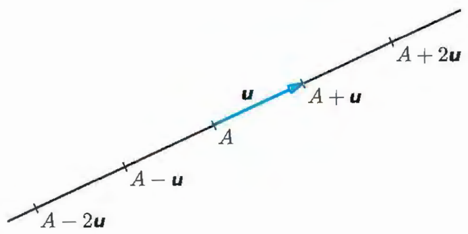
$$x = a_1 + tu_1, \qquad y = a_2 + tu_2$$

K větě V.3 platí též *věta obrácená:*

V.4. Každá soustava rovnic tvaru uvedeného ve větě V.3, kde $(u_1, u_2) \neq (0; 0)$, je parametrickým vyjádřením právě jedné přímky v souřadnicích.

Parametrické vyjádření polopřímky a úsečky v rovině

Jestliže parametr t v parametrických rovnicích tvaru podle věty V.1 nebo V.3 nabývá různých hodnot $t \in \mathsf{R}$, pak pro ně dostáváme postupně různé body přímky p (obr. 10.40). Všem hodnotám $t \in \mathsf{R}$ odpovídá celá přímka p. Nenabývá-li parametr t všech hodnot $t \in \mathsf{R}$, ale jen některých, vyplní body X odpovídající těmto hodnotám parametru jen některou podmnožinu přímky p.



Obr. 10.40

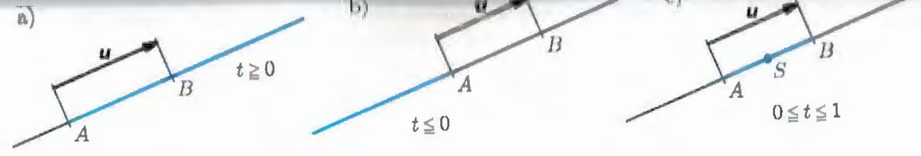
V.5. Věta o parametrickém vyjádření polopřímky, úsečky a jejího středu
Nechť $X = A + t\boldsymbol{u}$, kde $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{o}$ $(\boldsymbol{u} = B - A)$ a t je reálný parametr.

a) Nabývá-li t všech hodnot jen z intervalu $\langle 0, +\infty)$, vyplní jim příslušející body X polopřímku AB (obr. 10.41a).

b) Nabývá-li t všech hodnot jen z intervalu $(-\infty, 0\rangle$, vyplní body X polopřímku opačnou k polopřímce AB (obr. 10.41b).

c) Nabývá-li t všech hodnot jen z intervalu $\langle 0; 1\rangle$, vyplní body X úsečku AB (obr. 10.41c).

d) Nabývá-li t jen hodnoty 0,5, vzniká jednobodová množina, kterou tvoří střed S úsečky AB (obr. 10.41c).



Obr. 10.41

Příklady parametrického vyjádření přímky, polopřímky a úsečky v rovině

1. Jsou dány body $A[1; 2]$, $B[4; 8]$. Určete parametrické rovnice a) přímky AB, b) polopřímky AB, c) polopřímky opačné k polopřímce AB, d) úsečky AB.

Řešení

a) Podle věty V.1 má přímka AB parametrické rovnice ve vektorovém tvaru

$$X = A + t\boldsymbol{u} = A + t(B - A), \quad t \in \mathsf{R}.$$

Po jejich vyjádření v souřadnicích podle věty V.3 dostáváme

$$\begin{aligned} x &= 1 + (4 - 1)t \\ y &= 2 + (8 - 2)t \end{aligned} \qquad \text{čili} \qquad \begin{aligned} x &= 1 + 3t, \\ y &= 2 + 6t, \end{aligned} \qquad \text{kde } t \in \mathsf{R}.$$

Dále podle věty V.5 položíme: b) $t \in \langle 0, +\infty)$, c) $t \in (-\infty, 0\rangle$, d) $t \in \langle 0; 1\rangle$.

Poznámka. Každá soustava parametrických rovnic přímky p uvedená ve větě V.3 určuje přímku p jednoznačně. Avšak každá přímka nemá jediné parametrické vyjádření – různou volbou bodů $A \in p$ a směrových vektorů $\boldsymbol{u}$ přímky p dostáváme různá její parametrická vyjádření.

2. Rozhodněte, zda dané soustavy rovnic jsou parametrickými vyjádřeními téže přímky:

$$\begin{aligned} x &= 2 - t, & y &= 1 + t, & &\text{kde } t \in \mathsf{R} \\ x &= -s, & y &= 3 + s, & &\text{kde } s \in \mathsf{R} \end{aligned}$$

Řešení
Z výrazů, kterými je vyjádřena stejná souřadnice, utvoříme rovnice a upravujeme je tak, abychom jeden parametr vyjádřili pomocí druhého:

$$\begin{aligned} 2 - t &= -s & &\Leftrightarrow t - s = 2 \Leftrightarrow t = 2 + s \\ 1 + t &= 3 + s & &\Leftrightarrow t - s = 2 \Leftrightarrow t = 2 + s \end{aligned}$$

To, že jsme došli ke stejným vztahům mezi t, s, ukazuje možnost získat jedno vyjádření z druhého substitucí. Obě dané soustavy vyjadřují touž přímku.

Obecná rovnice přímky v rovině

Eliminací parametru z parametrického vyjádření přímky v rovině podle věty V.3 lze dospět k jejímu neparametrickému vyjádření, pro něž platí *věta:*

V.6. Každá přímka v rovině se dá analyticky vyjádřit lineární rovnicí tvaru

$$ax + by + c = 0,$$

kde a, b, c jsou reálné konstanty, přičemž alespoň jedno z čísle a, b je různé od nuly.

Této rovnici se říká **obecná rovnice přímky** (též **obecný tvar rovnice přímky**).

V.7. Je-li dána rovnice $ax + by + c = 0$, v níž aspoň jedno z čísel a, b je různé od nuly, pak (ve zvolené soustavě pravoúhlých souřadnic) existuje právě jedna přímka, jejímž analytickým vyjádřením je daná rovnice.

V.8. Je-li $ax + by + c = 0$ rovnice přímky p, pak také každá rovnice tvaru

$$hax + hby + hc = 0, \quad \text{kde } h \in \mathsf{R},\ h \neq 0,$$

je analytickým vyjádřením přímky p v téže soustavě pravoúhlých souřadnic.

V.9. Jsou-li rovnice $ax + by + c = 0$, $a'x + b'y + c' = 0$ analytickým vyjádřením přímky p v téže soustavě pravoúhlých souřadnic, pak platí

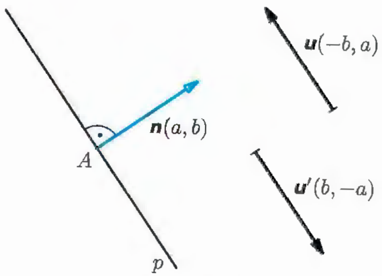
$$a' = ha, \quad b' = hb, \quad c' = hc, \qquad \text{kde } h \in \mathsf{R},\ h \neq 0.$$

Významnou *geometrickou interpretaci koeficientů a, b v rovnici přímky $ax + by + c = 0$* vyjadřuje *věta:*

V.10. Přímka p daná obecnou rovnicí $ax + by + c = 0$ (kde $a, b \in \mathsf{R}$, $a \neq 0 \vee b \neq 0$) má směrové vektory $\boldsymbol{u} = (-b, a)$, $\boldsymbol{u}' = (b, -a)$. Jejími směrovými vektory jsou též vektory $k\boldsymbol{u}$, $k\boldsymbol{u}'$ pro každé $k \in \mathsf{R}$, $k \neq 0$.

Pro vektor $\boldsymbol{n} = (a, b)$ platí $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{u} = 0$, $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{u}' = 0$, tzn. je kolmý ke směrovým vektorům $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u}'$ (obr. 10.42).

Vektor $\boldsymbol{n} = (a, b)$ se proto nazývá **normálový vektor přímky** p.



Obr. 10.42

Uvedli jsme, že obecnou rovnici přímky v rovině lze odvodit z jejího parametrického vyjádření eliminací parametru. Lze ji však odvodit též přímo ze zadání souřadnic bodu A a normálového vektoru $\boldsymbol{n}$ přímky, jak popisuje následující *věta:*

V.11. Nechť je přímka p určena bodem A a normálovým vektorem $\boldsymbol{n} \neq \boldsymbol{o}$ (obr. 10.42). Potom pro každý bod X roviny platí: $X \in p$ právě tehdy, když

$$(X - A) \cdot \boldsymbol{n} = 0.$$

Rozepíšeme-li poslední rovnici do souřadnic, získáme obecnou rovnici přímky.

Příklady určování obecné rovnice přímky

1. Přímka má parametrické vyjádření v souřadnicích

$$x = 7 - 3t, \quad y = 1 + 2t, \qquad \text{kde } t \in \mathsf{R}.$$

Určete její obecnou rovnici.

Řešení

Provedeme eliminaci parametru $t \in \mathsf{R}$ tím, že první rovnici soustavy vynásobíme dvěma, druhou rovnici třemi a obě rovnice sečteme, dostáváme

$$2x + 3y = 14 + 3 \Rightarrow 2x + 3y - 17 = 0,$$

což je obecná rovnice přímky (ve tvaru s celočíselnými nesoudělnými koeficienty).

2. Určete obecnou rovnici přímky p, která prochází bodem $A[2; 3]$ a má normálový vektor $\boldsymbol{n} = (5; 8)$.

Řešení

Protože hledaná přímka p má normálový vektor $\boldsymbol{n} = (5; 8)$, podle věty V.10 koeficienty a, b v její obecné rovnici jsou $a = 5$, $b = 8$. Má proto obecnou rovnici tvaru

$$5x + 8y + c = 0.$$

Přímka p prochází bodem $A[2; 3]$, a proto jeho souřadnice splňují její rovnici, takže

$$5 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + c = 0 \Rightarrow c = -34.$$

Daná přímka p má tedy obecnou rovnici $5x + 8y - 34 = 0$.

(Vynásobíme-li obě strany této rovnice libovolným nenulovým číslem, dostaneme rovnici, která je též obecnou rovnicí dané přímky.)

Směrnicový tvar rovnice přímky

Vyjdeme z obecné rovnice přímky p: $ax + by + c = 0$, kde alespoň jedno z čísel $a, b \in \mathrm{R}$ je různé od nuly. Pro hodnoty b rozlišíme dva případy: $b \neq 0$, $b = 0$.

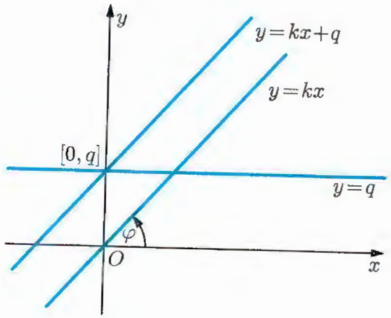
V případě, že $b \neq 0$, je *přímka p různoběžná s osou y* (obr. 10.43). Po vydělení číslem $b \neq 0$ lze pak obecnou rovnici přímky přepsat ve tvaru

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

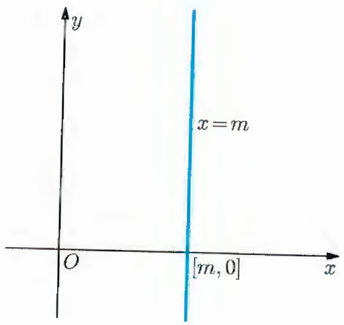
neboli

$$\boxed{y = kx + q,}$$

kde $k = -\dfrac{a}{b}$, $q = -\dfrac{c}{b}$.



Obr. 10.43



Obr. 10.44

V případě, že $b = 0$, obecná rovnice nabývá tvaru $ax + c = 0$, kde $a \neq 0$, takže všechny body přímky p mají konstantní x-ovou souřadnici, což odpovídá tomu, že *je přímka p rovnoběžná s osou y* (obr. 10.44). Po vydělení $a \neq 0$ lze pak obecnou rovnici přepsat ve tvaru

$$x = -\frac{c}{a}$$

neboli

$$\boxed{x = m,}$$

kde $m = -\dfrac{c}{a}$.

Platí tedy *věty*:

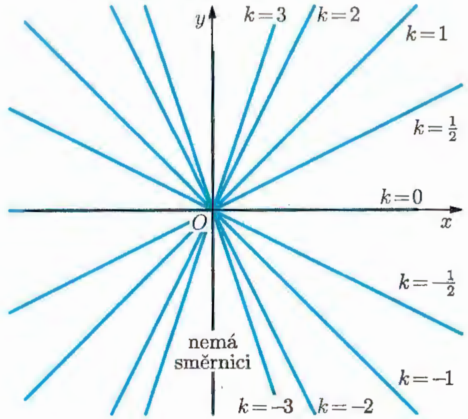
V.12. Každá přímka, která není rovnoběžná s osou y, má rovnici tvaru

$$y = kx + q, \quad k \in \mathrm{R}, \quad q \in \mathrm{R}.$$

V.13. Každá přímka, která je rovnoběžná s osou y, má rovnici tvaru

$$x = m, \quad m \in \mathrm{R}.$$

Rovnice přímky tvaru $y = kx + q$ se nazývá **směrnicový tvar rovnice přímky** nebo stručněji **směrnicová rovnice přímky**; číslu k určujícímu sklon přímky vzhledem k ose x (obr. 10.45) se říká **směrnice přímky**.



Obr. 10.45

Poznámka. Přímky rovnoběžné s osou x mají směrnici $k = 0$; přímky rovnoběžné s osou y nemají žádnou směrnici, a tedy neexistuje pro ně ani směrnicový tvar rovnice přímky.

Směrnici přímky lze vyjádřit pomocí souřadnic směrového vektoru na základě *věty*:

V.14. Každá přímka v rovině, která prochází bodem $A[a_1, a_2]$ a jejíž směrový vektor je $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$, má obecnou rovnici

$$u_2x - u_1y + (a_2u_1 - a_1u_2) = 0$$

a pro $u_1 \neq 0$ směrnicový tvar

$$y = \frac{u_2}{u_1}x + \left(a_2 - a_1\frac{u_2}{u_1}\right).$$

Odtud plyne *věta*:

V.15. Má-li přímka směrový vektor $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$, kde $u_1 \neq 0$, pak má směrnici $k = \dfrac{u_2}{u_1}$. Je-li $u_1 = 0$, přímka je rovnoběžná s osou y a směrnici nemá.

K vymezení *geometrického významu směrnice k přímky p* v kartézské soustavě souřadnice Oxy se zavádí pojem **směrového úhlu**, *který svírá přímka p s kladnou poloosou x*: Pro přímku p rovnoběžnou s osou x se jím rozumí nulový úhel ($\varphi = 0$). Pro přímku p různoběžnou s osou x se jím rozumí konvexní úhel o velikosti $\varphi \in (0, \pi)$, jehož jedním ramenem je kladná poloosa x a druhým ramenem je

…, která leží na rovnoběžce s přímkou p a obsahuje jen body s nezápornými souřadnicemi y (obr. 10.43).

Geometrický význam koeficientů k, q ve směrnicovém tvaru rovnice přímky $y = kx + q$ v kartézské soustavě souřadnic Oxy ukazuje *věta:*

V.16. *Směrnice k přímky* se rovná tangentě směrového úhlu, tj. úhlu, který přímka svírá s kladnou poloosou x kartézské soustavy souřadnic Oxy. Absolutní člen q představuje y-ovou souřadnici průsečíku přímky s osou y (obr. 10.43).

Dále uvedeme dvě *věty,* které vyplývají z věty V.12 a jsou velmi často užívány v analytické geometrii i v aplikacích:

V.17. Přímku, která prochází bodem $P_1[x_1, y_1]$ a má danou směrnici k, lze analyticky vyjádřit rovnicí

$$y = k(x - x_1) + y_1.$$

V.18. Pro směrnici přímky, která je určena body $P_1[x_1, y_1]$, $P_2[x_2, y_2]$ a není rovnoběžná s Osou y (tj. $x_2 \neq x_1$), platí

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}.$$

Příklady určování směrnicového tvaru rovnice přímky v rovině

1. Určete směrnicový tvar rovnice přímky, která je dána obecnou rovnicí

$$2x - 3y - 5 = 0.$$

Řešení

Vydělením dané rovnice přímky číslem $b = -3$ dostáváme po úpravě její směrnicový tvar

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}, \text{ kde } k = \frac{2}{3},\ q = -\frac{5}{3}.$$

2. Napište rovnici přímky, která prochází počátkem O a bodem $A[2{,}5; 1{,}5]$.

Řešení

Přímka OA zřejmě není rovnoběžná s osou y, neboť prochází počátkem a $x_A \neq 0$. Podle věty V.12 má proto rovnici $y = kx$, kde k je směrnice přímky. Protože bod $A[2{,}5; 1{,}5]$ leží na dané přímce, jeho souřadnice vyhovují její rovnici: $1{,}5 = k \cdot 2{,}5$, odkud $k = \frac{1{,}5}{2{,}5} = \frac{3}{5} = 0{,}6$, takže přímka má rovnici $y = 0{,}6x$.

Speciální tvary rovnice přímky v rovině

Má-li přímka p zvláštní polohu vzhledem k osám x, y pravoúhlé soustavy souřadnic, zjednodušuje se obecná rovnice přímky $ax + by + c = 0$ na speciální tvary uvedené v tabulce 10.2.

Tvary obecné rovnice přímky pro speciální polohy přímky vůči souřadnicovým osám x, y Tab. 10.2

Poloha přímky vzhledem k souřadnicovým osám	Nutná a postačující podmínka	Tvar obecné rovnice přímky
Přímka prochází počátkem	$c = 0$	$ax + by = 0$
Přímka je rovnoběžná s osou x	$a = 0$	$by + c = 0$
Přímka je rovnoběžná s osou y	$b = 0$	$ax + c = 0$
Přímka splývá s osou x	$a = 0$ $c = 0$	$y = 0$
Přímka splývá s osou y	$b = 0$ $c = 0$	$x = 0$

Pro přímku, která není rovnoběžná s žádnou osou souřadnic a neprochází počátkem, jsou koeficienty a, b, c v obecné rovnici přímky různé od nuly. Vydělíme-li pak obecnou rovnici přímky $ax + by + c = 0$ číslem $-c \neq 0$, nabývá tvaru

$$-\frac{a}{c}x - \frac{b}{c}y = 1;$$

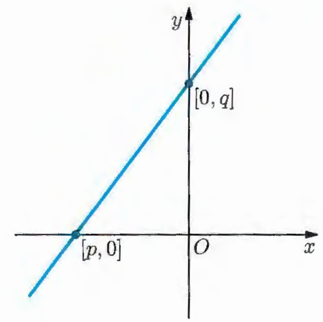
a označíme-li

$$p = -\frac{c}{a}, \quad q = -\frac{c}{b},$$

dostáváme tzv. **úsekový tvar rovnice přímky** neboli **úsekovou rovnici přímky**

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1.$$

Této rovnici vyhovují souřadnice bodů $[p, 0]$, $[0, q]$, tj. průsečíků s osami souřadnic x, y (obr. 10.46). Její název je spojen s tím, že číslům p, q říkáme **úseky vyťaté danou přímkou na osách souřadnic x, y.**



Obr. 10.46

Poznámka. V matematické literatuře a v aplikacích se setkáváme ještě s tzv. **normálovým tvarem rovnice přímky** neboli **normálovou rovnicí přímky**

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = d_0.$$

Podle věty V.14 má tato přímka směrový vektor o souřadnicích $u_1 = -\sin \alpha$, $u_2 = \cos \alpha$, který je jednotkový, neboť $(-\sin \alpha)^2 + \cos^2 \alpha = 1$, a proto ho budeme značit $\boldsymbol{u}_0 = (-\sin \alpha, \cos \alpha)$. Jednotkový vektor $\boldsymbol{n}_0 = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ je k vektoru $\boldsymbol{u}_0$ kolmý, takže představuje **normálový vektor přímky**; odtud pochází název normálového tvaru rovnice přímky. Přímka p daná touto rovnicí prochází bodem $Q[d_0 \cos \alpha, d_0 \sin \alpha]$, jak snadno zjistíme dosazením souřadnic tohoto bodu do rovnice přímky. Bod Q leží na přímce kolmé k přímce p a procházející počátkem O, takže vzdálenost bodů Q, O:

$$|QO| = (d_0 \cos \alpha)^2 + (d_0 \sin \alpha)^2 = \sqrt{d_0^2} = |d_0|,$$

tj. $|d_0|$ se rovná vzdálenosti přímky p od počátku O.

Parametrické vyjádření přímky v prostoru

Věty V.1 a V.2 platí nejen pro parametrické vyjádření přímky v rovině ϱ, ale též v prostoru.

Tedy také v prostoru má přímka $p(A, \boldsymbol{u})$ určená bodem A a směrovým vektorem $\boldsymbol{u}$ **vektorovou (parametrickou) rovnici**

$$X = A + t\boldsymbol{u}, \quad \text{kde } t \in \mathrm{R}$$

je **parametr**.

Odlišnost v parametrickém vyjádření přímky v rovině a v prostoru se projeví teprve při rozepisování vektorové parametrické rovnice do souřadnic. Zatímco pro přímku v rovině jsme dostali ve větě V.3 soustavu dvou rovnic, pro přímku v prostoru dostaneme soustavu tří rovnic, jak vyjadřuje *věta*:

V.19. Je-li v prostoru zvolena soustava souřadnic, ve které daný bod A přímky p, její libovolný bod X a směrový vektor $\boldsymbol{u}$ mají souřadnice $A[a_1, a_2, a_3]$, $X[x, y, z]$, $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$, pak parametrická rovnice přímky p ve vektorovém tvaru je ekvivalentní se **soustavou parametrických rovnic (parametrickým vyjádřením) přímky p v souřadnicích**:

$$\begin{aligned} x &= a_1 + tu_1, \\ y &= a_2 + tu_2, \qquad \text{kde } t \in \mathrm{R}. \\ z &= a_3 + tu_3, \end{aligned}$$

K větě V.19 platí též *věta obrácená*:

V.20. Každá soustava rovnic typu

$$\begin{aligned} x &= a_1 + tu_1, \\ y &= a_2 + tu_2, \\ z &= a_3 + tu_3, \end{aligned}$$

kde $t \in \mathrm{R}$ a $(u_1, u_2, u_3) \neq (0; 0; 0)$, je analytickým vyjádřením právě jedné přímky v prostoru.

Parametrické vyjádření polopřímky a úsečky v prostoru je ... jako v rovině (viz větu V.5).

Příklady na parametrické vyjádření přímky v prostoru

1. Určete parametrické vyjádření přímky, která prochází bodem $A[-1; 3; 4]$ a má směrový vektor $\boldsymbol{u} = (-2; 3; 1)$.

Řešení

Dosazením do parametrických rovnic přímky podle věty V.20 dostáváme

$$\begin{aligned} x &= -1 - 2t, \\ y &= 3 + 3t, \qquad t \in \mathrm{R}. \\ z &= 4 + t, \end{aligned}$$

2. Určete parametrické vyjádření přímky p procházející body $A[1; 1; -2]$, $B[3; 2; 1]$.

Řešení

Přímka p je určena bodem A a směrovým vektorem $\boldsymbol{u} = B - A = (2; 1; 3)$, má proto podle věty V.20 parametrické vyjádření

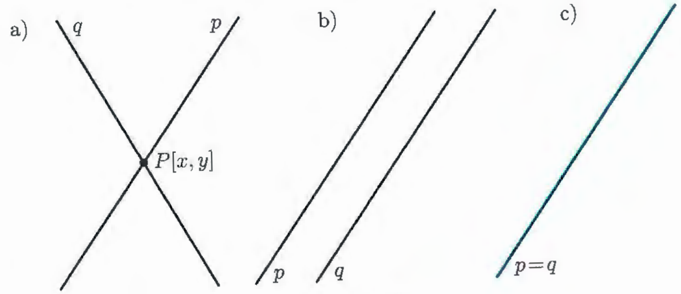
$$\begin{aligned} x &= 1 + 2t, \\ y &= 1 + t, \qquad t \in \mathrm{R}. \\ z &= -2 + 3t, \end{aligned}$$

10.10 Analytické vyšetřování vzájemné polohy dvou přímek v rovině a v prostoru

Vzájemná poloha dvou přímek v rovině

Určení vzájemné polohy dvou přímek daných analytickým vyjádřením lze provést *dvěma způsoby*:

1. *Řešíme soustavu rovnic obou přímek.* Mohou nastat právě tři případy:
   a) Soustava má právě jedno řešení $[x, y]$, jestliže dané přímky jsou různoběžné; řešení představuje souřadnice průsečíku obou přímek (obr. 10.47a).
   b) Soustava nemá žádné řešení, jestliže dané přímky jsou rovnoběžné různé (obr. 10.47b).
   c) Soustava má nekonečně mnoho řešení, jestliže dané přímky jsou totožné, tj. když obě rovnice vyjadřují touž přímku (obr. 10.47c).



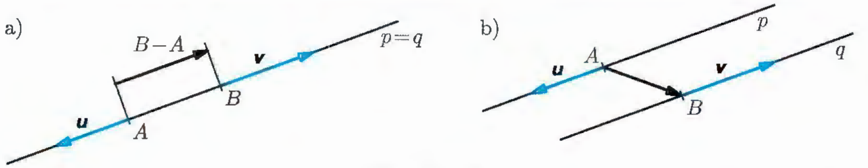
Obr. 10.47

2. *Určíme směrové, popř. normálové vektory obou přímek.* Pak užijeme *větu:*

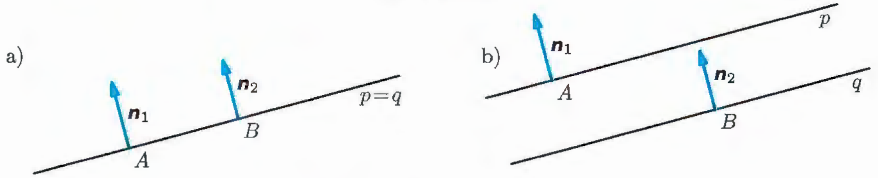
V.1. Přímky $p(A; \boldsymbol{u})$, $q(B, \boldsymbol{v})$ v rovině jsou rovnoběžné právě tehdy, když

a) jejich směrové vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ jsou kolineární (obr. 10.48a, b) čili platí $\boldsymbol{v} = c\boldsymbol{u}$, kde $c \in \mathrm{R}$, $c \neq 0$, přičemž speciálně přímky p, q jsou totožné ($p = q$), právě když vektor $B - A$ je nenulovým násobkem vektoru $\boldsymbol{u}$,

b) jejich normálové vektory $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_2$ jsou kolineární (obr. 10.49a, b) čili platí $\boldsymbol{n}_2 = c'\boldsymbol{n}_1$, kde $c' \in \mathrm{R}$, $c' \neq 0$.



Obr. 10.48



Obr. 10.49

Významným speciálním případem různoběžných přímek p, q jsou **kolmé přímky**, pro něž platí *věta:*

V.2. Přímky p, q jsou k sobě kolmé právě tehdy, když

a) jejich směrové vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ jsou navzájem kolmé (ortogonální), tj. platí $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 0$.

b) jejich normálové vektory $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_2$ jsou navzájem kolmé (ortogonální), tj. platí $\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2 = 0$.

Z vět V.1 a V.2 plynou na základě kap. 10.6 a 10.7 nutné a postačující podmínky pro rovnoběžnost a kolmost přímek v rovině, jež jsou vyjádřeny analyticky obecnými rovnicemi, resp. rovnicemi ve směrnicovém tvaru. Uvádíme je v tabulce 10.3.

Podmínky rovnoběžnosti a kolmosti dvojice přímek v rovině Tab. 10.3

Přímky o rovnicích	$a_1x + b_1y + c_1 = 0$ $a_2x + b_2y + c_2 = 0$	$y = k_1x + q_1$ $y = k_2x + q_2$
jsou rovnoběžné právě tehdy, když platí	$a_1b_2 = a_2b_1$ čili $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ pro $a_2 \neq 0$, $b_2 \neq 0$	$k_1 = k_2$
jsou k sobě kolmé právě tehdy, když platí	$a_1a_2 + b_1b_2 = 0$	$1 + k_1k_2 = 0$ čili $k_2 = -\frac{1}{k_1}$ pro $k_1 \neq 0$

Příklady určování vzájemné polohy přímek v rovině

1. Určete, zda jsou rovnoběžné přímky vyjádřené rovnicemi

$$3x + 4y - 3 = 0 \text{ a } x = 1 + 2t, \; y = 2 - t.$$

1. způsob řešení
Hledáme souřadnice společných bodů řešením soustavy daných rovnic metodou dosazovací; dostáváme jí jedinou rovnici pro parametr t:

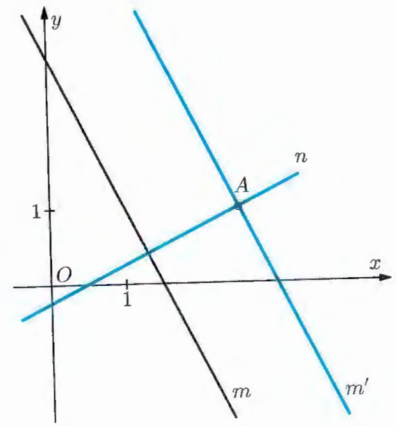
$$3 + 6t + 8 - 4t - 3 = 0, \text{ odkud } 2t = -8 \text{ čili } t = -4.$$

Vychází právě jedna hodnota parametru, která odpovídá právě jednomu společnému bodu daných přímek; jeho souřadnice jsou $x = 1 + 2 \cdot (-4) = -7$, $y = 2 - (-4) = 6$. Dané přímky jsou tedy různoběžky.

2. způsob řešení
Podle věty V.10, kap. 10.9 má první přímka směrový vektor $\boldsymbol{u} = (-4; 3)$. Z parametrických rovnic 2. přímky plyne, že má směrový vektor $\boldsymbol{v} = (2; -1)$.

Protože $\frac{-4}{2} \neq \frac{3}{-1}$, nejsou vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ kolineární, a tedy dané přímky nejsou rovnoběžné.

2. Bodem $A[2{,}5; 1]$ je k přímce m určené rovnicí $2x + y - 3 = 0$ vedena a) rovnoběžka m', b) kolmice n (obr. 10.50). Stanovte jejich rovnice.



Obr. 10.50

1. způsob řešení
Přímka m má směrnici $k_1 = -2 \neq 0$.

a) Rovnoběžka m' má (viz tab. 10.3) směrnici touž, a tedy rovnici $y - 1 = (-2) \cdot (x - 2{,}5)$ čili $2x + y - 6 = 0$.

b) Kolmice n má (viz tab. 10.3) směrnici $k_2 = -\frac{1}{k_1} = \frac{1}{2}$, a tedy rovnici $y - 1 = \frac{1}{2} \cdot (x - 2{,}5)$ čili $y - 1 = \frac{x}{2} - \frac{5}{4}$ čili $2x - 4y - 1 = 0$.

a) Jako směrový vektor přímky m' lze vzít (viz větu V.10, kap. 10.9) vektor $\boldsymbol{u} = (-1; 2)$, takže vektorovou rovnici přímky lze zapsat ve tvaru $X = A + t\boldsymbol{u}$, a tedy parametrické rovnice přímky jsou $x = 2{,}5 - t$, $y = 1 + 2t$. Vyloučením parametru dostáváme rovnici $2x + y - 6 = 0$.

b) Jako směrový vektor přímky n lze vzít (viz větu V.10, kap. 10.9) vektor $\boldsymbol{v} = (2; 1)$. Obdobným postupem jako v úloze a) dostáváme parametrické rovnice $x = 2{,}5 + 2t$, $y = 1 + t$, odkud eliminací parametru dostáváme rovnici $2x - 4y - 1 = 0$.

Vzájemná poloha dvou přímek v prostoru

Na rozdíl od roviny v prostoru mohou být dvě přímky nejen *rovnoběžné* nebo *různoběžné*, ale též *mimoběžné*.

Při vyšetřování vzájemné polohy dvou přímek v prostoru se užívají následující *věty* (z nichž věta V.3 je jen upravenou formulací věty V.1a):

V.3. Pro každé dvě přímky $p(A, \boldsymbol{u})$, $q(B, \boldsymbol{v})$ v prostoru platí, že $p \parallel q$, právě když vektor $\boldsymbol{v}$ je c-násobkem vektoru $\boldsymbol{u}$; $c \in \mathrm{R}$, $c \neq 0$. Přitom mohou nastat tyto případy (obr. 10.48a, b):

a) $p = q$, právě když oba vektory $\boldsymbol{v}$, $B - A$ jsou násobky vektoru $\boldsymbol{u}$,

b) $p \parallel q$ a $p \neq q$, právě když vektor $\boldsymbol{v}$ je násobkem vektoru $\boldsymbol{u}$, ale vektor $B - A$ není násobkem vektoru $\boldsymbol{u}$.

V.4. Pro každé dvě přímky $p(A, \boldsymbol{u})$, $q(B, \boldsymbol{v})$ v prostoru platí

a) přímky p, q leží v jedné rovině, právě když vektor $B - A$ je lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ nebo vektor $\boldsymbol{v}$ je násobkem vektoru $\boldsymbol{u}$,

b) přímky p, q jsou mimoběžné, právě když vektor $B - A$ není lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ a vektor $\boldsymbol{v}$ není násobkem vektoru $\boldsymbol{u}$.

Připomeňme, že vektor $B - A$ je lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, právě když existují taková čísla $c_1, c_2 \in \mathrm{R}$, že platí

$$B - A = c_1\boldsymbol{u} + c_2\boldsymbol{v}.$$

Příklad vyšetřování vzájemné polohy dvou přímek v prostoru

Rozhodněte, jakou vzájemnou polohu mají přímky p, q, které jsou dány svými parametrickými vyjádřeními v souřadnicích:

$$p\colon \begin{aligned} x &= 2 - 2t, \\ y &= 3 + 4t, \quad t \in \mathrm{R} \\ z &= -5t, \end{aligned} \qquad q\colon \begin{aligned} x &= 1 - 2s, \\ y &= 4 + s, \quad s \in \mathrm{R} \\ z &= 3 + 3s, \end{aligned}$$

Řešení

Přímka p je dána bodem $A[2; 3; 0]$ a směrovým vektorem $\boldsymbol{u} = (-2; 4; -5)$, přímka q je dána bodem $B[1; 4; 3]$ a směrovým vektorem $\boldsymbol{v} = (-2; 1; 3)$. Vektor $\boldsymbol{v}$ není reálným násobkem vektoru $\boldsymbol{u}$, a proto (podle věty V.3) přímky p, q *nejsou rovnoběžné*.

Dále vyšetříme, zda jsou různoběžné, nebo mimoběžné. Vyšetření lze provést dvojím způsobem:

1. způsob: Rozhodneme, zda mají společný bod P, tj. existují-li taková reálná čísla t, s, že platí soustava tří rovnic:

$$\begin{aligned} 2 - 2t &= 1 - 2s \\ 3 + 4t &= 4 + s \\ -5t &= 3 + 3s \end{aligned}$$

Řešením soustavy prvních dvou rovnic dostáváme $t = \frac{1}{6}$, $s = -\frac{1}{3}$. Tato čísla však nesplňují třetí rovnici. Přímky p, q nemají proto žádný společný bod. Protože zároveň nejsou rovnoběžné, *jsou mimoběžné*.

2. způsob (na základě věty V.4): Ověříme, zda vektor $B - A$ je lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, tj. zda existují taková čísla $c_1, c_2 \in \mathrm{R}$, že platí

$$B - A = c_1\boldsymbol{u} + c_2\boldsymbol{v}$$

neboli po rozepsání do souřadnic:

$$\begin{aligned} -1 &= -2c_1 - 2c_2 \\ 1 &= 4c_1 + c_2 \\ 3 &= -5c_1 + 3c_2 \end{aligned}$$

Řešením soustavy prvních dvou rovnic dostáváme $c_1 = \frac{1}{6}$, $c_2 = \frac{1}{3}$. Tato čísla však nesplňují třetí rovnici. Vektor $B - A$ není tedy lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, a proto přímky p, q *jsou mimoběžné*.

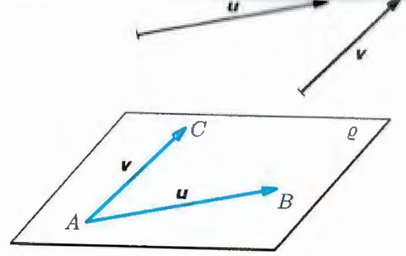
10.11 Rovnice roviny, poloroviny, poloprostoru

Parametrické vyjádření roviny

Každými třemi různými body A, B, C, které neleží na jedné přímce, prochází právě jedna rovina ϱ. Orientované úsečky AB, AC jsou umístěními dvou nenulových vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, z nichž žádný není reálným násobkem druhého (obr. 10.51); píšeme:

$$\boldsymbol{u} = B - A, \qquad \boldsymbol{v} = C - A.$$

Rovinu ϱ danou (určenou) bodem A a dvěma nenulovými nekolineárními vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ budeme zapisovat symbolem $\varrho(A, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$.



Obr. 10.51

Platí *věta:*

V.1. Každou rovinu ϱ danou bodem A a dvojicí nenulových nekolineárních vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, jejíž libovolný (proměnný) bod označíme X, lze vyjádřit analyticky vektorovou rovnicí

$$X - A = t\boldsymbol{u} + s\boldsymbol{v} \text{ neboli } X = A + t\boldsymbol{u} + s\boldsymbol{v}, \text{ kde } t \in \mathrm{R},\ s \in \mathrm{R}.$$

Tato rovnice s parametry $t \in \mathrm{R}$, $s \in \mathrm{R}$ se nazývá **parametrické vyjádření roviny $\varrho(A, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ ve vektorovém tvaru** nebo **vektorová (parametrická) rovnice roviny $\varrho(A, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$**.

Poznámka. V aplikacích ve fyzice a v technice se obvykle vektor $\boldsymbol{AX} = X - A$ vyjadřuje pomocí rádiusvektorů (polohových vektorů) $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{r}_A$ bodů X, A: $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_A$ a vektorová rovnice roviny se pak zapisuje ve tvaru

$$\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_A = t\boldsymbol{u} + s\boldsymbol{v} \text{ neboli } \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_A + t\boldsymbol{u} + s\boldsymbol{v}, \text{ kde } t \in \mathrm{R},\ s \in \mathrm{R}.$$

Nechť je v prostoru pevně zvolena soustava souřadnic $Oxyz$, ve které mají body X, A a vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ souřadnice $X[x, y, z]$, $A[a_1, a_2, a_3]$, $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Vektorovou parametrickou rovnici roviny $\varrho(A, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ lze pak nahradit ekvivalentní soustavou rovnic

$$\begin{aligned} x &= a_1 + tu_1 + sv_1, \\ y &= a_2 + tu_2 + sv_2, \quad \text{kde } t \in \mathrm{R},\ s \in \mathrm{R}. \\ z &= a_3 + tu_3 + sv_3, \end{aligned}$$

Tuto soustavu rovnic s parametry t, $s \in \mathrm{R}$ nazýváme **parametrickým vyjádřením roviny $\varrho(A, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ v souřadnicích** nebo **parametrickými rovnicemi roviny $\varrho(A, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ v souřadnicovém tvaru**.

Důsledkem věty V.1 je *věta:*

V.2. Každá rovina ϱ může být dána (určena) parametrickým vyjádřením v souřadnicích, tj. soustavou rovnic s parametry t, $s \in \mathrm{R}$:

$$x = a_1 + tu_1 + sv_1, \quad y = a_2 + tu_2 + sv_2, \quad z = a_3 + tu_3 + sv_3$$

K větě V.2 platí též *věta obrácená:*

V.3. Každá soustava rovnic tvaru uvedeného ve větě V.2, kde $(u_1, u_2, u_3) \neq (0; 0; 0)$, $(v_1, v_2, v_3) \neq (0; 0; 0)$ a (v_1, v_2, v_3) není reálným násobkem (u_1, u_2, u_3), je parametrickým vyjádřením právě jedné roviny.

Příklady určení parametrického vyjádření roviny

1. Jsou dány body $A[2; -4; 5]$, $B[3; -1; 4]$, $C[0; -10; 8]$. Určete parametrické vyjádření roviny ABC.

Řešení

Podle věty V.1 má rovina ABC parametrické vyjádření ve vektorovém tvaru

$$X = A + t\boldsymbol{u} + s\boldsymbol{v}, \quad t, s \in \mathrm{R}.$$

Za vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ lze volit $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{AB} = B - A = (1; 3; -1)$, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{AC} = C - A = (-2; -6; 3)$, které nejsou kolineární (žádný není násobkem druhého). Parametrické vyjádření roviny ABC v souřadnicích podle věty V.2 je

$$\begin{aligned} x &= 2 + t - 2s, \\ y &= -4 + 3t - 6s, \quad \text{kde } t, s \in \mathrm{R}. \\ z &= 5 - t + 3s \end{aligned}$$

2. Zjistěte, zda v rovině ABC z příkladu 1 leží body $D[5; 5; 1]$, $E[2; 3; 2]$.

Řešení

Bod $D[5; 5; 1]$ bude ležet v rovině ABC právě tehdy, když existuje taková dvojice reálných čísel t, s, že pro souřadnice bodu D budou splněny parametrické rovnice:

$$\left.\begin{aligned} 5 &= 2 + t - 2s \\ 5 &= -4 + 3t - 6s \\ 1 &= 5 - t + 3s \end{aligned}\right\} \Rightarrow t = 1,\ s = -1$$

Soustava složená z první a třetí rovnice má řešení, jež vyhovuje také druhé rovnici. Proto bod D leží v rovině ABC.

Obdobným postupem zjistíme, že bod E neleží v rovině ABC, neboť žádná dvojice t, $s \in \mathrm{R}$ nesplňuje soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} &\left.\begin{aligned} 2 &= 2 + t - 2s \Rightarrow t - 2s = 0 \\ 3 &= -4 + 3t - 6s \Rightarrow t - 2s = \frac{7}{3} \end{aligned}\right\} \quad \text{sporné rovnice} \\ &2 = 5 - t + 3s \end{aligned}$$

Obecná rovnice roviny

Vyloučením parametrů t, s z parametrického vyjádření roviny v souřadnicovém tvaru (podle věty V.2) dospíváme k jejímu neparametrickému vyjádření, pro něž platí *věta:*

V.4. Každá rovina se dá analyticky vyjádřit rovnicí tvaru

$$ax + by + cz + d = 0,$$

kde a, b, c, d jsou reálné konstanty, přičemž alespoň jedno z čísel a, b, c je různé od nuly.

Této rovnici se říká **obecná rovnice roviny**.

V.5. Je-li dána rovnice $ax + by + cz + d = 0$, v níž alespoň jedno z čísel a, b, c je různé od nuly, pak ve zvolené soustavě pravoúhlých souřadnic existuje právě jedna rovina, jejímž analytickým vyjádřením je daná rovnice.

V.6. Je-li $ax + by + cz + d = 0$ obecnou rovnicí roviny ϱ, pak také každá rovnice tvaru

$$hax + hby + hcz + hd = 0, \qquad \text{kde } h \in \mathsf{R},\ h \neq 0,$$

je analytickým vyjádřením této roviny ϱ v téže soustavě pravoúhlých souřadnic.

V.7. Jsou-li rovnice $ax + by + cz + d = 0$, $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ dvě analytická vyjádření roviny ϱ v téže soustavě pravoúhlých souřadnic, pak platí

$$a' = ha,\ b' = hb,\ c' = hc,\ d' = hd, \qquad \text{kde } h \in \mathsf{R},\ h \neq 0.$$

Věty V.6, V.7 lze souhrnně formulovat takto:

Každá rovina ϱ má nekonečně mnoho obecných rovnic, které jsou vesměs reálnými nenulovými násobky jedné z nich.

Geometrický význam koeficientů a, b, c v obecné rovnici roviny podává *věta:*

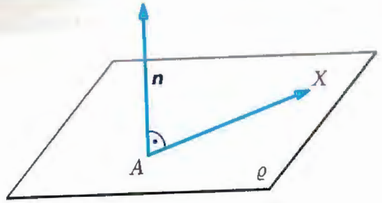
V.8. Je-li ϱ rovina daná obecnou rovnicí

$$ax + by + cz + d = 0 \quad (\text{kde } a, b, c \in \mathsf{R},\ a \neq 0 \vee b \neq 0 \vee c \neq 0),$$

pak vektor $\boldsymbol{n} = (a, b, c)$ je kolmý ke každému vektoru $\boldsymbol{AX} = X - A$, kde A je daný (pevný) bod roviny ϱ a X její libovolný (proměnný) bod (obr. 10.52), tj. platí

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{AX} = 0 \quad \text{neboli} \quad \boldsymbol{n} \cdot (X - A) = 0.$$

Vektor $\boldsymbol{n} = (a, b, c)$ se proto nazývá **normálový vektor roviny** ϱ.



Obr. 10.52

Je-li známo parametrické vyjádření roviny $\varrho(A, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$, pak její obecnou rovnici lze získat nejen eliminací parametrů t, s, ale také určením normálového vektoru

$$\boldsymbol{n} = k(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}), \qquad \text{kde } k \in \mathsf{R},\ k \neq 0.$$

Platí zřejmě *věta:*

V.9. Každá rovina $\varrho(A, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ má jednu takovou obecnou rovnici $ax + by + cz + d = 0$, v níž uspořádanou trojici $(a, b, c) \neq (0; 0; 0)$ tvoří souřadnice vektoru $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$.

Příklady určování obecné rovnice roviny

1. Určete obecnou rovnici roviny ϱ, jejíž parametrické vyjádření je

$$\begin{aligned} x &= 3 - 3t + s, \\ y &= -2 + t - 3s, \qquad \text{kde } t, s \in \mathsf{R}. \\ z &= -1 - t - s, \end{aligned}$$

1. způsob řešení – eliminace parametrů t, s z parametrického vyjádření roviny
Sečtením první a třetí rovnice vyloučíme parametr s, dostáváme

$$4t = 2 - x - z;$$

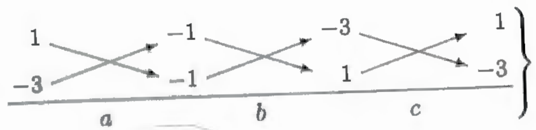
sečtením druhé a třetí rovnice vyloučíme parametr t; vychází

$$4s = -3 - y - z.$$

Po dosazení do třetí rovnice vynásobené čtyřmi získáme hledanou obecnou rovnici roviny:

$$x + y - 2z - 3 = 0$$

2. způsob řešení – určení normálového vektoru $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ roviny ϱ
Protože $\boldsymbol{u} = (-3; 1; -1)$, $\boldsymbol{v} = (1; -3; -1)$, dostáváme užitím schématu podle tab. 10.1 pro souřadnice a, b, c vektoru $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$:



$$\begin{aligned} a &= -1 - 3 = -4, \\ b &= -1 - 3 = -4, \\ c &= 9 - 1 = 8 \end{aligned}$$

Dosadíme do obecné rovnice roviny $ax + by + cz + d = 0$; vychází

$$-4x - 4y + 8z + d = 0.$$

Koeficient d určíme z podmínky, že v rovině ϱ leží bod $A[3; -2; -1]$, takže jeho souřadnice vyhovují rovnici roviny

$$(-4) \cdot 3 - 4 \cdot (-2) + 8 \cdot (-1) + d = 0$$

čili

$$-12 + 8 - 8 + d = 0 \Rightarrow d = 12.$$

Obecná rovnice dané roviny je tedy

$$-4x - 4y + 8z + 12 = 0$$

čili po zjednodušení (vydělení číslem -4) vychází stejně jako 1. postupem

$$x + y - 2z - 3 = 0.$$

Napište obecnou rovnici roviny ϱ, která je dána body $A[2; 0; -5]$, $B[-4; 2; 0]$ a vektorem $\boldsymbol{u} = (-3; -1; 5)$.

Řešení

Rovina ϱ je určena bodem A, vektorem $\boldsymbol{u}$ a vektorem $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{AB} = B - A = (-6; 2; 5)$, který zřejmě není násobkem vektoru $\boldsymbol{u}$. Obdobným způsobem jako v předchozím příkladu vypočteme souřadnice normálového vektoru roviny $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = (a, b, c) = (-15; -15; -12)$. Po dosazení do obecné rovnice roviny ϱ dostáváme

$$-15x - 15y - 12z + d = 0$$

a z podmínky $A \in \varrho$ plyne

$$(-15) \cdot 2 - 15 \cdot 0 - 12 \cdot (-5) + d = 0 \Rightarrow d = -30.$$

Daná rovina má tedy obecnou rovnici

$$-15x - 15y - 12z - 30 = 0$$

neboli po zjednodušení (vydělením číslem -3)

$$5x + 5y + 4z + 10 = 0.$$

(K témuž výsledku lze dospět též přímo dosazením do rovnice $\boldsymbol{n} \cdot (X - A) = 0$.)

…námka. Zapamatujte si důkladně, že rovnice typu $ax + by + cz + d = 0$, kde …, $c) \neq (0; 0; 0)$, jsou obecnými rovnicemi roviny a nikoli přímky v prostoru. Žádná …ka v prostoru nemá obecnou rovnici, tj. není analyticky vyjádřena jedinou lineární …icí s proměnnými x, y, z. Nemá smysl pokoušet se vyloučit parametr t z parametric… vyjádření přímky v prostoru (analogicky jako pro přímku v rovině). I když se podaří …metr vyloučit, získaná rovnice nevyjadřuje přímku, ale rovinu, která danou přímku …uje.

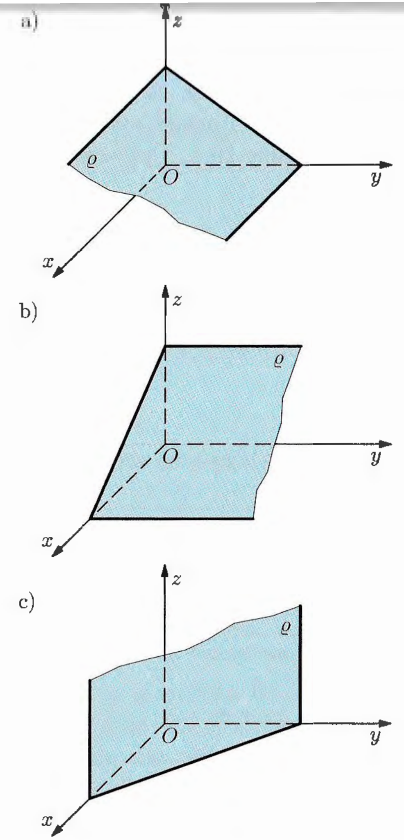
Speciální případy obecné rovnice roviny

Má-li rovina zvláštní polohu vzhledem k osám x, y, z, resp. rovinám xy, xz, yz soustavy pravoúhlých souřadnic $Oxyz$, zjednodušuje se obecná rovnice roviny $ax + by + cz + d = 0$ na speciální tvary uvedené v tabulce 10.4. Tyto roviny jsou zobrazeny v obr. 10.53, 10.54.

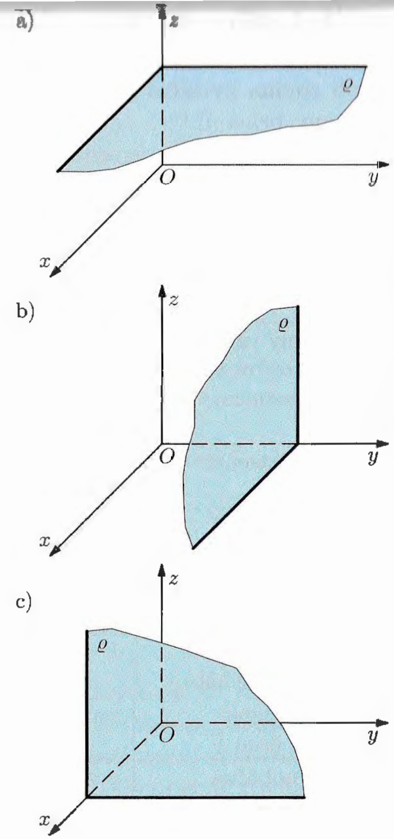
Speciální tvary obecné rovnice roviny Tab. 10.4

Poloha roviny vzhledem k souřadnicovým osám, resp. k souřadnicovým rovinám	Nutná a postačující podmínka	Tvar obecné rovnice roviny
Rovina procházející počátkem	$d = 0$	$ax + by + cz = 0$
Rovina rovnoběžná s osou x (obr. 10.53a)	$a = 0, b \neq 0, c \neq 0$	$by + cz + d = 0$
Speciálně: Rovina procházející osou x	navíc: $d = 0$	$by + cz = 0$
Rovina rovnoběžná s osou y (obr. 10.53b)	$b = 0, a \neq 0, c \neq 0$	$ax + cz + d = 0$
Speciálně: Rovina procházející osou y	navíc: $d = 0$	$ax + cz = 0$
Rovina rovnoběžná s osou z (obr. 10.53c)	$c = 0, a \neq 0, b \neq 0$	$ax + by + d = 0$
Speciálně: Rovina procházející osou z	navíc: $d = 0$	$ax + by = 0$
rovina rovnoběžná s rovinou xy (obr. 10.54a)	$a = b = 0, c \neq 0$	$cz + d = 0$
Speciálně: Rovina xy	navíc: $d = 0$	$z = 0$
rovina rovnoběžná s rovinou xz (obr. 10.54b)	$a = c = 0, b \neq 0$	$by + d = 0$
Speciálně: Rovina xz	navíc: $d = 0$	$y = 0$
rovina rovnoběžná s rovinou yz (obr. 10.54c)	$b = c = 0, a \neq 0$	$ax + d = 0$
Speciálně: Rovina yz	navíc: $d = 0$	$x = 0$

Poznámka. Neobsahuje-li rovnice roviny některé proměnné (souřadnice), pak je tato rovina rovnoběžná s příslušnou souřadnicovou osou, resp. souřadnicovou rovinou (neobsahuje-li rovnice roviny navíc absolutní člen, pak rovina speciálně prochází souřadnicovou osou, resp. splývá se souřadnicovou rovinou).



Obr. 10.53



Obr. 10.54

Úsekový tvar rovnice roviny

Pro rovinu, která není rovnoběžná s žádnou osou souřadnic a neprochází počátkem, jsou koeficienty v obecné rovnici roviny $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, $d \neq 0$. Vydělíme-li pak obecnou rovnici roviny $ax + by + cz + d = 0$ číslem $d \neq 0$, lze ji upravit na tvar

$$-\frac{a}{d}x - \frac{b}{d}y - \frac{c}{d}z = 1,$$

a označíme-li $p = -\frac{d}{a}$, $q = -\frac{d}{b}$, $r = -\frac{d}{c}$, dostáváme tzv. **úsekový tvar rovnice roviny**

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1.$$

Této rovnici vyhovují souřadnice bodů $[p, 0, 0]$, $[0, q, 0]$, $[0, 0, r]$, tj. průsečíky s osami souřadnic x, y, z. Její název je spojen s tím, že číslům p, q, r říkáme **úseky vyťaté danou rovinou na osách souřadnic** x, y, z.

Příklady určení speciálních tvarů obecné rovnice roviny

Určete rovnici roviny, která

a) prochází počátkem soustavy souřadnic a má normálový vektor $\boldsymbol{n} = (3; -1; 2)$,

b) je rovnoběžná s osou x a prochází body $A[4; 0; -2]$, $B[5; 1; 7]$,

c) prochází osou z a bodem $A[-3; 1; -2]$,

d) je rovnoběžná se souřadnicovou rovinou xz a prochází bodem $A[2; -5; 3]$.

Řešení

a) Rovina s normálovým vektorem $\boldsymbol{n} = (a, b, c) = (3; -1; 2)$ má obecnou rovnici tvaru

$$3x - y + 2z + d = 0.$$

Protože prochází počátkem soustavy souřadnic, je $d = 0$, takže její obecná rovnice je

$$3x - y + 2z = 0.$$

b) Rovina rovnoběžná s osou x má obecnou rovnici tvaru

$$by + cz + d = 0.$$

Hodnoty koeficientů b, c, d určíme dosazením souřadnic bodů A, B do této rovnice. Po dosazení souřadnic bodu $A[4; 0; -2]$ dostáváme

$$-2c + d = 0$$

a po dosazení souřadnic bodu $B[5; 1; 7]$ dostáváme

$$b + 7c + d = 0.$$

Odečteme-li obě rovnice, plyne odtud, že $b + 9c = 0$ čili $b = -9c$. Z první rovnice dostáváme $d = 2c$. Zvolíme-li $c = 1$, je tedy hledaná obecná rovnice roviny

$$-9y + z + 2 = 0$$

a po vynásobení číslem -1

$$9y - z - 2 = 0.$$

c) Rovina procházející osou z má obecnou rovnici tvaru

$$ax + by = 0.$$

Vztah mezi koeficienty a, b získáme dosazením souřadnic bodu $A[-3; 1; -2]$:

$$-3a + b = 0$$

Zvolíme-li $a = 1$, pak je $b = 3a = 3$, takže daná rovina má obecnou rovnici

$$x + 3y = 0.$$

a) Rovina rovnoběžná se souřadnicovou rovinou xz má obecnou rovnici tvaru

$$by + d = 0.$$

Dosazením souřadnice $y = -5$ bodu $A[2; -5; 3]$ dostáváme vztah mezi koeficienty b, d:

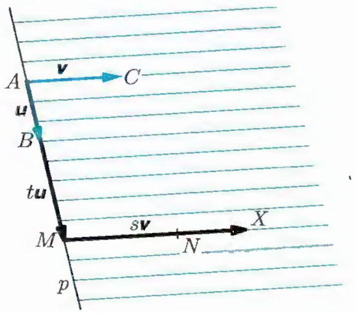
$$-5b + d = 0 \Rightarrow d = 5b$$

Zvolíme-li $b = 1$, bude $d = 5$. Tím získáváme obecnou rovnici dané roviny

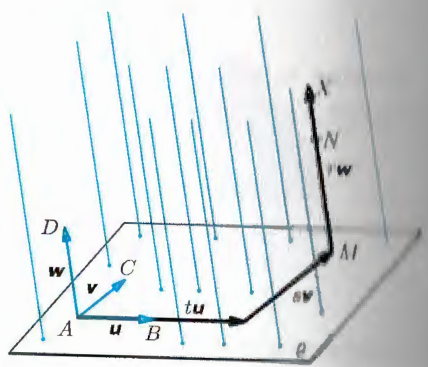
$$y + 5 = 0.$$

Analytická vyjádření poloroviny a poloprostoru

Obrázek 10.55 znázorňuje, že každou polorovinu ABC neboli pC lze vytvořit jako sjednocení všech polopřímek MN, které jsou souhlasně rovnoběžné s polopřímkou AC a mají počátek M na přímce $AB = p$.



Obr. 10.55



Obr. 10.56

Obrázek 10.56 obdobně ukazuje, že poloprostor $ABCD = \varrho D$ lze vytvořit jako sjednocení všech polopřímek MN, které jsou souhlasně rovnoběžné s polopřímkou AD a mají počátek M v rovině $ABC = \varrho$.

Přitom pro souhlasně rovnoběžné polopřímky platí *věta* o jejich analytickém vyjádření:

V.10. Každé dvě souhlasně rovnoběžné polopřímky AB, CD lze analyticky vyjádřit pomocí téhož vektoru a téhož parametru s oborem $\langle 0; +\infty)$:

$$X = A + t\boldsymbol{u},\ t \geqq 0;\quad X = C + t\boldsymbol{u},\ t \geqq 0$$

Popsaná sjednocení polopřímek můžeme též snadno vyjádřit parametricky a tak získáme **analytické vyjádření poloroviny a poloprostoru v parametrickém tvaru**, jak udává *věta:*

V.11. a) V rovině je dána přímka $p(A, \boldsymbol{u})$ a bod C, který neleží na přímce p. Označíme-li vektor $\boldsymbol{v} = C - A$, pak polorovinu pC lze parametricky vyjádřit takto:

$$X = A + t\boldsymbol{u} + s\boldsymbol{v},\quad t \in \mathsf{R},\ s \geqq 0$$

b) Je dána rovina $\varrho(A, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ a bod D, který neleží v ϱ. Označíme-li vektor $\boldsymbol{w} = D - A$, pak poloprostor ϱD lze parametricky vyjádřit takto:

$$X = A + t\boldsymbol{u} + s\boldsymbol{v} + r\boldsymbol{w},\quad t, s \in \mathsf{R},\ r \geqq 0$$

Rozepíšeme-li parametrické vyjádření poloroviny či poloprostoru v souřadnicích, získáme jejich analytická vyjádření soustavou rovnic a jedné nerovnice.

Poloroviny a poloprostory mají také **analytická vyjádření**, která odpovídají obecným rovnicím přímek v rovině a rovin v prostoru; platí pro ně *věta:*

V.12. a) V rovině je dán bod $C[x_0, y_0]$ a přímka p: $ax + by + c = 0$, $(a, b) \neq (0; 0)$.

Platí-li $ax_0 + by_0 + c > 0$, pak polorovina pC má analytické vyjádření $ax + by + c \geqq 0$.

Platí-li $ax_0 + by_0 + c < 0$, pak polorovina pC má analytické vyjádření $ax + by + c \leqq 0$.

b) V prostoru je dán bod $D[x_0, y_0, z_0]$ a rovina ϱ: $ax + by + cz + d = 0$, $(a, b, c) \neq (0; 0; 0)$.

Platí-li $ax_0 + by_0 + cz_0 + d > 0$, pak poloprostor ϱD má analytické vyjádření $ax + by + cz + d \geqq 0$.

Platí-li $ax_0 + by_0 + cz_0 + d < 0$, pak poloprostor ϱD má analytické vyjádření $ax + by + cz + d \leqq 0$.

Příklady analytického vyjádření poloroviny a poloprostoru

1. Je dána přímka $p(A, \boldsymbol{u})$ a bod C; $A[2; 8]$, $\boldsymbol{u} = (4; -1)$, $C[3; 6]$. Napište parametrické vyjádření poloroviny pC v souřadnicích.

Řešení

Vyjdeme z věty V.11a. Určíme souřadnice vektoru $\boldsymbol{v} = C - A = (1; -2)$ a v souřadnicích rozepíšeme parametrické vyjádření poloroviny pC:

$$X = A + t\boldsymbol{u} + s\boldsymbol{v},\quad t \in \mathsf{R},\ s \geqq 0$$

Dostáváme:

$$x = 2 + 4t + s,\quad y = 8 - t - 2s,\quad t \in \mathsf{R},\ s \geqq 0$$

2. Rozhodněte, které z bodů $A[5; 3]$, $B[0; 7]$, $C[6; -1]$, $D[8; -2]$, $E[-3; -1]$ leží v téže polorovině, jež má hraniční přímku p vyjádřenou obecnou rovnicí

$$3x - y + 7 = 0.$$

Řešení
Užijeme větu V.12a. Souřadnice daných bodů dosadíme do výrazu $3x - y + 7$; vychází

$$\begin{aligned} &A \ldots 15 - 3 + 7 = 19, && B \ldots 0 - 7 + 7 = 0,\\ &C \ldots 18 + 1 + 7 = 26, && D \ldots 24 + 2 + 7 = 33,\\ &E \ldots -9 + 1 + 7 = -1. \end{aligned}$$

Odtud plyne: Body A, C, D leží v téže polorovině, bod E leží v opačné polorovině, bod B leží na hraniční přímce p.

3. Je dána rovina $\varrho(A, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ a bod D; $A[4; 3; 2]$, $\boldsymbol{u} = (4; -1; 5)$, $\boldsymbol{v} = (-3; 2; 9)$, $D[5; -8; 3]$. Napište parametrické vyjádření poloprostoru ϱD v souřadnicích.

Řešení
Vyjdeme z věty V.11b. Určíme souřadnice vektoru $\boldsymbol{w} = D - A = (1; -11; 1)$ a v souřadnicích rozepíšeme parametrické vyjádření poloprostoru ϱD:

$$X = A + t\boldsymbol{u} + s\boldsymbol{v} + r\boldsymbol{w}, \quad t, s \in \mathsf{R}, \ r \geqq 0$$

Dostáváme:

$$\begin{aligned} x &= 4 + 4t - 3s + r,\\ y &= 3 - t + 2s - 11r, \quad t, s \in \mathsf{R}, \ r \geqq 0\\ z &= 2 + 5t + 9s + r, \end{aligned}$$

10.12 Analytické vyšetřování vzájemné polohy přímky a roviny, dvou rovin

Vzájemná poloha přímky a roviny

Nechť je přímka p dána bodem A a směrovým vektorem $\boldsymbol{u}$, rovina ϱ bodem B a dvěma nenulovými nekolineárními vektory $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$. Vzájemná poloha přímky $p(A, \boldsymbol{u})$ a roviny $\varrho(B, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ může být určena na základě *věty*:

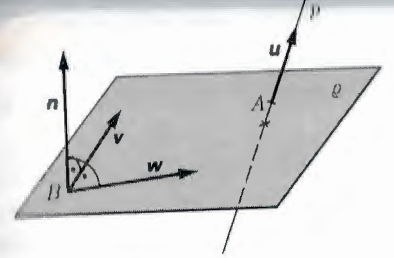
V.1. Pro každou přímku $p(A, \boldsymbol{u})$ a rovinu $\varrho(B, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ platí:

a) přímka p je různoběžná s rovinou ϱ (obr. 10.57), právě když vektor $\boldsymbol{u}$ není lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$,

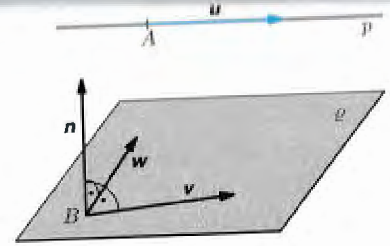
b) přímka p je rovnoběžná s rovinou ϱ, ale neleží v ní (obr. 10.58), právě když $\boldsymbol{u}$ je lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$, ale vektor $\boldsymbol{AB} = B - A$ není jejich lineární kombinací,

c) přímka p leží v rovině ϱ (obr. 10.59), právě když každý z vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{AB} = B - A$ je lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$.

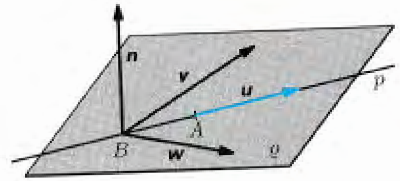
Dosud jsme rozhodovali o vzájemné poloze roviny a přímky na základě jejich parametrického vyjádření. Rovina však může být dána též svou obecnou rovnicí $ax + by + cz + d = 0$, jež umožňuje napsat normálový vektor roviny, tj. nenulový vektor $\boldsymbol{n} = (a, b, c)$ k ní kolmý. O vzájemné poloze přímky $p(A, \boldsymbol{u})$ a roviny $\varrho(B, \boldsymbol{n})$ lze rozhodnout na základě *věty*:



Obr. 10.57



Obr. 10.58



Obr. 10.59

V.2. Pro každou přímku $p(A, \boldsymbol{u})$ a rovinu $\varrho(B, \boldsymbol{n})$, jejíž normálový vektor $\boldsymbol{n} = (a, b, c) \neq \boldsymbol{o}$ je zadán obecnou rovnicí roviny $ax + by + cz + d = 0$, platí:

a) přímka p je různoběžná s rovinou ϱ (obr. 10.57), právě když $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} \neq 0$,

b) přímka p je rovnoběžná s rovinou ϱ (obr. 10.58, 10.59), právě když $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} = 0$, tj. vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{n}$ jsou k sobě kolmé. Leží-li navíc bod A v rovině ϱ, pak přímka p leží v rovině ϱ (obr. 10.59), neleží-li bod A v rovině ϱ, pak přímka p je s rovinou ϱ rovnoběžná, ale neleží v ní (obr. 10.58).

Příklady určování vzájemné polohy přímky a roviny

1. Rozhodněte, jakou vzájemnou polohu mají přímka p a rovina ϱ, jsou-li vyjádřeny parametricky:

$$p\colon \begin{aligned} x &= t,\\ y &= 1 + t, \quad t \in \mathsf{R}\\ z &= -1 + 2t, \end{aligned} \qquad \varrho\colon \begin{aligned} x &= 1 + r - s,\\ y &= r + s, \quad r, s \in \mathsf{R}\\ z &= 2s, \end{aligned}$$

Řešení
Pro přímku $p(A, \boldsymbol{u})$ a rovinu $\varrho(B, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ určíme souřadnice bodů a vektorů: $A[0; 1; -1]$, $\boldsymbol{u} = (1; 1; 2)$, $B[1; 0; 0]$, $\boldsymbol{v} = (1; 1; 0)$, $\boldsymbol{w} = (-1; 1; 2)$.

K rozhodnutí o vzájemné poloze přímky p a roviny ϱ použijeme větu V.1. Vyšetříme, zda vektor $\boldsymbol{u}$ je lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$, tj. existují-li taková čísla $c_1, c_2 \in \mathsf{R}$, pro něž platí

$$\boldsymbol{u} = c_1\boldsymbol{v} + c_2\boldsymbol{w}$$

neboli v souřadnicích

$$1 = c_1 - c_2,$$
$$1 = c_1 + c_2,$$
$$2 = 2c_2 \quad \Rightarrow c_2 = 1.$$

Dosazením čísla $c_2 = 1$ do první rovnice dostáváme $c_1 = 1 + c_2 = 2$, zatímco dosazením do druhé rovnice vychází $c_1 = 1 - c_2 = 0$. Soustava nemá řešení, tj. neexistují čísla c_1, c_2 požadovaných vlastností. Vektor $\boldsymbol{u}$ není tedy lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$, a proto podle věty V.1 jsou daná přímka p a rovina ϱ různoběžné.

2. Rozhodněte o vzájemné poloze přímky p a roviny ϱ, jež jsou zadány parametricky:

$$p\colon x = 2 - 3t, \quad y = 7 - 2t, \quad z = -1 + 4t, \quad t \in \mathsf{R} \qquad \varrho\colon x = 1 + s, \quad y = 1 + 4r + 2s, \quad z = r - s, \quad r, s \in \mathsf{R}$$

Řešení

Pro přímku $p(A, \boldsymbol{u})$ a rovinu $\varrho(B, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ určíme souřadnice bodů a vektorů $A[2; 7; -1]$, $\boldsymbol{u} = (-3; -2; 4)$, $B[1; 1; 0]$, $\boldsymbol{v} = (0; 4; 1)$, $\boldsymbol{w} = (1; 2; -1)$.

K vyšetření vzájemné polohy přímky p a roviny ϱ užijeme opět věty V.1. Zjistíme, zda vektor $\boldsymbol{u}$ je lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$, tzn. existují-li taková čísla $c_1, c_2 \in \mathsf{R}$, že platí

$$\boldsymbol{u} = c_1\boldsymbol{v} + c_2\boldsymbol{w}$$

neboli v souřadnicích, má-li řešení soustava rovnic

$$-3 = c_2 \Rightarrow c_2 = -3,$$
$$-2 = 4c_1 + 2c_2,$$
$$4 = c_1 - c_2.$$

Po dosazení $c_2 = -3$ z první rovnice do druhé rovnice dostáváme $4c_1 = -2 - 2c_2 = -2 + 6 = 4 \Rightarrow c_1 = 1$. Tyto hodnoty c_1, c_2 vyhovují též třetí rovnici, neboť $c_1 - c_2 = 1 + 3 = 4$. Existují tedy čísla c_1, c_2 požadovaných vlastností čili vektor $\boldsymbol{u}$ je lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$.

Dále obdobným postupem zjistíme, zda vektor $\boldsymbol{AB} = B - A = (-1; -6; 1)$ je lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$, tj. zda existují taková čísla c_1', c_2', že platí

$$\boldsymbol{AB} = c_1'\boldsymbol{v} + c_2'\boldsymbol{w}$$

čili v souřadnicích

$$-1 = c_2' \Rightarrow c_2' = -1,$$
$$-6 = 4c_1' + 2c_2',$$
$$1 = c_1' - c_2'.$$

Po dosazení hodnoty $c_2' = -1$ do druhé rovnice vychází $c_1' = -1$, avšak po dosazení do třetí rovnice dostáváme $c_1' = 0$. Vektor $\boldsymbol{AB}$ není tedy lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$.

Podle věty V.1 odtud plyne, že přímka p je rovnoběžná s rovinou ϱ, ale neleží v ní.

Určování průniku roviny a přímky

Průnik každých dvou geometrických útvarů, které jsou analyticky vyjádřeny rovnicemi s týmiž proměnnými, zjistíme tak, že *řešíme soustavu těchto rovnic*. V případě průniku přímky a roviny se výpočty navzájem liší podle toho, jakými rovnicemi tyto útvary zadáme. Nejjednodušší je výpočet v případě, že rovina je dána obecnou rovnicí a přímka parametrickým vyjádřením v souřadnicích.

Příklad určení průniku přímky a roviny

Určete souřadnice průsečíku přímky p a roviny ϱ:

$$p\colon x = 2 + 4t, \quad y = -1 + t, \quad z = 2 - t, \quad t \in \mathsf{R} \qquad \varrho\colon 4x + y - z + 13 = 0$$

Řešení

Přímka je zadána parametrickým vyjádřením, rovina obecnou rovnicí. Dosadíme-li do ní za x, y, z výrazy z parametrického vyjádření přímky, dostáváme lineární rovnici s neznámou t:

$$4(2 + 4t) + (-1 + t) - (2 - t) + 13 = 0$$

čili

$$18t = -18 \Rightarrow t = -1.$$

Této hodnotě parametru t odpovídají hodnoty souřadnic průsečíku P: $x = 2 - 4 = -2$, $y = -1 - 1 = -2$, $z = 2 - (-1) = 3$.

Výsledek: $p \cap \varrho = \{P\}$; $P[-2; -2; 3]$

Vzájemná poloha dvou rovin

Dvě roviny ϱ, σ jsou buď různoběžné (mají společnou přímku p a mimo ni žádný další společný bod, $\varrho \cap \sigma = p$), nebo jsou rovnoběžné ($\varrho \parallel \sigma$). Jsou-li roviny ϱ, σ rovnoběžné, mohou být buď rovnoběžné různé, nebo mohou splývat ($\varrho \cap \sigma = \varrho = \sigma$).

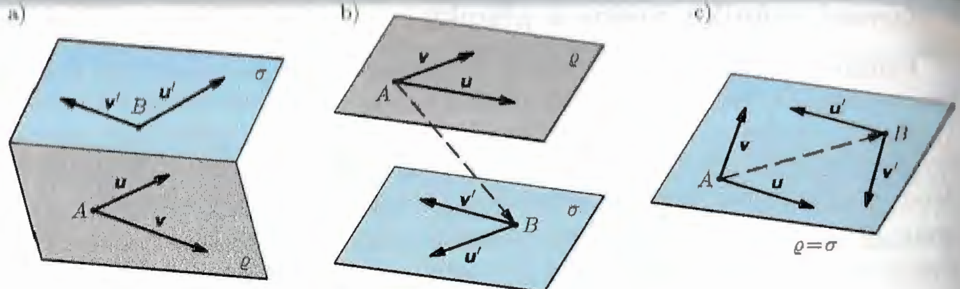
Nechť je rovina ϱ dána bodem A a dvěma nenulovými nekolineárními vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, rovina σ bodem B a dvěma nenulovými nekolineárními vektory $\boldsymbol{u}'$, $\boldsymbol{v}'$. O jejich vzájemné poloze lze rozhodnout užitím následující *věty*:

V.3. Pro každou dvojici rovin $\varrho(A, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$, $\sigma(B, \boldsymbol{u}', \boldsymbol{v}')$ platí:

a) ϱ, σ jsou různoběžné (obr. 10.60a), právě když aspoň jeden z vektorů $\boldsymbol{u}'$, $\boldsymbol{v}'$ není lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$,

b) ϱ, σ jsou rovnoběžné, $\varrho \neq \sigma$ (obr. 10.60b), právě když každý z vektorů $\boldsymbol{u}'$, $\boldsymbol{v}'$ je lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, ale vektor $B - A$ nikoli,

c) ϱ, σ jsou rovnoběžné, $\varrho = \sigma$ (obr. 10.60c), právě když každý z vektorů $\boldsymbol{u}'$, $\boldsymbol{v}'$, $B - A$ je lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$.



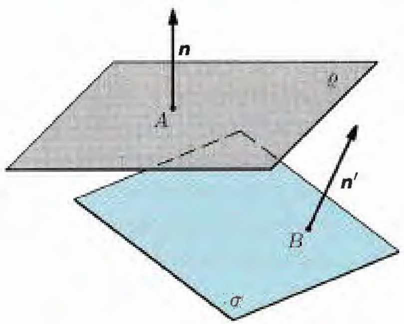
Obr. 10.60

Vzájemná poloha dvou rovin v prostoru se však zkoumá lépe, když pracujeme s obecnými rovnicemi těchto rovin. Ze stereometrie víme, že kolmice k dvěma rovnoběžným rovinám jsou navzájem rovnoběžné, zatímco kolmice vedené k různoběžným rovinám z téhož bodu jsou různoběžné. Proto o vzájemné poloze rovin snadno rozhodneme pomocí jejich normálových vektorů na základě *věty:*

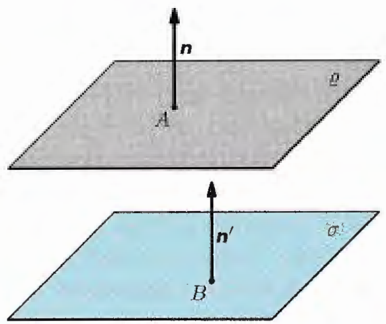
V.4. Pro každé dvě roviny ϱ, σ, které jsou dány obecnými rovnicemi $ax + by + cz + d = 0$, $a'x + b'x + c'z + d' = 0$, a mají tedy normálové vektory $\boldsymbol{n} = (a, b, c)$, $\boldsymbol{n}' = (a', b', c')$, platí:

a) roviny ϱ, σ jsou různoběžné (obr. 10.61), právě když vektory $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{n}'$ nejsou kolineární, tj. jeden není reálným násobkem druhého,

b) roviny ϱ, σ jsou rovnoběžné (obr. 10.62), právě když vektory $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{n}'$ jsou kolineární, tj. jeden je reálným násobkem druhého.



Obr. 10.61



Obr. 10.62

Příklady vyšetřování vzájemné polohy dvou rovin

1. Rozhodněte, jakou vzájemnou polohu mají roviny ϱ, σ, je-li dáno jejich parametrické vyjádření:

$$\varrho\colon x = 2 + t + 2s,\quad y = 2 - t + 2s,\quad z = 2 + 2t - 2s,\qquad t, s \in \mathsf{R}$$

$$\sigma\colon x = 1 + 5s',\quad y = 3 + 4t' + s',\quad z = 5 - 6t' + 2s',\qquad t', s' \in \mathsf{R}$$

Řešení

Pro dané roviny $\varrho(A, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$, $\sigma(B, \boldsymbol{u}', \boldsymbol{v}')$ určíme souřadnice bodů a vektorů: $A[2; 2; 2]$, $\boldsymbol{u} = (1; -1; 2)$, $\boldsymbol{v} = (2; 2; -2)$, $B[1; 3; 5]$, $\boldsymbol{u}' = (0; 4; -6)$, $\boldsymbol{v}' = (5; 1; 2)$.

Zjistíme, zda vektor $\boldsymbol{u}'$ je lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, tzn. existují-li taková čísla $c_1, c_2 \in \mathsf{R}$, že platí

$$\boldsymbol{u}' = c_1\boldsymbol{u} + c_2\boldsymbol{v}$$

čili v souřadnicích:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= c_1 + 2c_2 \\ 4 &= -c_1 + 2c_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow c_2 = 1,\ c_1 = -2$$
$$-6 = 2c_1 - 2c_2$$

Hodnoty koeficientů $c_1 = 1$, $c_2 = -2$, vypočtené z prvních dvou rovnic, vyhovují také třetí rovnici, takže vektor $\boldsymbol{u}'$ je lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ ($\boldsymbol{u}' = -2\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$).

Dále zjistíme, zda také vektor $\boldsymbol{v}'$ je lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, tj. existují-li taková čísla c_1', c_2', že platí

$$\boldsymbol{v}' = c_1'\boldsymbol{u} + c_2'\boldsymbol{v}$$

čili v souřadnicích:

$$\left.\begin{aligned} 5 &= c_1' + 2c_2' \\ 1 &= -c_1' + 2c_2' \end{aligned}\right\} \Rightarrow c_2' = \frac{3}{2},\ c_1' = 2$$
$$2 = 2c_1' - 2c_2'$$

Hodnoty koeficientů $c_1' = 2$, $c_2' = \frac{3}{2}$, vypočtené z prvních dvou rovnic, však nesplňují třetí rovnici, takže vektor $\boldsymbol{v}'$ není lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$.

Podle věty V.3a jsou proto dané roviny ϱ, σ různoběžné.

2. Rozhodněte, jakou vzájemnou polohu mají roviny ϱ, σ dané obecnými rovnicemi

$$\varrho\colon 2x + 5y - 6z + 4 = 0, \qquad \sigma\colon 3y + 3z - 6 = 0.$$

Řešení

Dané roviny mají normálové vektory $\boldsymbol{n} = (2; 5; -6)$, $\boldsymbol{n}' = (0; 3; 3)$. Tyto vektory nejsou kolineární, neboť neexistuje takové reálné číslo k, aby platilo $\boldsymbol{n}' = k\boldsymbol{n}$ (pro jejich souřadnice nemohou platit zároveň rovnice $2k = 0$, $5k = 3$, $-6k = 3$). Roviny ϱ, σ jsou tedy podle věty V.4b různoběžné.

Poznámka. Postup řešení užitý v příkladu 2 je podstatně jednodušší ve srovnání s postupem použitým v příkladu 1, takže i v případě parametrického vyjádření rovin je zřejmě vhodné převedení parametrických rovnic na obecné rovnice rovin a tím na řešení podle věty V.4b. (Doporučuji čtenáři ověřit si to na řešení 1. příkladu tímto postupem.)

Parametrické vyjádření průsečnice dvou různoběžných rovin

Zjistíme-li, že dvě roviny ϱ, σ jsou různoběžné, pak jejich průnikem je přímka p (průsečnice rovin). Její parametrické vyjádření lze určit dvěma způsoby postupu:

1. způsob. Najdeme dva různé body A, B průsečnice p, určíme vektor $\boldsymbol{AB} = B - A$ a jeho vhodný nenulový reálný násobek $\boldsymbol{u}$ zvolíme za směrový vektor průsečnice p.

2. způsob. Najdeme jeden bod A průsečnice, určíme vektorový součin $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}'$ normálových vektorů $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{n}'$ rovin ϱ, σ a jeho vhodný nenulový reálný násobek $\boldsymbol{u}$ zvolíme za směrový vektor průsečnice p.

V obou případech zapíšeme pak parametrické vyjádření průsečnice p ve vektorovém tvaru

$$X = A + t\boldsymbol{u}, \quad t \in \mathsf{R}.$$

Příklad určení parametrického vyjádření průsečnice dvou různoběžných rovin

Určete parametrické vyjádření průsečnice různoběžných rovin ϱ, σ z předchozího příkladu, tj. rovin

$$\varrho\colon 2x + 5y - 6z + 4 = 0, \qquad \sigma\colon 3y + 3z - 6 = 0.$$

1. způsob řešení

Najdeme dva různé body A, B průsečnice p: Z rovnic rovin ϱ, σ dostáváme např. pro $z = 0 \ldots 3y = 6 \Rightarrow y = 2$, $2x + 14 = 0 \Rightarrow x = -7$, tedy $A[-7; 2; 0]$ a pro $z = 1 \ldots 3y = 3 \Rightarrow y = 1$, $2x = -3 \Rightarrow x = -\dfrac{3}{2}$, tedy $B\left[-\dfrac{3}{2}; 1; 1\right]$. Určíme vektor $\boldsymbol{AB} = B - A = \left(\dfrac{11}{2}; -1; 1\right)$. Za směrový vektor průsečnice p vezmeme vektor $\boldsymbol{u} = 2\boldsymbol{AB} = (11; -2; 2)$. Průsečnice $p(A, \boldsymbol{u})$ má parametrické vyjádření v souřadnicích

$$\begin{aligned} p\colon x &= -7 + 11t,\\ y &= 2 - 2t,\\ z &= 2t, \qquad t \in \mathsf{R}. \end{aligned}$$

2. způsob řešení

K určení průsečnice p užijeme vektorový součin $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}'$ normálových vektorů $\boldsymbol{n} = (2; 5; -6)$, $\boldsymbol{n}' = (0; 3; 3)$ rovin ϱ, σ. Podle schématu v tabulce 10.1 je

$$\begin{array}{c|cccc} \boldsymbol{n} & 5 & -6 & 2 & 5 \\ \boldsymbol{n}' & 3 & 3 & 0 & 3 \\ \hline \boldsymbol{w} & 33 & -6 & 6 & \end{array} \quad \begin{aligned} w_1 &= 15 + 18 = 33,\\ w_2 &= 0 - 6 = -6,\\ w_3 &= 6 - 0 = 6. \end{aligned}$$

Tedy $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}' = (33; -6; 6)$. Za směrový vektor průsečnice p zvolíme vektor $\boldsymbol{u} = \dfrac{1}{3}\boldsymbol{w} = \dfrac{1}{3}(\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}') = (11; -2; 2)$. Další postup řešení je týž jako při řešení 1. způsobem.

10.13 Analytická vyjádření metrických vlastností v rovině a v prostoru

Odchylka dvou přímek v rovině

Pojem odchylky $\alpha \in \langle 0°, 90° \rangle$ dvou přímek p, q v rovině byl zaveden v kapitole 9.2. V analytické geometrii určujeme **odchylku dvojice přímek v rovině** užitím jejich směrových, resp. normálových vektorů.

Výpočet odchylky přímek se zde provádí na základě *vět*:

V.1. Pro odchylku α přímek $p(A, \boldsymbol{u})$, $q(B, \boldsymbol{v})$ platí:

$$\cos\alpha = \frac{|\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{u}| \cdot |\boldsymbol{v}|}$$

Obdobný vzorec platí též pro odchylku α přímek p, q určených normálovými vektory $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_2$:

$$\cos\alpha = \frac{|\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1| \cdot |\boldsymbol{n}_2|}$$

Důsledkem věty V.1 je *věta:*

V.2. Odchylka $\alpha \in \langle 0°, 90° \rangle$ přímek daných rovnicemi $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ se vypočte podle vzorce

$$\cos\alpha = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

Odchylku dvou přímek, které nejsou rovnoběžné s osou y a mají směrnice k_1, k_2, lze určit takto:

a) Vypočteme výraz $1 + k_1k_2$.

b) Je-li $1 + k_1k_2 = 0$, je odchylka daných přímek $\alpha = 90°$, tj. jsou k sobě kolmé.
Je-li $1 + k_1k_2 \neq 0$, je odchylka daných přímek $\alpha \neq 90°$ a lze ji vypočítat podle následující *věty:*

V.3. Pro odchylku $\alpha \in \langle 0°, 90°)$ dvou přímek, které mají směrnice k_1, k_2, platí vzorec

$$\operatorname{tg}\alpha = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2}\right|.$$

Příklad výpočtu odchylky přímek v rovině

Určete odchylku přímek p, q, jejichž analytická vyjádření jsou

$$p\colon x - 2y + 1 = 0, \qquad q\colon x = 3 + 4t, \;\; y = 2 - 3t, \;\; t \in \mathsf{R}.$$

Vyloučením parametru t z parametrických rovnic přímky q určíme její obecnou rovnici $3x + 4y - 17 = 0$.

1. způsob výpočtu odchylky α přímek p, q: Užitím vzorce z věty V.2 dostáváme

$$\cos\alpha = \frac{|1\cdot 3 + (-2)\cdot 4|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}\cdot\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{5}{5\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \doteq 0{,}447\,2,$$

odkud $\alpha \doteq 63°\,26'$.

2. způsob výpočtu: Obecné rovnice přímek p, q upravíme na směrnicové tvary

$$p\colon y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, \quad q\colon y = -\frac{3}{4}x + \frac{17}{4}.$$

Odkud plyne, že směrnice přímek p, q jsou po řadě

$$k_1 = \frac{1}{2} = 0{,}5, \quad k_2 = -\frac{3}{4} = -0{,}75.$$

Protože je $1 + k_1k_2 \neq 0$, lze tedy použít k výpočtu odchylky daných přímek p, q též vzorec z věty V.3:

$$\operatorname{tg}\alpha = \left|\frac{0{,}5 + 0{,}75}{1 - 0{,}5\cdot 0{,}75}\right| = \frac{1{,}25}{1 - 0{,}375} = \frac{1{,}25}{0{,}625} = 2,$$

odkud opět $\alpha \doteq 63°\,26'$.

Odchylka dvou přímek v prostoru

Podle kap. 9.12 je odchylka $\alpha \in \langle 0°, 90°\rangle$ dvou přímek p, q v prostoru definována stejně jako odchylka dvou přímek v rovině. A obdobně jako při určování odchylky α přímek v rovině můžeme také při výpočtu **odchylky α dvojice přímek v prostoru** užít jejich směrové vektory $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$; výpočet je založený na vzorci z věty V.1:

$$\cos\alpha = \frac{|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{u}|\cdot|\boldsymbol{v}|}$$

Odtud plyne *věta:*

V.4. V kartézské soustavě souřadnic $Oxyz$ pro odchylku $\alpha \in \langle 0°, 90°\rangle$ dvou přímek se směrovými vektory $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ platí vzorec

$$\cos\alpha = \frac{|u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}\cdot\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}}.$$

Příklad výpočtu odchylky dvou přímek v prostoru

Určete odchylku přímek p, q, které jsou dány parametrickým vyjádřením:

$$p\colon x = 1 + 3t, \quad y = 1 + t, \quad z = 1 + 2t, \quad t \in \mathrm{R},$$
$$q\colon x = 2s, \quad y = 3 + 9s, \quad z = -1 + 6s, \quad s \in \mathrm{R}$$

Řešení

Směrové vektory přímek p, q jsou $\boldsymbol{u} = (3;\ 1;\ 2)$, $\boldsymbol{v} = (2;\ 9;\ 6)$. Odchylku přímek p, q vypočteme podle vzorce z věty V.4:

$$\cos\alpha = \frac{|3\cdot 2 + 1\cdot 9 + 2\cdot 6|}{\sqrt{3^2+1^2+2^2}\cdot\sqrt{2^2+9^2+6^2}} = 0{,}656\,0 \Rightarrow \alpha \doteq 49°$$

Vzdálenost bodu od přímky v rovině

Nechť je v rovině dána přímka p a bod M, který na ní neleží. Podle definice v kap. 9.12 **vzdálenost** $v(M, p)$ **bodu** M **od přímky** p je rovna vzdálenosti $v = |MQ|$ bodu M od paty Q kolmice k vedené bodem M k přímce p. Pro její analytické vyjádření platí *věta:*

V.5. Vzdálenost bodu $M[x_0, y_0]$ od přímky dané v kartézské soustavě souřadnic Oxy rovnicí $ax + by + c = 0$ $(a \neq 0 \vee b \neq 0)$ je vyjádřena vzorcem

$$v(M, p) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Příklady výpočtu vzdálenosti bodu od přímky v kartézské soustavě souřadnic v rovině

1. Určete vzdálenost bodu $A[7;\ -2]$ od přímky p o rovnici $6x - 8y - 77 = 0$.

Řešení

Podle vzorce z věty V.5 je

$$v(A, p) = \frac{|6\cdot 7 - 8\cdot(-2) - 77|}{\sqrt{6^2 + (-8)^2}} = \frac{|42 + 16 - 77|}{\sqrt{36+64}} = \frac{|-19|}{10} = 1{,}9.$$

2. Určete vzdálenost rovnoběžek p, q o rovnicích $p\colon 4x - 3y - 6 = 0$, $q\colon 8x - 6y + 3 = 0$.

Řešení

Na jedné z přímek zvolíme libovolný bod, např. na přímce p bod $M[0;\ -2]$, a určíme pomocí vzorce z věty V.5 jeho vzdálenost $v = v(M, q)$ od přímky q.

Výsledek: $v = 1{,}5$.

Vzdálenosti bodů, přímek a rovin v prostoru

Všechny úlohy na výpočet vzdáleností v prostoru se v podstatě převádějí na výpočet vzdálenosti dvou bodů.

Vzdálenost bodu od přímky v prostoru

Vzdálenost $v(M, p)$ **bodu** M **od přímky** p **v prostoru** je rovna vzdálenosti bodu M od bodu P, který je průsečíkem přímky p s rovinou ϱ procházející bodem M a kolmou k přímce p (viz kap. 9.12). Analytický způsob určení vzdálenosti $v(M, p)$ může tedy spočívat v nalezení rovnice této roviny ϱ a určení souřadnic jejího průsečíku P s přímkou p. Můžeme však užít i jednodušších postupů řešení úlohy, které ukážeme na příkladu.

Příklad výpočtu vzdálenosti bodu od přímky

Určete vzdálenost bodu $M[7; 9; 7]$ od přímky p dané parametrickým vyjádřením p: $x = 2 + 4t$, $y = 1 + 3t$, $z = 2t$, $t \in \mathrm{R}$.

1. způsob řešení

Nechť $X[x, y, z]$ je libovolný (proměnný) bod dané přímky p. Určíme vzdálenost bodů M, X:

$$
\begin{aligned}
|MX| &= \sqrt{(x-7)^2 + (y-9)^2 + (z-7)^2} = \\
&= \sqrt{(4t-5)^2 + (3t-8)^2 + (2t-7)^2} = \\
&= \sqrt{29t^2 - 116t + 138} = \sqrt{29(t-2)^2 + 22}
\end{aligned}
$$

Vidíme, že $|MX|$ je funkcí proměnné $t \in \mathrm{R}$, která nabývá minima pro $t = 2$. Toto minimum je

$$v(M, p) = \min |MX| = \sqrt{22}.$$

2. způsob řešení

Nechť $P[x_0, y_0, z_0]$ je pata kolmice spuštěné z bodu M k přímce p. Z parametrických rovnic přímky p plyne, že pro souřadnice bodu P platí

$$x_0 = 2 + 4t_0, \quad y_0 = 1 + 3t_0, \quad z_0 = 2t_0,$$

kde t_0 je hodnota parametru pro bod P. Směrový vektor $\boldsymbol{u} = (4; 3; 2)$ přímky p je kolmý k vektoru $\boldsymbol{MP} = P - M$, takže $\boldsymbol{u} \cdot (P - M) = 0$, odtud plyne

$$4 \cdot (x_0 - 7) + 3 \cdot (y_0 - 9) + 2 \cdot (z_0 - 7) = 0$$

neboli

$$4 \cdot (4t_0 - 5) + 3 \cdot (3t_0 - 8) + 2 \cdot (2t_0 - 7) = 0 \Rightarrow t_0 = 2.$$

Souřadnice bodu P jsou tedy $x_0 = 10$, $y_0 = 7$, $z_0 = 4$, a proto

$$
\begin{aligned}
v(M, p) = |MP| &= \sqrt{(7-10)^2 + (9-7)^2 + (7-4)^2} = \\
&= \sqrt{9 + 4 + 9} = \sqrt{22}.
\end{aligned}
$$

3. způsob řešení

Na dané přímce p leží bod $A[2; 1; 0]$. Určíme vektor $\boldsymbol{AM} = M - A = (5; 8; 7)$. Směrový vektor $\boldsymbol{u} = (4; 3; 2)$ dané přímky p a vektor $\boldsymbol{AM}$ určují rovnoběžník, jehož obsah je $S = |\boldsymbol{AM} \times \boldsymbol{u}|$. Zároveň však je $S = |\boldsymbol{u}| \cdot v(M, p)$, takže

$$v(M, p) = \frac{|\boldsymbol{AM} \times \boldsymbol{u}|}{|\boldsymbol{u}|}.$$

Vychází $\boldsymbol{AM} \times \boldsymbol{u} = (-5; 18; -17) \Rightarrow |\boldsymbol{AM} \times \boldsymbol{u}| = \sqrt{638}$. Po dosazení dostáváme

$$v(M, P) = \frac{\sqrt{638}}{\sqrt{29}} = \sqrt{\frac{638}{29}} = \sqrt{22}.$$

Vzdálenost bodu od roviny

Vzdálenost $v(M, \varrho)$ bodu M od roviny ϱ je rovna vzdálenosti bodu M od paty P kolmice k vedené z bodu M k rovině ϱ (viz kap. 9.12). Analyticky ji lze vyjádřit na základě věty:

> *V.6.* Pro vzdálenost libovolného bodu $M[x_0, y_0, z_0]$ od roviny dané obecnou rovnicí $ax + by + cz + d = 0$ $(a \neq 0 \vee b \neq 0 \vee c \neq 0)$ platí vzorec:
>
> $$v(M, \varrho) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Poznámka. Porovnejte vzorec z věty V.6 se vzorcem pro vzdálenost bodu od přímky v rovině (viz větu V.5).

Příklad výpočtu vzdálenosti bodu od roviny

Vypočtěte vzdálenost bodu $M\left[2; 0; -\frac{1}{2}\right]$ od roviny dané obecnou rovnicí $4x - 4y + 2z + 17 = 0$.

Řešení

K výpočtu hledané vzdálenosti $v(M, \varrho)$ užijeme vzorec z věty V.6; po dosazení dostáváme:

$$v(M, \varrho) = \frac{|8 - 0 - 1 + 17|}{\sqrt{16 + 16 + 4}} = \frac{24}{6} = 4$$

Vzdálenost dvou rovnoběžných přímek

Vzdálenost $v(p, q)$ dvou rovnoběžných přímek p, q je rovna vzdálenosti libovolného bodu M jedné přímky od druhé přímky (viz kap. 9.12).

Příklad výpočtu vzdálenosti dvou rovnoběžek

Určete vzdálenost rovnoběžek p, q daných svým parametrickým vyjádřením

$$
\begin{aligned}
p&: x = 1 + t, \quad y = 1 + 2t, \quad z = -t, \quad t \in \mathrm{R}, \\
q&: x = 2s, \quad y = 4s, \quad z = -2s, \quad s \in \mathrm{R}.
\end{aligned}
$$

Řešení

Přímky p, q jsou skutečně rovnoběžné, obě mají směrový vektor $\boldsymbol{u} = (1; 2; -1)$. Každá rovina ϱ kolmá k těmto přímkám má normálový vektor $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{u}$, a tedy obecnou rovnici tvaru

$$x + 2y - z + d = 0.$$

Na přímce p leží bod $A[1; 1; 0]$. Pro rovinu ϱ kolmou k přímkám p, q vedenou bodem A z podmínky $a \in \varrho$ dostáváme:

$$1 + 2 \cdot 1 - 0 + d = 0 \Rightarrow d = -3$$

Uvažovaná rovina ϱ má tedy rovnici

$$x + 2y - z - 3 = 0.$$

Určíme souřadnice průsečíku P roviny ϱ s přímkou q: Bodu P odpovídá parametr splňující rovnici

$$2s + 2 \cdot 4s - (-2s) - 3 = 0 \Rightarrow s = \frac{1}{4},$$

takže souřadnice $x = \frac{1}{2}$, $y = 1$, $z = -\frac{1}{2}$, tj. $P\left[\frac{1}{2}; 1; -\frac{1}{2}\right]$.

Hledaná vzdálenost rovnoběžek p, q je

$$v(p, q) = |AP| = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + (1-1)^2 + \left(0 + \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Vzdálenost přímky od roviny s ní rovnoběžné

Vzdálenost $v(p, \varrho)$ **přímky** p **od roviny** ϱ **s ní rovnoběžné** je rovna vzdálenosti libovolného bodu $M \in p$ od roviny ϱ (viz kap. 9.12).

Příklad výpočtu vzdálenosti přímky od roviny s ní rovnoběžné

Určete vzdálenost přímky p od roviny ϱ s ní rovnoběžné, je-li přímka p dána parametrickým vyjádřením

$$p\colon x = 3 + 2t, \ \ y = 1 - t, \ \ z = -1 + 2t, \ \ t \in \mathrm{R}$$

a rovina ϱ je dána obecnou rovnicí

$$\varrho\colon 22x + 4y - 20y - 45 = 0.$$

Řešení

Směrový vektor $\boldsymbol{u} = (2; -1; 2)$ přímky p a normálový vektor $\boldsymbol{n} = (22; 4; -20)$ roviny ϱ jsou k sobě kolmé, neboť $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} = 2 \cdot 22 + (-1) \cdot 4 + 2 \cdot (-20) = 44 - 4 - 40 = 0$.

Přímka p je tedy skutečně rovnoběžná s rovinou ϱ. Na přímce p leží bod $A[3; 1; -1]$; jeho vzdálenost od roviny ϱ určíme podle vzorce z věty V.6:

$$v(p, \varrho) = v(A, \varrho) = \frac{|22 \cdot 3 + 4 \cdot 1 - 20 \cdot (-1) - 45|}{\sqrt{22^2 + 4^2 + (-20)^2}} = \frac{45}{30} = \frac{3}{2}$$

Vzdálenost dvou rovnoběžných rovin

Vzdálenost $v(\varrho, \sigma)$ **dvou rovnoběžných rovin** ϱ, σ je rovna vzdálenosti libovolného bodu M jedné roviny od druhé roviny (kap. 9.12).

Příklad výpočtu vzdálenosti dvou rovnoběžných rovin

Určete vzdálenost rovnoběžných rovin ϱ, σ daných obecnými rovnicemi

$$\varrho\colon 11x - 2y - 10z + 15 = 0, \qquad \sigma\colon 11x - 2y - 10z - 45 = 0.$$

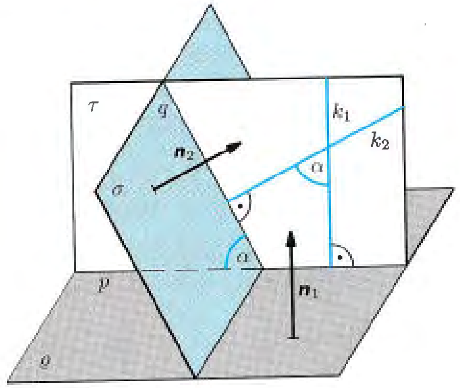
Řešení

Obě roviny jsou rovnoběžné, neboť mají týž normálový vektor $\boldsymbol{n} = (11; -2; -10)$. V rovině ϱ zvolíme libovolný bod $M\left[0; 0; \frac{3}{2}\right]$. Určíme jeho vzdálenost od roviny σ podle vzorce z věty V.6:

$$v(\varrho, \sigma) = v(M, \sigma) = \frac{\left|11 \cdot 0 - 2 \cdot 0 - 10 \cdot \frac{3}{2} - 45\right|}{\sqrt{11^2 + (-2)^2 + (-10)^2}} = \frac{60}{15} = 4$$

Odchylka dvou rovin

Odchylka α **dvou rovin** ϱ, σ (viz kap. 9.12) je rovna odchylce průsečnic p, q těchto rovin s třetí rovinou τ, která je k oběma rovinám ϱ, σ kolmá, a též odchylce libovolných dvou kolmic k_1, k_2 k rovinám ϱ, σ (obr. 10.63).



Obr. 10.63

Máme-li určit odchylku α rovin ϱ, σ daných obecnými rovnicemi $\varrho\colon a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$, $\sigma\colon a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$, můžeme výpočet provést užitím normálových vektorů (obr. 10.63) $\boldsymbol{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$, $\boldsymbol{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ na základě vzorce:

$$\cos \alpha = \frac{|\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1| \cdot |\boldsymbol{n}_2|}$$

Odtud po dosazení souřadnic vektorů $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_2$ vyplývá *věta:*

V.7. Odchylka $\alpha \in \langle 0°, 90° \rangle$ dvou rovin, které mají normálové vektory $\boldsymbol{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$, $\boldsymbol{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$, se vypočítá podle vzorce:

$$\cos \alpha = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

Příklad výpočtu odchylky dvou rovin

Určete odchylku α rovin ϱ, σ daných obecnými rovnicemi

$$\varrho\colon -x + 2y + z + 5 = 0, \qquad \sigma\colon x + y + 2z + 7 = 0.$$

Řešení

Normálové vektory rovin ϱ, σ jsou $\boldsymbol{n}_1 = (-1; 2; 1)$, $\boldsymbol{n}_2 = (1; 1; 2)$. Dosazením do vzorce z věty V.7 dostáváme:

$$\cos\alpha = \frac{|(-1)\cdot 1 + 2\cdot 1 + 1\cdot 2|}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2}\cdot\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

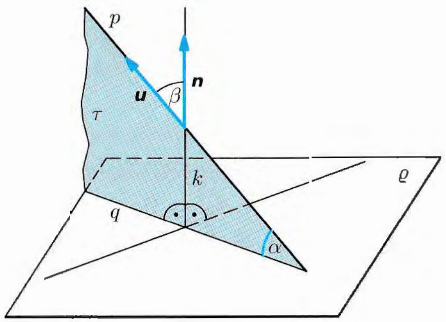
Poznámka. Výpočet odchylek rovin pomocí jejich normálových vektorů (vektorů kolmých k rovinám) je natolik výhodný, že při jiném zadání rovin než obecnými rovnicemi se snažíme určit nějaké k nim kolmé nenulové vektory. Tuto vlastnost mají vektorové součiny dvojic nekolineárních vektorů s umístěními v každé z daných rovin.

Odchylka přímky a roviny

Odchylka α přímky p a roviny ϱ je rovna odchylce přímky p a průsečnice q roviny ϱ s rovinou τ, která obsahuje přímku p a je kolmá k rovině ϱ (viz kap. [illegible]).

Určujeme-li odchylku α přímky p dané parametrickým vyjádřením a roviny ϱ dané obecnou rovnicí, můžeme využít směrový vektor $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ přímky p a normálový vektor $\boldsymbol{n} = (a, b, c)$ roviny ϱ (obr. 10.64). Platí:

$$\sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{u}|\cdot|\boldsymbol{n}|}$$



Obr. 10.64

Po dosazení souřadnic vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{n}$ plyne odtud *věta*:

V.8. Odchylka $\alpha \in \langle 0^\circ, 90^\circ\rangle$ přímky p, která má směrový vektor $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$, a roviny ϱ, jež má normálový vektor $\boldsymbol{n} = (a, b, c)$, se vypočte podle vzorce

$$\sin\alpha = \frac{|u_1 a + u_2 b + u_3 c|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}\cdot\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Příklad výpočtu odchylky přímky a roviny

Určete odchylku α přímky AB a roviny ϱ, je-li dáno $A[2; 3; -1]$, $B[3; 7; 4]$, $\varrho\colon 2x - 3y + z + 4 = 0$.

Řešení

Určíme směrový vektor $\boldsymbol{u}$ přímky AB: $\boldsymbol{u} = B - A = (1; 4; 5)$ a normálový vektor roviny ϱ: $\boldsymbol{n} = (2; -3; 1)$. Pro odchylku α přímky AB a roviny ϱ pak podle vzorce z věty V.8 dostáváme:

$$\sin\alpha = \frac{|1\cdot 2 + 4\cdot(-3) + 5\cdot 1|}{\sqrt{1^2 + 4^2 + 5^2}\cdot\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2}} = \frac{|-5|}{\sqrt{42\cdot 14}} \doteq 0{,}206\,2 \Rightarrow \alpha \doteq 11^\circ\,54'$$

Úlohy o kolmosti přímek a rovin

Kolmými nazýváme **lineární geometrické útvary** (útvary popsané lineárními rovnicemi, tj. přímky, roviny a jejich části), jejichž odchylka je 90°.

Při *analytickém vyšetřování kolmosti lineárních útvarů* se využívá zejména toho, že

a) skalární součin dvou k sobě kolmých vektorů je roven nule,

b) vektorový součin dvou nenulových vektorů je kolmý k oběma těmto vektorům, a je tedy kolmý i k rovině, kterou určují.

Příklady řešení úloh o kolmosti přímek a rovin

1. Určete rovnici přímky, která prochází bodem $M[2; 3; 1]$, je různoběžná s danou přímkou p a je k ní kolmá. Přímka p má parametrické vyjádření:

$$p\colon x = 1 + 2t, \quad y = -1 - t, \quad z = 5 + 3t, \quad t \in \mathsf{R}$$

1. způsob řešení

Směrový vektor dané přímky p je $\boldsymbol{u} = (2; -1; 3)$. Hledaná kolmice k je určena bodem M a patou kolmice, tj. jejím průsečíkem $P[x, y, z]$ s přímkou p. Směrový vektor přímky k je proto $\boldsymbol{u}_k = (x - 2, y - 3, z - 1)$, přičemž pro souřadnice x, y, z bodu P platí parametrické rovnice přímky p. Protože platí $\boldsymbol{u}_k \perp \boldsymbol{u}$, je

$$\boldsymbol{u}_k \cdot \boldsymbol{u} = 0 \Rightarrow 2\cdot(x - 2) - (y - 3) + 3\cdot(z - 1) = 0$$

a po dosazení z parametrického vyjádření přímky p:

$$2\cdot(1 + 2t - 2) - (-1 - t - 3) + 3\cdot(5 + 3t - 1) = 0 \Rightarrow t = -1$$

Tím jsme získali hodnotu parametru t příslušnou k bodu P, takže jeho souřadnice jsou $P[-1; 0; 2]$. Po dosazení dostáváme $\boldsymbol{u}_k = (-3; -3; 1)$. Kolmice k má parametrické vyjádření $X = M + s\boldsymbol{u}_k$, $s \in \mathsf{R}$, čili v souřadnicovém tvaru

$$k\colon x = 2 - 3s, \quad y = 3 - 3s, \quad z = 1 + s, \quad s \in \mathsf{R}.$$

2. způsob řešení
Přímka p je dána bodem $A[1; -1; 5]$ a směrovým vektorem $\boldsymbol{u} = (2; -1; 1)$.
Určíme souřadnice vektorového součinu $\boldsymbol{AM} \times \boldsymbol{u}$. Protože je $\boldsymbol{AM} = M - A =$
$= (1; 4; -4)$, dostáváme $\boldsymbol{AM} \times \boldsymbol{u} = (8; -11; -9)$. Dále určíme souřadnice vektoru $(\boldsymbol{AM} \times \boldsymbol{u}) \times \boldsymbol{u} = (-42; -42; 14) = 14 \cdot (-3; -3; 1)$. Směrový vektor $\boldsymbol{u}_k$ hledané kolmice k je kolineární s tímto vektorem, a proto můžeme volit $\boldsymbol{u}_k =$
$= (-3; -3; 1)$. Dospíváme tedy k témuž výsledku jako při řešení 1. způsobem.

2. Veďte počátkem soustavy souřadnic $O[0; 0; 0]$ rovinu kolmou k rovinám ϱ_1, ϱ_2, které jsou dány obecnými rovnicemi:

$$\begin{aligned} \varrho_1&: 2x - y + 5z + 3 = 0 \\ \varrho_2&: x + 3y - z - 7 = 0 \end{aligned}$$

1. způsob řešení
Hledaná rovina ϱ bude mít obecnou rovnici $\varrho\colon ax + by + cz = 0$, ($d = 0$, protože $O \in \varrho$).

Její normálový vektor je $\boldsymbol{n} = (a, b, c)$. Je kolmý k normálovým vektorům $\boldsymbol{n}_1 =$
$= (2; -1; 5)$, $\boldsymbol{n}_2 = (1; 3; -1)$ daných rovin ϱ_1, ϱ_2, takže platí

$$\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n} = 0, \qquad \boldsymbol{n}_2 \cdot \boldsymbol{n} = 0$$

neboli v souřadnicích

$$2a - b + 5c = 0, \qquad a + 3b - c = 0.$$

Zvolíme $c = 1$, dostáváme $a = -2$, $b = 1$, a tedy $\boldsymbol{n} = (-2; 1; 1)$. Obecná rovnice hledané roviny ϱ je tedy

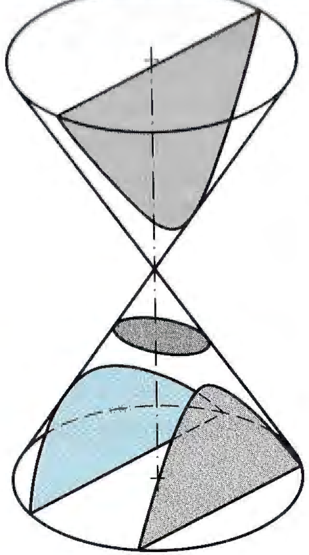
$$-2x + y + z = 0 \quad \text{neboli} \quad 2x - y - z = 0.$$

2. způsob řešení
Určíme vektorový součin $\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2 = (-14; 7; 7) = 7 \cdot (-2; 1; 1)$. Tento vektor bude kolineární s normálovým vektorem $\boldsymbol{n}$ hledané roviny ϱ. Lze proto klást $\boldsymbol{n} = (-2; 1; 1)$ a dospíváme tak k témuž výsledku jako při řešení 1. způsobem.

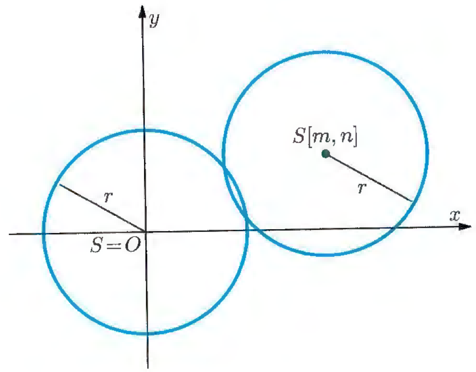
10.14 Kuželosečky a jejich rovnice

Kuželosečky je společný název pro **kružnici, elipsu, hyperbolu** a **parabolu.** První tři z nich jsou souměrné podle středu souměrnosti, a říká se jim proto **středové kuželosečky**, zatímco parabola nemá střed souměrnosti, a říká se jí proto **nestředová kuželosečka.**

Název kuželosečky pochází z toho, že tyto křivky (množiny bodů v rovině) lze získat jako průniky rotačních kuželových ploch a rovin (rovina „seče“ kuželovou plochu v kuželosečce, obr. 10.65).



Obr. 10.65



Obr. 10.66

Kružnice a její rovnice

Definici **kružnice** jsme uvedli v kap. 9.3.
O **analytickém vyjádření kružnice** platí *věty:*

V.1. Kružnice k se středem $S[m, n]$ a poloměrem $r > 0$ (obr. 10.66) má v kartézské soustavě souřadnic Oxy rovnici

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2. \tag{1}$$

Rovnici (1) se říká **středový tvar rovnice kružnice** či **středová rovnice kružnice.**

Speciálně, má-li kružnice k střed S v počátku, tj. $S = O$ (obr. 10.66), pak rovnice (1) nabývá tvaru

$$x^2 + y^2 = r^2. \tag{1a}$$

V.2. Rovnice (1) kružnice k se dá upravit na tvar

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0, \quad \text{kde } a, b, c \in \mathsf{R}. \tag{2}$$

Rovnice (2) se nazývá **obecný tvar rovnice kružnice** nebo **obecná rovnice kružnice.**

Poznámka. *Obrácená věta* k větě V.2 však *neplatí*, každá rovnice tvaru (2) nemusí být rovnicí kružnice. Je jí právě tehdy, když se dá uvést na středový tvar (1), nutná a postačující podmínka pro to je $a^2 + b^2 > 4c$.

Příklady určování rovnice kružnice

1. Napište rovnici kružnice, která má střed $S[-4; 5]$ a prochází bodem $A[6; 1]$.

Řešení

Protože $A \neq S$, hledaná kružnice skutečně existuje. Dosadíme-li do její rovnice ve středovém tvaru (1) souřadnice středu $m = -4$, $n = 5$, dostáváme $(x+4)^2 + (y-5)^2 = r^2$; zbývá určit poloměr r. Bod A na této kružnici leží, proto jeho souřadnice $x = 6$, $y = 1$ její rovnici vyhovují, tj. platí $(6+4)^2 + (1-5)^2 = r^2$ čili $r^2 = 10^2 + (-4)^2 = 116$. Rovnice kružnice vyhovující podmínkám úlohy tedy je

$$(x+4)^2 + (y-5)^2 = 116 \text{ čili } x^2 + y^2 + 8x - 10y - 75 = 0.$$

2. Dokažte, že rovnice $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 21 = 0$, $5x^2 + 5y^2 - 20x + 48y - 345 = 0$ jsou rovnicemi kružnic, a napište rovnici přímky, která je určena jejich středy.

Řešení

Jestliže existuje kružnice $k_1(S_1, r_1)$, jejíž analytickým vyjádřením je první daná rovnice, pak ji lze upravit na středový tvar

$$(x - m_1)^2 + (y - n_1)^2 = r_1^2.$$

Proto se budeme snažit ji na tento tvar upravit; postupně dostáváme:

$$\begin{aligned}
(x^2 + 6x) + (y^2 - 8y) &= -21 \\
(x^2 + 6x + 9) + (y^2 - 8y + 16) &= -21 + 9 + 16 \\
(x+3)^3 + (y-4)^2 &= 4
\end{aligned}$$

Tato rovnice je analytickým vyjádřením kružnice k_1 se středem $S_1[-3; 4]$ a poloměrem $r_1 = 2$.

Druhou rovnici nejprve dělíme pěti a pak upravíme obdobně:

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 - 4x + 9{,}6y - 69 &= 0 \\
(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 9{,}6y + 4{,}8^2) &= 69 + 4 + 23{,}04 \\
(x-2)^2 + (y+4{,}8)^2 &= 96{,}04
\end{aligned}$$

Protože $96{,}04 = 9{,}8^2$, je tato rovnice analytickým vyjádřením kružnice k_2 se středem $S_2[2; -4{,}8]$ a poloměrem $r_2 = 9{,}8$.

Přímka S_1S_2 má rovnici

$$y - n_1 = \frac{n_2 - n_1}{m_2 - m_1}(x - m_1)$$

čili

$$y - 4 = \frac{-4{,}8 - 4}{2 + 3}(x + 3).$$

Po úpravě vychází

$$44x + 25y + 32 = 0.$$

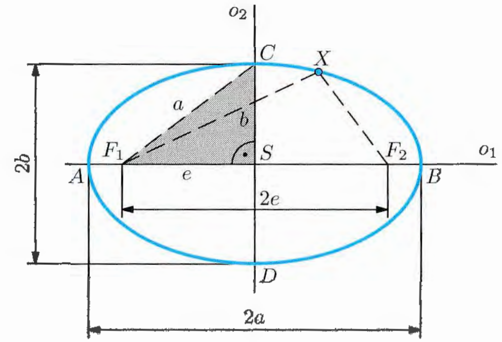
V tabulce 10.5 uvádíme pro srovnání analytická vyjádření kružnice $k(S, r)$, kruhu $\mathrm{K}(S, r)$ a oblastí, na které kružnice dělí rovinu.

Analytické vyjádření kružnice, kruhu, vnitřní a vnější oblasti kružnice Tab. 10.5

Název geometrického útvaru	Podmínka pro $\lvert SX \rvert$	Analytické vyjádření útvaru
Kružnice $k(S, r)$ se středem $S[m, n]$ a poloměrem $r > 0$	$\lvert SX \rvert^2 = r^2$	$(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$
Vnitřní oblast kružnice $k(S, r)$	$\lvert SX \rvert^2 < r^2$	$(x-m)^2 + (y-n)^2 < r^2$
Kruh $\mathrm{K}(S, r)$	$\lvert SX \rvert^2 \leqq r^2$	$(x-m)^2 + (y-n)^2 \leqq r^2$
Vnější oblast kružnice $k(S, r)$	$\lvert SX \rvert^2 > r^2$	$(x-m)^2 + (y-n)^2 > r^2$

Elipsa a její rovnice

Elipsa je množina všech bodů X v rovině, které mají od dvou daných různých bodů F_1, F_2 stálý (konstantní) součet vzdáleností $|XF_1| + |XF_2| > |F_1F_2|$ (obr. 10.67).



Obr. 10.67

Označuje se $|XF_1| + |XF_2| = 2a$, $|F_1F_2| = 2e$. Podle trojúhelníkové nerovnosti pro $\triangle XF_1F_2$ musí platit podmínka kladená v definici elipsy, tj. $|XF_1| + |XF_2| > |F_1F_2|$ čili $2a > 2e$. Je tedy u elipsy $a > e$.

Body F_1, F_2 se nazývají **ohniska elipsy**, přímka F_1F_2 se nazývá **hlavní osa elipsy**, středu S úsečky F_1F_2 se říká **střed elipsy**, kolmice k hlavní ose vedená středem elipsy se nazývá **vedlejší osa elipsy**. Průsečíky elipsy s její hlavní, resp. vedlejší osou se nazývají **hlavní**, resp. **vedlejší vrcholy elipsy**; budeme je značit A, B, C, D, pro jejich vzdálenosti platí: $|AB| = 2a$, $|CD| = 2b = 2\sqrt{a^2 - e^2}$, $a > b$. Konstantě a se říká **délka hlavní poloosy elipsy**, konstantě $b = \sqrt{a^2 - e^2}$ **délka vedlejší poloosy elipsy**, konstantě $e = \sqrt{a^2 - b^2}$ **excentricita (výstřednost) elipsy**; představuje vzdálenost ohniska od středu elipsy (obr. 10.67). Čím je elipsa méně zploštělá (více podobná kružnici), tím má excentricitu menší, ohniska blíže ke středu elipsy.

O analytickém vyjádření elipsy platí *věty*:

V.3. Elipsa se středem $S[m, n]$, jejíž hlavní a vedlejší osa jsou rovnoběžné s osami kartézské soustavy souřadnic Oxy, má v této soustavě rovnici tvaru

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$$

nebo (3)

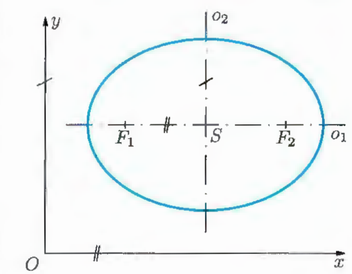
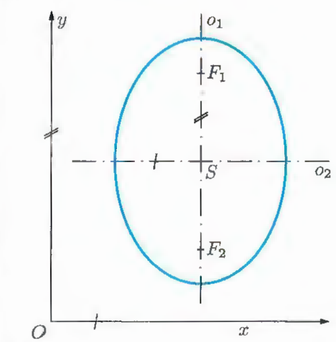
$$\frac{(x-m)^2}{b^2} + \frac{(y-n)^2}{a^2} = 1,$$

kde a, b jsou délky hlavní a vedlejší poloosy elipsy.

Rovnici (3) se říká **středový tvar rovnice elipsy** či **středová rovnice elipsy** a speciálně pro $S = O$ se nazývá též **osová rovnice elipsy**.

Oba případy elipsy a její rovnice podle věty V.3 jsou uvedeny přehledně v tabulce 10.6.

Rovnice elipsy ve středovém tvaru Tab. 10.6

Elipsa	Rovnice elipsy se středem $S[m, n]$
 Hlavní osa o_1 je rovnoběžná s osou x	$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$ Speciálně pro $S = O$ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
 Hlavní osa o_1 je rovnoběžná s osou y	$\frac{(x-m)^2}{b^2} + \frac{(y-n)^2}{a^2} = 1$ Speciálně pro $S = O$ $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

V.4. Rovnici elipsy ve středovém tvaru (3) lze upravit na *obecný tvar* s koeficienty $A, B, C, D, E \in \mathbb{R}$:

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0, \quad \text{kde je } A > 0,\ B > 0,\ A \neq B. \qquad (4)$$

Rovnice (4) se nazývá **obecný tvar rovnice elipsy** nebo **obecná rovnice elipsy**.

Poznámka. *Obrácená věta* k větě V.4 však *neplatí*, neboť každá taková kvadratická rovnice nemusí být rovnicí elipsy s hlavní osou rovnoběžnou s osou x nebo y.

Rozborem analytického vyjádření elipsy můžeme odvodit její geometrické vlastnosti, jež uvádí *věta*:

V.5. a) Elipsa je souměrná podle své hlavní osy, podle své vedlejší osy a podle svého středu.

b) Všechny body elipsy leží v obdélníku, jehož strany mají délky $|AB|$, $|CD|$ a prochází po řadě body A, B, C, D.

Poznámka. Kružnice o poloměru r je zřejmě zvláštním případem elipsy, když $a = b = r$.

Příklady určování rovnice elipsy

1. Určete rovnici elipsy, která má střed $S = O$, je-li $a = 25$, $e = 7$.

Řešení

Protože u elipsy platí $e^2 = a^2 - b^2$, je $b^2 = a^2 - e^2 = 25^2 - 7^2 = 625 - 49 = 576$, takže rovnice této elipsy je $\dfrac{x^2}{625} + \dfrac{y^2}{576} = 1$.

2. Určete velikosti poloos a souřadnice ohnisek elipsy o rovnici $25x^2 + 9y^2 = 900$.

Řešení

Dělíme-li danou rovnici číslem 900, uvedeme ji na tvar

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{100} = 1,$$

což je rovnice elipsy se středem $S = O$, hlavní osou y a vedlejší osou x; $a = 10$, $b = 6$, a tedy $e^2 = a^2 - b^2 = 100 - 36 = 64$, tj. $e = 8$. Daná elipsa má tedy ohniska $F_1[0; 8]$, $F_2[0; -8]$.

3. Zjistěte, zda rovnice $9x^2 + 16y^2 + 36x - 32y - 92 = 0$ je rovnicí elipsy, a je-li tomu tak, určete její střed, ohniska a poloosy.

Řešení

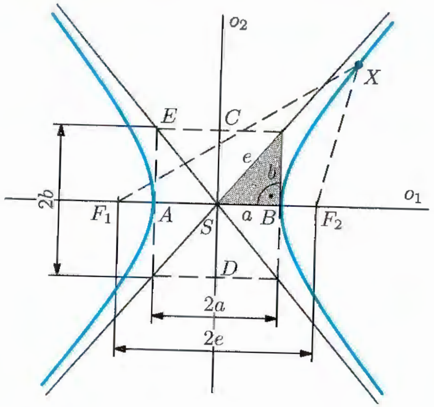
Danou rovnici upravíme postupně takto:

$$\begin{aligned}
9x^2 + 36x + 16y^2 - 32y &= 92\\
9(x^2 + 4x) + 16(y^2 - 2y) &= 92\\
9(x^2 + 4x + 4) + 16(y^2 - 2y + 1) &= 92 + 9 \cdot 4 + 16 \cdot 1\\
9(x+2)^2 + 16(y-1)^2 &= 144\\
\frac{9(x+2)^2}{144} + \frac{16(y-1)^2}{144} &= 1\\
\frac{(x+2)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{9} &= 1
\end{aligned}$$

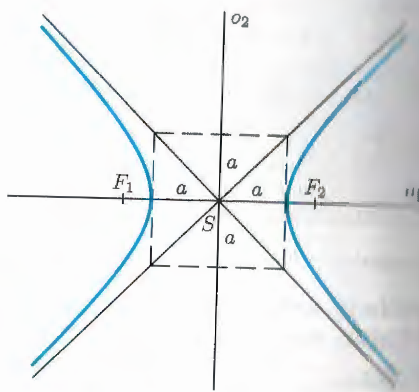
... je však osová rovnice elipsy se středem $S[-2; 1]$, $a = 4$, $b = 3$, $e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16-9} = \sqrt{7}$. Její ohniska jsou $F_1[-2-\sqrt{7}; 1]$, $F_2[-2+\sqrt{7}; 1]$, kde $-2-\sqrt{7} \doteq -4{,}65$, $-2+\sqrt{7} \doteq 0{,}65$.

Hyperbola a její rovnice

Hyperbola je množina všech bodů X v rovině, které mají tu vlastnost, že absolutní hodnota rozdílu jejich vzdáleností od dvou daných různých bodů F_1, F_2 je stálá (konstantní), přičemž $||XF_1| - |XF_2|| < |F_1F_2|$ (obr. 10.68).



Obr. 10.68



Obr. 10.69

Označuje se $||XF_1| - |XF_2|| = 2a$, $|F_1F_2| = 2e$. Podle trojúhelníkové nerovnosti pro $\triangle XF_1F_2$ platí $||XF_1| - |XF_2|| < |F_1F_2|$ čili $2a < 2e$. Je tedy u hyperboly $a < e$.

Body F_1, F_2 se nazývají **ohniska hyperboly**, přímka F_1F_2 se nazývá **hlavní osa hyperboly**, středu S úsečky F_1F_2 se říká **střed hyperboly**, kolmice k hlavní ose vedená středem hyperboly se nazývá **vedlejší osa hyperboly**. Průsečíky hyperboly s její hlavní osou se nazývají **vrcholy hyperboly**; budeme je značit A, B, pro jejich vzdálenost zřejmě platí: $|AB| = 2a$. Konstantě a se říká **délka hlavní poloosy hyperboly**, konstantě $b = \sqrt{e^2 - a^2}$ **délka vedlejší poloosy hyperboly**, konstantě $e = \sqrt{a^2 + b^2}$ **excentricita (výstřednost) hyperboly**; představuje vzdálenost ohniska od středu hyperboly (obr. 10.68).

O **analytickém vyjádření hyperboly** platí *věty*:

V.6. Hyperbola se středem $S[m, n]$, jejíž hlavní a vedlejší osa jsou rovnoběžné s osami kartézské soustavy souřadnic Oxy, má v této souřadnicové soustavě rovnici tvaru

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$$

nebo (5)

$$-\frac{(x-m)^2}{b^2} + \frac{(y-n)^2}{a^2} = 1,$$

kde a, b jsou délky hlavní a vedlejší poloosy hyperboly.

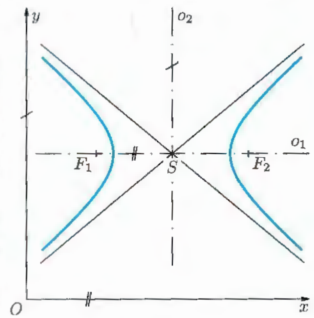
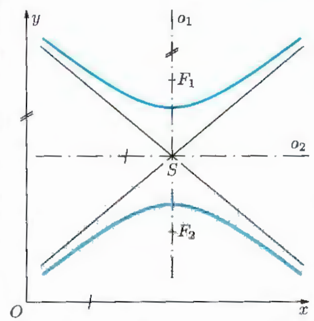
Rovnici (5) se říká **středový tvar rovnice hyperboly** či **středová rovnice hyperboly** a speciálně pro $S = O$ se nazývá též **osová rovnice hyperboly**.

Je-li $a = b$, nazývá se **hyperbola rovnoosá** (obr. 10.69).

Hyperbola není souvislá křivka, skládá se ze dvou disjunktních částí, které se nazývají **větve hyperboly**. Obě se neomezeně blíží ke dvěma přímkám, jež procházejí středem S hyperboly a od její hlavní osy mají odchylku α, pro kterou platí $\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}$, kde a, b jsou po řadě délky hlavní a vedlejší poloosy hyperboly. Tyto přímky se nazývají **asymptoty hyperboly**.

V tabulce 10.7 jsou zobrazeny dva možné případy polohy hyperboly podle věty V.6 a jsou tu přehledně uvedeny příslušné středové tvary rovnic hyperboly, jakož i rovnice asymptot hyperboly.

Rovnice hyperboly ve středovém tvaru Tab. 10.7

Hyperbola	Rovnice hyperboly se středem $S[m, n]$	Rovnice asymptot
 Hlavní osa o_1 je rovnoběžná s osou x	$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$	$y - n = \frac{b}{a}(x-m)$ $y - n = -\frac{b}{a}(x-m)$
	Speciálně pro $S = O$ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$y = \frac{b}{a}x$ $y = -\frac{b}{a}x$
 Hlavní osa o_1 je rovnoběžná s osou y	$-\frac{(x-m)^2}{b^2} + \frac{(y-n)^2}{a^2} = 1$	$y - n = \frac{a}{b}(x-m)$ $y - n = -\frac{a}{b}(x-m)$
	Speciálně pro $S = O$ $-\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$	$y = \frac{a}{b}x$ $y = -\frac{a}{b}x$

Poznámka. Speciálně pro rovnoosou hyperbolu je $b = a$.

V.7. Rovnici hyperboly ve středovém tvaru (5) lze upravit na *obecný tvar* s koeficienty $A, B, C, D, E \in \mathsf{R}$:

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0, \quad \text{přičemž } AB < 0. \qquad (6)$$

Rovnice (5) se nazývá **obecný tvar rovnice hyperboly** nebo **obecná rovnice hyperboly**.

Poznámka. *Obrácená věta* k větě V.7 však *neplatí*, neboť každá taková kvadratická rovnice nemusí být rovnicí hyperboly s hlavní osou rovnoběžnou s osou x nebo y.

Rozborem analytického vyjádření hyperboly můžeme odvodit její geometrické vlastnosti, jež vyjadřuje *věta*:

V.8. a) Hyperbola je souměrná podle své hlavní osy, podle své vedlejší osy a podle svého středu.

b) Hyperbola se skládá ze dvou disjunktních částí (větví hyperboly), z nichž každá leží v jedné z opačných polorovin, jejichž hraniční přímkou je kolmice k hlavní ose vedená středem hyperboly.

c) Obě větve hyperboly leží uvnitř té dvojice vrcholových úhlů sevřených asymptotami hyperboly, ve kterých zároveň leží její hlavní osa.

d) Součin vzdáleností libovolného bodu hyperboly od každé z jejích asymptot je konstantní, rovná se číslu $\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}$, kde a, b jsou délky hlavní a vedlejší poloosy hyperboly.

e) Speciálně rovnoosá hyperbola má asymptoty navzájem kolmé.

Rovnoosou hyperbolu se středem $S = O$ a osami v osách souřadnic x, y o rovnici $x^2 - y^2 = \pm a^2$ lze otočit kolem počátku O o orientovaný úhel velikosti $\pm 45°$ do polohy, ve které má střed $S = O$ a osy v osách souřadnicových kvadrantů. Její rovnice je pak $xy = k$, kde $k = \pm\frac{1}{2}a^2$ (tab. 10.8), takže tato rovnoosá hyperbola je **grafem nepřímé úměrnosti** (viz kap. 4.3).

Příklady určování rovnice hyperboly

1. Napište rovnici hyperboly se středem $S = O$ a s hlavní osou v ose x, je-li dána vzdálenost jejích vrcholů $2a = 30$ a vzdálenost ohnisek $2e = 34$.

Řešení

Je dáno $a = 15$, $e = 17$ a ze vztahu $e^2 = a^2 + b^2$ určíme

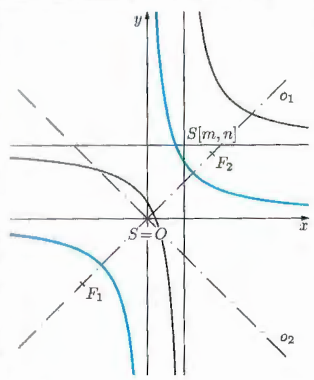
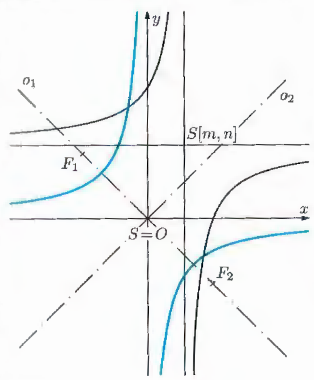
$$b = \sqrt{e^2 - a^2} = \sqrt{17^2 - 15^2} = \sqrt{289 - 225} = \sqrt{64} = 8.$$

Rovnice dané hyperboly tedy je

$$\frac{x^2}{225} - \frac{y^2}{64} = 1.$$

2. Určete rovnici hyperboly s hlavní osou v ose x a středem $S = O$, která prochází bodem $A[4{,}5;\ 1]$ a jejíž asymptoty mají rovnice $3y = \pm 2x$.

Rovnice rovnoosé hyperboly s osami v osách kvadrantů a v posunuté poloze

Rovnoosá hyperbola s osami v osách kvadrantů a v posunuté poloze	Rovnice rovnoosé hyperboly	Rovnice asymptot
	$xy = k$, kde $k > 0$ $(k = \frac{1}{2}a^2)$ čili $y = \dfrac{k}{x}$ $(x \neq 0)$ (nepřímá úměrnost)	$x = 0$ (osa y) $y = 0$ (osa x)
	Posunutá rovnoosá hyperbola se středem $S[m, n]$: $(x - m)(y - n) = k$, $k > 0$ čili $y = \dfrac{k}{x - m} + n$ (lineární lomená funkce)	$x = m$ (‖ s osou y) $y = n$ (‖ s osou x)
	$xy = k$, kde $k < 0$ $(k = -\frac{1}{2}a^2)$ čili $y = \dfrac{k}{x}$ $(x \neq 0)$ (nepřímá úměrnost)	$x = 0$ (osa y) $y = 0$ (osa x)
	Posunutá rovnoosá hyperbola se středem $S[m, n]$: $(x - m)(y - n) = k$, $k < 0$ čili $y = \dfrac{k}{x - m} + n$ (lineární lomená funkce)	$x = m$ (‖ s osou y) $y = n$ (‖ s osou x)

Řešení

Porovnáním daných rovnic asymptot $y = \pm\frac{2}{3}x$ s jejich vyjádřením $y = \pm\frac{b}{a}x$ vidíme, že pro uvažovanou hyperbolu je $\frac{b}{a} = \frac{2}{3}$ čili $a = 1{,}5b$. Po dosazení do rovnice hyperboly (s hlavní osou v ose x) vychází

$$\frac{x^2}{2{,}25b^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Protože bod $A[4{,}5;\ 1]$ na této hyperbole leží, platí

$$\frac{20{,}25}{2{,}25b^2} - \frac{1}{b^2} = 1 \text{ čili } \frac{9}{b^2} - \frac{1}{b^2} = 1, \text{ takže } b^2 = 8;\ a^2 = 2{,}25b^2 = 18.$$

Hledaná rovnice hyperboly tedy je

$$\frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{8} = 1.$$

Zjistěte, zda daná rovnice je rovnicí hyperboly, a je-li tomu tak, určete její střed, délky poloos a ohniska:

a) $9x^2 - 16y^2 - 90x - 96y - 495 = 0$

b) $3x^2 - y^2 + 12x - 2y + 14 = 0$

Řešení

a) Danou rovnici upravíme postupně takto:

$$\begin{aligned} 9(x^2 - 10x) - 16(y^2 + 6y) &= 495 \\ 9(x^2 - 10x + 25) - 16(y^2 + 6y + 9) &= 495 + 9 \cdot 25 - 16 \cdot 9 \\ 9(x-5)^2 - 16(y+3)^2 &= 576 \\ \frac{(x-5)^2}{64} - \frac{(y+3)^2}{36} &= 1 \end{aligned}$$

Odtud vidíme, že daná rovnice je rovnicí hyperboly, která má střed $S[5; -3]$, hlavní osu rovnoběžnou s osou x, $a = 8$, $b = 6$, $e^2 = 64 + 36 = 100$, $e = 10$, $m - e = 5 - 10 = -5$, $m + e = 5 + 10 = 15$, a tedy $F_1[-5; -3]$, $F_2[15; -3]$.

b) Danou rovnici upravíme analogicky takto:

$$\begin{aligned} 3(x^2 + 4x) - (y^2 + 2y) &= -14 \\ 3(x^2 + 4x + 4) - (y^2 + 2y + 1) &= -14 + 3 \cdot 4 - 1 \\ 3(x+2)^2 - (y+1)^2 &= -3 \\ \frac{(y+1)^2}{3} - \frac{(x+2)^2}{1} &= 1 \end{aligned}$$

Tedy také tato rovnice je rovnicí hyperboly, která má střed $S[-2; -1]$, hlavní osu rovnoběžnou s osou y, $a = \sqrt{3}$, $b = 1$, $e^2 = a^2 + b^2 = 3 + 1 = 4$, $e = 2$, $n - e = -1 - 2 = -3$, $n + e = -1 + 2 = 1$, tedy $F_1[-2; -3]$, $F_2[-2; 1]$.

Parabola a její rovnice

Parabola je množina všech bodů X roviny, které mají stejnou vzdálenost od daného bodu F a od dané přímky d, jež tímto bodem neprochází (obr. 10.70).

Bod F se nazývá **ohnisko paraboly**, přímka d se nazývá **řídicí přímka paraboly**. Kolmice k řídicí přímce procházející ohniskem F je **osa paraboly** a označuje se o; patu této kolmice označíme D. Střed úsečky DF je bodem paraboly, nazývá se **vrchol paraboly** a označuje se V. Vzdálenost p ohniska F od řídicí přímky d nazýváme **parametrem paraboly**; $p = |FD|$ (obr. 10.70).

O **analytickém vyjádření paraboly** platí *věty:*

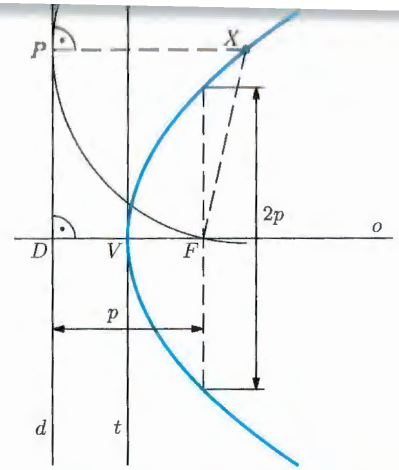
V.9. a) Parabola o vrcholu $V[m, n]$, jejíž osa je rovnoběžná s osou x kartézské soustavy souřadnic Oxy, má v této souřadnicové soustavě rovnici tvaru

$$(y - n)^2 = 2p(x - m)$$

nebo (7)

$$(y - n)^2 = -2p(x - m),$$

kde p je parametr paraboly.



Obr. 10.70

b) Parabola o vrcholu $V[m, n]$, jejíž osa je rovnoběžná s osou y kartézské soustavy souřadnic Oxy, má v této souřadnicové soustavě rovnici tvaru

$$(x - m)^2 = 2p(y - n)$$

nebo (8)

$$(x - m)^2 = -2p(y - n),$$

kde p je parametr paraboly.

Rovnici paraboly tvaru (7), resp. (8) se říká **vrcholový tvar rovnice paraboly** či **vrcholová rovnice paraboly**. Speciálně, je-li $V = O$, mluví se též o **osové rovnici paraboly**.

V tabulce 10.9 jsou uvedeny čtyři typy polohy paraboly, jež má osu rovnoběžnou s osou y, resp. x a příslušné vrcholové tvary rovnice paraboly.

V.10. a) Rovnici (7), tj. vrcholový tvar rovnice paraboly, jejíž osa je rovnoběžná s osou x, lze upravit na *obecný tvar* s koeficienty $A, B, C \in \mathrm{R}$:

$$y^2 + Ax + By + C = 0, \quad \text{kde } A \neq 0. \tag{9}$$

Platí též *obrácená věta:* Každá kvadratická rovnice tvaru (9) je rovnicí paraboly, která má osu rovnoběžnou s osou x.

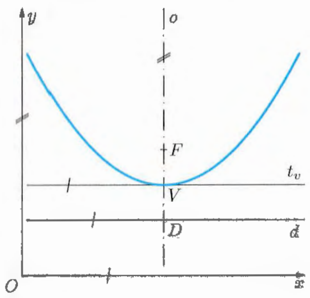
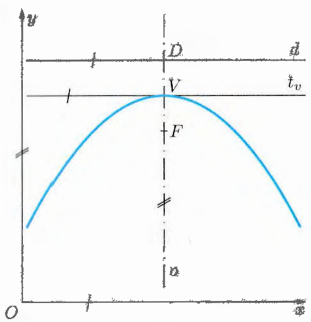
b) Rovnici (8), tj. vrcholový tvar rovnice paraboly, jejíž osa je rovnoběžná s osou y, lze upravit na *obecný tvar* s koeficienty $A, B, C \in \mathrm{R}$:

$$x^2 + Ay + Bx + C = 0, \quad \text{kde } A \neq 0. \tag{10}$$

Platí též *obrácená věta:* Každá kvadratická rovnice tvaru (10) je rovnicí paraboly, která má osu rovnoběžnou s osou y.

Rovnice (9) a (10) se nazývají **obecné tvary rovnic paraboly** nebo **obecné rovnice paraboly**.

Rovnice paraboly ve vrcholovém tvaru

Parabola	Rovnice paraboly s parametrem p ($p > 0$) a vrcholem $V[m, n]$	Rovnice řídicí přímky Ohnisko F
 Osa o paraboly je rovnoběžná s osou y, ohnisko leží „nad" vrcholem V.	$(x-m)^2 = 2p(y-n)$	$y = n - \frac{p}{2}$ $F\left[m, n + \frac{p}{2}\right]$
	Speciálně, je-li $V = O$: $x^2 = 2py$	$y = -\frac{p}{2}$ $F\left[0; \frac{p}{2}\right]$
 Osa o paraboly je rovnoběžná s osou y, ohnisko leží „pod" vrcholem V.	$(x-m)^2 = -2p(y-n)$	$y = n + \frac{p}{2}$ $F\left[m, n - \frac{p}{2}\right]$
	Speciálně, je-li $V = O$: $x^2 = -2py$	$y = \frac{p}{2}$ $F\left[0; -\frac{p}{2}\right]$

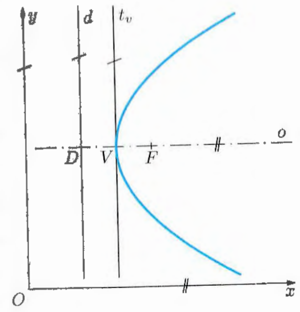
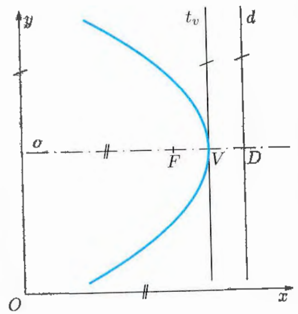
Z věty V.10b plyne, že každá parabola o rovnici (10) je **grafem kvadratické funkce** f: $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, $x \in \mathrm{R}$ (viz kap. 4.3).

Rozborem analytického vyjádření paraboly lze odvodit její geometrické vlastnosti, jež uvádí *věta:*

V.11. a) Parabola je souměrná podle své osy.

b) Parabola a její ohnisko leží v polorovině, jejíž hraniční přímkou je kolmice vedená vrcholem paraboly k její ose.

Pokračování

Parabola	Rovnice paraboly s parametrem p ($p > 0$) a vrcholem $V[m, n]$	Rovnice řídicí přímky Ohnisko F
 Osa o paraboly je rovnoběžná s osou x, ohnisko leží „napravo" od vrcholu V.	$(y-n)^2 = 2p(x-m)$	$x = m - \frac{p}{2}$ $F\left[m + \frac{p}{2}, n\right]$
	Speciálně, je-li $V = O$: $y^2 = 2px$	$x = -\frac{p}{2}$ $F\left[\frac{p}{2}; 0\right]$
 Osa o paraboly je rovnoběžná s osou x, ohnisko leží „nalevo" od vrcholu V.	$(y-n)^2 = -2p(x-m)$	$x = m + \frac{p}{2}$ $F\left[m - \frac{p}{2}, n\right]$
	Speciálně, je-li $V = O$: $y^2 = -2px$	$x = \frac{p}{2}$ $F\left[-\frac{p}{2}; 0\right]$

Příklady určování rovnice paraboly

1. Určete vrcholovou rovnici paraboly s vrcholem $V = O$, která prochází bodem $A[3; -6]$ a má osu a) v ose x, b) v ose y. Určete též její ohnisko a rovnici řídicí přímky.

Řešení

a) $V = O$, $o = x$; parabola má rovnici tvaru $y^2 = 2px$. Protože bod A na ní leží, je $36 = 2p \cdot 3$. Odtud $2p = 12$, takže rovnice paraboly je $y^2 = 12x$. Protože $\frac{p}{2} = 3$, je $F[3; 0]$ a řídicí přímka $d \parallel y$ má rovnici $x = -3$.

leží, je $9 = -2p\cdot(-6)$; odtud $-2p = -1{,}5$, takže rovnice paraboly je $x^2 = -1{,}5y$. Jelikož $\frac{p}{2} = 0{,}75$, je $F[0; -0{,}75]$ a řídicí přímka $d \parallel x$ má rovnici $y = 0{,}75$.

Určete vrchol, osu, ohnisko a řídicí přímku paraboly o rovnici $5x^2 + 32y = 0$.

Řešení

Danou rovnici uvedeme na tvar $x^2 = -2py$, dostáváme: $x^2 = -6{,}4y$, takže $2p = 6{,}4$. Je to parabola, která má vrchol v počátku, osu v ose y. Její ohnisko má souřadnice $x_F = 0$, $y_F = -\frac{1}{2}p = -1{,}6$, tedy $F[0; -1{,}6]$, její řídicí přímka je rovnoběžná s osou x ve vzdálenosti $\frac{1}{2}p = 1{,}6$, má proto rovnici $y = 1{,}6$.

Určete rovnici, vrchol a ohnisko paraboly, která má osu rovnoběžnou s osou x a prochází body $M[-7; 12]$, $N[2{,}6; 0]$, $P[0{,}5; -3]$.

Řešení

Hledaná parabola, pokud existuje, má podle věty V.10 rovnici v obecném tvaru

$$y^2 + Ax + By + C = 0, \quad \text{kde } A \neq 0.$$

Bod $M[-7; 12]$ leží na parabole, proto jeho souřadnice vyhovují její rovnici

$$144 - 7A + 12B + C = 0; \tag{1}$$

z téhož důvodu jí vyhovují souřadnice bodu $N[2{,}6; 0]$:

$$2{,}6A + C = 0 \tag{2}$$

a souřadnice bodu $P[0{,}5; -3]$;

$$9 + 0{,}5A - 3B + C = 0. \tag{3}$$

Tuto soustavu 3 rovnic o 3 neznámých A, B, C řešíme tak, že nejprve druhou rovnici odečteme postupně od první rovnice a od třetí rovnice, čímž vyloučíme neznámou C a dostáváme

$$144 - 9{,}6A + 12B = 0, \tag{4}$$
$$9 - 2{,}1A - 3B = 0. \tag{5}$$

Sečteme-li první z těchto rovnic se čtyřnásobkem druhé rovnice, vychází $180 - 18A = 0$, odkud $A = 10$ a po dosazení do předchozích rovnic $B = -4$, $C = -26$. Parabola daných vlastností tedy existuje a má rovnici

$$y^2 + 10x - 4y - 26 = 0 \quad \text{čili} \quad (y-2)^2 = -10(x-3),$$

vrchol $V[3; 2]$, osu $o \parallel x$, $2p = 10$, $\frac{1}{2}p = 2{,}5$, $x_F = x_V - \frac{1}{2}p = 3 - 2{,}5 = 0{,}5$, $y_F = y_V = 2$, a tedy ohnisko $F[0{,}5; 2]$.

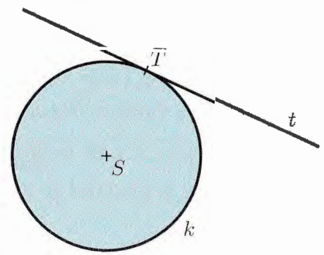
10.15 Analytické vyjádření vzájemné polohy přímky a kuželosečky, dvou kuželoseček

Vzájemnou polohu dvou geometrických útvarů vyšetřujeme v analytické geometrii řešením soustavy rovnic, resp. nerovnic (s neznámými x, y, event. z), jež jsou analytickým vyjádřením těchto útvarů. Tím získáme souřadnice bodů průniku těchto útvarů.

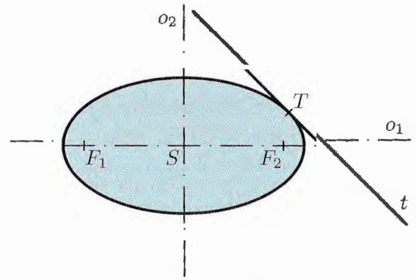
Vzájemná poloha kuželosečky a přímky v rovině

Soustava rovnic dané kuželosečky (kvadratické rovnice) a dané přímky (lineární rovnice) se řeší (viz kap. 5.12) takto: Z lineární rovnice dosadíme za neznámou x, resp. y do kvadratické rovnice, čímž jednu z neznámých eliminujeme a dostáváme kvadratickou rovnici pro druhou neznámou. Podle toho, zda řešená soustava rovnic má v R^2 buď právě dvě řešení, nebo právě jedno řešení, anebo nemá žádné řešení, má přímka s kuželosečkou po řadě buď právě dva společné body, nebo právě jeden společný bod, anebo žádný společný bod, tj. jejich průnik je buď dvojbodová, nebo jednobodová, anebo prázdná množina.

Z kap. 9.3 víme, že **vnitřní oblast kružnice** $k(S, r)$ se nazývá množina všech bodů X roviny, pro které platí $|SX| < r$ (obr. 10.71). Analogicky definujeme: **Vnitřní oblastí elipsy** s ohnisky F_1, F_2 a s hlavní osou délky $2a > |F_1F_2|$ nazýváme množinu všech bodů X roviny, pro které platí $|F_1X| + |F_2X| < 2a$ (obr. 10.72). Pro hyperbolu s ohnisky F_1, F_2 a s hlavní osou délky $2a < |F_1F_2|$ nazýváme **vnitřní oblastí jedné větve hyperboly** množinu všech bodů X roviny, pro které platí $|F_1X| - |F_2X| > 2a$, **vnitřní oblastí druhé větve hyperboly** nazýváme množinu všech bodů X roviny, pro které platí $|F_2X| - |F_1X| > 2a$ (obr. 10.73). **Vnitřní oblastí paraboly** s ohniskem F a řídicí přímkou d nazýváme množinu všech bodů X roviny, pro které platí $|FX| < v(X, d)$ (obr. 10.74).

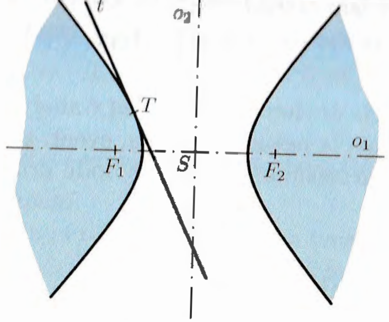


Obr. 10.71

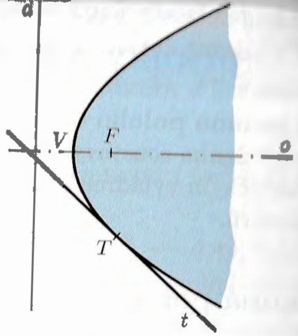


Obr. 10.72

Přímka t, která má s kuželosečkou právě jeden společný bod T a neobsahuje žádný bod vnitřní oblasti kuželosečky, se nazývá **tečna kuželosečky** (obr. 10.71 až 10.74); bodu T se říká **bod dotyku (dotykový bod) přímky a kuželosečky**. Přímka s, která má s kuželosečkou buď právě dva společné body, nebo obsahuje právě jeden její bod, ale není tečnou kuželosečky (tj. obsahuje body vnitřní oblasti kuželosečky), se nazývá **sečna kuželosečky**; body jejího průniku s kuželosečkou se nazývají jejich **průsečíky**. Přímka, která nemá s kuželosečkou žádný společný



Obr. 10.73



Obr. 10.74

bod, tj. jejíž průnik s kuželosečkou je prázdná množina, se nazývá **vnější přímka kuželosečky**.

Všechny možné případy vzájemné polohy jednotlivých druhů kuželoseček a přímky jsou přehledně shrnuty v tabulce 10.10.

Příklady analytického vyšetření vzájemné polohy kuželosečky a přímky

1. Vyšetřete vzájemnou polohu kružnice k o rovnici $x^2 + y^2 = 6{,}25$ a těchto přímek:
   a) přímky p_1 o rovnici $3x - 4y - 10 = 0$,
   b) přímky p_2 o rovnici $8x + 6y - 25 = 0$,
   c) přímky p_3 o rovnici $x + y + 4 = 0$.

   Řešení

   a) Souřadnice $[x, y]$ bodu průniku kružnice k a přímky p_1 vyhovují zároveň oběma jejich rovnicím, tj. soustavě lineární a kvadratické rovnice:

$$3x - 4y - 10 = 0 \qquad (1)$$
$$x^2 + y^2 = 6{,}25 \qquad (2)$$

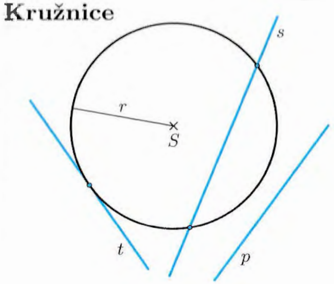
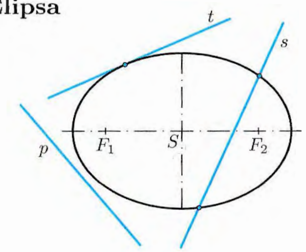
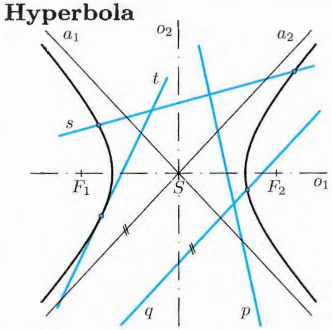
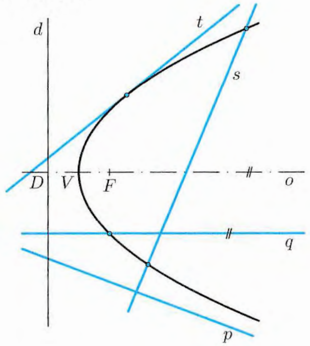
Z lineární rovnice (1) vyjádříme $x = \dfrac{4y + 10}{3}$ a dosadíme do rovnice (2); po úpravě dostáváme kvadratickou rovnici $5y^2 + 16y + 8{,}75 = 0$, která má diskriminant $D = 256 - 175 = 81 > 0$, a tedy dva reálné různé kořeny $y_{1,2} = \dfrac{-16 \pm 9}{10}$, tj. $y_1 = -0{,}7$, $y_2 = -2{,}5$. Ze vztahu pro x pak určíme $x_1 = 2{,}4$, $x_2 = 0$. Přímka p_1 je tedy sečnou dané kružnice a protíná ji v bodech $P[2{,}4; -0{,}7]$, $Q[0; -2{,}5]$.

   b) Obdobně řešíme soustavu rovnic přímky p_2 a kružnice k:

$$8x + 6y - 25 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-6y + 25}{8} \qquad (3)$$
$$x^2 + y^2 = 6{,}25 \qquad (2)$$

Po eliminaci neznámé x z rovnice (2) dostaneme kvadratickou rovnici $4y^2 - 12y + 9 = 0$, která má diskriminant $D = 144 - 144 = 0$, a tedy dvojnásobný kořen $y_{1,2} = 1{,}5$. Z rovnice (3) pak plyne $x_{1,2} = 2$. Přímka p_2 je tedy tečnou dané kružnice k v bodě dotyku $T[2; 1{,}5]$.

Vzájemné polohy kuželoseček a přímky Tab. 10.10

Kuželosečka	Počet společných bodů přímky a kuželosečky	Vzájemná poloha kuželosečky a přímky
Kružnice 	2	sečna s kružnice
	1	tečna t kružnice
	0	vnější přímka p kružnice
Elipsa 	2	sečna s elipsy
	1	tečna t elipsy
	0	vnější přímka p elipsy
Hyperbola 	2	sečna s hyperboly
	1	tečna t hyperboly
		sečna q rovnoběžná různá s asymptotou hyperboly
	0	vnější přímka p hyperboly (speciálně asymptoty a_1, a_2)
Parabola 	2	sečna s paraboly
	1	tečna t paraboly
		sečna q rovnoběžná s osou paraboly
	0	vnější přímka p paraboly

c) Pro soustavu rovnic přímky p_3 a kružnice k řešíme soustavu:

$$x + y + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -y - 4 \qquad (1)$$
$$x^2 + y^2 = 6{,}25 \qquad (2)$$

Eliminací neznámé x z rovnice (2) obdržíme kvadratickou rovnici $2y^2 + 8y + 9{,}75 = 0$, jež má diskriminant $D = 64 - 78 = -14 < 0$, a proto nemá žádný reálný kořen. Přímka p_3 je proto vnější přímkou kružnice k.

2. Určete, pro které hodnoty parametru $c \in \mathsf{R}$ je přímka p o rovnici $2x - y + c = 0$ a) tečnou, b) sečnou, c) vnější přímkou kružnice k se středem $S[3; -1]$ a poloměrem $r = 2$.

Řešení

Z rovnice přímky p vyjádříme $y = 2x + c$ a dosadíme do středového tvaru rovnice kružnice k:

$$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 4$$

Po dosazení a úpravě dostáváme kvadratickou rovnici s parametrem c:

$$5x^2 + (4c - 2)x + c^2 + 2c + 6 = 0$$

Její diskriminant je

$$D = (4c - 2)^2 - 20\left(c^2 + 2c + 6\right) = -4\left(c^2 + 14c + 29\right).$$

Přímka p je tečnou kružnice k, je-li $D = 0$, její sečnou, je-li $D > 0$ a její vnější přímkou, je-li $D < 0$. Přitom $D = 0$, právě když bude splněna kvadratická rovnice pro c:

$$c^2 + 14c + 29 = 0$$

Její diskriminant je $D_1 = 80$, $\sqrt{D_1} = 4\sqrt{5}$, takže má reálné kořeny

$$c_{1,2} = \frac{-14 \pm 4\sqrt{5}}{2} \quad \text{neboli } c_1 = -7 - 2\sqrt{5},\ c_2 = -7 + 2\sqrt{5}.$$

Odtud metodou intervalů dospíváme k výsledku:
Přímka p je tečnou kružnice k pro $c \in \left\{-7 - 2\sqrt{5}; -7 + 2\sqrt{5}\right\}$, sečnou pro $c \in \left(-7 - 2\sqrt{5}; -7 + 2\sqrt{5}\right)$, vnější přímkou pro $c \in \left(-\infty, -7 - 2\sqrt{5}\right) \cup \left(-7 + 2\sqrt{5}, +\infty\right)$.

3. Je dána kružnice $k(S, r)$, kde $S[-1; 3]$, $r = 4$ a dále jsou dány body $A[-2; -4]$, $B[1; 5]$. Určete průnik kružnice k a) s úsečkou AB, b) s polopřímkou AB.

Řešení

Kružnici k vyjádříme ve středovém tvaru

$$(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 16.$$

Přímku AB vyjádříme parametrickými rovnicemi pomocí směrového vektoru $\boldsymbol{u}$ kolineárního s vektorem $\boldsymbol{AB} = B - A = (1 + 2; 5 + 4) = (3; 9)$, $\boldsymbol{u} = \frac{1}{3}\boldsymbol{AB} = \frac{1}{3}(B - A) = (1; 3)$:

$$X = A + t\boldsymbol{u} \text{ čili } x = -2 + t,\ y = -4 + 3t,\ t \in \mathsf{R}.$$

Pro uvažované části přímky jsou hodnoty parametru t tyto: a) pro úsečku AB je $t \in \langle 0; 3\rangle$, b) pro polopřímku AB je $t \in \langle 0; +\infty)$.

Po dosazení za x, y z parametrických rovnic přímky do rovnice kružnice dostáváme

$$(t - 1)^2 + (3t - 7)^2 = 16 \text{ čili } 10t^2 - 44t + 34 = 0.$$

Tato kvadratická rovnice pro parametr t má diskriminant $D = 576$, $\sqrt{D} = 24$, takže kořeny jsou $t_{1,2} = \dfrac{44 \pm 24}{20}$, tj. $t_1 = 3{,}4$, $t_2 = 1$.

a) Z těchto kořenů patří do intervalu $\langle 0; 3\rangle$ pouze t_2. Proto má úsečka AB s kružnicí k jediný společný bod o souřadnicích $[-2 + t_2, -4 + 3t_2] = [-1; -1]$.

b) V intervalu $\langle 0, +\infty)$ leží oba kořeny t_1, t_2. Proto má polopřímka AB s kružnicí k dva společné body o souřadnicích $[-2 + t_1, -4 + 3t_1] = [1{,}4; 6{,}2]$ a $[-2 + t_2, -4 + 3t_2] = [-1; -1]$.

4. Určete průnik přímky AB dané body $A[1; 5]$, $B[3; 0]$ s elipsou o rovnici $4x^2 + y^2 = 16$.

Řešení

Postupujeme obdobně jako v předcházejícím příkladu. Parametrické vyjádření přímky AB pomocí bodu A a směrového vektoru $\boldsymbol{u} = B - A = (2; -5)$ je

$$X = A + t\boldsymbol{u} \text{ čili } x = 1 + 2t,\ y = 5 - 5t,\ t \in \mathsf{R}.$$

Po dosazení za x, y do rovnice elipsy a po úpravě vychází

$$41t^2 - 34t + 13 = 0.$$

Tato kvadratická rovnice pro t má diskriminant $D = -976 < 0$, takže nemá v R řešení. Proto přímka AB nemá s elipsou žádný společný bod, tj. průnik přímky a elipsy je $\emptyset$.

5. V hyperbole o rovnici $x^2 - 3y^2 = 12$ je ohniskem, které leží v kladné poloose x, vedena tětiva rovnoběžná s přímkou o rovnici $x - y + 5 = 0$. Vypočtěte délku této tětivy.

Řešení

Rovnici dané hyperboly lze přepsat do středového tvaru (osová rovnice hyperboly)

$$\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1,$$

takže $e^2 = a^2 + b^2 = 12 + 4 = 16$, odkud $e = 4$, a tedy uvažované ohnisko je bod $F[4; 0]$. Daná přímka má směrnicový tvar $y = x + 5$ se směrnicí $k = 1$; přímka p s ní rovnoběžná a procházející bodem F má rovnici $y = x - 4$. Po dosazení do rovnice hyperboly dostáváme $x^2 - 3(x - 4)^2 = 12$ čili po úpravě $x^2 - 12x + 30 = 0$. Kořeny této kvadratické rovnice jsou $x_1 = 6 + \sqrt{6}$, $x_2 = 6 - \sqrt{6}$, jim odpovídají $y_1 = 2 + \sqrt{6}$, $y_2 = 2 - \sqrt{6}$, a dostáváme tedy dva průsečíky přímky p s hyperbolou: $P[6+\sqrt{6};\ 2+\sqrt{6}]$, $Q[6-\sqrt{6};\ 2-\sqrt{6}]$; délka hledané tětivy je

$$|PQ| = \sqrt{(6+\sqrt{6}-6+\sqrt{6})^2 + (2+\sqrt{6}-2+\sqrt{6})^2} =$$
$$= \sqrt{2(2\sqrt{6})^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3} \doteq 6{,}93.$$

. Napište rovnici paraboly s vrcholem $V = O$, která má osu v ose y a dotýká se přímky o rovnici $5x - 4y - 10 = 0$.

Řešení

Hledaná parabola, pokud existuje, má rovnici tvaru $x^2 = \pm 2py$; je nutno vypočítat její parametr p. Z rovnice přímky vyjádříme $y = \dfrac{5x-10}{4}$ a po dosazení do rovnice paraboly dostáváme kvadratickou rovnici $2x^2 \mp 5px \pm 10p = 0$. Má-li však daná přímka být tečnou hledané paraboly, musí mít tato rovnice právě jeden dvojnásobný kořen čili její diskriminant musí být roven nule: $25p^2 \mp 80p = 0$. Protože – má-li parabola existovat – je $p > 0$, plyne odtud, že $p = 3{,}2$. Hledaná parabola tedy existuje a má rovnici $x^2 = \pm 6{,}4y$.

Rovnice tečen kuželoseček Tab. 10.11

Rovnice kuželosečky	Rovnice tečny kuželosečky v dotykovém bodě $T[x_0, y_0]$
Rovnice kružnice ve středovém tvaru $(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$	Rovnice tečny kružnice v bodě $T[x_0, y_0]$ $(x_0-m)(x-m) + (y_0-n)(y-n) = r^2$
Rovnice elipsy ve středovém tvaru $\dfrac{(x-m)^2}{a^2} + \dfrac{(y-n)^2}{b^2} = 1$ $\dfrac{(x-m)^2}{b^2} + \dfrac{(y-n)^2}{a^2} = 1$	Rovnice tečny elipsy v bodě $T[x_0, y_0]$ $\dfrac{(x_0-m)(x-m)}{a^2} + \dfrac{(y_0-n)(y-n)}{b^2} = 1$ $\dfrac{(x_0-m)(x-m)}{b^2} + \dfrac{(y_0-n)(y-n)}{a^2} = 1$
Rovnice hyperboly ve středovém tvaru $\dfrac{(x-m)^2}{a^2} - \dfrac{(y-n)^2}{b^2} = 1$ $-\dfrac{(x-m)^2}{b^2} + \dfrac{(y-n)^2}{a^2} = 1$	Rovnice tečny hyperboly v bodě $T[x_0, y_0]$ $\dfrac{(x_0-m)(x-m)}{a^2} - \dfrac{(y_0-n)(y-n)}{b^2} = 1$ $-\dfrac{(x_0-m)(x-m)}{b^2} + \dfrac{(y_0-n)(y-n)}{a^2} = 1$
Rovnice paraboly ve vrcholovém tvaru $(x-m)^2 = 2p(y-n)$ $(x-m)^2 = -2p(y-n)$ $(y-n)^2 = 2p(x-m)$ $(y-n)^2 = -2p(x-m)$	Rovnice tečny paraboly v bodě $T[x_0, y_0]$ $(x_0-m)(x-m) = p(y+y_0-2n)$ $(x_0-m)(x-m) = -p(y+y_0-2n)$ $(y_0-n)(y-n) = p(x+x_0-2m)$ $(y_0-n)(y-n) = -p(x+x_0-2m)$

Rovnice tečen ke kuželosečkám

Nechť je dána středová kuželosečka (kružnice, elipsa, hyperbola) rovnicí ve středovém tvaru, resp. parabola rovnicí ve vrcholovém tvaru, pak **rovnice tečny ke kuželosečce** vedené daným dotykovým bodem $T[x_0, y_0]$ mají tvary uvedené v tabulce 10.11.

Příklady určování rovnice tečny ke kuželosečce

1. Určete rovnice tečen vedených z bodu $M[3{,}5;\ 0{,}5]$ ke kružnici o rovnici $x^2 + y^2 = 6{,}25$.

Řešení

Tečna kružnice $x^2 + y^2 = 6{,}25$ v dotykovém bodě $T[x_0, y_0]$ má rovnici $x_0x + y_0y = 6{,}25$. Protože hledaná tečna prochází bodem $M[3{,}5;\ 0{,}5]$, vyhovují jeho souřadnice rovnici této tečny:

$$3{,}5x_0 + 0{,}5y_0 = 6{,}25 \qquad (1)$$

Bod T leží na dané kružnici, proto jeho souřadnice splňují její rovnici:

$$x_0^2 + y_0^2 = 6{,}25 \qquad (2)$$

Řešením soustavy rovnic (1) a (2) vypočteme souřadnice dotykových bodů. Z rovnice (1) vyjádříme $y_0 = 12{,}5 - 7x_0$ a dosadíme do rovnice (2): $x_0^2 + (12{,}5 - 7x_0)^2 = 6{,}25$ čili po úpravě $2x_0^2 - 7x_0 + 6 = 0$. Tato rovnice má kořeny $x_1 = 2$, $x_2 = 1{,}5$. Z rovnice (1) pak plyne: $y_1 = 12{,}5 - 14 = -1{,}5$, $y_2 = 12{,}5 - 10{,}5 = 2$.

Úloha má tedy právě dvě řešení: tečna t_1 v dotykovém bodě $T_1[2; -1{,}5]$ má rovnici $2x - 1{,}5y = 6{,}25$ čili $8x - 6y - 25 = 0$, tečna t_2 v dotykovém bodě $T_2[1{,}5; 2]$ má rovnici $1{,}5x + 2y = 6{,}25$ čili $6x + 8y - 25 = 0$.

2. Určete, ve kterých bodech protíná přímka o rovnici $x + 2y - 14 = 0$ elipsu o rovnici $x^2 + 4y^2 = 100$. Napište rovnice tečen vedených v těchto bodech k elipse a stanovte odchylku těchto tečen a dané přímky.

Řešení

Průsečíky přímky s elipsou najdeme řešením soustavy jejich rovnic. Z rovnice přímky vyjádříme $x = 14 - 2y$ a po dosazení do rovnice elipsy dostáváme po úpravě kvadratickou rovnici $y^2 - 7y + 12 = 0$. Má kořeny $y_1 = 3$, $y_2 = 4$; odtud $x_1 = 8$, $x_2 = 6$, takže hledané průsečíky jsou $P_1[8; 3]$, $P_2[6; 4]$.

Daná přímka má směrnici $k = -\dfrac{a}{b} = -\dfrac{1}{2}$. Tečna t_1 v dotykovém bodě $P_1[8; 3]$ má rovnici $8x + 12y = 100$ čili $2x + 3y - 25 = 0$, směrnici $k_1 = -\dfrac{2}{3}$. Odchylku φ_1 tečny t_1 od dané přímky vypočteme ze vztahu

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \left|\frac{-\frac{1}{2} + \frac{2}{3}}{1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}}\right| = \frac{1}{6} : \frac{4}{3} = \frac{1}{8} = 0{,}125 \Rightarrow \varphi_1 \doteq 7^\circ\ 7'\ 30''.$$

Tečna t_2 v dotykovém bodě $P_2[6; 4]$ má rovnici $6x + 16y = 100$ čili $3x + 8y - 50 = 0$, směrnici $k_2 = -\frac{3}{8}$. Odchylku φ_2 tečny t_2 od dané přímky určíme ze vztahu

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \left| \frac{-\frac{1}{2} + \frac{3}{8}}{1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8}} \right| = \frac{1}{8} : \frac{19}{16} = \frac{2}{19} \Rightarrow \varphi_2 \doteq 6° \; 0' \; 32''.$$

3. Určete rovnici tečny hyperboly $x^2 - y^2 = 20$, která prochází bodem $A[4; 4]$.

Řešení

Tečna dané hyperboly s dotykovým bodem $T[x_0, y_0]$ má rovnici $x_0x + y_0y = 20$. Prochází-li tato tečna bodem A, platí $4x_0 - 4y_0 = 20$ čili $x_0 = 5 + y_0$, což dosazeno do rovnice $x_0^2 - y_0^2 = 20$ dává $25 + 10y_0 + y_0^2 - y_0^2 = 20$; odtud $y_0 = -0{,}5$, takže $x_0 = 5 + y_0 = 4{,}5$. Hledaná tečna má tedy dotykový bod $T[4{,}5; -0{,}5]$ a rovnici $4{,}5x + 0{,}5y = 20$ čili $9x + y = 40$. (Daným bodem A prochází jen jedna tečna hyperboly, neboť tento bod leží na její asymptotě o rovnici $y = x$.)

4. Zjistěte, který bod paraboly $y^2 = 18x$ má nejkratší vzdálenost od přímky $3x - 4y + 69 = 0$.

Řešení

Z názoru je patrno, že hledaný bod je dotykový bod $T[x_0, y_0]$ tečny $y_0y = 9x + 9x_0$ rovnoběžné s danou přímkou; směrnice tečny je $\frac{9}{y_0}$, směrnice dané přímky je $\frac{3}{4}$, takže $\frac{9}{y_0} = \frac{3}{4}$, odtud $y_0 = 12$. Protože dotykový bod leží na dané parabole, platí $y_0^2 = 18x_0$; odtud $x_0 = \frac{1}{18}y_0^2 = 144 : 18 = 8$. Hledaný nejbližší bod je tedy $T[8; 12]$, jeho vzdálenost od dané přímky je

$$v = \frac{|3 \cdot 8 - 4 \cdot 12 + 69|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{45}{5} = 9.$$

Vzájemná poloha dvou kuželoseček

Úloha vyžadující určení průniku dvou kuželoseček se řeší v analytické geometrii řešením soustavy jejich rovnic, tj. kvadratických rovnic se dvěma neznámými x, y (viz kap. 5.12).

Příklad určení vzájemné polohy dvou kuželoseček

Určete průnik kružnic o rovnicích $x^2 + y^2 + 6x + 2y - 42 = 0$, $x^2 + y^2 - 14x + 6y + 6 = 0$.

Řešení

Body průniku obou kružnic určíme řešením soustavy jejich rovnic; odečtením druhé rovnice od první vychází $20x - 4y - 48 = 0$, odtud $y = 5x - 12$. Dosadíme-li tento výraz do první rovnice, dostaneme kvadratickou rovnici $26x^2 - 104x + 78 = 0$ čili $x^2 - 4x + 3 = 0$, která má kořeny $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, takže $y_1 = 3$, $y_2 = -7$. Dané kružnice se tedy protínají v bodech $P_1[3; 3]$, $P_2[1; -7]$.

10.16 Analytické vyjádření kulové plochy a koule

V kapitole 10.15 jsme se věnovali kuželosečkám a dalším **kvadratickým útvarům v rovině** (název pochází z toho, že jsou vyjádřeny analyticky kvadratickými rovnicemi, resp. nerovnicemi). Úvahy lze rozšířit i na **kvadratické útvary v prostoru**, z nichž se na gymnáziích v analytické geometrii probírá **kulová plocha a koule**.

Věta o analytickém vyjádření kulové plochy a koule

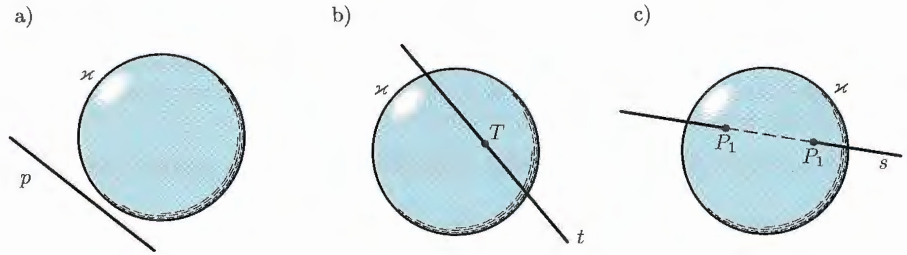
Kulová plocha $\varkappa(S, r)$ se středem $S[m, n, p]$ a poloměrem r je v kartézské soustavě souřadnic $Oxyz$ vyjádřena analyticky rovnicí

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 + (z - p)^2 = r^2 \qquad (1)$$

a koule $\mathsf{K}(S, r)$ nerovnicí

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 + (z - p)^2 \leqq r^2. \qquad (2)$$

Vzájemná poloha kulové plochy a přímky se vyšetřuje analyticky obdobně jako v případě rovinných útvarů (tj. kružnice a přímky, resp. jejích částí). Průnikem může být opět buď prázdná množina, nebo jednobodová množina, anebo dvoubodová množina (obr. 10.75).



Obr. 10.75

A obdobně jako lze analyticky vyjádřit tečnu ke kružnici (tab. 10.11), v prostoru lze stanovit **rovnici tečné roviny kulové plochy**. Platí pro ni *věta:*

Je-li dána kulová plocha rovnicí (1), pak tečná rovina k ní v dotykovém bodě $T[x_0, y_0, z_0]$ má rovnici

$$(x_0 - m)(x - m) + (y_0 - n)(y - n) + (z_0 - p)(z - p) = r^2. \qquad (3)$$

10.17 Analytické vyšetřování množin všech bodů dané vlastnosti

Omezíme se na vyšetřování množin bodů v rovině, bylo by však možné úvahy zobecnit i pro prostor.

Kromě metod řešení konstrukčních úloh uvedených v kap. 9.9 je někdy výhodné užití **metody analytické geometrie (metody souřadnic)**. Analytické řešení konstrukčních úloh bývá mnohdy schůdnější než přímé konstrukční (syntetické) řešení a může nám též pomoci nalézt cestu konstrukčního řešení. Řešení konstrukční úlohy v tomto případě opět zpravidla převádíme na určení bodů, jež náležejí průniku množin všech bodů (m. v. b.) daných vlastností. Podle toho, zda při užití analytické metody známe, či neznáme předem analytická vyjádření těchto bodových množin, rozlišujeme *úlohy dvojího typu:*

a) V úlohách prvního typu můžeme použít předem známá analytická vyjádření potřebných m. v. b. Vycházíme přitom z poznatků uvedených v kap. 10.9 až 10.16.

b) V úlohách druhého typu musíme teprve vyšetřit analytické vyjádření potřebných m. v. b. daných vlastností.

Postup při analytickém vyšetřování množiny všech bodů (m. v. b.) dané vlastnosti v rovině:

a) 1. Zvolíme soustavu souřadnic vhodným způsobem vzhledem k daným geometrickým útvarům.

2. Určíme souřadnice daných bodů a označíme souřadnice libovolného bodu X hledané m. v. b. (zpravidla $X[x, y]$).

3. Vyjádříme analyticky danou vlastnost bodu X (rovnicí, resp. nerovnicí mezi jeho souřadnicemi).

b) Ověříme, zda také obráceně všechny body, jejichž souřadnice splňují nalezené analytické vyjádření, mají požadované vlastnosti. Přesvědčíme-li se o tom, můžeme prohlásit, že nalezená rovnice, popř. nerovnice je analytickým vyjádřením hledané m. v. b. dané vlastnosti.

Příklady analytického vyšetřování množin všech bodů daných vlastností v rovině

1. Jsou dány dva různé body A, B ($|AB| = a$) a úsečka délky c. Určete množinu všech bodů X, pro něž platí $|AX|^2 + |BX|^2 = c^2$.

Řešení

a) Zvolíme kartézskou soustavu souřadnic tak, aby osa x byla v přímce AB a osa y procházela středem úsečky AB. Pak je $A\left[-\frac{a}{2}, 0\right]$, $B\left[\frac{a}{2}, 0\right]$, a označíme-li $X[x, y]$ libovolný bod hledané m. v. b. dané vlastnosti, dostáváme

$$|AX|^2 = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2, \quad |BX|^2 = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2.$$

Podle zadané podmínky musí být splněna rovnice

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = c^2$$

čili po úpravě

$$x^2 + y^2 = \frac{2c^2 - a^2}{4}. \qquad (1)$$

b) Obráceně: Jestliže souřadnice x, y bodu X splňují tuto rovnici, pak splňují postupně též rovnice

$$4x^2 + 4y^2 = 2c^2 - a^2,$$
$$4x^2 + 4y^2 + 4 \cdot \frac{a^2}{4} = 2c^2,$$
$$2x^2 + 2y^2 + 2 \cdot \frac{a^2}{4} = c^2,$$
$$\left(x^2 + ax + \frac{a^2}{4} + y^2\right) + \left(x^2 - ax + \frac{a^2}{4} + y^2\right) = c^2,$$
$$\left[\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2\right] + \left[\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2\right] = c^2,$$

tj. platí

$$|AX|^2 + |BX|^2 = c^2.$$

Hledaná m. v. b. dané vlastnosti má tedy analytické vyjádření (1).

Diskuse řešení:

a) Je-li $2c^2 - a^2 < 0$ čili $c < \frac{1}{2}a\sqrt{2}$, nevyhovují rovnici (1) souřadnice x, y žádného bodu; hledaná množina je tedy prázdná.

b) Je-li $c = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$, vyhovuje rovnici (1) jen bod o souřadnicích $[0; 0]$; hledanou množinou je střed úsečky AB.

c) Je-li $c > \frac{1}{2}a\sqrt{2}$, je hledanou množinou kružnice, která má střed ve středu úsečky AB a poloměr $r = \frac{1}{2}\sqrt{2c^2 - a^2}$.

2. Dokažte, že množinou všech bodů X, které mají od dvou daných bodů A, B ($|AB| = 2a$) daný poměr vzdáleností $|AX| : |BX| = \lambda > 0$, $\lambda \neq 1$, je kružnice (tzv. **Apolloniova kružnice**, viz kap. 9.7).

Řešení

a) Zvolme soustavu kartézských souřadnic tak, že osa x splývá s přímkou AB a osa y je osou úsečky AB. Potom $A[-a, 0]$, $B[a, 0]$, libovolný bod hledané m. v. b. označme $X[x, y]$, pak platí

$$|AX| = \sqrt{(x + a)^2 + y^2}, \quad |BX| = \sqrt{(x - a)^2 + y^2}.$$

Úloha žádá, aby byl splněn vztah $|AX| = \lambda \cdot |BX|$. Po dosazení dostáváme

$$(x + a)^2 + y^2 = \lambda^2(x - a)^2 + \lambda^2 y^2,$$

odkud po úpravě dostáváme rovnici hledané množiny bodů ve tvaru

$$x^2 + y^2 + 2ax\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2} + a^2 = 0$$

čili

$$\left(x + a\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}\right)^2 + y^2 = \frac{4a^2\lambda^2}{(1-\lambda^2)^2}. \qquad (2)$$

Je to rovnice kružnice o středu $S\left[a\frac{\lambda^2+1}{\lambda^2-1};\, 0\right]$ a poloměru $r = \frac{2a\lambda}{|1-\lambda^2|}$.

b) Obráceně pro souřadnici y bodu X podle rovnice (2) platí

$$y^2 = \frac{4a^2\lambda^2}{(1-\lambda^2)^2} - \left(x + a\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}\right)^2$$

čili po úpravě

$$y^2 = 2ax\frac{\lambda^2+1}{\lambda^2-1} - x^2 - a^2.$$

Je tedy

$$|AX|^2 = (x+a)^2 + y^2 = x^2 + 2ax + a^2 + 2ax\frac{\lambda^2+1}{\lambda^2-1} - x^2 - a^2 = $$
$$= \frac{2ax\cdot 2\lambda^2}{\lambda^2-1},$$

$$|BX|^2 = (x-a)^2 + y^2 = x^2 - 2ax + a^2 + 2ax\frac{\lambda^2+1}{\lambda^2-1} - x^2 - a^2 = \frac{2ax\cdot 2}{\lambda^2-1},$$

takže $|AX|^2 = \lambda^2 \cdot |BX|^2$ čili $|AX| = \lambda \cdot |BX|$, tj. každý bod kružnice (2) má žádanou vlastnost. Tím je důkaz proveden.

0.18 Analytické vyšetřování vlastností geometrických těles

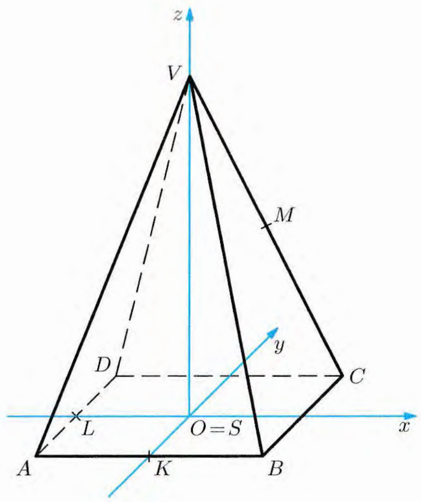
Při vyšetřování vlastností, speciálně metrických vlastností těles je často vhodné, př. nutné užití **metod analytické geometrie** (**metody souřadnic**). Postu- ujeme zpravidla takto: Těleso zobrazíme ve volném rovnoběžném promítání (viz p. 9.11). Zvolíme vhodně soustavu souřadnic. Určíme souřadnice zadaných bodů lesa a vyjádříme analyticky jeho uvažované vlastnosti. Provedeme příslušné vý- čty, jejichž výsledky budou nezávislé na volbě soustavy souřadnic.

říklad analytického vyšetření metrických vlastností pravidelného čtyř- kého jehlanu

avidelný čtyřboký jehlan má výšku $v = 6$ dj a délku podstavné hrany $a = 4$ dj. ředy hran AB, AD, CV označíme v uvedeném pořadí K, L, M. Vypočtěte:
 vzdálenost bodu V od roviny KLM,
 odchylku přímek KM a CV.

Řešení

Daný pravidelný čtyřboký jehlan zobrazíme ve volném rovnoběžném promítání (obr. 10.76). Zvolíme kartézskou soustavu souřadnic $Oxyz$ s počátkem $O = S$ ve středu S podstavy $ABCD$, s osou x procházející středem hrany BC, s osou y procházející středem hrany CD a s osou z procházející hlavním vrcholem V.



Obr. 10.76

Určíme souřadnice bodů: $V[0;\,0;\,6]$, $C[2;\,2;\,0]$. Dále určíme souřadnice bodů: $K[0;\,-2;\,0]$, $L[-2;\,0;\,0]$ a bodu $M = \frac{V+C}{2} \Rightarrow M[1;\,1,\,3]$.

a) Označíme $\varrho = \leftrightarrow KLM$, $\boldsymbol{u}_\varrho = \boldsymbol{KL} = L - K = (-2;\,2;\,0)$, $\boldsymbol{v}_\varrho = \boldsymbol{KM} = M - K = (1;\,3;\,3)$ a normálový vektor roviny ϱ: $\boldsymbol{n}_\varrho = \boldsymbol{u}_\varrho \times \boldsymbol{v}_\varrho = (6;\,6;\,-8) \Rightarrow \varrho$: $6x + 6y - 8z + d = 0$. Protože $K \in \varrho \Rightarrow 6\cdot 0 + 6\cdot(-2) - 8\cdot 0 + d = 0 \Rightarrow d = 12$, a tedy ϱ: $6x + 6y - 8z + 12 = 0$ čili $3x + 3y - 4z + 6 = 0$. Podle vzorce z věty V.6 na str. 605 dostáváme pro hledanou vzdálenost bodu V od roviny $\varrho = \leftrightarrow KLM$:

$$v(V,\,\varrho) = \frac{|3\cdot 0 + 3\cdot 0 - 4\cdot 6 + 6|}{\sqrt{3^2 + 3^2 + (-4)^2}} = \frac{18}{\sqrt{34}} = \frac{18\sqrt{34}}{34} = \frac{9\sqrt{34}}{17} \doteq 3{,}1.$$

b) Označíme $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{KM} = M - K = (1;\,3;\,3)$, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{CV} = V - C = (-2;\,-2;\,6)$. Podle vzorce z věty V.4 na str. 602 dostáváme pro hledanou odchylku φ přímek KM, CV:

$$\cos\varphi = \frac{|1\cdot(-2) + 3\cdot(-2) + 3\cdot 6|}{\sqrt{1^2+3^2+3^2}\cdot\sqrt{(-2)^2+(-2)^2+6^2}} = \frac{10}{\sqrt{19}\cdot\sqrt{44}} = \frac{5\sqrt{209}}{209} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \varphi \doteq 69°46'.$$

ejstřík

Doc. RNDr. Josef Polák, CSc.

Přehled středoškolské matematiky

)bálku navrhl Karel Horák
'ydalo nakladatelství Prometheus, spol. s r. o.,
:estmírova 10, 140 00 Praha 4, roku 2008
el./fax: 241 740 172
ttp://www.prometheus-nakl.cz
-mail: odbyt@prometheus-nakl.cz
dpovědná redaktorka Mgr. Marie Nováková
azba Vydavatelský servis, Plzeň
ytiskly Tiskárny Havlíčkův Brod, a. s.
usova 1881, 580 01 Havlíčkův Brod
přepracované vydání

)5 31 143

BN 978-80-7196-356-1

PROMETHEUS

95 31 143

ISBN 978-80-7196-356-1