241 048

# Matematika

## pre 9. ročník základných škôl • 1. čast


Slovenské pedagogické nakladateľstvo

Ondrej Šedivý • Soňa Čeretková • Mária Malperová • Ľudovít Bálint

# Matematika

## pre 9. ročník základných škôl

1. časť

Slovenské pedagogické nakladateľstvo

Autori © Prof. RNDr. Ondrej Šedivý, CSc.
PaedDr. Soňa Čeretková
PaedDr. Mária Malperová
PhDr. Ľudovít Bálint, CSc., 2001

Lektorovali: RNDr. Ľudovít Hrdina, CSc.
(Slovenská matematická spoločnosť, sekcia JSMF)
Anna Ištoková
RNDr. Emília Petrovajová
Mgr. Ingrid Stupáková
Mgr. Eva Šišková

Illustrations © akademická maliarka Táňa Žitňanová, 2001
Design © Igor Imro, 2001

Schválilo Ministerstvo školstva Slovenskej republiky
dňa 4. júla 2001 pod číslom 1093/2001-41
ako učebnicu matematiky pre 9. ročník ZŠ, 1. časť.

Prvé vydanie, 2001

Všetky práva vyhradené.
Toto dielo ani žiadnu jeho časť nemožno reprodukovať bez súhlasu majiteľa práv.

**ISBN 80-08-03169-7**

## *OBSAH*

***Rudolf Skuherský***

***(23. 4. 1828 až 9. 10. 1863)***

***Český matematik. Osobitne vynikal v praktickej geometrii. Zaujali ho problémy deskriptívnej geometrie. Jeho pravouhlá rovnobežná perspektíva umožňovala riešiť mnohé konštrukčné postupy, v nich využíval aj niektoré grafické algoritmy Mongeovej projekcie. Zaslúžil sa o rozdelenie techniky v Prahe na českú a nemeckú. Bol prvým profesorom, ktorý začal r. 1861 prednášať geometriu po česky.***

Milí deviataci!

Navštevujete posledný ročník základnej školy. Učebnice matematiky, ktoré sme pre vás napísali, vás sprevádzajú už od 5. ročníka.

Aj prvá časť učebnice pre 9. ročník vám bude v štúdiu pomáhať. S pomocou učebnice a vašej pani učiteľky, či pána učiteľa, si zopakujete a prehĺbite učivo z 8. ročníka a naučíte sa pracovať s výrazmi, ktoré využijete pri riešení rovníc a sústav rovníc. Poznatky z geometrie vám poslúžia pri preberaní podobnosti trojuholníkov a iných geometrických útvarov. Mierka je zase základ práce s mapami.

Aj v tejto učebnici nájdete úlohy na pobavenie ale i na vážne premýšľanie. Sú v známej časti Rozum do hrsti.

Pri príprave na prijímacie skúšky na stredné školy vám pomôžu už aj súbory cvičení z tejto učebnice.

Prajeme vám veľa úspechov v štúdiu.

***Autori***

***V učebnici používame tieto symboly:***

[1] - príklad

? - problém

! - riešenie

- zapamätať si
- zhrnutie alebo poučka

1 - úloha

- cvičenia

- vyskúšajte sa

- poznámka

R - rozširujúce učivo

# 1 OPAKOVANIE A PREHĹBENIE UČIVA MATEMATIKY Z 8. ROČNÍKA

## 1.1 Vklad, úrok, úroková miera

***ZOPAKUJME SI***

$$\boldsymbol{K} = \textbf{vklad} = \textbf{kapitál}, \text{ počiatočná istina} = \text{základ} = 100\ \%$$
$$\boldsymbol{p} = \textbf{ročná úroková miera} = \text{počet percent}$$
$$\boldsymbol{u} = \textbf{úrok} = \text{percentová časť}$$

Pri riešení úloh z finančnej matematiky vystupuje ešte jedna dôležitá premenná: **doba,** za ktorú sa počítajú úroky sa nazýva **úrokovacia doba,** označujeme ju premennou ***t***.
Úrok za **jeden rok** vieme potom vypočítať podľa vzorca:

$$u = \frac{K \cdot p}{100} \cdot t, \text{ kde } t = 1$$

***ÚLOHA***

Aký veľký úrok pripíše banka ku vkladu 7 000 Sk za rok pri ročnej úrokovej miere 12%?

Vypočítajte:
a) výpočtom cez jedno percento,
b) pomocou trojčlenky,
c) dosadením do vzorca, ($t = 1$).

Porovnajte spôsoby výpočtov a), b), c).

Úlohy, v ktorých úrokovacia doba je presne jeden rok alebo menej ako jeden rok, riešime metódou, ktorá sa nazýva **jednoduché úrokovanie** (úročenie).
Úrokovaciu dobu vyjadrenú počtom mesiacov označíme ***m***. Platí $t = \frac{m}{12}$.

Úrok za ***m*** mesiacov je $u = \frac{K \cdot p}{100} \cdot \frac{m}{12}$.

***PRÍKLAD***

Podnikateľ si požičal v banke sumu 375 000 Sk pri ročnej úrokovej miere 18 %. Hovoríme, že si zobral ***úver***, čo je pôžička na podnikateľské účely. Úver splatí za desať mesiacov.

a) Aký zaplatí úrok?
b) Koľko peňazí celkom za úver v skutočnosti zaplatí?

***RIEŠENIE***

a) $K = 375\ 000$ Sk
$p = 18\%$
$m = 10$ mesiacov

Úrok počítame podľa vzorca: $u = \frac{K \cdot p}{100} \cdot \frac{m}{12}$

$$u = \frac{375\ 000 \cdot 18}{100} \cdot \frac{10}{12}$$
$$u = 56\ 250$$

*Odpoveď:* Úrok za desať mesiacov je 56 250 Sk.

b) Podnikateľ splatí celú požičanú sumu zväčšenú o úrok:

$$375\,000 + 56\,250 = 431\,250$$

*Odpoveď:* Podnikateľ v skutočnosti zaplatí za úver celkom 431 250 Sk.

2 ***ÚLOHA***

Občan si uložil vklad 12 000 Sk na 6 mesiacov pri ročnej úrokovej miere 13 %. Aký veľký úrok získa z tohto vkladu?

3 ***ÚLOHA***

Zo vzorca $u = \frac{K \cdot p}{100} \cdot \frac{m}{12}$ vyjadrite postupne neznáme $K$, $p$, $m$.

4 ***ÚLOHA***

a) Aký vklad prinesie za štyri mesiace úrok 15 000 Sk pri ročnej úrokovej miere 10 %?
b) Pri akej ročnej úrokovej miere získame z vkladu 100 000 Sk úrok 2 000 Sk za tri mesiace?
c) Za koľko mesiacov bola splatená pôžička 120 000 Sk, ak úrok predstavoval 6 000 Sk pri ročnej úrokovej miere 12 %?

Pri výpočte využite vzorce z predchádzajúcej úlohy.

5 ***ÚLOHA***

Ak si v banke vezmeme úver štvrť milióna slovenských korún a chceme ho splatiť za pol roka, musíme zaplatiť celkovú sumu 266 250 Sk. Aká je ročná úroková miera na tento úver?

Ak je úrokovacia doba vyjadrená **počtom dní,** označíme ju ***d.*** Platí $t = \frac{d}{360}$.

Úrok za $d$ dní je $u = \frac{K \cdot p}{100} \cdot \frac{d}{360}$.

***POZNÁMKA***

*V peňažných ústavoch sa pri výpočte úroku za určitý počet dní používajú rôzne metódy. Najčastejšie je to nemecká (obchodná) metóda, nazýva sa štandard 30E/360. Pri nej platí, že každý mesiac má 30 dní a každý rok má 360 dní. Pri úrokovaní sa započítava deň, kedy vkladateľ čiastku vložil (dlžník si čiastku požičal) a nepočíta sa deň vybratia vkladu (deň splatenia dlhu).*

2 ***PRÍKLAD***

Pani Slováková si uložila 4. apríla vklad 12 000 Sk pri ročnej úrokovej miere 13 %.

a) Aký veľký úrok jej pripíšu na konci roka?
b) Koľko korún bude mať na účte na konci roka?

***RIEŠENIE***

a) $K = 12\,000$ Sk

$p = 13\%$

$d = 30 \,.\, 8 + 27 = 267$ dní

Úrok počítame podľa vzorca: $u = \dfrac{K \,.\, p}{100} \cdot \dfrac{d}{360}$

$$u = \frac{12\,000 \,.\, 13}{100} \cdot \frac{267}{360}$$

$$u = 1\,157$$

***Odpoveď:*** Za dobu od 4. apríla do konca roka pripíšu pani Slovákovej úrok 1 157 Sk.

b) Vklad na konci roka bude pôvodná suma zväčšená o úrok:

$$12\,000 + 1\,157 = 13\,157$$

***Odpoveď:*** Na konci roka bude mať pani Slováková na účte 13 157 Sk.

6 ***ÚLOHA***

Občan si požičal 25. augusta sumu 80 000 Sk pri ročnej úrokovej miere 9 %. Akú sumu musí zaplatiť na úrokoch, ak dátum splatnosti pôžičky je 1. december toho istého roka?

7 ***ÚLOHA***

Zo vzorca $u = \dfrac{K \,.\, p}{100} \cdot \dfrac{d}{360}$ vyjadrite postupne neznáme $K$, $p$, $d$.

8 ***ÚLOHA***

a) Aký kapitál sme si uložili, ak po sto dňoch od uloženia je výška úroku 1 500 Sk pri ročnej úrokovej miere 12 %?

b) Pri akej ročnej úrokovej miere musíme za 24 dní zo sumy 180 000 Sk zaplatiť úrok 100-krát menší ako táto suma?

c) Za koľko dní pripísali ku vkladu 15 000 Sk úrok 945 Sk pri úrokovej miere 7 %?

Pri výpočte využite vzorce z predchádzajúcej úlohy.

9 ***ÚLOHA***

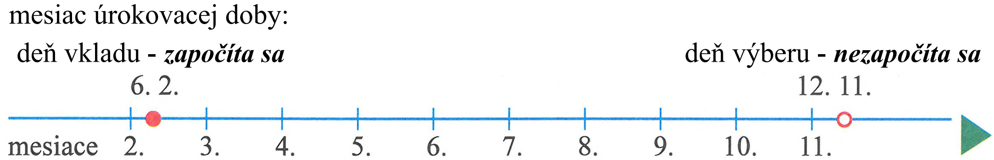
Otec uložil 9. januára na účet s ročnou úrokovou mierou 16 % sumu 90 000 Sk. Bude môcť 1. júla z tohto účtu vybrať 100 000 Sk na rodinnú dovolenku? Ak áno, koľko korún zostane na účte? Ak nie, koľko korún bude chýbať?

3 ***PRÍKLAD***

Súkromný podnikateľ vložil 7. februára čiastku 82 350 Sk na účet s ročnou úrokovou mierou 14 %. Určte, aký úrok mu pripísali pri výbere z tohto účtu dňa 12. novembra toho istého roka.

***RIEŠENIE***

Rieši Marek. Najskôr si určí počet dní úrokovacej doby, medzi 6. februárom a 12. novembrom. Nakreslí si číselnú os, kde každá vyznačená úsečka predstavuje práve jeden mesiac úrokovacej doby:



Počet dní:
25 + 8 . 30 + 11 = 25 + 240 + 11 = 276
Marek počíta ďalej podľa známeho postupu. Skontrolujte jeho výpočet.

$K$ = 82 350 Sk
$p$ = 14%
$d$ = 276

$$u = \frac{K \, . \, p}{100} \cdot \frac{d}{360}$$
$$u = \frac{82\,350 \, . \, 14}{100} \cdot \frac{276}{360}$$
$$u = 8\,838{,}90$$
$$u = 8\,838{,}90 \text{ Sk}$$

***Odpoveď:*** Za úrokovaciu dobu od 6. 2. do 12. 11. pripísali podnikateľovi úrok 8 838,90 Sk.

**10**

### *ÚLOHA*

Tabuľka obsahuje v prvom stĺpci dátumy vkladu, v druhom stĺpci dátumy výberu, vždy v tom istom roku. Doplňte tretí stĺpec tak, aby obsahoval príslušný počet dní úrokovacej doby.

| Vklad uskutočnený dňa | Výber uskutočnený dňa | Počet dní úrokovacej doby ***d*** |
|---|---|---|
| 14. 1. | 19. 12. | |
| 30. 3. | 18. 9. | |
| 25. 4. | 19. 11. | |
| 8. 10. | 17. 12. | |
| 26. 2. | 17. 10. | |

**11**

### *ÚLOHA*

Banka poskytla dňa 5. marca akciovej spoločnosti úver vo výške 900 000 Sk pri ročnej úrokovej miere 15,5 %. Úver je splatný 5. novembra toho istého roka. Aký veľký úrok bude musieť akciová spoločnosť zaplatiť?

## *CVIČENIA*

1. Vypočítajte úrok za jeden rok, ak je daný vklad $K$ a úroková miera ***p***. Môžete použiť výpočet cez jedno percento, trojčlenku, aj vzorec.
   a) $K$ = 50 000 Sk, $p$ = 12%
   b) $K$ = 93 000 Sk, $p$ = 8%
   c) $K$ = 105 000, $p$ = 17,5%

2. Na vkladnej knižke s ročnou úrokovou mierou 4 % bolo uložených 5 000 Sk. Aký úrok pripíšu k tejto sume za:
   a) dva mesiace, b) pol roka, c) sedem mesiacov, d) rok?

3. Začínajúci podnikateľ si 22. januára zobral úver 286 000 Sk pri ročnej úrokovej miere 10 %.
   a) Aký úrok zaplatí, ak celú čiastku plánuje splatiť do konca kalendárneho roka?
   b) Koľko korún zaplatí celkom?

4. Koľko korún musíme uložiť na trojmesačný termínovaný vklad s ročnou úrokovou mierou 12 %, ak chceme, aby vklad vyniesol úrok 1 200 Sk?

5. Pri akej ročnej úrokovej miere musíme zo sumy 25 000 Sk zaplatiť za desať mesiacov úrok, ktorý sa rovná jej osmine?

6. Za koľko mesiacov splatila firma pôžičku 2 mil Sk, ak úrok predstavoval 200 000 Sk pri ročnej úrokovej miere 15 %?

7. Pani Nová mala na konci roka na účte v banke sumu, aj s pripočítaným úrokom, 360 009 Sk. Aká suma bola na účte na začiatku roka, ak sa z účtu nevyberalo a účet bol úročený ročnou úrokovou mierou 10,5 %?

8. Obchodník si dňa 15. marca zobral na nákup zariadenia predajne úver 85 000 Sk s ročnou úrokovou mierou 13 %.
   a) Aký bude úrok, ak je úver splatný 1. novembra toho istého roka?
   b) Koľko korún v skutočnosti obchodník za úver zaplatí?

9. Do nasledujúcej tabuľky doplňte stĺpec, s príslušným úrokom *u*.

| Ročná úroková miera *p* % | Vložené dňa | Vyplatené dňa toho istého roka | Vklad *K* Sk | Úrok *u* Sk |
|---|---|---|---|---|
| 7 | 1. 1. | 18. 8. | 20 000 | |
| 8,5 | 2. 3. | 10. 9. | 180 000 | |
| 3,8 | 14. 5. | 6. 6. | 17 450 | |
| 12 | 9. 4. | 20.11. | 139 000 | |
| 14 | 26. 1. | 26. 6. | 542 800 | |

10. Koľko korún si v banke požičala firma, ak po 150 dňoch od pôžičky je výška úroku 300 000 Sk pri ročnej úrokovej miere 8 %?

11. Pri akej ročnej úrokovej miere musíme za 63 dní zaplatiť úrok 3 906 Sk zo sumy 248 000 Sk?

12. Za koľko dní je z pôžičky 10 000 Sk úrok 120 Sk pri ročnej úrokovej miere 8 %?

13. Od 5. 4. do 18. 12. toho istého roka bol pánovi Kováčovi poskytnutý úver, ktorý splatil celkovou sumou 650 400 Sk pri ročnej úrokovej miere 12 %. Koľko korún predstavoval úver?

*Matematika sa nevnucuje, ale svet sa úplne nenásilne a zákonite matematizuje.*
*J. Vyšín*

## 1.2 Mocniny a odmocniny

***ZOPAKUJME SI***

$$a^n = \underbrace{a \, . \, \ldots \, . \, a}_{n\text{-krát}}$$

***a*** - základ mocniny
***n*** - mocniteľ, exponent - prirodzené číslo
***a*ⁿ** - ***n***-tá mocnina čísla ***a***

1 ***ÚLOHA***

Zapíšte v tvare mocniny:

a) $x \, . \, x \, . \, x \, . \, x \, . \, x \, . \, x \, . \, x$
b) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$
c) $(x+1)(x+1)(x+1)(x+1)(x+1)$
d) $(a+2b)(a+2b)(a+2b)(a+2b)(a+2b)$
e) $(a+b-c)(a+b-c)(a+b-c)$
f) $-(2x-5y)(2x-5y)(2x-5y)(2x-5y)$

2 ***ÚLOHA***

Vysvetlite, akú hodnotu nadobudnú mocniny, ak základ mocniny:
a) sa rovná nule, b) je väčší ako nula, c) je menší ako nula.

3 ***ÚLOHA***

Vypočítajte:

$12^3$; $1{,}1^4$; $(-0{,}03)^3$; $0{,}1^7$
$50^4$; $800^3$; $(-3)^5$; $(-2)^6$

[1] ***PRÍKLAD***

Sčítajte dané výrazy:

a) $2x^3 - 7x^2 + 5x - 12x^3 + 10x^2$
b) $4a^5 - 2a^3 - 10a^2 + 12a^5 - 6a^2 + 1{,}2^2$

***RIEŠENIE***

Zuzka hovorí:
Vieme, že sčitovať a odčitovať môžeme iba mocniny s rovnakým základom a rovnakým mocniteľom, teda:

a) $2x^3 - 7x^2 + 5x - 12x^3 + 10x^2 = -10x^3 + 3x^2 + 5x$
b) $4a^5 - 2a^3 - 10a^2 + 12a^5 - 6a^2 + 1{,}2^2 = 16a^5 - 2a^3 - 16a^2 + 1{,}44$

Ferko sa spýtal: Prečo môžeme sčitovať len mocniny s rovnakým základom a rovnakým mocniteľom?

Zuzka mu uviedla príklad: $5x^3 + 3x^3 = x^3(5+3) = 8x^3$.

4 ***ÚLOHA***

Upravte: $0{,}7x^7 + 0{,}01x^6 + y^2 - (3y^2 - 0{,}02x^6)$

$\boldsymbol{a^m \, . \, a^n = a^{m+n}}$ Podmienky: $m, n \in N$,
$\boldsymbol{a^m : a^n = a^{m-n}}$ $m, n \in N \quad a \neq 0$
ak $m = n$, tak $a^{m-n=0} = 1$

***ÚLOHA***

Vynásobte:

a) $6y^3 \,.\, y^5$ c) $(a - 3b)^2 \,.\, (a - 3b)^5$ e) $(3a + b)^m \,.\, (3a + b)^{2 - n}$

b) $(-2)^3 \,.\, (-2)^5 \,.\, (-2)$ d) $(7x^2y - z)^2 \,.\, (z - 7x^2y)^3$ f) $(k - 2l)^2 \,.\, (k^2 - 4kl + 4l^2)$

**6** ***ÚLOHA***

Vydeľte:

a) $4x^2 : 4x^2$ d) $5x^7y^2z : (-2x^3y^2z)$ g) $9a^5(x - 2y) : 3a^6(x - 2y)$

b) $-15x^3 : 5x^3$ e) $(x + y)^5 : (x + y)$ h) $10x^2(a - b)^3 : 5x^2(a - b)$

c) $420x^2y^5 : 4{,}2\,xy^3$ f) $(3m - 7n)^4 : (3m - 7n)^5$ i) $-20a^2 : [2^2 \,.\, 5 \,.\, (-a)^3]$

$$(a \,.\, b)^n = a^n \,.\, b^n \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \qquad (a^m)^n = a^{m\,.\,n}$$

Podmienky: $n \in N$

$n \in N\ b \neq 0$

$m,\ n \in N$

**7** ***ÚLOHA***

Umocnite:

a) $(4 \,.\, 5)^3$ b) $(7x^2y^5z)^2$ c) $(-4u^5z^6)^4$ d) $\left(\frac{2x^5}{3y^2}\right)^3$ e) $\left(\frac{x}{y-7}\right)^2$ f) $\left[\left(\frac{m+2n^5}{m^2-n^2}\right)^2\right]^3$

***ZOPAKUJME SI***

$\sqrt{a}$ – druhá odmocnina čísla $a$, $a \geq 0$

Platí: $a \,.\, a = a^2$ $\sqrt{a^2} = a$

$\sqrt[3]{a}$ – tretia odmocnina čísla $a$, $a \geq 0$

Platí: $a \,.\, a \,.\, a = a^3$ $\sqrt[3]{a^3} = a$

**8** ***ÚLOHA***

Vypočítajte spamäti:

a) $\sqrt{81}$; $\sqrt{100}$; $\sqrt{1{,}44}$; $\sqrt{0{,}000\,9}$; $\sqrt{\frac{49}{169}}$; $-2\sqrt{1\,600}$

b) $\sqrt[3]{8}$; $\sqrt[3]{27}$; $\sqrt[3]{0{,}001}$; $\sqrt[3]{64\,000}$; $\sqrt[3]{\frac{8}{1\,000}}$; $\sqrt[3]{125\,000}$

**9** ***ÚLOHA***

Použite pri výpočte tabuľky alebo kalkulačku:

a) $\sqrt{5}$; $\sqrt{80}$; $\sqrt{720}$; $\sqrt{5{,}42}$; $\sqrt{19\,300}$; $\sqrt{0{,}06}$; $\sqrt{0{,}000\,3}$

b) $\sqrt[3]{29}$; $\sqrt[3]{482}$; $\sqrt[3]{900}$; $\sqrt[3]{0{,}025}$; $\sqrt[3]{566\,000}$; $\sqrt[3]{0{,}07}$; $\sqrt[3]{0{,}1}$

**10** ***ÚLOHA***

Vypočítajte číslo $\boldsymbol{a}$, ak platí: $\boldsymbol{a} = 6 \,.\, 10^5 + 3 \,.\, 10^4 - 5 \,.\, 10^3 - 7 \,.\, 10 + 2$

**11** ***ÚLOHA***

Napíšte dané údaje v tvare $a \,.\, 10^n$, kde $1 \leq a < 10,\ n \in N$:

a) Vzdialenosť Zeme od Slnka je približne 149 600 000 km.

b) Zväčšenie elektrónovým mikroskopom je až 250 000-násobné.

## *CVIČENIA*

1. Skontrolujte, či sú mocniny zapísané správne. Ak nie, chybu opravte:
   a) $2a.\ 2a.\ 2a.\ 2a.\ 2a = 32a^5$ d) $9a^2b^7 = 3\ .\ 3\ .\ a\ .\ a\ .\ b\ .\ b\ .\ b\ .\ b\ .\ b\ .\ b\ .\ b$
   b) $(-3x).\ (-3x).\ (-3x).\ (-3x) = -81x^4$ e) $625a^3b^0c^4 = 5\ .\ 5\ .\ 5\ .\ 5\ .\ a\ .\ a\ .\ a\ .\ c\ .\ c\ .\ c\ .\ c$
   c) $(a + b)^3 = 3(a + b)$ f) $2\,197x^3y^1z^0 = 13\ .\ 13\ .\ 13\ .\ x\ .\ x\ .\ x\ .\ y$

2. Napíšte príslušné znamienko rovnosti alebo nerovnosti medzi dvojice mocnín:
   a) $5^0 \ \square\ 0^5$ b) $(-2)^4 \ \square\ (-4)^2$ c) $(-7)^2 \ \square\ (-2)^7$ d) $\left(\frac{1}{4}\right)^2 \ \square\ \left(\frac{1}{2}\right)^4$

V nasledujúcich cvičeniach vyberte správnu odpoveď.

3. V ktorej z možností sú čísla $2^{50}$, $5^{25}$ a $8^{10}$ správne usporiadané od najmenšieho po najväčšie?
   A $5^{25} < 8^{10} < 2^{50}$ B $8^{10} < 5^{25} < 2^{50}$ C $8^{10} < 2^{50} < 5^{25}$ D $2^{50} < 5^{25} < 8^{10}$
   E Ani jedna z možností A - D nie je správna.

4. Ktorý z uvedených výrazov možno zjednodušiť na tvar $(3b - 2a)(3b + 2a)$?
   A $5a^2 - 3b^2 - (4a^2 + 12b^2)$ C $-5a + 3b - 7a + 3b$ E $-(5a^2 + 3b^2) + a^2 + 12b^2$
   B $3b^2 - 5a + 9b^2 + 3a$ D $-(5a^2 + 3b^2) - 4a^2 + 12b^2$ F $8b^2 - 4a^2 + 2b^2 - a^2$

5. V ktorej z možností je znamienko nerovnosti nesprávne?
   **A** $(-0{,}2)^2 > 0$ **B** $-\sqrt{5} < 2$ **C** $\sqrt{0{,}25} < 0{,}25$ **D** $5^2 < 2^5$ **E** $\sqrt{80}\ .\ \sqrt{20} = 40$

6. $1\,600x^{15}y^9$ sa nerovná:
   A $40^2\ .\ x^{15}.\ y^9\ .\ x^0\ .\ y^0$ C $5^2\ .\ 2\ .\ 2^5.\ x^{15}.\ y^9$ E $5^2\ .\ 2^6\ .\ x^{12}\ .\ y\ .\ x^3.\ y^8$
   B $5^2\ .\ 8^2\ .\ x\ .\ y^9.\ x^{14}$ D $4^2\ .\ 10^2\ .\ x^{15}.\ y^9\ .\ y\ .\ x^0$ F $20^2\ .\ 2^2\ .\ x^8.\ y^3.\ x^7\ .\ y^6$

**7.** Ktorá z uvedených rovností neplatí?
   **A** $\dfrac{2^4\ .\ x^5\ .\ y^8}{16\ .\ x^3\ .\ y^8} = x^2\ .\ y^2 \quad x \neq 0, y \neq 0$ **D** $\left[\left(\dfrac{2x^5y^7}{3}\right)^2\right]^3 = \dfrac{2^6x^{30}y^{42}}{3^6}$
   **B** $\left(-\dfrac{4a^3b^2}{5c^5}\right)^3 = -\dfrac{64a^9b^6}{125c^{15}} \quad c \neq 0$ **E** $\left[\dfrac{(2^2)^5}{7^2}\right]^3 = \left(\dfrac{2^{15}}{7^3}\right)^2$
   **C** $\left(\dfrac{5\sqrt{120}}{\sqrt{3\,000}}\right)^2 = 1$ **F** $\dfrac{625a^3bc}{5c^4} = \dfrac{5a}{c} \cdot b \quad c \neq 0$

8. Objem kocky je $4{,}913\ cm^3$. Ktorá z odpovedí nie je správna?
   A Hrana kocky má dĺžku 1,7 cm. D Obsah jednej steny je $2{,}89\ cm^2$.
   B Povrch kocky je $1\,734\ cm^2$. E Objem kocky je približne 0,05 l.
   C Povrch kocky je $0{,}173\,4\ dm^2$. F Hrana kocky má dĺžku 17 mm.

9. Najväčší polostrov na svete je Arabský polostrov. Má rozlohu $2\,730\,000\ km^2$. Ktorá z možností je správne zapísaná v skrátenom tvare?
   A $2{,}73\ .\ 10^4$ B $2{,}73\ .\ 10^5$ C $2{,}73\ .\ 10^6$ D $2{,}73\ .\ 10^7$
   E Ani jedna z možností A-D nie je správna.

10. Ktorá z možností vyjadruje polovicu rozlohy Tichého oceánu, ak vieme, že jeho rozloha je $1{,}652\ .\ 10^8\ km^2$?
    A $1{,}652\ .\ 10^4$ B $1{,}652\ .\ 5^8$ C $0{,}826\ .\ 10^8$ D $0{,}826\ .\ 5^8$ E $0{,}826\ .\ 10^4$

## 1.3 Lineárne nerovnice

**1** ***ÚLOHA***

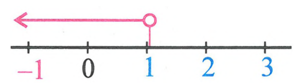
Prečítajte zápisy uvedených nerovníc a vyznačte ich na číselnej osi. Premenné sú z oboru reálnych čísel.

a) $x < 2$   b) $y \geq -5$   c) $z \leq \frac{2}{5}$   d) $a > -1{,}4$   e) $-1 < b$   f) $3{,}5 \geq c$

Grafickým znázornením zápisov, ktoré predstavujú riešenia nerovníc, sú časti číselnej osi. Tieto časti nazývame **intervaly.**

**INTERVALY REÁLNYCH ČÍSEL I.**

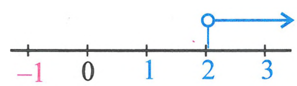
nerovnosť $x < 1$   grafické znázornenie




zápis pomocou intervalu: $x \in (-\infty, 1)$

***čítame: x*** patrí do otvoreného intervalu mínus nekonečno, jedna

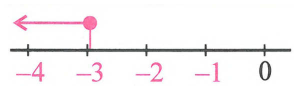
nerovnosť $x > 2$   grafické znázornenie




zápis pomocou intervalu: $x \in (2, +\infty)$

*čítame: x* patrí do otvoreného intervalu dva, plus nekonečno

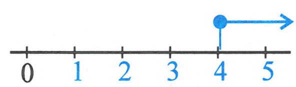
nerovnosť $x \leq -3$   grafické znázornenie




zápis pomocou intervalu: $x \in (-\infty, -3\rangle$

***čítame: x*** patrí do polouzavretého intervalu mínus nekonečno, mínus tri

nerovnosť $x \geq 4$   grafické znázornenie




zápis pomocou intervalu: $x \in \langle 4, +\infty)$

***čítame: x*** patrí do polouzavretého intervalu štyri, plus nekonečno

**2** ***ÚLOHA***

Zapíšte nerovnosti z úlohy 1 ako intervaly. Zápisy prečítajte.

**3** ***ÚLOHA***

Prečítajte a vyznačte na číselnej osi intervaly.

a) $(-\infty, 0)$   b) $\langle 1, +\infty)$   c) $(-2, +\infty)$   d) $(-\infty, 5\rangle$   e) $(-1, +\infty)$   f) $(-\infty, -10\rangle$

***ZOPAKUJME SI***

**Ekvivalentné úpravy nerovníc**

- výmena ľavej a pravej strany nerovnice a súčasné obrátenie znaku nerovnosti
- pričítanie toho istého čísla alebo mnohočlena k obidvom stranám nerovnice
- odčítanie toho istého čísla alebo mnohočlena od obidvoch strán nerovnice
- vynásobenie alebo vydelenie obidvoch strán nerovnice tým istým kladným číslom
- vynásobenie alebo vydelenie obidvoch strán nerovnice tým istým záporným číslom a súčasné obrátenie znaku nerovnosti

***PRÍKLAD***

Riešte nerovnice, riešenie vyznačte na číselnej osi a zapíšte pomocou intervalov.

a) $2x - 4 > 0$ c) $3x - 6 - x + 1 > 2x - 6$ e) $1{,}5(20 - 2x) \geq 3(x + 8)$

b) $3x + 10 \leq 1$ d) $2(3x - 5) > 21 - 6(1 - x)$

***RIEŠENIE***

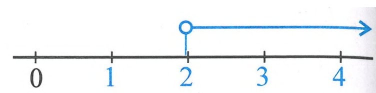
Ústne popíšte ekvivalentné úpravy, ktoré sme pri riešení nerovníc vykonali.

a) $2x - 4 > 0 \quad /+ 4$

$2x > 4 \quad /: 2$

$x > 2$

Znázorníme:



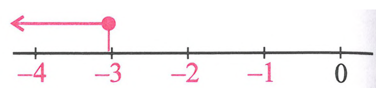

Zapíšeme pomocou intervalu: $x \in (2, +\infty)$

b) $3x + 10 \leq 1 \quad / -10$

$3x \leq -9 \quad / :3$

$x \leq -3$

Znázorníme:




Zapíšeme pomocou intervalu:

c) $3x - 6 - x + 1 > 2x - 6$

$2x - 5 > 2x - 6 \quad / -2x$

$-5 > -6$

Dostali sme vždy platnú nerovnosť.

Pôvodná nerovnosť je pravdivá pre ľubovoľné reálne číslo x.

Zapíšeme symbolicky: $x \in R$ alebo pomocou intervalu: $x \in (-\infty, +\infty)$

d) $2(3x - 5) > 21 - 6(1 - x)$

$6x - 10 > 21 - 6 + 6x$

$6x - 10 > 15 + 6x \quad /- 6x$

$-10 > 15$

Dostali sme neplatnú nerovnosť.

Pôvodná nerovnosť nie je pravdivá pre žiadne reálne číslo x.

Zapíšeme symbolicky: $x \in \emptyset$.

e) $1{,}5(20 - 2x) \geq 3(x + 8)$

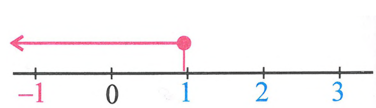
$30 - 3x \geq 3x + 24 \quad / -3x$

$30 - 6x \geq 24 \quad / -30$

$-6x \geq -6 \quad /: (-6)$ POZOR!

$x \leq 1$

Znázorníme:




Zapíšeme pomocou intervalu: $x \in (-\infty, 1\rangle$

***ZOPAKUJME SI***

V zadaní zložitejších nerovníc sa môžu vyskytnúť zátvorky, desatinné čísla a zlomky. Pri ich riešení je výhodné používať postup, ktorý poznáme z riešenia lineárnych rovníc.

**Dodržujeme tieto zásady:**

1. Odstránime z nerovnice zátvorky a zlomky.
   POZOR na násobenie a delenie záporným číslom!
2. Zjednodušíme obidve strany nerovnice.
3. Nerovnicu upravíme ekvivalentnými úpravami pričítaním a odčítaním čísel a členov s neznámou tak, aby členy s neznámou boli na jednej strane a čísla na druhej strane nerovnice.
4. Obidve strany nerovnice znovu zjednodušíme.
5. Vydelíme obidve strany nerovnice koeficientom pri neznámej.
   POZOR na delenie záporným číslom!
6. Nakreslíme riešenie na číselnú os, zapíšeme pomocou intervalu a správnosť riešenia môžeme overiť dosadením niekoľkých hodnôt do pôvodnej nerovnice.

4

***ÚLOHA***

Riešte nerovnice, riešenia vyznačte graficky a zapíšte pomocou intervalov reálnych čísel.

a) $35 - 7 \,.\, (x + 2) > 16 - 2 \,.\, (6x - 1)$

b) $\frac{7x - 5}{5} < \frac{2x - 1}{10}$

c) $2{,}5x - 6{,}2 \geq 7 \,.\, (0{,}5x - 0{,}6)$

d) $\frac{16 - 3z}{8} + 8 \leq \frac{z}{4} - \frac{5z}{8}$

e) $\frac{8c - 9}{6} - \frac{c + 4}{3} \leq c$

[2]

***PRÍKLAD***

Osobný automobil má v nádrži 45 litrov benzínu a priemernú spotrebu 7 litrov na 100 kilometrov. Koľko kilometrov môže s týmto benzínom prejsť?

***RIEŠENIE***

Oliver úlohu rieši zostavením nerovnice a jej vyriešením. Skontrolujte jeho riešenie.

počet prejdených kilometrov . . . $s$
spotreba v litroch na 1 km . . . 0,07
spotreba v litroch na $s$ km . . . 0,07 . s
v nádrži po s kilometroch . . . 45 - 0,07$s$

Platí: 45 - 0,07s ≥ 0 pretože automobil sa pohybuje dovtedy, kým je v nádrži benzín

Oliver rieši nerovnicu: $45 - 0{,}07s \geq 0 \quad / -45$

$$-0{,}07s \geq -45 \;/ : (-0{,}07)$$

$$s \leq 642\tfrac{6}{7}$$

*Skúška:*

Ak automobil prejde $642\frac{6}{7}$ kilometra . . . spotrebuje $642\frac{6}{7} \,.\, 0{,}07$ litrov benzínu, to je 45 litrov, ako bolo v zadaní úlohy.

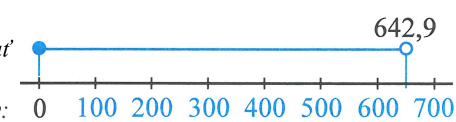
*Odpoveď:* Automobil môže prejsť najviac $642\frac{6}{7}$ km = 642,857 km ≐ 642,9 km.

***POZNÁMKA***

*Riešenie predchádzajúceho príkladu môžeme zapísať pomocou intervalu, platí nerovnosť:* $0 \leq s < 642{,}9$.

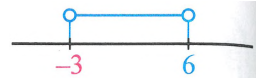
*Zápis:* $s \in \langle 0; 642{,}9)$

*graficky:*

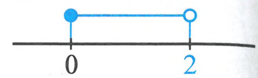


## INTERVALY REÁLNYCH ČÍSEL II.

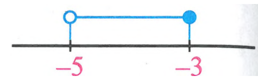
nerovnosť -3 < x < 6 grafické znázornenie
zápis pomocou intervalu: $x \in (-3, 6)$
***čítame: x*** patrí do otvoreného intervalu mínus tri, šesť



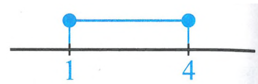

nerovnosť $0 \leq x < 2$ grafické znázornenie
zápis pomocou intervalu: $x \in \langle 0, 2)$
***čítame: x*** patrí do intervalu nula, dva, zľava uzavretého a sprava otvoreného




nerovnosť $-5 < x \leq -3$ grafické znázornenie
zápis pomocou intervalu: $x \in (-5, -3\rangle$
***čítame: x*** patrí do intervalu mínus päť, mínus tri, zľava otvoreného a sprava uzavretého




nerovnosť $1 \leq x \leq 4$ grafické znázornenie
zápis pomocou intervalu: $x \in \langle 1, 4\rangle$
***čítame: x*** patrí do uzavretého intervalu jedna, štyri

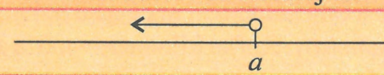
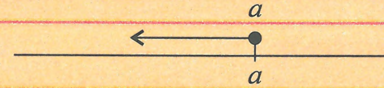
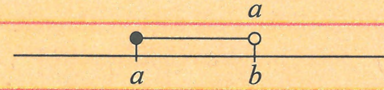
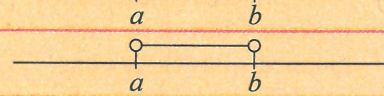
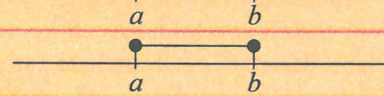
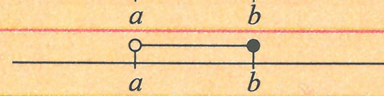
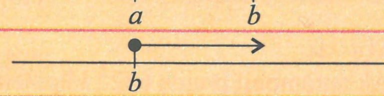
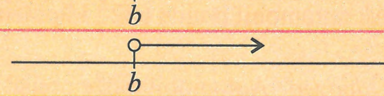



**5** ***ÚLOHA***

Znázornite na číselnej osi a zapíšte pomocou intervalov.

a) $-3 < a < 5$ b) $0 \leq b < 7$ c) $-8 < x \leq 0$ d) $3{,}2 \leq z \leq 4{,}8$ e) $u > -4$ f) $v \leq \frac{1}{2}$

**Prehľad intervalov reálnych čísel**

| Zápis nerovností | Symbol | Znázornenie na číselnej osi |
|---|---|---|
| $x < a$ | $(-\infty, a)$ |  |
| $x \leq a$ | $(-\infty, a\rangle$ |  |
| $a \leq x < b$ | $\langle a, b)$ |  |
| $a < x < b$ | $(a, b)$ |  |
| $a \leq x \leq b$ | $\langle a, b\rangle$ |  |
| $a < x \leq b$ | $(a, b\rangle$ |  |
| $b \leq x$ | $\langle b, \infty)$ |  |
| $b < x$ | $(b, \infty)$ |  |

***POZNÁMKA***

*Intervaly reálnych čísel sú podmnožiny (časti) množiny všetkých reálnych čísel Slovo interval vzniklo z latinského slova* intervallum, *ktorého pôvodný význam bol* priestor medzi dvoma násypmi (valmi).

## *CVIČENIA*

1. Prečítajte nerovnosti, vyznačte ich na číselnej osi a zapíšte pomocou intervalov,
   a) $c < -2$  b) $k \geq -1$  c) $m \leq 3$  d) $h > 0$  e) $-8 \leq x$  f) $7 < y$

2. Zapíšte ako intervaly a znázornite na číselnej osi množiny všetkých reálnych čísel $t$, pre ktoré platí, že sú
   a) väčšie ako $-\frac{1}{2}$, b) väčšie ako -1 a menšie alebo sa rovnajú 1, c) menšie ako -10

3. Zapíšte pomocou intervalov množiny všetkých reálnych čísel z, pre ktoré platí:
   a) $-12 < z < -8$  b) $-5 \leq z < 0$  c) $11 \leq z \leq 55$

4. Nájdite všetky celé čísla x z intervalu $\langle 0, 10)$ pre ktoré platí:
   a) $x \leq 0$  b) $x \geq 7$  c) $5 < x < 15$

5. Aké najväčšie celé číslo leží v intervale (-12, -1)?

6. Rozhodnite, či platí:  a) $2 \in \left\langle \frac{5}{6}, \frac{15}{6} \right\rangle$  b) $\frac{1}{8} \in \left\langle \frac{2}{20}, 1 \right\rangle$  c) $-\frac{1}{4} \in \left( -\frac{1}{6}; 0{,}2 \right)$

7. Na číselnej osi sú znázornené dve reálne čísla $d$ a $h$.

   Zapíšte ako interval a znázornite na číselnej osi množiny všetkých reálnych čísel x, pre ktoré platí:
   ***a)*** $d \leq x \leq h$  ***b)*** $d \leq x < h$  ***c)*** $d < x \leq h$  ***d)*** $x \leq h$  ***e)*** $d < x$

8. Riešte nerovnice: a) $4x - 2 \cdot (1 - x) > 1 - (3 - 2x)$  c) $\frac{2x-3}{4} < 1 - \frac{x}{2}$
   b) $\frac{x-2}{3} \leq \frac{1-x}{2}$  d) $1 - \frac{2-x}{3} \geq 3(x+1) - 4$

9. Riešte nerovnice v množine všetkých prirodzených čísel:
   a) $2(13 - x) > 5x$  c) $\frac{4x+7}{2} < \frac{x-2}{5}$
   b) $5(x+1) \geq 4(x-3)$  d) $12x - 1 \leq 3(4x - 1)$

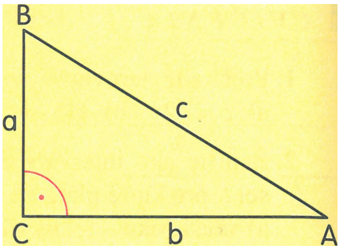
10. Pre ktoré čísla $a$ z intervalu $\langle -2, 5)$ platí: $2a - 3 < a - 4$?

11. Určte, pre ktoré reálne čísla $p$ je výraz: $\frac{2-p}{5}$
    a) kladný, b) záporný, c) menší ako 2, d) väčší alebo sa rovná -6.

12. Nákladné auto s hmotnosťou 4 tony má prejsť po moste, ktorého nosnosť je 10 ton. Na auto nakladajú balíky drôtu rovnakej hmotnosti. Hmotnosť jedného balíka je 185 kilogramov. Koľko takých balíkov môžu na nákladné auto naložiť?

13. Obvod obdĺžnika je 100 cm. Dokážte, že jeho obsah je vždy menší alebo sa rovná obsahu štvorca s takým istým obvodom. (***Návod:*** Vyjadrite obsah obdĺžnika pomocou dĺžky x jednej jeho strany.)

## 1.4 Pytagorova veta




***ZOPAKUJME SI***

Na obrázku je narysovaný pravouhlý trojuholník *ABC* s pravým uhlom pri vrchole C, jeho strany sú označené $a$, $b$, $c$.

**1** ***ÚLOHA***

Napíšte a slovami vyjadrite Pytagorovu vetu.

**2** ***ÚLOHA***

Napíšte a slovami vyjadrite obrátenú Pytagorovu vetu, ktorá sa v praxi často používa.

**3** ***ÚLOHA***

Dané sú dĺžky strán trojuholníka. Rozhodnite, ktorý z nich je pravouhlý:

a) 3 cm, 4 cm, 5 cm
b) 5 cm, 6 cm, 8 cm
c) 7 dm, 9 dm, 12 dm
d) 10 cm, 24 cm, 26 cm
e) 15 m, 20 m, 25 m
f) 30 cm, 40 cm, 50 cm

**4** ***ÚLOHA***

Doplňte v tabuľke prázdne miesta tak, aby čísla uvedené v tom istom stĺpci predstavovali hodnoty dĺžok strán pravouhlého trojuholníka s odvesnami ***a, b*** a preponou ***c***.

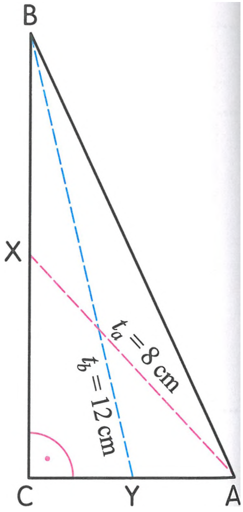
| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ***a*** | 10 | | 6 | | 10 | |
| ***b*** | 24 | 12 | 8 | 40 | | 84 |
| ***c*** | | 13 | | 50 | 26 | 85 |

**5** ***ÚLOHA***

Vypočítajte veľkosť výšky rovnostranného trojuholníka, ktorého strana $a = 6$ cm.

**[1]** ***PRÍKLAD***

Vypočítajte dĺžky strán pravouhlého trojuholníka *ABC,* ak sú dané dĺžky ťažníc $t_a = 8$ cm, $t_b = 12$ cm.




*RIEŠENIE*

$t_a = 8$ cm
$t_b = 12$ cm
$a = \dots$ cm
$b = \dots$ cm
c = ... cm

Riešenie úlohy rozdelíme na tri časti:

1. Z pravouhlého trojuholníka *AXC* použitím Pytagorovej vety vyjadríme:

$$t_a^2 = b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$64 = b^2 + \frac{a^2}{4} \quad \Rightarrow a^2 = 4 \,.\, 64 - 4b^2 \qquad (1)$$

2. Z pravouhlého trojuholníka $BCY$ s použitím Pytagorovej vety vyjadríme:

$$t_b{}^2 = a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$144 = a^2 + \frac{b^2}{4} \quad \Rightarrow a^2 = 144 - \frac{b^2}{4} \quad (2)$$

Dostali sme rovnosti (1) a (2), ktoré napíšeme:

$$a^2 = 4 \;.\; 64 - 4b^2$$
$$a^2 = 144 - \frac{b^2}{4}$$

Keďže sa rovnajú ľavé strany, musia sa rovnať aj pravé strany rovností, teda

$$4 \;.\; 64 - 4b^2 = 144 - \frac{b^2}{4}$$

Riešením tejto rovnice dostaneme $b \doteq 5{,}5$ cm.
Dosadením do rovnice (1) za $b \doteq 5{,}5$ vypočítame

$$a \doteq 11{,}7 \text{ cm}$$

3. Z pravouhlého trojuholníka $ABC$ vypočítame:

$a = 11{,}7$ cm
$b = 5{,}5$ cm
$c = \dots$ cm

$c^2 = a^2 + b^2$

$$c^2 = 11{,}7^2 + 5{,}5^2$$
$$c^2 = 136{,}89 + 30{,}25$$
$$c^2 \doteq 167{,}14$$
$$c \doteq 12{,}93$$
$$c \doteq 12{,}93 \text{ cm}$$

***Odpoveď:*** Dĺžky strán daného pravouhlého trojuholníka sú približne
$a = 11{,}7$ cm, $b = 5{,}5$ cm, $c = 12{,}93$ cm.

***PRÍKLAD***

Cesta má rovnomerné stúpanie 2 ‰. Vypočítajte:

a) výškový rozdiel dvoch bodov $A$, $B$ vzdialených 750 m;
b) horizontálnu vzdialenosť týchto bodov.

***RIEŠENIE***

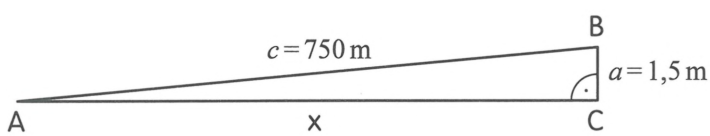
a) Stúpanie 2 ‰ znamená dve tisíciny zo vzdialenosti. Teda výškový rozdiel bude:

$$750 \;.\; 0{,}002 = 1{,}5$$

1,5 m

*Odpoveď:* Výškový rozdiel týchto dvoch bodov je 1,5 m.

b) Horizontálna vzdialenosť bude veľkosť x odvesny pravouhlého trojuholníka $ABC$ podľa obrázka:




$a = 1{,}5$ m
$c = 750$ m
$x = \dots$ m

$c^2 = a^2 + x^2$

$$750^2 = 1{,}5^2 + x^2$$
$$x^2 = 750^2 - 1{,}5^2$$
$$x^2 = 562\,500 - 2{,}25$$
$$x = \sqrt{562\,497{,}75}$$
$$x \doteq 749{,}9$$
$$x \doteq 749{,}9 \text{ m}$$

*Odpoveď:*
Horizontálna vzdialenosť bodov $A$, $B$ je približne 749,9 m.

**PRÍKLAD** [3]

Dokážte, že obsah kruhu zostrojeného nad preponou pravouhlého trojuholníka ako nad priemerom sa rovná súčtu obsahov kruhov zostrojených nad jeho odvesnami ako priemermi.

**RIEŠENIE**

Označme $S_1$, $S_2$, $S_3$ obsahy kruhov zostrojených podľa príkladu.
Odvesny pravouhlého trojuholníka označme $a$, $b$ a preponu $c$.

Potom $\qquad S_1 = \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2,\ S_2 = \pi\left(\frac{b}{2}\right)^2,\ S_3 = \pi\left(\frac{c}{2}\right)^2$

Podľa Pytagorovej vety platí:

$$a^2 + b^2 = c^2 \qquad / \cdot \frac{1}{4}$$

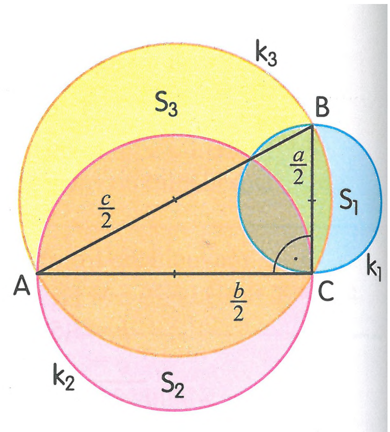
Ekvivalentnými úpravami dostaneme:

$$\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} = \frac{c^2}{4}$$

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 \qquad / \,.\, \pi$$

$$\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \pi\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \pi\left(\frac{c}{2}\right)^2$$

teda $S_1 + S_2 = S_3$, čo sme mali dokázať.




**PRÍKLAD** [4]

Číňania riešili pomocou Pytagorovej vety (pod týmto názvom ju však vtedy nepoznali) v treťom storočí pred naším letopočtom túto zábavnú úlohu:

Uprostred kruhovej nádrže s priemerom 10 stôp trčí rákosový prút jednu stopu nad hladinou. Ak nakloníme prút tak, aby zostal rovný, dočiahne koncom k okraju nádrže na vodnej hladine. Aká hlboká je nádrž?

**RIEŠENIE**

Nádrž má priemer 10 stôp, teda polomer je 5 stôp. Ak označíme veľkosť hĺbky v stopách písmenom x, potom dĺžka prúta je (x + 1) stôp.

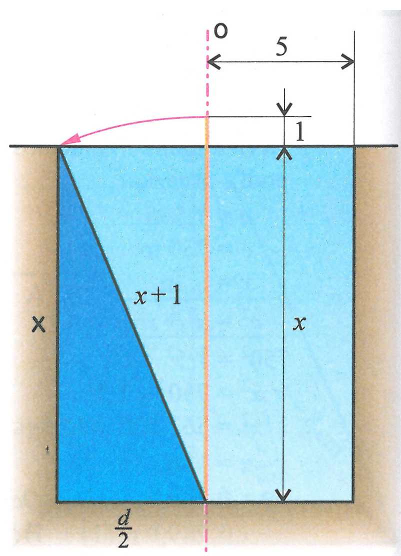
Na obrázku je znázornený osový prierez nádrže. V tmavomodrom pravouhlom trojuholníku podľa Pytagorovej vety platí:

$$(x + 1)^2 = x^2 + 5^2$$

Z tejto rovnice vypočítame:

$$x^2 + 2x + 1 = x^2 + 25$$
$$2x = 24$$
$$x = 12$$

***Odpoveď:*** Hĺbka nádrže je 12 stôp.



**CVIČENIA**

1. Doplňte tabuľku tak, aby v nej boli dĺžky strán pravouhlého trojuholníka s odvesnami ***a, b*** a preponou ***c.***

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ***a*** | 3 | | 15 | 12 |
| ***b*** | 4 | 24 | 20 | |
| ***c*** | | 26 | | 15 |

2. Vypočítajte dĺžku uhlopriečky *AC* obdĺžnika *ABCD*, keď jeho rozmery sú 6 cm a 8 cm.

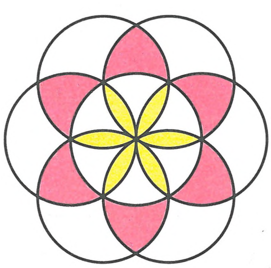
3. Vypočítajte dĺžku telesovej uhlopriečky kocky s hranou dĺžky 6 cm.

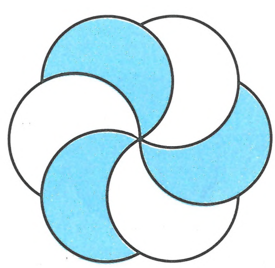
4. V parkuje umiestnený zavlažovač vo vzdialenosti 3 m od chodníka. Voda dostrekne do vzdialenosti maximálne 5 m. Určte, akú dĺžku chodníka poleje voda.

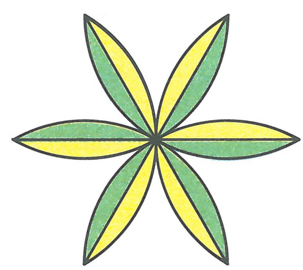
## 1.5 Kruh, kružnica

1 ***ÚLOHA***

Nasledujúce obrázky prerysujte do zošita.







2 ***ÚLOHA***

Dané sú tri body *A, B*, C neležiace na jednej priamke. Narysujte kružnicu *k*, ktorá prechádza týmito bodmi.

3 ***ÚLOHA***

Daná je kružnica *m*(*O*, 3 cm) a na nej bod *A*. Narysujte kružnicu *k (S,* 2 cm), ktorá má s kružnicou *m*

a) vonkajší dotyk v bode *A*;
b) vnútorný dotyk v bode *A*.

**4** ***ÚLOHA***

Daný je trojuholník $ABC$. Narysujte:

a) kružnicu $k_1$ ktorá je trojuholníku $ABC$ opísaná;

b) kružnicu $k_2$, ktorá je trojuholníku $ABC$ vpísaná.

**5** ***ÚLOHA***

Daná je kružnica $k(S$, 3 cm). Vypočítajte, o koľko sa zväčší obvod a obsah kruhu, ktorého polomer bude dvakrát väčší ako polomer kružnice $k$.

**[1]** ***PRÍKLAD***

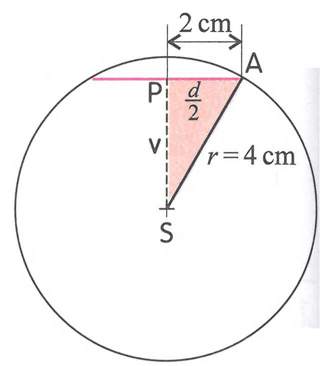
Tetiva kružnice s polomerom $\boldsymbol{r}$ = 4 cm má dĺžku $d$ = 4 cm. Vypočítajte vzdialenosť tetivy od stredu kružnice.

***RIEŠENIE***

$r = 4$ cm

$d = 4$ cm

$v = \ldots$ cm




Použijeme Pytagorovu vetu na pravouhlý trojuholník $SAP$.

$$r^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + v^2$$

$$16 = 4 + v^2$$

$$v^2 = 16 - 4$$

$$v^2 = 12$$

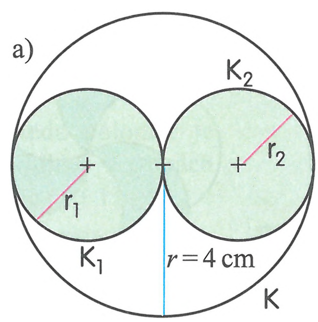
$$v = \sqrt{12} = \sqrt{4\,.\,3} = \sqrt{4}\,.\sqrt{3} = 2\,.\sqrt{3}$$

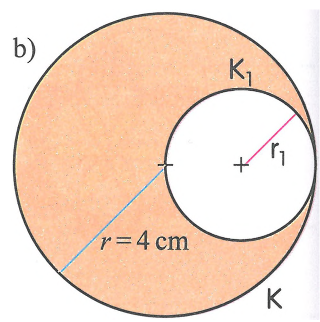
$$v = 2\sqrt{3}\text{ cm}$$

*Odpoveď:* Vzdialenosť tetivy od stredu kružnice je $2\sqrt{3}$ cm.

**[2]** ***PRÍKLAD***

Vypočítajte obsah vyfarbených častí kruhu $K$ s polomerom $r$ = 4 cm:




***RIEŠENIE***

a) Vyfarbená časť sa skladá z dvoch kruhov, ktoré majú navzájom vonkajší dotyk a s danou kružnicou majú obidva vnútorný dotyk. Obidva kruhy sú zhodné a ich polomery sú

$\boldsymbol{r_1} = \boldsymbol{r_2} = 2$ cm

$\underline{\boldsymbol{S} = \ldots\ \text{cm}^2}$

$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{\pi r_1^2}$

$\boldsymbol{S} = 3{,}14\ .\ 2^2$

$\underline{\boldsymbol{S} = 12{,}56}$

$\boldsymbol{S} = 12{,}56\ \text{cm}^2$

$2\boldsymbol{S} = 25{,}12\ \text{cm}^2$ ***Odpoveď:*** Obsah vyfarbenej časti je 25,12 cm².

b) Obsah vyfarbenej časti sa rovná rozdielu obsahu kruhu $K$ s polomerom $r = 4$ cm a obsahu kruhu $K_1$ s polomerom $r_1 = 2$ cm.

$r = 4$ cm

$r_1 = 2$ cm

<u>S = ... cm²</u>

$S = \pi r^2 - \pi r^2$

$S = 3{,}14 \cdot 4^2 - 3{,}14 \cdot 2^2$

$S = 3{,}14(16 - 4)$

$S = 3{,}14 \cdot 12$

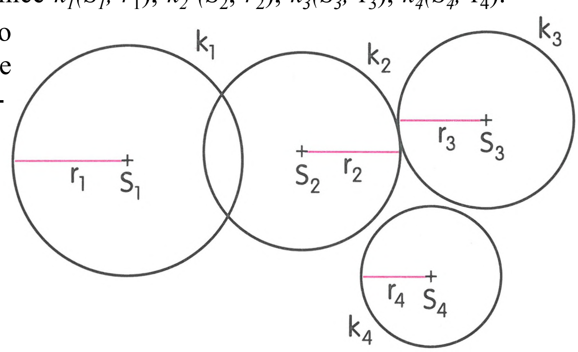
<u>**S** = 37,68</u>

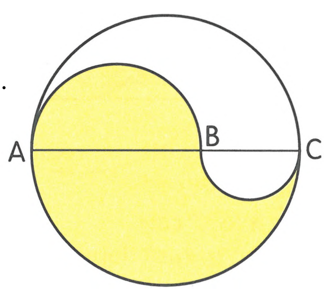
$S = 37{,}68\ \text{cm}^2$ *Odpoveď:* Obsah vyfarbenej časti je 37,68 cm².

## *CVIČENIA*

1. Dĺžka strany štvorca je 17 cm. Vypočítajte polomer kružnice, ktorá je
   a) štvorcu opísaná,
   b) štvorcu vpísaná.

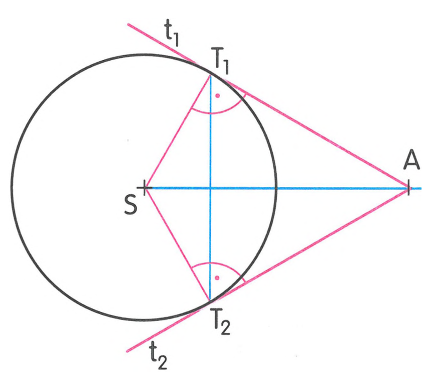
2. Na obrázku sú narysované kružnice $k_1(S_1, r_1)$, $k_2(S_2, r_2)$, $k_3(S_3, r_3)$, $k_4(S_4, r_4)$. Popíšte vzájomnú polohu týchto kružníc a napíšte podmienky pre vzdialenosti ich stredov v závislosti od ich polomerov.




3. 


Vypočítajte obsah vyfarbenej časti kruhu, ak $|AC| = 8$ cm a bod $B$ delí úsečku $AC$ v pomere 5 : 3.

4. Daná je kružnica $k$ ($S$, 2 cm) a bod $A$, $|SA| = 4$ cm. Bodom $A$ sú vedené dotyčnice $t_1$, $t_2$ ku kružnici $k$. Vypočítajte dĺžky úsečiek $AT_1$, $AT_2$, $T_1T_2$.




5. Akú dĺžku má kružnica opísaná obdĺžniku s rozmermi 64 mm a 96 mm?

## 1.6 Konštrukčné úlohy

***ZOPAKUJME SI***

1 ***ÚLOHA***

Daná je úsečka $AB$. Zostrojte množinu stredov kružníc, ktoré prechádzajú bodmi $A$, $B$.

2 ***ÚLOHA***

Daná je kružnica $k(S, r)$. Zostrojte množinu stredov kružníc s polomerom $r'$ ktoré sa danej kružnice $k$ dotýkajú: a) zvonka, b) zvnútra.

3 ***ÚLOHA***

Dané sú dve rôznobežné priamky $a$, $b$. Zostrojte množinu stredov kružníc, ktoré sa dotýkajú priamok a, $b$.

4 ***ÚLOHA***

Daný je obdĺžnik $ABCD$. Zostrojte osi súmernosti a stred súmernosti tohto obdĺžnika.

[1] ***PRÍKLAD***

Daná je kružnica $k(S, r = 2\text{ cm})$ a jej dve dotyčnice $t_1$, $t_2$, $t_1 || t_2$. Zostrojte kružnicu $m$, ktorá sa dotýka kružnice $k$ a obidvoch jej dotyčníc.

***RIEŠENIE***

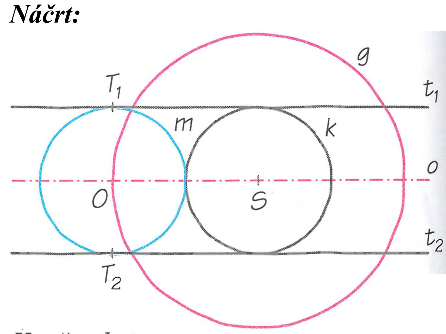
*Rozbor:*

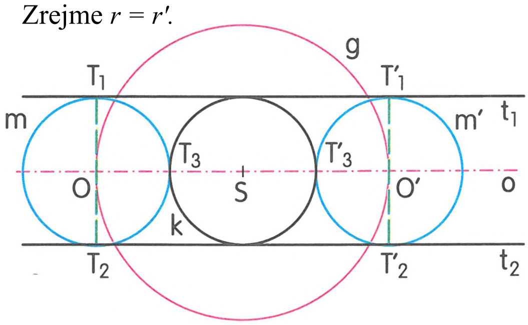
Predpokladajme, že úloha je vyriešená a riešenie je zobrazené na náčrte.

Ak sa kružnica $m$ dotýka dotyčníc $t_1$, $t_2$, jej stred $O$ leží na osi $o$ rovinného pásu určeného dotyčnicami $t_1$, $t_2$. Ak sa kružnica $m$ dotýka kružnice $k$, jej stred $O$ leží na kružnici $g$ $(S, r + r')$. Teda stred $O$ je priesečník priamky $o$ a kružnice $g$ $(S, r + r')$.

Zrejme $r = r'$.

***Náčrt:***




*Konštrukcia:*

1. $k$; $k$ $(S, 2\text{ cm})$
2. $t_1$; $t_2$; $t_1$, $t_2$ sú dotyčnice; $t_1 \| t_2$
3. $o$, os pásu určeného $t_1$, $t_2$
4. $g$; $g$ $(S, 4\text{ cm})$
5. $O$; $O'$, $O \in g \cap o$; $O' \in g \cap o$
6. $m$; $m$ $(O, 2\text{ cm})$; $m'$, $m'$ $(O', 2\text{ cm})$

Skúšku prenecháme žiakom.

***Diskusia:*** Príklad je vždy riešiteľný. Existujú dve kružnice, ktoré spĺňajú podmienky príkladu.

**PRÍKLAD**

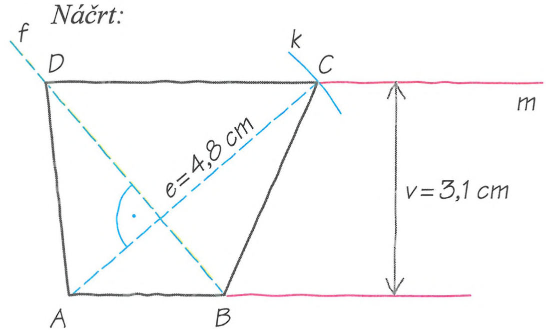
[2] Zostrojte lichobežník $ABCD$ ($AB \parallel CD$), ak $|AB| = a = 2{,}3$ cm, $|AC| = e = 4{,}8$ cm, $v = 3{,}1$ cm a $BD \perp AC$.

**RIEŠENIE**

***Rozbor:***

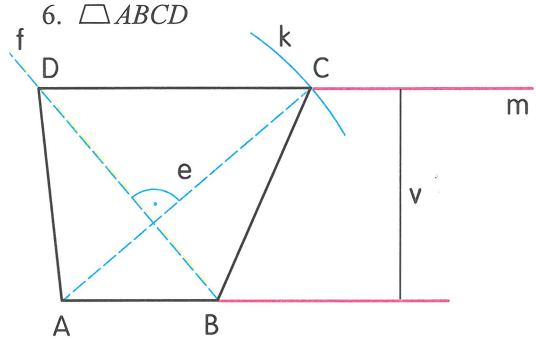
Načrtnime lichobežník $ABCD$ a vyznačme prvky, ktoré sú dané. Body $A$, $B$ vieme narysovať. Body $C$ a $D$ ležia na priamke $m \parallel AB$ vo vzdialenosti $v = 3{,}1$ cm. Bod $C$ ešte leží na kružnici $k(A;\ 4{,}8$ cm). Bod $D$ je priesečník priamky $m$ a priamky $f \perp AC$, ktorá prechádza bodom $B$.

*Náčrt:*




*Konštrukcia:*

1. $AB$; $|AB| = a = 2{,}3$ cm
2. $m$; $m \parallel AB$; $|m, AB| = v = 3{,}1$ cm
3. $k$; $k\ (A;\ 4{,}8$ cm)
4. $C$; $C \in m \cap k$
5. $D$; $D \in m \cap f$, $B \in f$, $f \perp AC$
6. ⏢ $ABCD$




***Skúška:*** Bod $C$ leží na priamke $m$, preto výška lichobežníka je $v = 3{,}1$ cm. Súčasne bod $C$ leží na kružnici $k(A;\ 4{,}8$ cm), preto uhlopriečka $AC$ má dĺžku $e = 4{,}8$ cm. Bod $D$ je priesečník priamky $m$ a priamky $f$, preto $BD \perp AC$.

***Diskusia:*** Trojuholník $ABC$ je určený stranami $AB$, $AC$ a výškou $v$. Pretože $|AC| > v$, bod $C$ možno zostrojiť pri tejto voľbe úsečky $AB$ ako jediný. Preto príklad má jediné riešenie.

**PRÍKLAD**

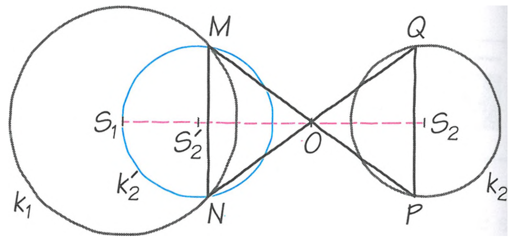
[3] Sú dané dve kružnice $k_1$ ($S_1$, $r_1 = 3$ cm) a $k_2$($S_2$, $r_2 = 2$ cm) so strednou úsečkou $S_1S_2$ dĺžky 8 cm. Pre bod $O \in S_1S_2$ platí $|S_1O| = 5$ cm, $|S_2O| = 3$ cm. Zostrojte dva rovnoramenné zhodné trojuholníky $PQO$ a $MNO$ také, že body $M$, $N$ ležia na kružnici $k_1$ a $P$, $Q$ na kružnici $k_2$.

*RIEŠENIE*

*Rozbor:*

Na obrázku je znázornené predpokladané riešenie, t.j. dvojica zhodných rovnoramenných trojuholníkov *MNO* a *PQO*. Pretože hlavný vrchol *O* leží na strednej $S_1S_2$ a vrcholy základní ležia na kružniciach $k_1$ a $k_2$, musia byť tieto trojuholníky súmerné podľa priamky $S_1S_2$. Ich základne sú kolmé na túto priamku.

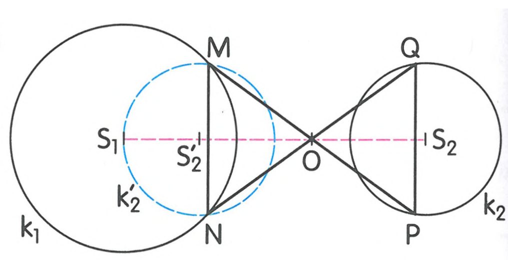
*Náčrt:*




Trojuholníky sú však súmerné aj podľa stredu *O.* Množinou hľadaných bodov *M,* N je kružnica $k_1$. Množinou možných bodov *P, Q* je kružnica $k_2$. Kružnica $k_2$ sa v stredovej súmernosti $S_0$ so stredom v bode *O* zobrazí na kružnicu $k'_2$. Potom hľadané body *M, N* sú body prieniku kružníc - priesečníky $k_1$, $k'_2$.

*Konštrukcia:*

1. $k_1, k_2;\ k_1(S_1, r_1 = 3\text{ cm}), k_2(S_2, r_2 = 2\text{ cm})$
   $|S_1S_2| = 8\text{ cm}$
2. $O,\ |S_1O| = 5\text{ cm},\ O \in S_1S_2$
3. $k'_2;\ k_2 \xrightarrow{S_0} k'_2$
4. $M, N;\ M, N \in k_1 \cap k'_2$
5. $P, Q;\ M \xrightarrow{S_0} P,\ N \xrightarrow{S_0} Q$
6. $\triangle MNO, \triangle PQO$




Skúšku vykonajú žiaci.

*Diskusia:* Kružnice $k_1$ a $k'_2$ majú dva spoločné body *M, N,* lebo platí $r_1 + r_2 > |S_1S'_2|$
Body *M*, *N* vedú k jedinému riešeniu, ktorým je trojuholník *MNO* a k nemu podľa stredu *O* súmerne združený trojuholníku *PQO.*

*CVIČENIA*

1. Zostrojte trojuholník *ABC,* ak je dané $|AB| = c = 6$ cm, $|BC| = a = 4$ cm, $v_c = 3$ cm.

2. Zostrojte lichobežník *ABCD,* ak sú dané dĺžky jeho strán $|AB| = a = 5{,}5$ cm, $|BC| = b = 4{,}5$ cm a uhlopriečok $|AC| = e = 5$ cm, $|BD| = f = 7$ cm.

3. Daná je kružnica $k(S$, r = 2 cm) a priamka *t,* ktorej vzdialenosť od bodu *S* je 4 cm. Zostrojte kružnicu *l,* ktorá má polomer 1,5 cm, dotýka sa priamky *t* a má vonkajší dotyk s kružnicou *k.*

*Každá veda, ktorá sa zaoberá logickými vzťahmi medzi danými predmetmi podľa daných pravidiel, je matematika.*

*Albert Einstein*

## VYSKÚŠAJTE SA!

**1.** Na účet v banke s ročnou úrokovou mierou 3,5 % uložili Balážovci 7 000 Sk. Aký úrok im banka k tejto sume pripíše za:

a) jeden rok  b) sedem mesiacov  c) dvadsať dní?

**2.** Obchodník si zobral úver 50 000 Sk a splatil ho za 9 mesiacov sumou 55 250 Sk. Aká bola ročná úroková miera pre tento úver?

**3.** Od 19. 2. do 19. 6. t. r. bol v banke uložený vklad pri ročnej úrokovej miere 18 %. Majiteľ si vybral celý vklad aj s pripočítaným úrokom v sume 302 250 Sk. Koľko korún majiteľ 19. 2. t. r. do banky uložil?

**4.** Zapíšte dané údaje v tvare $a \cdot 10^n$, kde $1 \le a < 10$ a $n \in N$. Svetlo sa šíri vo vzduchu rýchlosťou 300 000 000 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$, vo vode 225 000 $\frac{\text{km}}{\text{s}}$ a v skle 197 000 $\frac{\text{km}}{\text{s}}$.

**5.** Vypočítajte: a) $12m^5 - 11m^4 + (3m^5 - 10m^4) - (-10m^4)$

b) $3a^2 - 2(5b^2 - a^2) - 2b^2$

c) $\left(x^2 \cdot \frac{2}{5a}\right)^5 \cdot \frac{x}{a}$

**6.** Ktorá z rovností neplatí? Odôvodnite prečo.

**A** $(a + b)^5 \cdot (a + b)^3 = (a + b)^8$

**B** $(4x + 3)^n \cdot (4x + 3)^2 = (4x + 3)^{n+2}$

**C** $(2a - b)^5 \cdot (-b + 2a)^2 = (2a - b)^7$

**D** $(9 + x)^2 \cdot (x + 9)^4 = (9 + x)^8$

**E** $(2m - n)^{a+2} \cdot (2m - n)^{a-2} = (2m - n)^{2a}$

**7.** Ktorý podiel nie je správny?

**A** $-0{,}1236a^5b^4c^9 : 4a^3b^2c^8 = -0{,}0309a^2b^2c$

**B** $(5m - 3n)^4 : (-3n + 5m)^4 = 1$

**C** $18x^5 : 2x^7 = \frac{9}{x^2}$

**D** $4x^3(3y - 1) : x^5(3y - 1)^2 = \frac{4}{x^2(3y - 1)}$

**E** $(2k - 3l)^5 : (-3l + 2k)^2 = (2k - 3l)^3$

**8.** Jeden z výsledkov nie je správny. Opravte ho:

**A** $\sqrt[3]{0{,}216} = 0{,}6$

**B** $-\sqrt[3]{421{,}875} = -7{,}5$

**C** $2 \cdot \sqrt{841} - 5 \cdot \sqrt{39{,}69} = 25{,}7$

**D** $4 \cdot \sqrt[3]{12\,167} + 5 \cdot \sqrt[3]{12\,167} = 207$

**E** $15 \cdot \sqrt{\frac{1}{9}} - (-7 + 2)^2 = -20$

**9.** Vypíšte všetky prirodzené čísla $y$ z intervalu (10, 20), pre ktoré platí:

a) $y < 15$  b) $y \ge 18$  c) $5 \le y \le 12$

Vyznačte ich na číselnej osi.

**10.** Riešte nerovnice v množine všetkých reálnych čísel. Riešenia zapíšte aj pomocou intervalov.

a) $10 - (3x - 5) + 5x - 3 \le 0$

b) $-2 \cdot \left(\frac{y}{3} + 2\right) - 2 \ge 4(1 - y)$

c) $\frac{5a - 4}{6} - \frac{3a - 2}{4} > \frac{a}{2} - \frac{a + 1}{3}$

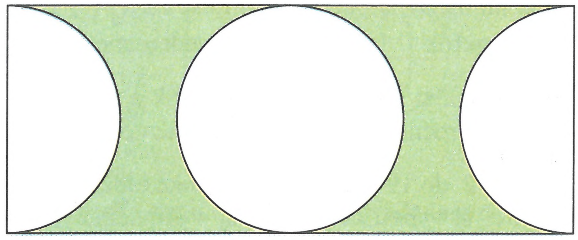
d) $0{,}5c + 1{,}5 - 2(c + 0{,}1) < c + 5{,}3$

**11.** Pre ktoré reálne čísla z je súčet výrazov $\frac{z+1}{2} + \frac{1-z}{-3}$

a) nezáporný b) menší ako -1 c) väčší ako 6?

**12.** Vypočítajte dĺžku telesovej uhlopriečky kvádra s rozmermi 5 cm, 7 cm, 9 cm.

**13.** Vypočítajte obsah vyfarbenej časti plochy, ktorej rozmery sú vyznačené na obrázku.




**14.** Daná je kružnica $k(S;$ 3,5 cm) a priamka m, ktorej vzdialenosť od bodu $S$ je 2 cm. Zostrojte kružnicu $l$, ktorá má polomer 1,5 cm, dotýka sa priamky $m$ a má vnútorný dotyk s kružnicou $k$.

**15.** Zostrojte pravouhlý lichobežník $ABCD$, ktorého výška je 5 cm, jedna základňa má dĺžku 7 cm a dĺžka dlhšieho ramena je 6 cm.

***Nemožné je prehlbovať záujem o akúkoľvek presnú vedu nepoznajúc jej matematiku.***

***J. C. Maxwell***

***Emil Weyr***

***(1. 9. 1848 až 25. 1. 1894)***

***Český matematik. Svojím otcom, učiteľom matematiky; bol už na reálke vedený k štúdiu vyššej matematiky. Zaoberal sa projektívnou geometriou, zvlášť jedno-viacznačnými príbuznosťami a teóriou algebrických kriviek. Svoje výsledky zhrnul do práce „Príspevok k teórii kriviek“ (bola uverejnená po nemecky vo Viedni). S bratom Eduardom patrili k zakladajúcim členom Jednoty českých matematikov. Emil Weyr sa zaraďuje medzi význačných českých matematikov svojej generácie.***

# 2 ÚPRAVA ALGEBRICKÝCH VÝRAZOV

## 2.1 Celistvé algebrické výrazy

***ZOPAKUJME SI***

Výrazy $5y - 2$; $a^2 + b^2$; $4x^5 - x^4 + 3x^3 + 2x$; $\frac{5}{3}z$; $(k+1)^2$
nazývame celistvé algebrické výrazy.
Môžu to byť jednočleny, dvoj členy, ..., mnohočleny.

***ÚLOHA***

Napíšte 5 príkladov výrazov s premennými a, 6, x, ***y***, ktoré sú
a) jednočleny b) dvoj členy c) trojčleny d) ľubovoľné mnohočleny.

***ÚLOHA***

Prepíšte nasledujúci text a namiesto □ doplňte správne výrazy s premennými.

V triede je $a$ chlapcov a $b$ dievčat. (Platí: $a > b$). V triede je spolu □ žiakov.

Dnes chýbajú 2 žiaci. V triede je dnes prítomných □ žiakov.

Zajtra pôjdu 2 dievčatá a 3 chlapci na atletickú súťaž. Nikto iný nebude chýbať. Zajtra bude v triede prítomných □ žiakov.

Chlapcov je o □ viac ako dievčat. Dievčat je □-krát menej ako chlapcov.

***ZOPAKUJME SI***

***Sčitovanie výrazov***

Sčítame koeficienty pri členoch, ktoré obsahujú rovnaké premenné s rovnakými exponentmi, platí: $x = 1 \,.\, x$, $-x = -1 \,.\, x$

***Odčitovanie výrazov***

Pričítame opačný výraz. Ak je pred zátvorkou znamienko mínus, všetky znamienka v zátvorke sa zmenia na opačné: $-(3x + 5y^2 - 4x^3) = -3x - 5y^2 + 4x^3$

***PRÍKLAD***

Vypočítajte:

a) $2a^2 - 3x^3 - x^3 + 7a^2$ b) $x^2 + 2y - (-x^2 - y)$ c) $6ab - (7ab + 3a - b)$

***RIEŠENIE***

a) $2a^2 - 3x^3 - x^3 + 7a^2 = 2a^2 + 7a^2 - 3x^3 - x^3 = 9a^2 - 4x^3$
b) $x^2 + 2y - (-x^2 - y) = x^2 + 2y + x^2 + y = 2x^2 + 3y$
c) $6ab - (7ab + 3a - b) = 6ab - 7ab - 3a + b = - ab - 3a + b$

### *ÚLOHA* 3

Vypočítajte: a) $9a - (8 - 6a)$  c) $(5m - 6) - 8m + 3m - (9m - 8)$
b) $8x + (4x + 6) - (9x - 2)$  d) $4xy - [-(xy + 1) + (xy - 1)]$

### *ÚLOHA* 4

a) Vypočítajte $4z - (3x + 8y + z - 1) + (-3y + x) - (x + 4y) - 1$.
b) Dosaďte do pôvodného výrazu aj do výsledku $x = 0{,}5$; $y = 2$; $z = \frac{1}{2}$.
c) Zvoľte iné hodnoty pre $x$, $y$, $z$ a dosaďte ich znovu do pôvodného výrazu aj do výsledku.

### *ZOPAKUJME SI*

***Násobenie výrazov***

Súčin dvoch výrazov je výraz, ktorý dostaneme tak, že každý člen prvého výrazu násobíme postupne každým členom druhého výrazu a takto vzniknuté súčiny sčítame.

Súčin mocnín tej istej premennej umocníme súčtom exponentov.

$3x^2 . 4x^3 = 3 . 4x^{2+3} = 12x^5$

### *PRÍKLAD* 2

Vypočítajte

a) $x. (x + 5)$  b) $-3y. (2a - 5y)$  c) $(a + b) . (x - y)$  d) $(5a^3 + a^2) . (a - 7)$

### *RIEŠENIE*

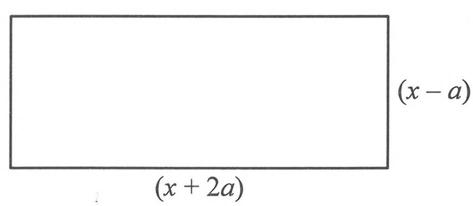
a) $x . (x + 5) = x^2 + 5x$
b) $-3y . (2a - 5y) = -6ay + 15y^2$
c) $(a + b) . (x - y) = ax + bx - ay - by$
d) $(5a^3 + a^2) . (a - 7) = 5a^4 + a^3 - 35a^3 - 7a^2 = 5a^4 - 34a^3 - 7a^2$

### *ÚLOHA* 5

Vypočítajte a) $x . (x + 2) + y . (y - 3)$  c) $(2a - 3b) . (a + b - 1)$
b) $2x . 3x^2 + x . (x^2 - 4)$  d) $(m + n) . (-m) + (m - n -1)(n + 1)$

### *ÚLOHA* 6

Akému výrazu sa rovná obsah obdĺžnika na obrázku?




### *ZOPAKUJME SI*

***Úprava výrazu na súčin***

Pred zátvorku môžeme vyňať:

- najväčší spoločný násobok všetkých členov výrazu
- dvojčlen, ktorého násobky sa vo výraze nachádzajú.

V zátvorke zostanú členy, ktoré sme vyňatým členom alebo výrazom vydelili.

**PRÍKLAD 3**

Upravte na súčin výrazy:

a) $4x^2 + 40ax$  b) $-5a - 25ab$  c) $3(x - 1) + 4x(x - 1)$  d) $3u + 3 + uv + v$

**RIEŠENIE**

Roman si rozklady zapisuje postupne:

a) $4x^2 + 40ax = 4x \cdot x + 4x \cdot 10a = 4x(x + 10a)$

b) $-5a - 25ab = -5a \cdot 1 - 5a \cdot 5b = -5a(1 + 5b)$

c) $3(x - 1) + 4x(x - 1) = (x - 1)(3 + 4x)$

d) $3u + 3 + uv + v = 3(u + 1) + v(u + 1) = (u + 1)(3 + v)$

**ÚLOHA 7**

Vyjmite pred zátvorku:

a) z výrazu $27a^3 - 18a$ jednočlen $9a$

b) z výrazu $-11xy - 44zy$ jednočlen $-11y$;

c) z výrazu $6a(b - 1) - 4b(b - 1)$ dvojčlen $(b - 1)$

d) z výrazu $xy(a + 2b) + x^2(a + 2b)y$ dvojčlen $(a + 2b)$

**ÚLOHA 8**

Upravte na súčin výrazy:

a) $a^3 + ab^3$  b) $b^5 - b^2$  c) $6a^2b - 3a^2b^2$  d) $3a^3b^2 - 9a^4b^3 + 6a^5b^5$

O správnosti sa presvedčte dosadením: $a = -1$; $b = 2$.

**ÚLOHA 9**

Upravte na súčin výrazy:

a) $5ax + 25a^2x + 6by + 30aby$  b) $10ax + 2ay + 15bx + 3by$ c) $ax - ay + bx - by$

O správnosti sa presvedčte roznásobením výsledku.

**PRÍKLAD 4**

Upravte na súčin výraz $xy + 3y - x - 3$.

**RIEŠENIE**

Peter postupuje takto:

Z prvých dvoch členov výrazu vyjme ***y***.

$xy + 3y - x - 3 = y(x + 3) - x - 3 =$  z výrazu $-x - 3$ vyjme $(-1)$

$= y(x + 3) - 1 \cdot (x + 3) =$  z oboch súčinov vyjme dvojčlen $(x + 3)$

$= (x + 3) \cdot (y - 1)$

**ÚLOHA 10**

Upravte na súčin

a) $cy - dy - c + d$  b) $ab - b - a^2 + a$  c) $mk + 7k - pm - 7p$  d) $2a - 6 + 3b - ba$

***ZOPAKUJME SI***

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

11

***ÚLOHA***

Pokúste sa výsledok povedať spamäti:

a) $(x + y)^2$ b) $(c + 2d)^2$ c) $(z - u)^2$ d) $(5a - b)^2$ e) $(m + n)(m - n)$ f) $(b + 4)(b - 4)$

[5]

***PRÍKLAD***

Upravte na súčin pomocou vzorcov. Overte dosadením $x = 2$; $y = -1$

a) $x^2 + 8x + 16$ b) $4x^2 - 20x + 25$ c) $x^2 - 49y^2$

***RIEŠENIE***

Adam si pomáha vhodným rozkladom koeficientov.

a) $x^2 + 8x + 16 = x^2 + 2 \,.\, 4x + 4^2 = (x + 4)^2 = (x + 4).\,(x + 4)$

Skúška: $x = 2$

$x^2 + 8x + 16 = 2^2 + 8 \,.\, 2 + 16 = 4 + 16 + 16 = 36$

$(x + 4)^2 = (2 + 4)^2 = 6^2 = 36$

$36 = 36$ Výraz sme upravili správne.

b) $4x^2 - 20x + 25 = (2x)^2 - 2 \,.\, 2x \,.\, 5 + 5^2 = (2x - 5)^2 = (2x - 5) \,.\, (2x - 5)$

Skúšku pre $x = 2$ vykonajte sami.

c) $x^2 - 49y^2 = x^2 - (7y)^2 = (x + 7y) \,.\, (x - 7y)$

Skúšku pre $x = 2$; $y = -1$ vykonajte sami.

12

***ÚLOHA***

Upravte na súčin pomocou vzorcov. Zvoľte si ľubovoľné hodnoty premenných a výsledok overte.

a) $1 + 4a + 4a^2$ b) $a^2 + 4b^2 + 4ab$ c) $121 - 44x + 4x^2$ d) $9a^2 - 12ab + 4b^2$ e) $y^2 - 9x^2$ f) $100 - z^2$

[6]

***PRÍKLAD***

Upravte na súčin: a) $16a - a^3$ b) $(3x + y)^2 - z^2$

***RIEŠENIE***

a) Juraj z výrazu $16a - a^3$ najskôr vyjme premennú $a$.

$16a - a^3 = a \,.\, (16 - a^2) =$ výraz $(16 - a^2)$ rozloží podľa vzorca

$= a \,.\, (4 + a)(4 - a)$ $(a^2 - b^2) = (a + b)(a - b)$

b) Výraz $(3x + y)^2 - z^2$ je zápisaný v tvare rozdielu druhých mocnín, platí:

$$\underbrace{(3x + y)^2}_{a} - \underbrace{(z)^2}_{b} = \underbrace{(3x + y + z)}_{a+b}\ \underbrace{(3x + y - z)}_{a-b}$$

Juraj zapíše

$(3x + y)^2 - z^2 = (3x + y + z) \,.\, (3x + y - z)$

***ÚLOHA*** 13

Rozložte na súčin podľa vzorca $a^2 - b^2$.

a) $(x - y)^2 - z^2$ b) $(3x - 2)^2 - y^2$ c) $(3 - 4x)^2 - 81x^2$ d) $81 - (y - 2)^2$

***PRÍKLAD*** 7

Výraz $2y^2 + 3y + 1$ upravte na súčin. Overte pre $y = 5$.

***RIEŠENIE***

Zdá sa, že sa z výrazu nedá nič vyňať ani rozložiť podľa vzorcov. Jana skúsi rozpísať člen $3y$:

$$2y^2 + 3y + 1 = 2y^2 + \underbrace{2y + y}_{3y} + 1 = 2y(y + 1) + y + 1 = (y + 1)(2y + 1)$$

*Skúška:* $y = 5$

$2y^2 + 3y + 1 = 2 \,.\, 5^2 + 3 \,.\, 5 + 1 = 2 \,.\, 25 + 15 + 1 = 50 + 16 = 66$

$(y + 1)(2y + 1) = (5 + 1) \,.\, (2 \,.\, 5 + 1) = 6 \,.\, 11 = 66$

$66 = 66$ Výraz sme na súčin rozložili správne.

***ÚLOHA*** 14

Nasledujúce výrazy rozložte na súčin:

a) $3a^2 - 2a - 1$ (upravte: $-2a = -3a + a$)

b) $9x^2 - 3x - 2$ (upravte: $-3x = -6x + 3x$)

c) $3y^2 + 5y - 2$ (upravte: $5y = 6y - y$)

***CVIČENIA***

**1.** Zapíšte ako výraz: a) dve pätiny čísla z

b) trojnásobok čísla $k$ zväčšený o päť

c) číslo dvakrát menšie ako z zmenšené o jednu tretinu

**2.** Vyjadrite slovne:

a) $5z - 3x$ b) $\frac{x}{2} - \frac{7}{3}$ c) $\frac{2}{7}(s + 3p)$ d) $(x + y)^2$

**3.** Zjednodušte:

a) $3a^2 - (2a + 1) - (3a^2 + 6)$

b) $-(3x + 6y - 2) + x - (y + 3)$

c) $3y - 3xy -5(xy - 2y^2) - (y^2 - x^2)$

**4.** Vypočítajte a overte pre dané hodnoty premenných:

a) $0{,}1c - 0{,}2 + (0{,}3c - 0{,}4) + 0{,}5c - 0{,}6$; $c = 2$

b) $0{,}15 + (0{,}25d - 0{,}35) - 0{,}25d - (0{,}5 - 0{,}3d)$; $d = -5$

**5.** Upravte:

a) $3(y - 1) - 2(y + 1) + 4(3y - 8)$ b) $(15{,}7y - 4y + 2) \,.\, 3 - (- 10{,}5y + 7)$

**6.** Vynásobte a overte dosadením:

a) $(-5a^3 + 2a - 1) \,.\, (-2a)$ $a = -1$ b) $(-x^2 + 2x + 3) . (-3x)$ $x = \frac{1}{2}$

**7.** Vynásobte a upravte:

a) $(2a - 1)(1 - a) - (2a + 1)(5 - a)$ b) $5(k - 2)(k - 1) - 5(k - 3)(k + 2)$

**8.** Vyjadrite povrch a objem kvádra s rozmermi:

a) $a, a-1, a+2$ a overte pre $a = 6$ cm

b) $a-1, a, a+1$ a overte pre $a = \frac{10}{3}$ m

**9.** Umocnite:

a) $(x + 2)^2$ b) $(4d + 1)^2$ c) $(8 - x)^2$ d) $(ab - 4c)^2$ e) $(-a + b)^2$ f) $(-4m + 5)^2$

**10.** Vypočítajte podľa vzorca $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

a) 16 . 24 b) 22 . 38 c) 53 . 67 d) 81 . 99

**11.** Upravte na súčin:

a) $10x + 5y^2$ b) $24x^3y^2 - 120x^2y$ c) $144a^2 - 12ab$ d) $18x^4 - 24x^3$

**12.** Upravte na súčin a vykonajte skúšku roznásobením:

a) $a(x + 1) - (x + 1)$

b) $5b(4d - 3) + 4d - 3$

c) $d^2(2a - 7) - (7 - 2a)$

d) $2c(a - 2) - 2 + a$

e) $a^2(12 - b^2) + (12 - b^2)x^2$

f) $8x^2(5 - y) - 5 + y$

**13.** Upravte na súčin pomocou vzorcov:

a) $1 + 2x + x^2$

b) $4c^2 + 9d^2 - 12cd$

c) $y^2 - 4y + 4$

d) $z^3 - 6z^2 + 9z$

e) $r^2 - x^2$

f) $x^3 - x$

g) $4 - (x - 1)^2$

h) $(y - 2)^2 - 16$

**14.** Upravte na súčin rozpísaním vyznačeného člena na súčet alebo rozdiel:

a) $4b^2 - 3b - 1$ b) $10u^2 - 13u + 3$ c) $2x^4 + x^2 - 1$ d) $6c^2 - 7c - 5$

## 2.2 Lomené výrazy

***PROBLÉM***

V triede je $n$ žiakov. Z nich štyria sa nezúčastnili lyžiarskeho kurzu. Vedúci lyžiarskeho kurzu vyzbieral x korún. Koľko korún zaplatil každý účastník kurzu? Výsledok overte pre $n = 21$, $x = 13\,600$.

***RIEŠENIE***

Roman zapíše:

počet žiakov v triede . . . $n$
počet účastníkov lyž. kurzu . . . $n - 4$
vyzbieraná suma . . . x Sk
jeden účastník zaplatil $\frac{x}{n-4}$ Sk

Roman uvažuje: aby úloha mala zmysel, mali by byť $n$ aj premenná $x$ prirodzené čísla, pričom $n > 4$, $x > 0$.

Roman úlohu rieši pre dané čísla:

počet žiakov v triede . . . 21
počet účastníkov lyž. kurzu . . . 21 - 4 = 17
vyzbieraná suma . . . 13 600 Sk
jeden účastník zaplatil . . . 13 600 : 17 = 800 Sk

Roman výsledok overí dosadením do výrazu:

$\frac{x}{n-4} = \frac{13\,600}{21-4} = \frac{13\,600}{17} = 800.$ Tento výsledok Roman získal aj pri riešení problému s číslami. Výraz teda zostavil správne.

Výraz, v ktorom sa v menovateli zlomku nachádza jedna alebo viac premenných nazývame **lomený výraz.**

Lomené výrazy: $\frac{x}{n-4}$; $\frac{5}{x}$; $\frac{a}{x-y}$

Lomený výraz má zmysel iba vtedy, ak je výraz v jeho menovateli rôzny od nuly.

***POZNÁMKA***

*Uvedomte si, že:*

- *lomeným výrazom je zapísané delenie. Už z piateho ročníka vieme, že nulou nikdy nedelíme!*
- *lomený výraz je zlomok. Zlomok má zmysel iba vtedy, ak sa jeho menovateľ nerovná nule.*

[1] ***PRÍKLAD***

Určte, kedy majú dané výrazy zmysel (kedy je ich menovateľ rôzny od nuly).

a) $\frac{x^2}{5}$ b) $\frac{1}{a}$ c) $\frac{5x}{y}$ d) $\frac{k+1}{m+2}$ e) $\frac{c+6}{d-e}$

***RIEŠENIE***

a) Pre $\frac{x^2}{5}$ má platiť $5 \neq 0$. Platí vždy, výraz má teda zmysel pre každé reálne číslo.

b) Pre $\frac{1}{a}$ má platiť $a \neq 0$. Výraz má zmysel pre čísla $a \neq 0$.

c) Pre $\frac{5x}{y}$ má platiť $y \neq 0$. Výraz má zmysel pre čísla $y \neq 0$.

d) Pre $\frac{k+1}{m+2}$ má platiť $m + 2 \neq 0$, teda $m \neq -2$. Výraz má zmysel pre čísla $m \neq -2$.

e) Pre $\frac{c+6}{d-e}$ má platiť $d - e \neq 0$, odtiaľ $d \neq e$. Výraz má zmysel pre čísla $d \neq e$.

1 ***ÚLOHA***

Prečo sa čitateľ lomeného výrazu môže rovnať nule? Odôvodnite, uveďte príklad.

**2**

***ÚLOHA***

Do výrazov a) $\frac{4}{n-1}$; b) $\frac{3x}{x+2}$; c) $\frac{k}{3k-4}$; d) $\frac{1-y}{1+y}$ dosadzujte za premenné postupne čísla: $-2$; $-1$; $-\frac{1}{2}$; 0; $\frac{4}{3}$; 1; 2 a zistite, pre ktoré z nich výrazy nemajú zmysel.

**3**

***ÚLOHA***

Určte, kedy majú dané výrazy zmysel:

a) $\frac{k-6}{6}$ b) $\frac{x-3}{x-2}$ c) $\frac{ax}{2-a}$ d) $\frac{b+c}{a+b}$ e) $\frac{5-r}{2r-s}$

**[2]**

***PRÍKLAD***

Nájdite podmienky, pri ktorých nemá výraz $\frac{x+2}{x^2-9}$ zmysel.

***RIEŠENIE***

Peter uvažuje: Daný výraz nemá zmysel, keď sa menovateľ výrazu $\frac{x+2}{x^2-9}$ rovná nule, t. j. ak platí: $x^2 - 9 = 0$.

Výraz $x^2 - 9$ viem rozložiť na súčin podľa vzorca $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.
Platí $x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x + 3) . (x - 3)$.

Peter rieši ďalej: $(x + 3) . (x - 3) = 0$.

Kedy sa súčin týchto dvoch výrazov rovná nule? Vtedy, ak sa prvý výraz rovná nule, alebo ak sa druhý výraz rovná nule. Platí teda:

$$x + 3 = 0 \text{ alebo } x - 3 = 0,$$
$$\text{z čoho } x = -3 \text{ alebo } x = 3$$

Lomený výraz $\frac{x+2}{x^2-9}$ Peter upravil na tvar $\frac{x+2}{(x+3)(x-3)}$ a určil, že výraz nemá zmysel vtedy, ak $x = -3$ alebo $x = 3$.

Zapíšeme: Výraz $\frac{x+2}{x^2-9}$ nemá zmysel pre $x = \pm 3$.

Pri určovaní podmienok riešiteľnosti lomeného výrazu, ktorý má v menovateli súčin dvoch alebo viacerých výrazov využívame vetu:

Súčin dvoch alebo viacerých činiteľov sa rovná nule,
ak sa rovná nule aspoň jeden činiteľ.

**[3]**

***PRÍKLAD***

Určte, pre ktoré hodnoty premennej nemajú zmysel nasledujúce výrazy:

a) $\frac{1}{a+a^2}$ b) $\frac{2}{(x-1)(x+1)}$ c) $\frac{3}{4m^2+12mn+9n^2}$ d) $\frac{2}{d^2-b^2}$

***RIEŠENIE***

a) Vo výraze $\frac{1}{a+a^2}$ upravíme menovateľa $a + a^2 = a . (1 + a)$.

Výraz nemá zmysel, ak $a . (1 + a) = 0$, teda ak

$$a = 0, \text{ alebo } 1 + a = 0, \text{ z čoho } a = -1.$$

Výraz $\frac{1}{a+a^2}$ nemá zmysel pre $a = 0$ alebo $a = -1$.

b) Výraz $\frac{2}{(x-1)(x+1)}$ nemá zmysel, ak $(x-1)(x+1)=0$, t. j. ak

$x-1=0$, alebo $x+1=0$, z toho

$x=1$ alebo $x=-1$,

čo môžeme stručne zapísať: $x=\pm 1$

Daný výraz nemá zmysel pre $x=\pm 1$.

c) Vo výraze $\frac{3}{4m^2+12mn+9n^2}$ najprv upravíme menovateľa

$$4m^2+12mn+9n^2=(2m+3n)^2=(2m+3n)(2m+3n)$$

Výraz nemá zmysel, ak $2m+3n=0$, z čoho

$$2m=-3n$$

$$m=-\frac{3}{2}n$$

Daný výraz nemá zmysel pre $m=-\frac{3}{2}n$.

d) Vo výraze $\frac{2}{d^2-b^2}$ upravíme menovateľa: $d^2-b^2=(d+b)(d-b)$

Výraz nemá zmysel, ak $(d+b)(d-b)=0$, t. j. ak

$d+b=0$ alebo $d-b=0$, teda

$d=-b$ alebo $d=b$,

čo zapíšeme stručne: $d=\pm b$

Výraz $\frac{2}{d^2-b^2}$ nemá zmysel pre $d=\pm b$.

***POZNÁMKA***

*Pri riešení úloh s lomenými výrazmi určujeme **vždy podmienky riešiteľnosti** daných výrazov.*
*Rozlišujte pozorne znenie úlohy:*
*výraz **nemá zmysel** (nie je riešiteľný pre ... )* → *v podmienkach je znamienko =*
*výraz **má zmysel** (je riešiteľný pre... )* → *v podmienkach je znamienko ≠*

**4** ***ÚLOHA***

Určte, kedy výrazy nemajú zmysel. Ak je to potrebné, upravte menovatele výrazov na súčin.

a) $\frac{1}{3x+6x^2}$  b) $\frac{x+1}{(y-1)(1+y)}$  c) $\frac{5}{6u^2-24}$  d) $\frac{16y^2}{(x-2)(x-3)}$

**5** ***ÚLOHA***

Výraz $\frac{x-2}{y-xy}$ nemá zmysel práve vtedy, ak:

**A** x = 2  **B** x = 0 a súčasne y = 0  **C** x ≠ 1 a súčasne y ≠ 0  **D** x = 1 alebo y = 0  **E** x ≠ 1

Vyberte správnu odpoveď.

**[4]** ***PRÍKLAD***

Určte podmienky riešiteľnosti výrazov: a) $\frac{1}{x^2+6}$  b) $\frac{x}{x^2+y^2}$  c) $\frac{a}{x^2+y^2+2}$

***RIEŠENIE***

Juraj uvažuje:

a) Lomený výraz $\frac{1}{x^2+6}$ má zmysel pre ľubovoľné číslo x, pretože:

$x^2$ je vždy nezáporné číslo (platí $x^2 \geq 0$) a teda, pre výraz v menovateli platí:
$x^2+6>0$ pre každé reálne číslo x.

b) Lomený výraz $\frac{x}{x^2+y^2}$ nemá zmysel len ak súčasne $x = y = 0$.

V ostatných prípadoch vždy platí: $x^2 + y^2 > 0$,

c) Lomený výraz $\frac{a}{x^2+y^2+2}$ má zmysel pre ľubovoľné $x$ a $y$.

Platí $x^2 + y^2 > 0$ a teda $x^2 + y^2 + 2 > 0$ pre ľubovoľné reálne čísla $x, y$.

6

***ÚLOHA***

Určte podmienky riešiteľnosti výrazov a vypočítajte ich hodnoty, ak $a = 2$, $b = -4$.

a) $\frac{3}{a^2+8}$ b) $\frac{10}{a^2+b^2}$ c) $\frac{-11}{a^2+b^2+4}$

[5]

***PRÍKLAD***

Kedy sa lomený výraz $\frac{2x+9}{7x-3}$ rovná nule? Pre aké $x$ nemá daný výraz zmysel?

***RIEŠENIE***

Petra si uvedomí: menovateľ lomeného výrazu musí byť vždy rôzny od nuly. Rozhoduje teda hodnota čitateľa lomeného výrazu. Aby sa lomený výraz $\frac{2x+9}{7x-3}$ rovnal nule, musí platiť:

$$2x + 9 = 0$$
$$2x = -9$$
$$x = -\frac{9}{2}$$

Výraz $\frac{2x+9}{7x-3}$ sa rovná nule, ak $x = -\frac{9}{2}$.

Výraz $\frac{2x+9}{7x-3}$ nemá zmysel, ak $7x - 3 = 0$, teda ak $x = \frac{3}{7}$.

***ÚLOHA***

Daný je výraz: $\frac{8x-5}{3x+1}$. Určte:

a) kedy výraz nemá zmysel,

b) pre ktoré x sa výraz rovná nule,

c) hodnotu výrazu pre $x = \frac{2}{3}$.

***CVIČENIA***

**1.** Určte, kedy majú dané výrazy zmysel:

a) $\frac{a}{5}$ d) $\frac{-1}{a^2}$ g) $\frac{1}{25x^2-20xy+4y^2}$

b) $\frac{b}{xy}$ e) $\frac{1}{b+1}$ h) $\frac{3}{a^2+9a}$

c) $\frac{-2}{3ab}$ f) $\frac{2n}{m^2-n^2}$ i) $\frac{a}{(a+b)^2}$

**2.** Zvoľte pre jednotlivé výrazy také tri hodnoty premennej, pre ktoré majú dané výrazy zmysel:

a) $\frac{1}{a-5}$ b) $\frac{3n}{(x-1)^2}$ c) $\frac{2}{x^2}$

**3.** Nájdite podmienky, pri ktorých má výraz $\frac{t+1}{t^2-4}$ zmysel.

**4.** Pre ktoré z daných hodnôt nemá lomený výraz $\frac{1}{1-x}$ zmysel:
A x = 1 B x = 0 C x = -1

**5.** Vyberte správnu odpoveď: Výraz $\frac{1-x}{x^2+x}$ nemá zmysel, ak:
A x = 1 B x = 0 C x = 0 alebo x = -1 D x = -1 E x ≠ 0

**6.** Zlomok $\frac{x+y}{x^2+y^2+1}$ má vždy zmysel. Odôvodnite správnosť tohto tvrdenia.

**7.** Daný je výraz $\frac{x+4}{x-3}$. Určte hodnotu premennej, pre ktorú sa daný výraz rovná 0.

**8.** Vyberte správnu odpoveď: Výraz $\frac{x-3}{x-3x^2}$ sa rovná nule, ak:
A x = 3 B x = 0 C x ≠ 0 D x = -3 E x ≠ 3

**9.** Lomené výrazy $\frac{8}{a+b}, \frac{-2}{x^2+y}, \frac{1}{d+e+f}$ sú, pre prípustné hodnoty premenných, vždy rôzne od nuly. Odôvodnite prečo.

## 2.3 Krátenie a rozširovanie lomených výrazov

***ZOPAKUJME SI***

Zlomky vieme **krátiť** na základný tvar:

$$\frac{6}{8}=\frac{6:2}{8:2}=\frac{3}{4} \qquad -\frac{12}{15}=-\frac{12:3}{15:3}=-\frac{4}{5}$$

Zlomok krátime tak, že čitateľa aj menovateľa vydelíme tým istým číslom rôznym od nuly.
Ak také číslo neexistuje, hovoríme, že zlomok je v **základnom tvare.**
Podobne ako zlomky krátime aj lomené výrazy.

***PRÍKLAD***

Kráťte výrazy a určte podmienky, za ktorých výrazy nemajú zmysel.

a) $\frac{3abc}{6a^2}$ b) $\frac{4a^2+8ab}{8ab}$ c) $\frac{10r-10s}{r^2-s^2}$

***RIEŠENIE***

a) $\frac{3abc}{6a^2}=\frac{3.a.b.c}{3.2.a.a}=\frac{b.c}{2.a}=\frac{bc}{2a}$ výraz nemá zmysel, pre $a = 0$

b) $\frac{4a^2+8ab}{8ab}=\frac{4a(a+2b)}{8ab}=\frac{4.a.(a+2b)}{4.2.a.b}=\frac{a+2b}{2b}$ výraz nemá zmysel, pre $a = 0$, $b = 0$

c) $\frac{10r-10s}{r^2-s^2}=\frac{10(r-s)}{(r+s)(r-s)}=\frac{10}{r+s}$ výraz nemá zmysel, pre $r = \pm$ s

***Krátenie lomeného výrazu***

**Krátiť** lomený výraz znamená **deliť** jeho **čitateľa aj menovateľa** tým istým **číslom** alebo **výrazom** rôznym od nuly.

Pri krátení lomených výrazov najskôr upravíme **čitateľa aj menovateľa na súčin** vynímaním alebo pomocou vzorcov.

### *ÚLOHA*

**1** Kráťte nasledujúce lomené výrazy a určte podmienky, kedy tieto výrazy nemajú zmysel: a) $\frac{2a}{2b}$ b) $\frac{9b}{9v^2}$ c) $\frac{zx}{xz}$ d) $\frac{9ab}{6a^2}$ e) $\frac{3p}{6p^3q}$ f) $\frac{(2x)^2}{2x^2}$

### *ÚLOHA*

**2** Upravte čitateľa aj menovateľa na súčin vyňatím vhodného člena, a potom výrazy kráťte. Určte podmienky ich riešiteľnosti:

a) $\frac{6ab}{4a^2+8ab}$ c) $\frac{ab^2+b^2}{b^2}$ e) $\frac{3a-6}{6a-6}$

b) $\frac{c^4d^3+c^3d^4}{c^3d^4}$ d) $\frac{5m+10n}{3m+6n}$ f) $\frac{x^2-x}{x^2+x}$

### *ÚLOHA*

**3** Upravte čitateľa aj menovateľa na súčin použitím vhodného vzorca, a potom výrazy kráťte. Určte podmienky riešiteľnosti:

a) $\frac{a-b}{a^2-b^2}$ b) $\frac{4r-4s}{2r^2-4rs+2s^2}$ c) $\frac{25y^2-30yx+9x^2}{5y-3x}$ d) $\frac{4m^2-n^2}{4m^2+4mn+n^2}$

### *ÚLOHA*

**4** Zjednodušte krátením a overte pre $x = 2$, y = -2.

a) $\frac{(2x-1)(x+2)}{3x+1-(2x-1)}$ b) $\frac{6x^2+12xy+6y^2}{3x^2-3y^2}$ c) $\frac{(y^2-25)(y^2-4y+4)}{(2-y)(10-2y)}$

### *ZOPAKUJME SI*

Zlomky vieme rozširovať:

$$\frac{3}{2}=\frac{3\,.\,3}{2\,.\,3}=\frac{9}{6} \qquad -\frac{3}{4}=\frac{-3\,.\,10}{4\,.\,10}=-\frac{30}{40}$$

Zlomok rozšírime tak, že čitateľa aj menovateľa zlomku násobíme tým istým číslom rôznym od nuly.

Podobne, ako zlomky, rozširujeme aj lomené výrazy.

### *PRÍKLAD*

**[2]** Rozšírte:

a) výraz $\frac{3a}{a+1}$ výrazom $2a$; b) výraz $\frac{1}{b^2}$ číslom 3; c) výraz $\frac{a+b}{a-b}$ výrazom $a-b$.

Zapíšte podmienky, kedy je výraz platný.

### *RIEŠENIE*

a) $\frac{3a}{a+1}=\frac{3a\,.\,2a}{(a+1)\,.\,2a}=\frac{6a^2}{2a^2+2a}$ $\quad a \neq 0,\ a \neq -1$

b) $\frac{1}{b^2}=\frac{1\,.\,3}{b^2\,.\,3}=\frac{3}{3b^2}$ $\quad b \neq 0$

c) $\frac{a+b}{a-b}=\frac{(a+b)\,.\,(a-b)}{(a-b)\,.\,(a-b)}=\frac{a^2-b^2}{a^2-2ab+b^2}$ $\quad a \neq b$

***Rozšírenie lomeného výrazu***

Rozšíriť lomený výraz znamená vynásobiť čitateľa aj menovateľa tým istým číslom alebo výrazom rôznym od nuly.

Podmienky riešiteľnosti určujeme z menovateľa upraveného na súčin.

**5** ***ÚLOHA***

Dané výrazy rozšírte výrazom uvedeným v zátvorke. Určte podmienky, kedy výrazy nemajú zmysel.

a) $\frac{2}{s}$ $(4)$ c) $\frac{3p}{q}$ $(3p^2q)$ e) $\frac{x}{x+1}$ $(-1)$

b) $\frac{x}{2xy}$ $(x)$ d) $\frac{1}{2a}$ $(-3a)$ f) $\frac{a}{a+b}$ $(a+b)$

**6** ***ÚLOHA***

Doplňte čitateľa alebo menovateľa tak, aby bola rovnosť platná:

a) $\frac{3}{6r}=\frac{\square}{12r}$ b) $\frac{12}{8}=\frac{24x}{\square}$ c) $\frac{2c}{a^2b}=\frac{\square}{a^3b^3}$

**7** ***ÚLOHA***

Doplňte lomený výraz tak, aby platila rovnosť: $\frac{1-b}{1+b}=\frac{1-b^2}{\square}$

**8** ***ÚLOHA***

Upravte lomené výrazy tak, aby sa ich menovateľ rovnal výrazu v zátvorke.

a) $\frac{p}{-p-1}$, $(p+1)$ b) $\frac{2}{a-1}$, $(a^2-1)$ c) $\frac{2a+b}{a+b}$, $(a^2+2ab+b^2)$ d) $\frac{3b}{a^2+b^2}$, $(4a^2+4b^2)$

## ***CVIČENIA***

V každom cvičení uveďte podmienky riešiteľnosti lomených výrazov.

**1.** Zjednodušte krátením:

a) $\frac{8xy}{12x^2y^2}$ b) $\frac{6uv}{4u^2+12uv}$ c) $\frac{x^2y^2+x^3y^2}{x^2y^2}$ d) $\frac{12x+4y}{3x+y}$

**2.** Kráťte lomené výrazy:

a) $\frac{m^4-n^4}{m^2+n^2}$ b) $\frac{x+1}{b+bx}$ c) $\frac{k^2+l^2+2lk}{l+k}$ d) $\frac{ax+bx+3a+3b}{ax+ay+bx+by}$

**3.** Upravte čitateľa aj menovateľa na súčin a kráťte:

a) $\frac{x^2-9y^2}{2x^2+6xy}$ b) $\frac{y^2-4}{y^2-4y+4}$ c) $\frac{(x-1)(x-20)}{xy-20y-x+20}$

**4.** Rozšírte dané výrazy výrazom uvedeným v zátvorke:

a) $\frac{5}{x}$, $(5y)$ c) $\frac{3x}{4y}$, $(x-1)$ e) $\frac{8k}{8k+1}$, $(k+8)$

b) $\frac{a}{3ab}$, $(2c)$ d) $\frac{z}{z+1}$, $(z-1)$ f) $\frac{l-2}{2l+4}$, $(l+2)$

**5.** Napíšte, ktorým výrazom boli rozšírené výrazy:

a) $\frac{2x}{3}=\frac{4x^2}{6x}$ c) $\frac{2q^3}{p^2}=\frac{2q^5}{p^2q^2}$ e) $\frac{2}{a+b}=\frac{2(a+b)}{a^2+ab+b^2}$

b) $\frac{v}{v+2}=\frac{2v}{2v+4}$ d) $\frac{1}{x-3}=\frac{x+3}{x^2-9}$ f) $\frac{x-y}{2x}=\frac{x^2-2xy+y^2}{2x^2-2xy}$

**6.** Rozšírte lomený výraz $\frac{a-1}{1-a}$ tak, aby sa jeho:

a) čitateľ, b) menovateľ, rovnal výrazu $a^2 - 1$.

## 2.4 Sčítanie a odčítanie lomených výrazov

***ZOPAKUJME SI***

***Sčítanie (odčítanie) zlomkov s rovnakými menovateľmi***

$$\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2+1}{4}=\frac{3}{4} \qquad \frac{4}{8}-\frac{3}{8}=\frac{4-3}{8}=\frac{1}{8}$$

Ak majú zlomky rovnaké menovatele, sčítame (odčítame) ich tak, že menovateľa odpíšeme a čitatele sčítame (odčítame).

***Sčítanie (odčítanie) zlomkov s rôznymi menovateľmi***

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{6}=\frac{2.2+1}{6}=\frac{5}{6} \qquad \frac{3}{7}-\frac{3}{14}=\frac{3.2-3}{14}=\frac{3}{14}$$

Zlomky s rôznymi menovateľmi, najskôr upravíme na rovnakého menovateľa (je ním najmenší spoločný násobok menovateľov), čitatele rozšírime a sčítame (odčítame) ich.

Podobne postupujeme aj pri sčítaní a odčítaní lomených výrazov.

***PRÍKLAD***

Vypočítajte: a) $\frac{x}{4}+\frac{2x}{4}-\frac{1}{4}$ b) $\frac{2a+b}{3x}+\frac{a-b}{3x}-\frac{(a+b)}{3x}$

***RIEŠENIE***

Výrazy majú rovnakých menovateľov. Skontrolujte výpočet.

a) $\frac{x}{4}+\frac{2x}{4}-\frac{1}{4}=\frac{x+2x-1}{4}=\frac{3x-1}{4}$

Výraz nemá v menovateli premennú, je teda platný pre ľubovoľné číslo x.

b) $\frac{2a+b}{3x}+\frac{a-b}{3x}-\frac{(a+b)}{3x}=\frac{2a+b+a-b-(a+b)}{3x}=\frac{3a-a-b}{3x}=\frac{2a-b}{3x}$

Podmienka riešiteľnosti: $x \neq 0$

Prečo je výraz *(a + b)* z čitateľa tretieho zlomku v zátvorke? Odôvodnite.

***Sčítanie o odčítanie lomených výrazov s rovnakým menovateľom***

Sčítame (odčítame) jednotlivé výrazy v čitateľoch, menovateľa odpíšeme. Určíme podmienky riešiteľnosti.

***ÚLOHA***

Sčítajte výrazy, určte podmienky ich riešiteľnosti.

a) $\frac{b}{x}+\frac{2a}{x}+\frac{c}{x}$ b) $\frac{18}{a}+\frac{2}{a}-\frac{10}{a}$ c) $\frac{6+a}{y}+\frac{2+c}{y}-\frac{a+c}{y}$

***PRÍKLAD***

Určte najmenší spoločný násobok výrazov.

a) $8m^2n^3;\ 12m^3n^2$ b) $x^2 - y^2;\ x^2 + 2xy + y^2;\ x^2 - xy$

***RIEŠENIE***

a) Riešme rozkladom na činitele:

$8m^2a^3 = 2\,.\,2\,.\,2\,.\,m\,.\,m\,.\,a\,.\,a\,.\,a$

$12m^3a^2 = 2\,.\,2\,.\,3\,.\,m\,.\,m\,.\,m\,.\,a\,.\,a$

najmenší spoločný násobok: $n\,(8m^2a^3,\ 12m^3a^2) = 2\,.\,2\,.\,2\,.\,3\,.\,m\,.\,m\,.\,m\,.\,a\,.\,a\,.\,a =$
$= 24m^3a^3$

b) Riešme úpravou jednotlivých výrazov na súčin:

$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)\,.\,(x + y)$

$x^2 - xy - x\,.\,(x - y)$

Platí: $n\,(x^2 - y^2,\ x^2 + 2xy + y^2,\ x^2 - xy) = (x + y)(x - y)(x + y)\,.\,x$

**2** ***ÚLOHA***

Nájdite najmenšie spoločné násobky výrazov:

a) $y^2 - 1;\ y + 1$ b) $k - 1;\ k + 1;\ k^2 - 1$ c ) $d^2 + d;\ d^2 - d$ d) $p - q;\ q - p$

**3** ***PRÍKLAD***

Vypočítajte. Určte podmienky riešiteľnosti nasledujúcich výrazov.

a) $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2}{x^2-1}$ b) $\dfrac{a-1}{a^2+a} - \dfrac{a+1}{a^2-a}$ c) $\dfrac{4}{r-s} - \dfrac{1}{s-r}$

***RIEŠENIE***

Riešte s Adamom, popíšte jeho úpravy:

a) $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2}{x^2-1} = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2}{(x+1).(x-1)} = \dfrac{1.(x+1)+2}{(x+1).(x-1)} = \dfrac{x+1+2}{(x+1).(x-1)} = \dfrac{x+3}{x^2-1}$

Podmienky: $x \neq \pm 1$

b) $\dfrac{a-1}{a^2+a} - \dfrac{a+1}{a^2-a} = \dfrac{a-1}{a(a+1)} - \dfrac{a+1}{a(a-1)} = \dfrac{(a-1).(a-1)-(a+1).(a+1)}{a(a+1).(a-1)} =$

$= \dfrac{a^2-2a+1-(a^2+2a+1)}{a(a+1)(a-1)} = \dfrac{a^2-2a+1-a^2-2a-1}{a(a+1)(a-1)} = \dfrac{-4a}{a(a+1)(a-1)} = -\dfrac{4}{a^2-1}$

Podmienky: $a \neq 0,\ a \neq \pm 1$

c) $\dfrac{4}{r-s} - \dfrac{1}{s-r} = \dfrac{4}{r-s} - \dfrac{1}{-(r-s)} = \dfrac{4}{r-s} + \dfrac{1}{r-s} = \dfrac{5}{r-s}$

Podmienka: $r \neq s$

***Sčítanie a odčítanie lomených výrazov s rôznymi menovateľmi***

Lomené výrazy s rôznymi menovateľmi sčítame (odčítame) tak, že ich najprv upravíme na rovnakého menovateľa, ktorým je obyčajne najmenší spoločný násobok výrazov v menovateli.

Čitatele rozšírime a sčítame (odčítame). Súčet (rozdiel) krátime, ak sa dá. Podmienky riešiteľnosti výrazu určíme zo súčinu výrazov, ktoré tvoria rovnakého menovateľa.

**[4] PRÍKLAD**

Vypočítajte a určte podmienky riešiteľnosti: $\frac{x+1}{2x-2}-\frac{x-1}{2x+2}-\frac{4x}{x^2-1}$

Správnosť riešenia overte dosadením za $x = 3$.

**RIEŠENIE**

Najskôr rozložíme jednotlivé menovatele na súčin:

$$\frac{x+1}{2x-2}-\frac{x-1}{2x+2}-\frac{4x}{x^2-1}=\frac{x+1}{2(x-1)}-\frac{x-1}{2(x+1)}-\frac{4x}{(x+1)(x-1)}$$

Určíme spoločného menovateľa: 2(x + 1)(x - 1)

Prvý výraz rozšírime výrazom (x + 1), druhý výrazom (x - 1), tretí číslom 2

$$\frac{(x+1)(x+1)}{2(x-1)(x+1)}-\frac{(x-1)(x-1)}{2(x-1)(x+1)}-\frac{4x\,.\,2}{2(x-1)(x+1)}=$$

$$=\frac{x^2+2x+1}{2(x-1)(x+1)}-\frac{x^2-2x+1}{2(x-1)(x+1)}-\frac{8x}{2(x-1)(x+1)}=\frac{x^2+2x+1-(x^2-2x+1)-8x}{2(x-1)(x+1)}=$$

$$=\frac{x^2+2x+1-x^2+2x-1-8x}{2(x-1)(x+1)}=\frac{-4x}{2(x-1)(x+1)}=\frac{-2\,.\,2x}{2(x-1)(x+1)}=\frac{-2x}{(x-1)(x+1)}=\frac{-2x}{x^2-1}$$

Podmienky riešiteľnosti: $x \neq \pm 1$

Overenie pre $x = 3$:

$$\frac{x+1}{2x-2}-\frac{x-1}{2x+2}-\frac{4x}{x^2-1}=\frac{3+1}{2\,.\,3-2}-\frac{3-1}{2\,.\,3+2}-\frac{4\,.\,3}{3^2-1}=\frac{4}{4}-\frac{2}{8}-\frac{12}{8}=1-\frac{14}{8}=\frac{8-14}{8}=$$

$$=-\frac{6}{8}=-\frac{3}{4}$$

$$\frac{-2x}{x^2-1}=\frac{-2\,.\,3}{3^2-1}=\frac{-6}{9-1}=\frac{-6}{8}=-\frac{3}{4}$$

Platí $-\frac{3}{4}=-\frac{3}{4}$; príklad sme vyriešili správne.

**3 ÚLOHA**

Vypočítajte a uveďte podmienky, kedy majú výrazy zmysel. Správnosť výpočtu overte pre dané hodnoty premenných.

a) $\frac{1}{a+1}-\frac{2a}{a^2-1}$  $a=-2$

b) $\frac{2x}{x^2-4}-\frac{1}{x+2}$  $x=\frac{1}{2}$

c) $\frac{x}{x+2y}+\frac{x-2y}{x^2-4y^2}$  $x=1, y=0$

d) $\frac{r+1}{r^2-2r}+\frac{r+1}{r^2+2r}-\frac{2r}{r^2-4}$  $r=3$

**[5] PRÍKLAD**

Vypočítajte: $a+2+\frac{3}{a+1}$

**RIEŠENIE**

Jakub výraz upravuje, popíšte jeho úpravy.

$$a+2+\frac{3}{a+1}=\frac{a+2}{1}+\frac{3}{a+1}=\frac{(a+2)(a+1)}{a+1}+\frac{3}{a+1}=\frac{a^2+a+2a+2+3}{a+1}=\frac{a^2+3a+5}{a+1}$$

Podmienka: $a \neq -1$

**4 ÚLOHA**

Vypočítajte, určte podmienky riešiteľnosti a výpočet overte pre vhodné hodnoty:

a) $y+\frac{y-3}{5}$  b) $\frac{x+y}{3}+x$  c) $x+1-\frac{1}{1-x}$  d) $x-\frac{x^2}{x-1}$

## *CVIČENIA*

1. Vypočítajte a určte podmienky riešiteľnosti:

a) $\frac{4}{a}+\frac{2}{a}$ b) $\frac{8}{x}-\frac{7}{x}$ c) $\frac{5}{a}-\frac{v}{a}$ d) $\frac{a}{x}+\frac{a}{x}$ e) $\frac{3}{a}+\frac{4a}{b}$ f) $\frac{4}{2x}-\frac{3}{2x}-\frac{1}{2x}$

**2.** a) $\frac{a+1}{x+8}+\frac{3a}{x+8}+1$ b) $\frac{a+b}{2x-3}-\frac{a-b}{2x-3}$ c) $\frac{x+5}{1+4y}+\frac{3}{1+4y}$ d) $\frac{r+2}{2-p}-\frac{r+1}{2-p}$

**3.** Určte najmenšie spoločné násobky výrazov.

a) $x^2 - y^2$, $x^2 + 2xy + y^2$

b) $3a - 36$, $a^2 - 2ab + b^2$

c) $a^2 - 9$, $5a + 15$

Riešte nasledujúce cvičenia, vždy určte aj podmienky riešiteľnosti výrazov.

**4.** a) $\frac{b}{4}+\frac{b}{8}$ b) $\frac{z^2}{z}-\frac{3z^2}{5}$ c) $\frac{2}{m-n}+\frac{1}{n}$ d) $\frac{3}{a}-\frac{4}{b}$ e) $\frac{3}{r}+\frac{1}{2r}$ f) $\frac{2}{xy}-\frac{3}{x}$

**5.** a) $\frac{x+2}{2+x}+\frac{2-x}{x-2}$ b) $\frac{r^2-9}{r+1}-\frac{r^2-1}{r-3}$

**6.** a) $\frac{x}{y-1}-\frac{x+y}{2-2y}$ d) $\frac{7n^2}{n^2-9}+\frac{5n}{n-3}+\frac{n}{n+3}$

b) $\frac{2}{p-q}-\frac{4}{p^2-q^2}$ e) $\frac{r+s}{r}-\frac{s}{r-s}+\frac{rs}{r^2-rs}$

c) $\frac{a-b}{2a+2b}+\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$ f) $\frac{7}{8m^2-18}-\frac{1}{2m^2+3m}-\frac{1}{4m-6}$

**7.** a) $-\frac{a}{b}+2-\frac{b}{a}$ d) $\frac{r+1}{r^2-2r}+\frac{r+1}{r^2+2r}-\frac{2r}{r^2-4}$

b) $\frac{a+3}{a^2-1}-\frac{a+1}{a^2+a}$ e) $\frac{(a-1)a}{a^2-25}+\frac{a-2}{5-a}-\frac{a-3}{a+5}$

c) $\frac{5}{2x^2+6x}-\frac{4-3x^2}{x^2-9}-3$ f) $\frac{x-1}{2x+6}-\frac{4x+6}{x^2-9}+\frac{3}{x-3}$

V cvičeniach 8 a 9 vyberte správnu odpoveď.

**8.** Vypočítajte a určte podmienky riešiteľnosti: $\frac{x}{2r}+\frac{3x}{3r}-\frac{2x}{4r}$

**A** $\frac{4}{3}x$, $x \neq \pm 3$ **B** $\frac{x}{r}$, $r \neq 0$ **C** $\frac{x}{3r}$, $x \neq 0, r \neq 0$ **D** $\frac{7x}{12}$, $r \neq 0$

**9.** Sčítajte, súčet zjednodušte, určte podmienky riešiteľnosti: $\frac{7n^2}{n^2-9}+\frac{5n}{n-3}+\frac{n}{n+3}$

**A** $\frac{13n^2-12n}{n^2-9}$ $n \neq \pm 3$ **C** $\frac{12n^2-12n}{n^2-9}$ $n \neq 3$

**B** $\frac{13n^2+12n}{n^2-9}$ $n \neq \pm 3$ **D** $\frac{12n^2+14n}{n^2-9}$ $n \neq 9, n \neq \pm 3$

***Kto podceňuje výsledky matematiky; škodí celej vede, lebo ten, kto nepozná matematiku, nemôže poznať exaktné vedy a nemôže pochopiť svet.***

***R. Bacon***

## 2.5 Násobenie a delenie lomených výrazov

***ZOPAKUJME SI***

Zlomok násobíme celým číslom tak, že ním násobíme čitateľa zlomku.

$$\frac{5}{8} \cdot 3 = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{1} = \frac{5\,.\,3}{8} = \frac{15}{8}$$

[1] ***PRÍKLAD***

Vynásobte. Určte podmienky, kedy má výraz zmysel:

a) $\frac{1}{x^2} \cdot 2x^3$ b) $\frac{4}{a+1} \cdot (a+1)$ c) $\frac{m^2}{m^2-1} \cdot (m+1)$ d) $(a^2-16) \cdot \frac{a^3-4a^2}{a^2-8a+16}$

***RIEŠENIE***

a) $\frac{1}{x^2} \cdot 2x^3 = \frac{2x^3}{x^2} = 2x;\quad x \neq 0$

b) $\frac{4}{a+1} \cdot (a+1) = \frac{4\,.\,(a+1)}{a+1} = 4;\quad a \neq -1$

c) $\frac{m^2}{m^2-1} \cdot (m+1) = \frac{m^2(m+1)}{(m+1)(m-1)} = \frac{m^2}{m-1};\quad m \neq \pm 1$

d) $(a^2-16) \cdot \frac{a^3-4a^2}{a^2-8a+16} = \frac{(a^2-16)(a^3-4a^2)}{(a-4)^2} = \frac{(a+4)(a-4)a^2(a-4)}{(a-4)(a-4)} = a^2(a+4);\quad a \neq 4$

***Násobenie lomeného výrazu celistvým výrazom***

Lomený výraz násobíme celistvým výrazom tak, že ním vynásobíme čitateľa lomeného výrazu a menovateľa odpíšeme. Ak sa dá, výsledok krátime. Určíme podmienky riešiteľnosti.

1 ***ÚLOHA***

Vynásobte a určte podmienky riešiteľnosti:

a) $\frac{2a}{b} \cdot b^2$ b) $\frac{4b}{2a} \cdot (-1)$ c) $\frac{1}{xy} \cdot x^2y^2$ d) $\frac{1}{abc} \cdot abc$

2 ***ÚLOHA***

Vynásobte, určte podmienky riešiteľnosti a výpočet overte pre vhodné hodnoty premenných:

a) $\frac{2x^2-8}{x^2+4x+4} \cdot (2x+4)$ c) $(4x^2-1) \cdot \frac{6x^2y}{2x(1-2x)}$

b) $(m-n) \cdot \frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}$ d) $\frac{a-b}{a^2-2ab+b^2} \cdot (a-b)$

3 ***ÚLOHA***

Upravte nasledujúce lomené výrazy:

a) $xyz \cdot \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$ b) $\left(1+\frac{r}{s}\right) \cdot (r+s)$ c) $\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right) \cdot (a+b)$

4 ***ÚLOHA***

Akým výrazom treba vynásobiť výraz $\frac{2n+1}{3}$ aby sa súčin rovnal $\frac{4n^2+2n}{3}$?

5

*ÚLOHA*

Záhradník vysadil v prvý deň $x$ priesad uhoriek. Zaplatil za ne 2 250 Sk. Na druhý deň zasadil $x + 2$ priesad tej istej ceny.

a) Zapíšte ako výraz, koľko zaplatil za priesady druhý deň.

b) Zistite hodnotu tohto výrazu, ak $x = 150$.

***ZOPAKUJME SI***

Zlomok zlomkom násobíme tak, že súčin čitateľov lomíme súčinom menovateľov. Výsledok, ak sa dá, krátime. Určíme podmienky riešiteľnosti.

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{9} = \frac{4\,.\,2}{5\,.\,9} = \frac{8}{45}$$

Podobne postupujeme aj pri násobení lomených výrazov.

2

***PRÍKLAD***

Vynásobte a určte podmienky riešiteľnosti:

a) $\dfrac{a+b}{5} \cdot \dfrac{3}{a+b}$ b) $\dfrac{(x-y)^2}{(x+y)^2} \cdot \dfrac{x+y}{x-y}$ c) $\dfrac{c^2+2c+1}{c^2-1} \cdot \dfrac{c-1}{c^2+c}$

***RIEŠENIE***

a) $\dfrac{a+b}{5} \cdot \dfrac{3}{a+b} = \dfrac{(a+b)\,.\,3}{5\,.\,(a+b)} = \dfrac{3}{5}; \qquad a \neq -b$

b) $\dfrac{(x-y)^2}{(x+y)^2} \cdot \dfrac{x+y}{x-y} = \dfrac{(x-y)(x-y)(x+y)}{(x+y)(x+y)(x-y)} = \dfrac{x-y}{x+y}; \qquad x \neq \pm y$

c) $\dfrac{c^2+2c+1}{c^2-1} \cdot \dfrac{c-1}{c^2+c} = \dfrac{(c+1)(c+1)}{(c+1)(c-1)} \cdot \dfrac{c-1}{c\,.\,(c+1)} = \dfrac{(c+1)(c+1)(c-1)}{c\,.\,(c+1)(c-1)(c+1)} = \dfrac{1}{c}; \qquad c \neq \pm 1,\ c \neq 0$

***Násobenie lomeného výrazu lomeným výrazom***

Lomený výraz násobíme lomeným výrazom tak, že súčin čitateľov lomíme súčinom menovateľov. Výsledok, ak sa dá, krátime. Určíme podmienky riešiteľnosti.

6

*ÚLOHA*

Vynásobte a určte podmienky riešiteľnosti:

a) $\dfrac{9x^2-25}{3x^2+5x} \cdot \dfrac{4x^2}{(3x-5)^2}$ b) $\dfrac{u^2-25}{5u-u^2} \cdot \dfrac{2u^3+10u^2}{u^2+10u+25}$ c) $\dfrac{x^2+2x+3x+6}{5x^2-20} \cdot \dfrac{4x-8}{2x}$

3

***PRÍKLAD***

Vynásobte: $\left(m - \dfrac{m}{m+1}\right) \cdot \left(1 - \dfrac{1}{m^2}\right)$

***RIEŠENIE***

Petra vie: operácia v zátvorke má vždy prednosť, preto najskôr vypočíta rozdiely v zátvorkách.

$$\left(m - \frac{m}{m+1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{m^2}\right) = \frac{m(m+1)-m}{m+1} \cdot \frac{m^2-1}{m^2} = \frac{m^2+m-m}{m+1} \cdot \frac{m^2-1}{m^2} = \frac{m^2}{m+1} \cdot \frac{(m-1).(m+1)}{m^2} = $$
$$= m - 1$$

Podmienky: $m \neq 0$, $m \neq -1$.

Ktoré výrazy Petra krátila? Preverte aj uvedené podmienky riešiteľnosti.

Overte Petrin výpočet dosadením za $m = 2$ a $m = -2$.

**7** ***ÚLOHA***

Zjednodušte a výsledky overte pre dané hodnoty premenných:

a) $(x-y) \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)$; $\quad x = 2, y = -1$ $\qquad$ b) $\left(\frac{1}{z-1} + 1\right).\left(\frac{1}{z+1} - 1\right)$; $\quad z = 3$

***ZOPAKUJME SI***

Deliť zlomkom znamená násobiť jeho prevrátenou hodnotou.

$$\frac{2}{5} : \frac{1}{3} = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{1} = \frac{2\,.\,3}{5\,.\,1} = \frac{6}{5}$$

Podobne delíme lomený výraz lomeným výrazom.

**[4]** ***PRÍKLAD***

Vydeľte a určte podmienky riešiteľnosti výrazov: $\frac{3x}{a} : \frac{2y}{b}$

***RIEŠENIE***

Juraj počíta tak, ako pri delení so zlomkami: $\frac{3x}{a} : \frac{2y}{b} = \frac{3x}{a} \cdot \frac{b}{2y} = \frac{3x\,.\,b}{a\,.\,2y} = \frac{3bx}{2ay}$

Určí podmienky:

Menovateľ prvého výrazu $a \neq 0$.

Celý druhý výraz musí byť rôzny od nuly **(nulou nikdy nedelíme!)** $\frac{2y}{b} \neq 0$, preto platí: $b \neq 0$ a tiež $y \neq 0$.

Podmienky pre pôvodný podiel sú: $a \neq 0$, $b \neq 0$, $y \neq 0$.

**8** ***ÚLOHA***

K daným výrazom napíšte prevrátené výrazy. Určte, pre ktoré hodnoty premenných sa prevrátené výrazy rovnajú nule a pre ktoré hodnoty premenných nemajú zmysel.

a) $\frac{x}{6}$ $\qquad$ b) $\frac{12}{a}$ $\qquad$ c) $\frac{y^2+z^2}{x-2}$ $\qquad$ d) $(x-1)^2$ $\qquad$ e) $\frac{1}{v+u}$ $\qquad$ f) $\frac{a}{x} + \frac{b}{y}$

**9** ***ÚLOHA***

Vydeľte a určte podmienky riešiteľnosti týchto výrazov:

a) $\frac{3}{4x} : 6$ $\qquad$ b) $\frac{5a^2}{4} : 10a$ $\qquad$ c) $\frac{m-n}{mn} : (m-n)$ $\qquad$ d) $\frac{x^2-y^2}{x-y} : (x+y)$

**10** ***ÚLOHA***

Vydeľte nasledujúce výrazy a určte podmienky ich riešiteľnosti:

a) $\frac{x}{y} : \frac{x}{3y}$ $\qquad$ b) $\frac{2a}{4b^2} : \frac{4a}{8b}$ $\qquad$ c) $\frac{m-n}{4} : \frac{m-n}{8}$ $\qquad$ d) $\frac{3x+1}{y+2} : \frac{3x+1}{2y+4}$

**[5]** ***PRÍKLAD***

Vydeľte lomené výrazy a určte podmienky ich riešiteľnosti: $\dfrac{m^2-9}{3m-m^2} : \dfrac{m^2+6m+9}{2m^3+6m^2}$

***RIEŠENIE***

Ondrej najprv upraví delenie na násobenie:

$$\frac{m^2-9}{3m-m^2} : \frac{m^2+6m+9}{2m^3+6m^2} = \frac{m^2-9}{3m-m^2} \cdot \frac{2m^3+6m^2}{m^2+6m+9} = \frac{(m^2-9).(2m^3+6m^2)}{(3m-m^2).(m^2+6m+9)}$$

Potom rozloží výrazy v čitateli aj menovateli na súčiny tak, aby sa dali čo najvýhodnejšie krátiť. Platí:

$m^2 - 9 = (m + 3)(m - 3)$

$2m^3 + 6m^2 = 2m^2(m + 3)$

$3m - m^2 = m(3 - m)$

$m^2 + 6m + 9 = (m + 3)^2 = (m + 3)(m + 3)$

Po úprave Ondrej dostane:

$$\frac{(m+3).(m-3).2m^2(m+3)}{m(3-m)(m+3)(m+3)} = \frac{2m}{-1} = -2m$$

Podmienky:

menovateľ prvého zlomku: $3m - m^2 = m(3 - m)$ podmienky: $m \neq 0,\ m \neq 3$

menovateľ druhého zlomku: $2m^3 + 6m^2 = 2m^2(m + 3)$ podmienky: $m \neq 0,\ m \neq -3$

čitateľ druhého zlomku: $m^2 + 6m + 9 = (m + 3)^2$ podmienka: $m \neq -3$

Podmienky pre celý výraz: $m \neq 0;\ m \neq \pm 3$.

**11** ***ÚLOHA***

Vydeľte nasledujúce výrazy a určte podmienky ich riešiteľnosti. Správnosť riešenia overte dosadením vhodných hodnôt za premenné.

a) $\dfrac{t^2-25}{5t-t^2} : (t+5)$

b) $\dfrac{x^2-4x+4}{x(x-3)} : \dfrac{(x-2)^2}{3-x}$

c) $\dfrac{5-5a}{(1+a)^2} : \dfrac{10-10a^2}{3+3a}$

d) $\dfrac{a^2-b^2}{c^2-d^2} : \dfrac{b-a}{c+d}$

**[6]** ***PRÍKLAD***

Vydeľte: $\left(\dfrac{t}{t+1}+1\right) : \left(1-\dfrac{3t^2}{1-t^2}\right)$, určte podmienky riešiteľnosti.

***RIEŠENIE***

Roman najskôr upraví výrazy v zátvorkách na spoločného menovateľa, potom postupuje známym spôsobom.

$$\left(\frac{t}{t+1}+1\right) : \left(1-\frac{3t^2}{1-t^2}\right) = \frac{t+t+1}{t+1} : \frac{1-t^2-3t^2}{1-t^2} = \frac{2t+1}{t+1} : \frac{1-4t^2}{1-t^2} = \frac{2t+1}{t+1} \cdot \frac{1-t^2}{1-4t^2} =$$

$$= \frac{2t+1}{t+1} \cdot \frac{(1-t).(1+t)}{(1-2t).(1+2t)} = \frac{1-t}{(1-2t)}$$

Podmienky: $t \neq \pm 1,\ t \neq \pm\frac{1}{2}$

Ktoré výrazy Roman pri výpočte krátil?

Preverte určené podmienky riešiteľnosti a overte správnosť riešenia pre $t = 0$ a pre $t = 2$.

**12** ***ÚLOHA***

Vypočítajte a určte podmienky riešiteľnosti. Overte pre $a = 2,\ b = 1,\ c = 0$.

a) $\left(\frac{3}{c-2} - \frac{2}{c-1}\right) : \left(\frac{c-2}{3} - \frac{c-1}{2}\right)$ b) $\left(\frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a+b}\right) : \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)$

## *CVIČENIA*

Vo všetkých cvičeniach určte aj podmienky riešiteľnosti.

**1.** Vynásobte:

a) $\frac{2}{1-a^2} \cdot \frac{1-a}{2}$ c) $\frac{n^2-m^2}{9} \cdot \frac{3}{m+n}$ e) $\frac{p^2-r^2}{m^2-n^2} \cdot \frac{m+n}{p-r}$

b) $\frac{2n+2v}{4} \cdot \frac{8}{n+v}$ d) $\frac{4-y^2}{7} \cdot \frac{14}{2-y}$ f) $\frac{4a+4b}{a^2-b^2} \cdot \frac{a^2-ab}{2a}$

**2.** Vynásobte:

a) $\frac{x^2+2x+1}{3x-3} \cdot \frac{15}{x+1}$ c) $\frac{10-4a}{2} \cdot \frac{-1}{25-20a+4a^2}$

b) $\frac{y^2-2y+1}{3x^2} \cdot \frac{x}{y-1}$ d) $\frac{9x^2+12xy+4y^2}{3x+2y} \cdot \frac{2}{3x-2y}$

**3.** Vynásobte:

a) $\frac{x+2}{2+x} \cdot \frac{2-x}{x-2}$ b) $\frac{r^2-9}{r+1} \cdot \frac{r^2-1}{r-3}$

**4.** Vynásobte:

a) $\frac{2a^2}{a^2b+ab^2} \cdot \frac{ab+b^2}{2a-4}$ c) $\frac{p^2+pq}{5p^2-5q^2} \cdot \frac{p^2q-q^3}{2p^2-2p}$

b) $\frac{4n-4v}{2nv} \cdot \frac{n^2}{n^2-nv}$ d) $\frac{2a^2-2b^2}{3x^2-3y^2} \cdot \frac{9(x+y)}{4a-4b}$

**5.** Vynásobte:

a) $\frac{2x^2+8x+8}{x-2} \cdot \frac{x^2-4}{4(x+2)}$ c) $\frac{a^2-4}{1-a} \cdot \frac{2b}{a-2} \cdot \frac{1-a^2}{ab+2b}$

b) $\frac{z^2-1}{z^2+2z+1} \cdot \frac{3z+3}{4z-4}$ d) $\frac{a-n}{n-1} \cdot \frac{n^2-1}{a+n} \cdot \frac{-1}{n+1}$

**6.** Zjednodušte a výsledky overte pre dané hodnoty premenných:

a) $(x-y) \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)$, $x = 2,\ y = 3$;

b) $\left(\frac{1}{z-1} + 1\right) \cdot \left(\frac{1}{z+1} - 1\right)$, $z = 5$;

c) $\left(\frac{r+s}{r-s} - \frac{r-s}{r+s}\right) \cdot \left(\frac{r}{s} - \frac{s}{r}\right)$, $r = 2,\ s = 3;\ r = -1,\ s = -2;\ r = 0{,}1;\ s = 0{,}2.$

**7.** Vydeľte výrazy:

a) $\frac{1}{x^2-x} : \frac{1}{x^2-x^3}$ c) $\frac{9-6x+x^2}{3y-12} : \frac{x^2-9}{y-4}$ e) $\frac{9x^2-18xy+9y^2}{3x^2-15x} : \frac{9(x-y)}{25-x^2}$

b) $\frac{x+1}{x-1} : \frac{x^2-1}{2x^2-4x+2}$ d) $\frac{2x^2+4xy+2y^2}{x^2-2x} : \frac{4x^2-4y^2}{x^2-xy}$ f) $\frac{4x^2-y^2}{2x^2+yx} : \frac{y^2-4yx+4x^2}{2x}$

**8.** Zjednodušte:

a) $\left(\frac{x^2}{4} - 1\right) : \left(\frac{x}{2} - 1\right)$ c) $(x-y) : \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)$ e) $\left(\frac{a+b}{b} - \frac{a-b}{a}\right) : \left(\frac{a+b}{a} + \frac{a-b}{b}\right)$

b) $\left(\frac{36a^2}{b^2} - \frac{49b^2}{a^2}\right) : \left(\frac{6a}{b} + \frac{7b}{a}\right)$ d) $\left(\frac{u}{v} - \frac{v}{u}\right) : \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{v}\right)$ f) $\left(\frac{10r^2s}{r^2-s^2}\right) : \left(\frac{5r}{6r+6s}\right)$

Výsledok cvičenia e) overte pre $a = -1$, $b = -2$.

**9.** Vypočítajte:

a) $\left(\frac{x^2-9}{x-2} : \frac{x-3}{3}\right) \cdot \frac{2x-x^2}{x+3}$

b) $\frac{2x^2-8}{x^2+6x} \cdot \frac{x+6}{2-x} : \frac{x^2+4x+4}{x}$

c) $\frac{x-1}{x-5} \cdot \frac{5x+x^2}{2-2x^2} : \frac{x}{(-x-1)^2}$

d) $\left(\frac{3x-3}{x^2-4} : \frac{1-x^2}{x+2}\right) \cdot (2-x)$

V cvičeniach 10 a 11 určte správnu odpoveď.

**10.** Súčin: $\frac{2r^3-18r}{10r^3} \cdot \frac{5r^2}{r-3}$ sa pre $r \neq 0$, $r \neq 3$, rovná:

**A** $r-3$ **B** $r+3$ **C** $r$ **D** $\frac{r}{r-3}$ **E** $\frac{r+3}{r-3}$

**11.** Výraz $\frac{10-2a}{a^2-4a+4} : \frac{a^2-25}{2-a}$ pre $a \neq 2$, $a \neq \pm 5$ je možné upraviť na tvar:

**A** $\frac{2}{(2-a)(a+5)}$ **B** $\frac{2}{(2-a)(a-5)}$ **C** $\frac{2}{(2+a)(a+5)}$ **D** $\frac{2}{(a-2)(a+5)}$

**12.** O koľko sa líši súčet čísel $1+\frac{m}{n}$, $1+\frac{n}{m}$ od ich súčinu? Overte pre $m = 1$, $n = 2$.

**13.** Koľkokrát väčší je súčet čísel $\frac{x+1}{y}$, $\frac{x+1}{xy}$ než ich súčin? Overte pre $x = 2$, $y = 5$.

**14.** Nakupujeme na trhovisku. Za $k$ kilogramov ovocia zaplatíme $s$ korún.

a) Koľko korún zaplatíme za jeden kilogram ovocia?

b) Koľko kilogramov ovocia nakúpime za $d$ korún?

Overte pre $k = 2{,}5$; $s = 22{,}5$; $d = 85{,}5$.

## 2.6 Zložené lomené výrazy

***ZOPAKUJME SI***

Zlomok tvaru $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ nazývame zložený zlomok.

Ak sú $a, b, c, d$ výrazy s premennými, výraz $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ nazývame **zložený lomený výraz.**

Napríklad: $\dfrac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x-1}{x+2}}$, $\dfrac{-3}{\frac{a}{b}}$, $\dfrac{c}{\frac{2}{d}}$.

Zložený lomený výraz $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ má zmysel iba vtedy, ak $b \neq 0$, $d \neq 0$, a menovateľ $\frac{c}{d} \neq 0$, teda aj $c \neq 0$.

Hlavná zlomková čiara → $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ } vnútorné členy } vonkajšie členy

## *Úprava zloženého lomeného výrazu*

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a.d}{b.c}, \quad b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$$

Zložený lomený výraz upravíme tak, že **súčin vonkajších** členov lomíme (delíme) **súčinom vnútorných** členov.

### *PRÍKLAD* [1]

Upravte zložené lomené výrazy: a) $\dfrac{\frac{p}{q}}{s}$, b) $\dfrac{p}{\frac{q}{s}}$, c) $\dfrac{\frac{p+q}{s}}{\frac{p}{q+s}}$.

### *RIEŠENIE*

a) $\dfrac{\frac{p}{q}}{s} = \dfrac{p}{q} : s = \dfrac{p}{q} \cdot \dfrac{1}{s} = \dfrac{p}{qs}$, $\qquad q \neq 0, s \neq 0$

b) $\dfrac{p}{\frac{q}{s}} = p : \dfrac{q}{s} = p \cdot \dfrac{s}{q} = \dfrac{ps}{q}$, $\qquad q \neq 0, s \neq 0$

c) $\dfrac{\frac{p+q}{s}}{\frac{p}{q+s}} = \dfrac{p+q}{s} : \dfrac{p}{q+s} = \dfrac{p+q}{s} \cdot \dfrac{q+s}{p} = \dfrac{(p+q)(q+s)}{sp}$, $\qquad s \neq 0, p \neq 0, q \neq -s$

Overte vypočítané výsledky pre $p = 1$, $q = 2$, $s = 3$.

### *ÚLOHA* 1

Upravte zložené lomené výrazy a určte podmienky ich platnosti.

a) $\dfrac{\frac{5}{a}}{\frac{c}{3}}$ b) $\dfrac{\frac{5x}{3y^2}}{\frac{10a^3}{3b}}$ c) $\dfrac{\frac{5s^2}{3s^2}}{5k}$ d) $\dfrac{\frac{1}{x^3}}{\frac{2}{3x^2}}$

### *PRÍKLAD* [2]

Zjednodušte zložený lomený výraz $\dfrac{x+\frac{y}{z}}{x-\frac{z}{y}}$ a určte podmienky jeho platnosti.

### *RIEŠENIE*

Adam upraví čitateľa aj menovateľa zloženého výrazu na spoločného menovateľa. Určí súčet výrazov v čitateli a rozdiel výrazov v menovateli:

$\dfrac{x+\frac{y}{z}}{x-\frac{z}{y}} = \dfrac{\frac{xz+y}{z}}{\frac{xy-z}{y}} =$ Ďalej postupuje priamo podľa pravidiel úpravy zloženého zlomku:

$$= \frac{xz+y}{z} \cdot \frac{y}{xy-z} = \frac{y.(xz+y)}{z.(xy-z)}$$

Výraz sa ďalej krátiť nedá.
Podmienky: $z \neq 0,\ y \neq 0,\ xy \neq z$.

Juraj postupuje takto:
V čitateli zloženého výrazu je zlomok $\frac{y}{z}$ a v menovateli je zlomok $\frac{z}{y}$.

Rozšíri zložený lomený výraz spoločným menovateľom týchto zlomkov - výrazom *yz*.
Počítajme s Jurajom:

$$\frac{x+\frac{y}{z}}{x-\frac{z}{y}}=\frac{\left(x+\frac{y}{z}\right).yz}{\left(x-\frac{z}{y}\right).yz}=\frac{xyz+y^2}{xyz-z^2}=\frac{y.(xz+y)}{z.(xy-z)}$$

Výraz sa ďalej krátiť nedá.

Podmienky: $z \neq 0$, $y \neq 0$, $xy \neq z$.

Dostali sme rovnaký výsledok. Porozmýšľajte, prečo.
Overte výpočty pre $x = 3$, $y = 2$, $z = 4$, aj pre $x = -1$, $y = 3$, $z = 1$.

2

***ÚLOHA***

Upravte a výsledky overte pre dané hodnoty premenných.

a) $\dfrac{\frac{a}{2}-\frac{b}{4}}{\frac{1}{a}+\frac{2}{b}}$ $a=2, b=4$   b) $\dfrac{\frac{x^2}{y^2-x^2}+1}{1-\frac{x}{x-y}}$ $x=3, y=-2$

***CVIČENIA***

1. Upravte nasledujúce zložené lomené výrazy:

a) $\dfrac{\frac{5}{a}}{\frac{b}{3}}$ b) $\dfrac{\frac{5a}{3b^3}}{\frac{10a^3}{3b}}$ c) $\dfrac{\frac{p}{q^2}}{\frac{8p^4}{15q^5}}$ d) $\dfrac{5x^2}{\frac{3x^3}{5y}}$ e) $\dfrac{\frac{5x^2}{3x^3}}{5y}$ f) $\dfrac{1}{\frac{2r^3}{3s^2}}$ g) $\dfrac{\frac{1}{2r^3}}{3s^2}$

2. Upravte a výsledky overte pre dané hodnoty premenných.

a) $\dfrac{\frac{a}{b}-\frac{c}{d}}{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}}$ $a=0, b=3$, $c=2, d=1$

b) $\dfrac{1+\frac{a}{b}}{b-\frac{a^2}{b}}$ $a=1, b=2$

c) $\dfrac{\frac{1}{z-1}+1}{\frac{1}{z+1}-1}$ $z=2$

d) $\dfrac{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}{\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}}$ $p=-2, q=1$

e) $\dfrac{r+s+\frac{s^2}{r}+\frac{s^3}{r^2}}{\frac{r^2}{s^2}-\frac{s^2}{r^2}}$ $r=2, s=3$ a $r=3, s=4$

f) $\dfrac{\frac{p-q}{p+q}+\frac{p+q}{p-q}}{\frac{p}{q}+\frac{q}{p}}$ $p=-5, q=-3$

***VYSKÚŠAJTE SA!***

**1.** Umocnite $\left(\frac{x}{5}-2y\right)^2$.

**2.** Rozložte na súčin:
a) $(x-2)^2-9$ b) $16-\frac{x^2}{25}$ c) $x(3y-7)-7+3y$ d) $xy^2-2xyz+xz^2$

**3.** Doplňte tak, aby platila rovnosť: $(\square + 5)^2 = \square + 20x + \square$

**4.** Daný je výraz: $\frac{12-a}{a^2-9}$ . Určte:

a) pre aké hodnoty premennej $\boldsymbol{a}$ nemá výraz zmysel,

b) hodnotu výrazu pre $a = -4$,

c) pre aké hodnoty premennej $a$ sa výraz rovná nule.

**5.** Doplňte rovnosť tak, aby bola platná: $\frac{2x-5}{x+2} = \frac{\boxed{\phantom{xx}}}{4x+8}$

**6.** Výraz $\frac{2x-4y}{4y^2-x^2}$ sa za podmienky: $x \neq \pm 2y$ dá zjednodušiť na tvar:

**A** $\frac{2}{2y+x}$ **B** $-\frac{2}{2y+x}$ **C** $\frac{2}{2y-x}$ **D** $\frac{2}{-2y-x}$ **E** $\frac{2}{-2y+x}$ Určte správnu odpoveď.

**7.** Najmenší spoločný násobok výrazov: (3a - 3b), ($a^2$ - 2ab + $b^2$) je:

**A** (3a - 3b) . $(a - b)^2$ **B** $(a - b)^3$ **C** $3(a - b)^2$ **D** 3a - 3b + $a^2$ - 2a + b
**E** 3(a - b) . ($a^2$ - 2ab + $b^2$) Ktorá odpoveď je správna?

**8.** Vypočítajte, zjednodušte a určte podmienky platnosti výrazov:

a) $\frac{2a}{5x} + \frac{5a}{2x} - \frac{2a}{4x}$ b) $\frac{7n^2}{n^2-9} + \frac{5n}{n-3} + \frac{n}{n+3}$ c) $(2-x)^2 - \frac{x.(2x-6)}{2}$

**9.** Vypočítajte, určte podmienky platnosti a overte pre dané hodnoty premenných:

a) $\frac{2x^2-2}{x^2+5x} \cdot \frac{x+5}{1-x}$ $x = -2$

b) $\frac{14}{7x^2+7y^2} : \frac{2x+2y}{x^4-y^4}$ $x = 1, y = 3$

**10.** Dva obdĺžniky majú rovnaký obsah. Prvý má veľkosť strán x, $y$, druhý x + 1, $a$. O koľko je $a$ menšie ako $y$? Výsledok overte pre $x = 6$, $y = 2$.

**11.** Na poschodie, ktoré je vo výške v metrov vedie $n$ schodov. O koľko by sa znížila výška každého schodu, ak by ich bolo o $h$ viac? Výsledok overte pre $v = 12$, $n = 60$, $h = 20$.

**12.** Pružná lopta pri voľnom páde vyskočí po odraze od zeme do $\frac{2}{3}$ výšky, z ktorej bola spustená. Lopta bola spustená z výšky $h$. Do akej výšky vyskočí po prvom, druhom a treťom odraze? Výsledky overte pre $h = 9$ m.

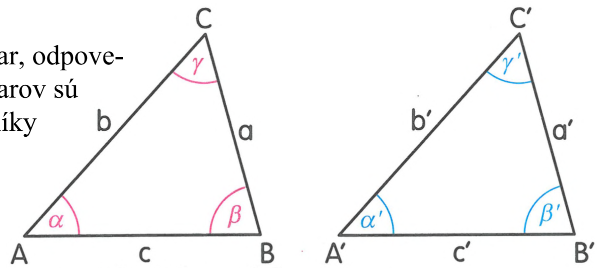
**13.** Upravte zložený lomený výraz $\dfrac{\frac{x}{4} - 1 + \frac{1}{x}}{\frac{x+2}{x} \cdot \frac{x-2}{4}}$ a určte podmienky jeho platnosti.

# 3 PODOBNOSŤ TROJUHOLNÍKOV

***ZOPAKUJME SI***

V 7. ročníku ste sa učili o zhodnosti geometrických útvarov. Pripomeňme si niektoré nadobudnuté poznatky.

1. Dva útvary, ktoré môžeme premiestniť (aj prevrátiť na rub) tak, aby sa kryli, nazývame zhodnými (**U** ≅ **U'**).
2. Zhodné útvary majú zhodný tvar, odpovedajúce strany a uhly týchto útvarov sú zhodné. Zhodné trojuholníky a $A'B'C'$ majú zhodné odpovedajúce strany a odpovedajúce uhly.

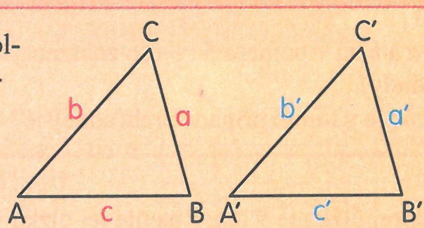



$$\left.\begin{array}{l} a \cong a',\ b \cong b',\ c \cong c' \\ \alpha \cong \alpha',\ \beta \cong \beta',\ \gamma \cong \gamma' \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$$

**Vety o zhodnosti trojuholníkov**

***VETA* (*sss*)**

Každé dva trojuholníky, ktoré sa zhodujú vo všetkých troch stranách sú zhodné.

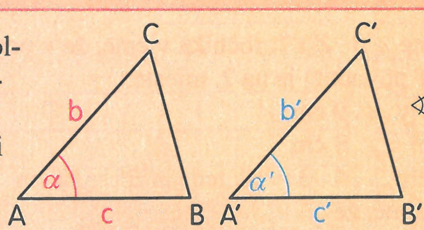



$AB \cong A'B'$ — $c \cong c'$
$BC \cong B'C'$ — $a \cong a'$
$AC \cong A'C'$ — $b \cong b'$

$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$

***VETA* (*sus*)**

Každé dva trojuholníky, ktoré sa zhodujú v dvoch stranách a v uhle nimi určenom sú zhodné.

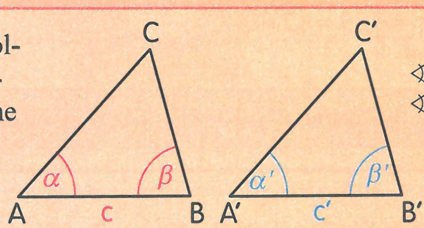



$AB \cong A'B'$ — $c \cong c'$
$AC \cong A'C'$ — $b \cong b'$
$\sphericalangle CAB \cong \sphericalangle C'A'B'$ — $\alpha \cong \alpha'$

$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$

***VETA* (*usu*)**

Každé dva trojuholníky, ktoré sa zhodujú v jednej strane a dvoch uhloch k nej priľahlých sú zhodné.




$AB \cong A'B'$ — $c \cong c'$
$\sphericalangle CAB \cong \sphericalangle C'A'B'$ — $\alpha \cong \alpha'$
$\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle A'B'C'$ — $\beta \cong \beta'$

$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$

V ďalšom texte budeme hovoriť o podobnosti geometrických útvarov. Podobnosť pochopíte len vtedy, keď budete dobre ovládať zhodnosť útvarov, pomer a zmenu v danom pomere.

[1] ***PRÍKLAD***

Porovnajte dĺžky úsečiek ***a***, ***b*** podielom a pomerom:

a) ***a***= 10 cm, ***b*** = 5 cm
b) ***a*** = 4 cm, ***b*** = 8 cm
c) ***a*** = 5 cm, ***b*** = 3 cm

***RIEŠENIE***

a) Podielom: $10 : 5 = 2$
Dĺžka úsečky ***a*** je dvakrát väčšia ako dĺžka úsečky ***b.***
Pomerom: $10 : 5 = 2 : 1$
Dĺžky úsečiek sú v pomere $2 : 1$.

b) Podielom: $8 : 4 = 2$
Dĺžka úsečky ***a*** je dvakrát menšia ako dĺžka úsečky ***b.***
Pomerom: $4 : 8 = 1 : 2$
Dĺžky úsečiek ***a*** a ***b*** sú v pomere $1 : 2$.

c) Podielom: $5 : 3 = 1{,}\overline{6}$ alebo $1\frac{2}{3}$
Dĺžka úsečky ***a*** je $1\frac{2}{3}$-krát väčšia ako dĺžka úsečky ***b.***
Pomerom: $5 : 3$
Dĺžky úsečiek ***a*** a ***b*** sú v pomere $5 : 3$ (čo znamená, že prvá úsečka má päť a druhá tri také isté diely).
Ktoré porovnanie je v tomto prípade prehľadnejšie?

[2] ***PRÍKLAD***

Daná je úsečka *AB,* ktorej dĺžka je 9 cm. Zmeňte jej dĺžku v pomere $k = 4 : 3$.

***RIEŠENIE***

Novú úsečku označíme $A'B'$. Zo 7. ročníka vieme, že v pomere je na 1. mieste veľkosť novej úsečky, veľkosť pôvodnej je na 2. mieste.

Platí: $|AB|$ . . . 3 diely . . . 9 cm
1 diel . . . 3 cm
$|A'B'|$ . . . 4 diely . . . $4 \cdot 3 = 12$, teda $|A'B'| = 12$ cm

Z tohto výpočtu je zrejmé, že

$|A'B'|$ je $\frac{4}{3}$ z $|AB|$. Skrátene možno zapísať:

$|A'B'| = \frac{4}{3} \cdot |AB| = \frac{4}{3} \cdot 9 = 12$

$|A'B'| = 12$ cm

**Pomer $k = \frac{4}{3} > 1$ — ide o zväčšenie.**

[3] ***PRÍKLAD***

Daná je úsečka *BC,* ktorej veľkosť $|BC| = 10$ cm. Zmeňte jej dĺžku v pomere $2 : 5$.

***RIEŠENIE***

Novú úsečku označíme $B'C'$.

Platí $|BC|$ . . . 5 dielov . . . 10 cm

1 diel . . . 2 cm

$|B'C'|$ . . . 2 diely . . . 2 . 2 = 4, teda $|B'C'| = 4$ cm

Skrátený zápis: $|B'C'| = \frac{2}{5} \cdot |BC| = \frac{2}{5} \cdot 10 = 4,\ |B'C'| = 4$ cm

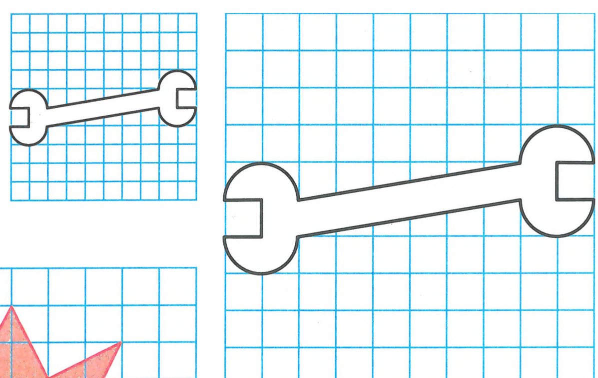
**Pomer $k = \frac{2}{5} < 1$ — ide o zmenšenie.**

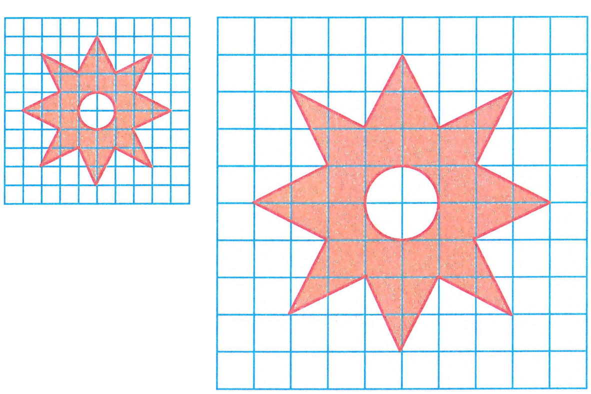
## 3.1 Podobnosť geometrických útvarov

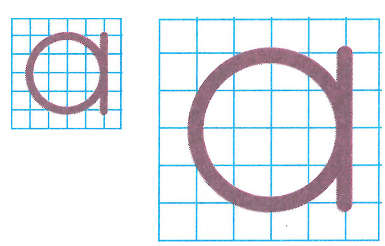
Sledujte nasledujúce obrázky

Pri zväčšovaní kresieb z malej predlohy sa často používajú štvorcové siete rôznych veľkostí.

Napríklad:

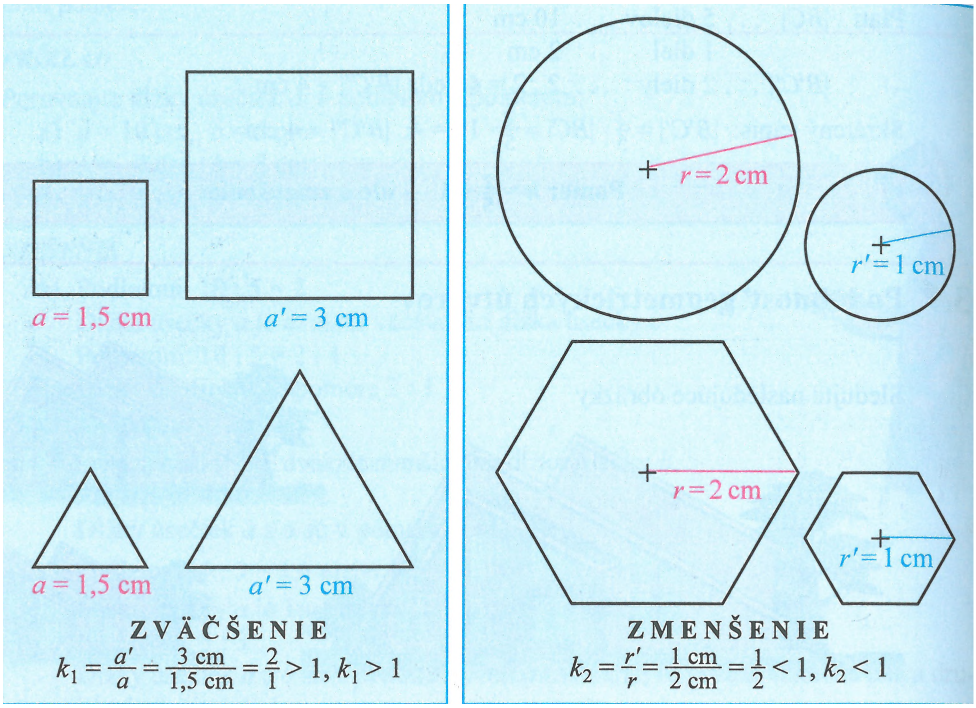




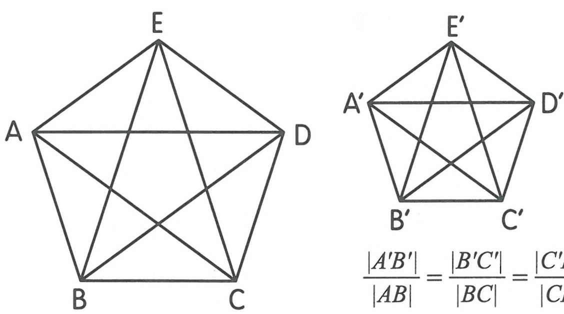


Útvary, ktoré takto vzniknú, sú **podobné,** majú rovnaký tvar.

Podobné sú napríklad každé dva štvorce, každé dve kružnice, každé dva rovnostranné trojuholníky, každé dva pravidelné šesťuholníky.




Dva geometrické útvary nazývame **podobné,** ak pomery dĺžok všetkých dvojíc odpovedajúcich si úsečiek týchto útvarov sa rovnajú.




$$\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|B'C'|}{|BC|} = \frac{|C'D'|}{|CD|} = \frac{|D'E'|}{|DE|} = \frac{|A'D'|}{|AD|} = \ldots = \frac{|E'C'|}{|EC|} = k$$

Číslo $\frac{|A'B'|}{|AB|} = k > 0$ sa nazýva **pomer** alebo **koeficient podobnosti**.

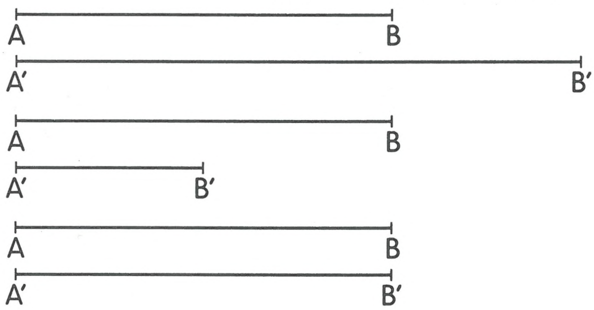
Body $A', B', C'$ ... nazývame **obrazy** bodov $A', B', C'$ ...v podobnosti s koeficientom (pomerom) ***k*.**

$$k = \frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{\text{dĺžka obrazu úsečky}}{\text{dĺžka vzoru úsečky}}$$

Pomer podobnosti je pre jednu podobnosť ten istý.

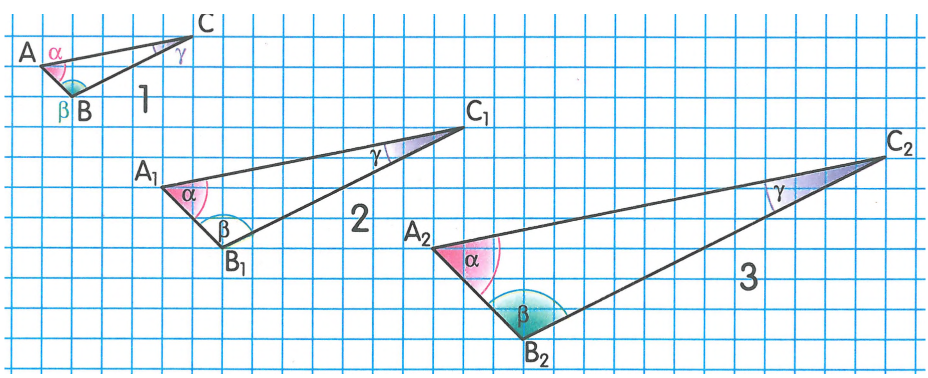
**ÚLOHA**

Na obrázkoch a), b), c) sú nakreslené úsečky $AB$ a $A'B'$. Odmerajte úsečky na každom obrázku a vypočítajte $k_1 = \frac{|A'B'|}{|AB|}$, $k_2 = \frac{|A'B'|}{|AB|}$, $k_3 = \frac{|A'B'|}{|AB|}$.




**PRÍKLAD**

Na štvorčekovanom papieri je nakreslený trojuholník $ABC$. Nakreslite obraz trojuholníka v podobnosti s koeficientom podobnosti a) $k = \frac{2}{1}$; b) $k = \frac{3}{1}$.




**RIEŠENIE**

a) Podobnosť s koeficientom podobnosti $k_1 = \frac{2}{1}$ zobrazí každú stranu trojuholníka $ABC$ takto: $\frac{|A_1B_1|}{|AB|} = \frac{2}{1} \Rightarrow |A_1B_1| = 2 \,.\, |AB|$, $|B_1C_1| = 2 \,.\, |BC|$, $|A_1C_1| = 2 \,.\, |AC|$

b) Podobnosť s koeficientom podobnosti $k_2 = \frac{3}{1}$ zobrazí každú stranu trojuholníka $ABC$ takto: $|A_2B_2| = 3 \,.\, |AB|$, $|B_2C_2| = 3 \,.\, |BC|$, $|A_2C_2| = 3 \,.\, |AC|$

Trojuholníky $ABC$, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ majú rovnaký tvar, čo znamená, že navzájom zodpovedajúce si uhly sú zhodné.

**PRIPOMEŇME SI**

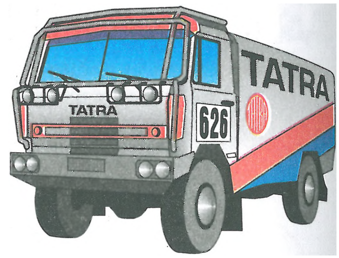
| | | | |
|---|---|---|---|
| Pre $k > 1$ | je úsečka $A'B'$ väčšia ako úsečka $AB$ | — | ide o **zväčšenie.** |
| Pre $0 < k < 1$ | je úsečka $A'B'$ menšia ako úsečka $AB$ | — | ide o **zmenšenie.** |
| Pre $k = 1$ | odpovedajúce si úsečky $AB$ a $A'B'$ | — | sú **zhodné.** |

**PRÍKLAD**

Model automobilu Tatra, ktorý sa zúčastnil na pretekoch kamiónov Paríž - Dakar má tieto rozmery:

dĺžka: 179 mm
šírka: 58 mm
výška: 70 mm

Určte rozmery skutočného automobilu, keď viete, že model bol vyrobený v pomere podobnosti 1 : 43.




**RIEŠENIE**

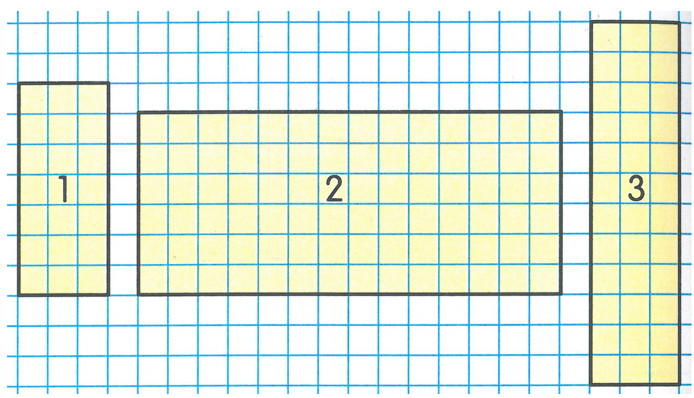
Vyrobený model je obrazom automobilu Tatra. Rozmery skutočného automobilu sú vzhľadom na model v pomere 43 : 1, teda:

dĺžka: 179 . 43 mm = 7 697 mm ≐ 7,7 m
šírka: 58 . 43 mm = 2 494 mm ≐ 2,5 m
výška: 70 . 43 mm = 3 010 mm ≐ 3,0 m

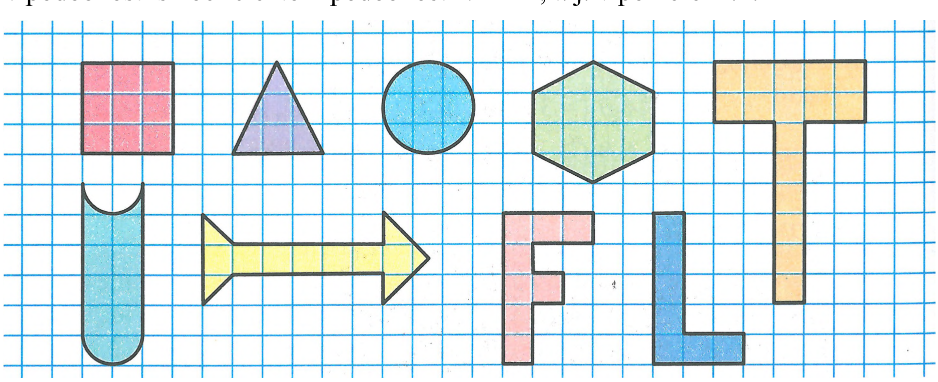
*Odpoveď:* Rozmery skutočného automobilu sú približne 7,7 m; 2,5 m a 3 m.

**CVIČENIA**

1. Na štvorčekovanom papieri sú nakreslené tri obdĺžniky. Zistite, ktoré z nich sú podobné a napíšte ich pomer (koeficient) podobnosti.




**2.** Na obrázku sú nakreslené útvary. Na štvorčekovanom papieri nakreslite ich obrazy v podobnosti s koeficientom podobnosti $k = 2$, t. j. v pomere 2 :1.

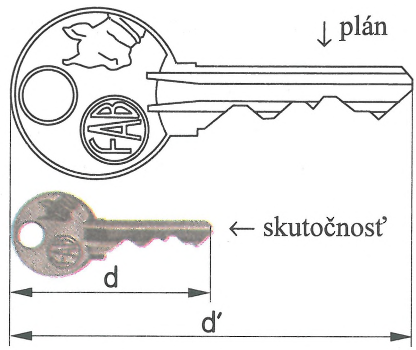


**3.** Dané sú trojuholníky $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$, $\triangle_4$ s týmito dĺžkami strán:

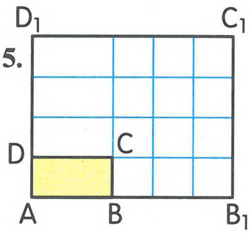
$\triangle_1$ $a_1 = 6$ cm, $b_1 = 4$ cm, $c_1 = 3$ cm
$\triangle_2$: $a_2 = 9$ cm, $b_2 = 6$ cm, $c_2 = 4{,}5$ cm
$\triangle_3$: $a_3 = 12$ cm, $b_3 = 8$ cm, $c_3 = 5{,}5$ cm
$\triangle_4$: $a_4 = 3$ cm, $b_4 = 2$ cm, $c_4 = 1{,}5$ cm

Určte, ktoré dvojice trojuholníkov sú podobné, zistite ich pomer podobnosti a uveďte kedy ide o zväčšenie alebo zmenšenie.

**4.** Na obrázku je zobrazený kľúč väčší ako je v skutočnosti, aby bolo možné presne vybrúsiť jednotlivé zuby. Odmerajte kľúč na pláne a kľúč v skutočnosti a určte pomer podobnosti.

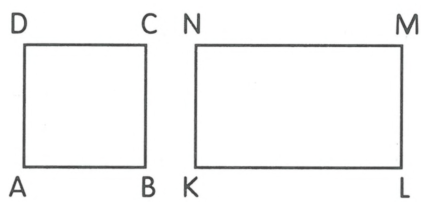



**5.**

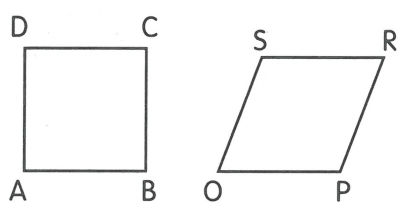



Na obrázku je vyfarbený obdĺžnik *ABCD.* Je tento obdĺžnik podobný s obdĺžnikom $AB_1C_1D_1$?

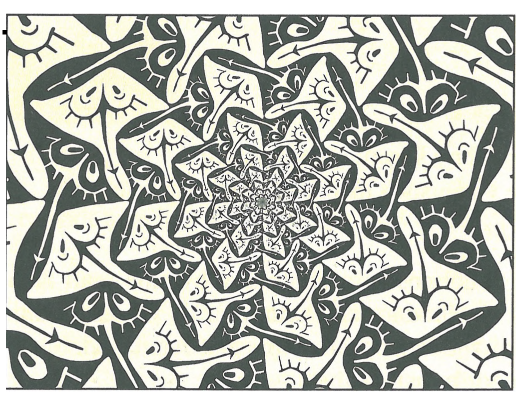
**6.** Štvorec *ABCD* a obdĺžnik *KLMN* sa zhodujú vo všetkých uhloch. Sú tieto útvary podobné? Svoje tvrdenie odôvodnite.




**7.** Štvorec *ABCD* a kosoštvorec *OPRS* sa zhodujú vo všetkých stranách. Sú tieto útvary podobné? Svoje tvrdenie odôvodnite.



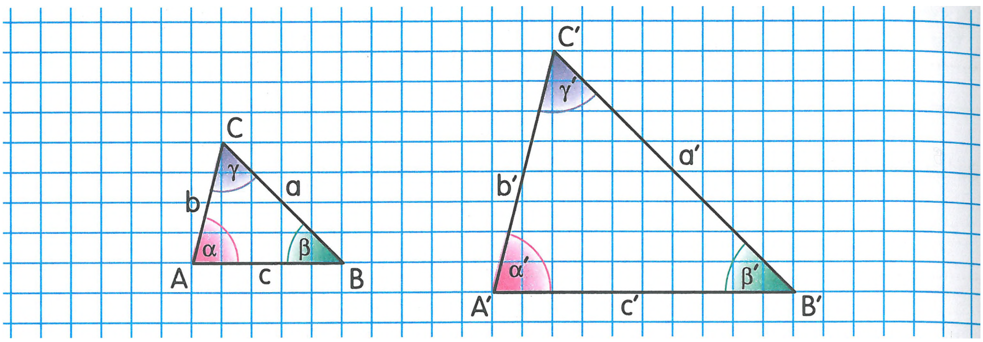

8.



Pred vami je grafika M. C. Eschera. Nájdite na obrázku podobné útvary. Určite nie sú len dva, je ich oveľa viac.

## 3.2 Podobnosť trojuholníkov

Na začiatku tohto článku sme si zopakovali zhodnosť trojuholníkov. Teraz budeme hovoriť o podobnosti trojuholníkov.
Na štvorčekovanom papieri sú znázornené trojuholníky $ABC$ a $A'B'C'$.

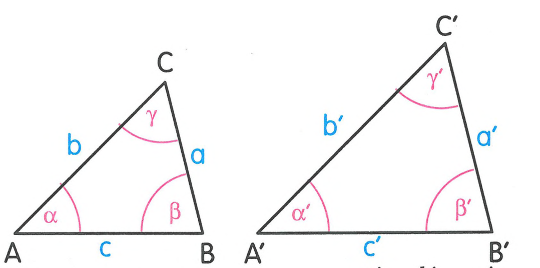



Z obrázka môžeme zapísať: $a' = 2 \,.\, a$, $b' = 2 \,.\, b$, $c' = 2 \,.\, c$

$$\frac{a'}{a} = \frac{2}{1}, \quad \frac{b'}{b} = \frac{2}{1}, \quad \frac{c'}{c} = \frac{2}{1}$$

Môžeme povedať, že pomery dĺžok odpovedajúcich si strán sú rovnaké.
Ďalej si všimnime, že trojuholníky $ABC$ a $A'B'C'$ majú rovnaký tvar, čo znamená, že majú zhodné odpovedajúce si uhly: $\alpha' \cong \alpha$, $\beta' \cong \beta$, $\gamma' \cong \gamma$.

Dva trojuholníky sú podobné, ak majú rovnaký pomer dĺžok odpovedajúcich si strán a zhodné odpovedajúce si uhly.




$$a' = k \,.\, a,\ b' = k \,.\, b,\ c' = k \,.\, c \ \Rightarrow\ \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = k$$

$$\alpha' \cong \alpha \qquad \beta' \cong \beta \qquad \gamma' \cong \gamma$$

Skrátený zápis: $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$.
Čítame: Trojuholník $A'B'C'$ je podobný s trojuholníkom ABC.
Odpovedajúce si vrcholy píšeme v zápisoch na odpovedajúcich miestach.

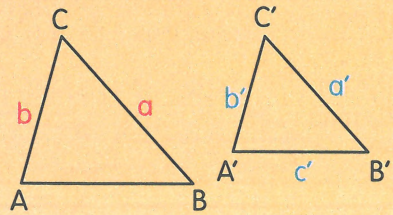
$$\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$$

Podľa uvedeného pri zisťovaní podobnosti trojuholníkov by sme mali zistiť platnosť šiestich vzťahov (tri rovnosti a tri zhodnosti). Podobne ako pri zisťovaní zhodnosti trojuholníkov sme použili vety o zhodnosti, tak aj pri zisťovaní podobnosti trojuholníkov budeme používať **vety o podobnosti trojuholníkov.**

## Vety o podobnosti trojuholníkov

***VETA* (*sss*)**

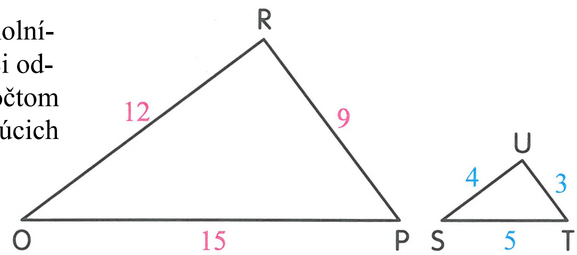
Dva trojuholníky sú podobné, ak pomery dĺžok každých dvoch odpovedajúcich si strán sa rovnajú




$$\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|B'C'|}{|BC|} = \frac{|A'C'|}{|AC|} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

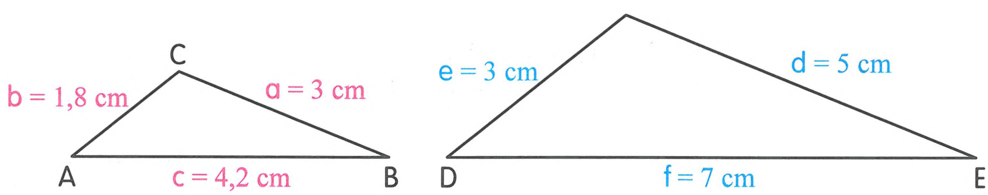
***ÚLOHA***

Na obrázku sú nakreslené dva trojuholníky *OPR* a *STU*. Odmeraním zistite, či odpovedajúce uhly sú zhodné a výpočtom zistite, či pomery dĺžok odpovedajúcich strán sú rovnaké.




***PRÍKLAD***

Rozhodnite, či trojuholníky *ABC* a *DEF* sú podobné.




***RIEŠENIE***

Δ *ABC:* 1,8; 3; 4,2
Δ *DEF:* 3; 5; 7

Ak majú byť trojuholníky podobné, musia byť čísla v druhom riadku rovnakými násobkami čísel v prvom riadku. Zistíme pomery dĺžok odpovedajúcich si strán:

$$\frac{d}{a} = \frac{5}{3}$$
$$\frac{e}{b} = \frac{3}{1{,}8} = \frac{30}{18} = \frac{5}{3}$$
$$\frac{f}{c} = \frac{7}{4{,}2} = \frac{70}{42} = \frac{5}{3}$$

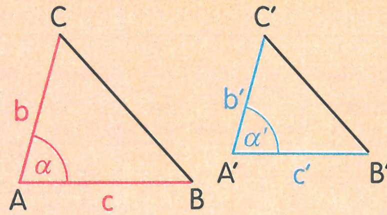
Pomer podobnosti $k = \frac{5}{3} \Rightarrow$ podľa vety (*sss*) $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

***ÚLOHA***

Trojuholníky *ABC* a *EFG* majú dĺžky strán $|AB| = 8{,}4$ cm, $|BC| = 12{,}6$ cm, $|AC| = 9{,}9$ cm, $|EF| = 4$ cm, $|FG| = 6{,}6$ cm, $|GE| = 5{,}6$ cm. Sú dané trojuholníky podobné? (Pozor na odpovedajúce si strany!)

***VETA* (*sus*)**

Každé dva trojuholníky, ktoré majú ten istý pomer dĺžok dvoch dvojíc odpovedajúcich si strán a zhodujú sa v uhle nimi určenom sú podobné.



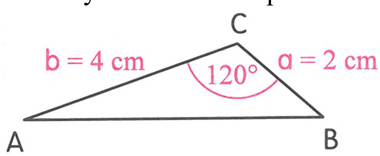

$$\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|A'C'|}{|AC|}$$

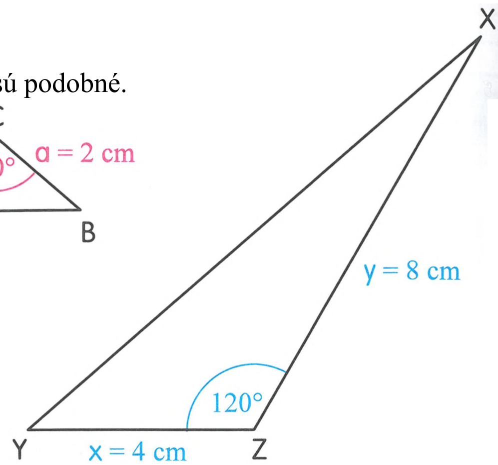
$$\sphericalangle BAC \cong \sphericalangle B'A'C' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

**[2]** ***PRÍKLAD***

Rozhodnite, či trojuholníky na obrázku sú podobné.




***RIEŠENIE***

Pretože trojuholník má najviac jeden tupý uhol, musí vrcholu uhla 120° v jednom trojuholníku odpovedať vrchol uhla 120° v druhom trojuholníku. Táto podmienka je splnená. Ak majú byť uvažované trojuholníky podobné, musí sa pomer dĺžok strán, ktoré určujú tento uhol v jednom trojuholníku rovnať pomeru dĺžok odpovedajúcich strán v druhom trojuholníku.

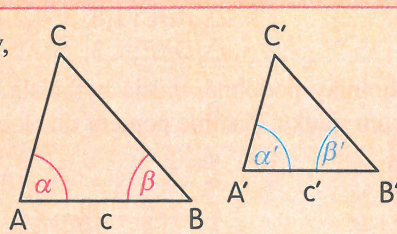
$$4 = k \cdot 2 \Rightarrow k = \frac{4}{2} = 2$$

$$8 = k \cdot 4 \Rightarrow k = \frac{8}{4} = 2$$

Teda trojuholníky na obrázku sú podobné. $\Delta\, ABC \sim \Delta\, XYZ$

***VETA* (*uu*)**

Každé dva trojuholníky, ktoré sa zhodujú v dvoch vnútorných uhloch sú podobné.



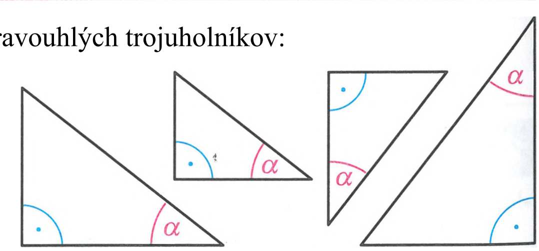

$$\sphericalangle BAC \cong \sphericalangle B'A'C'$$

$$\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle A'B'C' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

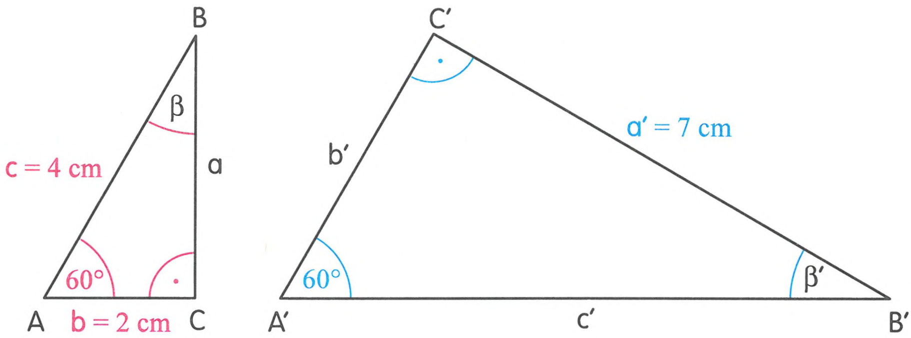
Z vety ***uu*** vyplýva veta o podobnosti pravouhlých trojuholníkov:

Každé dva pravouhlé trojuholníky, ktoré sa zhodujú v jednom ostrom uhle sú podobné.



**PRÍKLAD**

[3] Rozhodnite, či sú trojuholníky $ABC$ a $A'B'C'$ podobné. Určte dĺžky všetkých strán a veľkosti všetkých uhlov týchto trojuholníkov.




**RIEŠENIE**

Pretože trojuholníky $\Delta\ ABC$ a $\Delta\ A'B'C'$ sú pravouhlé a zhodujú sa v jednom ostrom uhle, sú podobné:

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

Súčet vnútorných uhlov každého trojuholníka je 180°, uhol $\beta$ má teda veľkosť 30°.
Z podobnosti našich trojuholníkov vyplýva, že $\beta = \beta' = 30°$.

Poznáme: $b = 2$ cm $a' = 7$ cm
$c = 4$ cm $b' = \dots$ cm
$a = \dots$ cm $c' = \dots$ cm

Z Pytagorovej vety: Z podobnosti trojuholníkov:

$a^2 = c^2 - b^2$ $\qquad a' = k \,.\, a,\ b' = k \,.\, b,\ k = \frac{a'}{a}$

$a^2 = 4^2 - 2^2$ $\qquad k = \frac{7}{\sqrt{12}},\ b' = \frac{7}{\sqrt{12}} \cdot 2,\ c' = \frac{7}{\sqrt{12}} \cdot 4$

$a^2 = 16 - 2$

$a^2 = 12$ $\qquad k = 2{,}02;\ b' = 4{,}04;\ c' = 8{,}08$

$a = \sqrt{12}$

$a \doteq 3{,}46$ $\qquad b' = 4{,}04$ cm; $c' = 8{,}08$ cm

$a \doteq 3{,}46$ cm

***Odpoveď:*** V daných trojuholníkoch platí približne: $a = 3{,}46$ cm, $b' = 4{,}04$ cm, $c' = 8{,}08$ cm a $\beta = 30°$, $\beta' = 30°$.

**PRÍKLAD**

[4] Daný je trojuholník $XYZ$, ktorého strany majú dĺžky $x = 6$ cm, $y$; $= 4$ cm, $z = 8$ cm. Vypočítajte dĺžky strán trojuholníka $X_1Y_1Z_1$, ktorý je podobný s trojuholníkom $XYZ$, ak koeficient podobnosti je $k = \frac{3}{4}$. Zostrojte ho.

**RIEŠENIE**

Podľa zadania trojuholníky $XYZ$ a $X_1Y_1Z_1$ majú byť podobné s koeficientom podobnosti $\frac{3}{4}$, preto o ich stranách platí:

$$x_1 = \frac{3}{4} \cdot x,\ y_1 = \frac{3}{4} \cdot y,\ z_1 = \frac{3}{4} \cdot z$$

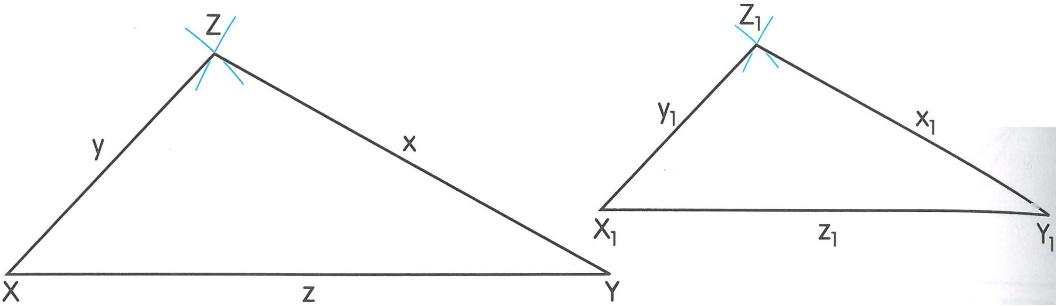
**Na základe tohto vypočítame dĺžky strán trojuholníka $X_1Y_1Z_1$:**

$$x_1 = \frac{3}{4} \cdot 6\text{ cm} = 4{,}5\text{ cm}$$

$$y_1 = \frac{3}{4} \cdot 4\text{ cm} = 3\text{ cm}$$

$$z_1 = \frac{3}{4} \cdot 8\text{ cm} = 6\text{ cm}$$

Zostrojíme trojuholníky podľa vety *sss* o podobnosti trojuholníkov.




## CVIČENIA

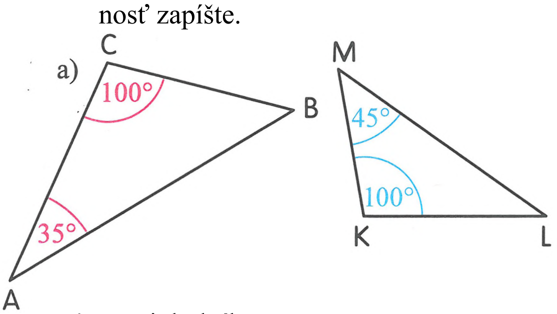
1. V stĺpcoch tabuľky sú uvedené dĺžky strán štyroch dvojíc trojuholníkov $ABC$, $A'B'C'$. Ktoré z týchto trojuholníkov sú podobné? Svoje tvrdenie odôvodnite.

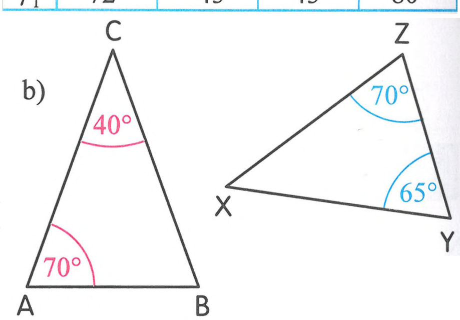
| | 1. | 2. | 3. | 4. |
|---|---|---|---|---|
| $a$ | 3 cm | 2 dm | 8 mm | 26 cm |
| $b$ | 5 cm | 1,2 dm | 6 mm | 24 cm |
| $c$ | 6 cm | 1,2 dm | 10 mm | 25 cm |
| $a'$ | 3 cm | 1 dm | 4 cm | 28 cm |
| $b'$ | 5 cm | 0,6 dm | 3 cm | 26 cm |
| $c'$ | 6 cm | 0,5 dm | 5 cm | 27 cm |

2. V stĺpcoch tabuľky sú uvedené dĺžky strán a veľkosti uhlov trojuholníkov $ABC$, $A_1B_1C_1$. Ktoré z týchto trojuholníkov sú podobné? Svoje tvrdenie odôvodnite.

| | 1. | 2. | 3. | 4. |
|---|---|---|---|---|
| $a$ | 3 cm | 1,7 dm | 27 mm | 24 cm |
| $b$ | 4 cm | 2 dm | 18 mm | 64 dm |
| $\gamma$ | 72° | 60° | 45° | 80° |
| $a_1$ | 27 mm | 3,4 cm | 24 mm | 24 cm |
| $b_1$ | 36 mm | 4 dm | 15 mm | 64 cm |
| $\gamma_1$ | 72° | 45° | 45° | 80° |

3. Zistite, či dvojice trojuholníkov na obr. a), b) sú podobné? Ak áno, platnú podobnosť zapíšte.




**4.** Trojuholníky $ABC$, $DEF$, $GHK$, $LMN$ majú vnútorné uhly: $|\sphericalangle BAC| = 40°$, $|\sphericalangle ABC| = 60°$, $|\sphericalangle DEF| = 61°$, $|\sphericalangle EFD| = 40°$, $|\sphericalangle HGK| = 80°$, $|\sphericalangle HKG| = 40°$, $|\sphericalangle MNL| = 79°$, $|\sphericalangle LMN| = 40°$. Ktoré dva z týchto trojuholníkov sú podobné? Výsledok zapíšte.

5. Odôvodnite, prečo každé dva rovnostranné trojuholníky sú podobné.

6. Odôvodnite, prečo dva rovnoramenné trojuholníky sú podobné, keď sa zhodujú v uhle pri základni.

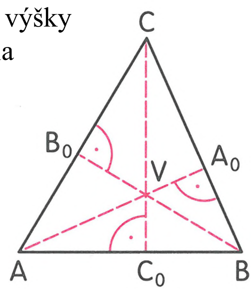
7. Strany trojuholníka *KLM* majú veľkosť 6 m, 7 m, 8 m. Akú veľkosť majú strany trojuholníka *K'L'M'* podobného s trojuholníkom *KLM,* keď obvod trojuholníka *K'L'M'* je a) 63 m, b) 14 m.

8. Daný je trojuholník *RST,* ktorého strany sú *r, s, t,* jeho obvod je *o.* Trojuholník $R_1S_1T_1$ je podobný s trojuholníkom *RST* s pomerom (koeficientom) podobnosti *k.* Potom obvod $o_1$ trojuholníka $R_1S_1T_1$ je
a) $o_1 = k \cdot o$  b) $o_1 = k^2 \cdot o$  c) $o_1 = k + o$  Určte správnu odpoveď.

9. Zostrojte trojuholník *ABC,* ktorého strany majú dĺžky $a = 4{,}5$ cm, $b = 3$ cm, $c = 6$ cm; uhly tohto trojuholníka označte $\alpha$, $\beta$, $\gamma$. Potom zostrojte trojuholník *A'B'C'* tak, aby platilo $b' = \frac{3}{4} \cdot b$, $\alpha' \cong \alpha$, $\gamma' \cong \gamma$. Sú trojuholníky *ABC* a *A'B'C'* podobné?

10. Daný je trojuholník *XYZ*, ktorého základňa je *z* a výška *v*. Jeho obsah je *S.* Trojuholník *X'Y'Z'* je podobný s trojuholníkom *XYZ* s koeficientom podobnosti *k.* Potom obsah *S'* trojuholníka *X'Y'Z'* je:
a) $S' = k \cdot S$  b) $S' = k^2 \cdot S$  Svoje tvrdenie odôvodnite.

11. Daný je ostrouhlý trojuholník *ABC.* V ňom sú vyznačené výšky a ich priesečník *V.* Preskúmajte, či sú nasledujúce tvrdenia pravdivé:
a) $\triangle AA_0C \sim \triangle BB_0C$
b) $\triangle AA_0B \sim \triangle CC_0B$
c) $\triangle AB_0B \sim \triangle AC_0C$
d) $\triangle AA_0C \sim \triangle AB_0V$
e) $\triangle AA_0B \sim \triangle AC_0V$

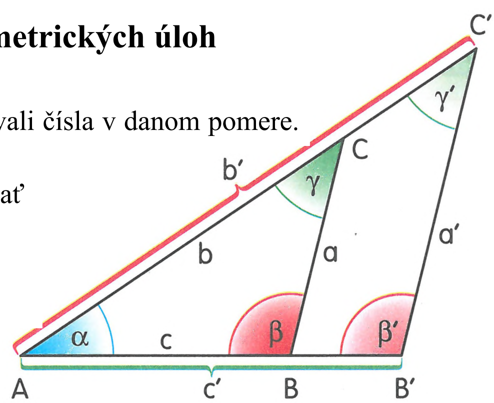



## 3.3 Použitie podobnosti pri riešení geometrických úloh

V 7. ročníku sme zmenšovali alebo zväčšovali čísla v danom pomere. Tieto úlohy sme riešili výpočtom.

Teraz sa naučíme zmenšovať alebo zväčšovať úsečku v danom pomere konštrukčne.

Všimnime si $\Delta$ *ABC* a $\Delta$ *AB'C'* nakreslené na obrázku. Tieto trojuholníky sú podobné.



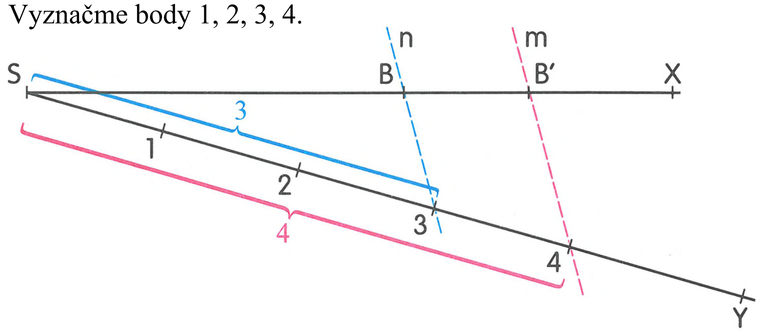

O ich stranách platí $c' = k \cdot c$, $b' = k \cdot b$, uhol $\alpha$ majú spoločný. Z podobnosti vyplýva, že aj ostatné uhly majú zhodné, teda $\alpha \cong \alpha'$, $\beta \cong \beta'$. Keďže uhly $\gamma$ a $\gamma'$ sú priľahlé k priamke *CC'* a sú zhodné, potom úsečky *BC* a *B'C'* sú rovnobežné. Túto vlastnosť využijeme pri riešení nasledujúcich príkladov.

**[1]** ***PRÍKLAD***

Úsečku dĺžky 5 cm zmeňte konštrukčne v pomere 4 : 3 . Aká bude jej dĺžka?

***RIEŠENIE***

Zvoľme si ľubovoľný bod $S$ a ľubovoľnú polpriamku $SX$. Na nej narysujeme bod $B$ tak, aby $|SB| = 5$ cm. Bodom $S$ veďme ďalšiu polpriamku $SY$, ktorá neobsahuje bod $B$. Na polpriamku $SY$ od bodu $S$ nanesme aspoň štyrikrát úsečku vhodne zvolenej dĺžky. Vyznačme body 1, 2, 3, 4.




Bod 3 spojíme s bodom $B$ priamkou $n$. Rovnobežka $m \parallel n$ vedená bodom 4 pretne polpriamku SX v bode $B'$.

Vznikli podobné trojuholníky $S3B$, $S4B'$. Z podobnosti vyplýva $|SB'| : |SB| = 4 : 3$ , čiže

$$|SB'| = \frac{4}{3} \cdot |SB|$$

Veľkosť $|SB'|$ predstavuje $\frac{4}{3}$ z úsečky veľkosti 5 cm.

V tomto prípade sme **úsečku konštrukčne zväčšili v pomere 4 : 3.**

**[2]** ***PRÍKLAD***

Zostrojte úsečku $AX$, ktorej dĺžka sa rovná dĺžky $\frac{3}{5}$ úsečky $AB$. Dĺžka úsečky $AB$ je 7 cm.

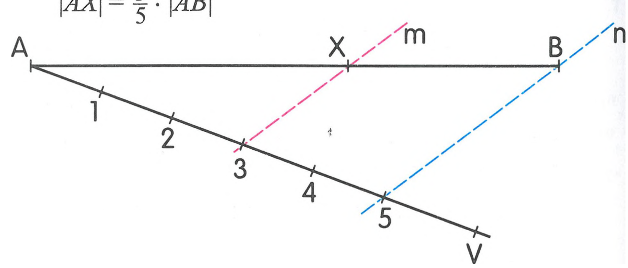
***RIEŠENIE***

Narysujeme úsečku $AB$ dĺžky 7 cm. Bod $X$ bude ležať na danej úsečke, pretože dĺžka úsečky $AX$ je $\frac{3}{5}$ dĺžky úsečky $AB$, platí

$$|AX| = \frac{3}{5} \cdot |AB|$$

Bodom $A$ veďme polpriamku $AV$. Na túto polpriamku nanesieme postupne päťkrát (5 je v menovateli $\frac{3}{5}$) za sebou úsečku zvolenej dĺžky a dostaneme body 1, 2, 3, 4, 5. Bodom $B$ a bodom 5 vedieme priamku $n$. Bodom 3 (odpovedá čitateľovi zlomku $\frac{3}{5}$) vedieme priamku $m \parallel n$. Priesečník priamky $m$ a úsečky $AB$ je hľadaný bod $X$, pre ktorý platí

$$|AX| = \frac{3}{5} \cdot |AB|$$




V tomto prípade je úsečka $AX$ **zmenšením úsečky $AB$ v pomere 3 : 5.**

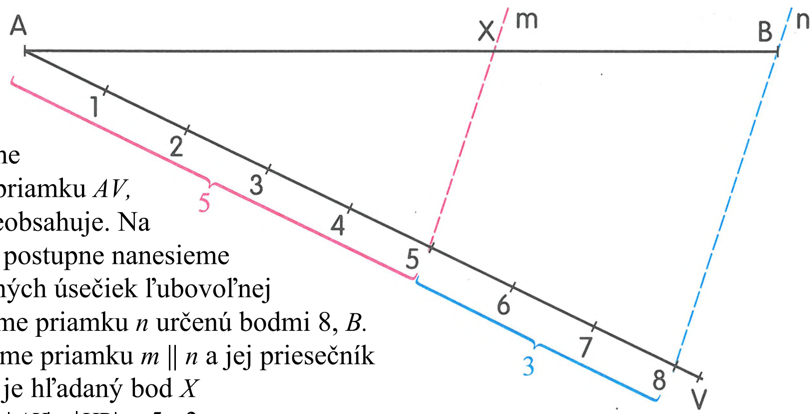
**[3] PRÍKLAD**

Danú úsečku $AB$ dĺžky 10 cm rozdeľte na dve úsečky, ktorých dĺžky sú v pomere 5 : 3 .

**RIEŠENIE**

Zostrojíme úsečku $AB$ dĺžky 10 cm. Bodom $A$ veďme ľubovoľnú polpriamku $AV$, ktorá úsečku neobsahuje. Na polpriamku $AV$ postupne nanesieme 5 + 3 = 8 zhodných úsečiek ľubovoľnej dĺžky. Zostrojíme priamku $n$ určenú bodmi 8, $B$. Bodom 5 vedieme priamku $m \parallel n$ a jej priesečník s priamkou $AB$ je hľadaný bod $X$

$$|AX| : |XB| = 5 : 3$$

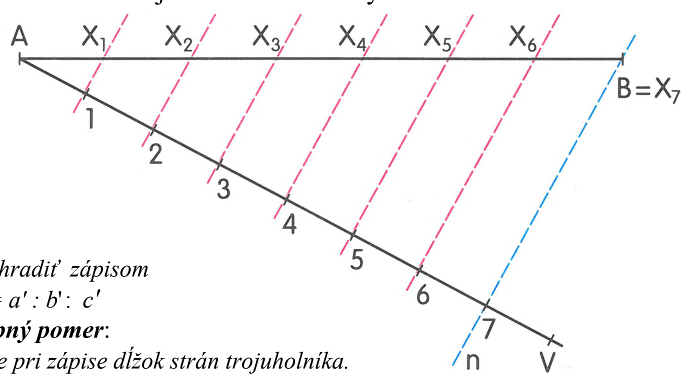



**[4] PRÍKLAD**

Daná je úsečka $AB$ dĺžky 8 cm. Rozdeľte ju na sedem zhodných častí.

**RIEŠENIE**

Využijeme postup použitý v predchádzajúcom príklade.




**POZNÁMKA**

*Zápis* $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$ *môžeme nahradiť zápisom*

$$a : b : c = a' : b' : c'$$

*Zápisu a : b : c sa hovorí* ***postupný pomer****:*
*Postupný pomer často využívame pri zápise dĺžok strán trojuholníka.*

**[5] PRÍKLAD**

Zostrojte trojuholník $ABC$, v ktorom o dĺžkach strán platí $a : b : c = 3 : 4 : 5$ a jeho výška $v_c = 5$ cm.

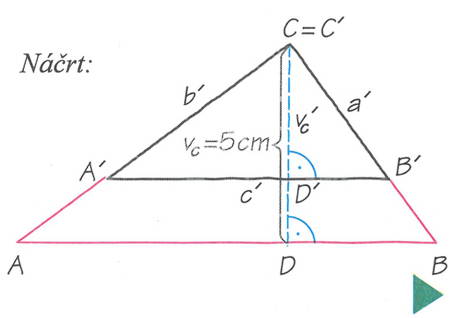
**RIEŠENIE**

*Rozbor:*

Tým, že je daný postupný pomer dĺžok strán, dĺžku strán nepoznáme ani ich nevieme vypočítať. Na základe daného pomeru môžeme zostrojiť trojuholník, ktorý bude s daným trojuholníkom podobný. Teda najskôr zostrojíme trojuholník $A'B'C'$ tak, aby boli:

$a' = 3$ diely; $b' = 4$ diely; $c' = 5$ dielov

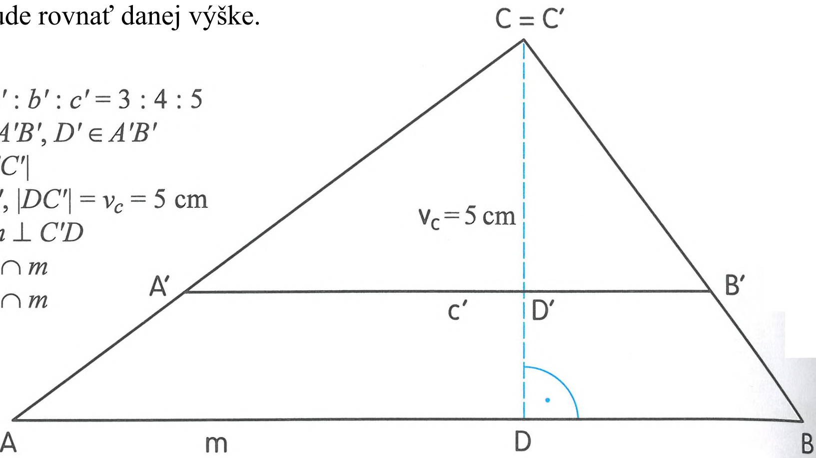
*Náčrt:*



V ňom vyznačíme výšku $v'_c$. Táto však sa nemusí rovnať danej výške. Potom zostrojíme $\Delta\ ABC \sim \Delta\ A'B'C'$, ktorého výška sa bude rovnať danej výške.

*Konštrukcia:*

1. $\triangle A'B'C'$; $a' : b' : c' = 3 : 4 : 5$
2. $D'$; $D'C' \perp A'B'$, $D' \in A'B'$
3. $v'_c$; $v'_c = |D'C'|$
4. $D$; $D \in C'D'$, $|DC'| = v_c = 5$ cm
5. $m$; $D \in m$, $m \perp C'D$
6. $A$; $A \in C'A' \cap m$
7. $B$; $B \in C'B' \cap m$
8. $\triangle ABC$




*Skúška:* Trojuholník $A'B'C'$ má strany v pomere 3 : 4 : 5, potom aj trojuholník $ABC$ podobný s $A'B'C'$ má strany v tom istom pomere. Úsečka $CD = v_c$ je výškou $\Delta\ ABC$ a má dĺžku 5 cm, potom $\Delta\ ABC$ spĺňa podmienky zadané v príklade.

*Diskusia:* Pretože čísla v postupnom pomere spĺňajú trojuholníkovú nerovnosť, trojuholník $A'B'C'$ možno vždy zostrojiť. Potom $\Delta\ ABC$ s výškou $v_c = 5$ cm je jediné riešenie.

## *CVIČENIA*

1. Úsečku $AB$ dĺžky 7 cm zmeňte v pomere:
   a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{5}{4}$ c) $\frac{7}{4}$
   Zostrojenú úsečku vždy odmerajte a výsledok porovnajte s výpočtom.

2. V danom pomere $k = \frac{7}{6}$ zmeňte úsečky $|AB| = 7$ cm, $|CD| = 5{,}7$ cm, $|EF| = 10{,}5$ cm.

3. Narysujte ľubovoľnú úsečku a zmeňte ju v pomere a) $\frac{3}{5}$; b) $\frac{5}{3}$.

4. Narysujte ľubovoľnú úsečku $MN$ a rozdeľte ju na dve úsečky v pomere
   a) 2 : 5 b) 4 : 3 c) 5 : 7

5. Úsečku dĺžky 12 cm rozdeľte na a) 4, b) 5, c) 9 zhodných úsečiek.

6. K trojuholníku $ABC$, ktorého strany majú dĺžky $a = 4$ cm, $b = 4{,}2$ cm, $c = 4{,}8$ cm zostrojte podobný trojuholník A'B'C', s koeficientom podobnosti $k = 1{,}5$.

7. Zostrojte trojuholník $ABC$, keď poznáte pomer strán $a : b = 3 : 4$, uhol $\gamma = 72°$ a dĺžku ťažnice $t_c = 6$ cm.

## 3.4 Použitie podobnosti v praxi

V praxi sa často stretávame s podobnosťou a človek ju aj mnohokrát využíva.

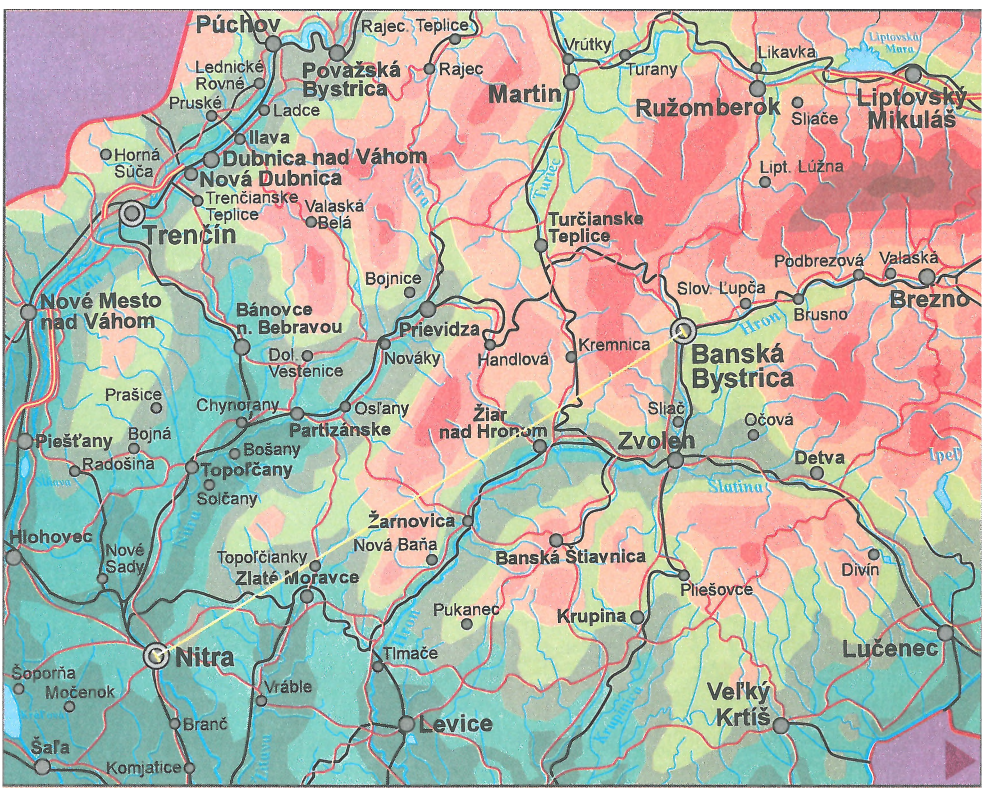
Inžinieri navrhujú stroje, konštruktéri podľa výkresov, ktoré sú vyhotovené v určitej mierke, vyrábajú výrobky, kartografi zhotovujú v istej mierke mapy. **Mierka** to nie je nič iné ako **pomer (koeficient) podobnosti.**

Mierka sa najčastejšie určuje pomerom, napr. 1 : 250 000. Poradie členov pomeru v mierke je dohodnuté takto: je to **pomer dĺžky úsečky na mape k dĺžke jej odpovedajúcej úsečky v skutočnosti.** Obidve dĺžky musia byť vyjadrené **v tých istých jednotkách.** Uveďme niekoľko príkladov mierok z máp a plánov:

1 : 250 000 .......... 1 cm na mape je 250 000 cm v skutočnosti, čo je 2,5 km
1 : 100 000 .......... 1 cm na mape je 100 000 cm v skutočnosti, čo je 1 km
1 : 100 .......... 1 cm na pláne je 100 cm v skutočnosti, čo je 1 m
5 : 1 ........... 5 cm na pláne je 1 cm v skutočnosti

[1] ***PRÍKLAD***

Na obrázku je časť mapy Slovenskej republiky v mierke je 1 : 1 100 000. Odmerajte dĺžku úsečky **Nitra - Banská Bystrica** a vypočítajte vzdialenosť týchto miest. Porovnajte takto zistenú vzdialenosť so vzdialenosťou po ceste, ktorá je v tabuľke vzdialeností 116 km.



## RIEŠENIE

Odmeraním sme zistili, že vzdialenosť Nitry a Banskej Bystrice na mape je asi 8,2 cm. Vzhľadom na mierku 1 : 1 100 000 dostaneme rovnosť pomerov

$$\frac{\text{vzdialenosť miest na mape}}{\text{vzdialenosť miest v skutočnosti}} = \frac{1}{1\,100\,000}$$

$$\frac{8{,}2 \text{ cm}}{|N, BB|} = \frac{1}{1\,100\,000}$$

$$|N,BB| = 1\,100\,000 \,.\, 8{,}2 \text{ cm} = 9\,020\,000 \text{ cm} = 90{,}2 \text{ km}$$

Môžeme využiť aj priamu úmernosť:

Mierka 1 : 1 100 000 znamená, že 1 cm na mape zodpovedá vzdialenosti 11 km v skutočnosti. Ak označíme x vzdialenosť miest Nitry a Banskej Bystrice, potom

1 cm . . . . 11 km

<u>8,2 cm . . . . x km</u>

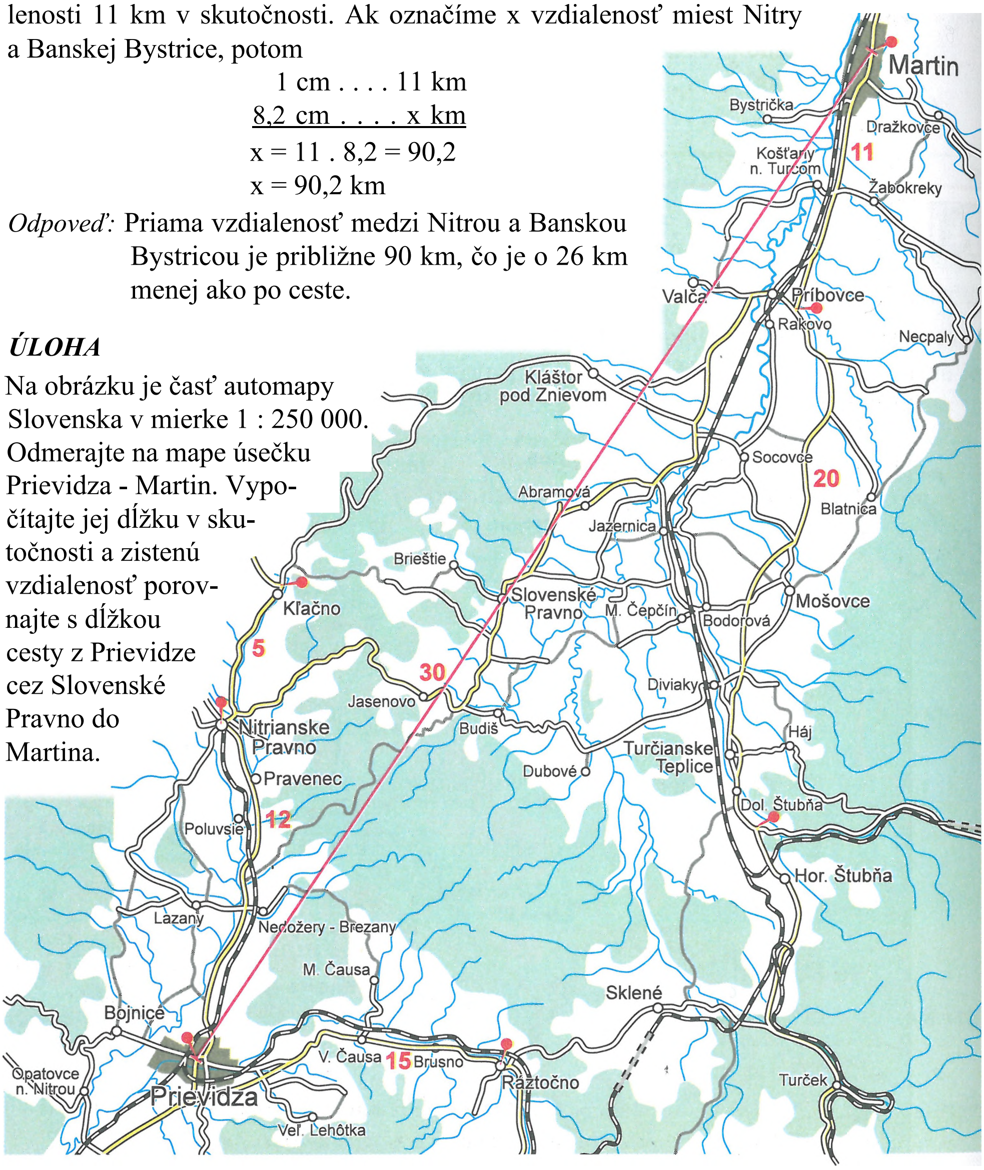
x = 11 . 8,2 = 90,2

x = 90,2 km

*Odpoveď:* Priama vzdialenosť medzi Nitrou a Banskou Bystricou je približne 90 km, čo je o 26 km menej ako po ceste.

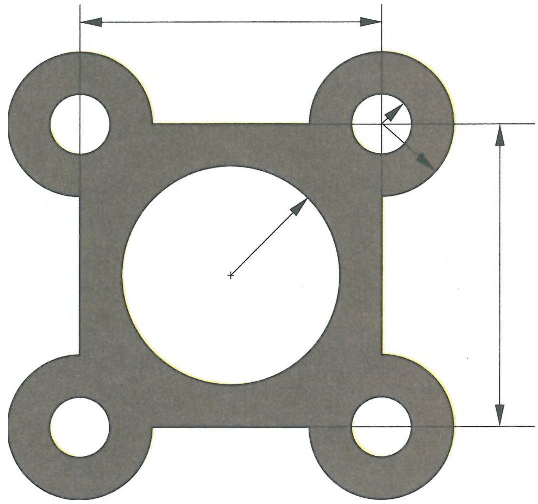
## ÚLOHA 1

Na obrázku je časť automapy Slovenska v mierke 1 : 250 000. Odmerajte na mape úsečku Prievidza - Martin. Vypočítajte jej dĺžku v skutočnosti a zistenú vzdialenosť porovnajte s dĺžkou cesty z Prievidze cez Slovenské Pravno do Martina.



**ÚLOHA**

Na obrázku je znázornená tesniaca podložka hlavy jednovalcového motora. Odmeraním zistite skutočné rozmery (aj polomery otvorov) podložky, keď výkres je v mierke 1 : 2.



**PRÍKLAD**

Zvislá tyč vysoká 1 m vrhá na vodorovnú cestu tieň dlhý 60 cm. Aký vysoký je telefónny stĺp, ktorého tieň na tejto ceste má v tú istú dobu dĺžku 4,2 m.

**RIEŠENIE**

Tyč a jej tieň určujú pravý uhol a tiež telefónny stĺp je kolmý na svoj tieň. Slnečné lúče prechádzajúce horným koncom tyče a stĺpa sú rovnobežné. Tým vznikajú pravouhlé trojuholníky, ktoré sa zhodujú vo všetkých uhloch; sú to podobné trojuholníky.

Označme $a_1$ výšku tyče, $b_1$ dĺžku jej tieňa, $a_2$ výšku telefónneho stĺpa a $b_2$ dĺžku jeho tieňa.
Potom platí

$a_1 : b_1 = a_2 : b_2$

$a_1 = 1$ m $\quad a_2 = \dots$ m

$b_1 = 60$ cm $= 0,6$ m $\quad b_2 = 4,2$ m

$1 : 0,6 = a_2 : 4,2$

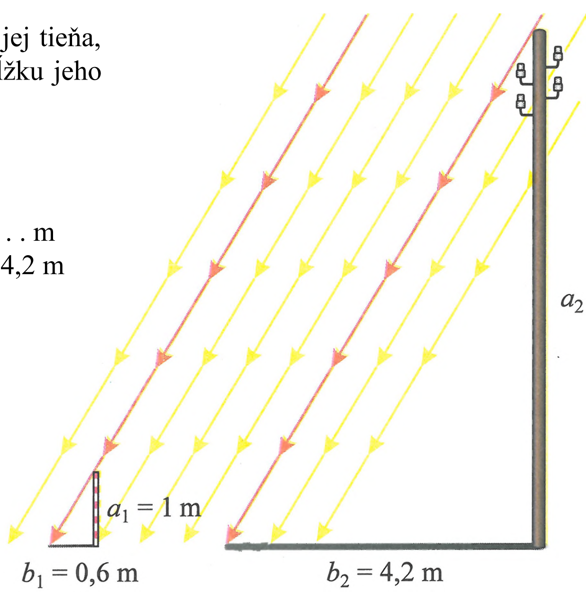
$0,6 \,.\, a_2 = 1 \,.\, 4,2$

$a_2 = \frac{4,2}{0,6}$

$a_2 = 7$

$a_2 = 7$ m

*Odpoveď:* Telefónny stĺp je vysoký 7 m.



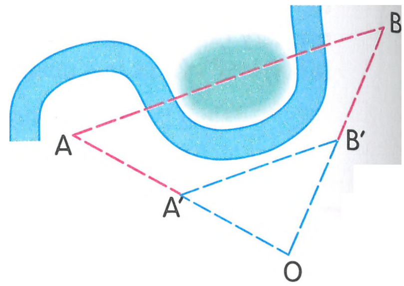

**POZNÁMKA**

*Pri riešení príkladu sme využili vetu: Pomer dĺžok odvesien pravouhlého trojuholníka sa rovná pomeru dĺžok odpovedajúcich odvesien k nemu podobného trojuholníka.*

## 3 ÚLOHA

Miesta $A$, $B$ na obrázku označujú umiestnenie stožiarov vysokého napätia. Ohyb rieky a močariská v ohybe nedovoľujú priamo odmerať ich vzdialenosť. Odôvodnite správnosť nasledujúceho postupu:

Zvolíme miesto $O$, ktorého vzdialenosti od miest $A$, $B$ možno dobre odmerať. Ďalej určíme stred $A'$ úsečky $OA$ a stred $B'$ úsečky $OB$. Potom vzdialenosť bodov $A'B'$ (ktorú vieme odmerať) sa rovná polovici hľadanej vzdialenosti miest $A$, $B$.



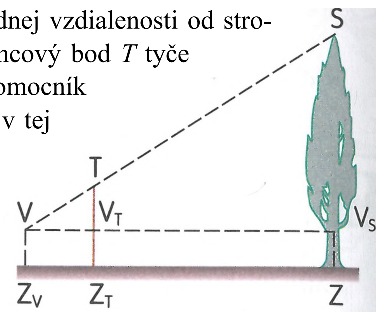

## 4 ÚLOHA

Odôvodnite tento postup merania výšky predmetov:

Asi 2 m dlhú tyč zapichneme zvisle do zeme vo vhodnej vzdialenosti od stromu. Od tyče odstupujeme tak ďaleko, až uvidíme koncový bod $T$ tyče v jednej priamke s vrcholom $S$ stromu. Potom náš pomocník označí na tyči a na strome body $V_T$, $V_S$, ktoré vidíme v tej istej priamke. Odmeriame dĺžky $|VV_T|$, $|VV_S|$, $|TV_T|$ a z týchto údajov zistíme výšku stromu $SV_S$

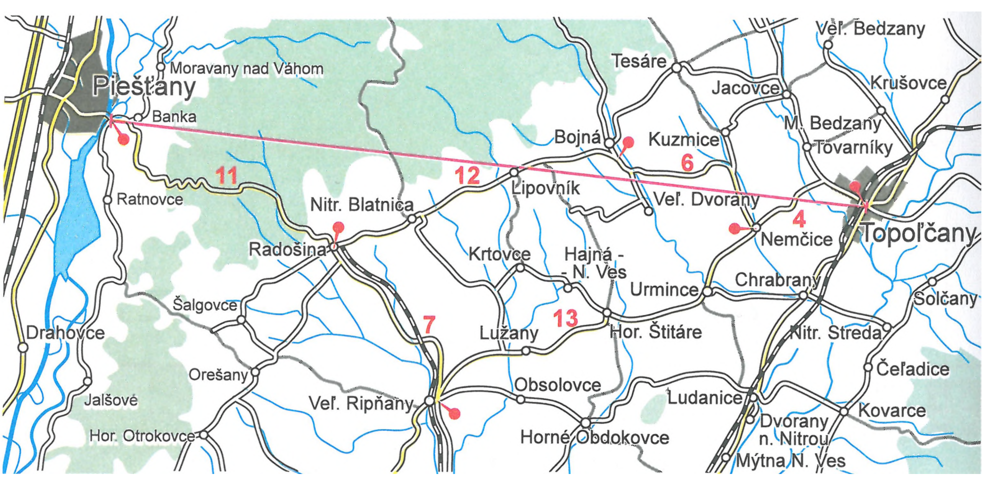
$$|SV_S| = |TV_T| \cdot \frac{|VV_S|}{|VV_T|}$$

Môžeme tento spôsob použiť aj pri meraní na svahu?

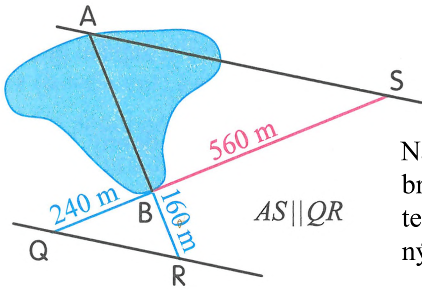



## CVIČENIA

1. Na obrázku je časť automapy v mierke 1 : 250 000. Odmerajte na mape vzdialenosť miest Topoľčany - Piešťany a vypočítajte skutočnú priamu vzdialenosť týchto miest. Potom zistite na mape dĺžky ciest z Topoľčian do Piešťan cez Bojnú a cez Veľké Ripňany. Zistené vzdialenosti porovnajte s vypočítanou vzdialenosťou.

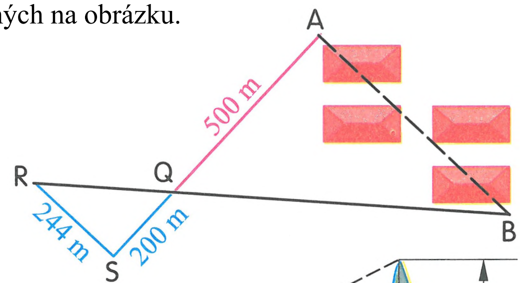


2. Pod stromom stojí Miro a pozoruje svoj tieň a tieň stromu. Miro je vysoký 180 cm a jeho tieň má dĺžku 1,5 m. Tieň stromu je trikrát tak dlhý ako Mirov tieň. Aký vysoký je strom?

3. 

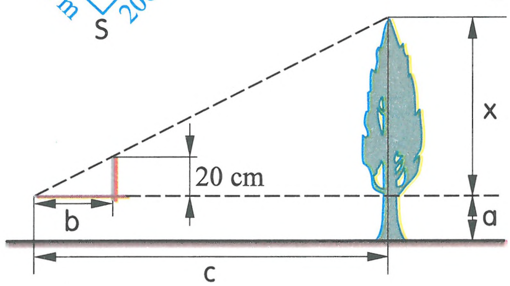

Na obrázku je znázornený rybník a na jeho brehu sú vyznačené dva body *A, B.* Vypočítajte vzdialenosť bodov *A, B z* údajov vyznačených na obrázku.

4. Vypočítajte vzdialenosť bodov *A, B* z údajov vyznačených na obrázku za predpokladu, že *AB* || *RS.*



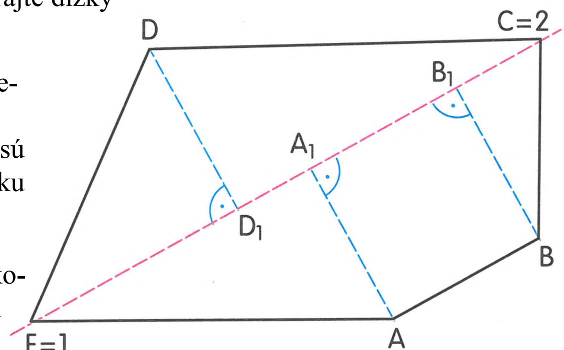

5. Opäť treba vypočítať výšku stromu. Na to má poslúžiť pomôcka a údaje znázornené na obrázku. Vypočítajte výšku stromu x, ak sú dané tieto číselné údaje:

   a) $a = 1{,}8$ m, $b = 24$ cm, $c = 20$ m;
   b) $a = 1{,}8$ m, $b = 14$ cm, $c = 25$ m;
   c) $a = 1{,}8$ m, $b = 18$ cm, $c = 15$ m.

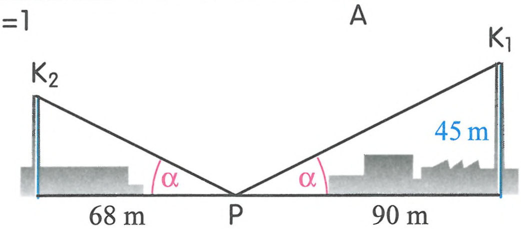



6. Na obrázku je v mierke 1 : 1 000 znázornený pozemok, ktorý má tvar nepravidelného päťuholníka *ABCDE.* Odmerajte dĺžky jeho strán a potom vypočítajte:

   a) dĺžku pletiva potrebného na jeho oplotenie;
   b) výmeru tohto pozemku; nato sú zostrojené kolmice na priamku *EC.*




7. Pozorovateľ vidí dva továrenské komíny $K_1$, $K_2$ v rovnakom zornom uhle α. Od komína $K_1$ je vzdialený 90 m a od komína $K_2$ 68 m. Komín $K_1$ má výšku 45 m. Akú výšku má komín $K_2$?
(Predpokladáme, že oko pozorovateľa a päty obidvoch komínov sú v tej istej vodorovnej rovine.)



## VYSKÚŠAJTE SA!

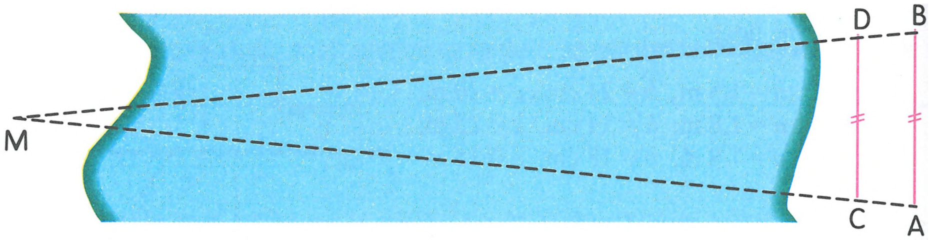
1. O stranách trojuholníkov $ABC$, $MPQ$ platí: $|AB| = 2 \cdot |PQ|$, $|AC| = 2 \cdot |MP|$, $|BC| = 2 \cdot |MQ|$. Zapíšte podobnosť týchto trojuholníkov a zapíšte aj dvojice navzájom prislúchajúcich uhlov.

2. Daný je trojuholník $ABC$. Zostrojte trojuholník $PQR$ podobný trojuholníku $ABC$ tak, aby:
   a) koeficient podobnosti $k = 0{,}5$;
   b) pomer podobnosti bol 5 : 4.

3. Trojuholníky $DEF$, $KLM$ sú podobné; $|DE| = 16$ m, $|KL| = 24$ m, $|KM| = 33$ m, $|EF| = 18$ m. Vypočítajte veľkosti strán $DF$, $LM$.

4. Tieň stĺpa je 19,2 m dlhý. Tieň človeka 1,6 m vysokého je v tej istej chvíli 2,4 m dlhý. Aký vysoký je stĺp?

5. Aby ste mohli určiť vzdialenosť bodu $A$ od neprístupného bodu $M$, vytýčte priamku $AB$ a na priamkach $AM$, $BM$ zvoľte body $C$, $D$ tak, aby $CD \parallel AB$. Vypočítajte vzdialenosť bodov $A$, $M$, keď $|AB| = 40$ m, $|AC| = 13{,}5$ m, $|CD| = 37{,}5$ m.




6. Zostrojte trojuholník $ABC$, v ktorom $a : b : c = 3 : 5 : 6$ a jeho výška $v_a = 6$ cm.

7. Úsečku $AB$ dĺžky 8 cm zmeňte v pomere a) $k = \frac{2}{3}$; b) $k = \frac{5}{3}$.

8. Úsečku $AB$ dĺžky 7 cm rozdeľte v pomere $3 : 5$.

9. Pozorovateľ položil na zem vodorovné zrkadlo a odstúpil od neho tak ďaleko, až v ňom uvidel vrchol veže. Potom odmeral vzdialenosť $d_1$ miesta, kde stál od zrkadla, ďalej odmeral vzdialenosť $d_2$ zrkadla od päty veže a vypočítal výšku veže. Aká vysoká je veža, keď $d_1 = 2{,}4$ m, $d_2 = 48{,}9$ m a výška očí pozorovateľa je 1,7 m.

10. Rám obrazu je zhotovený z lišty širokej 6 cm. Rozmery obrazu sú 74 cm a 57 cm. Sú vnútorné a vonkajšie okraje rámu dva podobné obdĺžniky?

## 3.5 Podobné zobrazenia

R Zobrazenie v rovine nazývame **podobným zobrazením** alebo **podobnosťou,** ak každej úsečke $AB$ priradí úsečku $A'B'$ tak, že platí $|AB'| = k \,.\, |AB|$, kde $k > 0$, pričom $k$ je **pomer (koeficient) podobnosti.**

Vlastnosti podobného zobrazenia v rovine môžeme zhrnúť do týchto troch bodov:

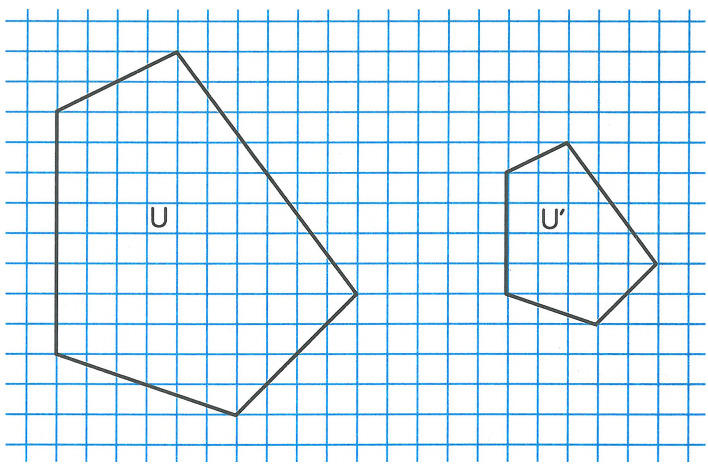
a) Obrazom priamky $AB$ je priamka $A'B'$; obrazy rovnobežných priamok sú rovnobežné priamky.

b) Obrazom polpriamky $AB$ je polpriamka $A'B'$, obrazy opačných polpriamok sú opačné polpriamky.

c) Obrazom uhla $\sphericalangle\, AVB$ je uhol $\sphericalangle\, A'V'B'$ zhodný s uhlom $\sphericalangle\, AVB$.

V predchádzajúcich článkoch sme hovorili o podobných útvaroch. Teraz môžeme podobnosť geometrických útvarov charakterizovať aj takto:

Dva geometrické úvary **U, U'** sa nazývajú **podobné útvary,** ak možno nájsť podobné zobrazenie, v ktorom útvar **U** bude vzorom a útvar **U'** jeho obrazom.




R **Rovnoľahlosť**

Významný špeciálny prípad podobného zobrazenia v rovine je **rovnoľahlosť** alebo **homotetia so stredom** ***S*** **a koeficientom rovnoľahlosti** κ *(čítaj kappa).*

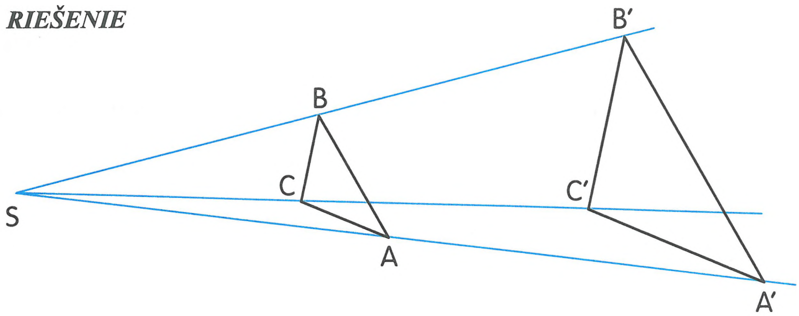
1 ***PRÍKLAD***

R Na obrázku na strane 78 je trojuholník $ABC$ a bod $S$, ktorý leží mimo neho. Na polpriamkach $SA, SB, SC$ sú zostrojené v poradí body $A', B', C'$, pre ktoré platí

$$|SA'| = 2 \,.\, |SA|,\ |SB'| = 2 \,.\, |SB|,\ |SC'| = 2 \,.\, |SC|$$

Zistite, čo platí o trojuholníkoch $ABC$ a $A'B'C'$.

***RIEŠENIE***




Bod $S$ neleží na žiadnej z priamok $AB$, $BC$, $CA$. Vzniknú preto trojuholníky $SAB$, $SBC$, $SCA$ a aj trojuholníky $SA'B'$, $SB'C'$, $SC'A'$. Podľa vety *sus* o podobnosti trojuholníkov platí $\triangle SA'B' \sim \triangle SAB$, $\triangle SB'C' \sim \triangle SBC$, $\triangle SC'A' \sim \triangle SCA$

Z týchto vzťahov odvodíme rovnosti

$$|A'B'| = 2 \,.\, |AB|,\ |B'C'| = 2 \,.\, |BC|,\ |CA'| = 2 \,.\, |CA|$$

$$\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$$

Príklad 1 znázorňuje, ako možno zobraziť trojuholník $ABC$ na podobný trojuholník $A'B'C'$. Tento spôsob sa dá použiť pre ľubovoľný útvar.

Nech je daný ľubovoľný bod $S$ a reálne číslo $\kappa$, rôzne od nuly a jednotky.
Ku každému bodu $X$ roviny zostrojíme bod $X$ takto:
Pre bod $X = S$ sa $X' = S$. Ak $X \neq S$, zostrojíme bod $X'$ tak,
aby pre veľkosť úsečiek platilo $|SX| = |\kappa| \,.\, |SX|$, pritom zostrojíme bod $X'$
na polpriamke $SX$, ak $\kappa > 0$, a na polpriamke opačnej k $SX$, ak $\kappa < 0$.

Podľa tohto pravidla sa každý bod $X$ zobrazí do jediného bodu $X'$; toto zobrazenie sa nazýva **rovnoľahlosť.** Bod $S$ sa nazýva **stred rovnoľahlosti,** číslo $\kappa$ **koeficient rovnoľahlosti.** Bod $X$ je **vzor,** bod $X'$ **obraz.** Rovnoľahlosť sa nazýva aj **homotetia** a označuje sa $H[S; \kappa]$.

***POZNÁMKA***

1. *V príklade 1 bola uvedená rovnoľahlosť s koeficientom* $\kappa = 2$.
2. *Čísla* $\kappa = 0$ *a* $\kappa = 1$ *neuvažujeme preto, lebo pre* $\kappa = 0$ *by boli všetky obrazy v bode S.* *Pre* $\kappa = 1$ *by sme dostali zobrazenie, v ktorom by všetky obrazy splynuli so svojimi vzormi.*
3. *Pre* $\kappa = -1$ *je rovnoľahlosť stredová súmernosť.*

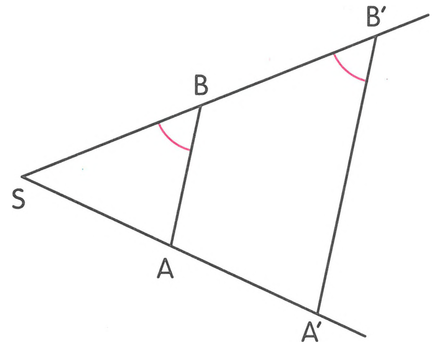
Ak zostrojíme ku všetkým bodom určitého útvaru **U** ich obrazy v určitej rovnoľahlosti so stredom $S$, dostaneme nový útvar **U'.** Hovoríme, že **útvar U' je obraz útvaru U** v danej rovnoľahlosti, alebo že **útvar U' je rovnoľahlý s útvarom U podľa stredu *S*.**

Hľadajme útvar, ktorý je obrazom úsečky $AB$ v rovnoľahlosti $H[S; \kappa]$.

***PRÍKLAD***

Nech je daná rovnoľahlosť $H[S; \kappa]$ a úsečka $AB$, na ktorej stred neleží. Nájdite obraz úsečky $AB$ v danej rovnoľahlosti.

***RIEŠENIE***




Pre jednoduchosť zvoľme $\kappa = 2$.
Zobrazme postupne koncové body úsečky $AB$.
Pre bod $A$ platí: $|SA'| = 2 \,.\, |SA|$.
Pre bod $B$ platí: $|SB'| = 2 \,.\, |SB|$.
Podľa vety ***sus*** bude $\Delta SAB \sim \Delta SA'B'$

Z podobnosti trojuholníkov vyplýva zhodnosť odpovedajúcich uhlov, preto $\sphericalangle SAB \cong \sphericalangle SA'B'$ a z toho vyplýva, že úsečky $AB$, $A'B'$ sú rovnobežné a z podobnosti trojuholníkov vyplýva, že $|A'B'| = 2 \,.\, |AB|$.
Voľba koeficientu $\kappa = 2$ neubrala na všeobecnosti, preto môžeme napísať, že

$$|A'B'| = |\kappa| \,.\, |AB|$$

Rovnoľahlosť so stredom $S$ a koeficientom $\kappa$ zobrazí úsečku $AB$ na úsečku $A'B'$.
Obidve úsečky sú navzájom rovnobežné a platí

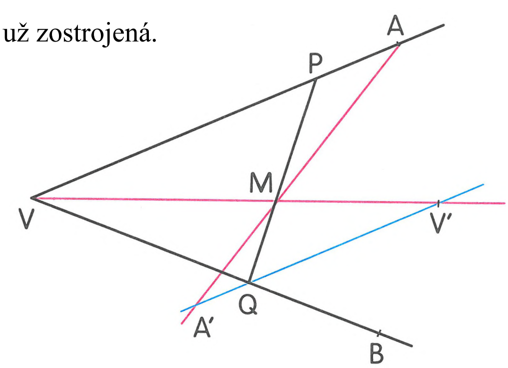
$$|A'B'| = |\kappa| \,.\, |AB|$$

***PRÍKLAD***

Vo vnútri konvexného uhla $\sphericalangle AVB$ je daný bod $M$. Zostrojte úsečku $PQ$ tak, aby prechádzala bodom $M$, aby bod $P$ ležal na ramene $VA$, bod $Q$ na ramene $VB$ a aby platilo $|PM| : |QM| = 3 : 2$.

***RIEŠENIE***

Predpokladajme, že hľadaná úsečka PQ je už zostrojená.




Potom rovnoľahlosť so stredom $M$ a koeficientom $-\frac{2}{3}$ zobrazí bod $P$ do bodu $Q$. Tá istá rovnoľahlosť zobrazí priamku $VA$ na priamku $VA'$, ktorá je rovnobežná *s* $VA$; na priamke $V'A'$ leží bod $Q$, $Q$ leží aj na $VB$. Priamku $V'A'$ vieme zostrojiť, lebo $V'$, $A'$ sú obrazy bodov $V$, $A$ v rovnoľahlosti so stredom $M$ a s koeficientom $-\frac{2}{3}$. Pretože $V'A' \parallel VA$ a priamka $V'A'$ leží vo vnútri polroviny $VAM$, pretne priamka $V'A'$ polpriamku $VB$ v určitom bode $Q$. Priamka $QM$ pretne polpriamku $VA$ v bode $P$, ktorý je v našej rovnoľahlosti vzorom bodu $Q$.

Z postupu riešenia vyplýva, že úloha má pri každej polohe bodu $M$ jediné riešenie.

Rovnoľahlosť so stredom v ťažisku trojuholníka a s koeficientom $-\frac{1}{2}$ zobrazí

a) každý vrchol trojuholníka na stred protiľahlej strany;

b) priamku, na ktorej leží výška, na os strany;

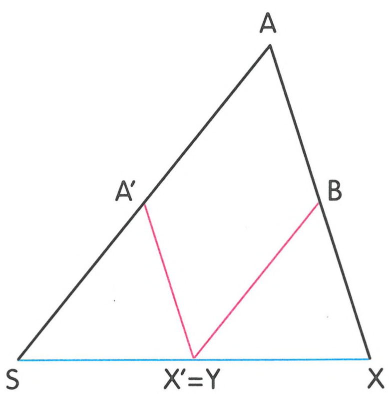
c) priesečník výšok na stred opísanej kružnice.

Postupne rysujte obrazy spomínaných prvkov trojuholníka a odôvodnite každý krok. Ak ste si zvolili všeobecný trojuholník, potom priesečník jeho výšok, ťažisko a stred opísanej kružnice ležia na jednej priamke (táto priamka sa nazýva **Eulerova priamka).**

## Pantograf

Na princípe rovnoľahlosti je založený prístroj, ktorým sa zväčšujú alebo zmenšujú rovinné útvary. Nazýva sa **pantograf.**

Nech je daná rovnoľahlosť so stredom $\boldsymbol{S}$ a koeficientom κ, pričom $0 < \kappa < 1$.




Zvoľme bod $X \neq S$ a zostrojme trojuholník $SAX$ s danými stranami $|SA| = a$, $|AX| = b$. Vo vnútri úsečiek $SA$, $AX$ zostrojme body $A'$, $B$ tak, aby platilo

$$|SA'| = \kappa \,.\, |SA| = \kappa \,.\, a$$

$$|AB| = \kappa \,.\, |AX| = \kappa \,.\, b$$

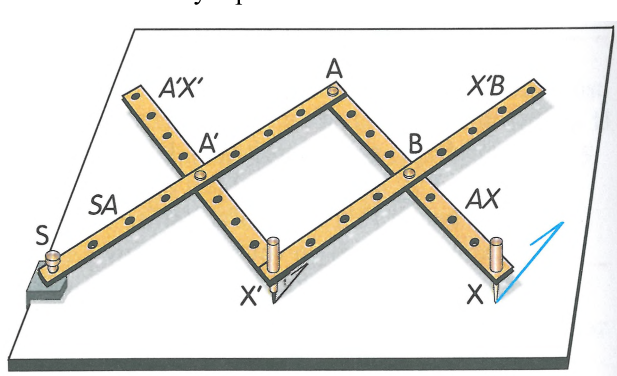
Trojuholník $ABA'$ doplníme na rovnobežník $ABYA'$. Daná rovnoľahlosť zobrazí bod $A$ na bod $A'$ priamku $AX$ na priamku $A'Y \parallel AX$. Obraz $X'$ bodu $X$ leží teda jednak na priamke $A'Y$, jednak na polpriamke $SX$ a platí:

$$|A'X'| = \kappa \,.\, |AX|$$

Pantograf je zostrojený zo štyroch latiek $SA$, $AX$, $A'X'$, $X'B$, ktoré sú kĺbovo spojené v bodoch $A$, $B$, $A'$, $X'$ tak, aby vznikol rovnobežník $ABX'A'$. Ak upevníme bod $S$ na podložke a ak opisujeme bodom $X$ (hrotom) napr. nejakú čiaru, opisuje bod $X'$ (ceruza) čiaru, ktorá je rovnoľahlá podľa stredu $S$.

Týmto spôsobom zostrojíme útvar zmenšený k danému útvaru v pomere $\kappa : 1$. Keby sme vymenili hrot za ceruzku a opisovaný daný útvar s bodom X', opisoval by bod X útvar zväčšený v pomere $1 : \kappa$.

Pantografy sú skonštruované tak, že sa môžu meniť dĺžky strán rovnobežníka $ABX'A'$ čím sa mení aj pomer zväčšenia alebo zmenšenia.



## Kružnica v rovnoľahlosti

***PRÍKLAD***

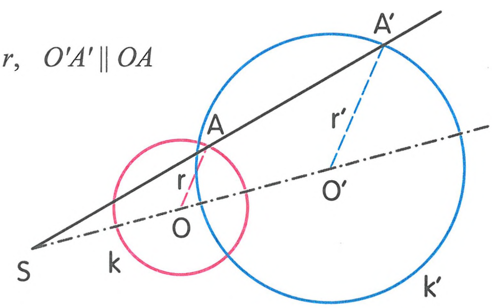
Daná je rovnoľahlosť so stredom $S$ a s koeficientom $\kappa$ a kružnica $k(O, r)$. Zostrojte útvar, ktorý je rovnoľahlý s kružnicou $k$ podľa stredu $S$.

***RIEŠENIE***

Určíme obraz $O'$ bodu $O$ v danej rovnoľahlosti (zvoľme $\kappa = 2$). Nech $A$ je ľubovoľný bod kružnice $k$. Pre jeho obraz platí

$$|SA'| = |\kappa| \,.\, |SA|, \quad |O'A'| = |\kappa| \,.\, |OA| = |\kappa| \,.\, r, \quad O'A' \parallel OA$$

Z toho vyplýva, že $O'A'$ má pre každú polohu bodu $A$ na kružnici $k$ konštantnú veľkosť, bod $O'$ svoju polohu nemení. To znamená, že bod $A'$ leží na kružnici $k'(O', r)$, $r' = |\kappa| \,.\, r$.




Rovnoľahlosť zobrazí kružnicu $k$ na kružnicu $k'$;
stred $O'$ kružnice $k'$ je obraz stredu $O$ kružnice $k$ a polomer kružnice $k'$ je súčin polomeru kružnice ***k*** a absolútnej hodnoty koeficientu rovnoľahlosti.

***PRÍKLAD***

Dané sú dve rôznobežné priamky $p$, $q$ s priesečníkom $S$ a kružnica $k(O, r)$, ktorá sa dotýka daných dvoch priamok. Zostrojte obraz kružnice $k$ v ľubovoľnej rovnoľahlosti so stredom $S$.

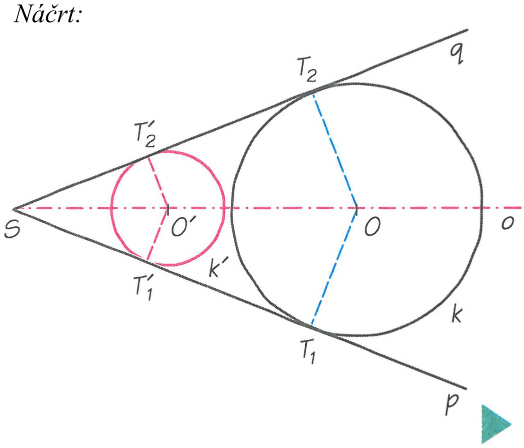
***RIEŠENIE***

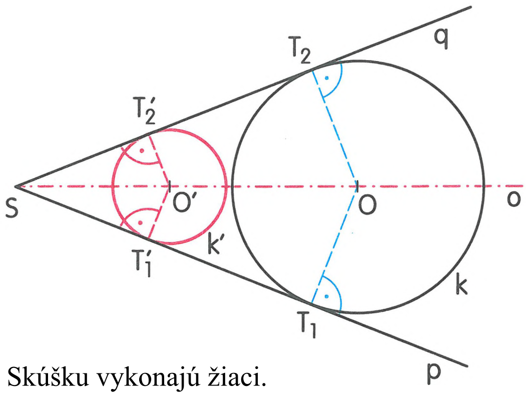
*Rozbor:*

Kružnica $k$ sa dotýka priamok $p$, $q$, to znamená, že s každou priamkou má spoločný jediný bod, označme tieto body $T_1$, $T_2$. Ďalej stred $O$ kružnice $k$ leží na osi $o$ uhla určeného priamkami $p$, $q$.

Z toho vyplýva, že kružnica $k'$ má s každou z priamok $p$, $q$ spoločný len jeden bod. Jej stred bude tiež ležať na osi $o$. Bod $O'$ zvolíme na osi ľubovoľne (pretože v príklade koeficient rovnoľahlosti nie je určený). Dotykové body $T'_1$, $T'_2$ sú obrazy dotykových bodov $T_1$ a $T_2$.

*Náčrt:*






*Konštrukcia:*

1. $p, q; S \in p \cap q$
2. $o$; os $\sphericalangle (p, q)$
3. $O; O \in o$
4. $T_1, T_2; OT_1 \perp p, OT_2 \perp q$
5. $k; k\,(O; |OT_1| = |OT_2|)$
6. $O'; O' \in o$
7. $T'_1, T'_2; O'T'_1 \perp p, O'T'_2 \perp q$
8. $k'; k'\,(O', |O'T'_1|)$

Skúšku vykonajú žiaci.

*Diskusia:* Pre každú voľbu bodu $O'$ je jediné riešenie. Kružnice $k$, $k'$ sú v rovnoľahlosti so stredom $S$.

**PRÍKLAD**

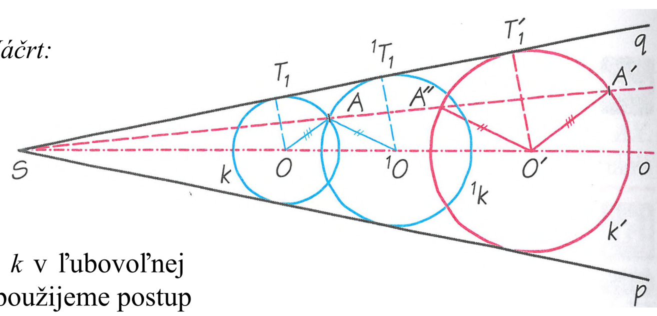
Dané sú rôznobežky $p$, $q$ a bod $A$, ktorý neleží ani na jednej z nich. Zostrojte kružnicu, ktorá prechádza bodom $A$ a dotýka sa priamok $p$, $q$.

**RIEŠENIE**

*Rozbor:*

Predpokladajme, že hľadaná kružnica $k(O, r)$ je už zostrojená. Označme písmenom $S$ priesečník priamok $p$, $q$.

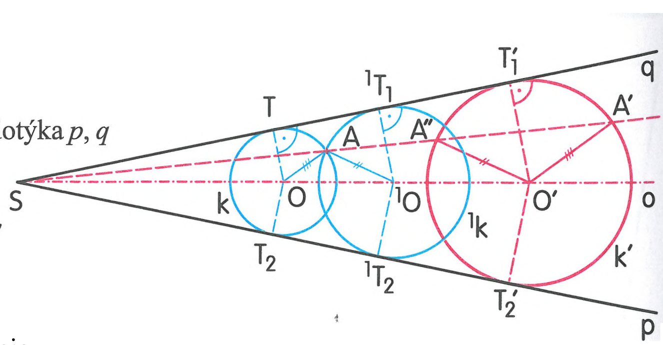
*Náčrt:*




Zostrojme obraz $k'$ kružnice $k$ v ľubovoľnej rovnoľahlosti so stredom $S$ (použijeme postup z predchádzajúceho príkladu). V zvolenej rovnoľahlosti sa bod $A$ zobrazí na bod kružnice $k'$ ktorý leží na polpriamke $SA$. Tu sú dve možnosti: buď je obrazom bodu $A$ bod $A'$ alebo bod $A''$.

*Konštrukcia:*

1. $p, q; p \nparallel q$
2. $S; S \in p \cap q$
3. $o; o$ os $\sphericalangle(p, q)$
4. $k'; k'(O', r'), O' \in o, k'$ sa dotýka $p, q$
5. $\overrightarrow{SA}$
6. $A', A''; A', A'' \in k' \cap \overrightarrow{SA}$
7. $O; O \in OA \cap o, OA \parallel A'O'$
8. $k; k\,(O, |OT_1|)$
   ${}^1k; {}^1k\,({}^1O, |{}^1O{}^1T_1|)$




Skúška je zrejmá z konštrukcie.

***Diskusia:*** Existujú dve kružnice $k$, ${}^1k$ ktoré vyhovujú zadaniu v príklade.

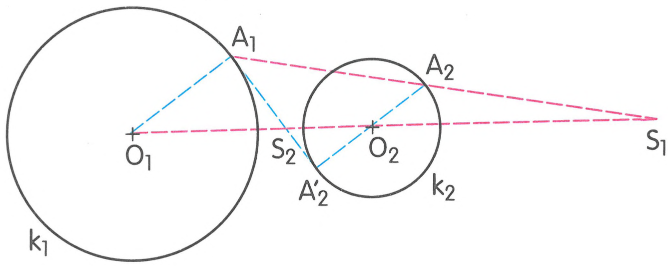
### ÚLOHA 1

Konštrukcia uvedená v príklade 6 nevyhovuje, ak bod $A$ leží na osi uhla priamok $p, q$. Popíšte konštrukciu kružníc $k$ a ${}^1k$ pre tento špeciálny prípad.

### ÚLOHA 2

Dané sú dve kružnice $k_1(O_1, 40 \text{ mm})$, $k_2(O_2, 20 \text{ mm})$, veľkosť strednej je $|O_1O_2| = 72$ mm. Existuje taká rovnoľahlosť, v ktorej kružnica $k_2(O_2, 20 \text{ mm})$ bude obrazom kružnice $k_1(O_1, 40 \text{ mm})$? Ak áno, nájdite jej stred.

*Návod:* Na obrázku sú zostrojené stredy $S_1$ a $S_2$ rovnoľahlosti, ktorých koeficienty sú $\frac{r_2}{r_1}, -\frac{r_2}{r_1}$.




Dve kružnice $k_1(O_1, r_1)$, $k_2(O_2, r_2)$ s rôznymi polomermi sú dvojakým spôsobom vo vzťahu rovnoľahlosti, čo znamená, že možno nájsť dve rovnoľahlosti, ktoré zobrazujú kružnicu $k_1$ na kružnicu $k_2$.

Bod $S_1$ nazývame vonkajší stred rovnoľahlosti kružníc $k_1$ $k_2$, bod $S_2$ vnútorný stred rovnoľahlosti kružníc $k_1$, $k_2$.

### ÚLOHA 3

Nájdite stredy rovnoľahlosti dvoch kružníc:

a) ktoré majú rôzne stredy a rovnaké polomery

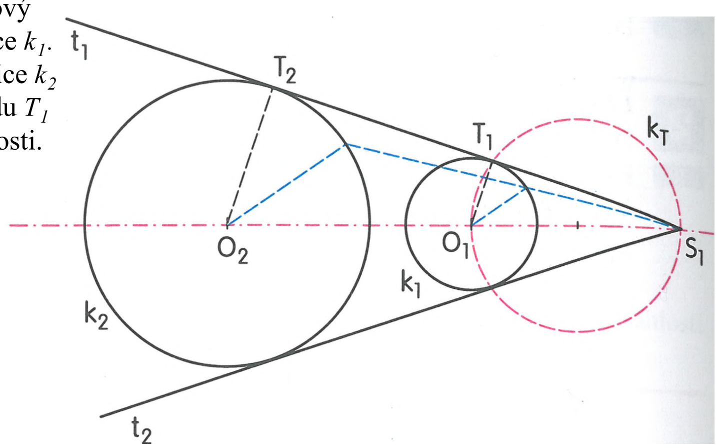
b) ktoré sú sústredné s rôznymi polomermi.

### PRÍKLAD 7

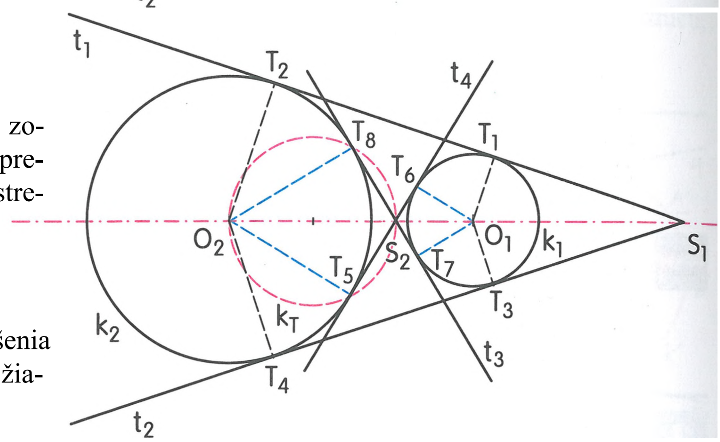
Dané sú dve kružnice $k_1(O_1, r_1)$ $k_2(O_2, r_2)$. Zostrojte pomocou stredov rovnoľahlosti dvoch kružníc spoločné dotyčnice k daným dvom kružniciam. (Spoločnou dotyčnicou dvoch kružníc rozumieme priamku, ktorá je dotyčnicou prvej a druhej kružnice.)

### RIEŠENIE

Nech dané kružnice nemajú žiadny spoločný bod. Ak jedna z kružníc je obrazom druhej kružnice v rovnoľahlosti, podľa úlohy 2 existujú dve rovnoľahlosti a teda aj dva stredy rovnoľahlosti. Spoločná dotyčnica je priamka, ktorá má s kružnicou $k_1$ spoločný bod $T_1$ a s kružnicou $k_2$ spoločný bod $T_2$. Tieto body si musia v rovnoľahlosti vzájomne odpovedať a teda priamka nimi určená prechádza stredom rovnoľahlosti. V našom prípade priamka $t_1$ prechádza vonkajším stredom $S_1$ rovnoľahlosti. Tým sme nájdenie spoločnej dotyčnice previedli na úlohu. Z bodu $S_1$ zostrojte dotyčnicu $t_1$ ku kružnici $k_1$. Túto úlohu vieme riešiť pomocou Talesovej kružnice. Priesečník $T_1$ Talesovej kružnice s kružnicou $k_1$ je dotykový bod dotyčnice $t_1$ kružnice $k_1$. Dotykový bod $T_2$ kružnice $k_2$ je bod odpovedajúci bodu $T_1$ v uvažovanej rovnoľahlosti.




Na ďalšom obrázku sú zostrojené aj dotyčnice prechádzajúce vnútorným stredom rovnoľahlosti.

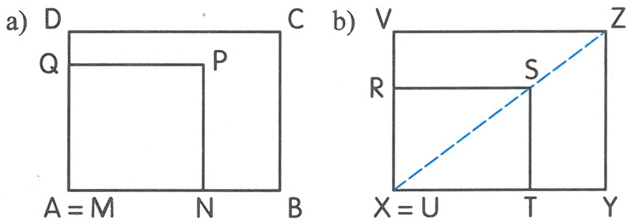


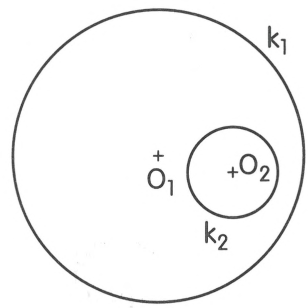

Zostávajúce fázy riešenia príkladu 7 prenecháme žiakom.

## *CVIČENIA*

1. Daná je kružnica $k$ a bod $A$, ktorý leží vo vnútri kružnice. Zostrojte tetivu kružnice $k$, ktorú bod $A$ rozdeľuje v pomere 4 : 1 . (*Návod:* Skúmajte kružnicu, na ktorú prejde kružnica $k$ v rovnoľahlosti so stredom $A$ a s koeficientom $-\frac{1}{4}$.)
2. Narysujte dve kružnice, ktoré majú vnútorný dotyk a zostrojte ich stredy rovnoľahlosti.
3. Zostrojte trojuholník $O_1O_2O_3$ so stranami $|O_1O_2| = 4$ cm, $|O_2O_3| = 5$ cm, $|O_3O_1| = 6$ cm. Okolo bodov $O_1$, $O_2$, $O_3$ opíšte v poradí kružnice $k_1$, $k_2$, $k_3$ s polomermi $r_1 = 1$ cm, $r_2 = 2$ cm, $r_3 = 4$ cm. Zostrojte všetky stredy rovnoľahlosti kružníc $k_1, k_2; k_2, k_3; k_3, k_1$. Presvedčte sa, že
   a) všetky vonkajšie stredy ležia na jednej priamke,
   b) priamka, ktorá prechádza dvoma vnútornými stredmi, obsahuje jeden vonkajší stred.

4. Na obrázkoch sú dve dvojice obdĺžnikov. Určte dvojicu, ktorá obsahuje podobné obdĺžniky. Tvrdenie odôvodnite.




5. Na obrázku sú dve kružnice $k_1(O_1, r_1)$ a $k_2(O_2, r_2)$. Kružnica $k_2$ leží vo vnútri kružnice $k_1$. Nájdite stredy rovnoľahlosti týchto kružníc.

6. Zostrojte spoločné dotyčnice dvoch kružníc $k_1(O_1, r_1)$, $k_2(O_2, r_2)$, ktoré majú spoločné dva body a $r_1 \neq r_2$.

## *HISTORICKÉ POZNÁMKY K PODOBNOSTI A ROVNOĽAHLOSTI*

*Niektoré vedomosti o podobnosti a rovnoľahlosti mali už stavitelia egyptských pyramíd. Z pripraveného malého plánu prenášali nákresy pomocou štvorcovej siete na múr, na ktorom bola zostrojená zväčšená sieť, podobná sieti na nákrese.*

*Určité vedomosti o podobnosti mal pravdepodobne aj* ***Tales z Milétu*** *(6. stor. pred n. l.). Podľa niektorých správ stanovil výšku pyramídy tak, že odmeral dĺžku tieňa zvislej tyče známej dĺžky a dĺžku tieňa pyramídy a z týchto troch dĺžok určil hľadanú výšku pyramídy.*

*Niektoré vety o úmerných úsečkách a o podobných obrazcoch boli predmetom úvah vedcov pytagorovskej školy v 6. a 5. storočí pred n. l. Tu vynikol najmä* ***Eudoxos z Knídu*** *(asi 408--355 pred n. l.). Výsledky Eudoxových úvah sa nám zachovali v VI. knihe Euklidových Základov (asi r. 320 pred n. l.).*

*Pojem rovnoľahlosť zaviedol do matematiky švajčiarsky matematik* ***Leonhard Euler*** *(1707--1783) roku 1777. Rovnoľahlosť však bola prakticky známa už skôr.*

### *Eduard Weyr*

***(21. 6. 1852 až 23. 7. 1903)***

***Český matematik. Študoval na technike v Prahe a neskôr v Göttingene. Vo svojej vedeckej práci sa venoval predovšetkým geometrii. Posledných desať rokov pracoval v matematickej analýze a zaoberal sa aj teóriou matíc. Jeho práca „ O theorii forem bilineárních“ bola ocenená cenou Kráľovskej českej spoločnosti náuk.***

# 4 RIEŠENIE LINEÁRNYCH ROVNÍC A ICH SÚSTAV

## 4.1 Lineárne rovnice s neznámou v menovateli

***ZOPAKUJME SI***

Rovnosť dvoch matematických výrazov s tou istou neznámou $x$ vieme pomocou **ekvivalentných úprav** vždy upraviť na tvar:

$$\boldsymbol{a \cdot x = b}$$

kde $x$ je neznáma; $a$, $b$ sú čísla, pričom $a \neq 0$.

**Riešenie** (koreň) rovnice je číslo $\boldsymbol{x = \frac{b}{a}}$.

Takúto rovnicu nazývame **lineárna rovnica** s jednou neznámou.

**Ekvivalentné úpravy rovníc**

- výmena ľavej a pravej strany rovnice
- pričítanie alebo odčítanie toho istého čísla alebo mnohočlena k obidvom stranám rovnice
- vynásobenie alebo vydelenie oboch strán rovnice tým istým nenulovým číslom

Každá lineárna rovnica s jednou neznámou má vždy **práve jedno** riešenie (jeden koreň).

**Riešenie rovnice** je **postup** riešenia - **výpočet** neznámej x
je **hodnota** neznámej - **koreň** rovnice.

**[1]** ***PRÍKLAD***

Riešte rovnice

a) $\frac{5x+7}{2} - \frac{2x-7}{3} = 3x + 9$ b) $\frac{3x-5}{2} - \frac{1+x}{2} = x$ c) $\frac{3x-5}{2} + 3 = \frac{x+1}{2} - x$

***RIEŠENIE***

Odpíšte si do zošita riešenie a popíšte ekvivalentné úpravy.

a)
$$\frac{5x+7}{2} - \frac{2x-7}{3} = 3x + 9 \qquad / \cdot 6$$
$$3 \cdot (5x+7) - 2 \cdot (2x-7) = 6 \cdot (3x+9)$$
$$15x + 21 - 4x + 14 = 18x + 54$$
$$-7x = 19$$
$$x = -\frac{19}{7}$$

Skúšku správnosti vykonajte samostatne. Platí: Ľ = P $= \frac{6}{7}$.

b) $\frac{3x-5}{2} - \frac{1+x}{2} = x \qquad / \,.\, 2$

$3x - 5 - (1 + x) = 2x$

$3x - 5 - 1 - x = 2x$

$2x - 6 = 2x \qquad / -2x$

$-6 = 0$

**POZOR!** Pred druhým zlomkom je znamienko **mínus!** Preto použijeme zátvorku.

Výsledok je neplatná rovnosť. Hovoríme, že pôvodná rovnica nemá riešenie.

c) $\frac{3x-5}{2} + 3 = \frac{x+1}{2} - x \qquad / \,.\, 2$

$3x - 5 + 6 = x + 1 + 2x$

$3x + 1 = 3x + 1 \qquad / -3x - 1$

$0 = 0$

Výsledok je rovnosť platná pre ľubovoľné reálne číslo. Hovoríme, že riešením pôvodnej rovnice je každé reálne číslo. Overte.

1 ***ÚLOHA***

Riešte rovnice a urobte skúšky správnosti.

a) $\frac{3-x}{4} + \frac{2x-5}{6} = 1$ b) $\frac{4}{3}x - 17 - \frac{x+5}{2} = \frac{3x-17}{4}$ c) $\frac{3+2x}{2} - \frac{7}{6} = 6 - \frac{12x-1}{3}$

2 ***ÚLOHA***

**Hádanka**

Myslite si ľubovoľné párne číslo. Pričítajte k nemu číslo 4 a výsledok vynásobte piatimi. Potom vydeľte desiatimi a odčítajte polovicu mysleného čísla. Výsledok bude 2. Zopakujte postup pre iné párne číslo, vyskúšajte aj pre nepárne a záporné čísla. V každom prípade je výsledok 2. Ako je to možné? Vysvetlite. Vymyslite podobné hádanky.

? ***PROBLÉM***

Riešte rovnicu $\frac{4}{x} - 2 = \frac{2}{x} - \frac{4}{3}$.

! ***RIEŠENIE***

V rovnici sa vyskytujú lomené výrazy s neznámou v menovateli. Vieme, že lomený výraz má zmysel iba vtedy, ak je jeho menovateľ rôzny od nuly. Preto najskôr určíme podmienky riešiteľnosti rovnice.

Lomené výrazy v rovnici majú v menovateli neznámu $x$, preto **podmienka** riešiteľnosti rovnice $\frac{4}{x} - 2 = \frac{2}{x} - \frac{4}{3}$ je: $x \neq 0$.

Spoločný menovateľ výrazov v menovateli je výraz $3x$. Môžeme ním násobiť, pretože sme podmienkou vylúčili jeho nulovú hodnotu.

$\frac{4}{x} - 2 = \frac{2}{x} - \frac{4}{3} \qquad / \,.\, 3x$

$3 \,.\, 4 - 3x \,.\, 2 = 3 \,.\, 2 - x \,.\, 4$

$12 - 6x = 6 - 4x$

$-6x + 4x = 6 - 12$

$-2x = -6 \qquad / : (-2)$

$x = 3$

Touto úpravou odstránime z rovnice zlomky. Dostali sme lineárnu rovnicu s neznámou x, ktorú riešime ekvivalentnými úpravami.

Výsledok porovnáme s podmienkou: má byť: x ≠ 0, riešenie x = 3 vyhovuje.

**Skúška:** Ľ: $\frac{4}{x} - 2 = \frac{4}{3} - 2 = \frac{4-6}{3} = -\frac{2}{3}$

P: $\frac{2}{x} - \frac{4}{3} = \frac{2}{3} - \frac{4}{3} = -\frac{2}{3}$ Ľ = P rovnica bola vyriešená správne.

***Riešenie rovníc s neznámou v menovateli***

- Určíme podmienky riešiteľnosti: menovatele všetkých lomených výrazov musia byť rôzne od nuly.
- Rovnicu vynásobíme spoločným menovateľom všetkých lomených výrazov, odstránime tak z rovnice zlomky.
- Rovnicu riešime ekvivalentnými úpravami.
- Riešenie rovnice (koreň) porovnáme s podmienkami riešiteľnosti.
  Ak riešenie vyhovuje podmienkam, vykonáme skúšku správnosti.
  Ak riešenie nevyhovuje podmienkam, rovnica nemá riešenie.

3

***ÚLOHA***

Riešte rovnice a urobte skúšku správnosti.

a) $\frac{3}{x} + \frac{2}{x} + \frac{1}{x} = 1$ b) $\frac{1}{y} + \frac{3}{4y} + 2\frac{1}{4} = 4$

[2]

***PRÍKLAD***

Riešte rovnicu $\frac{2}{a+2} = \frac{6}{a-2}$.

***RIEŠENIE***

Určíme podmienky riešiteľnosti: $a + 2 \neq 0$ a zároveň $a - 2 \neq 0$.
Stručne zapísané: $a \neq \pm 2$.
Spoločný menovateľ lomených výrazov je ich súčin $(a + 2) . (a - 2)$

$$\frac{2}{a+2} = \frac{6}{a-2} \qquad / .(a+2).(a-2)$$

$$2 . (a - 2) = 6 . (a + 2)$$

$$2a - 4 = 6a + 12$$

$$2a - 6a = 12 + 4$$

$$-4a = 16 \qquad /: (-4)$$

$$a = -4$$

Riešenie porovnáme s podmienkami: $a \neq \pm 2$ riešenie $a = -4$ podmienkam vyhovuje.
Skúšku správnosti vykonajte samostatne. Presvedčte sa, že Ľ = P = -1.

4

***ÚLOHA***

Riešte rovnice a vykonajte skúšky správnosti.

a) $\frac{1}{x-1} = \frac{2}{x+1}$ b) $\frac{3}{3x-1} - \frac{5}{3x+1} = \frac{3x+2}{9x^2-1}$ c) $\frac{1}{x+6} = \frac{3}{5x-2}$

[3]

***PRÍKLAD***

Riešte rovnicu

$$\frac{2}{(z+3).(z+4)} + \frac{3}{(z+4).(z+5)} = \frac{4}{(z+5).(z+3)}$$

***RIEŠENIE***

Sledujte Petrov postup. Popíšte úpravy, ktoré vykonal.

Podmienky riešiteľnosti: $z \neq -3$, $z \neq -4$, $z \neq -5$.

$$\frac{2}{(z+3).(z+4)} + \frac{3}{(z+4).(z+5)} = \frac{4}{(z+5).(z+3)} \qquad /\ .\ (z+3).(z+4).(z+5)$$

$$2.(z+5) + 3.(z+3) = 4.(z+4)$$

$$2z + 10 + 3z + 9 = 4z + 16$$

$$5z + 19 = 4z + 16$$

$$z = -3$$

Vypočítaný koreň nevyhovuje podmienke $z \neq -3$, a preto rovnica nemá žiadne riešenie.

## 5 ***ÚLOHA***

Presvedčte sa, že nasledujúce rovnice nemajú žiadne riešenie.

a) $\frac{2x-8}{x-4} = 1$ b) $\frac{1}{n-2} = 0$

## [4] ***PRÍKLAD***

Riešte rovnicu $\frac{6(b+1)}{-8b-(3-5b)} = -2$.

***RIEŠENIE***

Skontrolujte a odpíšte do zošita Petrov postup.

$$\frac{6(b+1)}{-8b-(3-5b)} = -2$$

$$\frac{6(b+1)}{-8b-3+5b} = -2$$

$$\frac{6(b+1)}{-3b-3} = -2$$

$$\frac{6(b+1)}{-3(b+1)} = -2 \qquad \text{podmienka: } b \neq -1$$

$$-2 = -2$$

Riešením rovnice je každé reálne číslo $b$, pre ktoré platí: $b \neq -1$.
Prečo Peter nenásobil celú rovnicu dvojčlenom $(b + 1)$? Postupoval správne? Odôvodnite.

## 6 ***ÚLOHA***

Presvedčte sa, že riešením rovnice $\frac{1}{n-2} + n = \frac{(n+1)^2}{n-2}$ je každé reálne číslo $n \neq 2$.

## 7 ***ÚLOHA***

Sledujte tento postup:

$$x = 3$$

$$x - 3 = 0 \qquad /\ .\ \frac{1}{x-3}$$

$$\frac{x-3}{x-3} = 0$$

$$1 = 0$$

Kde je chyba?

***CVIČENIA***

1. Riešte rovnice spamäti a urobte aj skúšky správnosti.

a) $\frac{1}{x} = 1$ c) $\frac{1}{x} = -3$ e) $\frac{3}{x} = 1$ g) $\frac{1}{2x} = 1$

b) $\frac{1}{x} = \frac{1}{2}$ d) $\frac{2}{x} = 5$ f) $\frac{4}{x} = 0$ h) $\frac{2x}{x} = 2$

2. Riešte rovnice spamäti a urobte aj skúšky správnosti.

a) $\frac{x+1}{x-1} = 0$ d) $\frac{x+3}{x} = 2$ g) $\frac{2x+4}{x} = 0$ j) $\frac{1}{x+3} = 0$

b) $\frac{2x-3}{x} = 3$ e) $\frac{x}{x+2} = 1$ h) $\frac{2x+4}{x+2} = 2$ k) $\frac{1}{x-5} = 1$

c) $\frac{x-1}{x-1} = 0$ f) $\frac{2x+4}{x} = 3$ i) $\frac{2x+4}{x+2} = 1$ l) $\frac{2}{1+x} = 1$

V nasledujúcich cvičeniach riešte rovnice a urobte aj skúšky správnosti.

**3.** a) $\frac{1}{x} - \frac{2}{3x} = \frac{1}{2}$ c) $\frac{7}{z} + \frac{1}{3} = \frac{23-z}{3z} + \frac{7}{12} - \frac{1}{4z}$

b) $\frac{1}{4y} + \frac{1}{6y} - \frac{3}{8y} = 2$ d) $x + 1 + \frac{1}{3x} = \frac{(x+1)^2}{x} + \frac{1}{3}$

**4.** a) $\frac{3x+1}{5x-2} = 3$ d) $\frac{3x-3}{3x+1} - \frac{x-1}{3x+1} = \frac{1}{4}$

b) $\frac{y+2}{y+4} - \frac{3y+4}{3y+2} = 0$ e) $\frac{3y-4}{3-4y} + \frac{5}{2} = 0$

c) $\frac{2z-3}{3z-2} = \frac{2z+3}{3z+2}$ f) $\frac{z+2}{2z+2} - \frac{z+4}{4z+4} = 1$

**5.** a) $\frac{1}{2} - \frac{3}{x+3} = \frac{5}{2(x+3)} - 1$ b) $y + \frac{1}{y-2} = \frac{(y-1)^2}{y-2}$

**6.** a) $\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3} = \frac{3x-10}{(x-3).(x-2)}$ c) $\frac{z+2}{z-2} + \frac{z-2}{z+2} = \frac{z^2+2z+8}{z^2-4} + 1$

b) $\frac{1}{y+1} - \frac{1}{y-1} = \frac{-2}{y^2-1}$ d) $\frac{x+1}{x^3-x^2} - \frac{1}{x^2-x} + \frac{3}{x-x^3} = 0$

## 4.2 Sústava dvoch lineárnych rovníc s dvomi neznámymi

Doteraz sme riešili rovnice s jednou neznámou. Ak sa v jednej rovnici vyskytujú dve neznáme, môžeme mať neobmedzený počet dvojíc koreňov, ktoré tejto rovnici vyhovujú.

Napríklad máme rovnicu $x + y = 5$

Vyjadríme z nej neznámu $y$: $y = 5 - x$

Za neznámu $x$ dosadzujeme rôzne hodnoty a vypočítame neznámu $y$.

Jana si zostavila tabuľku niekoľkých riešení tejto rovnice.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | 0 | 1 | **2** | –1 |
| $y$ | 5 | 4 | **3** | 6 |

Magda zostavila tabuľku riešení rovnice $2x - y = 1$. Platí: $y = 2x - 1$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | 0 | 1 | **2** | –1 |
| $y$ | –1 | 1 | **3** | –3 |

Dvojica koreňov $x = 2$ a $y = 3$ sa vyskytla v obidvoch tabuľkách. Teda dvojica $x = 2$, $y = 3$ je spoločným riešením rovníc $x + y = 5$ a $2x - y = 1$.

Rovnice zapíšeme pod seba:

$$\begin{aligned} x + y &= 5 \\ 2x - y &= 1 \end{aligned}$$

Takýto zápis nazývame **sústava dvoch lineárnych rovníc s dvomi neznámymi.**

**Riešením sústavy** dvoch lineárnych rovníc s dvomi neznámymi je dvojica koreňov, ktorá je spoločná pre obidve rovnice.

**Metódy riešenia:** **1.** ***Dosadzovacia (substitučná) metóda***
**2.** ***Sčítacia (adičná) metóda***
**3.** ***Porovnávacia (komparačná) metóda***

**1. Dosadzovacia metóda**

***PRÍKLAD***

Riešte sústavu rovníc:

$$\begin{aligned} x + y &= 5 \\ 2x - y &= 1 \end{aligned}$$

***RIEŠENIE***

Aby sme sa v riešení lepšie orientovali, rovnice si označíme rímskymi číslami.

**I.** $x + y = 5$
**II.** $2x - y = 1$

Z rovnice vyjadríme neznámu x.

**I.** $x + y = 5$

$x = 5 - y$

Výraz $(5 - y)$ dosadíme do rovnice **II** namiesto neznámej x a vypočítame ***y*** postupom známym z riešenia lineárnych rovníc s jednou neznámou.

**II.** $2x - y = 1$

$$\begin{aligned} 2(5 - y) - y &= 1 \\ 10 - 2y - y &= 1 \\ 10 - 3y &= 1 \qquad / -10 \\ -3y &= -9 \quad /: (-3) \\ y &= 3 \end{aligned}$$

Vypočítanú hodnotu neznámej ***y*** dosadíme do rovnice **I** a vypočítame x.

**I.** $x + y = 5$

$$\begin{aligned} x + 3 &= 5 \qquad /-3 \\ x &= 5 - 3 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Skúšku správnosti urobíme pre každú rovnicu.

$Ľ_1 = x + y = 2 + 3 = 5$
$P_1 = 5$
$Ľ_1 = P_1$

$Ľ_2 = 2x - y = 2 \,.\, 2 - 3 = 4 - 3 = 1$
$P_2 = 1$
$Ľ_2 = P_2$

***Odpoveď:*** Riešením danej sústavy rovníc je dvojica $x = 2$, $y = 3$.

***Dosadzovacia metóda***

Vyjadríme z jednej rovnice jednu z neznámych a tento výraz dosadíme do druhej rovnice.
Dostaneme tak jednu rovnicu s jednou neznámou, ktorú vyriešime.
Dosadením vypočítame druhú neznámu.

***ÚLOHA***

1 Riešte dosadzovacou metódou a vykonajte skúšky správnosti.

a) $\frac{x}{2}+y=8$, $x+\frac{y}{3}=6$

b) $\frac{u}{5}+y=20$, $1+\frac{y}{6}=4$

c) $y=\frac{x+7}{3}$, $x=\frac{y+5}{4}$

d) $\frac{h}{3}+2=-k$, $8+\frac{k}{2}=h$

## 2. Sčítacia metóda

***PRÍKLAD***

2 Riešte sústavu rovníc:

$$\begin{aligned} x+y&=5\\ 2x-y&=1 \end{aligned}$$

***RIEŠENIE***

Rovnice, ak je to potrebné, upravíme, a potom zapíšeme tak, aby pod sebou boli zapísané členy s tou istou neznámou. Vidíme, že keď rovnice sčítame ako pri písomnom sčítaní pod sebou, členy s neznámou $y$ sa zrušia a dostaneme jednu lineárnu rovnicu s jednou neznámou $x$, ktorú vieme vyriešiť.

$$\begin{aligned} \textbf{I.}\quad x+y&=5\\ \underline{\textbf{II.}\quad 2x-y}&\underline{{}=1}\\ 3x+0&=6\\ 3x&=6 \quad /:3\\ x&=2 \end{aligned}$$

Sčítaním rovníc sme vylúčili neznámu $\boldsymbol{y}$ a vypočítali sme neznámu x. Vypočítanú hodnotu môžeme dosadiť do pôvodnej rovnice **I** alebo **II** a vypočítame $y=3$.

Urobte skúšky správnosti pre vypočítané hodnoty $x=2$, $y=3$.

***ÚLOHA***

2 Linda riešila sústavu z príkladu 2 tak, že vylúčila členy s neznámou x. Skontrolujte jej postup a úlohu doriešte: vypočítajte hodnotu neznámej x a urobte skúšky správnosti.

$$\begin{aligned} \textbf{I.}\quad x+y&=5 \quad /.\,(-2)\\ \underline{\textbf{II.}\quad 2x-y}&\underline{{}=1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textbf{I.}\quad -2x-2y&=-10\\ \underline{\textbf{II.}\quad 2x-y}&\underline{{}=1}\\ -3y&=-9 \;/:(-3)\\ y&=3 \end{aligned}$$

Rovnicu **I** vynásobila číslom -2, potom rovnice sčítala.

***Sčítacia metóda***

Vynásobíme jednu alebo obidve rovnice vhodnými číslami tak,
aby sme po sčítaní rovníc dostali jednu rovnicu s jednou neznámou.
Túto rovnicu vyriešime.
Druhú neznámu vypočítame dosadením.

***PRÍKLAD***

3 Riešte sústavu rovníc:

$$\begin{aligned} 3x+2y&=0\\ 2x+3y&=5 \end{aligned}$$

***RIEŠENIE***

**I.** $3x + 2y = 0 \quad /.(-2)$ Rovnicu **I** vynásobíme číslom (-2) a rovnicu **II** číslom 3, aby
**II.** $\underline{2x + 3y = 5 \quad /.3}$ sme vylúčili neznámu x. Potom vypočítame neznámu $y$.

$$-6x - 4y = 0$$
$$\underline{6x + 9y = 15}$$
$$0 + 5y = 15 \; / : 5$$
$$y = 3$$

Neznámu $x$ vypočítame dosadením do rovnice **I**, platí:

$$3x + 2y = 0$$
$$3x + 2 \,.\, 3 = 0$$
$$3x + 6 = 0$$
$$3x = -6 \quad /:3$$
$$x = -2$$

***Skúška:***

$Ľ_1 = 3x + 2\boldsymbol{y} = 3(-2) + 2 \,.\, 3 = -6 + 6 = 0$
$P_1 = 0$
$Ľ_1 = P_1$

$Ľ_2 = 2x + 3y = 2(-2) + 3 \,.\, 3 = -4 + 9 = 5$
$P_2 = 5$
$Ľ_2 = P_2$

***Odpoveď:*** Riešením sústavy sú hodnoty $x = -2$, $y = 3$.

3 **ÚLOHA**

Riešte sčítacou metódou a vykonajte skúšky správnosti.

a) $2x + 5y = 25$, $4x + 3y = 15$
c) $3p - 2q = 11$, $4p - 5q = 3$
e) $7m + 9n = 8$, $9m - 8n = 69$
b) $2a + 3b = 8$, $3a + 2b = 7$
d) $4x + 3y = -4$, $6x + 5y = -7$
f) $6r - 7s = 40$, $5s - 2r = -8$

### 3. Porovnávacia metóda

[4] ***PRÍKLAD***

Riešte sústavu rovníc:
$$x + y = 5$$
$$2x - y = 1$$

***RIEŠENIE***

**I.** $x + y = 5$
**II.** $\underline{2x - y = 1}$

**I.** $x + y = 5 \quad / -x$
$y = 5 - x$ Z oboch rovníc vyjadríme neznámu y.

**II.** $2x - y = 1 \quad / - 2x$
$-y = 1 - 2x \quad /.(-1)$
$y = 2x - 1$

Keďže sa ľavé strany rovnajú, musia sa rovnať aj pravé strany rovností pre neznámu $\boldsymbol{y}$. Porovnaním výrazov na pravých stranách dostaneme lineárnu rovnicu s jednou neznámou x, ktorú vieme riešiť.

$$5 - x = 2x - 1 \; / - 5 - 2x$$
$$-x - 2x = - 1 - 5$$
$$-3x = - 6 \quad /: (-3)$$
$$x = 2$$

Riešenie $x = 2$ dosadíme do niektorej z pôvodných rovníc **I** alebo **II** a vypočítame $\boldsymbol{y}$.

**I.** $x + y = 5$
$2 + y = 5 \quad /-2$
$y = 3$

Urobte skúšku správnosti a napíšte odpoveď.

### *Porovnávacia metóda*

Z obidvoch rovníc vyjadríme tú istú neznámu a výrazy porovnáme.
Dostaneme jednu rovnicu s jednou neznámou, ktorú vyriešime.
Druhú neznámu vypočítame dosadením do niektorej z pôvodných rovníc.

4

***ÚLOHA***

Riešte porovnávacou metódou a urobte skúšky správnosti.

a) $\frac{x+2}{5} + 2y = 11$, $x - \frac{y-2}{3} = 2$

b) $x + \frac{y+2}{3} = 3$, $\frac{x+2}{4} + \frac{y}{4} = 2\frac{3}{4}$

c) $\frac{x+y}{2} - \frac{2y}{3} = \frac{5}{2}$, $\frac{3x}{2} + 2y = 0$

d) $2x - \frac{y}{3} = \frac{1}{2}$, $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1{,}125$

***POZNÁMKA***

*Pri riešení rôznych sústav lineárnych rovníc vyberáme takú metódu, ktorá je pre riešenie najvhodnejšia. Na to potrebujeme dostatok skúseností získaných riešením rôznych typov úloh. Pozorne si opíšte a doplňte nasledujúce riešenia príkladov.*

[5]

***PRÍKLAD***

Riešte sústavu rovníc: 2(a - 3) = -b - 5
a - 3(b - 1) = -7

***RIEŠENIE***

I. $2(a - 3) = -b - 5$
II. $a - 3(b - 1) = -7$

Rovnice upravíme, odstránime zátvorky. Neznáme sústredíme na ľavú stranu a čísla na pravú stranu.

I. $2a - 6 = -b - 5 \quad / + 6 + b$
II. $a - 3b + 3 = -7 \quad /-3$

I. $2a + b = 1 \quad /- 2a$
II. $a - 3b = -10$

I. $b = 1 - 2a$
II. $a - 3b = -10$

Z rovnice **I** vyjadríme neznámu $b$.
Riešime dosadzovacou metódou.

$a - 3(1 - 2a) = -10$
$a - 3 + 6a = -10 \quad / + 3$
$7a = -7 \quad /:7$
$a = -1$

Počítame neznámu $a$.

Vypočítanú hodnotu $a = -1$ dosadíme do výrazu pre neznámu $\boldsymbol{b}$.

$b = 1 - 2a$
$b = 1 - 2(-1)$
$b = 1 + 2$
$b = 3$

Urobte skúšku správnosti a napíšte odpoveď.

**PRÍKLAD 6**

Riešte sústavu rovníc:

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{5}=1$$
$$x-\frac{2y}{5}=-1$$

**RIEŠENIE**

$$\begin{aligned}
&\text{I.} && \frac{x}{3}+\frac{y}{5}=1\\
&\text{II.} && x-\frac{2y}{5}=-1\\
\hline
&\text{I.} && 5x+3y=15\\
&\text{II.} && 5x-2y=-5 \quad /\,.(-1)\\
\hline
&\text{I.} && 5x+3y=15\\
&\text{II.} && -5x+2y=5\\
\hline
& && 5y=20\\
& && y=4
\end{aligned}$$

Rovnice upravíme, odstránime zlomky.

Riešime sčítacou metódou. Vylúči sa neznáma $x$.
Vypočítame neznámu $\boldsymbol{y}$.

Neznámu $x$ vypočítame dosadením za $y$ do rovnice **II,** platí:

$$\begin{aligned}
x-\frac{2\,.\,4}{5}&=-1 \quad /\,.\,5\\
5x-8&=-5\\
5x&=3 \quad /:5\\
x&=\frac{3}{5}
\end{aligned}$$

*Skúška:*

$Ľ_1=\frac{\frac{3}{5}}{3}+\frac{4}{5}=\frac{3}{15}+\frac{4}{5}=\frac{3+12}{15}=\frac{15}{15}=1$

$P_1=1$

$Ľ_1=P_1$

$Ľ_2=x-\frac{2y}{5}=\frac{3}{5}-\frac{2\,.\,4}{5}=\frac{3}{5}-\frac{8}{5}=-\frac{5}{5}=-1$

$P_2=-1$

$Ľ_2=P_2$

**PRÍKLAD 7**

Riešte sústavu rovníc:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=3$$
$$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=1$$

**RIEŠENIE**

$$\begin{aligned}
&\text{I.} && \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=3\\
&\text{II.} && \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=1\\
\hline
& && \frac{2}{x}+0=4 \quad /\,.\,x\\
& && 2=4x\\
& && x=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Pri riešení sústavy s neznámymi v menovateli musíme najprv určiť **podmienky riešiteľnosti:** $x \neq 0$, $y \neq 0$.

Riešime sčítacou metódou.
Rovnice sčítame a vypočítame neznámu x.

Vypočítaná hodnota vyhovuje podmienkam riešenia.

Dosadíme do rovnice **I**.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\frac{1}{2}}+\frac{1}{y}&=3\\
2+\frac{1}{y}&=3 \quad /\,.\,y\\
2y+1&=3y\\
y&=1
\end{aligned}$$

Vypočítaná hodnota vyhovuje podmienkam riešenia.

***Skúška:***

$Ľ_1=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{\frac{1}{2}}+\frac{1}{1}=2+1=3$

$P_1=3$

$Ľ_1=P_1$

$Ľ_2=\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{\frac{1}{2}}-\frac{1}{1}=2-1=1$

$P_2=1$

$Ľ_2=P_2$

**8** ***PRÍKLAD***

Riešte sústavu rovníc:

$$\frac{x+2}{y} = 4$$
$$\frac{2x}{y+2} = 2$$

***RIEŠENIE***

I. $\frac{x+2}{y} = 4 \quad / \,.\, y$ Podmienky: $y \neq 0, y \neq -2$

II. $\frac{2x}{y+2} = 2 \quad / \,.\, (y+2)$

$x + 2 = 4y \quad / - 4y - 2$ Rovnice upravíme.

$2x = 2(y+2)$

$x - 4y = -2$

$2x = 2y + 4 \quad / - 2y$ Riešime sčítacou metódou.

$x - 4y = -2 \quad / \,.\, (-2)$

$2x - 2y = 4$

$-2x + 8y = 4$

$2x - 2y = 4$

$6y = 8 \quad / : 6$

$y = \frac{8}{6}$

$y = \frac{4}{3}$

Vypočítaná hodnota vyhovuje podmienkam riešenia.

Sčítacou metódou vypočítame aj neznámu x.

$x - 4y = -2$

$2x - 2y = 4 \quad /.(-2)$

$x - 4y = -2$

$-4x + 4y = -8$

$-3x = -10$

$x = \frac{10}{3}$

Skúškou správnosti overte: $Ľ_1 = P_1 = 4$

$Ľ_2 = P_2 = 2$

**9** ***PRÍKLAD***

Riešte sústavu rovníc:

$$\frac{1}{4}x + y = 1$$
$$x + 4y = 4$$

***RIEŠENIE***

**I.** $\frac{1}{4}x + y = 1 \quad / \,.\, 4$

**II.** $x + 4y = 4$

**I.** $x + 4y = 4 \quad /.\ (-1)$ Riešime sčítacou metódou.

**II.** $x + 4y = 4$

$-x - 4y = -4$

$x + 4y = 4$

$0 = 0$ Dostali sme vždy pravdivý výrok.

Riešenie sústavy určíme a zapíšeme takto: Vyjadríme jednu neznámu pomocou druhej neznámej.

Napríklad pre $\boldsymbol{y}$ z rovnice **I** platí: $y = 1 - \frac{x}{4}$

$y = \frac{4-x}{4}$

Riešením sústavy je ľubovoľné reálne číslo $x$ a k nemu prislúchajúce číslo $y$, pre ktoré platí: $y = \frac{4-x}{4}$

Napríklad: ak $x = 1$, tak $y = 1 - \frac{x}{4} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Urobte skúšku správnosti pre tieto vypočítané hodnoty.

5 ***ÚLOHA***

Riešte pre sústavu rovníc z predchádzajúceho príkladu:

a) Vyjadrite neznámu $y$ z obidvoch rovníc a výrazy porovnajte.
b) Vyjadrite neznámu $x$ pomocou neznámej $y$, zvoľte konkrétnu hodnotu pre $y$, vypočítajte $x$ a urobte skúšku správnosti.
c) Napíšte päť rôznych riešení do tabuľky.

[10] ***PRÍKLAD***

Riešte sústavu rovníc:

$$2x - y = 3$$
$$y + 6 = 2x$$

***RIEŠENIE***

**I.** $2x - y = 3$
**II.** $y + 6 = 2x$

**I.** $2x - y = 3$
**II.** $-2x + y = -6$

$0 = -3$

Výrok je nepravdivá rovnosť, sústava teda nemá riešenie pre žiadnu dvojicu reálnych čísel ***x a y***.

Pri riešení sústavy dvoch lineárnych rovníc s dvomi neznámymi nastane práve jeden z týchto prípadov:

1. Sústava má **práve jedno riešenie.**
2. Sústava má **nekonečne veľa riešení.**
3. Sústava **nemá riešenie.**

6 ***ÚLOHA***

Riešte a vykonajte skúšky správnosti.

a) $\frac{-x+y}{2} = 1 - \frac{x-y}{3}$
$y = -x$

b) $y = \frac{x+1}{3}$
$x + y = \frac{x+2y}{5}$

c) $\frac{5x+1}{2} - y = 0$
$3y + 4 = 5x$

d) $\frac{x+1}{4} + \frac{y+2}{3} = 1$
$\frac{x-2}{3} - \frac{y-1}{4} = 1$

e) $\frac{3x+4y}{2} - \frac{4x-7y}{4} = 1$
$\frac{4x-3y}{6} - \frac{14x-9y}{4} = 2$

f) $\frac{a}{3} + \frac{b}{5} = 7$
$\frac{7.(a+b-21)}{2} = \frac{3b-2a+42}{3}$

g) $\frac{2r-3s+1}{6} = \frac{3r-8s}{4} + \frac{1}{9}$
$\frac{2r+3s+2}{6} = \frac{5r-s}{10} - \frac{1}{15}$

***CVIČENIA***

Riešte sústavy rovníc.
Pri riešení každého cvičenia vykonajte aj skúšku správnosti.

**1.** a) $-2x + 3y = 0$, $4x - y = 10$ b) $-x - 4y = 6{,}5$, $4x - 2y = 10$ c) $x + 6y = 2$, $3x - y = 6$ d) $x - 3y = -5$, $2x + 6y = 10$

**2.** a) $\frac{m}{4} + 4 = n$, $\frac{m}{2} - \frac{n}{6} = 3$ b) $\frac{a}{2} - \frac{b}{3} = 13$, $\frac{a}{7} - \frac{b}{6} = -1$ c) $\frac{x+1}{2} - \frac{y-2}{3} = 1$, $\frac{x+2}{5} + 2y = 11$ d) $\frac{r+s}{2} - \frac{2s}{3} = \frac{5}{2}$, $\frac{3r}{2} + 2s = 0$

Riešte sústavy rovníc.
Pri riešení každého cvičenia vykonajte aj skúšku správnosti.

**3.** a) $\begin{aligned} 5x+2y&=15 \\ 7(y-x)&=6y-2 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} 4(x+2)&=1-5y \\ 3(y+2)&=3-2x \end{aligned}$ c) $\begin{aligned} x+y&=4 \\ 4(y-1)&=3y-x \end{aligned}$ d) $\begin{aligned} 3(x+2)&=2(y+3) \\ 5(x-2)&=3(y-2) \end{aligned}$

**4.** a) $\begin{aligned} 0{,}2x+0{,}1y&=2{,}4 \\ 1{,}4x-0{,}5y&=12 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} x+y&=1 \\ 0{,}3x+0{,}2y&=-0{,}1 \end{aligned}$ c) $\begin{aligned} 2{,}3a-0{,}8b&=-1 \\ a-0{,}2b&=0{,}3a \end{aligned}$ d) $\begin{aligned} 0{,}1a+0{,}5b&=0{,}7 \\ 0{,}3a+0{,}5b&=0{,}4 \end{aligned}$

**5.** a) $\begin{aligned} \frac{m-3}{2}-\frac{n-4}{4}&=1 \\ \frac{2m-5}{3}-\frac{2n-7}{9}&=2 \end{aligned}$ c) $\begin{aligned} \frac{1}{n-2}+\frac{1}{v+3}&=18 \\ \frac{1}{n-2}-\frac{1}{v+3}&=6 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} \frac{1}{x+1}&=\frac{2}{y+1} \\ \frac{2}{x-2}&=\frac{1}{y-1} \end{aligned}$ d) $\begin{aligned} \frac{3}{y-1}-\frac{6}{x+2}&=\frac{3}{(x+2).(y-1)} \\ \frac{2}{y+2}-\frac{3}{x-1}&=\frac{16}{(x-1).(y+2)} \end{aligned}$

## 4.3 Slovné úlohy

### Slovné úlohy riešené pomocou rovnice s neznámou v menovateli

***ZOPAKUJME SI***

**Postup pri riešení slovných úloh.**

1. Označíme neznámu písmenom a napíšeme stručný zápis úlohy.
2. Nájdeme výrazy, ktorých hodnoty sa rovnajú a zostavíme rovnicu.
3. Vyriešime rovnicu pomocou ekvivalentných úprav.
4. Urobíme skúšku správnosti, ktorou sa vrátime k údajom zo zadania.
5. Ak sa údaje vypočítané v skúške správnosti:
   - zhodujú s údajmi zo zadania, napíšeme odpoveď.
   - nezhodujú s údajmi zo zadania, skontrolujeme celý postup riešenia alebo úlohu riešime ešte raz. Za neznámu môžeme zvoliť iný údaj, ako v pôvodnom riešení.

**1** ***PRÍKLAD***

Pri spoločnej práci splnia dvaja robotníci úlohu za 2 dni. Prvý robotník by tú istú prácu vykonal sám za 6 dní. Za koľko dní by túto prácu vykonal druhý robotník sám?

***RIEŠENIE***

Andrea si spomenie na riešenie úloh o spoločnej práci a napíše zápis,

prvý robotník . . celá práca . . 6 dní . . za jeden deň . . $\frac{1}{6}$ práce

$\frac{1}{6} + \frac{1}{x}$ spolu za jeden deň

druhý robotník . . celá práca . . $x$ dní . . za jeden deň . . $\frac{1}{x}$ prace

spolu . . celá práca . . 2 dni . . za jeden deň . . $\frac{1}{2}$ práce

platí $\frac{1}{6} + \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$

Andrea rovnicu vyriešila: $x = 3$. Skontrolujte.

*Skúška:*

prvý robotník . . celá práca . . 6 dní . . za jeden deň . . $\frac{1}{6}$ práce

druhý robotník . . celá práca . . 3 dni . . za jeden deň . . $\frac{1}{3}$ práce

spolu za jeden deň . . . $\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1+2}{6} = \frac{1}{2}$ práce

celá práca $1 : \frac{1}{2} = 1 \,.\, 2 = 2$ dni, ako bolo v zadaní úlohy

*Odpoveď:* Druhý robotník by tú istú prácu vykonal sám za 3 dni.

**1** ***ÚLOHA***

Dve stavebné firmy upravia chodníky na veľkom sídlisku za 100 dní. Prvej firme by úprava trvala 260 dní. Ako dlho by na úprave pracovala druhá firma samotná?

**2** ***ÚLOHA***

Myslím si číslo. Ak k nemu pričítam číslo 3 a súčet vydelím mysleným číslom, dostanem číslo 2. Ktoré číslo som si myslel?

**3** ***ÚLOHA***

V továrni použili na vyprázdnenie nádrže dve čerpadlá. Prvé čerpadlo nádrž vyprázdni za 50 minút, druhé čerpadlo za 30 minút. Obidve čerpadlá spustili súčasne, no aby bola nádrž čo najskôr prázdna, po desiatich minútach spustili aj tretie čerpadlo. Všetky tri čerpadlá potom nádrž vyprázdnili za 5 minút. Za koľko minút by nádrž vyprázdnilo tretie čerpadlo samotné?

**4** ***ÚLOHA***

Na odvoz 3 600 športových fanúšikov plánuje dopravný podnik v Košiciach vyslať deväť električiek. V deň konania športového podujatia je k dispozícii iba šesť električiek, takže každá z nich musí urobiť o jednu jazdu navyše, aby nebola prekročená maximálna kapacita električky. Vypočítajte, koľkokrát každá električka pôjde a aká je maximálna kapacita električky.

## Slovné úlohy riešené pomocou sústavy dvoch rovníc s dvomi neznámymi

2

***PRÍKLAD***

Tretina súčtu dvoch neznámych čísel je päť, ich podiel je 1,5. Ktoré sú to čísla?

***RIEŠENIE***

Angela si neznáme čísla označí: väčšie číslo . . . x
menšie číslo . . . $y$

súčet čísel $x + y$ tretina súčtu $\frac{x+y}{3}$ platí: $\frac{x+y}{3} = 5$
podiel čísel $\frac{x}{y}$ platí: $\frac{x}{y} = 1{,}5$

Angela rieši sústavu dvoch rovníc s dvomi neznámymi: $\frac{x+y}{3} = 5$
$\frac{x}{y} = 1{,}5$

Vypočíta: $x = 9$, $y = 6$. Skontrolujte.

***Skúška:***
súčet dvoch čísel . . . . . $9 + 6 = 15$
tretina súčtu . . . . . . . . . $15 : 3 = 5$
podiel dvoch čísel . . . . $9 : 6 = 1{,}5$
Platia údaje zo zadania úlohy.

***Odpoveď:*** Hľadané čísla sú 9 a 6.

3

***PRÍKLAD***

Súčet dvoch čísel je 51. Ak vydelíme väčšie číslo menším, dostaneme podiel 5 a zvyšok 3. Ktoré sú to čísla?

***RIEŠENIE***

Soňa skúša zapísať delenie so zvyškom najskôr pre čísla 17 a 7.
Platí: $17 : 7 = 2$ zvyšok 3 alebo: $17 : 7 = 2 + \frac{3}{7}$
Hľadané čísla si označí $x$ a $y$. Nech platí: $x > y$.
Platí: $x : y = 5$ zvyšok 3 alebo: $x : y = 5 + \frac{3}{y}$
Zo zadania úlohy vieme: $x + y = 51$
$\frac{x}{y} = 5 + \frac{3}{y}$

Skontrolujte, že riešením tejto sústavy dvoch rovníc s dvomi neznámymi je: $x = 43$, $y = 8$ a urobte aj skúšku správnosti.

5

***ÚLOHA***

Podiel dvoch čísel je 8 a zvyšok 24. Súčet delenca, deliteľa a podielu je 266. Ktoré sú to čísla?

6

***ÚLOHA***

Pre dve čísla platí: Ak pričítame k jednému z nich číslo 3, dostaneme trojnásobok druhého čísla. Ak pričítame k druhému číslo 2, súčet bude polovicou prvého čísla. Ktoré sú to čísla?

7

***ÚLOHA***

Vymyslite hádanku o číslach, ktorú je možné riešiť touto sústavou dvoch rovníc s dvomi neznámymi:

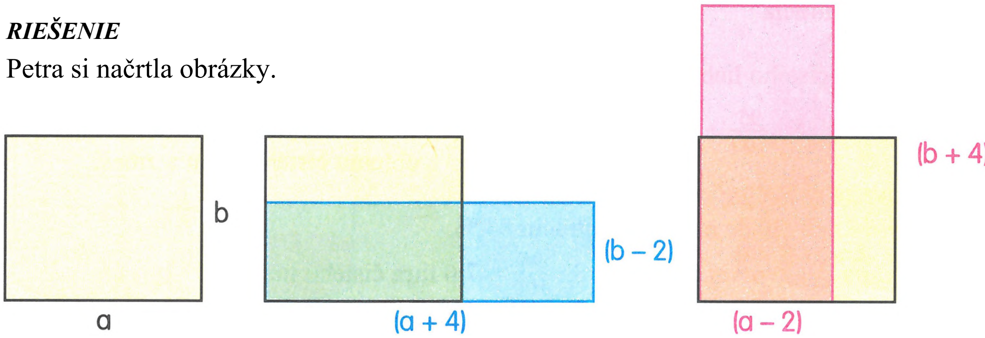
$$\frac{a}{6} + \frac{b}{2} = 13$$
$$\frac{a}{2} - \frac{b}{3} = 6$$

[4] ***PRÍKLAD***

Ak zväčšíme stranu $a$ obdĺžnika o 4 cm a zároveň zmenšíme stranu $b$ o 2 cm, obsah obdĺžnika sa nezmení. Ak však stranu $a$ zmenšíme o 2 cm a stranu $b$ zväčšíme o 4 cm, zväčší sa jeho obsah o 6 cm². Aké sú rozmery $a$, $b$ pôvodného obdĺžnika?

***RIEŠENIE***

Petra si načrtla obrázky.




rozmery $a$, $b$
obsah $a \cdot b$

rozmery $(a + 4)$, $(b - 2)$
obsah $(a + 4) \cdot (b - 2)$

rozmery $(a - 2)$, $(b + 4)$
obsah $(a - 2) \cdot (b + 4)$

Podľa zadania platí: $(a + 4) \cdot (b - 2) = a \cdot b$
$(a - 2) \cdot (b + 4) = a \cdot b + 6$

Petra vyriešila sústavu dvoch rovníc s dvomi neznámymi.
Skontrolujte, že platí: $a = 6$, $b = 5$. Urobte aj skúšku správnosti.

*Odpoveď:* Rozmery pôvodného obdĺžnika sú 6 cm a 5 cm.

8 ***ÚLOHA***

Jeden rozmer záhrady v tvare obdĺžnika je o 12 m väčší ako druhý rozmer. Keby sa každý rozmer zväčšil o 10 m, zväčšila by sa výmera záhrady o 600 m². Aké sú jej rozmery?

9 ***ÚLOHA***

Sud s vodou mal hmotnosť 63 kg. Po odliatí 75 % vody bola hmotnosť suda aj s vodou 21 kg. Koľko vážil prázdny sud a koľko vody v ňom bolo?

### Úlohy o zmesiach

V úlohách o zmesiach obyčajne vytvárame zmes z niekoľkých zložiek, z ktorých každá je zastúpená v určitom množstve. Väčšinou je potrebné vypočítať percento koncentrácie, teplotu, množstvo alebo cenu zmesi alebo jej zložiek.

[5] ***PRÍKLAD***

V lekárni priliali k ôsmim litrom 95-percentného liehu ešte dva litre 40-percentného liehu. Akú nálepku s označením □% prilepili na desaťlitrovú nádobu, v ktorej bola táto zmes naliata?

***RIEŠENIE***

Roman si nakreslí a zapíše:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Objem liehu | 8 l | + 2 l | = | $(8+2)$ l |
| Koncentrácia | 95 % | 40 % | | $x$ % |
| Objem čistého liehu | $8 \cdot \frac{95}{100}$ l | $2 \cdot \frac{40}{100}$ l | | $10 \cdot \frac{x}{100}$ l |

Rovnica $8 \cdot \frac{95}{100} + 2 \cdot \frac{40}{100} = 10 \cdot \frac{x}{100}$

Objem čistého liehu v zložkách sa rovná objemu čistého liehu v zmesi.

Roman vypočíta: $x = 84$. Skontrolujte.
Zmes liehu bude mať koncentráciu 84 %.

***Skúška:*** v prvej zložke je $8 \cdot \frac{95}{100} = 7{,}6$ litra čistého liehu
v druhej zložke je $2 \cdot \frac{40}{100} = 0{,}8$ litra čistého liehu
v zmesi je $7{,}6 + 0{,}8 = 8{,}4$ litra čistého liehu, čo je 84 %

***Odpoveď:*** Na nádobu prilepia nálepku 84 %.

***POZNÁMKA***

*V úlohách o zmesiach, v ktorých sa dve zložky zmiešavajú, vystupujú premenné:*
$m_1, m_2$ . . . *hmotnosť alebo objem jednotlivých zložiek*
$z_1, z_2$ . . . *koncentrácia alebo cena jednotlivých zložiek za jednu jednotku*
$z$ . . . *koncentrácia alebo cena zmesi za jednu jednotku*
*Platí:* $m_1 \,.\, z_1 + m_2 \,.\, z_2 = (m_1 + m_2) \,.\, z$

**10** ***ÚLOHA***

Koľko litrov vody je potrebné priliať do 56 litrov liehu s koncentráciou 96 %, aby sme získali lieh s koncentráciou 60 %? Riešte pomocou obrázka.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Objem liehu | 56 l | + $x$ l | = | $(56+x)$ l |
| Koncentrácia | 96 % | 0 % | | 60 % |
| Objem čistého liehu | $56 \cdot \frac{96}{100}$ l | $x \cdot \frac{0}{100}$ l | | $(56+x) \cdot \frac{60}{100}$ l |

**11** ***ÚLOHA***

Do zmesi ovocných cukríkov zamiešali 3 kg cukríkov v cene 160 Sk za jeden kilogram a 5 kg cukríkov v cene 180 Sk za jeden kilogram. Koľko bude stáť jeden kilogram cukríkovej zmesi?

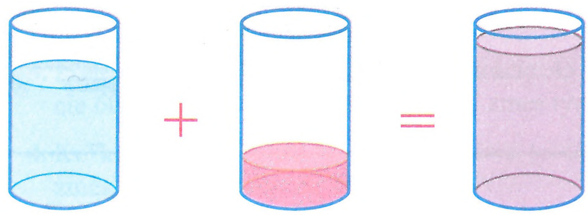
**6** ***PRÍKLAD***

Zmiešame 8 litrov vody 100 °C teplej s 28 litrami vody 10 °C teplej. Akú teplotu bude mať voda po zmiešaní?

***RIEŠENIE***

Barbora kreslí a počíta. Využíva svoje vedomostí z fyziky.

$v_1 = 28$ l     $v_2 = 8$ l     voda po zmiešaní



$t_1 = 10$ °C     $t_2 = 100$ °C     $t = x$ °C

Po zmiešaní došlo k tepelnej výmene: teplejšia voda odovzdá teplo: $Q_2 = m_2c(t_2 - t)$

chladnejšia voda prijme teplo: $Q_1 = m_1c(t - t_1)$

Tepelné straty zanedbávame, preto platí: $Q_1 = Q_2$

Po dosadení: $m_1c(t - t_1) = m_2c(t_2 - t)$

Tento vzťah sa nazýva **kalorimetrická rovnica,** ktorú môže Barbora využiť pri riešení príkladu. Z fyziky vieme:

$m_1, m_2$ . . hmotnosti kvapalín
$c$ . . . merná tepelná kapacita kvapaliny
$t_1, t_2$ . . . teploty kvapalín
$t$ . . . teplota zmesi

Keďže zmiešavame vodu, platí $c = 4{,}2\ \frac{\text{kJ}}{\text{kg . K}}$ a táto hodnota vystupuje v rovnici ako konštanta, ktorou môžeme rovnicu krátiť.

Barbora označí hľadanú teplotu zmesi $x$.
Platí: $28(x - 10) = 8(100 - x)$
Barbora vyriešila: $x = 54$. Skontrolujte.

*Odpoveď:* Teplota vody po zmiešaní bude 54 °C.

**12** ***ÚLOHA***

Mama sa chystá prať prádlo v 9 litroch vody 30 °C teplej. Do nádoby si najprv napustila 3,5 l vody s teplotou 8 °C. Akú teplotu musí mať teplejšia voda, ktorú do nádoby prileje?

**13** ***ÚLOHA***

V sude na polievanie bola voda s teplotou 18 °C. Doplnili sme ju vodou, ktorá mala 3 °C. V sude bolo potom 200 l vody teplej 6 °C. Koľko litrov vody bolo v sude pred doplnením a koľko litrov vody sme doplnili?

**[7]** ***PRÍKLAD***

V čajovni pripravujú zmes zeleného čaju tak, aby jeden kilogram stál 240 Sk. V dodávke majú dva druhy zeleného čaju a to v cene 220 Sk za 1 kg a 300 Sk za 1 kg. Koľko kilogramov druhu každého čaju musia v čajovni zmiešať, aby pripravili 50 kg požadovanej zmesi?

***RIEŠENIE***

Pavol zvolí dve neznáme. Počet kilogramov lacnejšieho čaju označí $x$, počet kilogramov drahšieho označí $y$.

pre hmotnosť platí:
lacnejší čaj................................ $x$ kg
drahší čaj ................................ $y$ kg
spolu ...................................... $(x+y)$ kg
zmes má mať hmotnosť........... 50 kg

**I.** rovnica $x + y = 50$

pre cenu platí:
lacnejší čaj................................ $220 \,.\, x$ Sk
drahší čaj ................................ $300.\, y$ Sk
spolu ...................................... $(220x + 300y)$ Sk
zmes má mať cenu................... $240 \,.\, 50$ Sk

**II.** rovnica $220x + 300y = 240 \,.\, 50$

Pavol rieši sústavu rovníc:

$$x + y = 50$$
$$220x + 300y = 240 \,.\, 50$$

*Riešenie:* $x = 37{,}5$; $y = 12{,}5$. Skontrolujte.

*Skúška:* Cena 37,5 kg lacnejšieho čaju je $220 \,.\, 37{,}5 = 8\,250$ Sk.
Cena 12,5 kg drahšieho čaju je $300 \,.\, 12{,}5 = 3\,750$ Sk.
Cena 50 kg zmesi je $8\,250 + 3\,750 = 12\,000$ Sk.
Jeden kilogram zmesi stojí $12\,000 : 50 = 240$ Sk,
tento údaj zodpovedá podmienkam úlohy.

*Odpoveď:* Na prípravu 50 kg zmesi zeleného čaju v cene 240 Sk za jeden kilogram treba zmiešať 37,5 kg čaju po 220 Sk za kilogram a 12,5 kg čaju po 300 Sk za kilogram.

**14** ***ÚLOHA***

Ak zmiešame 5 kg tovaru jedného druhu a 3 kg tovaru druhého druhu, vznikne zmes v cene 16,50 Sk za kilogram. Ak zmiešame tieto množstvá tovaru obrátene - 3 kg prvého a 5 kg druhého, cena zmesi bude 18,50 za jeden kilogram. Aká je cena jedného kilogramu tovaru každého druhu?

## *CVIČENIA*

**1.** Piatim úspešným riešiteľom matematickej olympiády máme rozdeliť čiastku 1 200 Sk tak, aby druhý a každý nasledujúci dostal o 50 Sk menej ako predchádzajúci. Určte jednotlivé sumy.

**2.** Tri pracovníčky v záhradníctve vysadili za jeden deň 3 555 priesad pelargónií. Prvá splnila dennú normu, druhá ju prekročila o 120 priesad a tretia o 135 priesad. Aká bola denná norma?

**3.** Zmiešame 10 litrov roztoku koncentrácie 45 % s 25 litrami roztoku koncentrácie 60 %. Akú koncentráciu bude mať zmes týchto roztokov?

**4.** Koľko litrov vody 50 °C teplej musíme pridať do 1,5 hl vody 12 °C teplej, aby zmes, ktorá vznikne, mala teplotu 36 °C?

**5.** Nájdite dve také čísla, pre ktoré platí: ich súčet je 7,5 a dvojnásobok jedného sa rovná trojnásobku druhého čísla.

**6.** Za 5 l pomarančového džúsu a 6 l multivitamínového džúsu sme zaplatili spolu 290 Sk. Liter multivitamínového džúsu je o 8 Sk drahší ako liter pomarančového džúsu. Koľko zaplatíme za 2 l pomarančového a 3 l multivitamínového džúsu?

**7.** Spoločná výmera dvoch susedných pozemkov je 964 $m^2$. Druhý pozemok je o 77 $m^2$ menší ako dvojnásobok výmery prvého pozemku. Určte výmery jednotlivých pozemkov.

**8.** V študentskom domove je spolu 52 trojlôžkových a štvorlôžkových izieb. Všetky izby sú plne obsadené a spolu je v domove ubytovaných 191 študentov. Koľko trojlôžkových a koľko štvorlôžkových izieb je v študentskom domove?

**9.** Pri úprave školského pozemku, v tvare obdĺžnika, deviataci vypočítali: Ak zväčšíme dĺžku aj šírku pozemku o 1 m, zväčšíme jeho výmeru o 22 $m^2$. Ak zmenšíme dĺžku pozemku o 2 m a zväčšíme jeho šírku o 1 m, zmenší sa jeho výmera o 5 $m^2$. Aká je výmera školského pozemku?

**10.** Ak Peter dá Pavlovi 6 korún, budú mať rovnakú sumu. Ak dá Pavol Petrovi 6 korún, bude mať Peter päťkrát viac ako Pavol. Koľko korún má každý z nich?

**11.** Z dvoch druhov kávy v cene 360 Sk a 420 Sk za kilogram sa má pripraviť 12 kg zmesi po 290 Sk za jeden kilogram. Koľko kilogramov ktorej kávy treba do zmesi namiešať?

## *VYSKÚŠAJTE SA!*

**1.** Riešte rovnice a) $\frac{2a}{9}-\frac{a}{6}=\frac{a}{3}-\frac{1}{2}$ b) $\frac{x}{0{,}5}-\frac{1}{0{,}2}=\frac{x}{0{,}2}-\frac{x}{0{,}4}$

**2.** Ktoré číslo zväčšené o svoju pätinu a zmenšené o svoju polovicu sa rovná 42?
A 6 B 10,5 C 60 D 14 E 70

**3.** Dĺžka jednej strany trojuholníka sa rovná $a + b$, dĺžka druhej je o $a$ +1 väčšia než prvá a tretia strana má dĺžku $2a$. Obvod tohto trojuholníka je vyjadrený výrazom:
**A** $\frac{3a+2b}{2}$ **B** $4a+2b$ **C** $3a+3b+2$ **D** $5a+2b+1$ **E** $2a^2+2b+1$

**4.** Riešte rovnice, určte podmienky riešiteľnosti a vykonajte skúšky správnosti.
a) $\frac{x-2}{x}+4=2$ b) $\frac{y+6}{y}=\frac{4\,.\,(y-3)}{2y}$ c) $\frac{2\,.\,(z-5)}{3z}+\frac{z-4}{4z}=-\frac{1}{6}$

**5.** Riešte rovnice, určte podmienky riešiteľnosti a vykonajte skúšky správnosti.
a) $\frac{3n+5}{1-n}=1$ b) $\frac{3k-4}{2k-3}-2=0$ c) $\frac{4}{d+1}-\frac{12-7d}{d-1}=7$

**6.** Riešením rovnice $\frac{x+2}{2x+2}-\frac{1}{2}=-\frac{x+4}{4(x+1)}$ je:
**A** $x$ = -6 **B** $x$ = 2 **C** $x$ = -10 **D** $x$ = 4 **E** $x$ = 0

**7.** Riešte rovnicu $\frac{c^2+4c+4}{c+2}-3c=6$

**8.** Šesť natieračov malo v plánovanej lehote natrieť 6 000 m$^2$ plochy. Dvaja natierači ochoreli, takže každý zo štyroch, ktorí zostali, musí natrieť každý deň o 50 m$^2$ viac oproti plánovanému dennému výkonu. Vypočítajte, aký bol pôvodný plánovaný denný výkon jedného natierača.

**9.** Otec rozdelil rodinné pozemky tak, že starší syn dostal trikrát väčšiu časť ako mladší syn. Neskôr však starší syn dal 2,5 ha polí mladšiemu, a tak mali obaja rovnako. Aká je celková plocha rodinných pozemkov?

**10.** Keby sme dĺžku obdĺžnika zmenšili o 2 cm a šírku zväčšili o 1 cm, zostal by obsah obdĺžnika rovnaký. Vypočítajte rozmery obdĺžnika, ak viete, že jeho obvod je 22 cm.

**11.** Ak je odtok na vani uzavretý, vaňa sa naplní vodovodným kohútikom otvoreným naplno za 3 minúty. Ak necháme odtok otvorený, vaňa sa naplní za 7,5 minúty. Ako dlho trvá vyprázdnenie vane, ak voda ďalej nepriteká?

**12.** Koľko hl vody, ktorá má teplotu 80 °C musíme naliať do bazéna, v ktorom je 200 hl vody teplej 20 °C, aby sa teplota vody v bazéne zvýšila o 12 °C?

**13.** Bufetár kúpil dva druhy cukríkov spolu za 253 Sk. Za balíček citrónových zaplatil 8 korún, za balíček ananásových 9 korún. Oba druhy predal o 2 koruny za balíček drahšie a zarobil tak 60 Sk. Koľko balíčkov z každého druhu kúpil?

**14.** Počas športových hier sa 295 športovcov rozdelilo na 53 družstiev. Chlapčenské družstvá boli päťčlenné, dievčenské boli šesťčlenné. Koľko bolo dievčenských družstiev?

***Príroda je nevyčerpateľná, nikdy nám neprestane klásť nové a neočakávané problémy.*** ***E. Cassirer***

## *František Kadeřávek*

***(26. 6. 1885 až 9. 2. 1961)***

***Český matematik. Pôsobil na Karlovej univerzite a na technike v Prahe. Vo svojej vedeckej práci sa sústredil na problematiku syntetickej geometrie, venoval sa aplikáciám geometrie vo výtvarnom umení a technickej praxi. Zaoberal sa teóriou kriviek a predovšetkým teóriou špeciálnych plôch. Známa je jeho dvojdielna učebnica deskriptívnej geometrie. Napísal viacero zaujímavých diel pre budúcich maliarov, sochárov a architektov.***

## ROZUM DO HRSTI

***Milí deviataci, opäť prichádzame s úlohami, ktoré sú netradičné, ale nie sú to úlohy z matematickej olympiády. Do tejto malej zbierky sme zahrnuli niekoľko historických úloh, ktorými sa ľudia po generáciách zabávali. Každá z uvedených úloh stojí za premýšľanie a má vzťah k matematike a logike. Ak chceme nájsť správnu odpoveď, rozmýšľame, a to je náš cieľ. Pokúste sa aj vy dať odpoveď na každú z uvedených úloh. Prajeme vám radosť z vyriešenia týchto zaujímavých úloh.***

**1. Rozličný tovar**

V obchode s rozličným tovarom pracovali súťaživí pomocníci, pyšní na rýchlosť, s akou obsluhovali zákazníkov. Mladík v oddelení s potravinami dokázal navážiť dva polkilové balíčky cukru za minútu, pomocník v oddelení textilu dokázal za rovnaký čas odstrihnúť tri metrové kusy látky. Zamestnávateľ ich vyzval na súťaž. Prvému dal vrece cukru, aby z neho navážil štyridsaťosem polkilových balíčkov a druhému dal štyridsaťosem metrov látky, aby ju nastrihal na metrové kusy. Začali pracovať. Obidvoch však prerušovali zákazníci a stratový čas bol spolu deväť minút. Pomocníka s textilom prerušili na dobu sedemnásťkrát dlhšiu ako pomocníka v potravinách. Ako dopadla súťaž?

**2. Judkinov dobytok**

Hiram B. Judkin, texaský obchodník s dobytkom, mal päť stád zložených z kráv, ošípaných a oviec. Stáda boli rovnako veľké. Jedného dňa všetko predal ôsmim obchodníkom. Každý obchodník teda kúpil rovnaký počet kusov dobytka, pričom zaplatil za kravu sedemnásť dolárov, za ošípanú štyri doláre a za ovcu dva doláre. Hiram dostal dohromady tristo jeden dolárov. Aký je najväčší počet zvierat, ktorý mohol mať? A koľko ich bolo z každého druhu?

**3. Deväť žetónov**

Máme deväť žetónov s číslami 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 a 9. Usporiadali sme ich do dvoch skupín tak, ako je to na obrázku. Keď spolu vynásobíme čísla v skupine,

dostaneme v oboch prípadoch rovnaký výsledok. Teda 158 x 23 = 3 634 a tiež 79 x 46 = 3 634. Vašou úlohou je zoradiť žetóny tak, aby ste po prenásobení dvoch čísel v skupine dostali čo najväčší výsledok. Pritom stále musí platiť, že výsledky v obidvoch skupinách sú rovnaké a v jednom prípade sa trojciferné číslo násobí dvojciferným a v druhom prípade sa navzájom násobia dve dvojciferné čísla.

**4. Číslicové násobenie**

Ďalší zábavný problém opäť berie do úvahy deväť číslic a vynecháva nulu. Použitím každej číslice práve raz nájdeme dve násobenia, ktoré dávajú rovnaký súčin. Dá sa to dosiahnuť viacerými spôsobmi. Napríklad v súčinoch 7 x 658 a 14 x 329 je každá číslica použitá práve raz a výsledok je v obidvoch prípadoch rovnaký - 4 606. Súčet číslic výsledku je 16. Nie je to ani najväčšie ani najmenšie číslo, ktoré môžeme týmto spôsobom získať. Dokážete nájsť také riešenie, kde súčet číslic výsledku bude najmenšie možné číslo? A dokážete nájsť také riešenie, kde súčet číslic výsledku bude naopak najväčšie možné číslo?

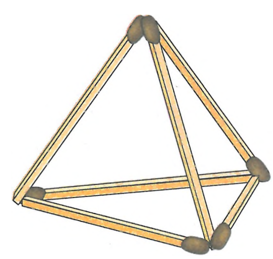
**5. Dvanásť mincí**

K tejto peknej hračke potrebujeme iba dvanásť mincí. Usporiadajte ich do kruhu ako je to na obrázku. Potom vezmite jednu mincu, preneste ju cez dve ďalšie a položte na tretiu. Vezmite ďalšiu mincu a urobte to isté a tak ďalej, až po šiestich ťahoch budete mať šesť párov mincí na miestach 1 až 6. Môžete ťahať v ktoromkoľvek smere okolo kruhu a nezáleží na tom, či dve preskakované mince sú samostatné alebo pár. Je to celkom ľahké, trochu popremýšľajte.


**6. Vytvorenie štvorstena**

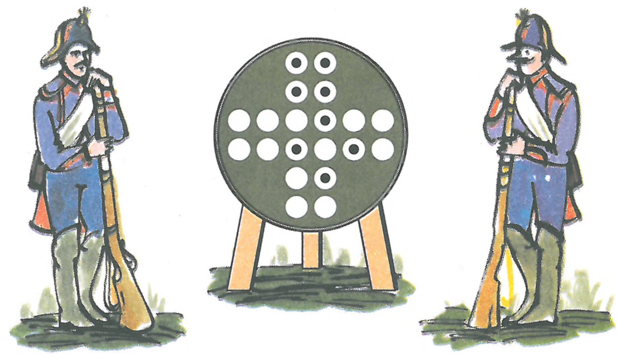
Máme štvorsten (trojboký ihlan), ktorý je vytvorený napr. spojením šiestich zápaliek, ako to vidno na obrázku.
Dokážete spočítať, koľkými rôznymi spôsobmi možno týchto šesť zápaliek zlepiť do štvorstena?

Niekoľko priateľov na tom pracovalo celý večer, pričom každý si vzal na pomoc šesť zápaliek, aby pomohli svojej predstavivosti. Potom sa však zistilo, že ani dva výsledky neboli rovnaké. Keď odstránite jednu zápalku a potom ju opäť vrátite obrátene, dostanete iný štvorsten. Keď zameníte dve zápalky, výsledok bude opäť odlišný. Ale nezabudnite, že štvorsten môže stáť na ktorejkoľvek stene, bez toho, aby sa zmenil. Koľko je možností zostavenia tohto štvorstena?



**7. Krížový terč**

Na obrázku je neobyčajný terč, navrhol ho výstredný ostrostrelec. Vychádzal z toho, že ak chcete zabodovať, musíte trafiť štyri kruhy rovnakým počtom striel tak, aby štyri zásahy vytvorili štvorec. Podľa zásahov zobrazených na terči vidíte, že dva pokusy boli úspešné. Prvý strelec trafil štyri kruhy v hornej časti kríža, a tak si vytvoril svoj štvorec. Druhý strelec chcel trafiť štyri kruhy na spodnom ramene kríža, ale jeho druhý zásah bol príliš vysoko. To ho prinútilo dokončiť svoju štvoricu iným spôsobom, než pôvodne zamýšľal. Vidno teda, že aj keď je nepodstatné, ktorý kruh zasiahnete prvým výstrelom, druhý výstrel môže určiť definitívny postup, ako sa dá dosiahnuť štvorec. Úlohou je povedať, koľkými spôsobmi je možné utvoriť štvorec na tomto terči štyrmi zásahmi.



**8. Balenie**

Ako vieme zo skúseností, vyžaduje každé balenie predmetov do škatule, keď sa nemá plytvať priestorom, značnú dômyselnosť. Pri istej príležitosti mi jeden muž povedal, že mal veľké množstvo kovových guliek s priemerom dva centimetre a chcel ich čo najviac zabaliť do pravouhlej škatule s dĺžkou 24,9 cm, šírkou 22,8 cm a hĺbkou 14 cm. Najviac koľko guliek mohol zabaliť do škatule?

**9. Sudy medu**

V dávnych časoch žil v Bagdade starý vážený obchodník. Mal troch synov, ktorých mal rovnako rád. Kedykoľvek jeden dostal darček, ostatní dvaja dostali tiež darčeky rovnakej hodnoty. Jedného dňa tento dobrý a spravodlivý muž ochorel a zomrel. Celý svoj majetok odkázal rovnakým dielom svojim synom.

Jediný problém bol zo zásobami medu v 21 sudoch. Starý muž nechal závet, že každý syn má dostať nielen rovnaký diel medu, ale tiež rovnaký počet sudov a med sa nesmie premiestňovať zo suda do suda, aby sa predišlo stratám. Sedem sudov bolo plných, sedem do polovice plných a sedem prázdnych, čo sa javilo ako malý hlavolam, zvlášť v tom prípade, keď ani jeden z bratov nechcel viac než štyri sudy rovnakého druhu - plných, poloplných, prázdnych. Dokážete poradiť, ako sa dá spravodlivo rozdeliť toto dedičstvo?

**10. Päť žiarlivých manželov**

Pri miestnej záplave bolo päť manželských párov odrezaných od sveta a muselo sa dostať zo svojej nezávideniahodnej situácie do bezpečia pomocou člnu, ktorým sa mohli odviezť len tri osoby. Ale každý z manželov bol tak žiarlivý, že nechcel, aby jeho žena bola v jeho neprítomnosti v člne alebo na brehu s iným mužom alebo mužmi. Nájdete najrýchlejší spôsob, ako sa týchto päť mužov a päť žien môže dostať do bezpečia?

Označte mužov *A, B*, *C, D, E* a ich ženy a, *b*, *c, d*, *e.* Plavba tam a späť sa počíta za dve plavby. Žiadne triky ako použitie lana, plávanie a pod. nie sú povolené.

**11. Hra s kockami**

Hovorí sa, že obyvatelia mesta Montenegro majú svoju hru s kockami. Dvaja hráči si najskôr vyberú dva rôzne páry nepárnych čísel väčších než 3 a potom striedavo hádžu troma kockami. Kto prvý hodí kocky tak, že ich súčet dá jedno z jeho vybraných čísel, vyhráva. Keď sú obaja úspešní vo svojich dvoch hodoch, je to remíza a hádžu znovu. Jeden hráč si napríklad vyberie 7 a 15, druhý 5 a 13. Keď prvý hráč hodí súčet 7 alebo 15, vyhráva, pokým druhý hráč nehodí svojím vrhom súčet 5 alebo 13. Úlohou je zistiť, ktoré dva páry čísel treba vybrať, aby obaja hráči mali rovnakú šancu vyhrať.

**12. Problém stovky**

Viete napísať číslo 100 v tvare zmiešaného čísla, t. j. celého čísla a zlomku tak, že všetkých deväť číslic bude použitých iba raz? Vynikajúci francúzsky matematik Edonard Lucas našiel sedem spôsobov, ako tento problém vyriešiť a vyjadril pochybnosti, či ich nie je viac. V skutočnosti ich je jedenásť. Tu je jeden z nich, $91\frac{5742}{638}$. Deväť ďalších riešení má celú časť vytvorenú podobne dvojmiestnym číslom, posledné riešenie má celú časť čísla vytvorenú len jednociferným číslom. Dokážete nájsť všetky riešenia?

***Veda sama osebe objavuje mravné hodnoty*; *učí nás predovšetkým pravdivosti a bázni*.**

***M. Faraday***

# VÝSLEDKY ÚLOH A CVIČENÍ

## 1 Opakovanie a prehĺbenie učiva matematiky z 8. ročníka

### 1.1 Vklad, úrok, úroková miera

*Úlohy:* **1.** 840 Sk; **2.** 780 Sk; **3.** $K = \frac{1\,200u}{p\,.\,m}$, $p = \frac{1\,200u}{K\,.\,m}$, $m = \frac{1\,200u}{K\,.\,p}$; **4.a)** 450 000 Sk; **b)** 8 %; **c)** 5 mesiacov; **5.** 13 %; **6.** 1 920 Sk; **7.** $K = \frac{36\,000u}{p\,.\,d}$, $p = \frac{36\,000u}{K\,.\,d}$, $d = \frac{36\,000u}{K\,.\,p}$; **8.a)** 45 000 Sk; **b)** 15 %; **c)** 324 dní; **9.** nie, chýba 3 120 Sk; **10.** počty dní: 335, 168, 204, 69, 231; **11.** 93 000 Sk.

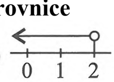
*Cvičenia:* **1.a)** 6 000 Sk; **b)** 7 440 Sk; **c)** 18 375 Sk; **2.a)** 33,33 Sk; **b)** 100 Sk; **c)** 116,66 Sk; **d)** 200 Sk; **3.a)** 26 931,66 Sk; **b)** 312 931,66 Sk; **4.** 40 000 Sk; **5.** 25 %; **6.** 8 mesiacov; **7.** 325 800 Sk; **8.a)** 6 936,94 Sk; **b)** 91 936,94 Sk; **9.** úrok $u$ (Sk): 882,77; 7 990; 40,52; 40 958,66; 46,66; **10.** 800 000 Sk; **11.** 9 %; **12.** 54 dní; **13.** 600 000 Sk.

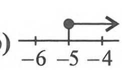
### 1.2 Mocniny a odmocniny

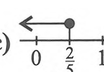
*Úlohy:* **1.a)** $x^7$; **b)** $\left(\frac{1}{2}\right)^6$; **c)** $(x + 1)^5$; **d)** $(a + 2b)^5$; **e)** $(a + b + c)^3$; **f)** $-(2x - 5y)^4$; **2.a)** nula; **b)** kladnú; **c)** kladnú, ak je párny exponent a zápornú, ak je exponent nepárne číslo; **3.** 1 728; 1,464 1; –0,000 027; 0,000 000 1; 6 250 000; 512 000 000; –267; 64; **4.** $0{,}7x^7 + 0{,}03x^6 - 2y^2$; **5.a)** $6y^8$; **b)** $(-2)^9 = -512$; **c)** $(a - 3b)^7$; **d)** $-(7x^2y - z)^5$; **e)** $(3a + b)^{m-n+2}$; **f)** $(k - 2l)^4$; **6.a)** 1; **b)** –3; **c)** $100xy^2$; **d)** $-2{,}5x^4$; **e)** $(x + y)^4$; **f)** $\frac{1}{3m - 7n}$, $m \neq \frac{7}{3}n$; **g)** $\frac{3}{a}$, $a \neq 0$; $x \neq 2y$; **h)** $2(a - b)^2$, $x \neq 0$, $a \neq b$; **i)** $\frac{1}{a}$, $a \neq 0$; **7.a)** 8 000; **b)** $49x^4y^{10}z^2$; **c)** $256u^{20}z^{24}$; **d)** $\frac{8x^{15}}{27y^6}$; $y \neq 0$; **e)** $\frac{x^2}{y^2 - 14y + 49}$, $y \neq 7$; **f)** $\frac{(m + 2n^5)^6}{(m^2 - n^2)^6}$, $m \neq \pm n$; **8.a)** 9; 10; 1,2; 0,03; $\frac{7}{13}$; –80; **b)** 2; 3; 0,1; 40; $\frac{1}{5}$; 50; **9.a)** 2,24; 8,94; 26,83; 2,33; 138,92; 0,24; 0,017; **b)** 3,07; 7,84; 9,65; 0,292; 82,7; 0,412; 0,464; **10.** $a$ = 624 932; **11.a)** $1{,}495\,.\,10^6$ km; **b)** $2{,}5\,.\,10^5$.

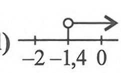
*Cvičenia:* **1.a)** áno; **b)** nie, lebo výsledok je kladný; **c)** nie $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$; **d)** áno; **e)** áno; **f)** áno; **2.a)** $5^0 > 0^5$; **b)** $(-2)^4 = (-4)^2$; **c)** $(-7)^2 > (-2)^7$; **d)** $\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^4$; **3.** C; **4.** E; **5.** C; **6.** D; **7.** platia všetky rovnosti; **8.** B; **9.** C; **10.** C.

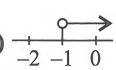
### 1.3 Lineárne nerovnice

*Úlohy:* **1.a)** 

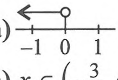
; **b)** 

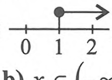
; **c)** 

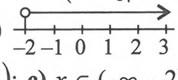
; **d)** 

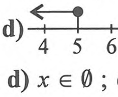
; **e)** 

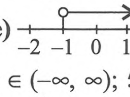
; **f)** 

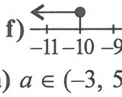
; **2.a)** $x \in (-\infty, 2)$; **b)** $y \in \langle -5, \infty)$; **c)** $z \in \left(-\infty, \frac{2}{5}\right\rangle$; **d)** $a \in (-1{,}4; \infty)$; **e)** $b \in (-1, \infty)$; **f)** $c \in (-\infty; 3{,}5\rangle$; **3.a)** 

; **b)** 

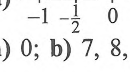
; **c)** 

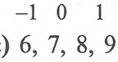
; **d)** 

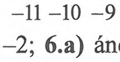
; **e)** 

; **f)** 

; **4.a)** $x \in \left(-\frac{3}{5}, \infty\right)$; **b)** $x \in \left(-\infty, \frac{3}{4}\right)$; **c)** $x \in (-\infty, -2\rangle$; **d)** $x \in \emptyset$ ; **e)** $x \in (-\infty, \infty)$; **5.a)** $a \in (-3, 5)$; **b)** $b \in \langle 0, 7)$; **c)** $x \in (-8, 0\rangle$; **d)** $z \in \langle 3{,}2; 4{,}8\rangle$; **e)** $u \in (-4, \infty)$; **f)** $v \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right\rangle$.

*Cvičenia:* **1.a)** $c \in (-\infty, -2)$; **b)** $k \in \langle -1, \infty)$; **c)** $m \in (-\infty, 3\rangle$; **d)** $h \in (0, \infty)$; **e)** $x \in \langle -8, \infty)$; **f)** $y \in (7, \infty)$; **2.a)** 

; **b)** 

; **c)** 

; **3.a)** $z \in (-12, -8)$; **b)** $z \in \langle -5, 0)$; **c)** $z \in \langle 11, 55\rangle$; **4.a)** 0; **b)** 7, 8, 9; **c)** 6, 7, 8, 9; **5.** –2; **6.a)** áno; **b)** áno; **c)** nie; **7.a)** $x \in \langle d, h\rangle$; **b)** $x \in \langle d, h)$;

**c)** $x \in (d, h\rangle$; **d)** $x \in (-\infty, h\rangle$; **e)** $x \in (d, \infty)$; **8.a)** $x \in (0, \infty)$; **b)** $x \in \left(-\infty, \frac{7}{5}\right\rangle$; **c)** $x \in \left(-\infty, \frac{7}{4}\right)$; **d)** $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right\rangle$; **9.a)** 1, 2, 3; **b)** všetky prirodzené čísla; **c)**, **d)** žiadne prirodzené číslo; **10.** pre čísla $a \in \langle -2, -1)$; **11.a)** $p \in (-\infty, 2)$; **b)** $p \in (2, \infty)$; **c)** $p \in (-8, \infty)$; **d)** $p \in (-\infty, 32\rangle$; **12.** 32 balíkov; **13.** strany obdĺžnika sú $x$, $50 - x$; strana štvorca je 25 cm; platí $(x - 25)^2 \geq 0$.

### 1.4 Pytagorova veta

*Úlohy:* **3.a)** áno; **b)** nie, **c)** nie; **d)** áno; **e)** áno; **f)** áno; **4.**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ***a*** | 10 | 5 | 6 | 30 | 10 | 13 |
| ***b*** | 24 | 12 | 8 | 40 | 24 | 84 |
| ***c*** | 26 | 13 | 10 | 50 | 26 | 85 |

**5.** $v = \frac{a}{2}\sqrt{3} = 3 \,.\, \sqrt{3}$ cm.

*Cvičenia:* **1.a)**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ***a*** | 3 | 10 | 15 | 12 |
| ***b*** | 4 | 24 | 20 | 9 |
| ***c*** | 5 | 26 | 25 | 15 |

; **2.** $u = 10$ cm; **3.** $u_t = 6 \,.\, \sqrt{3}$ cm; **4.** 8 m.

### 1.5 Kruh, kružnica

*Úlohy:* **2.** nájdite stred kružnice opísanej trojuholníku $ABC$; **3.a)** $S \in \overrightarrow{OA}$, $|SO| = 5$ cm; **b)** $S \in \overrightarrow{OA}$, $|SO| = 1$ cm; **5.** obvod sa zväčší o $2\pi r$, obsah o $3\pi r^2$.

*Cvičenia:* **1.a)** 12 cm; **b)** 8,5 cm; **2.** $k_1$, $k_2$ sa pretínajú, $|S_1S_2| < r_1 + r_2$; $k_2$, $k_3$ sa dotýkajú zvonka, $|S_2S_3| = r_2 + r_3$; $k_1$, $k_3$ sa nepretínajú, $|S_1S_3| > r_1 + r_3$; $k_1$, $k_4$ sa nepretínajú, $|S_1S_4| > r_1 + r_4$; $k_2$, $k_4$ sa nepretínajú, $|S_2S_4| > r_2 + r_4$; $k_3$, $k_4$ sa nepretínajú, $|S_3S_4| > r_3 + r_4$; **3.** 31,40 cm$^2$; **4.** $|AT_1| = |AT_2| = |T_1T_2| = 2 \,.\, \sqrt{3}$ cm; **5.** 362,29 mm.

### 1.6 Konštrukčné úlohy

*Úlohy:* **1.** os úsečky $AB$; **2.a)** kružnica $k_1(S, r + r')$; **b)** kružnica $k_2(S, r + r')$; **3.** dve kolmé priamky, na ktorých ležia osi uhlov určených priamkami $a$, $b$.

*Cvičenia:* **1.** použite množinu bodov, ktoré sú od priamky $AB$ vo vzdialenosti $v_c = 3$ cm a množinu bodov, ktoré sú od bodu $B$ vo vzdialenosti $a = 4$ cm; **2.** zostrojte najskôr $\triangle ABC$ podľa vety ($sss$); **3.** jej stred bude v prieniku kružnice $k'(S; 3{,}5$ cm$)$ a priamky $t' \| t$, vzdialenosť priamok je 1,5 cm.

#### Vyskúšajte sa!

**1.a)** 245 Sk; **b)** približne 143 Sk; **c)** 13,61 Sk; **2.** 14 %; **3.** 243 750 Sk; **4.** $3 \,.\, 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $2{,}25 \,.\, 10^5 \frac{\text{km}}{\text{s}}$; $1{,}97 \,.\, 10^5 \frac{\text{km}}{\text{s}}$; **5.a)** $15m^5 - 11m^4$; **b)** $5a^2 - 12b^2$; **c)** $\frac{32x^{11}}{3\,125a^6}$; **6. D**; správne má byť $(9 + x)^6$; **7.** všetky výsledky sú správne; **8. C**; správne 26,5; **9.a)** 11, 12, 13, 14; **b)** 18, 19; **c)** 11, 12; **10.a)** $x \leq -6$, $x \in (-\infty, -6\rangle$; **b)** $y \geq 3$, $y \in \langle 3, \infty)$; **c)** $a < 2$, $a \in (-a, 2)$;**d)** $c > \frac{-8}{5}$, $c \in (-\frac{8}{5}, \infty)$; **11.a)** $z \geq -\frac{1}{5}$; **b)** $z < -\frac{7}{5}$; **c)** $z > 7$; **12.** 12,4 cm; **13.** 33,48 cm$^2$; **14.** nájdite množiny bodov, ktorým patria stredy hľadaných kružníc.

## 2 Úprava algebrických výrazov

### 2.1 Celistvé algebrické výrazy

*Úlohy:* **2.** výrazy: $(a + b)$, $(a + b - 2)$, $(a + b - 5)$, $(a - b)$, $\frac{a}{b}$; **3.a)** $15a - 8$; **b)** $3x + 8$; **c)** $-9m + 2$; **d)** $4xy + 2$; **4.a)** $-3x - 15y + 3z$; **b)** $-30$; **5.a)** $x^2 + 2x + y^2 - 3y$; **b)** $7x^3 - 4x$; **c)** $2a^2 - 3b^2 - ab - 2a + 3b$; **d)** $-m^2 - n^2 + m - 2n - 1$; **6.** $x^2 + ax - 2a^2$; **7.a)** $9a(3a^2 - 2)$; **b)** $-11y(x + 4z)$; **c)** $(b - 1)(6a - 4b)$; **d)** $(a + 2b)(xy + x^2y)$; **8.a)** $a(a^2 + b^3)$; **b)** $b^2(b^3 - 1)$; **c)** $3a^2b(2 - b)$; **d)** $3a^3b^2(1 - 3ab + 2a^2b^3)$; **9.a)** $(1 + 5a)(5ax + 6by)$; **b)** $(5x + y)(2a + 3b)$; **c)** $(x - y)(a + b)$; **10.a)** $(c - d)(y - 1)$; **b)** $(a - 1)(b - a)$;

c) $(k-p)(m+7)$; d) $(a-3)(2-b)$; 12.a) $(1+2a)(1+2a)$; b) $(a+2b)(a+2b)$; c) $(11-2x)(11-2x)$; d) $(3a-2b)(3a-2b)$; e) $(y+3x)(y-3x)$; f) $(10+z)(10-z)$; 13.a) $(x-y+z)(x-y-z)$; b) $(3x-2+y)(3x-2-y)$; c) $(3+5x)(3-13x)$; d) $(7+y)(11-y)$; 14.a) $(a-1)(3a+1)$; b) $(3x-2)(3x+1)$; c) $(y+2)(3y-1)$.

*Cvičenia:* 1.a) $\frac{2}{5}z$; b) $3k+5$; c) $\frac{z}{2}-\frac{1}{3}$; 2a) päťnásobok čísla $z$ zmenšený o trojnásobok čísla $x$; b) polovica čísla $x$ zmenšená o sedem tretín; c) dve sedminy zo súčtu čísla $s$ zväčšeného o trojnásobok čísla $p$; d) druhá mocnina súčtu čísel $x$ a $y$; 3.a) $-2a-7$; b) $-2x-7y-1$; c) $x^2+9y^2-8xy+3y$; 4.a) $0{,}9c-1{,}2$; $0{,}6$; b) $0{,}3d-0{,}25$; $1{,}25$; 5.a) $13y-37$; b) $45{,}6y-1$; 6.a) $10a^4-4a^2+2a$; 4; b) $3x^3-6x^2-9x$; $-\frac{45}{8}$; 7.a) $-6(a+1)$; b) $10(4-k)$; 8.a) $V=a^3+a^2-2a$; $240\ \mathrm{cm}^3$; $S=6a^2+4a-4$; $236\ \mathrm{cm}^2$; b) $V=a^3-a$; $\frac{910}{27}\ \mathrm{m}^3$; $S=6a^2-2$; $\frac{194}{3}\ \mathrm{m}^2$; 9.a) $x^4+4x+4$; b) $16d^2+16d+1$; c) $64-16x+x^2$; d) $a^2b^2-8abc+16c^2$; e) $a-2ab+b^2$; f) $16m-40m+25$; 10.a) $(20-4)(20+4)=384$; b) $(30-8)(30+8)=836$; c) $(60-7)(60+7)=3\,551$; d) $(90-9)(90+9)=8\,019$; 11.a) $5(2x+y^2)$; b) $24x^2y(xy-5)$; c) $12a(12a-b)$; d) $6x^3(3x-4)$; 12.a) $(x+1)(a-1)$; b) $(4d-3)(5b+1)$; c) $(2a-7)(d^2+1)$; d) $(a-2)(2c+1)$; e) $(12-b^2)(a^2+x^2)$; f) $(5-y)(8x^2-1)$; 13.a) $(x+1)(x+1)$; b) $(2c-3d)(2c-3d)$; c) $(y-2)(y-2)$; d) $z(z-3)(z-3)$; e) $(r-x)(r+x)$; f) $x(x-1)(x+1)$; g) $(3-x)(1+x)$; h) $(y+2)(y-6)$; 14.a) $(b-1)(4b+1)$; b) $(u-1)(10u-3)$; c) $(x^2+1)(2x^2-1)$; d) $(2c+1)(3c-5)$.

## 2.2 Lomené výrazy

*Úlohy:* 1. čitateľ lomeného výrazu sa môže rovnať nule, pretože platí $\frac{0}{x}=0:x=0$ pre ľubovoľné číslo $x\neq 0$; 2.a) 1; b) $-2$; c) $\frac{4}{3}$; d) $-1$; 3.a) vždy; b) $x\neq 2$; c) $a\neq 2$; d) $a\neq -b$; e) $s\neq 2r$; 4.a) $x=0$; $x=-\frac{1}{2}$; b) $y=\pm 1$; c) $u=\pm 2$; d) $x=2$, $x=3$; 5. D; 6.a) $a\in R$ (pre každé reálne číslo $a$), $\frac{1}{4}$; b) nemá zmysel pre $a=b=0$, $\frac{1}{2}$; c) $a, b\in R$ (pre ľubovoľné reálne čísla $a$, $b$), $-\frac{11}{24}$; 7.a) $x=-\frac{1}{3}$; b) $x=\frac{5}{8}$; c) $\frac{1}{9}$.

*Cvičenia:* 1.a) vždy; b) $x\neq 0$, $y\neq 0$; c) $a\neq 0$, $b\neq 0$; d) $a\neq 0$; e) $b\neq -1$; f) $m\neq \pm n$; g) $x\neq \frac{2}{5}y$; h) $a\neq 0$, $a\neq -9$; i) $a\neq -b$; 3. $t\neq \pm 2$; 4. A; 5. C; 6. $x^2+y^2+1$ je vždy rôzne od nuly; 7. $x=-4$; 8. A; 9. pretože v čitateli je vždy číslo rôzne od nuly.

## 2.3 Krátenie a rozširovanie lomených výrazov

*Úlohy:* 1.a) $\frac{a}{b}$, $b=0$; b) $\frac{b}{v^2}$, $v=0$; c) 1, $x=0$, $z=0$; d) $\frac{3b}{2a}$, $a=0$; e) $\frac{1}{2p^2q}$, $p=0$, $q=0$; f) 2, $x=0$; 2.a) $\frac{3b}{2a+4b}$, $a\neq -2b$, $a\neq 0$; b) $\frac{c+d}{d}$, $c\neq 0$, $d\neq 0$; c) $a+1$, $b\neq 0$; d) $\frac{5}{3}$, $m\neq -2n$; e) $\frac{a-2}{2(a-1)}$, $a\neq 1$; f) $\frac{x-1}{x+1}$, $x\neq -1$, $x\neq 0$; 3.a) $\frac{1}{a+b}$, $a\neq \pm b$; b) $\frac{2}{r-s}$, $r\neq s$; c) $5y-3x$, $y\neq \frac{3}{5}x$; d) $\frac{2m-n}{2m+n}$, $m\neq \frac{-1}{2}n$; 4.a) $2x-1$, $x\neq -2$; 3; b) $\frac{2(x-y)}{x+y}$, $x\neq \pm y$; nemá zmysel; c) $\frac{(y+5)(y-2)}{2}$, $y\neq 2$, $y\neq 5$; $-6$; 5.a) $\frac{8}{4s}$, $s=0$; b) $\frac{x^2}{2x^2y}$, $x=0$, $y=0$; c) $\frac{9p^3q}{3p^2q^2}$, $p=0$, $q=0$; d) $\frac{-3a}{-6a^2}$, $a=0$; e) $\frac{-x}{-x-1}$, $x=-1$; f) $\frac{a^2+ab}{a^2+2ab+b^2}$, $a=-b$; 6.a) 6; b) $16x$; c) $2ab^2c$; 7. $(1+b)^2$; 8. rozšírime: a) $(-1)$; b) $(a+1)$; c) $(a+b)$; d) 4.

*Cvičenia:* 1.a) $\frac{2}{3xy}$; b) $\frac{3u}{2u+6u}$; c) $1+x$; d) 4; 2.a) $m^2-n^2$; b) $\frac{1}{b}$; c) $l+k$; d) $\frac{x+3}{x+y}$; 3.a) $\frac{x-3y}{2x}$; b) $\frac{y+2}{y-2}$; c) $\frac{x-1}{y-1}$; 4.a) $\frac{25y}{5xy}$; b) $\frac{2ac}{6abc}$; c) $\frac{3x^2-3x}{4xy-4y}$; d) $\frac{z^2-z}{z^2-1}$; e) $\frac{8k^2+64k}{8k^2+65k+8}$; f) $\frac{l^2-4}{2l^2+8l+8}$; 5.a) $2x$; b) 2; c) $q^2$; d) $(x+3)$; e) $(a+b)$; f) $(x-y)$; 6.a) $(a+1)$; b) $(-a-1)$.

## 2.4 Sčítanie a odčítanie lomených výrazov

*Úlohy:* 1.a) $\frac{2a+b-c}{x}$, $x\neq 0$; b) $\frac{10}{a}$, $a\neq 0$; c) $\frac{8}{y}$, $y\neq 0$; 2.a) $y^2-1$; b) $k^2-1$; c) $d(d+1)(d-1)$; d) $(p-q)$; 3.a) $\frac{-1}{a-1}$, $\frac{1}{3}$, $a\neq \pm 1$; b) $\frac{1}{x-2}$, $\left(-\frac{2}{3}\right)$, $x\neq \pm 2y$; c) $\frac{x+1}{x+2y}$, 2, $x\neq \pm 2$; d) $\frac{2}{(r-2)(r+2)}$, $\frac{2}{5}$, $r\neq 0$, $r\neq \pm 2$; 4.a) $\frac{6y-3}{5}$, platí vždy; b) $\frac{4x+y}{3}$, platí vždy; c) $\frac{x^2}{x-1}$, $x\neq 1$; d) $\frac{x}{1-x}$, $x\neq 1$.

*Cvičenia:* **1.a)** $\frac{6}{a}$, $a \neq 0$; **b)** $\frac{1}{x}$, $x \neq 0$; **c)** $\frac{5-v}{a}$, $a \neq 0$; **d)** $\frac{2a}{x}$, $x \neq 0$; **e)** $\frac{3b+4a^2}{ab}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$; **f)** 0, $x \neq 0$; **2.a)** $\frac{4a+x+9}{x+8}$, $x \neq -8$; **b)** $\frac{2b}{2x-3}$, $x \neq \frac{3}{2}$; **c)** $\frac{x+8}{1+4y}$, $y \neq -\frac{1}{4}$; **d)** $\frac{1}{2-p}$, $p \neq 2$; **3.a)** $(x+y)(x+y)(x-y)$; **b)** $3(a-b)(a-b)$; **c)** $5(a-3)(a+3)$; **4.a)** $\frac{3b}{8}$, platí vždy; **b)** $\frac{z(5-3z)}{5}$, $z \neq 0$; **c)** $\frac{n+m}{n(m-n)}$, $n \neq 0$, $m \neq n$; **d)** $\frac{3b-4a}{ab}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$; **e)** $\frac{7}{2r}$, $r \neq 0$; **f)** $\frac{2-3y}{xy}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$; **5.a)** 0, $x \neq \pm 2$; **b)** $\frac{-4(r^2+2r-7)}{(r+1)(r-3)}$, $r \neq -1$, $r \neq 3$; **6.a)** $\frac{3x+y}{2(y-1)}$, $y \neq 1$; **b)** $\frac{2(p+q-2)}{(p-q)(p+q)}$, $p \neq \pm q$; **c)** $\frac{3(a^2+b^2)-2ab}{2(a+b)(a-b)}$, $a \neq \pm b$; **d)** $\frac{n(13n+12)}{(n-3)(n+3)}$, $n \neq \pm 3$; **e)** $\frac{r+s}{r}$, $r \neq 0$, $r \neq s$; **f)** $\frac{3-m^2}{m(2m+3)(2m-3)}$, $m \neq 0$, $m \neq \pm\frac{3}{2}$; **7.a)** $\frac{-(a-b)^2}{ab}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$; **b)** $\frac{3(a+1)}{a(a-1)(a+1)}$, $a \neq 0$, $a \neq \pm 1$; **c)** $\frac{51x-15}{2x(x-3)(x+3)}$, $x \neq 0$, $x \neq \pm 3$; **d)** $\frac{2}{(r-2)(r+2)}$, $r \neq 0$, $r \neq \pm 2$; **e)** $\frac{-a^2+4a-5}{(a+5)(a-5)}$, $a \neq \pm 5$; **f)** $\frac{x-3}{2(x+3)}$, $x \neq \pm 3$; **8. B**; **9. B**.

## 2.5 Násobenie a delenie lomených výrazov

*Úlohy:* **1.a)** $2ab$, $b \neq 0$; **b)** $-\frac{2b}{a}$, $a \neq 0$; **c)** $xy$, $x \neq 0$, $y \neq 0$; **d)** 1, $a \neq 0$, $b \neq 0$; $c \neq 0$; **2.a)** $4(x-2)$, $x \neq -2$; **b)** $\frac{m^2+n^2}{m+n}$, $m \neq \pm n$; **c)** $-3xy(2x+1)$, $x \neq 0$, $x \neq \frac{1}{2}$; **d)** 1, $a \neq b$; **3.a)** $yz+xz+xy$; **b)** $2r+s+\frac{r^2}{s}$; **c)** $\frac{a}{b}-\frac{b}{a}$; **4.** $2n$; **5.a)** $\frac{2\,250}{x}(x+2)$; **b)** 2 280; **6.a)** $\frac{4x}{3x-5}$, $x \neq \pm\frac{5}{3}$; **b)** $-2u$, $u \neq 0$, $u \neq \pm 5$; **c)** $\frac{2(x+3)}{5x}$, $x \neq 0$, $x \neq \pm 2$; **7.a)** $2-\frac{x}{y}-\frac{y}{x}$, $\frac{9}{2}$; **b)** $-\frac{z^2}{(z-1)(z+1)}$, $-\frac{9}{8}$; **8.a)** $\frac{6}{x}$, nikdy sa nerovná nule, $x = 0$; **b)** $\frac{a}{12}$, $a = 0$, má zmysel pre každé $a \in R$; **c)** $\frac{x-2}{y^2+z^2}$, $x = 2$, $y = z = 0$; **d)** $\frac{1}{(x-1)^2}$, nikdy sa nerovná nule, $x = 1$; **e)** $v+u$, $v = -u$, má zmysel pre každé $u, v \in R$; **f)** $\frac{xy}{ay+bx}$, $x = 0$, $y = 0$, $ay = -bx$; **9.a)** $\frac{1}{8x}$, $x \neq 0$; **b)** $\frac{a}{8}$, $a \neq 0$; **c)** $\frac{1}{mn}$, $m \neq 0$, $n \neq 0$, $m \neq n$; **d)** 1, $x \neq \pm y$; **10.a)** 3, $x \neq 0$, $y \neq 0$; **b)** $\frac{1}{b}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$; **c)** 2, $m \neq n$; **d)** 2, $y \neq -2$, $x \neq -\frac{1}{3}$; **11.a)** $-\frac{1}{t}$, $t \neq 0$, $t \neq \pm 5$; **b)** $-\frac{1}{x}$, $x \neq 0$, $x \neq 2$, $x \neq 3$; **c)** $\frac{3}{2(1+a)^2}$, $a \neq \pm 1$; **d)** $-\frac{a+b}{c-d}$, $c \neq \pm d$, $a \neq b$; **12.a)** $\frac{-6}{(c-2)(c-1)}$, $c \neq 1$, $c \neq 2$; $-3$; **b)** $\frac{2ab}{(a-b)(a+b)}$, $a \neq \pm b$, $a \neq 0$, $b \neq 0$; $\frac{4}{3}$.

*Cvičenia:* **1.a)** $\frac{1}{1+a}$, $a \neq \pm 1$; **b)** 4, $n \neq -v$; **c)** $\frac{n-m}{3}$, $m \neq n$; **d)** $2(2+y)$, $y \neq 2$; **e)** $\frac{p+r}{m-n}$, $m \neq \pm n$, $p \neq r$; **f)** 2, $a \neq 0$, $a \neq \pm b$; **2.a)** $\frac{5x+5}{x-1}$, $x \neq \pm 1$; **b)** $\frac{y-1}{3x}$, $x \neq 0$, $y \neq 1$; **c)** $\frac{-1}{5-2a}$, $a \neq \frac{5}{2}$; **d)** $\frac{2(3x+2y)}{3x-2y}$, $x \neq \pm\frac{2}{3}y$; **3.a)** $-1$, $x \neq \pm 2$; **b)** $(r+3)(r-1)$, $r \neq 3$, $r \neq -1$; **4.a)** $\frac{a}{a-2}$, $a \neq 2$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a \neq -b$; **b)** $\frac{2}{v}$, $v \neq 0$, $n \neq 0$, $n \neq v$; **c)** $\frac{q(p+q)}{10(p-1)}$, $p \neq \pm q$, $p \neq 0$, $p \neq 1$; **d)** $\frac{3(a+b)}{2(x-y)}$, $x \neq \pm y$, $a \neq b$; **5.a)** $\frac{(x+2)^2}{2}$, $x \neq \pm 2$; **b)** $\frac{3}{4}$, $z \neq \pm 1$; **c)** $2(1+a)$, $a \neq 1$, $a \neq 2$, $b \neq 0$; **d)** $\frac{n-a}{n+a}$, $n \neq \pm 1$, $a \neq -n$; **6.a)** $-\frac{(x-y)(x-y)}{xy}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$; **b)** $\frac{-z^2}{(1-z)(1+z)}$, $z \neq \pm 1$; **c)** 4, $r \neq \pm s$, $r \neq 0$, $s \neq 0$; **7.a)** $-x$, $x \neq 0$, $x \neq 1$; **b)** 2, $x \neq \pm 1$; **c)** $\frac{x-3}{3(x+3)}$, $x \neq \pm 3$, $y \neq 4$; **d)** $\frac{x+y}{2(x-2)}$, $x \neq 0$, $x \neq \pm y$, $x \neq 2$; **e)** $\frac{(y-x)(5+x)}{3x}$, $x \neq \pm 5$, $x \neq 0$, $x \neq y$; **f)** $\frac{2}{2x-y}$, $x \neq 0$, $x \neq \pm\frac{y}{2}$; **8.a)** $\frac{x+2}{2}$, $x \neq 2$; **b)** $\frac{6a^2-7b^2}{ab}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$; **c)** $-xy$, $x \neq 0$, $y \neq 0$, $x \neq y$; **d)** $-u-v$, $u \neq 0$, $v \neq 0$, $u \neq v$; **e)** 1, $a \neq 0$, $b \neq 0$; **f)** $\frac{12rs}{r-s}$, $r \neq \pm s$, $r \neq 0$; **9.a)** $-3x$, $x \neq 2$, $x \neq \pm 3$; **b)** $\frac{-2}{x+2}$, $x \neq 0$, $x \neq -6$, $x \neq \pm 2$; **c)** $\frac{(5+x)(1+x)}{2(5-x)}$, $x \neq \pm 1$, $x \neq 0$; **d)** $\frac{3}{1+x}$, $x \neq \pm 2$, $x \neq \pm 1$; **10. B**; **11. D**; **12.** rovnajú sa; **13.** $y$-krát; **14.a)** $\frac{s}{k}$; **b)** $\frac{d\,.\,k}{s}$.

## 2.6 Zložené lomené výrazy

*Úlohy:* **1.a)** $\frac{15}{ac}$, $a \neq 0$, $c \neq 0$; **b)** $\frac{bx}{2y^2a^3}$, $y \neq 0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$; **c)** $\frac{1}{3k}$, $k \neq 0$, $s \neq 0$; **d)** $\frac{3}{2x}$, $x \neq 0$; **2.a)** $\frac{ab(2a-b)}{4(2a+b)}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $b \neq -2a$; **b)** $\frac{y}{x+y}$, $x \neq \pm y$.

*Cvičenia:* **1.a)** $\frac{15}{ab}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$; **b)** $\frac{1}{2a^2b^2}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$; **c)** $\frac{15q^3}{8p^3}$, $q \neq 0$, $p \neq 0$; **d)** $\frac{25y}{3x}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$; **e)** $\frac{1}{3xy}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$; **f)** $\frac{3s^2}{2r^3}$, $s \neq 0$, $r \neq 0$; **g)** $\frac{1}{6r^3s^2}$, $r \neq 0$, $s \neq 0$; **2.a)** $\frac{ad-bc}{ad+bc}$, $b \neq 0$, $d \neq 0$; $-1$; **b)** $\frac{1}{b-a}$, $b \neq 0$,

$a \neq \pm b$; 1; **c)** $\frac{z+1}{1-z}$, $z \neq \pm 1$; –3; **d)** $\frac{pq}{p+q}$, $p \neq \pm q$; 2; **e)** $\frac{(r^3+r^2s+s^2r+s^3)s^2}{r^4-s^4}$, $r \neq \pm s$, $r \neq 0$, $s \neq 0$; $-\frac{1}{9}$, $-\frac{1}{16}$; **f)** $\frac{2pq}{p^2-q^2}$, $p \neq \pm q, p \neq 0, q \neq 0$; $\frac{15}{8}$.

**Vyskúšajte sa!**

**1.** $\frac{x^2}{25} - \frac{4}{5}xy + 4y^2$; **2.a)** $(x-5)(x+1)$; **b)** $\left(4-\frac{x}{5}\right)\left(4+\frac{x}{5}\right)$; **c)** $(3y-7)(x+1)$; **d)** $x(y-z)^2$; **3.** $(2x+5)^2 = 4x^2 + 20x + 25$; **4.a)** $a \neq \pm 3$; **b)** $\frac{16}{7}$; **c)** $a = 12$; **5.** $\frac{2x-5}{x-2} = \frac{8x-20}{4x+8}$; **6.** B, D; **7.** E; **8.a)** $\frac{12a}{5x}$, $x \neq 0$; **b)** $\frac{13n^2+12n}{(n-3)(n+3)}$, $n \neq \pm 3$; **c)** $4-x$, $x \in R$; **9.a)** $\frac{-2(x+1)}{x}$, $x \neq 0, x \neq 1, x \neq -5$; –1; **b)** $x-y$, $x \neq -y$, $x \neq 0$, $y \neq 0$; –2; **10.** o $\frac{y}{x+1}$; **11.** o $\frac{vh}{n(n+h)}$ metra; **12.** $\frac{2}{3}h$, $\frac{4}{9}h$, $\frac{8}{27}h$, overenie 6 m, 4 m, $\frac{8}{3}$ m; **13.** $\frac{x-2}{x+2}$, $x \neq 0, x \neq \pm 2$.

## 3 Podobnosť trojuholníkov

### 3.1 Podobnosť geometrických útvarov

*Cvičenia:* **1.** 1,2; $k = 2$; **3.** $\triangle_1 \sim \triangle_2$, $k_1 = \frac{3}{2}$, zväčšenie; $\triangle_1 \sim \triangle_4$, $k_2 = \frac{1}{2}$, zmenšenie; $\triangle_2 \sim \triangle_4$, $k_3 = \frac{1}{3}$, zmenšenie; **4.** $k_1 = 1{,}5$ alebo $k_2 = 2$; **5.** nie; **6.** nie, dĺžky strán nie sú v rovnakom pomere; **7.** nie, ich uhly nie sú zhodné.

### 3.2 Podobnosť trojuholníkov

*Úlohy:* **1.** pomery sú rovnaké – $\frac{1}{3}$, odpovedajúce uhly sú zhodné; **2.** nie.

*Cvičenia:* **1.** áno, nie, áno, nie; **2.** áno, nie, áno, nie; **3.a)** $\triangle ABC \sim \triangle LMK$ (*uu*); **b)** nie sú podobné; **4.** $\triangle ABC \sim \triangle KHG$; $\triangle DEF \sim \triangle NLM$ (*uu*); **5.** podľa vety (*uu*); **6.** potom sa zhodujú vo všetkých uhloch; **7.a)** 18 m, 21 m, 24 m, $k_1 = 3$; **b)** 4 m, $\frac{14}{3}$ m, $\frac{16}{3}$ m, $k_2 = \frac{2}{3}$; **8.** $o' = k \,.\, o$; **9.** áno, $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$; **10.** $S' = k^2 \,.\, S$, $S = \frac{1}{2} \,.\, z \,.\, v$, $S' = \frac{1}{2} \,.\, z' \,.\, v'$, $z' = k \,.\, z$, $v' = k \,.\, v$; **11.a)** áno; **b)** áno; **c)** áno; **d)** áno; **e)** áno, sú všetky pravouhlé a zhodujú sa v jednom ostrom uhle.

### 3.3 Použitie podobnosti pri riešení geometrických úloh

*Cvičenia:* **1.a)** 5,25; **b)** 8,75; **c)** 12,25; **6.** $a' = 6$ cm; $b' = 6{,}3$ cm; $c' = 7{,}2$ cm.

### 3.4 Použitie podobnosti v praxi

*Úlohy:* **1.** 16 cm, t. j. 40 km; **2.** 80 mm, 30 mm, 20 mm, 8 mm; **4.** využijeme podobnosť trojuholníkov; áno.

*Cvičenia:* **1.** 10 cm, t. j. 25 km; **2.** 5,4 m; **3.** 373 m; **4.** 610 m; **5.a)** 18,5 m, **b)** 37,5 m; **c)** 18,4 m; **6.** odmerajte dĺžky potrebných úsečiek v pláne a vypočítajte ich skutočné dĺžky, výmeru pozemku vypočítajte ako súčet obsahov jednotlivých trojuholníkov a obdĺžnika $ABB_1A_1$; **7.** 34 m.

**Vyskúšajte sa!**

**1.** $\triangle ABC \sim \triangle PQM$, $\sphericalangle BAC \cong \sphericalangle QPM$, $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle PQM$, $\sphericalangle BCA \cong \sphericalangle QMO$; **3.** $|DF| = 22$ m, $|LM| = 27$ m; **4.** 12,8 m; **5.** $40 : 37{,}5 = (x + 13{,}5) : x$; $|AM| = x + 13{,}5$; $|AM| = 216$ m; **6.** využite podobnosť trojuholníkov; **7.a)** $5{,}\overline{3}$ cm; **b)** $13{,}\overline{3}$ cm; **9.** približne 34,7 m; **10.** nie sú podobné.

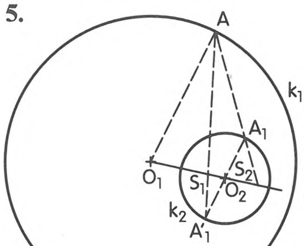
### 3.5 Podobné zobrazenia

#### Kružnica v rovnoľahlosti

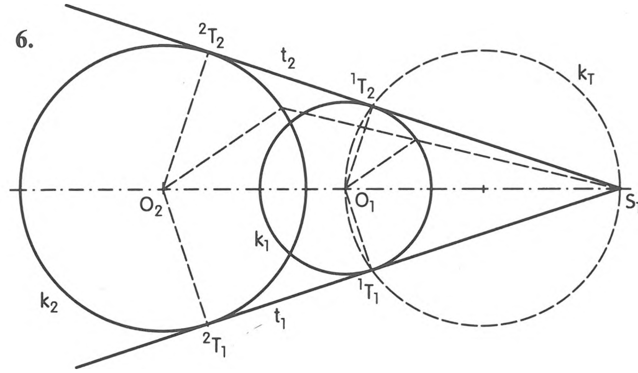
*Úlohy:* **1.** na zostrojenie stredov hľadaných kružníc použijeme úsečky určené bodom a dotykovými bodmi; **3.a)** jeden, stred úsečky určenej stredmi kružníc; **b)** stred kružníc.

*Cvičenia:* **4.b)** $\square$ *MNOR* $\sim \square$ *UVTS*, sú rovnoľahlé so stredom rovnoľahlosti v bode *M*.

5.




6.




## 4 Riešenie lineárnych rovníc a ich sústav

### 4.1 Lineárne rovnice s neznámou v menovateli

*Úlohy:* **1.a)** $x = 13$; **b)** $x = 183$; **c)** $x = \frac{6}{5}$; **2.** rovnosť $\frac{(l+4).5}{10} - \frac{l}{2} = 2$ je platná pre ľubovoľné číslo $l$; **3.a)** $x = 6$; **b)** $y = 1$; **4.a)** $x = 3$; **b)** $x = \frac{2}{3}$; **c)** $x = 10$; **7.** výraz $\frac{1}{x-3}$ nemá pre $x = 3$ zmysel, preto ním nemôžeme násobiť.

*Cvičenia:* **3.a)** $x = \frac{2}{3}$; **b)** $y = \frac{1}{48}$; **c)** $z = 5$; **d)** $x = -\frac{1}{2}$; **4.a)** $x = \frac{7}{12}$; **b)** $y = -\frac{3}{2}$; **c)** $z = 0$; **d)** $x = \frac{9}{5}$; **e)** $y = \frac{1}{2}$; **f)** $z = -\frac{4}{3}$; **5.a)** $x = \frac{2}{3}$; **b)** $y \in R, y \neq 2$; **6.a)** nemá riešenie; **b)** $y \in R, y \neq \pm 1$; **c)** nemá riešenie; **d)** $x = \frac{1}{2}$.

### 4.2 Sústava dvoch rovníc s dvomi neznámymi

*Úlohy:* **1.a)** $x = 4, y = 6$; **b)** $y = 18, u = 10$; **c)** $x = 2, y = 3$; **d)** $h = 6, k = -4$; **2.** $x = 2$; **3.a)** $x = 0, y = 5$; **b)** $a = 1, b = 2$; **c)** $p = 7, q = 5$; **d)** $x = \frac{1}{2}, y = -2$; **e)** $m = 5, n = -3$; **f)** $r = 9, s = 2$; **4.a)** $x = 3, y = 5$; **b)** $x = -1, y = 10$; **c)** $x = \frac{20}{3}, y = -5$; **d)** $x = \frac{3}{4}, y = 3$; **6.a)** $x = -3, y = 3$; **b)** $x = -\frac{1}{5}, y = \frac{4}{15}$; **c)** $x = -\frac{11}{5}, y = -5$; **d)** $x = \frac{71}{25}, y = -\frac{47}{25}$; **e)** $x = -\frac{1}{2}, y = \frac{1}{3}$; **f)** $a$; $b = \frac{105 - 5a}{3}$; **g)** nemá riešenie.

*Cvičenia:* **1.a)** $x = 3, y = 2$; **b)** $x = \frac{3}{2}, y = -2$; **c)** $x = 2, y = 0$; **d)** $x = 0, y = \frac{5}{3}$; **2.a)** $m = 8, n = 6$; **b)** $a = 70, b = 66$; **c)** $x = 3, y = 5$; **d)** $r = 4, s = -3$; **3.a)** $x = 1, x = 5$; **b)** $x = -3, y = 1$; **c)** $x$; $y = 4 - x$; **d)** $x = 8, y = 12$; **4.a)** $x = 10, y = 4$; **b)** $x = -3, y = 4$; **c)** $a = 2, b = 7$; **d)** $a = -\frac{3}{2}, b = \frac{17}{10}$; **5.a)** $m = 7, n = 8$; **b)** $x = -\frac{2}{3}, y = -\frac{1}{3}$; **c)** $v = -\frac{17}{6}, n = \frac{25}{12}$; **d)** $x = 57, y = 30$.

### 4.3 Slovné úlohy

*Úlohy:* **1.** 162,5 dňa; **2.** 3; **3.** 25 minút; **4.** kapacita je 200; každá pôjde trikrát; **5.** 232 a 26; **6.** prvé 18, druhé 7; **8.** 19 m a 31 m; **9.** 7 kg a 56 kg; **10.** 33,6 l, **11.** 212,50 Sk; **12.** asi 37,6 °C; **13.** bolo 40 l, doplnili sme na 160 l; **14.** 21,50 Sk a 13,50 Sk.

*Cvičenia:* **1.** 340, 290, 240, 190, 140; **2.** 1 100 kusov; **3.** asi 59,3 %; **4.** asi 2,6 hl; **5.** 4,5 a 3; **6.** pomarančový 22 Sk, multivitamínový 30 Sk; **7.** 347 $m^2$ a 617 $m^2$; **8.** 17 trojlôžkových a 35 štvorlôžkových; **9.** 8 m a 13 m; **10.** Peter 24, Pavol 12; **11.** 7 kg za 360 Sk a 5 kg za 420 Sk.

**Vyskúšajte sa!**

**1.a)** $a = \frac{9}{5}$; **b)** $x = -10$; **2.** C; **3.** D; **4.a)** $x = \frac{2}{3}, x \neq 0$; **b)** $y = 12, y \neq 0$; **c)** $z = 4, z \neq 0$; **5.a)** $n = -1, n \neq 1$; **b)** $k = 2, k \neq \frac{3}{2}$; **c)** $d = -9, d \neq \pm 1$; **6.** A; **7.** nemá riešenie; **8.** 100 $m^2$; **9.** 10 ha; **10.** 8 cm a 3 cm; **11.** 5 minút; **12.** 50 hl; **13.** citrónových 17, ananásových 13; **14.** chlapčenských 23, dievčenských 30.

## *ROZUM DO HRSTI (VÝSLEDKY)*

**1.** Pomocník v oddelení potravín bol prerušený na $\frac{1}{2}$ minúty a pomocník v oddelení textil na $8\frac{1}{2}$ minúty (sedemnásťkrát dlhšie), čo je spolu deväť minút. Teda, prvý pomocník navážil cukor za 24 minút a s prerušením mu to trvalo 24 minút a 30 sekúnd. Druhý pomocník musel urobiť len štyridsaťsedem strihov, aby rozdelil balík látky s celkovou dĺžkou štyridsaťosem metrov na metrové kusy. To mu zabralo 15 minút a 40 sekúnd, keď pridáme $8\frac{1}{2}$ minúty prerušenia, je to spolu 24 minút a 10 sekúnd, z čoho vyplýva, že vyhral súťaž o 20 sekúnd. (Väčšina riešiteľov počíta so štyridsiatimi ôsmimi strihmi na rozdelenie látky, čo je nesprávna úvaha.)

**2.** Pretože na začiatku bolo päť stád s rovnakým počtom zvierat, musí byť počet zvierat deliteľný piatimi, a pretože každý obchodník kúpil rovnaký počet kusov dobytka, musí byť tiež deliteľný ôsmimi. Teda celkový počet zvierat musí byť násobkom 40. Najvyšší možný násobok 40, pre ktorý nájdeme riešenie je 120 a toto číslo sa dá zostaviť dvoma spôsobmi: 1 krava, 23 ošípaných a 96 oviec, alebo 3 kravy, 8 ošípaných a 109 oviec. Ale prvá možnosť je vylúčená tvrdením, že stáda sa skladajú z kráv, ošípaných a oviec, jedna krava nie sú kravy. Preto druhá možnosť je správna odpoveď.

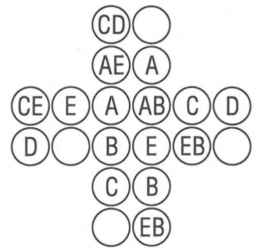
3. V tomto prípade sú nevyhnutné určité skúsenosti. Sú totiž dva druhy pokusov - čisto náhodné a metodické. Skutočný riešiteľ nie je nikdy spokojný s náhodnými pokusmi. Čitateľ zistí, že prehodením čísel 23 a 46 (násobením 32 a 64) budú obidva výsledky 5 056 (158 x 32 a 79 x 64). To je zlepšenie, ale nie je to správny výsledok. Môžeme dostať až číslo 7 008, a to pri násobení 584 a 12 čísla 96 a 73. Toto riešenie nezískame bez premýšľania a trpezlivosti.

**4.** Riešenie úlohy, ktoré dá najmenší možný súčet číslic výsledku je 23 x 174 = 58 x 69 = 4 002, a riešenie, ktoré dá najväčší možný súčet číslic výsledku je 9 x 654 = 18 x 327 = 5 886. V prvom prípade je hľadaný súčet číslic 6, v druhom 27. V tomto príklade neexistuje iný spôsob, ako nájsť požadované riešenie, než mechanické skúšanie.

**5.** Toto je jedno z mnohých riešení. Presuňte 12 na 3, 7 na 4, 10 na 6, 8 na 1, 9 na 5, 11 na 2.

6. Vezmite zostavený štvorsten a položte ho tak, že iba jedna zápalka leží na stole. V tejto pozícii od nej v rôznych smeroch odbočujú ďalšie štyri zápalky, dve z každého konca. Z tohto spojenia sa môže odobrať ktorákoľvek z piatich zápaliek. Zvyšné štyri zápalky sa dajú vybrať piatimi spôsobmi, ale usporiadať 24 rôznymi spôsobmi. A pretože sa dajú pripojiť na ktorýkoľvek zo svojich koncov, máme ďalších 16 možností potom, čo si vyberieme konkrétne usporiadanie. Posledná zápalka sa dá pridať dvoma rôznymi spôsobmi. Keď tieto čísla navzájom vynásobíte, dostanete 5 x 24 x 16 x 2 = 3 840 čo je presný počet rôznych spôsobov konštrukcie štvorstena. Keď vychádzate z trojuholníka ležiaceho na stole (podstavy štvorstena), dostanete len polovicu správneho počtu (neberiete totiž do úvahy možnosti v opačnom polpriestore).

**7.** Dá sa vybrať dvadsaťjeden možností. Deväť zo štvorcov bude mať tvar určený štyrmi písmenami A, štyri štvorce tvar určený písmenami B, štyri tvar určený C, dva tvar určený písmenom D a dva tvar, ktorý tvorí horné samostatné A, horné samostatné E, spodné samostatné C a EB. Zaujímavé je, že žiadny z týchto dvadsaťjeden štvorcov nemôžete utvoriť, pokiaľ si nevyberiete aspoň jeden z kruhov označených E.




**8.** Na stenu škatule 14 x 22,8 môžeme uložiť 13 riadkov striedavo po 7 a 6 guľkách, dohromady 85 guliek. Na ne môžeme položiť ďalšiu vrstvu s 12 radmi po 7 a 6 guľkách, celkom 78. Na celú dĺžku 24,9 cm sa zmestí 15 takých vrstiev striedavo po 85 a 78 guliek. Teda (8 x 85) + (7 x 78) = 1 226. To je počet guliek, ktorý sa zmestí do škatule.

**9.** Jediný spôsob, ako sa dajú sudy rozdeliť rovnakým dielom medzi troch bratov tak, aby každý dostal 3,5 sudov medu a sedem sudov, je tento:

| | Plný | Polplný | Prázdny |
|---|---|---|---|
| **A** | 3 | 1 | 3 |
| **B** | 2 | 3 | 2 |
| **C** | 2 | 3 | 2 |

**10.** Zrejme musí byť nepárny počet plavieb. Keby manželia neboli žiarliví, skupina by sa dostala na druhý breh deviatimi plavbami. Podmienka, že žiadna žena nesmie byť v spoločnosti iných mužov bez svojho manžela, znamená dve plavby navyše, teda celkom jedenásť. Tabuľka znázorňuje, ako sa do dá urobiť. Veľké písmená označujú manželov, malé písmená ich manželky. Je uvedená začiatočná pozícia a stav na pravom a ľavom brehu po každej plavbe. Poloha loďky je označená hviezdičkou. Na prvý pohľad vidíte, že a, *b*, *c* idú prvé, *b, c* sa vracajú pri druhej plavbe atď.

| | | |
|---|---|---|
| Začiatok | *ABCDE abcde* * | |
| **1.** | *ABCDE de* | * *abc* |
| **2.** | *ABCDE bcde* * | *a* |
| **3.** | *ABCDE e* | * *abcd* |
| **4.** | *ABCDE de* * | *abc* |
| **5.** | *DE de* | * *ABC abc* |
| **6.** | *CDE cde* * | *AB ab* |
| **7.** | *cde* | * *ABCDE ab* |
| **8.** | *bcde* * | *ABCDE a* |
| **9.** | *e* | * *ABCDE abcd* |
| **10.** | *bc e* * | *ABCDE a d* |
| **11.** | | * *ABCDE abcde* |

**11.** Hráči by si mali vybrať dvojice 5 a 9, 13 a 15, keď majú mať rovnaké šance. Tri kocky môžu padnúť 216 rôznymi spôsobmi. Súčet 5 môže padnúť 6 rôznymi spôsobmi, súčet deväť 25 spôsobmi, to znamená, že hráč, ktorý si vybral túto dvojicu, má 31 príležitostí z 216 možností. Súčet 13 padne 21 rôznymi spôsobmi a súčet pätnásť 10 spôsobmi, čo dáva druhému hráčovi tiež 31 príležitostí z 216 možností.

**12.** Sú to tieto riešenia:

$$96\frac{2\,148}{537},\quad 96\frac{1\,752}{483},\quad 96\frac{1\,428}{357},\quad 94\frac{1\,578}{263},\quad 91\frac{7\,524}{836},\quad 91\frac{5\,823}{647},$$
$$91\frac{5\,742}{638},\quad 82\frac{3\,546}{197},\quad 81\frac{7\,524}{396},\quad 81\frac{5\,643}{267},\quad 3\frac{69\,258}{714}.$$

Treba si uvedomiť, že všetky zlomky vlastne predstavujú celé čísla, 96 + 4, 94 + 6, 91 + 9...

Záznam o použití učebnice

| Por. číslo | Meno žiaka | Školský rok | Stav učebnice | |
|---|---|---|---|---|
| | | | na začiatku škol. roku | na konci škol. roku |
| 1. | | | | |
| 2. | | | | |
| 3. | | | | |
| 4. | | | | |
| 5. | | | | |

**Prof. RNDr. Ondrej Šedivý, CSc.**
**PaedDr. Soňa Čeretková**
**PaedDr. Mária Malperová**
**PhDr. Ľudovít Bálint, CSc.**

# Matematika

pre 9. ročník základných škôl
1. časť

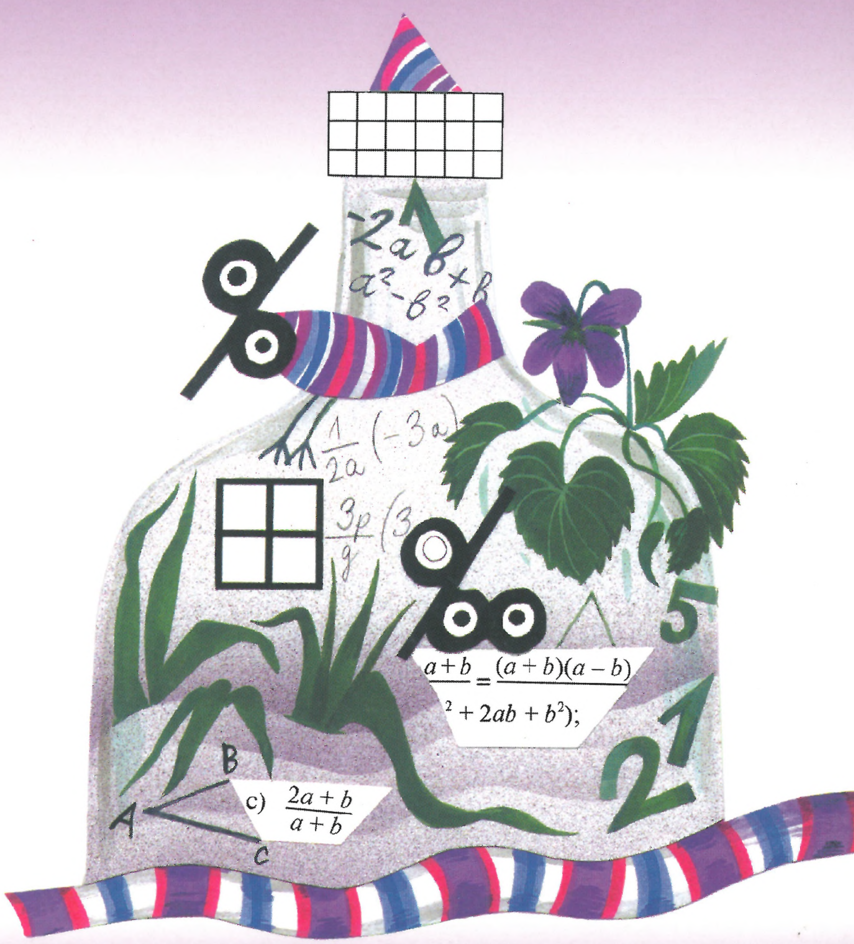
Zodpovedná redaktorka RNDr. Jana Belasová
Technická redaktorka Eva Onderčinová

Grafická a počítačová úprava, počítačové kresby
a návrh obálky Igor Imro
Ilustrovala akad. maliarka Táňa Žitňanová

Vyšlo v MEDIA TRADE, spol. s r. o. - Slovenské pedagogické nakladateľstvo,
Sasinkova 5, 815 60 Bratislava 1

Litografie SHS, spol. s. r. o., Leškova 10, 811 05 Bratislava
Vytlačili Tlačiarne BB, spol. s r. o., 974 01 Banská Bystrica

**ISBN 80-08-03169-7**




ISBN 80-08-03169-7