Matematika

pre 8. ročník základných škôl • 2. časť

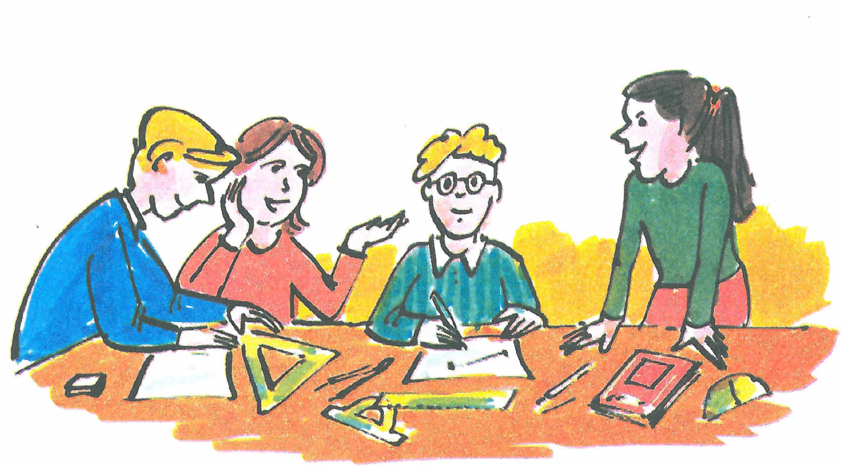
Slovenské pedagogické nakladateľstvo

Ondrej Šedivý • Soňa Čeretková • Mária Malperová • Ľudovít Bálint

Matematika

pre 8.ročník základných škôl

2. časť



Slovenské pedagogické nakladateľstvo

Autori © Prof. RNDr. Ondrej Šedivý, CSc.
PaedDr. Soňa Čeretková
PaedDr. Mária Malperová
PhDr. Ľudovít Bálint, CSc., 2001

Lektorovali: RNDr. Ľudovít Hrdina, CSc.
(Slovenská matematická spoločnosť, sekcia JSMF)
Anna Ištoková
RNDr. Emília Petrovajová
Mgr. Ingrid Stupáková
Mgr. Eva Šišková

Schválilo Ministerstvo školstva Slovenskej republiky
dňa 8. januára 2001 pod číslom 1774/2000-41
ako alternatívnu učebnicu matematiky pre 8. ročník ZŠ, 2. časť.

Prvé vydanie, 2001

ISBN 80-08-03032-1

OBSAH

Jozef Maximilián Petzval

(6. 1. 1807 až 17. 12. 1891)

Slovenský fyzik a matematik.
Vyše štyridsať rokov prednášal matematiku na univerzite vo Viedni. Dosiahol významné úspechy v optike, zhotovil portrétový objektív, ktorý prekonal dovtedy používané objektívy. Petzvalov objektív v nemalej miere prispel k rozšíreniu fotografie. Zdokonalil ďalekohľad, divadelné kukátko a mikroskop. Bol vynálezcom svetového mena. Jeho najvýznamnejšie teoretické dielo bolo publikované v nemčine: Integrácia lineárnych diferenciálnych rovníc s konštantným alebo premenným koeficientom.

Milí ôsmaci!

Máte v rukách 2. časť učebnice matematiky pre 8. ročník. Obsahuje učivo, ktoré je pokračovaním niektorých tematických celkov z predchádzajúcich ročníkov. Nájdete v nej však aj nové témy, ktoré rozšíria vaše matematické vedomosti. Všetkým častiam učiva venujte náležitú pozornosť. Zdokonaľte sa v riešení rovníc a nerovníc, naučte sa používať množiny bodov, stredovú a osovú súmernosť pri riešení konštrukčných úloh. Dôležité sú kapitoly funkcie a pravdepodobnosť, ktoré tvoria základ pre pochopenie veľkej časti matematiky na stredných školách. V rozširujúcich častiach učiva sa postupne oboznámite aj s niektorými modernejšími metódami riešenia matematických problémov.

Cvičenia na opakovanie vám pomôžu zopakovať si aj učivo z predchádzajúcich ročníkov a z 1. polroka 8. ročníka.

Pokúste sa tiež riešiť zaujímavé úlohy z kapitoly ROZUM DO HRSTI

Veľa chuti do práce a radosť z úspechov želajú

Autori

V učebnici používame tieto symboly:

- príklad
- problém
- riešenie
- pokus
- dialóg
- pozorovanie
- zapamätať si
- zhrnutie alebo poučka
- úloha
- cvičenia
- vyskúšajte sa
- poznámka
- rozširujúce učivo

6 RIEŠENIE LINEÁRNYCH ROVNÍC A LINEÁRNYCH NEROVNÍC

6.1 Riešenie lineárnych rovníc pomocou ekvivalentných úprav

ZOPAKUJME SI

Rovnosť dvoch matematických výrazov s tou istou neznámou x vieme vždy upraviť na tvar:

$$a\ .x\ =\ b$$

kde x je neznáma, a, b sú čísla, pričom $a \neq 0$.

Riešenie (koreň) rovnice je číslo $x = \frac{b}{a}$.

Takúto rovnicu nazývame **lineárna rovnica** (rovnica prvého stupňa) s jednou neznámou.

POZNÁMKA

***Lineárnu rovnicu môžeme všeobecne zapísať** v **tvare** $a\,.x - b = 0$,*
***kde** a, b **sú čísla, pričom** $a \neq 0$.*

PROBLÉM

Povedzte, ktoré z rovností sú lineárne rovnice a prečo:

a) 12 . x = 0 b) 0 . x =12 c) 12 . x =12 d) 0 . x = 0

RIEŠENIE

Martina sa pozrie na číslo, ktorým je vynásobená neznáma x.
Nazývame ho **koeficient pri neznámej** a jeho všeobecné označenie je a.

Martina povie:

a) rovnosť 12 . x = 0 **je lineárna rovnica,** pretože a = 12
b) rovnosť 0 . x = 12 **nie je lineárna rovnica,** pretože a = 0
c) rovnosť 12 . x = 12 **je lineárna rovnica,** pretože a = 12
d) rovnosť 0 . x = 0 **nie je lineárna rovnica,** pretože a = 0

Adam Martinu doplní. Určí korene:

a) $12\ .\ x = 0$

$$x = \frac{0}{12}$$

$$x = 0$$

Rovnica má **jediný koreň -** jediné číslo, ktoré danej rovnosti vyhovuje.
Rovnosť 12 . x = 0 **je lineárna rovnica.**

b) $0 . x = 12$

$x = \frac{12}{0}$ taký zlomok **neexistuje** a neexistuje **žiadne** číslo, ktoré danej rovnosti vyhovuje.

Rovnosť $0 . x = 12$ **nie je lineárna rovnica.**

c) $12 . x = 12$

$x = \frac{12}{12}$

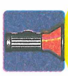
$x = 1$

Rovnica má **jediný koreň** - jediné číslo, ktoré danej rovnosti vyhovuje.
Rovnosť $12 . x = 12$ **je lineárna rovnica.**

d) $0 . x = 0$

$x = \frac{0}{0}$ taký zlomok **neexistuje** a existuje **nekonečne veľa čísel,** ktoré danej rovnosti vyhovujú.

Rovnosť $0 . x = 0$ **nie je lineárna rovnica**



Každá lineárna rovnica s jednou neznámou má vždy **práve jedno** riešenie (koreň).

Riešenie rovnice
- je **postup** riešenia – **výpočet** neznámej x.
- je **hodnota** neznámej – **koreň** rovnice.

POZNÁMKA

Neznáme môžeme označovať aj inými písmenami malej abecedy, napríklad: a,b,c, ..., y, z.

1 ***ÚLOHA***

Upravte rovnice na tvar $a . x = b$ a povedzte, ktoré z nich majú práve jedno riešenie, sú to lineárne rovnice s jednou neznámou:

a) $2x + 5x - 6x = -2 . 3$

b) $2x = 2. 0{,}5 - 1{,}2 + 0{,}6 : 3$

c) $4 . \frac{5}{2}x - (14x - 2 . 2x) = \frac{21}{3}$

d) $0{,}5x - \frac{1}{2}x = \frac{4}{5} - 0{,}8$

2 ***ÚLOHA***

Z nasledujúcich zápisov vyberte rovnice:

a) $2.14 = 19 + 9$ c) $4. (u-3) + 7 = 2u+1$ e) $2{,}8 - s = 7$ g) $\frac{3b+5}{4} = 10$

b) $x = 2 . x + 2$ d) $6 . 6 - 16 = 2. 10$ f) $7x - 14 = 0$

3 ***ÚLOHA***

Dosadzovaním do rovnice zistite, ktoré z čísel uvedených v zátvorke sú jej korene:

a) $6y - 8 = 12 + 10y$ (-5, 2, 5, 8) b) $2a + 10 = 19 - a$ (-3,-1,0,3)

4 ***ÚLOHA***

Pre ktoré čísla d sa hodnota výrazu:

a) $6d + 24$ rovná nule, b) $7d - 13$ rovná výrazu $4d - 13$, c) $\frac{1}{4}d$ rovná $\frac{5}{16}$?

ZOPAKUJME SI

Ekvivalentné úpravy rovníc

- výmena ľavej a pravej strany rovnice
  - pričítanie toho istého čísla alebo mnohočlena k obidvom stranám rovnice
  - odčítanie toho istého čísla alebo mnohočlena od obidvoch strán rovnice
- vynásobenie oboch strán rovnice tým istým nenulovým číslom
- vydelenie oboch strán rovnice tým istým nenulovým číslom

PRÍKLAD

Riešte rovnice:

a) 15a+12 = 6a-15 b) 0,9x-0,7 = 0,1x + 0,7-0,6x c) $2m - \frac{3m}{7} = \frac{3m}{7}$

RIEŠENIE

Popíšte ekvivalentné úpravy v riešeniach jednotlivých rovníc. Riešenia si napíšte do zošita. Porozmýšľajte, ktoré kroky riešenia môžete vynechať - viete vypočítať spamäti.

a)
15a +12 = 6***a*** -15 ***/-6a***
15a - 6***a*** + 12 = -15 / -12
9a = -15 -12
9a = - 27 ***/:9***
a = - 27 : 9
a = - 3

Skúška: Ľ = 15 . (-3) + 12 = -45 + 12 = -33
P = 6. (-3)-15 =-18-15 =-33
platí: Ľ = P

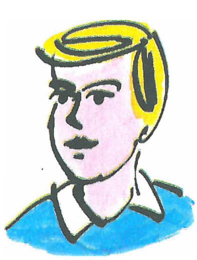
V nasledujúcich riešeniach vykonajte skúšku správnosti samostatne:

b) 0,9x - 0,7 = 0,1x + 0,7 ***- 0,6x***
0,9x - 0,7 = -0,5x + 0,7 /+0,5x + 0,7
0,9x + 0,5x = 0,7 + 0,7
1,4x =1,4 /. 10
14x = 14 /: 14
x=1

c) $2m - \frac{3m}{7} = \frac{3m}{7}$ / . 7
14m - 3m = 3m
11m = 3m /-3m
11m-3m = 0
8m = 0 / : 8
m = 0

ÚLOHA

Riešte rovnice a vykonajte skúšky správnosti:



a) $\frac{1}{2}(2x + 6) = 8$

b) $3a - 2(a - 1) = 1{,}5a + 0{,}5(4 - 2a)$

c) $\frac{y}{3} + \frac{1}{2} = \frac{y}{6} - \frac{y}{3} - 3$

d) $0{,}75r - \frac{1}{4}(2 - r) = 3r - 1{,}5$

e) $7 + \frac{2}{3} - k = -\left(3 + \frac{5}{6}\right)$

ZOPAKUJME SI

Riešenie rovnice zapisujeme prehľadne. Výhodné je, ak pri riešení dodržiavame takýto postup:

1. Odstránime z rovnice zátvorky a zlomky.
2. Zjednodušíme obidve strany rovnice.
3. Prenesieme členy s neznámou na ľavú stranu a čísla na pravú stranu rovnice.
4. Zjednodušíme obidve strany rovnice.
5. Vydelíme obidve strany rovnice koeficientom pri neznámej.
6. Vykonáme skúšku správnosti dosadením vypočítanej hodnoty do pôvodnej rovnice.

ZAPAMÄTAJTE SI

- Ak je pred zátvorkou znamienko mínus, všetky znamienka v zátvorke sa menia na opačné.
- Ak rovnicu násobíme číslom rôznym od nuly, násobíme týmto číslom každý člen rovnice.

PRÍKLAD

Riešte rovnice:

a) $3 \,.\, \left(\frac{1}{3}q - 4\right) = \left(\frac{1}{4}q - 3\right) .\, 2$

b) $3 - \frac{7-3r}{5} + \frac{r+1}{2} = 2 - \frac{3-7r}{10}$

c) $\frac{s}{6} - \frac{10}{3} - \frac{4s-7}{9} = s + \frac{3\,(s+2)}{4}$

RIEŠENIE

Pozorne si opíšte riešenia do zošita. Urobte aj skúšky správnosti.

a) Rieši Adam

$$3 \,.\, \left(\frac{1}{3}q - 4\right) = \left(\frac{1}{4}q - 3\right) .\, 2$$
$$3 \,.\, \frac{1}{3}q - 3 \,.\, 4 = 2 \,.\, \frac{1}{4}q - 3 \,.\, 2$$

Adam násobí jednočlen dvojčlenom na ľavej aj pravej strane rovnice a ďalej postupuje pomocou ekvivalentných úprav

$$q - 12 = \frac{1}{2}q - 6 \qquad / -\frac{1}{2}q + 12$$
$$q - \frac{1}{2}q = -6 + 12$$
$$\frac{1}{2}q = 6 \qquad / \,.\, 2$$
$$q = 12$$

Overte: Ľ = P = 0

b) Rieši Dáša.

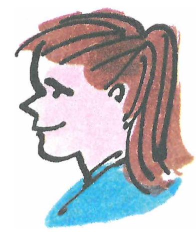
Najskôr odstráni zlomky tak, že každý člen rovnice vynásobí najmenším spoločným násobkom menovateľov: $n(5,2,10) = 10$

$$3 - \frac{7-3r}{5} + \frac{r+1}{2} = 2 - \frac{3-7r}{10} \qquad / \,.\, 10$$
$$10 \,.\, 3 - 10 \,.\, \frac{7-3r}{5} + 10 \,.\, \frac{r+1}{2} = 10 \,.\, 2 - 10 \,.\, \frac{3-7r}{10}$$

Dáša vynásobí všetky čísla a vykráti všetky zlomky, ktoré sa dajú zjednodušiť.

$$30 - 2 \,.\, (7 - 3r) + 5 \,.\, (r + 1) = 20 - (3 - 7r)$$

Ďalej postupuje známym spôsobom:



$$30 - 14 + 6r + 5r + 5 = 20 - 3 + 7r$$

$$21 + 11r = 17 + 7r \qquad /-7r-21$$

$$11r-7r= 17-21$$

$$4r = -4 \qquad /:4$$

$$r = -1$$

Overte: Ľ = P = 1

c) Peter postupuje podobne ako Dáša.
Najskôr odstráni zátvorku v čitateli zlomku.

$$\frac{s}{6} - \frac{10}{3} - \frac{4s-7}{9} = s + \frac{3\,(s+2)}{4} \qquad \text{Platí: n(6, 3, 9, 4) = 36.}$$

$$\frac{s}{6} - \frac{10}{3} - \frac{4s-7}{9} = s + \frac{3s+6}{4} \qquad /.\,36$$

$$6s - 12 \,.\, 10 - 4(4s - 7) = 36s + 9 \,.\, (3s + 6)$$

$$6s - 120 - 16s + 28 = 36s + 27\,s + 54$$

$$-10s - 92 = 63s + 54 \qquad /-63s+ 92$$

$$-10s - 63s = 54+ 92$$

$$-73s = 146 \qquad / : (-73)$$

$$s = -2$$

Overte: Ľ = P = -2

6

ÚLOHA

Riešte rovnice a urobte skúšku správnosti. Pri jednotlivých riešeniach uvážte, či je výhodnejšie najskôr odstrániť zlomky a potom zátvorky alebo naopak.

a) $\frac{9x+7}{2} - \left(x - \frac{x-2}{7}\right) = 36$

b) $\frac{y+2}{7} - \frac{2y-1}{3} = -1 - \frac{4y+1}{21}$

c) $\frac{4(x-2)}{2} - 6 = \frac{7x-9}{3} - \frac{4x}{5}$

d) $2y - \frac{3}{5}(4y-1) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}y - 1\right)$

7

ÚLOHA

Vyberte správnu odpoveď.

Rovnica $\frac{3x-1}{2} - \frac{2-3x}{4} = \frac{1-3x}{2} - \frac{5-x}{3} + 1$ má jediné riešenie:

A $\frac{41}{10}$ B 2   C 0   D 4,01 E iné číslo

8

ÚLOHA

Vyberte správnu odpoveď.

Hodnota výrazov $\frac{3x-3}{4} - \frac{16x-8}{12}$ a $2 - \frac{5(x+1)}{6}$ je rovnaká, ak x sa rovná:

A 7   B 5   C -5   D 0   E iné číslo

CVIČENIA

1. Z nasledujúcich zápisov vyberte tie, ktoré sú rovnice:

a) x = 5.x-14
b) 8 . 5 = 24 + 26
c) 5 . (***a*** - 4) + 12 = 13a + 6
d) 7.7-14 = 5x
e) 8,5k - 12 - 0,1k + 6
f) $\frac{12}{5} - \frac{1}{4} = 0$
g) $\frac{14x-3}{2} = \frac{3x-14}{4}$

2. Ktoré z nasledujúcich rovností majú práve jedno riešenie?

a) 3x-2 = 3x
b) x : 2 = 0
c) 4x = 5 . 0,2 + 3
d) 0,6x = -x
e) 2x= 15 - 10 + x- 5
f) 6x - 3 = 3x

3. Dosadením do rovnice zistite, ktoré z čísel uvedených v zátvorke sú jej korene:

a) -2 - 9x = (5x - 2) (-2, -1, 0,1, 2)
b) $\frac{2-5x}{3} + 1 = 0$ (-1,-5, 0, 5,1)
c) $\frac{2x-3}{3} - \frac{x-1}{4} = 2x - 15$ (-9,-2, 0,3,9)
d) x -3.(x - 1) = -5 (0,1,2,3,4)

4. Pre ktoré čísla b je hodnota výrazu:

a) b + 3 rovná 10,
b) 5 b -2b rovná -9,
c) $\frac{b}{5} - 1$ rovná 0,
d) 2b-1 rovná výrazu -3b?

5. Riešte rovnice. Skúšku správnosti urobte spamäti.

a) -5x = 3 b) $\frac{1}{9}y = 3$ c) 0,6z = $\frac{1}{5}$ d) 4,5v = $-\frac{27}{6}$

6. Riešte rovnice a vykonajte skúšku správnosti:

a) -3x + 9x = -19-29
b) -8x - 2 = 22 - 9x
c) 3 - 2x = -3x + 3
d) 1,3y- 5 = 1,9y- 14
e) 2,3y - 5,1 = 7,1 y + 9,3
f) $\frac{7}{3}y - 1 = -2 - \frac{8}{3}y$
g) $\frac{3}{5}z - 0,5 = 0,6 + 0,5$

7. Rovnicu vynásobte najmenším spoločným násobkom všetkých menovateľov a potom riešte ekvivalentnými úpravami:

a) $\frac{x-5}{3} = \frac{x-2}{4}$
b) $\frac{-5y-0,5}{2} = \frac{2,5+9y}{6}$
c) $\frac{12z}{6} - \frac{1+z}{2} = 2$
d) $\frac{3u}{2} - \frac{2u}{3} - \frac{7u}{12} = \frac{3}{2}$
e) $\frac{6v-1}{7} + \frac{3-5v}{4} = 1$

8. Riešte rovnice a vykonajte skúšky správnosti:

a) $x - \frac{5}{2} = \frac{4x+3}{4} - \frac{2-3x}{8}$
b) $x - \frac{2x-3}{2} = \frac{1}{2} - 2x$
c) $\frac{2x-7}{2} - \frac{3x+1}{5} + x = 5 - \frac{x+6}{2}$
d) $7 - \frac{5x-2}{6} = \frac{7x-3}{5} - 1$

9. Riešte rovnice a vykonajte skúšky správnosti. Ak cvičenia a), b), c) vyriešite správne, platí: z + x = a.

a) $\frac{4}{5}(2z-5)-\frac{3}{2}(z-3)=\frac{5}{3}(z-2)-4$

b) $\frac{x+2}{3}-\frac{2}{5}(1-x)=4-\frac{2x}{10}$

c) $\frac{9a+7}{2}-\left(a-\frac{a-2}{7}\right)=36$

10. Určte, ktoré z čísel: $2, -\frac{3}{2}, \frac{1}{6}$ je riešením rovnice: $\frac{3x-1}{3}-\frac{2x-5}{4}=1$

11. Riešte rovnice a urobte skúšky správnosti:

a) $\frac{3}{4}(x-1)-\frac{2}{3}(2x-1)+\frac{5}{6}(x+1)=2$ b) $\frac{3}{2}(y-1)+3=\frac{5}{4}(y-2)+\frac{2}{5}(2y-1)$

12. Doplňte tabuľku:

	Rovnica	Koreň rovnice	Ľ	P
a)	$\frac{a-4}{7}-\frac{a-6}{8}=0$	$a=$		
b)	$\frac{b-2}{3}=\frac{b+4}{5}$	$b=$		
c)	$\frac{5c}{3}+11+4(2c-1)=7$	$c=$		
d)	$\frac{3\left(\frac{d}{3}-1\right)}{2}=\left(\frac{6}{5}-\frac{1}{5}d\right)$	$d=$		

6.2 Vyjadrenie neznámej zo vzorca

V geometrii alebo vo fyzike ste sa už stretli so skrátenými vyjadreniami vzťahov medzi matematickými (geometrickými) prvkami alebo medzi fyzikálnymi veličinami. Skrátený zápis vzťahov s použitím premenných alebo pevne stanovených značiek, nazývame vzorec. Ak použijeme vhodný vzorec a dosadíme doň správne veličiny, môže nám tento vzorec uľahčiť riešenie úlohy. Prehľad najpoužívanejších vzorcov môžeme nájsť, napríklad, v Tabuľkách pre základné školy.

PROBLÉM

Pani učiteľka dala ôsmakom na domácu úlohu ľahký príklad:

Obvod obdĺžnika je 52 cm. Jedna jeho strana má dĺžku 15 cm. Vypočítajte dĺžku druhej strany obdĺžnika.

Pri kontrole domácej úlohy napísali na tabuľu svoje riešenia Terka a Katka. Obidve využili poznatky o riešení lineárnych rovníc.
Popíšte, v čom sa ich postupy pri výpočte druhej strany obdĺžnika líšia.

Terka počíta:

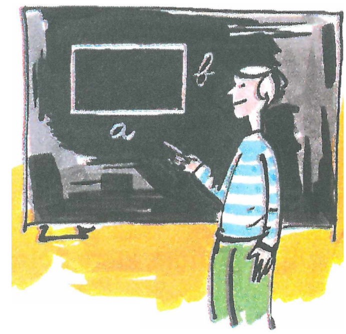
$o = 2 . (a + b)$
$o = 52$ cm
$a = 15$ cm
$b = ?$

$52 = 2.(15 + 6)$
$52 = 30 + 2b$ / $- 30$
$22 = 2b$ / $:2$
$\underline{b = 11 \text{ cm}}$

Katka počíta:

$o = 2 . (a + b)$
$o = 2a + 2b$ / $-2a$
$o-2a = 2b$ /: 2
$b = \dfrac{o - 2a}{2}$

$b = \dfrac{52 - 2 . 15}{2}$
$b = \dfrac{22}{2}$
$\underline{b = 11 \text{ cm}}$



RIEŠENIE

Adam porovnáva riešenia:
Obidve si napísali vzorec na výpočet obvodu obdĺžnika.
Terka si napísala dané údaje a dosadila ich hodnoty do vzorca. Vznikla lineárna rovnica s neznámou 6, ktorú vyriešila.
Katka upravovala vzorec ako rovnosť dvoch výrazov s premennými tak, aby vyjadrila, čomu sa rovná hodnota neznámej ***b.*** Pritom použila ekvivalentné úpravy riešenia lineárnych rovníc.

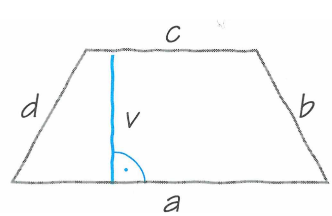
Pani učiteľka poznamenala:
Katkinmu postupu riešenia úlohy hovoríme vyjadrenie neznámej (hodnoty, veličiny) zo vzorca. Katka vyjadrila neznámu (hodnotu) ***b*** pomocou ekvivalentných úprav tak, že neznámu ***b*** osamostatnila na ľavej strane rovnosti. Na pravej strane rovnosti je výraz zložený z ostatných premenných (názvov hodnôt a veličín), ktorých hodnoty sú v zadaní úlohy dané, vyjadrené číslom. I keď toto riešenie je na pohľad zložitejšie, neskôr bude mať pre nás takýto postup úpravy vzorcov veľký význam pri riešení úloh nielen v matematike, ale aj vo fyzike a chémii.

PRÍKLAD

Okno v podkroví má mať tvar rovnoramenného lichobežníka s obsahom 30 dm^2. Dĺžky základní môžu byť 5 dm a 10 dm alebo 5,2 dm a 6,8 dm. V ktorom prípade bude okno vyššie?

RIEŠENIE

Marek si nakreslí obrázok a napíše vzorec na výpočet obsahu lichobežníka.



$$S = \frac{(a + c) . v}{2}$$

Neznámu výšku v je výhodné vyjadriť zo vzorca.

Skontrolujte Marekov postup. Ktoré ekvivalentné úpravy použil? Prečo si môže dovoliť deliť výrazom ***(a*** + *c)*?

$$S = \frac{(a + c) . v}{2}$$
$$2S = (a + c) . v$$
$$2S : (a + c) = v$$
$$v = \frac{2S}{a + c}$$

Marek dosadí do odvodeného vzorca pre výšku v hodnoty za $\boldsymbol{S} = 30\ \mathrm{dm}^2$ a dĺžky základní a a c a vypočíta hodnotu neznámej v.

a) $v = \dfrac{2 \,.\, 30}{5 + 10} = \dfrac{60}{15} = 4\ \mathrm{dm}$

Skúška: $S = \dfrac{(5 + 10) \,.\, 4}{2} = 15 \,.\, 2 = 30\ \mathrm{dm}^2$ ako bolo v zadaní úlohy

b) $v = \dfrac{2 \,.\, 30}{5{,}2 + 6{,}8} = \dfrac{60}{12} = 5\ \mathrm{dm}$

Skúška: $\dfrac{(5{,}2 + 6{,}8) \,.\, 5}{2} = \dfrac{12 \,.\, 5}{2} = 6 \,.\, 5 = 30\ \mathrm{dm}^2$ ako bolo v zadaní úlohy

Marek porovná vypočítané výšky: 4 dm < 5 dm.

Odpoveď: Okno bude vyššie, ak rozmery základní budú 5,2 dm a 6,8 dm.

Vyjadrenie neznámej zo vzorca

Vzorec upravíme ekvivalentnými úpravami tak, aby neznáma, ktorú máme vyjadriť bola na ľavej strane a ostatné premenné na pravej strane rovnosti.

Skúšku správnosti urobíme dosadením vypočítanej hodnoty neznámej do pôvodného vzorca.

Vypočítaná hodnota musí byť taká istá ako v zadaní.

1 ***ÚLOHA***

Vyjadrite neznámu zo vzorca a potom dosaďte číselné hodnoty. Urobte aj skúšku správnosti.

a) Vypočítajte šírku obdĺžnika, ak jeho obsah je $15{,}12\ \mathrm{cm}^2$ a dĺžka 4,2 cm.
b) Určte stranu štvorca, ktorého obvod je 18,24 m.
c) Obsah trojuholníka je $31\ \mathrm{cm}^2$, strana ***a*** má dĺžku 10 cm. Vypočítajte dĺžku výšky na stranu ***a***.

2 ***ÚLOHA***

Dĺžka jednej základne lichobežníka je 7,2 cm, dĺžka jeho výšky je 3 cm a obsah lichobežníka je $18\ \mathrm{cm}^2$. Vypočítajte dĺžku druhej základne.

3 ***ÚLOHA***

Určte akú hmotnosť má 500 m medeného drôtu s priemerom 0,4 cm. Použite vzorec $\rho = \dfrac{m}{V}$, ak viete, že $\rho = 8{,}9\ \dfrac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$.

CVIČENIA

1. Obvod štvorca je: a) 12 mm; b) 20 m; c) 1,6 dm; d) 0,5 cm.
   Vypočítajte dĺžku jeho strany.

2. Sú dané obsahy troch rovnobežníkov a dĺžky jednej ich strany. Majú tieto rovnobežníky rovnakú výšku?
   a) $S = 60\ \mathrm{cm}^2$; $a = 12$ cm b) $S = 3{,}5\ \mathrm{dm}^2$; $a = 0{,}7$ dm c) $S = 33\ \mathrm{cm}^2$; $a = 6$ cm

3. Aká je výška lichobežníka, ktorého obsah je 12 cm^2 a dĺžky základní sú 3 cm a 5 cm?

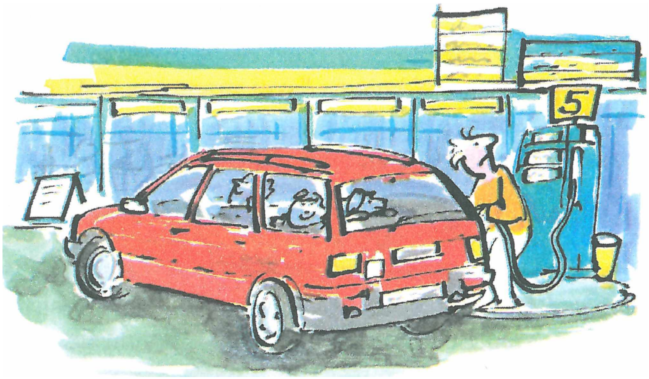
4. Auto ide po diaľnici priemernou rýchlosťou 100 $\frac{km}{h}$. Za koľko minút prejde úsek dlhý 30 km? (Napíšte si najskôr vzorec na výpočet času.)

5. Vypočítajte dĺžku výšky $\boldsymbol{v_a}$ trojuholníka *ABC,* ak je dané:
a) $\boldsymbol{S}$ = 5 cm^2, a = 2 cm; b) S = 8 dm^2, a = 4 dm; c) S = 100 cm^2 a = 0,5 m

6. Povrch kvádra je 76 cm^2, dĺžky dvoch jeho hrán sú: $\boldsymbol{a}$ = 2 cm, $\boldsymbol{b}$ = 5 cm. Vypočítajte dĺžku tretej hrany kvádra.

7. Vypočítajte dĺžku druhej uhlopriečky kosoštvorca, ak jedna uhlopriečka má dĺžku 202 mm a obsah kosoštvorca je 11,11 cm^2. Použite vzorec $S = \frac{1}{2}(e \cdot f)$

8. Určte hmotnosť benzínu. ktorý má hustotu 768 $\frac{kg}{m^3}$, ak vodič osobného auta natankoval plnú nádrž s objemom 45 litrov.



9. Vyjadrite postupne všetky neznáme zo vzorca *kalorimetrickej rovnice:*
$m_1 \cdot c_1 \cdot (t - t_1) = m_2 \cdot c_2 \; (t_2 - t)$

6.3 Slovné úlohy riešené lineárnymi rovnicami

ZOPAKUJME SI

Postup pri riešení slovnej úlohy pomocou lineárnej rovnice.

1. Označíme neznámu písmenom a napíšeme stručný zápis úlohy.
2. Nájdeme výrazy, ktorých hodnoty sa rovnajú a zostavíme rovnicu.
3. Vyriešime rovnicu pomocou ekvivalentných úprav.
4. Urobíme skúšku správnosti, ktorou sa vrátime k údajom zo zadania.
5. Ak sa údaje vypočítané v skúške správnosti
   - zhodujú s údajmi zo zadania, napíšeme odpoveď.
   - nezhodujú s údajmi zo zadania, skontrolujeme celý postup riešenia alebo úlohu riešime ešte raz. Za neznámu môžeme zvoliť iný údaj, ako v pôvodnom riešení.

1

ÚLOHA

Súčet troch celých čísel je -18. Prvé je dvojnásobkom druhého, druhé je o 10 menšie ako tretie. Ktoré sú to čísla? (Pokúste sa úlohu vyriešiť niekoľkými rôznymi spôsobmi.)

2

ÚLOHA

Igorova hádanka

O osem rokov bude mať môj strýko dvakrát toľko rokov, ako mal pred dvanástimi rokmi. Rozhodnite, ktorá z nasledujúcich rovníc správne vyjadruje počet rokov, ktoré má Igorov strýko dnes?

A x-12 = 2(x+8) **B** 2(x-12) = x+8 **C** 2x+24 = x+8 **D** 2x-12 = x-8

E ani jedna z rovníc nie je správna

[1]

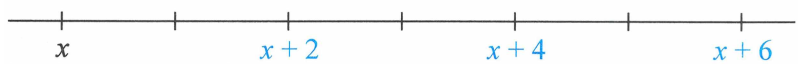
PRÍKLAD

Súčet štyroch po sebe idúcich nepárnych prirodzených čísel je 160. Ktoré sú to čísla?

RIEŠENIE

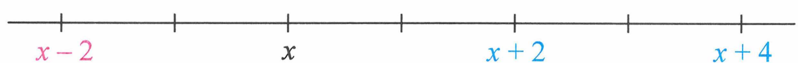
Petra si nakreslí číselnú os. Jedno z čísel bude neznáma x. Pre štyri za sebou idúce nepárne prirodzené čísla môžu nastať tieto možnosti:

možnosť 1



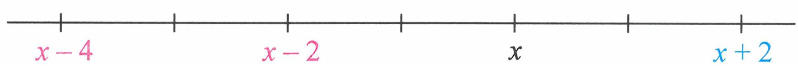
platí: x + (x + 2) + (x + 4) + (x + 6) = 160

možnosť 2



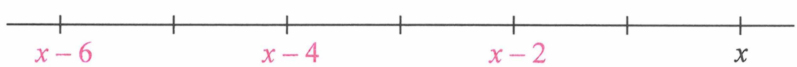
platí: (x - 2) + x + (x + 2) + (x + 4) = 160

možnosť 3



platí: (x - 4) + (x - 2) + x + (x + 2) = 160

možnosť 4

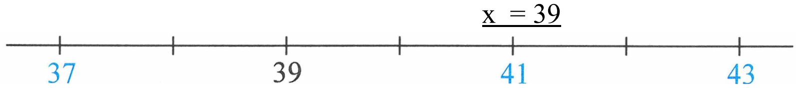


platí: (x - 6) + (x - 4) + (x - 2) + x = 160

Petra našla štyri rovnice, ktoré vyhovujú riešeniu danej úlohy. Vyriešila rovnicu z druhej možnosti. Presvedčte sa, že aj riešením zvyšných troch rovníc dostaneme ten istý výsledok. Ktorá rovnica má číselne najjednoduchší zápis?

Petrino riešenie:

$$(x - 2) + x + (x + 2) + (x + 4) = 160$$
$$4x + 4 = 160$$
$$4x = 156$$
$$\underline{x = 39}$$



Skúška: 37 + 39 + 41 +43 = 160 to je údaj zo zadania

Odpoveď: Riešením sú čísla 37, 39, 41 a 43.

3 ***ÚLOHA***

Súčet piatich po sebe idúcich párnych celých čísel je -10. Ktoré sú to čísla?

4 ***ÚLOHA***

Nech k je párne číslo. Jeho súčet s nasledujúcim a predchádzajúcim párnym číslom je:

A $6k$ B $3k+3$ C $3k$ D žiadna možnosť nie je správna

Vyberte správnu odpoveď.

[2] ***PRÍKLAD***

Číslo 118 rozdeľte na dva sčítance tak, aby jeden sčítanec bol o 69 väčší ako 75 % druhého sčítanca.

RIEŠENIE

Označme si druhého sčítanca ako neznámu x. Platí:

druhý sčítanec x
75 % druhého sčítanca..............$0{,}75x$
prvý sčítanec o 69 väčší............$0{,}75x + 69$
súčet 118

$$x + (0{,}75x + 69) = 118$$
$$1{,}75x = 118-69$$
$$1{,}75x = 49 \qquad /: 1{,}75$$
$$x = 28$$

prvý sčítanec $0{,}75x + 69 = 0{,}75 \,.\, 28 + 69 = 21 + 69 = 90$

Skúška: prvý sčítanec..................... 90
druhý sčítanec................. 28
súčet .... 118 ako bolo v zadaní úlohy

Odpoveď: Jeden sčítanec je 90 a druhý 28.

5 ***ÚLOHA***

Trom pracovníkom rozdelil vedúci oddelenia odmeny 15 500 Sk takto: prvý dostal o 50 % menej ako druhý a tretí o jednu šestinu viac ako prvý. Koľko Sk dostal každý?

6 ***ÚLOHA***

Martina hádanka

Naša rodina má spolu presne sto rokov. Mama je o štyri roky mladšia od ocka. Ja a moja sestra máme spolu o 52 rokov menej ako naši rodičia. Viete určiť vek každého z nás, ak vám ešte prezradím, že ocko je štyrikrát starší ako ja?

ÚLOHA

Jedna tretina detí z letného tábora išla na výlet, jedna šestina sa išla kúpať, jedna štvrtina sa hrala na ihrisku. Zvyšných 15 detí pripravovalo večernú diskotéku. Koľko detí bolo v letnom tábore? Vyberte správnu odpoveď.

A 66 detí

B 72 detí

C štvornásobok počtu tých, ktorí sa hrali na ihrisku

D dvojnásobok počtu tých, ktorí pripravovali diskotéku

E žiadna možnosť nie je správna

Slovné úlohy o rovnomernom pohybe

V slovných úlohách o rovnomernom pohybe vystupujú tri fyzikálne veličiny:

rýchlosť . . . v

dráha . . . . . s

čas . . . . t

Z fyziky vieme, že priemerná rýchlosť sa vypočíta podľa vzorca: $v = \frac{s}{t}$

Elementárnymi úpravami vieme jednoducho vyjadriť aj ostatné veličiny:

dráha........... $s = v \cdot t$

čas.............. $t = \frac{s}{v}$

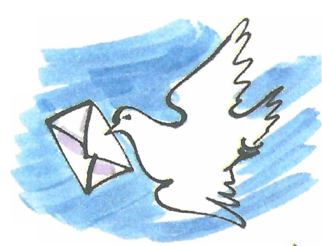
V úlohách, ktoré budeme riešiť, budeme danú priemernú rýchlosť pohybujúceho sa telesa považovať za jeho stálu rýchlosť. Nebudeme, napríklad uvažovať, že auto sa rozbieha alebo počas jazdy niekoľkokrát spomalí alebo zrýchli. Takéto zjednodušenie nám výpočty uľahčí, ale výsledok neskreslí.

PROBLÉM 1

Priemerná rýchlosť letu poštového holuba je $96\ \frac{km}{h}$. Sokol môže letieť priemernou rýchlosťou $80\ \frac{m}{s}$. Kto z nich lieta rýchlejšie a koľkokrát?

RIEŠENIE

Rýchlosti nie sú vyjadrené v rovnakých jednotkách, v tomto tvare sa nedajú porovnať. Jakub vyjadrí rýchlosť holuba v metroch za sekundu:



Platí: 96 km = 96 000 m 1 h = 60 min = 3 600 s

$$96\ \frac{km}{h} = \frac{96\,000\ m}{3\,600\ s} = \frac{960\ m}{36\ s} = \frac{80\ m}{3\ s} = 26{,}67\ \frac{m}{s}$$

Jakub porovná rýchlosti vyjadrené v $\frac{m}{s}$ podielom. Platí: 80 : 26,27 □ 3

Michal porovná rýchlosti vyjadrené v $\frac{km}{h}$.

$$80\,\frac{m}{s} = \frac{\frac{80}{1000}\,km}{\frac{1}{3\,600}\,h} = \frac{80 \,.\, 3\,600}{1000}\,\frac{km}{h} = \frac{80 \,.\, 36}{10}\,\frac{km}{h} = 288\,\frac{km}{h}$$

$288 : 96 = 3$

Potvrdilo sa, že podiel rýchlostí je 3, tak ako v Jakubovom riešení.

Odpoveď: Sokol lieta trikrát rýchlejšie ako poštový holub.

ZAPAMATAJTE SI

$$1\,\frac{m}{s} = 3{,}6\,\frac{km}{h}$$

8 ***ÚLOHA***

Rýchlosť zvuku vo vzduchu je 340 $\frac{m}{s}$. Vyjadrite túto rýchlosť v $\frac{km}{h}$.

9 ***ÚLOHA***

Adam si napísal nasledujúcu tabuľku. Skontrolujte, či uvažoval a počítal správne.

min	1	6	10	12	15	18	24	25	30
h	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{10} = 0{,}1$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5} = 0{,}2$	$\frac{1}{4} = 0{,}25$	$\frac{3}{10} = 0{,}3$	$\frac{2}{5} = 0{,}4$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2} = 0{,}5$

Pokračujte v tabuľke ďalej. Vyjadrite minúty ako zlomky hodiny. Ak sa to dá, vyjadrite ich aj v tvare desatinného čísla s ukončeným desatinným rozvojom.

10 ***ÚLOHA***

Vyjadrite časové údaje v jednotkách uvedených v zátvorkách:

a) 3h 15 min	(min)	b) 42 min	(h)
42 s	(min)	0,3 min	(s)
0,75 h	(min)	15 s	(min)
0,9 h	(min)	1,3 h	(min)
0,75 min	(s)	40 min	(s)

3 ***PRÍKLAD***

Atlét prebehol úsek dlhý 1 km za 5 minút. Aká bola jeho priemerná rýchlosť v kilometroch za hodinu? Vyjadrite túto rýchlosť aj v metroch za sekundu.

! ***RIEŠENIE***

Počítajú Jana a Dana. Obidve použijú vzorec: $v = \frac{s}{t}$.

Jana vypočíta rýchlosť atléta v kilometroch za hodinu.

$$v = \frac{s}{t} = \frac{1\,km}{5\,min} = \frac{1\,km}{5 \cdot \frac{1}{60}\,h} = \frac{1\,km}{\frac{5}{60}\,h} = 1 : \frac{1}{12}\,\frac{km}{h} = 1 \cdot 12\,\frac{km}{h} = 12\,\frac{km}{h}$$

Dana počíta rýchlosť v metroch za sekundu:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{1\,km}{5\,min} = \frac{1\,000\,m}{5 \,.\, 60\,s} = \frac{1\,000\,m}{300\,s} = \frac{10\,m}{3\,s} \doteq 3{,}3\,\frac{m}{s}$$

Odpoveď: Atlét bežal rýchlosťou $12\,\frac{km}{h}$, čo je $3{,}3\,\frac{m}{s}$.

11 ***ÚLOHA***

Aká je priemerná rýchlosť rýchlika, ktorý prejde vzdialenosť 495 km za 4,5 hodiny?

12 ***ÚLOHA***

V roku 1999 bol slovenský rekord v behu mužov na 3 000 m 7 min 57,54 s. Akou priemernou rýchlosťou v $\frac{km}{h}$ a v $\frac{m}{s}$ bežal atlét, ktorý tento rekord vytvoril? (Rekord zaokrúhlite na 7 min 58 s.)

[4] ***PRÍKLAD***

Cyklista prešiel trať priemernou rýchlosťou 45 za $\frac{km}{h}$ 20 minút. Určte dĺžku trate.

! ***RIEŠENIE***

Zo vzorca $v = \frac{s}{t}$ vyjadríme dráhu: $s = v\,.t.$

$$v = 45\ \frac{km}{h}$$

$$t = 20\ min = \frac{20}{60}\ h = \frac{1}{3}\ h$$

Dosadíme do vzorca: $s = 45\ \frac{km}{h} \cdot \frac{1}{3}\ h = \frac{45}{3}\ km = 15\ km$

Skúška: Vypočítaný údaj dosadíme do vzorca na výpočet rýchlosti:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{15\ km}{\frac{1}{3}\ h} = 15\ .\ 3\ \frac{km}{h} = 45\ \frac{km}{h}$$ to je údaj zo zadania

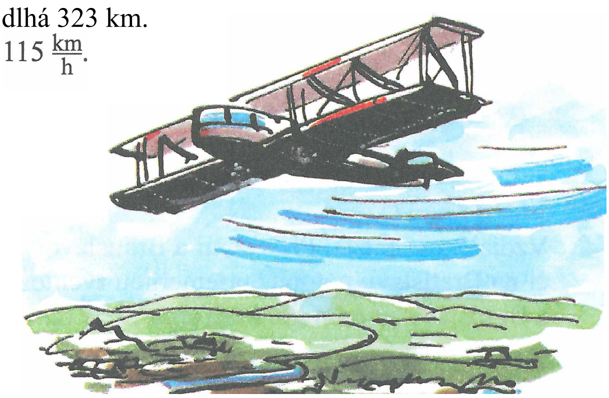
Odpoveď: Trať mala dĺžku 15 km.

13 ***ÚLOHA***

Autobus ide priemernou rýchlosťou $65\ \frac{km}{h}$ a prejde vzdialenosť medzi dvoma mestami za 1,2 hodiny. Aká je vzdialenosť medzi týmito mestami?

14 ***ÚLOHA***

V roku 1923 uskutočnil dvojplošník Aero - A 14 prvý dopravný let ČSA na trase Praha - Bratislava, trasa bola dlhá 323 km.
Letel cestovnou rýchlosťou $115\ \frac{km}{h}$.
Ako dlho trval tento let?

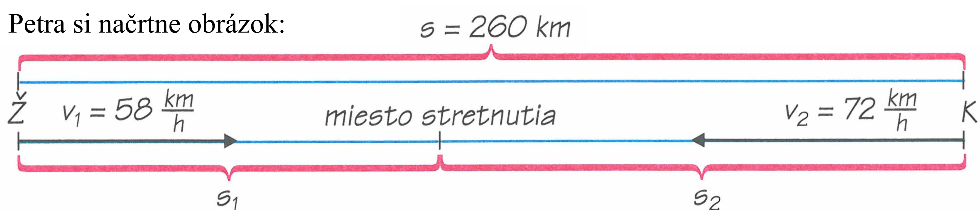


5 *PRÍKLAD*

Vzdialenosť zo Žiliny do Košíc je 260 km. Z oboch miest vyrazili oproti sebe súčasne dve autá. Nákladné auto zo Žiliny ide priemernou rýchlosťou $58\ \frac{km}{h}$, priemerná rýchlosť osobného auta z Košíc je $72\ \frac{km}{h}$ Za koľko hodín sa tieto dve autá stretnú?

RIEŠENIE

Petra si načrtne obrázok:



Keď sa autá stretnú, budú na ceste rovnaký čas. Neznáma je čas $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{x}$ hodín.
Zapíšeme:

rýchlosť nákladného auta .... $v_1 = 58\ \frac{km}{h}$

rýchlosť osobného auta................ $v_2 = 72\ \frac{km}{h}$ Platí: $s_1 + s_2 = s$

vzdialenosť Žilina - Košice .... $s = 260$ km $58x + 72x = 260$

čas, za ktorý sa autá stretli............x = ? h $130\,x = 260 \quad /: 130$

dráha nákladného auta................. $s_1 = 58 \,.\, x$ km $x = 2$

dráha osobného auta .... $s_2 = 72 \,.\, x$ km čas $t = 2$ h

Skúška:

nákladné auto prešlo po miesto stretnutia $58\ \frac{km}{h} \,.\, 2\ h = 116$ km

osobné auto prešlo po miesto stretnutia $72\ \frac{km}{h} \,.\, 2\ h = \underline{144\ km}$

spolu 260 km

to je údaj zo zadania

Odpoveď: Autá sa stretnú o 2 hodiny po štarte.

Dva objekty sa pohybujú po dráhe **oproti sebe.** Na dráhu **vyrazia súčasne.**
Platí:
Na dráhe sú obidva objekty **rovnaký čas.**
Celková dráha, ktorú objekty prešli, sa rovná **súčtu** jednotlivých dráh.

15 *ÚLOHA*

Vzdialenosť medzi Piešťanmi a Bratislavou je 79 km. Z Piešťan vyšiel no diaľnici na Bratislavu autobus priemernou rýchlosťou $75\ \frac{km}{h}$. V tom istom čase vyrazil z Bratislavy smerom do Piešťan osobný automobil priemernou rýchlosťou $83\ \frac{km}{h}$.

a) Za aký čas sa stretnú?

b) Bude miesto ich stretnutia bližšie k Bratislave alebo k Piešťanom? Prečo?

16

ÚLOHA

Z dvoch turistických osád ***A, B,*** vzdialených od seba 40 km vyšli oproti sebe dve skupiny turistov. Z osady ***A*** vyšla o 9.00 h skupina chodcov priemernou rýchlosťou $4\ \frac{km}{h}$. Z osady ***B*** vyšla o 9 h 30 min skupina cyklistov priemernou rýchlosťou $15\ \frac{km}{h}$. Kedy sa stretnú? Vypočítajte aj vzdialenosť miesta ich stretnutia od osád *A* a *B*.

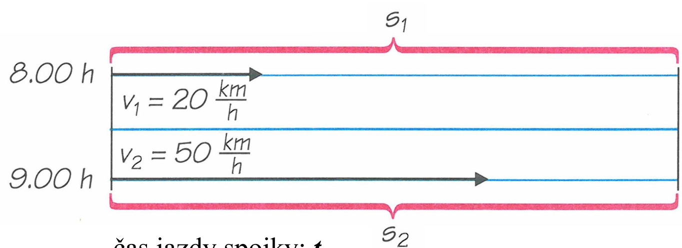
[6]

PRÍKLAD

Na vojenskom cvičení vyrazila ráno o 8.00 h z hlavného tábora kolóna tankov priemernou rýchlosťou $20\ \frac{km}{h}$. O hodinu neskôr poslali za kolónou spojku na motocykli, ktorá sa pohybovala rýchlosťou $50\ \frac{km}{h}$. Dohoní spojka kolónu tankov pred 10.00 h?

RIEŠENIE I

Načrtneme si obrázok:



čas jazdy kolóny: čas jazdy spojky: $\boldsymbol{t_2}$

Z obrázka vyplýva:

$s_1 = s_2$ $\qquad$ $s_1 = v_1 \cdot t_1 \qquad s_2 = v_2 \cdot t_2$

$v_1 \cdot t_1 = v_2 \cdot t_2$ $\qquad$ Dosadíme číselné hodnoty veličín.

$20 \cdot t_1 = 50 \cdot t_2$ $\qquad$ Zo zápisu vidno, že nepoznáme čas jazdy t_1 a t_2.

Zvolíme $t_2 = x$ hodín, $t_1 = (x + 1)$ hodín

$$20 \cdot (x + 1) = 50 \cdot x$$
$$20x + 20 = 50x \quad / -20x$$
$$20 = 30x \quad /: 30$$
$$x = \frac{20}{30}$$
$$x = \frac{2}{3}\,\text{h} = \frac{2}{3} \cdot 60\ \text{min} = 40\ \text{min} \ldots \text{čas } \boldsymbol{t_2} = 40\ \text{min}$$
$$\text{čas } t_1 = \left(1 + \frac{2}{3}\right)\text{h} = \frac{5}{3}\,\text{h}$$

Skúška: kolóna prešla dráhu $20\ \frac{km}{h} \cdot \frac{5}{3}\,\text{h} = \frac{100}{3}\,\text{km}$
spojka prešla dráhu $50\ \frac{km}{h} \cdot \frac{2}{3}\,\text{h} = \frac{100}{3}\,\text{km}$ $\Big\}$ dráhy sa rovnajú

Odpoveď: Spojka vyrazila z tábora o 9.00 h, kolónu dobehla o 9 h 40 min, teda pred 10.00 h.

RIEŠENIE II

Miro si zápis úlohy zostaví do tabuľky.

	Rýchlosť $v\left[\frac{km}{h}\right]$	Čas t [h]	Dráha s [km]
Kolóna	$v_1 = 20$	$x + 1$	$20 \cdot (x + 1)$
Spojka	$v_2 = 50$	x	$50 \cdot x$

Zistite, kde sa v tabuľke nachádza rovnica, ktorá vedie k riešeniu úlohy. Zapíšte rovnicu, vyriešte ju a porovnajte svoje riešenie s riešením I.

Dva objekty sa pohybujú **za sebou,** vyšli **z toho istého miesta** s časovým odstupom.
Dráha, ktorú prejdú po miesto stretnutia **je rovnaká.**

17 *ÚLOHA*

Po dvojkoľajnej železničnej trati ide zo stanice Leopoldov nákladný vlak priemernou rýchlosťou $48 \frac{km}{h}$. O 25 minút neskôr vypravia tým istým smerom rýchlik, ktorý má priemernú rýchlosť $88 \frac{km}{h}$.

a) Za aký čas sa vlaky na trati míňajú?

b) Ako ďaleko od stanice Leopoldov?

18 *ÚLOHA*

Z dvoch prístavov na rieke vyplávali súčasne rovnakým smerom dve lode. Prvá pláva rýchlosťou $20 \frac{km}{h}$, druhá $26 \frac{km}{h}$. Druhá loď dohonila prvú za 4 hodiny. Aká je vzdialenosť medzi týmito prístavmi?

19 *ÚLOHA*

Auto ide z mesta ***A*** do mesta ***B*** priemernou rýchlosťou $70 \frac{km}{h}$ naspäť priemernou rýchlosťou $50 \frac{km}{h}$. Keby išlo tam aj späť priemernou rýchlosťou $60 \frac{km}{h}$, celá jazda by trvala o 8 minút menej. Aká je vzdialenosť medzi mestami ***A*** a ***B***?

Slovné úlohy o spoločnej práci

PROBLÉM 2

Bazén sa naplní jedným prívodom za 2 hodiny, menej výkonným prívodom to trvá 6 hodín. Za koľko hodín sa naplní bazén, ak voda potečie obidvoma prívodmi?

RIEŠENIE

Soňa si píše zápis. Neznáma je počet hodín, za ktoré sa naplní prázdny bazén obidvoma prívodmi. Soňa si neznámu označila ***x***. K zápisu si kreslí obrázky.

1. prívod

za 2 hodiny ... 1 celý bazén

za 1 hodinu ... $\frac{1}{2}$ bazénu

za x hodín ... $\frac{x}{2}$ bazénu

2. prívod

za 6 hodín . . . . 1 celý bazén

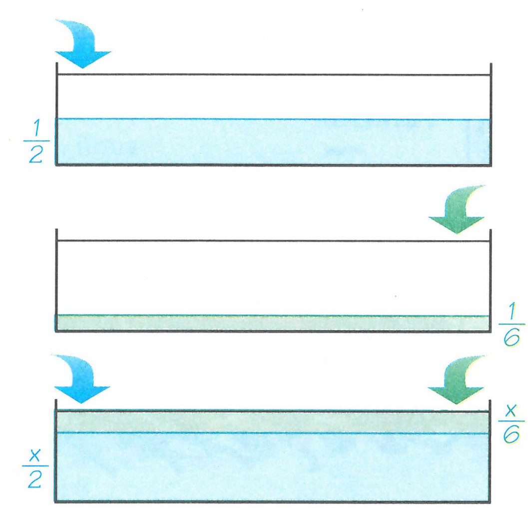
za 1 hodinu . . . $\frac{1}{6}$ bazénu

za x hodín . . . $\frac{x}{6}$ bazénu

obidva prívody spolu

za x hodín . . . . $\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{6}\right)$ bazénu

za x hodín . . . . 1 celý bazén



Soňa zostaví rovnicu:

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{6}=1 \qquad /\,.\,6$$
$$3x+x=6$$
$$4x=6 \qquad /\,:\,4$$
$$x=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$
$$x=\frac{3}{2}\text{ hodiny}$$

Skúška: 1. prívod

za 1 hodinu ... $\frac{1}{2}$ bazénu

za $\frac{3}{2}$ hodiny... $\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$ bazénu

2. prívod

za 1 hodinu ... $\frac{3}{2}$ bazénu

za $\frac{3}{2}$ hodiny.. $\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{6}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$ bazénu

obidva prívody spolu za $\frac{3}{2}$ hodiny... $\frac{3}{4}+\frac{1}{4}$ celý bazén

Odpoveď: Obidvomi prívodmi sa bazén zaplní za $\frac{3}{2}$ hodiny, teda za 1 hodinu a 30 minút.

Postup pri riešení úlohy na spoločnú prácu.

Vyjadríme:

1. Akú časť práce vykoná každý **jeden** zúčastnený za
    - **jednu** časovú jednotku (hodina, minúta, deň...)
    - ***x*** časových jednotiek (hodina, minúta, deň...)
2. Akú časť práce vykonajú **všetci** zúčastnení za x časových jednotiek.
3. Výraz vypočítaný v bode 2 porovnáme s **celou prácou,** ktorá sa má vykonať.
4. Urobíme skúšku správnosti dosadením údajov do zadania úlohy.

20 ***ÚLOHA***

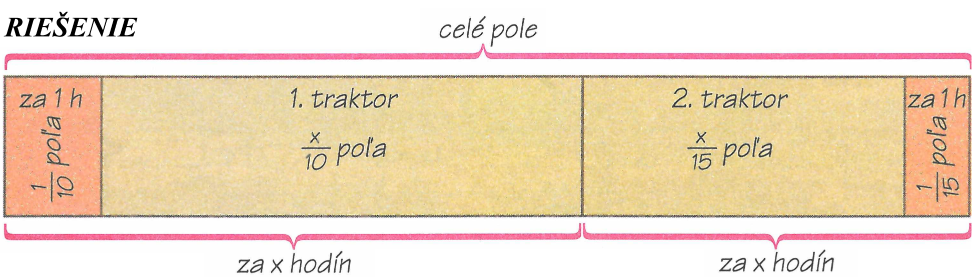
Robotník vykoná určenú prácu za 12 hodín. Akú časť práce vykoná:

a) za 1 hodinu, b) za 5 hodín, c) za ***x*** hodín?

[7] ***PRÍKLAD***

Jeden traktor zorie celé pole za 3 hodiny, druhý menej výkonný, za 7 hodín. Za koľko hodín zorú pole spoločne?

RIEŠENIE



Z obrázka vyplýva:

1. traktor.. celé pole za 10 hodín . . . za 1 h $\frac{1}{10}$ poľa .. za ***x*** hodín $\frac{x}{10}$ poľa

2. traktor.. celé pole za 15 hodín . . . za 1 h $\frac{1}{15}$ poľa .. za x hodín $\frac{x}{15}$ poľa

spoločne... za x hodín $\left(\frac{x}{10}+\frac{x}{15}\right)$ poľa

spoločne... za x hodín 1 celé pole

platí: $\frac{x}{10}+\frac{x}{15}=1$

Dokončenie riešenia a skúšku správnosti urobte sami.

21

ÚLOHA

Prázdna nádrž sa naplní prítokom za 12 minút, plná nádrž sa vyprázdni odtokom za 16 minút. Ako dlho trvá naplnenie nádrže, ak je súčasne otvorený prítok aj odtok? Vyberte správnu rovnicu, ak x je hľadaný čas v minútach.

A $12x - 16x = 1 - x$ **B** $\frac{1}{12} + \frac{1}{16}x = 1$ **C** $\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{16}\right)x = 1$ **D** $\frac{x}{12} - \frac{x}{16} = 1$

E žiadna z možností nie je správna

[8]

PRÍKLAD

Pri úprave terénu okolo nových rodinných domov pracujú dve stavebné firmy. Prvá by celú prácu vykonala za 12 dní, druhá za 20 dní. Ako dlho budú pracovať spoločne, ak prvá začala pracovať vtedy, keď druhá už odpracovala 4 dni?

!

RIEŠENIE

Skontrolujte Petrovo riešenie.

1. firma		2. firma	
za 12 dní............	1 celá práca	za 20 dní	1 celá práca
za 1 deň.............	$\frac{1}{12}$ práce	za 1 deň............	$\frac{1}{20}$ práce
za x dní..............	$\frac{x}{12}$ práce	za x dní	$\frac{x}{20}$ práce

obidve firmy spolu za x dní $\left(\frac{x}{12} + \frac{x}{20}\right)$ práce

2. firma pracovala 4 dni... vykonala ... $\frac{4}{20} = \frac{1}{5}$ práce

platí:

$$\frac{x}{12} + \frac{x}{20} + \frac{1}{5} = 1 \qquad /.\ 60$$

$$5x + 3x + 12 = 60 \qquad /-\ 12$$

$$8x = 48 \qquad /:\ 8$$

$$x = 6 \text{ dní}$$

Skúška: 1. firma za 6 dní.. $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ práce 2. firma za 6 dní.. $\frac{6}{20} = \frac{3}{10}$ práce

2. firma spolu $\frac{3}{10} + \frac{1}{5} = \frac{3+2}{10} = \frac{1}{2}$ práce

obidve firmy spolu: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ celá práca

Odpoveď: Obidve firmy budú spoločne pracovať 6 dní.

22

ÚLOHA

Otec by pooberal všetky jablká v sade za 10 hodín, synovi by to trvalo 15 hodín. Otec prišiel synovi na pomoc po piatich hodinách. Koľko hodín ešte musia pracovať spoločne?

23

ÚLOHA

Jedno balenie pleťového krému spotrebuje mama za 12 týždňov, dcéra za 14 týždňov. Štyri týždne používali obidve ten istý krém, potom ho používala len dcéra. Koľko týždňov jej krém vydržal?

CVIČENIA

1. Myslím si číslo. Vydelím ho -4, k tomuto podielu pričítam 8 a vydelím tromi. Dostanem číslo 2. Ktoré číslo som si myslel?

2. Päť rovnakých kníh stojí o 332 korún menej ako deväť takýchto kníh. Tri také knihy stoja: **A** 83 Sk **B** 249 Sk **C** 166 Sk **D** 581 Sk
Vyberte správnu odpoveď.

3. Súčet piatich po sebe idúcich párnych prirodzených čísel je 40. Ktoré sú to čísla?

4. V našom meste bol trojdňový jarmok. V stánku s cukrovou vatou zarobili prvý deň 1 260 Sk, druhý deň o 360 Sk viac než prvý deň a tretí deň zarobili 80 % zárobku druhého dňa. Koľko Sk zarobili na cukrovej vate za tri dni trvania jarmoku?

5. Z novej cievky drôtu predali dve pätiny a ešte 9 m. Zostalo im o 15 m viac ako tretina dĺžky drôtu navinutého na cievke. Pôvodne bolo na cievke x metrov drôtu. Pre x platí:

A $\frac{2}{5}x-9=\frac{x}{3}+15$ **B** $\frac{2}{5}x+9=\frac{x}{3}-15$ **C** $\frac{2}{5}x+9=\frac{x}{3}+15$ **D** $\frac{2}{5}x-9=\frac{x}{3}-15$

E Žiadna z možností **A-D** nie je správna.

6. V spoločnosti, v ktorej je 90 osôb, je štyrikrát toľko mužov ako žien. Detí je o 10 viac ako dospelých. Vyberte správnu odpoveď:

A V spoločnosti je viac ako 50 % dospelých.
B Dospelých je o 10 viac ako počet detí.
C Detí je menej ako polovica zo všetkých osôb.
D V spoločnosti je viac ako 55 % detí.
E Žiadna odpoveď **A-D** nie je správna

7. Z knihy vypadli posledné tri listy. Súčet čísel na stranách vypadnutých listov je 1 953. Aké číslo má posledná strana knihy?

8. Osobný vlak ide rýchlosťou 54 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Koľko km prejde za 20 minút?

9. Trať lyžiarskych zjazdových pretekov je dlhá 3 240 m. Víťaz ju prešiel za dve minúty. Pretekár na desiatom mieste za 2 minúty 15 sekúnd. Koľkokrát bol víťaz rýchlejší ako pretekár na desiatom mieste? Rýchlosť vyjadrite v metroch za sekundu.

10. Žeriav v montážnej hale prejde za dve minúty 33,6 m. Akou rýchlosťou v $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ sa pohybuje?

11. V encyklopédii o zvieratách si Janko prečítal akou rýchlosťou sa môžu pohybovať niektoré zvieratá:

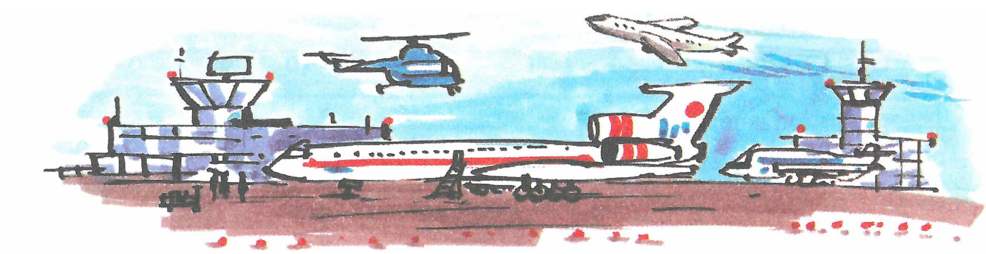
mamba čierna (had) 25 $\frac{km}{h}$ gepard škvrnitý 115 $\frac{km}{h}$
orliak morský 300 $\frac{km}{h}$ lietajúca ryba 109 $\frac{km}{h}$

Vymyslite pre svojich spolužiakov úlohy, v ktorých tieto údaje použijete. Nájdite podobné údaje o rýchlostiach a vytvorte vlastné úlohy o pohybe.

12. Maťo ide na prázdniny k Jakubovi do Malej Lehoty. Do Veľkej Lehoty prišiel autobusom a musí ísť ešte 6 km pešo. Telefonoval Jakubovi, že vyráža na cestu. Jakub sa okamžite vydá Maťovi naproti na bicykli. Maťo kráča s batohom rýchlosťou 3 $\frac{km}{h}$, Jakub ide priemernou rýchlosťou 15 $\frac{km}{h}$. Koľko kilometrov musí ísť Maťo sám?

13. Za vozidlom s nadrozmerným nákladom, ktoré sa pohybuje priemernou rýchlosťou 16 $\frac{km}{h}$ vyslali o 2,5 h druhé sprievodné vozidlo, ktoré ide priemernou rýchlosťou 70 $\frac{km}{h}$. Dostihne toto vozidlo nadrozmerný náklad za čas kratší ako 45 minút?

14. Medzi dvoma letiskami vzdialenými 3 480 km lietajú pravidelné spoje. Z prvého letiska štartuje lietadlo o 6.30 h priemernou rýchlosťou o 60 $\frac{km}{h}$ väčšou ako lietadlo, ktoré štartuje o 7.00 h z druhého letiska. Lietadlá sa míňajú vždy o 9.00 h. Ako ďaleko je to od prvého letiska?



15. Chodec ide rýchlosťou 4 $\frac{km}{h}$. O hodinu aj 10 minút vyšiel za ním cyklista priemernou rýchlosťou 12 $\frac{km}{h}$. Za koľko minút dostihne cyklista chodca a koľko kilometrov pritom prejde?

16. Auto išlo zo Žiliny do Bratislavy 3 h 12 min. Pri spiatočnej ceste išlo rýchlosťou o 15 $\frac{km}{h}$ väčšou. Spiatočná cesta trvala o 36 minút menej. Aká je vzdialenosť medzi Žilinou a Bratislavou?

17. Na splnení zákazky pracujú dve firmy. Každá z nich by prácu na zákazke vykonala za 9 hodín. Akú časť práce vykonajú firmy spoločne za:

a) 1 hodinu, b) 3 hodiny c) x hodín?

18. Plná tuba zubnej pasty vydrží jednému členovi rodiny 6 týždňov. Ako dlho vydrží táto tuba, ak ju používajú:

a) dvaja, b) traja, c) štyria členovia rodiny?

19. Zatopenú stavebnú jamu vyčerpajú prvým čerpadlom za 12 hodín, druhým čerpadlom za 4 hodiny. Jozef vypočítal, že keby obidve čerpadlá pracovali spoločne, jama by bola odvodnená za 6 hodín. Počítal správne?

20. Vodojem má tri prítoky. Prvým by sa zaplnil za 5 hodín, druhým za 6 hodín a tretím za 7,5 hodiny. Za aký čas sa prázdny vodojem naplní, ak sa otvoria všetky tri prítoky súčasne?

HISTORICKÉ CVIČENIA

Z učebnice POČTOVEDA, ktorú vydali v Banskej Bystrici v roku 1866.

1. Istý rýchloposol odišiel do mesta A a denne urazil 12 míľ, o 1 deň neskorej bol za ním poslaný druhý, koľko míľ musí tento denne uraziť, aby toho prvého za 4 dni dohonil?

2. Z mesta B do mesta C je vojsko na pochode, a urazí 4 míle denne, z mesta A postupuje druhé vojsko za ním, a chce ho za 5 dní dohoniť, koľko míľ musí denne uraziť, keď je mesto A od mesta B na 10 míľ vzdialené?

[1 míla = 1 609,3 m]

6.4 Riešenie lineárnych nerovníc

ZOPAKUJME SI

Poznáme čísla:

prirodzené: 1, 2, 3,...

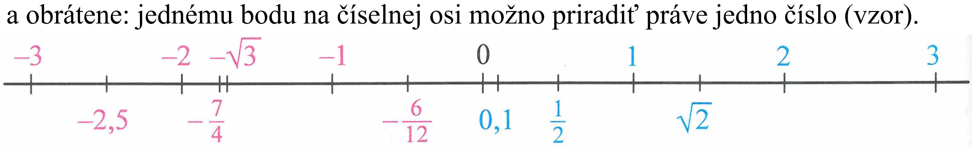
celé: -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,...

racionálne: $\frac{1}{2}, \frac{9}{12}, -\frac{7}{4}, -\frac{6}{12}, -2{,}5;\ 0{,}1;\ldots$

iracionálne: $\sqrt{2}, -\sqrt{3}, \ldots$

reálne čísla

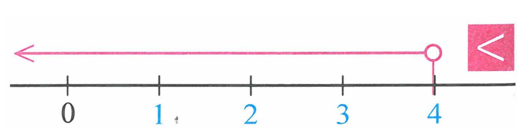
Obrazom čísla je bod na číselnej osi. Jednému číslu patrí práve jeden bod (obraz) a obrátene: jednému bodu na číselnej osi možno priradiť práve jedno číslo (vzor).



Čísla, ktorých obrazy tvoria celú číselnú os, nazývame **reálne čísla.**
Číselná os sa niekedy nazýva aj **reálna číselná os.**

Nech x je reálne číslo.

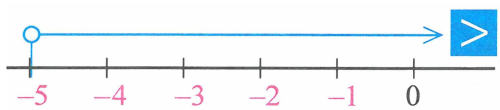
Zápis $x < 4$ čítame: x je menšie ako 4
vyznačíme



zápis platí pre všetky reálne čísla, ktorých obrazy ležia na reálnej číselnej osi
vľavo od čísla 4

Zápis $x > -5$ čítame: x je väčšie ako -5

vyznačíme

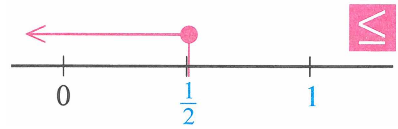


zápis platí pre všetky reálne čísla, ktorých obrazy ležia na reálnej číselnej osi

vpravo od čísla -5

Zápis $x \leq \frac{1}{2}$ čítame: x je menšie alebo sa rovná $\frac{1}{2}$

vyznačíme

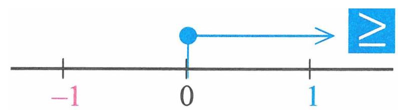


zápis platí pre všetky reálne čísla, ktorých obrazy ležia na reálnej číselnej osi

vľavo od čísla $\frac{1}{2}$ a aj pre číslo $\frac{1}{2}$

Zápis $x \geq 0$ čítame: x je väčšie alebo sa rovná 0

vyznačíme



zápis platí pre všetky reálne čísla, ktorých obrazy ležia na reálnej číselnej osi

vpravo od čísla 0 a aj pre číslo 0

1

ÚLOHA

Prečítajte zápisy a vyznačte na číselnej osi aspoň tri reálne čísla, ktoré keď dosadíte za premennú, dostanete platnú nerovnosť.

a) $x > 1{,}5$ c) - > v e) $r \leq 5{,}4$ g) $0{,}4 \leq q$

b) $a < 6$ d) $9 < p$ f) $s \geq -\frac{5}{4}$ h) $-2{,}2 \geq t$

2

ÚLOHA

Doplňte namiesto □ znak < alebo > tak, aby vznikla platná nerovnosť,

a) -2 □ 4,7 c) $\frac{1}{7}$ □ $\frac{1}{11}$ e) $-\frac{1}{4}$ □ $-\frac{1}{3}$

b) $\frac{1}{5}$ □ 5 d) -5,1 □ -4 f) 1,2 □ $\frac{5}{6}$

3

ÚLOHA

Skupinu čísel 4; 3; 0; 2,6; - 0,8; $\frac{1}{6}$; $-\frac{3}{2}$ usporiadajte:

a) vzostupne (od najmenšieho čísla po najväčšie)
b) zostupne (od najväčšieho čísla po najmenšie)

Nerovnosti so znakmi < a > sa nazývajú **ostré.**
Nerovnosti so znakmi ≤ a ≥ sa nazývajú **neostré.**
Príklady platných neostrých nerovností: $4 \leq 5$, $2 \geq 2$, $-7 \leq -7$, $8 \geq -8$

4

ÚLOHA

Overte, že dané nerovnosti sú platné. Pomôžte si číselnou osou.

a) $5 \leq 9$ c) $-8 \leq 6$ e) $\frac{8}{5} \geq 1$

b) $3 \geq -4$ d) $\frac{14}{2} \leq 7$ f) $\frac{1}{10} \geq 0{,}1$

PROBLÉM 1

Adam rozmýšľa: nerovnosti: $3 > 4$, $8 > 8$, $9 < 9$ sú zápisy nerovností, ale sú to matematicky **neplatné nerovnosti,** matematicky **nepravdivé zápisy.** Ako opravím neplatnú nerovnosť? Neplatnú rovnosť opraviť viem, napríklad: $5 = 6$ neplatí, opravím preškrtnutím: $5 \neq 6$. Pri nerovnostiach sa nepreškrtáva!

RIEŠENIE

Adam uvažuje: Môžem neplatnú nerovnosť opraviť tak, že znak nerovnosti obrátim?

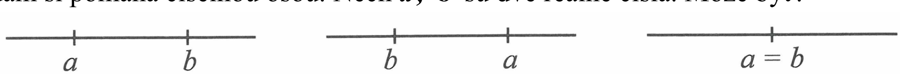
$3 > 4$ by opravené — obrátené bolo: $3 < 4$ to je platná nerovnosť

$8 > 8$ by opravené — obrátené bolo: $8 < 8$ to je neplatná nerovnosť

$9 < 9$ by opravené — obrátené bolo: $9 > 9$ to je neplatná nerovnosť

Neplatnú nerovnosť neopravím vždy iba obrátením znaku nerovnosti!

Adam si pomáha číselnou osou. Nech $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ sú dve reálne čísla. Môže byť:



Ak nerovnosť $\boldsymbol{a < b}$ neplatí, môže platiť buď $\boldsymbol{a = b}$, alebo $\boldsymbol{a > b}$. To viem zapísať jednou nerovnosťou $\boldsymbol{a \geq b}$.

Podobne: ak nerovnosť $\boldsymbol{a > b}$ neplatí, môže platiť buď $\boldsymbol{a = b}$, alebo $a < b$. To viem zapísať jednou nerovnosťou $\boldsymbol{a \leq b}$.

Ak nerovnosť $\boldsymbol{a \leq b}$ neplatí, znamená to, že $\boldsymbol{a}$ nie je ani menšie, ani sa nerovná $\boldsymbol{b}$, platí teda $\boldsymbol{a > b}$.

Ak nerovnosť $\boldsymbol{a \geq b}$ neplatí, znamená to, že a nie je ani väčšie, ani sa nerovná $\boldsymbol{b}$, platí teda $\boldsymbol{a < b}$.

Adam si riešenie zapísal prehľadne do tabuľky.

neplatí	platí
$\boldsymbol{a < b}$	$\boldsymbol{a \geq b}$
$\boldsymbol{a > b}$	$\boldsymbol{a \leq b}$
$\boldsymbol{a \leq b}$	$\boldsymbol{a > b}$
$\boldsymbol{a \geq b}$	$\boldsymbol{a < b}$

Adam opravil neplatné nerovnosti podľa tabuľky:

$3 > 4$ neplatí, $3 \leq 4$ platí $\quad$ $8 > 8$ neplatí, $8 \leq 8$ platí $\quad$ $9 < 9$ neplatí, $9 \geq 9$ platí

POZNÁMKA

Môže sa zdať, že zápis nerovnosti 8 ≤ 8 je zbytočný. Jednoduchšie je napísať: 8 = 8. Neostré nerovnosti nám pomáhajú stručne a jednoducho zapísať niektoré číselné množiny.

Napríklad:

množinu {5, 6, 7, 8, 9, 10} tvoria tie prirodzené čísla x, pre ktoré platí: 5 ≤ x ≤ 10.

ÚLOHA

Opravte neplatné nerovnosti:

a) $4 < 0$

b) $-9 > 7$

c) $0{,}6 \geq 0{,}9$

d) $-4{,}5 \leq -11$

e) $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{5}$

f) $-\frac{2}{4} < -\frac{1}{2}$

ÚLOHA

Napíšte všetky celé čísla x, pre ktoré platí:

a) $2 < x < 6$ b) $2 \leq x \leq 2$ c) $-10 \leq x < -7$ d) $14 < x \leq 20$

PROBLÉM 2

Ako nazývame zápis $x + 5 > 4$. Čo vieme o ňom povedať?

RIEŠENIE

Odpovedá Lukáš:

Zápis $x + 5 > 4$ nazývame **nerovnica.**
Premennú x na ľavej strane nazývame **neznáma.**

Zápis $3x$ + **5 > 4** je **nerovnica s neznámou** x

ľavá strana nerovnice | | | pravá strana nerovnice

znak nerovnosti

Nerovnice riešime dosadzovaním za neznámu. Hľadáme také čísla, pre ktoré dostaneme platnú nerovnosť.

Neznámu v nerovnici môžeme označovať aj inými písmenami abecedy:

a, b, c,…, y, z.

ÚLOHA

Overte dosadením za neznámu, že nerovnosti sú platné:

a) $x < -2 + 3 \,.\, 4$ $x = 7$ c) $2z - 6 \geq 6 - 4z$ $z = 2$

b) $y > 14y + 4$ $y = -0{,}4$ d) $3u - 2(u + 1) \leq 3$ $u = \frac{1}{2}$

ÚLOHA

Z čísel -3; -0,5; 0; $\frac{1}{2}$; 4 vyberte tie, pre ktoré je nerovnosť $3a + 10 > 2(a + 4)$ platná.

PRÍKLAD

Nájdite aspoň tri reálne čísla, ktoré sú riešením nerovnice: $x + 1 < 6$.

RIEŠENIE

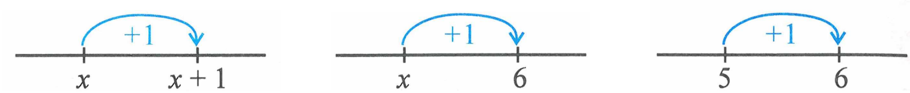
Martina si riešenie zapisuje do tabuľky. Skontrolujte jej postup.

x	$x + 1 < 6$	Platí?
6	$7 < 6$	nie
5	$6 < 6$	nie
4	$5 < 6$	áno
3	$4 < 6$	áno
0	$1 < 6$	áno
-2	$-1 < 6$	áno

Riešením nerovnice $x + 1 < 6$ sú čísla: 4; 3; 0; -2 ... a ešte veľa ďalších čísel.

Nerovnica môže mať nekonečne veľa riešení.
Väčšinou existuje nekonečne veľa čísel, pre ktoré je nerovnosť platná.

Petra si nakreslí na číselnú os:



Podľa obrázka platí: riešením nerovnice $\boldsymbol{x} + 1 < 6$ je každé reálne číslo $\boldsymbol{x}$ menšie ako 5. Zapíšeme: $\boldsymbol{x} < 5$.

POZNÁMKA

Zápisy tvaru x < 5 nebudeme považovať za nerovnice, ktoré máme riešiť.
Je to zápis riešenia nerovnice.

ÚLOHA

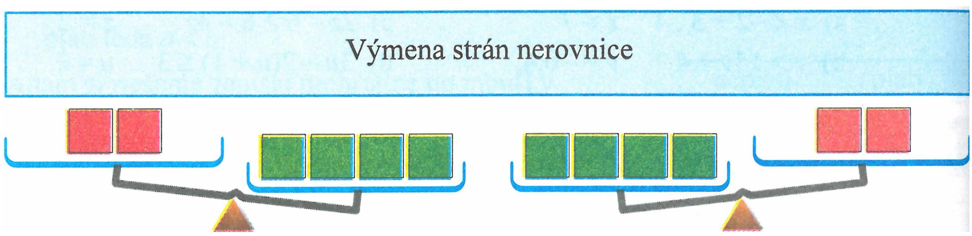
Dosadzovaním celých čísel riešte nerovnice:

a) $\boldsymbol{x} - 2 < 0$ b) $5x \geq 20$ c) $4 \leq x + 1$ d) $x - 10 > 10$

Pomôžte si aj číselnou osou.

Dajú sa lineárne nerovnice riešiť pomocou ekvivalentných úprav podobne ako lineárne rovnice?
Martina urobí pokus s kockami rovnakej hmotnosti na rovnoramenných váhach.

POKUS 1



Platí Ľ < P aj P > Ľ

Ak obsah misiek vymeníme, nerovnováha sa zmení na opačnú.

Pri **výmene strán** nerovnice sa **znak nerovnosti** zmení na **obrátený.**

Podľa znakov nerovnosti môžeme riešiť nerovnice:

	Ľ > P	Ľ < P	Ľ ≥ P	Ľ ≤ P
Strany nerovnice vymeníme:	P < Ľ	P > Ľ	P ≤ Ľ	P ≥ Ľ

Napríklad:

Nerovnica $x - 4 > 5$ má to isté riešenie ako nerovnica $5 < x - 4$.
Nerovnica $x - 4 < 5$ má to isté riešenie ako nerovnica $5 > x - 4$.
Nerovnica $x - 4 \geq 5$ má to isté riešenie ako nerovnica $5 \leq x - 4$.
Nerovnica $x - 4 \leq 5$ má to isté riešenie ako nerovnica $5 \geq x - 4$.

ÚLOHA 10

Obrátením znaku nerovnosti zapíšte nerovnice, ktoré majú to isté riešenie ako pôvodné nerovnice.

a) $x + 8 > 10$ b) $3y \geq 12$ c) $2 < 14z - 2$ d) $7 - u \leq 15$

ÚLOHA 11

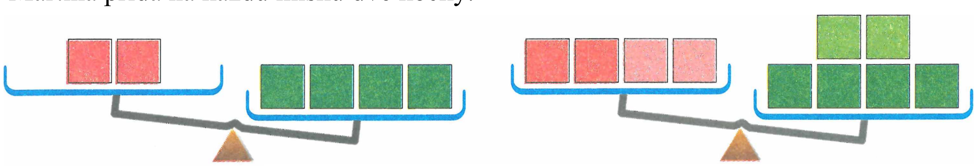
Rozhodnite, či dvojice nerovníc majú to isté riešenie bez toho, aby ste ich riešili.

a) $5a > 12$	b) $3b + 5 < 10$	c) $12 \geq c - 6$	d) $25 - 4d \leq 0$
$12 < 5a$	$10 < 3b + 5$	$c - 6 \geq 12$	$0 \leq 25 - 4d$

POKUS 2

Pričítanie toho istého čísla k obidvom stranám nerovnice.

Martina pridá na každú misku dve kocky.



Platí $Ľ < P$ $Ľ + a < P + a$

Nerovnováha sa nezmení, pretože hmotnosť sa na obidvoch stranách váh zväčší rovnako.

Riešenie nerovnice **sa nezmení,** ak k obidvom stranám nerovnice **pričítame to isté číslo.**

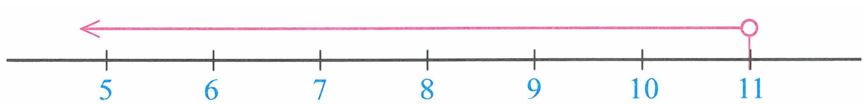
PRÍKLAD 2

Riešte nerovnicu: $\boldsymbol{x - 5 < 6}$

RIEŠENIE

$$\boldsymbol{x - 5} < 6 \qquad /+5$$
$$x - 5 + 5 < 6 + 5$$
$$\underline{x < 11}$$

Správnosť riešenia overíme pomocou číselnej osi a dosadením niekoľkých čísel do pôvodnej nerovnice.



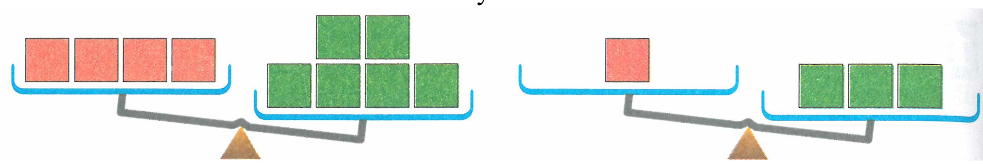
$x = 10$ $10 - 5 < 6$
$5 < 6$ platí

$x = 5$ $5 - 5 < 6$
$0 < 6$ platí

POKUS 3

Odčítanie toho istého čísla od obidvoch strán nerovnice.

Martina odoberie z oboch misiek tri kocky.



Platí Ľ < P Ľ - ***a*** < P - ***a***

Nerovnováha sa nezmení, pretože hmotnosť sa na obidvoch stranách váh zmenší rovnako.

Riešenie nerovnice **sa nezmení,** ak od obidvoch strán nerovnice **odčítame to isté číslo.**

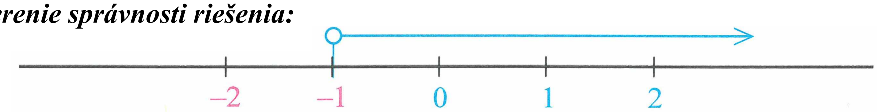
PRÍKLAD

Riešte nerovnicu: $\boldsymbol{x} + 1 > 0$

RIEŠENIE

$$x + 1 > 0 \qquad /-1$$
$$x + 1 - 1 > 0 - 1$$
$$x > -1$$

Overenie správnosti riešenia:



$x = 0$ $0 + 1 > 0$
$1 > 0$ platí

$x=2$ $2 + 1 > 0$
$3 > 0$ platí

POZNÁMKA (dôležitá)

Dá sa pri riešení nerovníc urobiť skúška správnosti?

Vieme, že nerovnica má spravidla nekonečne veľa riešení. Preto nemôžeme urobiť skúšku správnosti jednoduchým dosadením, ako to bolo pri rovniciach. Po vyriešení nerovnice môžeme urobiť iba overenie správnosti riešenia tak, že vyberieme aspoň jednu hodnotu z nájdených čísel a dosadením do pôvodnej nerovnice sa presvedčíme, či ide skutočne o riešenie danej nerovnice. Podobne môžeme vyskúšať aj niektoré číslo, ktoré do riešenia nerovnice nepatrí. Po dosadení musí vyjsť neplatná nerovnosť. Na uľahčenie overenia si riešenie nerovnice načrtneme na číselnej osi a na dosadenie vyberáme celé čísla alebo prirodzené čísla.

ÚLOHA

Napíšte spamäti riešenia nerovníc. Riešenia vyznačte na číselnej osi a dosadením niekoľkých čísel overte správnosť riešenia.

a) $x - 14 < 20$ b) $12 + x \geq 10$ c) $0 \leq y + 5$ d) $25 > y + 25$

PROBLÉM 3

Násobenie nerovnice číslom rôznym od nuly.

Juraj a Marek skúmajú násobenie platnej nerovnosti 3 < 4 nenulovým číslom.

RIEŠENIE

Juraj násobí kladným číslom ***a.*** Skúma platnosť nerovnosti 3 . ***a < 4 . a.***
Riešenia zapisuje do tabuľky.

a	$3a$	$4a$	$3a < 4a$	Platí?
1	3	4	$3 < 4$	áno
$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$	3	$2\frac{1}{4} < 3$	áno
3	9	12	$9 < 12$	áno
6	18	24	$18 < 24$	áno

Riešenie nerovnice **sa nezmení,** ak obidve strany nerovnice vynásobíme tým istým **kladným** číslom.

Napríklad:

Nerovnica $\frac{1}{4}x \geq 7$ má to isté riešenie ako nerovnica ***x*** ≥ 24. Násobili sme číslom 8.

Marek násobí záporným číslom ***b.*** Skúma platnosť nerovnosti 3 . ***b < 4 . b.***
Riešenia zapisuje do tabuľky.

b	$3b$	$4b$	$3b < 4b$	Platí?
-1	-3	-4	$-3 < -4$	nie
$-\frac{3}{4}$	$-\frac{9}{4} = -2\frac{1}{4}$	-3	$-2\frac{1}{4} < -3$	nie
-3	-9	-12	$-9 < -12$	nie
-6	-18	-24	$-18 < -24$	nie

Ak obidve strany nerovnosti vynásobíme tým istým záporným číslom, zmení sa platnosť pôvodnej nerovnosti. Aby sa zachovala platnosť pôvodnej nerovnosti, musíme pôvodný znak nerovnosti zmeniť na obrátený.

Riešenie nerovnice **sa nezmení,** ak obidve strany nerovnice vynásobíme tým istým **záporným** číslom a **súčasne zmeníme znak** nerovnosti **na obrátený.**

Napríklad:

Nerovnica $-\frac{1}{3}x \geq 7$ má to isté riešenie ako nerovnica x ≤ -21. Násobili sme číslom -3.

Nerovnica $-\frac{1}{4}x \leq -2$ má to isté riešenie ako nerovnica x ≥ 8. Násobili sme číslom -4.

Nerovnica $-\frac{1}{5}x > \frac{5}{4}$ má to isté riešenie ako nerovnica $x < -6\frac{1}{4}$. Násobili sme číslom -5.

PRÍKLAD 4

Riešte nerovnice: a) $x \cdot \frac{1}{6} > 1$ b) $-\frac{1}{7}x \geq \frac{5}{21}$

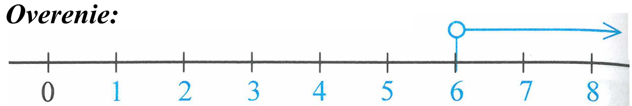
RIEŠENIE

a) $x \cdot \frac{1}{6} > 1$

$\frac{1}{6}x > 1$ /. 6

$\underline{x > 6}$

Overenie:



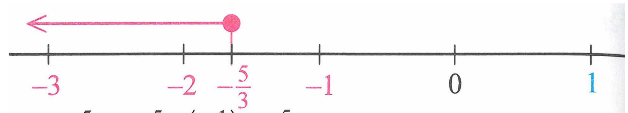
$x = 7$ $\frac{7}{6} > 1$ platí $x = 12$ $\frac{12}{6} > 1$

2 > 1 platí

b) $-\frac{1}{7}x \geq \frac{5}{21}$ /. (-7) **Overenie:**

$x \leq \frac{5 \cdot (-7)}{21}$

$\underline{x \leq -\frac{5}{3}}$



$x = -\frac{5}{3}$ $-\frac{5}{3} \cdot \left(-\frac{1}{7}\right) \geq \frac{5}{21}$

$\frac{5}{21} \geq \frac{5}{21}$ platí

ÚLOHA 13

Riešte nerovnice, riešenie vyznačte na číselnej osi a overte jeho správnosť.

a) $\frac{1}{10}$x <100 b) $\frac{x}{2} \geq -3$ c) $-\frac{1}{13}x \leq 0$ d) $-\frac{5}{3} > -x$

PROBLÉM 4

Delenie nerovnice číslom rôznym od nuly.

Marek skúma delenie platnej nerovnosti 6 < 12.

RIEŠENIE

Marek delí kladným číslom:

6 < 12 /: 3

2 < 4 platná nerovnosť

Ak obidve strany nerovnosti vydelíme tým istým kladným číslom, platnosť nerovnosti sa nezmení.

Marek delí záporným číslom:

6 < 12 /: (-3)

-2 < - 4 neplatná nerovnosť, pretože platí: -2 > -4

Ak obidve strany nerovnosti delíme tým istým záporným číslom, pôvodný znak nerovnosti sa zmení na obrátený.

Juraj problém rieši takto: Deliť číslom rôznym od nuly znamená násobiť prevrátenou hodnotou daného čísla. Pre delenie nerovníc preto platia tie isté pravidlá, ako pre násobenie nerovníc číslom rôznym od nuly.

Riešenie nerovnice **sa nezmení,** ak

- obidve strany nerovnice **vydelíme** tým istým **kladným** číslom,
- obidve strany nerovnice **vydelíme** tým istým **záporným** číslom a súčasne **zmeníme znak** nerovnosti na **obrátený.**

Napríklad:
Nerovnica $3x > 21$ má to isté riešenie ako nerovnica $x > 7$. Delili sme číslom 3.
Nerovnica $3x \leq -18$ má to isté riešenie ako nerovnica $x \leq -6$. Delili sme číslom 3.
Nerovnica $-3x \geq 15$ má to isté riešenie ako nerovnica $\boldsymbol{x \leq} -5$. Delili sme číslom -3.
Nerovnica $-3x < -12$ má to isté riešenie ako nerovnica $x > 4$. Delili sme číslom-3.

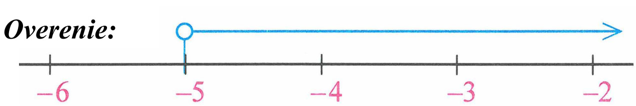
PRÍKLAD

Riešte nerovnice: a) $4x > -20$ b) $12 \geq -6x$

RIEŠENIE

a) $4x > -20$ *$/:4$*
$x > -5$

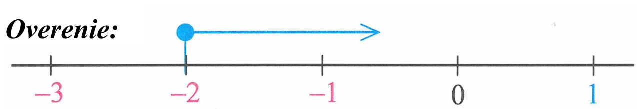
Overenie:



$x = -4$ $4.(-4) > -20$ $-16 > -20$ platí
$x = 0$ $4.0 > -20$ $0 > -20$ platí

b) $12 \geq -6x$ $/: (-6)$
$-2 \leq x$ obrátime
$\underline{x \geq -2}$

Overenie:



$x = -2$ $12 \geq -6.(-2)$ $12 \geq 12$ platí
$x = 0$ $12 \geq -6 . 0$ $12 \geq 0$ platí

ÚLOHA

Riešte nerovnice. Riešenie vyznačte na číselnej osi a overte.

a) $3x < 30$ b) $5x \leq -45$ c) $-8x \geq 24$ d) $77 > -11x$

Ekvivalentné úpravy nerovníc

- výmena ľavej a pravej strany nerovnice a súčasné obrátenie znaku nerovnosti
- pričítanie toho istého čísla alebo mnohočlena k obidvom stranám nerovnice
- odčítanie toho istého čísla alebo mnohočlena od obidvoch strán nerovnice
- vynásobenie alebo vydelenie obidvoch strán nerovnice tým istým kladným číslom
- vynásobenie alebo vydelenie obidvoch strán nerovnice tým istým záporným číslom a súčasné obrátenie znaku nerovnosti

6

PRÍKLAD

Pomocou ekvivalentných úprav riešte nerovnice:

a) $15 > 9 - 3x$ b) $x - 14 \leq 7x + 10$

RIEŠENIE

a) Rieši Igor:

Člen s neznámou osamostatní, ak od obidvoch strán nerovnice odčíta číslo 9:

$$15 > 9 - 3x \quad /-9$$
$$15-9>9-3x-9$$
$$6 > -3x \; /: (-3)$$

Obidve strany nerovnice vydelí číslom -3 a súčasne obráti znak nerovnosti

$$6 : (-3) < -3x : (-3)$$
$$-2 < x$$

Aby bol zápis výsledku prehľadnejší, vymení ľavú a pravú stranu nerovnice a súčasne obráti znak nerovnosti.

$$x > -2$$

Adam hľadá iné riešenie tej istej nerovnice.

K obidvom stranám nerovnice pričíta člen s neznámou ***3x:***

$$15 > 9 - 3x \; / + 3x$$
$$15 + 3x > 9 - 3x + 3x$$
$$15 + 3x > 9 \quad /- 15$$

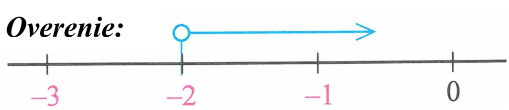
Člen s neznámou osamostatní, ak od obidvoch strán nerovnice odčíta číslo 15:

$$15 + 3x- 15 >9- 15$$
$$3x > -6 \quad /: 3$$

Obidve strany nerovnice vydelí číslom 3:

$$3x:3>-6:3$$
$$x >-2$$

Overenie:



$x = -1 \quad 15 > 9 - 3 . (-1)$

$$15 > 9 + 3$$
$15 > 12$ platí

b) Nerovnicu rieši Lenka. Niektoré výpočty urobila spamäti. Popíšte ekvivalentné úpravy, ktoré Lenka použila a overte riešenie nerovnice dosadením aspoň dvoch čísel, pre ktoré je nerovnica platná.

$$x - 14 \leq 7x + 10 \quad / + 14$$
$$x \leq 7x + 24 \quad /- 7x$$
$$-6x \leq 24 \quad /: (-6)$$
$$x \geq -4$$

15

ÚLOHA

Pomocou ekvivalentných úprav riešte nerovnice. Riešenie vyznačte na číselnej osi a overte dosadením aspoň dvoch čísel, pre ktoré je nerovnica platná.

a) $3x < x + 8$ b) $8y + 12 \leq 0$ c) $15+2z > 11 + 4z$ d) $-x - 5 \geq 5 + 4x$

V zadaní zložitejších nerovníc sa môžu vyskytnúť zátvorky, desatinné čísla a zlomky. Pri ich riešení je výhodné používať postup, ktorý poznáme z riešenia lineárnych rovníc. Výhodné je, ak dodržujeme tieto zásady:

1. Odstránime z nerovnice zátvorky a zlomky.
   POZOR na násobenie záporným číslom!
2. Zjednodušíme obidve strany nerovnice.
3. Nerovnicu upravíme ekvivalentnými úpravami pričítaním a odčítaním čísel a členov s neznámou tak, aby členy s neznámou boli na jednej strane a čísla na druhej strane nerovnice.
4. Obidve strany nerovnice zjednodušíme.
5. Vydelíme obidve strany nerovnice koeficientom pri neznámej.
   POZOR na delenie záporným číslom!
6. Nakreslíme riešenie na číselnú os a overíme správnosť riešenia dosadením niekoľkých hodnôt do pôvodnej nerovnice.

PRÍKLAD

Prepíšte si riešenia nasledujúcich nerovníc do zošita. Popíšte úpravy vykonané pri ich riešení a overte správnosť riešenia.

a) $4x - 2(1 - x) > 1 - (3 - 2x)$ b) $\frac{x-2}{3} \leq \frac{1-x}{2}$ c) $(0,5x - 0,6).7 < 2,5x - 5,2$

RIEŠENIE

a)
$$4x - 2(1 - x) > 1 - (3 - 2x)$$
$$4x - 2 + 2x > 1 - 3 + 2x$$
$$6x - 2 > -2 + 2x \qquad /-2x + 2$$
$$4x > 0 \qquad /:4$$
$$x > 0$$

b)
$$\frac{x-2}{3} \leq \frac{1-x}{2} \qquad /.\,6$$
$$2(x - 2) \leq 3(1 - x)$$
$$2x - 4 \leq 3 - 3x \qquad /+4+3x$$
$$2x - 4 + 4 + 3x \leq 3 - 3x + 4 + 3x$$
$$5x \leq 7 \qquad /:5$$
$$\underline{x \leq \frac{7}{5}}$$

c)
$$(0,5x - 0,6)\,.\,7 < 2,5x - 5,2$$
$$3,5x - 4,2 < 2,5x - 5,2 \qquad /+4,2 - 2,5x$$
$$3,5x - 4,2 + 4,2 - 2,5x < 2,5x - 5,2 + 4,2 - 2,5x$$
$$x < -1$$

V nasledujúcich úlohách riešte nerovnice. Riešenie načrtnite na číselnej osi a overte správnosť riešenia dosadením niekoľkých čísel.

16 ***ÚLOHA***

a) $(5x + 6) - 2(x - 2) > x - (x - 3)\,2$ c) $z + 3z - (z + 4) \leq 11$

b) $5(y - 3) + 104 \geq 3(2y - 1) - 6(3y-4)$ d) $-(v - 10) < 3v + 2$

17 ***ÚLOHA***

a) $\frac{a}{5} + 1 \leq 6$ b) $2 - \frac{b}{3} - \geq 9$ c) $\frac{5+c}{2} < 7$ d) $\frac{1-5x}{4} > \frac{3}{2}$

18 ***ÚLOHA***

a) $4{,}3s - 5 - 2{,}7\boldsymbol{s} + 0{,}2\boldsymbol{s} > 6{,}5 - 0{,}5s$ c) $1{,}1r - (r - 0{,}6) + 0{,}3 \geq 0$

b) $1{,}2 - 0{,}5t < 0{,}4 - (0{,}4t + 1{,}1)$ d) $2{,}7p + 5(1 - 0{,}5p) \leq 0{,}2p - 6{,}2 + 0{,}7p$

Každá nerovnica, ktorú sme doteraz riešili mala iba jednu neznámu, ktorú sme najčastejšie označovali ***x.*** Nerovnicu sme pomocou ekvivalentných úprav vždy dokázali upraviť na tvar:

$$a\,.\,x \;\square\; \boldsymbol{b}$$

kde x je neznáma a ***a, b*** sú čísla, pričom $\boldsymbol{a} \neq 0$.

Symbol □ je niektorý znak nerovnosti: <, >, ≥ ≤.

Riešenie nerovnice má tvar:

$$\boldsymbol{x} \;\square\; \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}$$

Takúto nerovnicu nazývame **lineárna nerovnica** s jednou neznámou.

PROBLÉM 5

Riešte nerovnicu: $3\,.\,(x - 1) \leq 3x + 2$

RIEŠENIE

$$3\,.\,(x - 1) \leq 3x + 2$$
$$3x - 3 \leq 3x + 2$$
$$3x - 3x \leq 3 + 2$$
$$0 \leq 5$$

VŠIMNIME SI

Na poslednom riadku je nerovnosť, ktorá je vždy platná. To znamená, že riešením pôvodnej nerovnice je **ľubovoľné** (každé) **reálne číslo.**

POZNÁMKA

Riešením nerovnice je ľubovoľné reálne číslo, čo môžeme skrátene zapísať: x ϵ R.
Písmenom R ***sa označuje množina všetkých reálnych čísel.***

19 ***ÚLOHA***

Presvedčte sa, že po vyriešení nasledujúcich nerovníc dostanete vždy platnú nerovnosť. Nerovniciam vyhovuje ľubovoľné reálne číslo x.

a) $3(5 + x) \leq x - 1 - 4x$ b) $\frac{5x}{12} - \frac{x}{4} - \frac{x}{6} > -\frac{1}{2}$

PROBLÉM 6

Riešte nerovnicu: $1 - 5x > -2 - 5(x - 3)$

RIEŠENIE

$$1 - 5x > -2 - 5(x - 3)$$
$$1 - 5x > -2 - 5x + 15 \qquad / + 5x - 1$$
$$-5x + 5x > 13 - 1$$
$$0 > 12$$

VŠIMNIME SI

Riešením nerovnice je neplatná nerovnosť. Ľavá strana nerovnice sa pre každé reálne číslo rovná nule. Nula je menšia ako 12. Preto pôvodnej nerovnici nevyhovuje **žiadne reálne číslo *x*.**

POZNÁMKA

***Nerovnici nevyhovuje žiadne reálne číslo x, budeme skrátene zapisovať:* x ϵ 0.**
Symbol* 0 *znamená prázdna množina (neobsahuje žiaden prvok, nepatrí do nej žiadne číslo).

ÚLOHA

Presvedčte sa, že po vyriešení nasledujúcich nerovníc dostaneme neplatnú nerovnosť. Nerovniciam nevyhovuje žiadne reálne číslo x.

a) $7(x + 1) < 3x + 2(2x - 3)$ b) $\frac{5x-1}{6} \geq \frac{x}{2} + \frac{x}{3}$

C V I Č E N I A

1. Prečítajte zápisy a vyznačte na číselnej osi tri reálne čísla, ktoré keď dosadíme za premennú, dostaneme platnú nerovnosť:

   a) $x < 2{,}8$ b) $u \leq -5$ c) $a > -2{,}3$ d) $\frac{1}{6} - \geq q$

2. Doplňte namiesto □ znak < alebo > tak, aby vznikla platná nerovnosť:

   a) $\frac{5}{6} \square \frac{1}{3}$ b) $-0{,}5 \square \frac{1}{2}$ c) $5{,}2 \square \frac{20}{4}$ d) $-2{,}6 \square -\frac{26}{100}$

3. Usporiadajte nasledujúce skupiny čísel vzostupne aj zostupne. Použite znaky < a > na vyznačenie usporiadania:

   a) $\frac{1}{5}; \frac{1}{7}; -\frac{1}{3}; -\frac{2}{8}; \frac{5}{3}; -\frac{5}{6}; \frac{8}{7}; -\frac{7}{8}$ b) $4; -0{,}5; \frac{1}{3}; -2{,}8; \frac{15}{2}; 3{,}2; -\frac{1}{5}; 0; 0{,}6$

4. Overte, že dané nerovnosti sú platné.

   a) $7 \leq \frac{15}{2}$ b) $-4 \leq -3{,}5$ c) $\frac{12}{6} \leq 2$ d) $1 \geq 1$

   Pomôžte si číselnou osou.

5. Napíšte všetky celé čísla x, pre ktoré platí:

   a) $0 < x < 7$ b) $1 \leq x \leq 2$ c) $-3 < x \leq 5$ d) $-15 < x < -3$

   Pomôžte si číselnou osou.

6. Overte dosadením za neznámu, že nerovnosti sú platné:

   a) $a < -6 + 5 \cdot 2$ $a = 2$ c) $5 \cdot (c + 2) < 25$ $c = 0$
   b) $6 \geq 10b + 1$ $b = -1$ d) $6 \cdot (2d + 3) - 3(2d + 7) > d$ $d = \frac{4}{5}$

7. Z čísel A až F vyberte tie, pre ktoré je platná nerovnosť: $x - \frac{x+1}{2} \leq 2 + \frac{x-1}{3}$

   A x = -2 **B** x = 8 **C** x = 10 **D** x = 0 **E** x = 17 **F** x = - 4

8. Obrátením znaku nerovnosti napíšte nerovnice, ktoré majú to isté riešenie ako dané nerovnice. O správnosti sa presvedčte dosadením niekoľkých čísel do oboch nerovníc.

   a) $x + 9 > 10$ c) $-12 \geq +6x$ e) $-3 \geq -\frac{x}{3}$
   b) $-3 < -x$ d) $5x \leq 45$ f) $\frac{x}{10} > 7$

9. Dosadzovaním celých čísel nájdite aspoň tri, ktoré vyhovujú nerovnici:
$2 \,.\, (13 - x) > 5x$

10. Rozhodnite, či dvojice nerovníc majú tie isté riešenia bez toho, aby ste ich riešili.

a) $3x < 7$ b) $14 \geq 5x$ c) $-2x < 7$ d) $100x < 1$

$7 < 3x$ $5x \leq 5x$ $-7 < 2x$ $x > 100$

11. Riešte spamäti:

a) $a - 6 \leq 8$ b) $18 + b > 12$ c) $5 - c < 0$ d) $72 > d + 8 \,.\, 9$

Riešenie vyznačte na číselnej osi a dosadením niekoľkých čísel overte správnosť riešenia.

12. Riešte nerovnice: a) $\frac{1}{9}y > 1$ b) $\frac{y}{6} \leq -2$ c) $-\frac{y}{3} < \frac{3}{2}$ d) $-\frac{4}{3} \geq -y$

Riešenie vyznačte na číselnej osi a overte.

13. Riešte nerovnice: a) $5x < 10$ b) $4x \geq 16$ c) $-2x \leq -4$ d) $42 < -7x$

Riešenie vyznačte na číselnej osi a overte.

14. Pomocou ekvivalentných úprav riešte nerovnice s neznámou z:

a) $6z - 12 \geq z - 2$ c) $z + 3{,}6 \leq -6{,}5 + 2z$ e) $5z - 12{,}2 \leq 6z - 7{,}4$

b) $8 + 15z > 6 + 19z$ d) $z + \frac{3}{4} > -\frac{9}{10}$ f) $z - \frac{7}{12} < -\frac{5}{8}$

15. Rozhodnite, či číslo $\boldsymbol{k} = \frac{1}{2}$ vyhovuje riešeniu nerovnice:
$8 \,.\, (3k - 2) > 5(1 - 6k)$

16. Riešte nerovnice. Správnosť riešenia overte dosadením čísel -1, 0 a 1:

a) $35 - 7(x + 2) > 16 - 2 \,.\, (6x - 1)$ c) $\frac{x-2}{2} - \frac{2x-3}{7} + 0{,}5 \leq -\frac{1}{14}$

b) $\frac{7x-5}{5} < \frac{2x-1}{10}$

17. Rozhodnite, či všetky riešenia daných nerovníc sú zhodné s nerovnicou $x > -2$:

a) $2 \,.\, (50 - x) - x < 106$ c) $-x - 1 \geq -x - 3$

b) $2{,}5x - 6{,}2 > 7 \,.\, (0{,}5x - 0{,}6)$

18. Napíšte príklady troch rôznych nerovníc s neznámou $\boldsymbol{a}$, ktorých riešenie je:

a) $a > 4$ b) $a \leq 0$ c) $a < -1$ d) $a \geq -3$

19. Presvedčte sa, že po vyriešení nasledujúcich nerovníc dostanete vždy platnú nerovnosť pre ľubovoľné reálne číslo z:

a) $3(8z - 11) < 4(6z + 7)$ b) $\frac{16-3z}{8} + 8 \geq \frac{z}{4} - \frac{5z}{8}$

20. Presvedčte sa, že nasledujúcim nerovniciam nevyhovuje žiadne reálne číslo,

a) $11(3c - 1) > 3(11c + 2)$ b) $\frac{8c-9}{6} - \frac{c+4}{3} \geq c$

V cvičeniach 21 a 22 vyberte správny výsledok.

21. Určte správne riešenie nerovnice: $0{,}3(p - 1) \geq -0{,}4(p + 1) - 0{,}1(1 - p)$

A $p > -\frac{1}{3}$ **B** $p \leq -\frac{1}{3}$ **C** $p \geq -\frac{1}{3}$ **D** $p \geq \frac{1}{3}$ E iné riešenie

22. Určte správne riešenie nerovnice: $3\left(x + \frac{1}{9}\right) + \frac{2}{3} - 1 < 0$

A $x \in R$ **B** $x \in \emptyset$ **C** $x \geq 0$ **D** $x < 0$ **E** iné riešenie

6.5 Slovné úlohy riešené lineárnymi nerovnicami

PRÍKLAD

Určte, pre ktoré jednociferné prirodzené čísla k: platí: $\frac{2-k}{2} \leq \frac{3-k}{5}$

RIEŠENIE

Skontrolujte Zuzanino riešenie.

$$\frac{2-k}{2} \leq \frac{3-k}{5} \qquad / \cdot \; 10$$

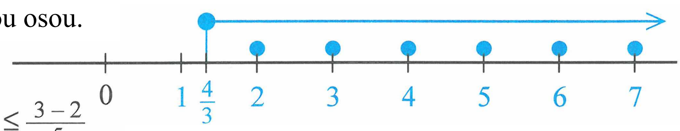
$$5(2 - k) \leq 2(3 - k)$$

$$10 - 5k \leq 6 - 2k \qquad / + 2k-10$$

$$-3k \leq -4 \qquad /:(-3)$$

$$\underline{k \geq \frac{4}{3}}$$

Zuzana si pomôže číselnou osou.



Overenie: k = 2 $\frac{2-2}{2} \leq \frac{3-2}{5}$

$0 \leq \frac{1}{5}$ platí

Odpoveď: Nerovnosť platí pre jednociferné čísla: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

ÚLOHA

1 Riešením nerovnice $7x < 8 - \frac{7+x}{10}$:

A nie je žiadne prirodzené číslo C je nekonečne veľa prirodzených čísel

B je práve jedno prirodzené číslo D iné riešenie

Vyberte správnu odpoveď.

ÚLOHA

2 Určte všetky čísla ***a,*** ktoré spĺňajú zároveň tieto tri vlastnosti:

a) Sú kladné a celé. b) Sú párne. c) Vyhovujú nerovnici $\frac{a+1}{2} - \frac{7+a}{3} < 0$.

PROBLÉM

Pán Kováč chce na zimu nakúpiť zemiaky. Má dve možnosti nákupu:

1. Nakúpi v tržnici, kde jeden kilogram zemiakov stojí 18 Sk.
2. Pôjde autom do poľnohospodárskeho družstva, kde zemiaky predávajú po 11 Sk za kilogram. Musí ale navyše zaplatiť 170 Sk na benzín.

Najmenej koľko kilogramov zemiakov by mal pán Kováč nakúpiť, aby bolo preňho výhodnejšie zájsť do poľnohospodárskeho družstva?

RIEŠENIE

Vnučka pána Kováča, Betka, počíta:

počet kilogramov zemiakov................ x
cena v tržnici za x kg .... 18x Sk
cena na družstve za x kg..................... 11$\boldsymbol{x}$ Sk
výdaje na benzín................................. 170 Sk
spolu pri nákupe v družstve................ 11$\boldsymbol{x}$ + 170 Sk

Hľadám také $\boldsymbol{x}$, pre ktoré platí:

$$18x > 11x + 170$$
$$18x > 11x + 170 \quad /-11x$$
$$7x > 170 \quad /:7$$
$$\underline{x > 24\tfrac{2}{7}}$$

Betka vypočítala, že pán Kováč by mal nakúpiť aspoň 25 kilogramov zemiakov v družstve, aby bol nákup výhodnejší. Keď nakúpi viac ako 25 kg, zaplatí za každý ďalší kilogram v družstve iba 11 Sk, ale v tržnici až 18 Sk. Výsledok overíme tabuľkou.

Overenie:

x kg	24	25	26
18x	432	450	468
11x+ 170	434	445	456

Odpoveď: Pri nákupe najmenej 25 kg zemiakov je pre pána Kováča výhodnejšie zájsť do poľnohospodárskeho družstva.

3

ÚLOHA

Martina už našetrila 200 Sk a každý mesiac si odloží 30 Sk z vreckového. Adam už našetril 80 Sk, ale každý mesiac si chce odložiť 50 Sk. Za koľko mesiacov našetrí Adam viac ako Martina, ak svoje predsavzatia dodržia?

4

ÚLOHA

Dve expresné kuriérske služby majú takéto ponuky:

P - T expres: cena doručenia jednej zásielky je 130 Sk
pri doručení 5 a viac zásielok zľava 20 % na každú zásielku

Quick expres: fixný poplatok 120 Sk
za každú zásielku 90 Sk

Potrebujeme poslať expresne viac ako päť zásielok. Pri akom počte zásielok bude výhodnejšie použiť službu P - T expres, pri akom Quick expres?

CVIČENIA

1. Vypočítajte, porovnajte a výsledok zapíšte v tvare nerovnosti:
   a) šesťnásobok čísla 103 a deväťnásobok čísla 65,
   b) najmenší spoločný násobok čísel 55, 75 a najmenší spoločný násobok čísel 42, 39,
   c) najväčší spoločný deliteľ čísel 240, 320 a najväčší spoločný deliteľ čísel 360, 540.

2. Vypočítajte a medzi výsledky napíšte jeden zo znakov <, >, = tak, aby nerovnosť alebo rovnosť bola platná:

a) 5 % zo 400 a 10 % z 200

b) 102 % z 90 a 90 % zo 102

c) 22 % z 310 a 26 % zo 450

d) 105 % z 50 a 96 % z 56

3. Určte najväčšie celé číslo $\boldsymbol{h}$, ktoré je riešením nerovnice:

a) $h + 4 - 2h \geq 9$ b) $2 \cdot (h + 2) \geq 7 \cdot (h - 2) + 2$ c) $(h - 4) \cdot 3 > 2 \cdot (h + 1)$

4. Patrí číslo v = 6 medzi riešenia nerovnice $\frac{v}{7} - \frac{v-3}{3} - \frac{9-2v}{21} > 0$?

5. Požičovňa áut ponúka pri požičaní auta Felicia Pick-up dva cenové tarify:

1. Denný poplatok za prenájom 820 Sk a za každý najazdený kilometer 12 Sk.
2. Denný paušálny poplatok 1 600 Sk.

Pri akom počte najazdených kilometrov je výhodnejšie zvoliť tarifu 2?

6. Obilninové raňajkové kaše z ovsených vločiek, orieškov a čokolády Mňam-Mňam dodávajú dvaja dodávatelia. Prvý predáva jedno balenie po 65 Sk, u druhého stoja prvé tri balenia 70 Sk a každé ďalšie balenie je zľavnené na 55 Sk. Aký počet balení je výhodné nakupovať u druhého dodávateľa? O správnom riešení sa presvedčte tabuľkou.

7. Pohľadajte v cenníkoch a katalógoch spoločnosti, ktoré ponúkajú služby obyvateľom podobné údaje a vytvorte vlastné úlohy.

VYSKÚŠAJTE SA !

1. Riešte rovnice a vykonajte skúšky správnosti:

a) $6x - (3x + 2) = x - 8$

b) $0{,}75r - 0{,}25(2 - r) = 2r - 1{,}5$

c) $\frac{1}{3}y + (5 - 3y) - \left(-\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$

2. Rovnica $\frac{1{,}2z + 10{,}8}{3} = 0{,}4z$

A nemá riešenie **B** má nekonečne veľa a riešení **C** z = 0 **D** z = 6,25

E žiadna z odpovedí **A-D** nie je správna

3. Obvod trojuholníka ABC je 37 cm. Strana a je o 20 % kratšia ako strana $\boldsymbol{b}$. Strana $\boldsymbol{c}$ sa rovná $\frac{2}{3}$ strany $\boldsymbol{b}$. Platí:

A $b - 20b + b + \frac{2}{3}b = 37$ **B** $b - 2b + b + \frac{2}{3}b = 37$ **C** $b - 0{,}2b + b + \frac{2}{3}b = 37$

D $\frac{b}{80} + b + \frac{2}{3}b = 37$ E iné riešenie

4. V štátoch strednej Európy je najväčším predajcom osobných automobilov spoločnosť Volkswagen group. V roku 1999 predali spolu 286 tisíc automobilov značky Škoda, Volkswagen (VW), Seat a Audi. Automobilov značky Škoda bolo o 100 tisíc viac ako VW, VW dvanásťkrát viac ako áut značky Audi. Seatov sa predalo o polovicu menej ako VW. Koľko automobilov jednotlivých značiek predala spoločnosť Volkswagen group v roku 1999?

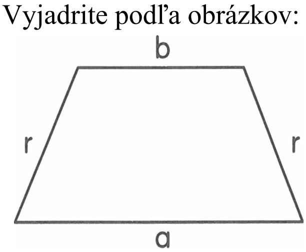
5. Z dvoch miest vzdialených 200 km vyšli oproti sebe súčasne dve osobné autá. Ich priemerné rýchlosti sú $75\ \frac{km}{h}$ a $85\ \frac{km}{h}$.
a) Za aký čas sa stretnú?
b) V akej vzdialenosti budú 15 minút pred stretnutím?

6. Chaty priateľov Martina a Vila sú od seba vzdialené 20 km. Priatelia vyšli, každý zo svojej chaty, súčasne a stretli sa za jednu hodinu a 15 minút. Martin išiel na horskom bicykli rýchlosťou $12\ \frac{km}{h}$, Vilo išiel pešo. Vypočítajte, akou priemernou rýchlosťou išiel Vilo.

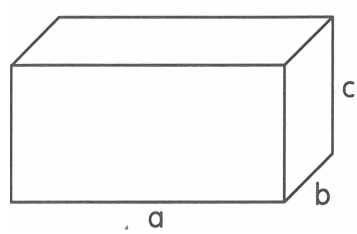
7. Jedným postrekovačom vinohrad postriekajú za 15 hodín, druhým, výkonnejším o 5 hodín skôr. Za koľko hodín postriekajú vinohrad obidvoma postrekovačmi súčasne?

8. Prvým odtokom vypustia nádrž za 15 hodín, druhým za 12 hodín a tretím za 10 hodín. Ako dlho trvalo vypúšťanie nádrže, ak boli najskôr otvorené všetky tri odtoky a posledné tri hodiny iba druhý odtok?

9. Vyjadrite podľa obrázkov:



$o =$
$a =$
$b =$
$r =$



S =
a =
b =
c =

10. Na výber do basketbalového oddielu môžu prísť žiačky od 9 do 12 rokov. Označme v vek žiačok. Zapíšte nerovnosťou podmienku pre v.

11. Daná je nerovnica x ≥ -4. Vyznačte na číselnej osi a zapíšte všetky čísla, ktoré jej vyhovujú a platí, že sú:

a) celé záporné

b) reálne záporné

12. Riešte nerovnice. Riešenie vyznačte na číselnej osi a overte.

a) $5y + 7 \geq y + 12$ b) $3(8z - 11) < 4(6z + 7)$ c) $\frac{7x-9}{6} > \frac{6x-7}{5}$

13. Pre ktoré najmenšie prirodzené číslo je výraz 84 -6x záporný?

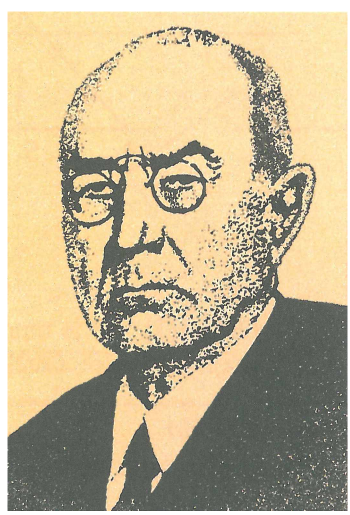
14. Určte najväčšie celé číslo, ktoré vyhovuje nerovnici: $\frac{2x-7}{9} > \frac{3x-5}{12}$.

Medzi všetkými vedami, ktoré odkrývajú ľudstvu cestu k poznaniu zákonov prírody, najmohutnejšia a najvznešenejšia je matematika.

S. V Kovalevská

Karel Petr

(14. 6. 1868 až 6. 2. 1950)



Český matematik, pôsobil na Vysokej škole technickej v Brne a neskôr na Karlovej univerzite v Prahe. Zaoberal sa teóriou čísel, teóriou algebrických rovníc, numerickým výpočtom integrálov a ďalšími problémami matematiky.

Významne prispel k modernizácii českých vysokoškolských učebníc matematiky, podieľal sa na výchove silnej generácie matematikov.

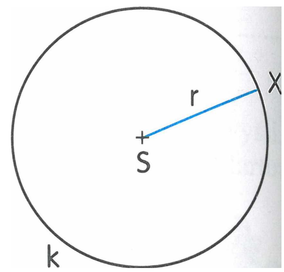
7 RIEŠENIE KONŠTRUKČNÝCH ÚLOH

7.1 Základné množiny bodov danej vlastnosti

V predchádzajúcich ročníkoch ste sa naučili čo je kružnica, os úsečky, os uhla.

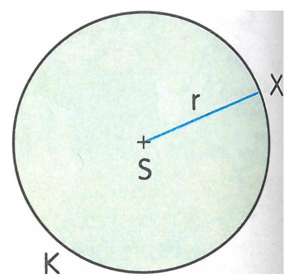
ZOPAKUJME SI

Kružnica



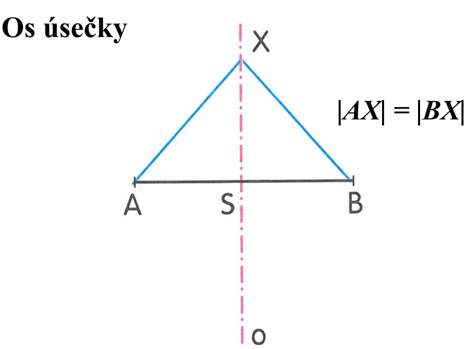
Kružnica je množina všetkých bodov ***X***,
pre ktoré platí |SX| = ***r***.
Stručne ***k(S, r)***.

Kruh

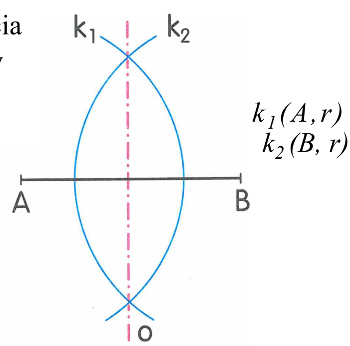


Kruh je množina všetkých bodov ***X***,
pre ktoré platí |SX| ≤ ***r***.
Stručne ***K(S, r)***.

Os úsečky



Konštrukcia osi úsečky



Os úsečky *AB* je množina všetkých bodov *X*, ktoré majú rovnakú vzdialenosť od krajných bodov úsečky *AB*, |*AX*| = |*BX*|.

1

ÚLOHA

Odôvodnite, že každý bod *Y* v rovine, ktorý neleží na osi úsečky *AB* nespĺňa podmienku |*AY*|= |*BY*|.

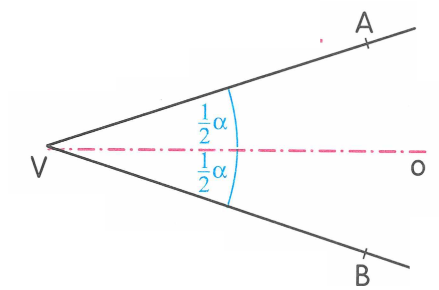
2

ÚLOHA

Odôvodnite, že priesečník osí strán trojuholníka ***ABC*** je stred kružnice trojuholníku opísanej.

Os uhla

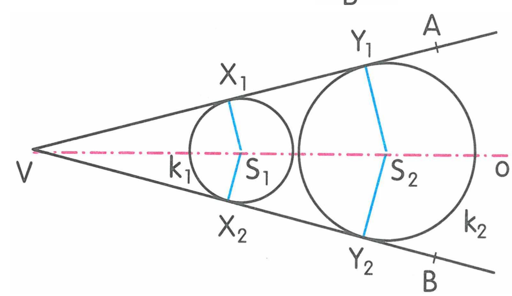
Zo 6. ročníka viete, že os uhla delí uhol na dve zhodné časti.



3

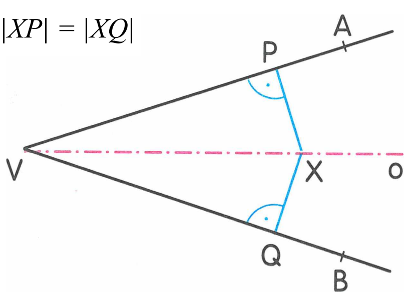
ÚLOHA

Na obrázku sú narysované dve kružnice k_1, k_2, ktoré sa dotýkajú rôznobežiek *VA, VB*. Nájdite aspoň dva ďalšie stredy kružníc, ktoré sa dotýkajú polpriamok *VA, VB*. Napíšte čo platí o vzdialenostiach $|S_1X_1|$, $|S_1X_2|$, $|S_2Y_1|$, $|S_2Y_2|$?

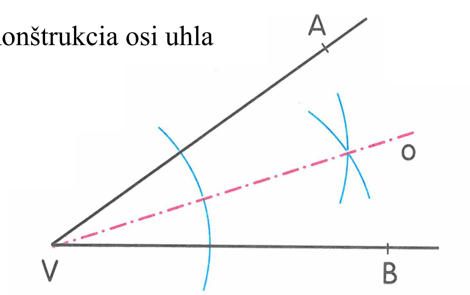


Os uhla *AVB je* množina všetkých bodov *X,* z ktorých každý má rovnakú vzdialenosť od polpriamok *VA, VB*. Je to polpriamka ***o.***

$|XP| = |XQ|$



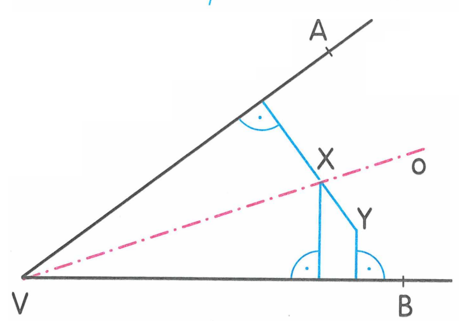
Konštrukcia osi uhla



4

ÚLOHA

Odôvodnite, že každý bod *Y* v rovine, ktorý neleží na osi uhla *AVB,* má rôzne vzdialenosti od ramien *VA, VB* uhla *A VB* (pozri obrázok).



5

ÚLOHA

Odôvodnite, že priesečník osí uhlov trojuholníka *ABC* je stredom kružnice vpísanej trojuholníku.

Niekoľkokrát sme použili názov **množina všetkých bodov.** Tento názov používame len vtedy, keď vieme, že:

a) Každý bod tohto geometrického útvaru má požadovanú vlastnosť.

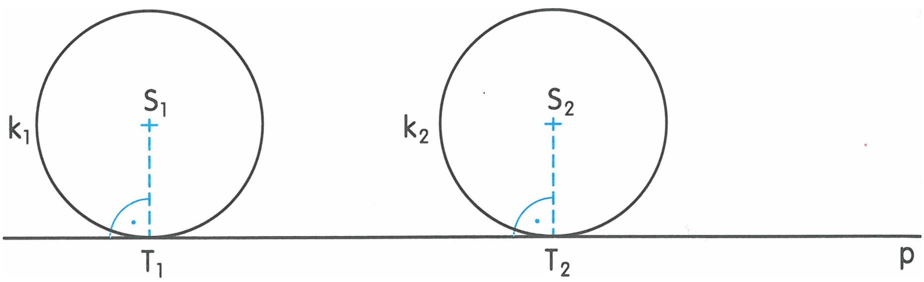
b) Každý bod roviny, ktorý tomuto útvaru nepatrí, už túto vlastnosť nemá.

POZNÁMKA

Niekedy názov množina všetkých bodov danej vlastnosti *nahrádzame názvom* **geometrické miesto bodov.**

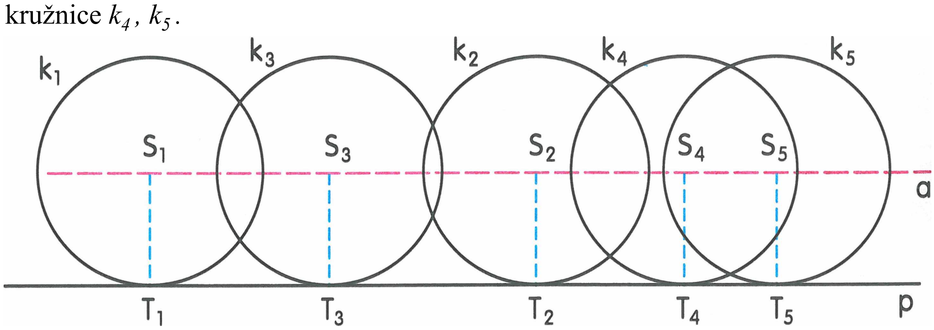
PRÍKLAD

Na obrázku sú zostrojené dve kružnice $k_1(S_1\,;\, r = 1{,}5\ cm)$, $k_2(S_2\,;\, r = 1{,}5$ cm), ktoré sa dotýkajú priamky ***p*** a ležia v jednej polrovine určenej priamkou ***p.*** Zostrojte ešte aspoň tri ďalšie kružnice s polomerom r = 1,5 cm, ktoré sa dotýkajú priamky ***p.*** Čo možno povedať o polohe stredov všetkých takto zostrojených kružníc?



RIEŠENIE

Ak sa má kružnica k_3 dotýkať priamky p, musí mať s ňou spoločný jeden bod, označme ho T_3. Zrejme o strede S_3 kružnice k_3 platí S_3T□ p, $|S_3T_3| = 1{,}5$ cm. Potom zostrojíme knižnicu $k_3(S_3,\ r = 1{,}5\ \text{cm})$. Analogicky zostrojíme aj ďalšie dve kružnice k_4, k_5.



Zrejme platí $|S_1T_1| = |S_2T_2| = |S_3T_3| = |S_4T_4| = |S_5T_5| = 1{,}5$ cm. Body S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, ležia na jednej priamke ***a*** rovnobežnej s priamkou ***p.*** Vzdialenosť obidvoch priamok sa rovná polomeru kružníc r.

Odpoveď: Stredy všetkých zostrojených kružníc ležia na priamke ***a*** rovnobežnej s priamkou ***p*** vo vzdialenosti ***r.***

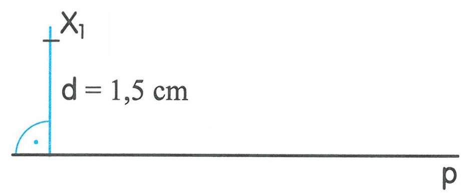
PRÍKLAD

Určte a zostrojte množinu bodov (geometrické miesto bodov) roviny, z ktorých každý má od priamky p vzdialenosť $d = 1{,}5$ cm.

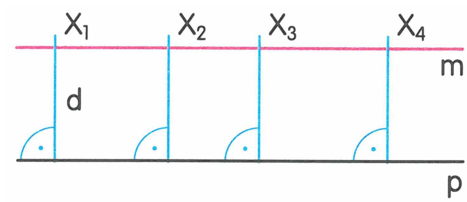
RIEŠENIE

Postup pri zisťovaní množín bodov danej vlastnosti si ukážeme podrobnejšie.

1. Narysujeme čo je dané a vyhľadáme **jeden bod** s danou vlastnosťou - čiže nájdeme postup na hľadanie bodov.



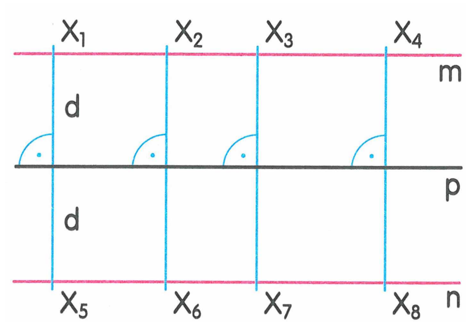
2. Zostrojíme toľko bodov, aby sme mohli urobiť **odhad,** aký útvar vytvoria.



3. Zistíme, či **každý bod útvaru má požadovanú vlastnosť.**

Priamka $m \parallel p$ je od priamky p vzdialená 1,5 cm, teda každý bod má požadovanú vlastnosť.

4. Preskúmame, či **ešte v rovine neexistujú ďalšie body s danou vlastnosťou.**



Existujú ešte také body — vytvoria priamku ***n.***

5. **Zostavíme odpoveď,** skladajúcu sa z týchto častí:
   - zopakujeme, aké body sme hľadali
   - napíšeme názov nájdeného útvaru
   - presne útvar opíšeme

Odpoveď: Množinu bodov v rovine, ktoré majú od priamky p vzdialenosť $d = 1{,}5$ cm tvoria dve priamky m, n, pre ktoré platí $m \parallel p$, $n \parallel p$ a ktorých vzdialenosť od priamky p je 1,5 cm.

POZNÁMKA

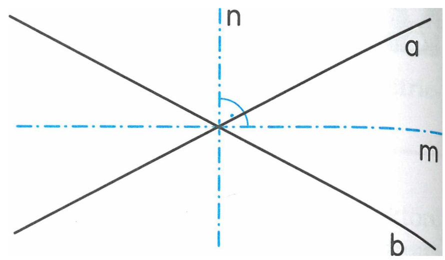
Narysované tri obrázky tvoria* v *zošite jeden obrázok.

PRÍKLAD

Určte a zostrojte množinu všetkých bodov, ktoré majú rovnakú vzdialenosť od daných dvoch rôznobežiek.

RIEŠENIE

Dvoma rôznobežnými priamkami a, ***b*** sú určené dve dvojice vrcholových uhlov. Množinou bodov rovnako vzdialených od ramien dvoch vrcholových uhlov je priamka pozostávajúca z osí týchto uhlov.



Dve takéto priamky ***m***, ***n*** pre dve dvojice zhodných vrcholových uhlov sú hľadanou množinou bodov rovnako vzdialených od rôznobežiek a, ***b.***

Odpoveď: Množinu bodov, ktoré majú rovnaké vzdialenosti od dvoch daných rôznobežných priamok, tvoria priamky, na ktorých ležia osi uhlov určených týmito rôznobežnými priamkami.

ÚLOHA

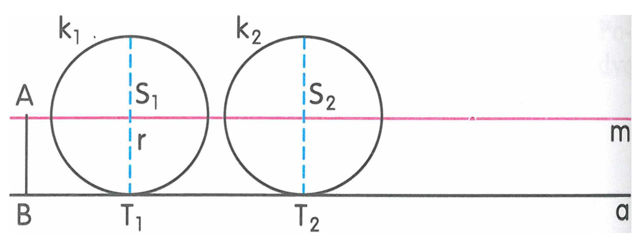
Odôvodnite, že uvedené priamky m a n sú na seba kolmé.

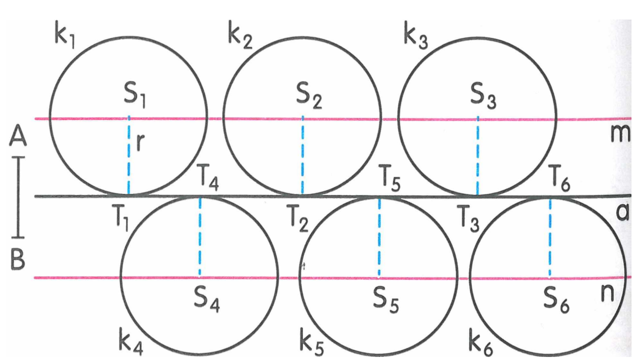
PRÍKLAD

Určte a zostrojte množinu všetkých stredov kružníc, ktoré majú polomer zhodný s danou úsečkou AB a dotýkajú sa danej priamky a.

RIEŠENIE

V obidvoch polrovinách s hraničnou priamkou a zostrojíme niekoľko takých kružníc k_1, k_2, ... k_6, ktoré sa dotýkajú danej priamky a. Pritom o vzdialenostiach ich stredov S_1 S_2, ... , S_6 od priamky a platí $|S_1T_1| = |S_2T_2| = ... = |S_6T_6| = |AB|$. Ľahko usúdime, že hľadanou množinou stredov týchto kružníc sú priamky m, n ležiace v opačných polrovinách s hraničnou priamkou a, vo vzdialenosti $|AB|$ od priamky a.





Skutočne, napríklad pre ľubovoľnú kružnicu $k_1(S_1, |AB|)$ s polomerom dĺžky $|AB|$ dotýkajúcu sa priamky a v bode T_1 platí S_1T_1 □ a. Jej stred leží vo vzdialenosti $|S_1T_1| = |AB|$ od priamky a, teda na priamke $m||a$, kde vzdialenosť priamky m od a je $|AB|$. To platí o každom strede ľubovoľnej kružnice s polomerom $|AB|$ dotýkajúcej sa priamky a.
Naopak, ak je S_1 ľubovoľný bod priamky $m||a$, pričom vzdialenosť priamok a, m je $|AB|$, možno ním viesť priamku S_1T_1 □ a. Kružnica opísaná z bodu S_1 s polomerom $|S_1T_1|$ sa dotýka priamky a a platí $|S_1T_1| = |AB|$.
To platí o všetkých bodoch priamky m aj priamky n, kde $m||a$ a vzdialenosť priamky n od a je $|AB|$.

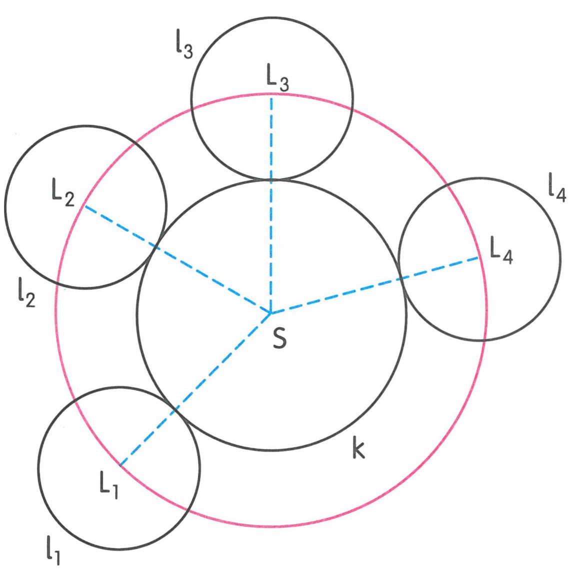
Odpoveď: Množinu všetkých stredov kružníc, ktoré majú polomer dĺžky $|AB|$ a dotýkajú sa danej priamky, tvoria dve priamky. Každá leží v jednej z polrovín ohraničených danou priamkou, je s danou priamkou rovnobežná a má od nej vzdialenosť $|AB|$.

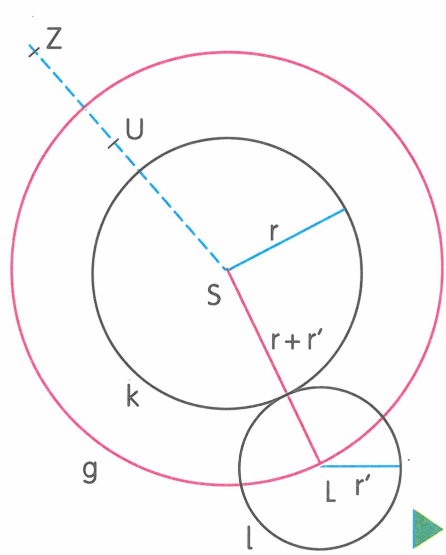
5 PRÍKLAD

Daná je kružnica $k(S;\ r = 2{,}5$ cm). Nájdite množinu všetkých stredov kružníc, ktoré majú daný polomer $r' = 1{,}5$ cm a dotýkajú sa danej kružnice k zvonka.

RIEŠENIE

Načrtneme niekoľko kružníc l_1, l_2, l_3,..., ktoré sa dotýkajú kružnice k a majú polomer $r' = 1{,}5$ cm. Ich stredy L_1, L_2, L_3, ... majú od stredu S tú istú vzdialenosť, ktorá sa rovná $r + r'$. Môžeme usúdiť, že všetky také stredy L ležia na kružnici so stredom S a polomerom $r + r'$; túto kružnicu označíme $g(S, r + r')$.





Presvedčme sa, že kružnica g je skutočne hľadanou množinou všetkých stredov kružníc l.

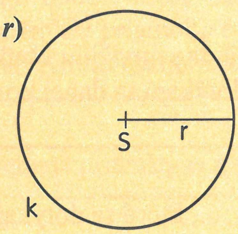
a) Každý bod L kružnice $g\ (S,\ r + r')$ je stredom kružnice l s polomerom r', ktorá sa zvonka dotýka danej kružnice $k\ (S,$ r).

b) Bod, ktorý neleží na kružnici g, má inú vzdialenosť od bodu S ako $r + r'$. Preto nemôže byť stredom kružnice s polomerom r', ktorá sa zvonka dotýka kružnice k. Napríklad pre bod Z, ktorý leží zvonka kružnice g, je $|ZS| > r + r'$, pre bod U vnútri kružnice g, je $|US| < r + r'$. Ak by sme okolo bodu Z a okolo bodu U opísali kružnice s polomerom r', v obidvoch prípadoch by nebola splnená podmienka pre vonkajší dotyk dvoch kružníc s polomermi r a r'.

Odpoveď: Množinu všetkých stredov kružníc, ktoré sa dotýkajú zvonka danej kružnice k a majú daný polomer r', tvorí kružnica $g\ (S,\ r + r')$.

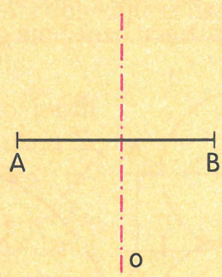
Prehľad dôležitých množín bodov danej vlastnosti v rovine

Kružnica *k*(*S*, *r*)



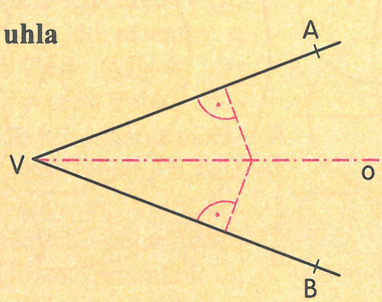
množina bodov roviny, ktoré majú od bodu ***S*** vzdialenosť ***r***

Os úsečky *AB*



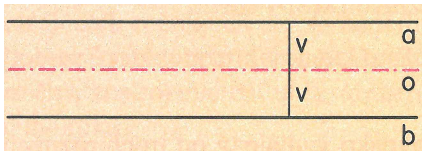
množina všetkých bodov roviny, z ktorých každý má rovnakú vzdialenosť od bodov ***A, B***

Os uhla



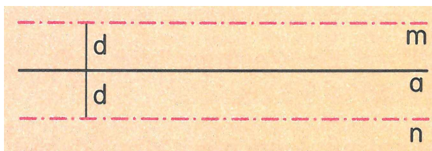
množina bodov roviny, ktoré majú rovnakú vzdialenosť od ramien uhla

Priamka *o* rovnobežná s priamkami *a, b* *(a || b)* vo vzdialenosti v od oboch priamok



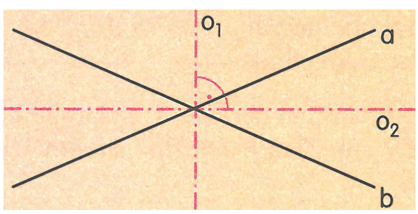
množina bodov rovnako vzdialených od dvoch rovnobežiek

Dvojica rovnobežiek *m, n s* danou priamkou *a* vo vzdialenosti *d*



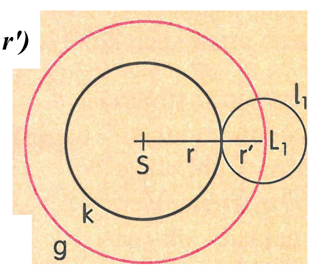
množina bodov roviny, z ktorých každý má vzdialenosť *d* od priamky *a*

Priamky o_1, o_2 (o_1 □ o_2), na ktorých ležia osi uhlov určených dvoma rôznobežkami *a, b*



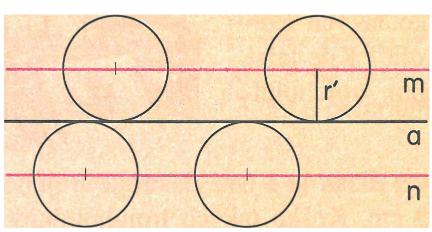
množina bodov roviny rovnako vzdialených od dvoch rôznobežiek *a, b*

Kružnica *g(S, r + r')*



množina všetkých stredov kružníc, ktoré sa zvonku dotýkajú kružnice *k* a majú rovnaké polomery *r'*

Dvojica rovnobežiek *m, n* s danou priamkou *a* vo vzdialenosti *r'*



množina všetkých stredov kružníc s polomerom *r'* a dotýkajúcich sa danej priamky *a*

CVIČENIA

1. Nájdite a zostrojte množinu stredov kružníc s polomerom $r' = 2$ cm, ktoré majú vnútorný dotyk s kružnicou $k(S, 4 \text{ cm})$.

2. Nájdite a zostrojte množinu stredov kružníc, ktoré sa dotýkajú dvoch rovnobežných priamok a, b.

3. Nájdite bod, ktorý je rovnako vzdialený od troch rôznych bodov neležiacich na jednej priamke.

4. Nájdite bod, ktorý je rovnako vzdialený od troch priamok, pričom každé dve z nich sú rôznobežné.

5. Daná je úsečka AB, $|AB| = 5$ cm. Zostrojte také body X, Y, pre ktoré platí $|AX| = |AY| = 4$ cm, $|BX| = |BY| = 3{,}5$ cm.

6. Nájdite množinu stredov kružníc, ktoré prechádzajú dvoma rôznymi bodmi.

7. Nájdite množinu stredov kružníc, ktoré sa dotýkajú danej priamky t v bode T.

8. Množinou všetkých bodov, z ktorých vidieť danú úsečku AB pod pravým uhlom je kružnica, ktorej priemerom je úsečka AB. Body A, B úsečky AB tejto množine bodov nepatria. Odôvodnite.

9. Daná je kružnica $k(S; 3{,}6 \text{ cm})$, na nej bod A. Zostrojte bod B ležiaci na kružnici k tak, aby $|AB| = 2{,}7$ cm. Zistite množinu stredov tetív kružnice k rovnobežných s priamkou AB.

10. Daná je kružnica $k(S, 3 \text{ cm})$ a priamka m, ktorá ju nepretína. Nájdite množinu stredov tetív, ktoré ležia na priamkach kolmých na priamku m.

11. Otáčavý žeriav dosiahne od stredu svojho stanovišťa vo vodorovnom teréne do vzdialenosti 25 m. Vyhľadajte množinu všetkých bodov v teréne, kam môže žeriav zložiť náklad, ak sa pohybuje po priamej koľaji dlhej 75 m.

12. Daná je úsečka AB, ktorej dĺžka je 6 cm. Zostrojte trojuholník ABC, ak výška $v_c = 3$ cm. Koľko takých trojuholníkov môžete zostrojiť? Kde ležia všetky vrcholy C týchto trojuholníkov?

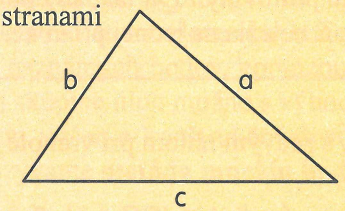
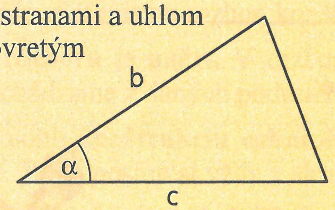
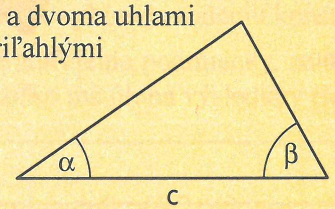
13. Daná je úsečka AB, ktorej dĺžka je 5 cm. Zostrojte trojuholník ABC, ak jeho ťažnica t_c má dĺžku 2,5 cm. Koľko takých trojuholníkov môžete zostrojiť? Čo môžete povedať o týchto trojuholníkoch?

Jednoduché konštrukcie

V predchádzajúcich ročníkoch ste sa naučili niektoré **jednoduché konštrukcie.** Vymenujme aspoň niektoré z nich: nanášanie úsečky na danú polpriamku, zostrojenie osi úsečky, zostrojenie osi uhla, konštrukcie trojuholníkov podľa viet o určenosti trojuholníkov.

V prehľadnej tabuľke si pripomeňme vety o určenosti trojuholníkov.

Vety o určenosti trojuholníkov

Trojuholník je určený	Označenie	Podmienky, podľa ktorých možno zostrojiť trojuholník
troma stranami *(sss)* 	$a,\ b,\ c$	$a + b > c, c > a - b$ $(a - b < c < a + b)$
dvoma stranami a uhlom nimi zovretým *(sus)* 	$b,\ c,\ \alpha$	$0° < \alpha < 180°$
stranou a dvoma uhlami k nej priľahlými *(usu)* 	c, α, β	$0° < \alpha + \beta < 180°$

Jednoduché konštrukcie si zopakujte riešením nasledujúcich úloh.

ÚLOHA

Daná je úsečka dĺžky $|AB| = 3$ cm a polpriamka MN. Preneste úsečku AB na polpriamku |MN|.

ÚLOHA

Zostrojte stred S úsečky KL, $|KL| = 6$ cm.

3 ***ÚLOHA***

Daná je priamka *a* a bod *A*. V bode *A* zostrojte kolmicu *k* na priamku *a* aspoň dvoma spôsobmi.

4 *ÚLOHA*

Bod M neleží na priamke *n*. Zostrojte rôznymi spôsobmi priamku *m* rovnobežnú s priamkou *n*, ktorá prechádza bodom *M*.

5 *ÚLOHA*

Zvoľte si priamku *p* a bod *X*, ktorý na nej neleží. Zistite vzdialenosť bodu *X* od priamky *p*.

6 *ÚLOHA*

Uhol veľkosti $\alpha = 75°$ premiestnite do polroviny *PQR* tak, aby polpriamka *PQ* bola jeho jedným ramenom. Body *P, Q, R* neležia na jednej priamke.

7 *ÚLOHA*

Zostrojte pravouhlý trojuholník *ABC* s pravým uhlom pri vrchole C, keď

a) $|AC| = 2{,}8$ cm, $|BC| = 2{,}5$ cm
b) $|BC| = 4$ cm a polomer kružnice opísanej $\Delta\, ABC$ je $r = 3$ cm

8 ***ÚLOHA***

Zostrojte trojuholník ABC, ak je dané:

a) a = b = c = 6 cm
b) a = 6 cm, b = 4,5 cm, $\gamma = 45°$
c) b = 5 cm, $\alpha = 60°$, $\gamma = 72°$

9 ***ÚLOHA***

Zostrojte obdĺžnik *ABCD*, keď je dané:

a) $|AC| = 4{,}2$ cm, $|AB| = 3{,}1$ cm
b) $|BC| = 4{,}2$ cm; $|\square\ DAC| = 45°$
c) $|BD| = 5{,}3$ cm; $|CD| = 4{,}1$ cm

10 *ÚLOHA*

Zostrojte rovnobežník *ABCD*, v ktorom poznáte:

a) $|AB| = 6$ cm, $|BC| = 3$ cm, $|AC| = 7$ cm
b) $|AB| = 4$ cm, $|\square\ ABC| = 120°$, $|AC| = 7$ cm

C V I Č E N I A

1. Zostrojte kružnicu opísanú danému trojuholníku *ABC*.
2. Zostrojte kružnicu vpísanú danému trojuholníku *ABY*.

3. Zostrojte pravouhlý trojuholník *ABC* s pravým uhlom pri vrchole C, v ktorom poznáte |*AB*| = 7 cm, |*BC*| = 3 cm.

4. Zostrojte rovnobežník *ABCD,* v ktorom poznáte
   |*AB*| = 6 cm, |*BC*| = 3 cm, |□ *BAC*|= 30°.

5. Zostrojte kosoštvorec *ABCD,* v ktorom |*AC*| = *6* cm, |*AD*| = 4 cm.

6. Zostrojte pravouhlý lichobežník *ABCD,* pričom *AD* □ *AB,* v ktorom
   |*AB*| = 6 cm, |*AD*| = 3 cm, |*CD*| = 3 cm.

7.3 Použitie množín všetkých bodov danej vlastnosti pri riešení konštrukčných úloh

Úlohy, ktoré budeme riešiť, sú **konštrukčné úlohy.**

V každej konštrukčnej úlohe treba nájsť neznámy bod, priamku, kružnicu alebo iný geometrický útvar zložený z bodov. Preto sa konštrukčná úloha rozpadne na hľadanie neznámych bodov, pomocou ktorých sa podarí zostrojiť hľadaný útvar. Pri jednej skupine úloh možno s výhodou použiť množinu bodov danej vlastnosti. Metódu na riešenie konštrukčných úloh, pri ktorej použijeme známe množiny bodov nazývame **metóda množín bodov danej vlastnosti.**

Už v predchádzajúcich ročníkoch ste sa pri konštrukčných úlohách oboznámili s rozčlenením riešenia na rozbor, konštrukciu, skúšku a diskusiu.

Súčasťou **rozboru** je **náčrt.** V rozbore hľadáme podmienky pre neznámy bod, pričom vychádzame z daných podmienok.

Aby sme mohli **konštrukciu uskutočniť,** je dôležité poznať **postup,** ktorým ju zostrojíme. Tento postup si vždy v skrátenej forme zapíšeme.

Po konštrukcii treba urobiť **skúšku,** v ktorej sa presvedčíme, či zostrojený geometrický útvar vyhovuje zadaniu konštrukčnej úlohy.

V **diskusii** zisťujeme podmienky, za akých riešenie konštrukčnej úlohy existuje, prípadne koľko má úloha výsledkov riešenia.

1

PRÍKLAD

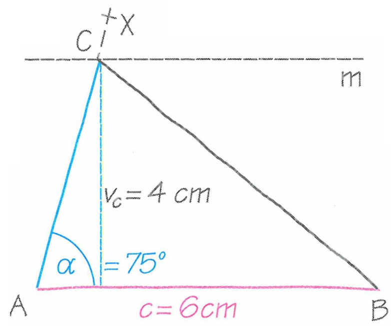
Zostrojte trojuholník *ABC,* v ktorom je daná dĺžka strany *c* = 6 cm, veľkosť uhla *BAC,* |□ *BAC*| = 75° a v_c = 4 cm.

RIEŠENIE

Rozbor:

$c = 6$ cm
|□BAC| = 75°
$v_c = 4$ cm

Náčrt:

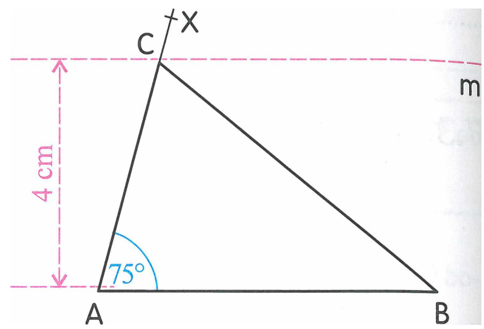


1. Úsečku AB vieme zostrojiť, $|AB| = c = 6$ cm
2. Neznámy bod je bod C. Bod C má vyhovovať dvom podmienkam:
   a) Bod C je bodom polpriamky AX
   b) Bod C je bodom priamky $m \| \overleftrightarrow{AB}$, pretože každý bod priamky m má od priamky AB vzdialenosť 4 cm.

   Bod C je priesečník priamky m a polpriamky AX (patrí dvom množinám bodov).

Konštrukcia:

1. AB; $|AB| = c = 6$ cm
2. $\overrightarrow{AX}$; $|\sphericalangle BAX| = 75°$
3. m; $|m, AB| = 4$ cm, $m \| \overleftrightarrow{AB}$
4. C; $C \in m \cap \overrightarrow{AX}$
5. $\triangle ABC$



Skúška:

Polpriamku AX sme zostrojili tak, že $|\sphericalangle BAX| = 75°$. Z toho vyplýva, že uhol α má veľkosť 75°. Priamka $m \| \overleftrightarrow{AB}$ vo vzdialenosti 4 cm, bod C leží na priamke m, preto výška zostrojeného trojuholníka je $v_c = 4$ cm. Dĺžka strany AB je 6 cm. Trojuholník ABC vyhovuje podmienkam úlohy.

Diskusia:

Pre uhol menší ako 180° existuje jedno riešenie.

PRÍKLAD

Daná je priamka p a bod A, ktorý je od nej vzdialený 3,5 cm. Zostrojte v polrovine pA všetky body X, pre ktoré platí, že ich vzdialenosť od daného bodu A je 3 cm a od danej priamky p je 2,5 cm.

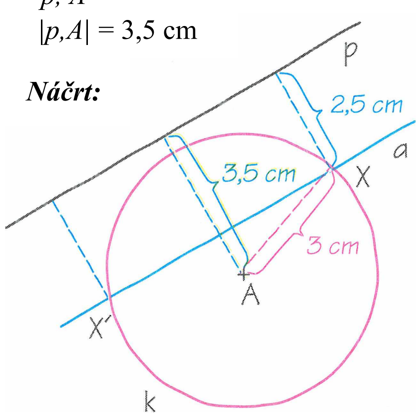
RIEŠENIE

Rozbor:

p, A

$|p,A| = 3{,}5$ cm

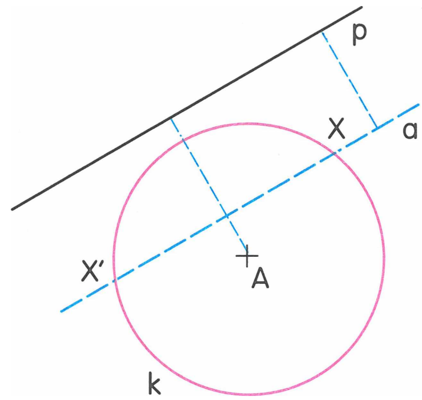
Náčrt:



a) Bod X má od zvoleného bodu A vzdialenosť 3 cm.
   Bod X leží na kružnici $k(A,$ 3 cm)
b) Bod X má od priamky p vzdialenosť 2,5 cm.
   Vzhľadom na to, že hľadáme body X, ktoré ležia v polrovine pA platí: Všetky takéto body X ležia na priamke a rovnobežnej s priamkou p vo vzdialenosti 2,5 cm.
   Body X musia spĺňať dve podmienky:
   1. ležia na kružnici $k(A,$ 3 cm),
   2. ležia na priamke $a \| p$ vo vzdialenosti 2,5 cm
   Teda: Body X budú patriť prieniku kružnice k a priamky a.

Konštrukcia:

1. p;
2. A; $|A, p| = 3{,}5\ cm$
3. k; $k(A, 3\text{ cm})$
4. a; $a \| p$, $|a, p| = 2{,}5$ cm
5. X; $X \in k \cap a$, $X' \in k \cap a$



Skúška:

Body X a X' sú priesečníkmi priamky a s kružnicou k. Z toho vyplýva:

a) Pretože body X a X ležia na kružnici k, platí $|AX| = |AX'| = 3$ cm.

b) Pretože body X a X' ležia na priamke a, majú od priamky p vzdialenosť 2,5 cm.

Diskusia:

Príklad má dve riešenia, pretože existujú dva priesečníky priamky a a kružnice k, sú nimi body X a X'.

3

PRÍKLAD

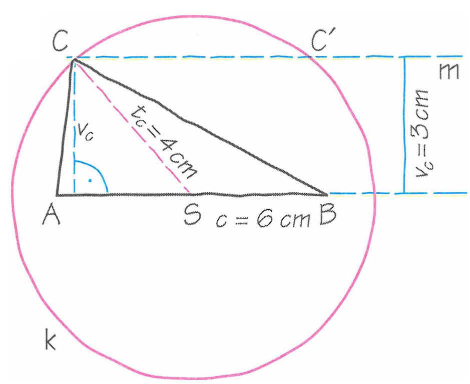
Zostrojte trojuholník ABC, ak poznáte veľkosti strany c, výšky v_c, a ťažnice t_c. Riešte pre $c = 6$ cm, $t_c = 4$ cm, $v_c = 3$ cm.

RIEŠENIE

Rozbor:

$c = 6$ cm
$t_c = 4$ cm
$v_c = 3$ cm

Náčrt:



Úsečku AB vieme zostrojiť, $|AB| = c = 6$ cm

Pre bod C platí:

a) jeho vzdialenosť od priamky AB je $v_c = 3$ cm, to znamená, že leží na priamke $m \| AB$ vo vzdialenosti $v_c = 3$ cm od priamky AB;

b) jeho vzdialenosť od bodu S (stredu strany AB) je $t_c = 4$ cm, a preto leží na kružnici $k(S, 4\text{ cm})$

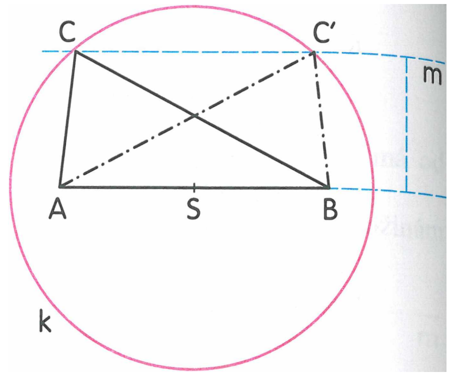
Teda bod C musí spĺňať tieto dve podmienky:

1. leží na priamke $m \| \overleftrightarrow{AB}$, $|m, AB| = v_c = 3$ cm
2. leží na kružnici $k(S, 4\text{ cm})$

Bod C je prienikom priamky m a kružnice k.

Konštrukcia:

1. AB; $|AB| = c = 6$ cm
2. m; $m||\overleftrightarrow{AB}$, $|m, AB| = v_c = 3$ cm.
3. k; $k(S, 4$ cm$)$
4. C; $C \in k \cap m$, $(C' \in k \cap m)$
5. $\triangle ABC$, resp. $\triangle ABC'$.



Skúška:

Body C a C' sú priesečníky priamky m a kružnice k. Preto:

a) body C a C' majú od priamky AB vzdialenosť $v_c = 3$ cm,

b) $|SC| = |SC'| = t_c = 4$ cm

Diskusia:

Trojuholníky ABC a ABC' spĺňajú podmienky príkladu a preto sú jeho riešením. Príklad má dve riešenia, sú to trojuholníky ABC a ABC'.

[4] ***PRÍKLAD***

Zostrojte rovnobežník $ABCD$, ak $|\square\ BAD\backslash = 60°$, $|\square ADB\backslash = 45°$ a veľkosť výšky na stranu AB je 5 cm.

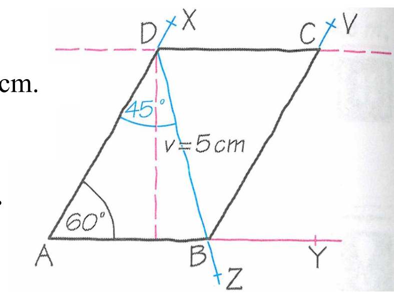
RIEŠENIE

Rozbor: v = 5 cm

$|\square BAD| = 60°$

$|\square\ ADB| = 45°$

Náčrt:

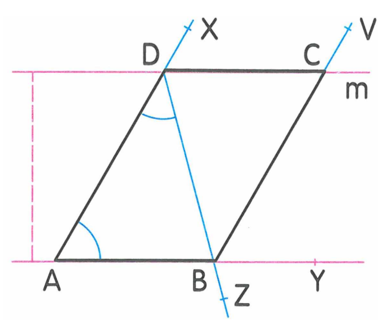


a) Ak si zvolíme polpriamku AY, na ktorej bude ležať vrchol B, potom vrchol D bude ležať na polpriamke AX, pričom $|\square\ XAY| = 60°$.

b) Bod D bude ležať na priamke $m||AY$ pričom vzdialenosť priamky m od priamky AY bude 5 cm, čo je veľkosť výšky na stranu AB.

c) Bod B bude ležať na polpriamke AY a súčasne na polpriamke DZ, pričom $|\square\ ADZ| = 45°$. Teda bude patriť prieniku polpriamok AY a DZ.

d) Bod C bude vrcholom rovnobežníka, ktorý bude priesečníkom priamky m a polpriamky $BV \,||\, AD$.



Konštrukcia:

1. $\overrightarrow{AY}$; ľubovoľne
2. $\overrightarrow{AX}$; $|\sphericalangle\ YAX| = 60°$
3. m; $m||\overrightarrow{AY}$ vo vzdialenosti 5 cm
4. D; $D \in m \cap \overrightarrow{AX}$
5. $\overrightarrow{DZ}$; $|\sphericalangle\ ADZ| = 45°$
6. B; $B \in \overrightarrow{AY} \cap \overrightarrow{DZ}$
7. $\overrightarrow{BV}$; $\overrightarrow{BV}||\overrightarrow{AD}$
8. C; $C \in m \cap \overrightarrow{BV}$
9. $\square ABCD$

Skúška:

Vrchol *D* leží na ramene uhla *BAD,* ktorého veľkosť je 60°. Ďalej bod *D* leží na priamke *m,* ktorej vzdialenosť od priamky *AB* je 5 cm. Bod *B* leží na polpriamke *AY* a na polpriamke *DZ,* ktoré je ramenom uhla s veľkosťou |□ *ADB*| = 45°. Z toho vyplýva, že rovnobežník *ABCD* spĺňa podmienky príkladu.

Diskusia:

Ďalej v trojuholníku *ABD* je súčet daných uhlov menší ako 180°, preto trojuholník *ABD* možno zostrojiť. Teda príklad má jedno riešenie.

5

PRÍKLAD

Daná je priamka *p* a mimo nej body *A* a *B* tak, že *AB* nie je rovnobežná s priamkou *p.* Nájdite na priamke *p* bod *C* tak, aby trojuholník *ABC* bol pravouhlý s pravým uhlom pri vrchole C.

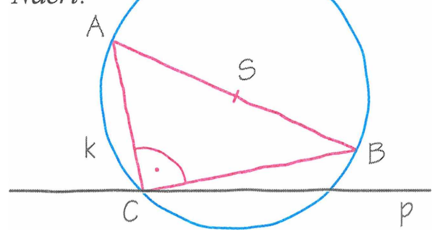
RIEŠENIE

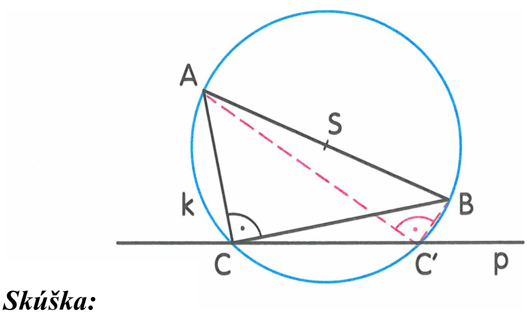
Rozbor:

Ak trojuholník *ABC* má byť pravouhlý s pravým uhlom pri vrchole C, potom bod C musí byť bodom Talesovej kružnice, ktorej priemer je *AB.*

Bod C bude teda prienikom priamky *p* a kružnice *k.*

Náčrt:





Konštrukcia:

1. S; S je stred úsečky AB
2. k; $k(S, r = \frac{1}{2}|AB|)$
3. C; $C \in k \cap p$
4. $\triangle ABC$

Skúška:

Bod C je bodom kružnice *k,* ktorej priemer je úsečka *AB,* preto uhol pri vrchole C je pravý. Trojuholník *ABC* je pravouhlý.

Diskusia:

V príklade sme mali dané polohy bodov *A, B* a priamky *p.* Nie pri každej voľbe bodov *A, B* a priamky *p* musí existovať trojuholník *ABC* (pravouhlý). Riešenie závisí od polohy kružnice *k* a priamky *p.* Môžu nastať tieto prípady:

a) Ak priamka *p* má s kružnicou *k* spoločné dva body C, resp. *C′* t. j. vzdialenosť bodu *S* od priamky *p* je menšia ako polovica |*AB*|, potom môžeme zostrojiť dva pravouhlé trojuholníky *ABC a ABC′.*

b) Ak sa vzdialenosť bodu S od priamky p rovná polovici \AB\, potom sa kružnica k priamky p dotýka v jednom bode, a preto môžeme zostrojiť iba jeden trojuholník ABC.

c) Ak vzdialenosť bodu S od priamky p je väčšia ako polovica \AB\, neexistuje trojuholník ABC daných vlastností, lebo priamka p kružnicu nepretína.

Príklad má najviac dve riešenia.

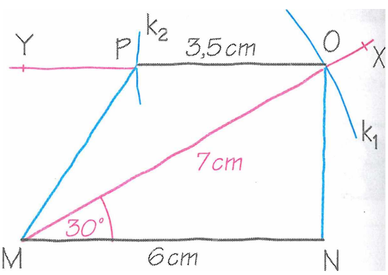
PRÍKLAD

Zostrojte lichobežník $MNOP$ so základňami MN a OP, ak je dané:
$|MN| = 6$ cm, $|OP| = 3{,}5$ cm, $|MO| = 7$ cm, |□ OMN| = 30°.

RIEŠENIE

Rozbor:

Náčrt:

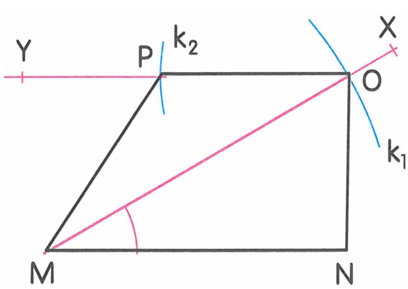


$|MN| = 6$ cm
$|OP| = 3{,}5$ cm
$|MO| = 7$ cm
|□OMN| = 30°

Trojuholník MNO zostrojíme podľa vety *sus.*
Z rovnobežnosti základní MN a OP vyplýva, že bod P leží na polpriamke OY rovnobežnej s priamkou MN, pričom $|OP| = 3{,}5$ cm

Bod P spĺňa tieto podmienky:

1. leží na polpriamke OY,
2. leží na kružnici $k_2(O;$ 3,5 cm)



Konštrukcia:

1. MN; $|MN| = 6$ cm
2. $\overrightarrow{MX}$, $|\sphericalangle NMX| = 30°$
3. k_1; $k_1(M, 7$ cm)
4. O; $O \in k_1 \cap \overrightarrow{MX}$
5. $\overrightarrow{OY}$; $\overrightarrow{OY} \| AB$
6. k_2; k_2 (O; 3,5 cm)
7. P; $P \in k_2 \cap \overrightarrow{OY}$
8. ⏢ $MNOP$

Skúška:

Vykonajú žiaci.

Diskusia:

Z konštrukcie vyplýva, že príklad má jediné riešenie.

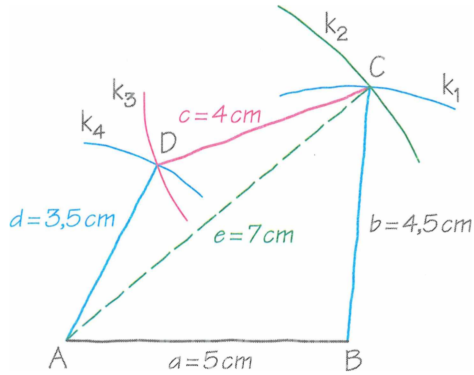
PRÍKLAD

Zostrojte štvoruholník $ABCD$, keď sú dané dĺžky strán $a = 5$ cm, $b = 4{,}5$ cm, $c = 4$ cm, $d = 3{,}5$ cm a dĺžka uhlopriečky AC je $e = 7$ cm.

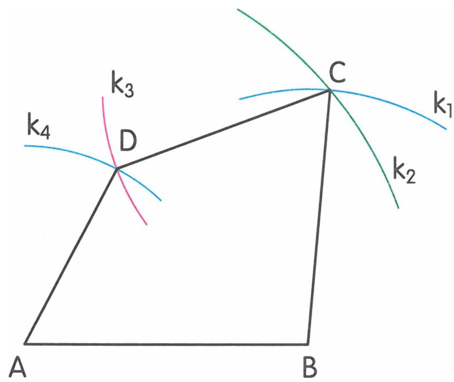
RIEŠENIE

Rozbor: $a = 5$ cm
$b = 4{,}5$ cm
$c = 4$ cm
$d = 3{,}5$ cm
$e = 7$ cm

Náčrt:



Uhlopriečka *AC* rozdelila štvoruholník *ABCD* na dva trojuholníky, Δ *ABC* a Δ *ACD.* Zostrojíme ich postupne. Každý z nich je určený stranami; použijeme vetu *sss*.



Konštrukcia:

1. AB; $|AB| = 5$ cm
2. k_1; $k_1(B;\ 4{,}5 \text{ cm})$
3. k_2; $k_2(A,\ 7 \text{ cm})$
4. C; $C \in k_1 \cap k_2$
5. $\triangle ABC$
6. k_3; $k_3(C,\ 4 \text{ cm})$
7. k_4; $k_4(A;\ 3{,}5 \text{ cm})$
8. D; $D \in k_3 \cap k_4$
9. $\diamond ABCD$

Skúška:

Trojuholník *ABC* možno zostrojiť, lebo dĺžky jeho strán spĺňajú trojuholníkovú nerovnosť.

Bod *C* leží na kružnici $k_1(B;$ 4,5 cm), preto $|BC| = b = 4{,}5$ cm. Bod C leží na kružnici $k_2(A;\ 7$ cm), preto \AC\ = $e = 7$ cm.

Trojuholník *ACD* možno zostrojiť, lebo dĺžky jeho strán spĺňajú trojuholníkovú nerovnosť.

Bod *D* leží na kružnici $k_3(C,$ 4 cm), preto $|CD| = c = 4$ cm. Bod *D* leží aj na kružnici $k_4(A;$ 3,5 cm), preto $|AD| = d = 3{,}5$ cm.

Diskusia:

Zostrojený štvoruholník *ABCD* vyhovuje daným podmienkam.

CVIČENIA

1. Zostrojte pravouhlý trojuholník *ABC,* keď poznáte dĺžku prepony $c = 7$ cm a dĺžku odvesny $a = 4$ cm. Pomenujte množiny bodov, ktoré ste pri riešení použili.

2. Zostrojte pravouhlý trojuholník *ABC* s pravým uhlom pri vrchole C, ak je dané: $|AC| = 4$ cm, |□ *CAB*| = 30°.

3. Zostrojte rovnoramenný trojuholník PQR so základňou PQ, ak: $|PR| = 5$ cm, $|\sphericalangle PQR| = 50°$.
4. V rovnoramennom trojuholníku RST má základňa RT dĺžku 6 cm a k nej príslušná výška $v = 5$ cm. Zostrojte tento trojuholník.
5. Zostrojte štvoruholník ABCD, ak je dané: $|AB| = 4$ cm, $|BC| = 5{,}5$ cm, $|CD| = 5$ cm, $|DA| = 6$ cm, $|\sphericalangle ABC| = 90°$.
6. Zostrojte ľubovoľný rovnoramenný lichobežník EFGH a opíšte mu kružnicu. Ako ste zostrojili jej stred?
7. Zostrojte lichobežník DEFG ($DE \| FG$), ak je dané:
   a) $|DE| = 6{,}4$ cm, $|DF| = 4{,}4$ cm, $|GF| = 2{,}5$ cm, $|\sphericalangle FDE| = 40°$;
   b) $|DE| = 3{,}7$ cm, $|EF| = 4{,}7$ cm, $|GD| = 5{,}4$ cm, $|\sphericalangle DEF| = 118°$.
8. Body A, B sú vzdialené 5 cm. Zostrojte priamku prechádzajúcu bodom A, ktorá je od bodu B vzdialená 3 cm.
9. Zostrojte rovnoramenný lichobežník ABCD, ak $|AB| = 8{,}4$ cm, $v = 3{,}5$ cm a $|\sphericalangle ADB| = 90°$.
10. Zostrojte všetky trojuholníky ABC, ak je dané: $|AC| = b = 5$ cm, $|AB| = c = 4$ cm, $v_c = 3$ cm.
11. Zostrojte rovnobežník MNOP, ak je dané:
    a) $|MN| = 6$ cm, $|MP| = 2{,}8$ cm, $|\sphericalangle PMN| = 112°$
    b) $|MN| = 6$ cm, $|MO| = 5{,}4$ cm, $|NO| = 3$ cm.

7.4 Použitie osovej a stredovej súmernosti pri riešení konštrukčných úloh

Pri riešení niektorých konštrukčných úloh nevystačíme s použitím množín bodov danej vlastnosti. Možno pri nich s výhodou použiť stredovú a osovú súmernosť.

ZOPAKUJME SI

1 ***ÚLOHA***

Daná je priamka *p* a bod *S,* ktorý na nej neleží. Zostrojte obraz *p′* priamky *p* v stredovej súmernosti so stredom v bode *S.*

2 ***ÚLOHA***

Daná je kružnica *k(O, r)* a bod *S,* ktorý nesplýva s bodom *O.* Zostrojte obraz *k′* kružnice *k* v stredovej súmernosti so stredom v bode *S.*

3 ***ÚLOHA***

Daný je trojuholník *ABC* a priamka *o.* Zostrojte obraz *A′B′C′* trojuholníka *ABC* v osovej súmernosti s osou *o.*

ÚLOHA

Daná je kružnica *k(O, r)* a priamka *o*. Zostrojte obraz *k'* kružnice *k* v osovej súmernosti s osou *o*.

Pre stredovú súmernosť platí:

a) Ak je daný v rovine bod *S*, existuje práve jedna stredová súmernosť so stredom *S*.

b) Ak je daná v rovine dvojica rôznych bodov *A*, *B*, existuje práve jedna stredová súmernosť, ktorá zobrazuje *A* —> *B*, *B* —> *A*. Jej stredom je stred úsečky *AB*.

Pre osovú súmernosť platí:

a) Ak je daná priamka *o*, v rovine existuje práva jedna osová súmernosť podľa osi *o*.

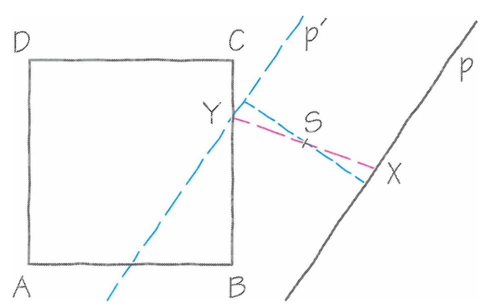
b) Ak sú dané dva rôzne body *A*, *B*, v rovine existuje práve jedna osová súmernosť, ktorá zobrazuje *A* —> *B*, *B* —> *A*, osou súmernosti je os úsečky *AB*.

PRÍKLAD

Daný je štvorec *ABCD*, priamka *p* a bod *S*. Zostrojte úsečku *XY* tak, aby jej stredom bol bod *S* a aby bod *X* ležal na priamke *p*, bod *Y* na hranici štvorca.

RIEŠENIE

Rozbor: *Náčrt:*



V príklade sú dva neznáme body *X a Y*.

Ak by sme poznali bod *X*, ľahko by sme mu priradili bod *Y* ako jeho obraz v súmernosti podľa stredu *S*.

Zrejme, že hľadaný bod *Y* je bodom priamky *p'*, ktorá je obrazom priamky *p* v súmernosti podľa stredu *S*.

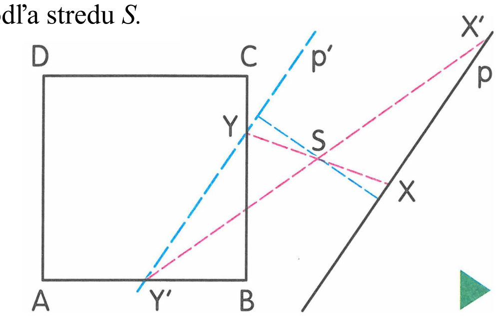
Ak je úsečka *XY* riešením úlohy, potom bod 7 je obrazom bodu *X* v súmernosti podľa stredu *S*, bod *Y* teda leží:

a) na hranici štvorca *ABCD*,

b) na obraze *p'* priamky *p* v súmernosti podľa stredu *S*.

Konštrukcia:

1. *p'*; *p'* je obraz priamky *p* v stredovej súmernosti podľa stredu *S*
2. Y; $Y \in p' \cap ABCD$
3. X; $Y \rightarrow X, X \in p$
4. XY



Skúška:

Bod Y je priesečník hranice štvorca a priamky p'. Jeho vzor leží na priamke p, pričom p a p' sú stredovo súmerné podľa stredu S, teda bod X leží na priamke p. Úsečka XY spĺňa podmienky úlohy.

Diskusia:

V našom príklade existujú dve úsečky spĺňajúce podmienky úlohy. Počet riešení závisí od vzájomnej polohy priamky p' a hranice štvorca.

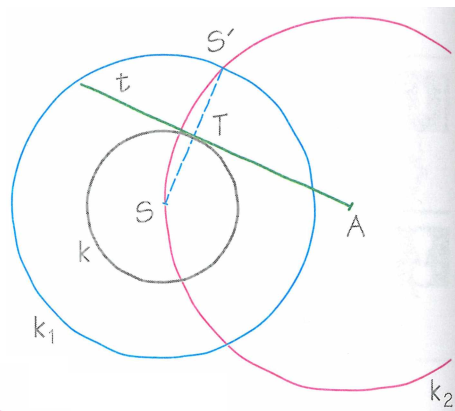
PRÍKLAD

Daná je kružnica $k(S, r)$ a jej vonkajší bod A. Zostrojte bod dotyku kružnice k s jej dotyčnicou prechádzajúcou bodom A bez použitia Talesovej kružnice.

RIEŠENIE

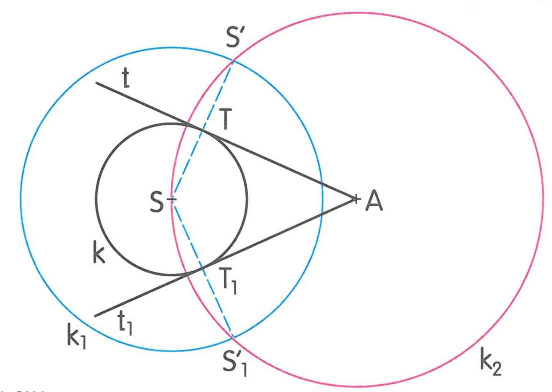
Rozbor:

Náčrt:



Hľadáme bod dotyku T. Ak zostrojíme bod S' ako obraz bodu S v stredovej súmernosti so stredom v bode T, bod S' bude ležať na kružnici $k_1(S, 2r)$. Bod T je stredom súmernosti zobrazujúcej bod S do stredu S'. Bod S' leží

1. na $k_1(S, 2r)$
2. na $k_2(A, |AS|)$



Konštrukcia:

1. $k_1, k_1(S, 2r)$
2. $k_2, k_2(A, |AS|)$
3. S'; $S' \in k_1 \cap k_2$
4. T; $T \in k \cap SS'$
5. t; $t = AT$

Skúška:

Priamka t je určená bodmi A, T, kde T je bod kružnice k. Súčasne je stredom úsečky SS', kde SS' je tetiva kružnice $k_2(A,$ |AS|), preto t □ SS' a teda t □ TS. Z toho vyplýva, že t je dotyčnica kružnice k, ktorá prechádza bodom A.

Diskusia:

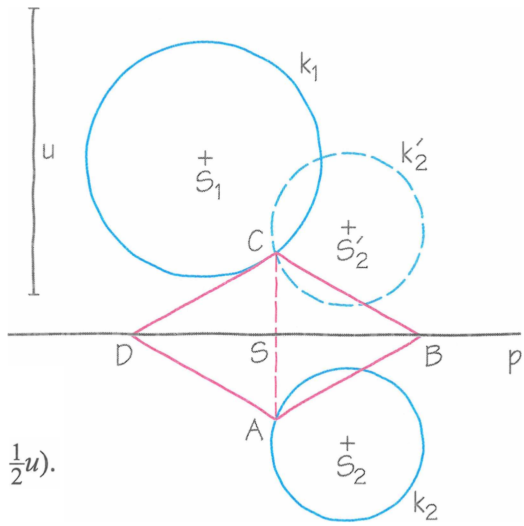
Vzhľadom na to, že bod A je vonkajší bod kružnice k, existujú dve dotyčnice t a t_1. Príkladu vyhovujú dva výsledky.

PRÍKLAD

Daná priamka ***p,*** úsečka ***u*** a dve kružnice $\boldsymbol{k_1(S_1, r_1)}$, $\boldsymbol{k_2(S_2, r_2)}$ oddelené priamkou ***p.*** Zostrojte kosoštvorec ***ABCD,*** ktorého uhlopriečka $|\boldsymbol{BD}| = \boldsymbol{u}$ leží na priamke ***p*** a každý zo zvyšných vrcholov leží na jednej z daných kružníc.

RIEŠENIE

Rozbor: *Náčrt:*

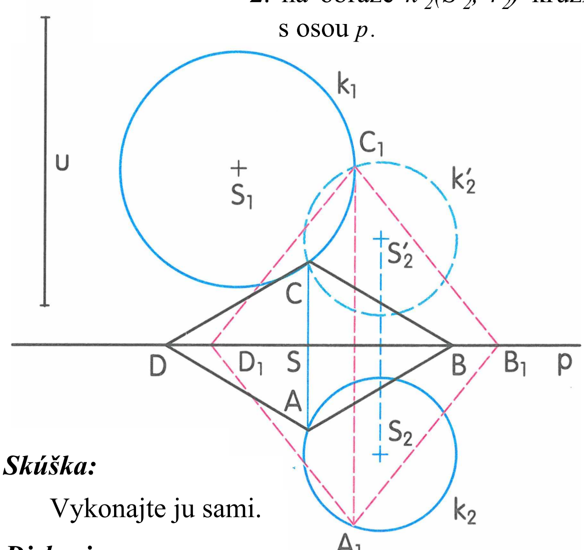


Predpokladáme, že úloha je vyriešená a riešenie je zobrazené na náčrte. Všetky štyri vrcholy kosoštvorca sú neznáme body, ale body *B, D* zostrojíme ľahko, ak budeme poznať bod *S* (stred kosoštvorca). Na zostrojenie bodu *S* potrebujeme úsečku *AC.* Osová súmernosť s osou *p* zobrazuje bod *A* do *C* a C do *A.* Preto bod C leží na obraze $k'_2(S'_2, r_2)$ kružnice k_2 obsahujúcej bod *A.*

Body *B, D* ležia 1. na priamke *p,*
2. na kružnici $k\ (S, \frac{1}{2}u)$.

Bod *S* leží 1. na priamke *p,*
2. na priamke *A C.*

Bod C leží 1. na kružnici $k_1(S_1\ r_1)$,
2. na obraze $k'_2(S'_2, r_2)$ kružnice $k_2(S, r_2)$ v osovej súmernosti s osou *p*.



Konštrukcia:

1. kružnice $k_1(S_1, r_1)$, $k_2(s_2, r_2)$ a priamka *p* sú narysované
2. S'_2; $S_2 \longrightarrow S'_2$
3. k'_2, $k'_2(S'_2, r_2)$
4. C; $C \in k_1 \cap k'_2$
5. A; $C \longrightarrow A$, $A \in k_2$
6. S;$S \in p \cap AC$
1. k;$k(S,\ \frac{1}{2}u)$
8. B, D; $B, D \in k \cap p$
9. $\lozenge\ ABCD$

Skúška:

Vykonajte ju sami.

Diskusia:

Počet riešení závisí od vzájomnej polohy kružníc k_1 a k'_2. Príklad má najviac dve riešenia.

PRÍKLAD

Dané sú dva rôzne body A, B ležiace v jednej z polrovín určených priamkou **p.** Zostrojte bod $X \in p$, pre ktorý je súčet $|AX| + |BX|$ najmenší.

RIEŠENIE

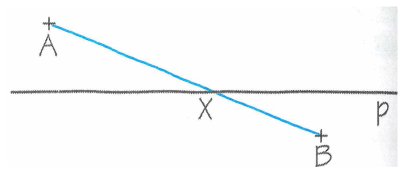
Rozbor:

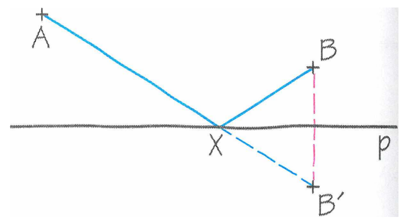
Úsečka je najkratšia spojnica dvoch bodov. Keby body A, B ležali v rôznych polrovinách určených priamkou p, hľadaný bod X by bol priesečník úsečky AB s priamkou p.

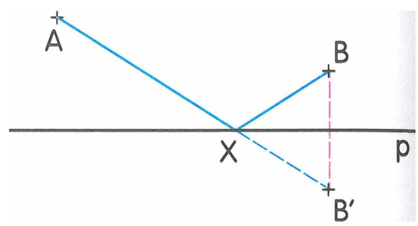
Podľa zadania príkladu však body A, B ležia v jednej z polrovín určených priamkou p. Tento prípad prevedieme na predchádzajúci tým, že k jednému z bodov A, B, napr. k bodu B, zostrojíme bod B' súmerný podľa priamky p. Bod X bude priesečníkom úsečky AB' s priamkou p. V osovej súmernosti s osou v priamke p platí

BX □ $B'X \Rightarrow |BX| = |B'X|$

Náčrt:







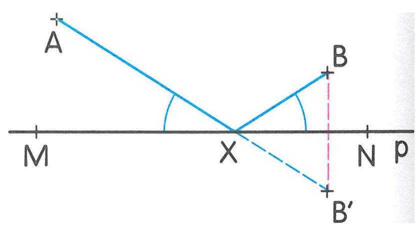
Konštrukcia:

1. B'; $B \rightarrow B'$ (osová súmernosť s osou p)
2. X; $X \in AB' \cap p$

Príklad má jediné riešenie.

ÚLOHA

Predchádzajúci obrázok si doplňte takto:



S využitím osovej súmernosti dokážte, že □AXM = □ BXN.

CVIČENIA

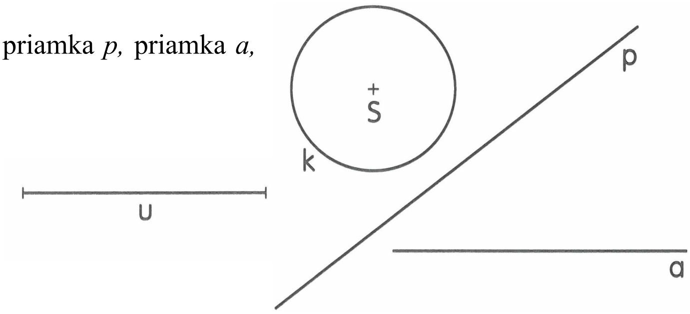
1. Zostrojte trojuholník ABC, v ktorom dĺžka strany c je 6 cm, dĺžka strany b je 5 cm a dĺžka ťažnice t_a je 5 cm.

2. Zostrojte trojuholník ABC, v ktorom poznáte dĺžky všetkých ťažníc (riešte pre $t_a = 6$ cm, $t_b = 4{,}5$ cm, $t_c = 6$ cm).

3. Dané sú dve sústredné kružnice k_1, k_2 so stredom v bode O a bod S na menšej z nich. Zostrojte rovnobežník so stredom S, ktorého vrcholy ležia na daných kružniciach.

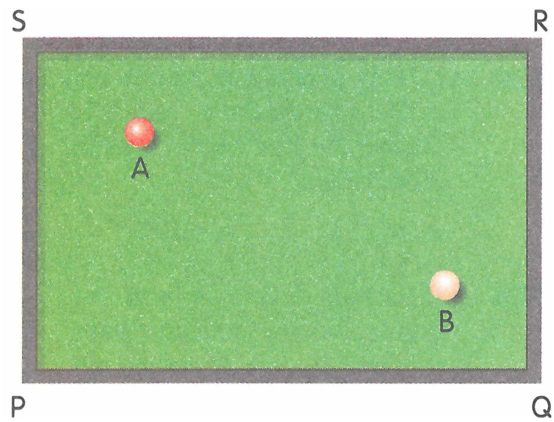
4. Zostrojte rovnoramenný lichobežník, ak sú dané dĺžka základne *a,* dĺžka ramena *b* a uhol α.

5. Daná je kružnica *k,* priamka *p,* priamka *a,* úsečka *u.*



Zostrojte kosoštvorec *ABCD,* ktorého uhlopriečka dĺžky *u* leží na priamke *p,* vrchol C na kružnici *k* a vrchol *A* na priamke *a.*

6. Na biliardovom stole sú dve gule (na obrázku označené písmenami *A, B).* Akým smerom treba udrieť do gule *A,* aby po odraze od mantinelu *PQ* zasiahla guľu *B*? (Použite výsledok úlohy 5).



VYSKÚŠAJTE SA !

1. Nájdite a zostrojte množinu stredov kružníc, ktoré sa dotýkajú dvoch polpriamok *VA, VB.*

2. Nájdite a zostrojte množinu stredov kružníc, ktoré sa dotýkajú dvoch navzájom kolmých priamok *a, b.*

3. Daná je kružnica *k(S,* 3 cm) a priamka *m,* ktorá ju nepretína. Nájdite a zostrojte množinu stredov tetív, ktoré ležia na priamkach rovnobežných s priamkou *m.*

4. Daná je kružnica *k(S, r*) a mimo nej body *A, B.* Zostrojte pravouhlý trojuholník *ABC* s pravým uhlom pri vrchole *C* tak, aby bod *C* ležal na kružnici *k.*

5. Zostrojte obdĺžnik *ABCD,* v ktorom poznáte $|AB| = 7$ cm a $|\sphericalangle BAC| = 30°$.

6. Zostrojte trojuholník *ABC,* v ktorom sú dané: c, β, t_c. (Riešte pre: $c = 6$ cm, $\beta = 45°$, $t_c = 5$ cm).

7. Daná je kružnica $k(S,\ 4\text{ cm})$ a bod A, ktorého vzdialenosť od stredu S je 7 cm. Zostrojte všetky body X, ktoré ležia na kružnici k a ich vzdialenosť od bodu A je 5 cm.

8. Zostrojte trojuholník ABC, ak poznáte veľkosti strany a, výšky v_a a ťažnice t_a. (Riešte pre $a = 7$ cm, $t_a = 6$ cm, $v_a = 4$ cm.)

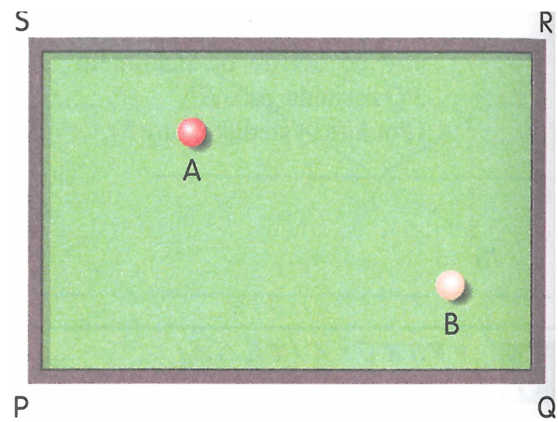
9. Zostrojte lichobežník $ABCD$ so základňami AB a CD, ak je dané: $|AB| = 7$ cm, $|CD| = 4$ cm, $|BD| = 5$ cm, $|\square ABD| = 45°$.

10. Zostrojte všetky trojuholníky ABC, ak je dané $|BC| = a = 5$ cm, $|AC| = b = 6$ cm, $v_c = 4$ cm.

11. Dané sú dve pretínajúce sa kružnice $k_1(S_1,\ r_1 = 4\text{ cm})$, $k_2(S_2,\ r_2 = 5\text{ cm})$. Jedným z ich priesečníkov veďte priamku m tak, aby kružnice k_1, k_2 na nej vyťali zhodné tetivy.

12. Daný je obdĺžnik $ABCD$, bod S neležiaci na stranách obdĺžnika a priamka p. Zostrojte úsečku XY tak, aby jej stredom bol bod S a aby bod X ležal na priamke p, bod Y na hranici daného obdĺžnika.

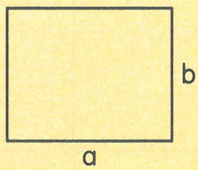
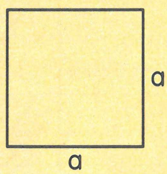
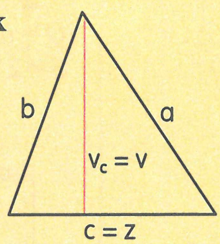
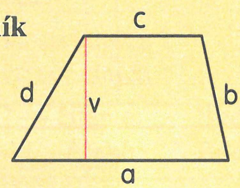
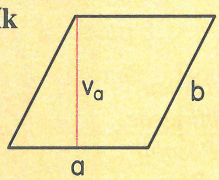
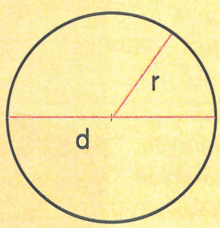
13. Na biliardovom stole sú dve gule. Akým smerom treba udrieť do gule A, aby po odraze od mantinelu PS a potom od mantinelu PQ zasiahla guľu B.



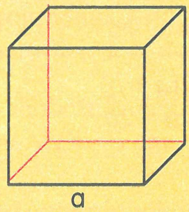
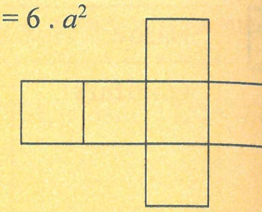
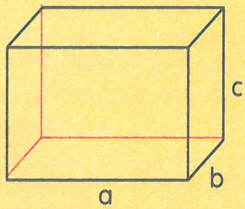
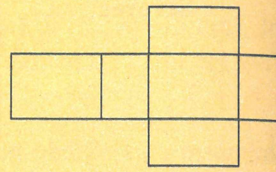
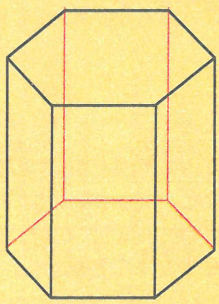
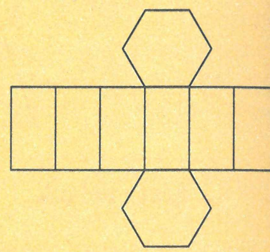
Geometria je akýmsi koníčkom, ktorého nám dala príroda; aby nás potešoval a zabával v temnotách. ***d'Alembert***

Prehľad vzorcov používaných v geometrii

1. Obvody a obsahy

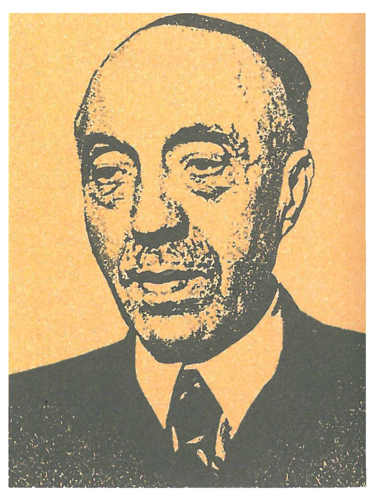
Názov	Obvod	Obsah
Obdĺžnik 	$o = 2(a + b)$ $o = 2a + 2b$	$S = a \,.\, b$
Štvorec 	$o = 4a$	$S = a \,.\, a$ $S = a^2$
Trojuholník 	$o = a + b + c$	$S = \frac{1}{2}z \,.\, v$ $S = \frac{1}{2}c \,.\, v_c$ $S = \frac{1}{2}a \,.\, v_a$ $S = \frac{1}{2}b \,.\, v_b$
Lichobežník 	$o = a + b + c + d$	$S = \frac{1}{2}(a + c) \,.\, v$
Rovnobežník 	$o = 2(a + b)$	$S = a \,.\, v_a$
Kruh 	$o = 2\pi r$ $o = \pi d$	$S = \pi r^2$

2. Objemy a povrchy

Názov	Objem	Povrch
Kocka 	$V = a \,.\, a \,.\, a$ $V = a^3$	$S = 6 \,.\, a^2$ 
Kváder 	$V = a \,.\, b \,.\, c$	$S = 2(ab + bc + ac)$ 
Hranol 	$V = S_p \,.\, v$	$Q = o \,.\, v$ (obsah plášťa) $S = 2 \,.\, S_p + Q$ 

Jur Hronec

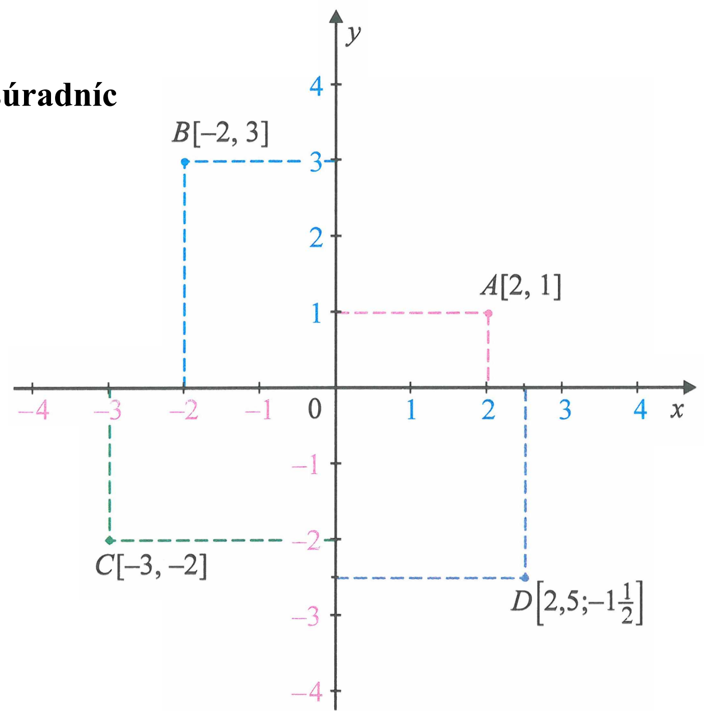
(17. 5. 1881 až 1. 12. 1959)



Slovenský matematik. Pôsobil ako profesor na lýceu v Kežmarku. Študijné pobyty absolvoval **v** *Göttingene, Berlíne***,** *Giessene, vo Švajčiarsku a* **v** *Paríži. Pôsobil ako profesor matematiky na českej technike v Brne. Bol rektorom Vysokej školy technickej* **v** *Košiciach, zakladal Prírodovedeckú i Pedagogickú fakultu Univerzity Komenského* **v** *Bratislave.*
Zaslúžil sa aj o vznik Slovenskej akadémie vied. Dosiahol významné výsledky v odbore diferenciálnych rovníc. Napísal niekoľko základných vysokoškolských učebníc. Bol čestným členom Jednoty československých matematikov a fyzikov.

8 FUNKCIE

8.1 Pravouhlá sústava súradníc v rovine



Bod 0 — začiatok
x — x-ová os
y — y-ová os

V rovine sme zaviedli pravouhlú sústavu súradníc.

Bod *A* má x-ovú súradnicu 2
y-ovú súradnicu 1

Píšeme A[2, 1] — čítame: Bod *A* je daný usporiadanou dvojicou čísel 2 a 1.
Alebo: Bod *A* má súradnice 2 a 1.

Bod *B* má x-ovú súradnicu -2
y-ovú súradnicu 3

Píšeme B[-2, 3] — čítame: Bod *B* je daný usporiadanou dvojicou čísel -2 a 3.
Bod *B* má súradnice -2 a 3.

Bod *C* má x-ovú súradnicu -3
y-ovú súradnicu -2

Píšeme C[- 3, -2] — čítame: Bod C je daný usporiadanou dvojicou čísel -3 a -2.
Bod C má súradnice -3 a -2.

Bod *D* má x-ovú súradnicu 2,5
y-ovú súradnicu $-1\frac{1}{2}$

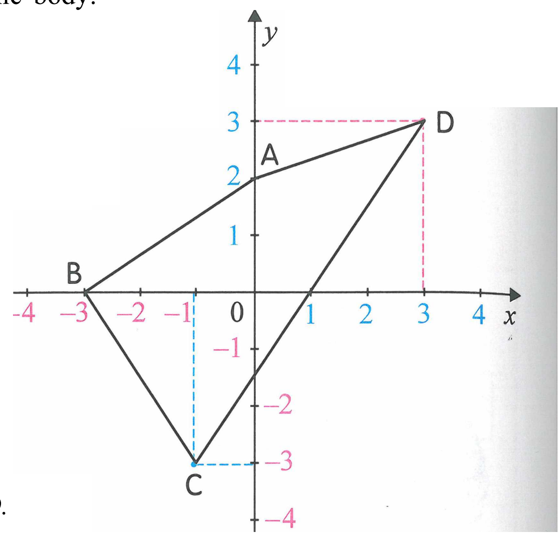
Píšeme $D\left[2{,}5; -1\frac{1}{2}\right]$ — čítame: Bod *D* je daný usporiadanou dvojicou čísel 2,5 a $-1\frac{1}{2}$.
Bod D má súradnice 2,5 a $-1\frac{1}{2}$.

PRÍKLAD

Vyznačte v pravouhlej sústave súradníc body:
A[0,2]; B[-3,0]; C[-1,-3]; D[3,3].
Aký útvar vznikol?

RIEŠENIE

Ivana zoberie pravítko a rysuje:



Odpoveď: Vznikol štvoruholník *ABCD.*

ÚLOHA

Znázornite body
A[2,3], B[-2,4], C[-3,-2], D[2, -1], E[0,5], F[4,0], $G\left[3\frac{1}{2},-3\frac{1}{2}\right]$
v pravouhlej sústave súradníc.

ÚLOHA

V pravouhlej sústave súradníc vyznačte body A[3,2], B[-2,-1], C[0,0], D[2,-2]. Narysujte priamky *AB* a *CD*. Akú vzájomnú polohu majú tieto priamky?

CVIČENIA

1. V pravouhlej sústave súradníc vyznačte body:
   $K\left[-2,-\frac{1}{2}\right], L\left[0,\frac{1}{2}\right], M\left[2,-\frac{1}{2}\right], N\left[0,-1\frac{1}{2}\right]$.
   Zostrojte geometrický útvar *KNML.* Čo platí o uhlopriečke *LN?*
2. V rovine vyznačte $A\left[-\frac{1}{2},1\right]$ a $B\left[\frac{1}{2},-1\right]$. Zostrojte úsečku ***AB.***
   Aké súradnice má stred úsečky?
3. Narysujte Δ *ABC,* ak *A*[2, 2], *B*[-3, -3] a C[l, -3]. Odmerajte veľkosť strany *BC.*

8.2 Graf priamej a nepriamej úmernosti

PRÍKLAD

Stroj na výrobu kľúčov vyrobí za 1 minútu 15 kľúčov. Koľko kľúčov vyrobí stroj za 2; 3;...; 10 minút?

RIEŠENIE

Zostavme tabuľku závislosti počtu vyrobených kľúčov od času. Čas si označíme premennou x, počet kľúčov premennou y:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150
$\frac{y}{x}$	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15

Zodpovedajúce hodnoty sú uvedené pod sebou.

Napríklad: [4, 60] znamená, že za 4 minúty stroj vyrobí 60 kľúčov.

[8, 120] znamená, že na výrobu 120 kľúčov potrebuje stroj 8 minút.

Všimnite si: Čas sa zväčšil 2-krát, aj počet vyrobených kľúčov je 2-krát väčší.

Počet minút a množstvo vyrobených kľúčov sú priamo úmerné veličiny.

Sledujte tabuľku: Pre všetky usporiadané dvojice $[x,\ y]$ platí:

$$y : x = 15$$

koeficient priamej úmernosti
- označujeme ho k

V našom prípade pre všetky usporiadané dvojice platí:

$$y = 15 . x$$

Rovnica priamej úmernosti

Všeobecne platí: $y = k.x,\ k > 0,\ x > 0$

PRÍKLAD

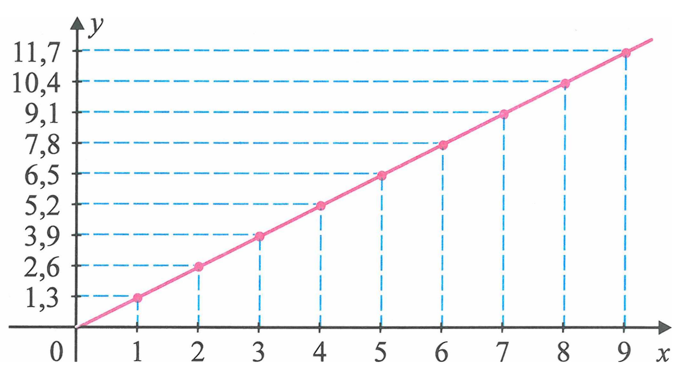
Zostavte tabuľku priamej úmernosti pre y = 1,3x a zostrojte jej graf pre

a) x ϵ {1,2, ..., 9} b) x ϵ {3, 4, 5, 6, 7}

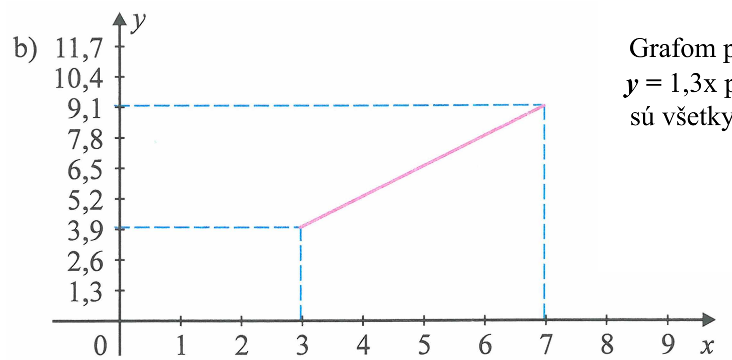
RIEŠENIE

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	1,3	2,6	3,9	5,2	6,5	7,8	9,1	10,4	11,7

a)



Grafom priamej úmernosti $y = 1,3x$ pre x ϵ {1,2, ...,9} sú body ležiace na priamke. (Je ich 9.)



Grafom priamej úmernosti $\boldsymbol{y} = 1{,}3x$ pre $x \in \{3, 4, 5, 6, 7\}$ sú všetky body úsečky.

3 *PRÍKLAD*

Zapíšte rovnicu priamej úmernosti, ak graf prechádza bodom A [5, 8].

! *RIEŠENIE*

Peter hovorí: Z usporiadanej dvojice čísel [5, 8] vyplýva, že $y = 8$ a $x = 5$.

Potom platí: $y = k \cdot x$

$8 = k \cdot 5$

$k = 8:5$

$k = 1{,}6$ *Odpoveď:* Rovnica priamej úmernosti je: $y = 1{,}6x$.

1 *ÚLOHA*

Priama úmernosť je daná tabuľkou:

x	3	4	5
y	$\frac{1}{2}$		

Zapíšte rovnicu priamej úmernosti, doplňte tabuľku a zostrojte graf.

2 *ÚLOHA*

Za ubytovanie štvorčlennej rodiny pri mori zaplatíme za 7 dní 8 400 Sk. Koľko korún zaplatíme za ubytovanie päťčlennej rodiny, ktorá bude na dovolenke pri mori 10 dní?

4 *PRÍKLAD*

Traja maliari vymaľujú budovu za 120 hodín. Koľko hodín by maľovalo budovu 1, 2, 4, 5, 6 maliarov?

RIEŠENIE

Zostavme si tabuľku závislosti počtu maliarov a počtu hodín. Vieme, že veličiny sú nepriamo úmerné. Označme počet maliarov premennou x a dĺžku času premennou ***y*.**

Zodpovedajúce hodnoty sú uvedené pod sebou.

x	1	2	3	4	5	6
$\boldsymbol{y}$	360	180	120	90	72	60
$\boldsymbol{x \cdot y}$	360	360	360	360	360	360

Napríklad:

[2, 180] znamená, že 2 maliari potrebujú na vymaľovanie budovy 180 hodín.

[6, 60] znamená, že na vymaľovanie budovy za 60 hodín treba 6 maliarov.

Všimnite si: Počet maliarov sa zväčšil 3-násobne, čas sa 3-násobne zmenšil.

Sledujte tabuľku:

Všimnite si súčin $\boldsymbol{x \cdot y}$ všetkých usporiadaných dvojíc. Pre všetky usporiadané dvojice ***[x,y]*** platí. $\boldsymbol{x \cdot y} = 360 \leftarrow$ koeficient nepriamej úmernosti

- označujeme ho k

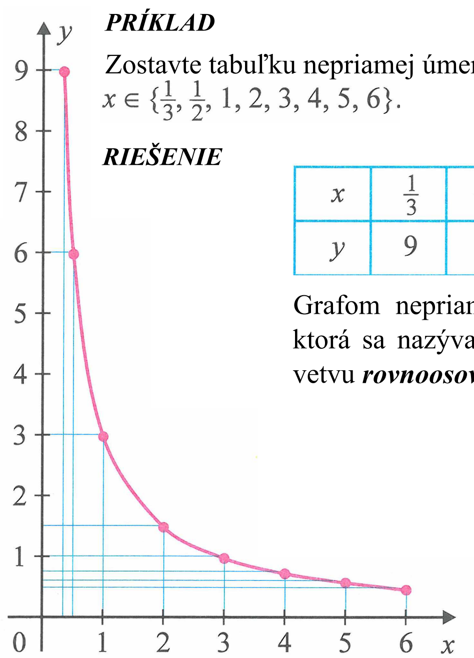
V našom prípade pre všetky usporiadané dvojice platí:

$$y = \frac{\boxed{360}}{x}$$

Počet maliarov a počet hodín sú veličiny nepriamo úmerné.

Rovnica nepriamej úmernosti

Všeobecne platí: $y = \frac{k}{x}, \quad k > 0, x > 0$



PRÍKLAD

Zostavte tabuľku nepriamej úmernosti a $y = \frac{3}{x}$ zostrojte jej graf pre $x \in \{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

RIEŠENIE

x	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	5	6
y	9	6	3	$1\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{2}$

Grafom nepriamej úmernosti sú body ležiace na krivke, ktorá sa nazýva hyperbola. V našom príklade ide o jednu vetvu ***rovnoosovej hyperboly.***

PRÍKLAD

[6]

Určte koeficient nepriamej úmernosti, ktorá obsahuje usporiadanú dvojicu [2, 3], Zapíšte jej rovnicu a zostavte tabuľku nepriamej úmernosti pre $\boldsymbol{x} \in \{1,3,4\}$.

RIEŠENIE

Ivan zapisuje: Ak $\boldsymbol{y} = 3$ a $\boldsymbol{x = 2}$ a ide o nepriamu úmernosť, potom platí: $y = \frac{k}{2}$.

$3 = \frac{k}{2}$

$k = 6$ ***Odpoveď:*** Rovnica nepriamej úmernosti je $y = \frac{6}{x}$.

Tabuľka:

x	1	3	4
y	**6**	2	1,5

ÚLOHA

3

Zostrojte graf nepriamej úmernosti danej rovnicou $y = \frac{0,5}{x}$ ak x je ľubovoľné kladné číslo.

ÚLOHA

4

Určte koeficient nepriamej úmernosti, ak graf prechádza bodom ***E [2;*** 3,5].

ÚLOHA

5

Ktorý z bodov neleží na grafe nepriamej úmernosti:

A[0,2; 5], $B\left[4, \frac{1}{4}\right]$ C[0,125;8], D[0,5;4]?

C V I Č E N I A

1. Určte, ktorá z daných rovníc nie je rovnicou priamej úmernosti:

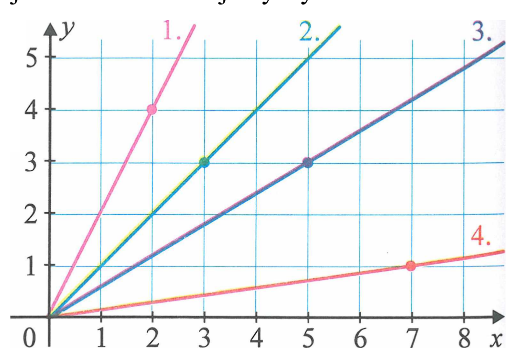
   a) $y = 3x$ b) $y = x$ c) $y = \frac{1}{2}x$ d) $y = \frac{7}{x}$ e) $y = \frac{x}{4}$

2. Zapíšte rovnicu priamej úmernosti, ktorá prechádza bodom A [3; 12,6] a doplňte súradnice bodov ležiacich na grafe priamej úmernosti: B [x; 16,8], $C[5, y]$.

3. Ktorý z bodov neleží na grafe priamej úmernosti určenej zvyšnými dvoma?

   $X[2, 8]$ 7[3, 12] Z[3; 15] ?

4. Zistite z obrázka koeficienty a zapíšte rovnice priamych úmerností:

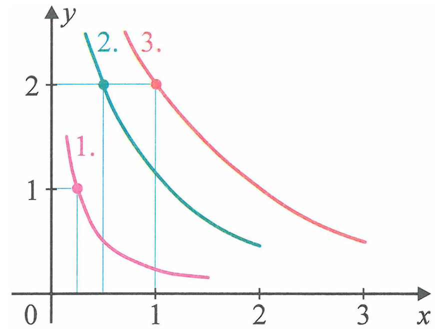


5. Ktorá z daných rovníc nie je rovnicou nepriamej úmernosti:

   a) $y = \frac{2}{x}$ b) $y = \frac{\frac{3}{4}}{x}$ c) $y = \frac{2}{\frac{x}{5}}$ d) $\frac{0,8}{x} = y$ e) $y = \frac{x}{5}$

6. Zistite, či bod $A[0{,}03;\ 40]$ leží na grafe nepriamej úmernosti danej rovnicou $y = \frac{1{,}2}{x}$ a zvoľte aspoň 3 ľubovoľné body patriace grafu.

7. Napíšte rovnice nepriamych úmerností, ktorých grafy sú na obrázku:



Funkčná závislosť medzi veličinami

PROBLÉM

V cisterne vysokej 12 metrov je hladina vody 2 m vysoká. Čerpadlom, ktorým za 1 hodinu stúpne voda o 1 meter máme naplniť cisternu. Ako opíšeme výšku vody v cisterne vzhľadom na čas?

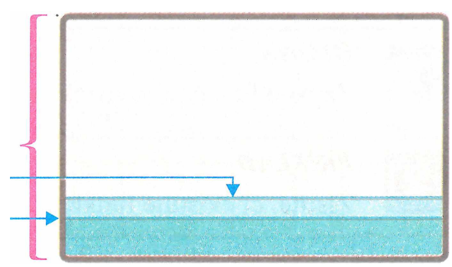
RIEŠENIE

Označme premennou x čas práce čerpadla v hodinách a premennou $\boldsymbol{y}$ výšku hladiny vody v cisterne v metroch. Znázorníme si problém obrázkom:

12 m - výška cisterny

za 1 hodinu stúpne hladina o 1 m

na začiatku bola výška 2 m



Zostavíme tabuľku:

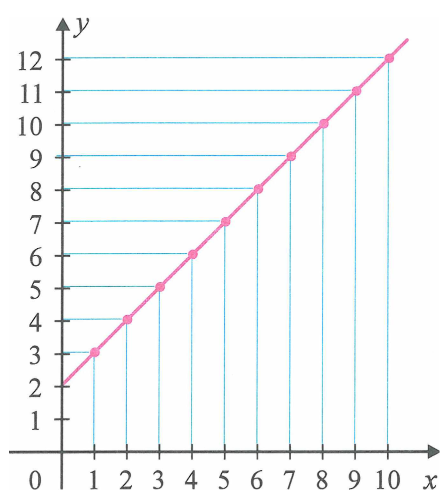
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	2 + 0	2 + 1	2+2	2 + 3	2 + 4	2 + 5	2 + 6	2 + 7	2 + 8	2 + 9	2 + 10

Z tabuľky vidíme, že závislosť medzi y a x môžeme zapísať takto:

$y = 2 + x$, pritom $0 \leq x \leq 10$ (viete prečo?)

Hovoríme, že medzi veličinami x a y je funkčná závislosť.

Pomocou grafu znázorníme funkčnú závislosť medzi veličinami $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$.



PRÍKLAD 1

Automobil idúci priemernou rýchlosťou v, prejde cestu dlhú 137,5 kilometrov za $2\frac{1}{2}$ hodiny. Vypočítajte:

a) Rýchlosť v automobilu.
b) Koľko km by prešiel za 4 hodiny?
c) Aký čas by bol na ceste dlhej 165 km pri rovnakej rýchlosti?

RIEŠENIE

Peter hovorí:

a) Zo vzorca pre výpočet dráhy $s = v \cdot t$ vieme vypočítať rýchlosť:

$s = v \cdot t$

$v = \frac{s}{t}$

$v = \frac{137{,}5}{2{,}5}$

$\underline{v = 55}$

$v = 55\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$

b) $s = v \cdot t$

$s = 55 \cdot 4$

$\underline{s = 220}$

$s = 220$ km

c) $s = v \cdot t$

$t = \frac{s}{v}$

$t = \frac{165}{55}$

$\underline{t = 3}$

$t = 3$h

Odpoveď:

a) Rýchlosť automobilu je 55 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.
b) Automobil by za 4 hodiny prešiel 220 km.
c) Automobil by bol na ceste 3 hodiny.

ÚLOHA 1

Zapíšte funkčnú závislosť veličín v príklade 1.

PRÍKLAD 2

Zistite, či existuje funkčná závislosť medzi premennými ***x*** a ***y*** danými tabuľkou:

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	-2	-1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{7}$	$-\frac{1}{4}$

RIEŠENIE

Janka navrhuje: Ak násobíme odpovedajúce premenné $x \cdot y$, súčin všetkých usporiadaných dvojíc sa rovná -2.

$x \cdot y = -2$, potom platí $y = -\frac{2}{x}$

Odpoveď: Rovnica $y = -\frac{2}{x}$ je rovnicou funkčnej závislosti medzi premennými x a y.

ÚLOHA 2

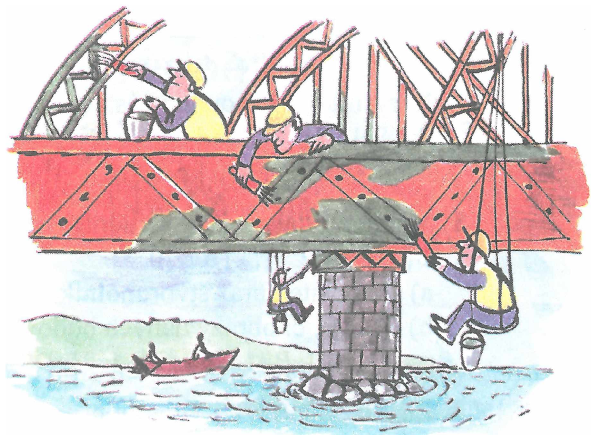
Zadaj tabuľkou usporiadané dvojice [x, y], ktoré budú funkčne závislé.

CVIČENIA

1. Pri tapetovaní izby sme použili 135 m tapety, ktorá má šírku 40 cm. Rovnako veľkú druhú izbu budeme tapetovať tapetou, ktorá má šírku 60 cm. Koľko m tapety budeme potrebovať?

2. Za 20 litrov benzínu sme zaplatili 682 Sk. Koľko litrov benzínu kúpime za 1 500 Sk?

3. Štyria maliari natrú most za 1 hodinu a 36 minút. Koľko maliarov by ešte muselo pribudnúť, aby každý maliar pracoval na moste o 8 minút menej?



4. Zásoby jedla postačia pre 18 skautov na 35 dní. Štyria však do tábora nenastúpili. O koľko dní by si ostatní mohli predĺžiť pobyt v tábore.

5. Určte, či v tabuľke existuje funkčná závislosť medzi danými veličinami Utvorte slovnú úlohu tak, aby tabuľka znázorňovala jej riešenie.

a)

x	1,2	2,4	3,6	4,8	6	7,2	8,4
y	2	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{7}$

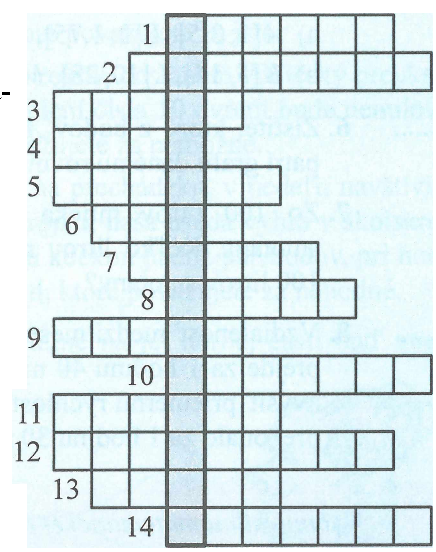
b)

x	$\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{2}$	3	$3\frac{1}{2}$	4
y	10	30	40	50	60	70	80

c)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-2	-1	0	1	2	3	3

6. Krížovka s tajničkou



1. Výsledok delenia
2. Množina bodov, ktoré majú rovnakú vzdialenosť od jedného bodu
3. Výsledok násobenia
4. 1000 kg
5. Časť z celku
6. 0,001 kg
7. Výsledok sčítania
8. 10 dm
9. 0,01 hl
10. Výsledok odčítania
11. Teleso s dvoma podstavami tvaru n-uholníka
12. 1000 m
13. Súčin veľkostí strán obdĺžnika
14. Úsečka spájajúca vrchol a stred protiľahlej strany trojuholníka.

VYSKÚŠAJTE *SA !*

1. Narysujte v pravouhlej sústave súradníc v rovine kružnicu k so stredom v bode S[1, 2], ak bod A[-2, 2] leží na kružnici. Napíšte súradnice ďalšieho ľubovoľného bodu kružnice k.

2. V pravouhlej sústave súradníc v rovine je daný štvoruholník bodmi A [-2,0] B[-1, -3], C[1, 2] a D[0, 3].
   a) Zostrojte obraz štvoruholníka $ABCD$ v osovej súmernosti podľa osi y.
   b) Zistite, či obrazy daných bodov majú tieto súradnice:
   A'[2,0], B'[1,-3], C'[-1,2], D'[3,0],

3. Zistite, či tabuľka vyjadruje priamu alebo nepriamu úmernosť, ak áno, doplňte ju.

a)

x	8	16	24	30	40	60
y		20				$5\frac{1}{3}$

b)

x	3	4	5	6	7	8
y	12			24		

c)

x	10	12	14	16	18	20
y	5			7		

4. Zostrojte grafy funkcií:
   a) $y = 4x$ b) $y = \frac{2}{5}x$ c) $y = \frac{6}{x}$ d) $y = \frac{0,5}{x}$

5. Ktorý z bodov nepatrí grafu úmernosti, určenej zvyšnými bodmi? O akú úmernosť ide?
   a) A[1; 3,5], B[2; 1,75], C[10; 0,35], $D\left[\frac{1}{2}, 7\right]$, $E\left[\frac{1}{3}, \frac{7}{10}\right]$;
   b) K[5,14], L[10,28], M[2; 5,6], N[1,2], O[0,5; 1,4],

6. Zistite, ktorý z bodov A[3, 1], B[30, 100], C[100, 30], $D\left[50, \frac{1}{2}\right]$, E[12, 10] patrí grafu danému rovnicou: $y = 0,3\,x$.

7. Zo 100 litrov mlieka sa vyrobí 12,5 litrov smotany. Koľko litrov mlieka treba na výrobu 100 litrov smotany?

8. Vzdialenosť medzi mestami je 150 km a auto ju prejde za 1 hodinu 40 minút. O koľko km musí zvýšiť priemernú rýchlosť, aby túto vzdialenosť prekonalo za 1 hodinu 30 minút?

Hybnou silou matematickej tvorivosti nie je usudzovanie; ale predstavivosť.

A. de Morgan

KOMBINATORIKA A PRAVDEPODOBNOSŤ

Náhodné pokusy

PROBLÉM

Okolo nás sa denno-denne odohrávajú rôzne **udalosti.** Napríklad, každý deň vychádza a zapadá Slnko, voda sa po zohriatí mení na paru, predmety padajú smerom k zemi, Peter v sobotu asi pôjde na prechádzku, magnet priťahuje železné predmety, v nedeľu navštívim priateľa, pred tým ako dovŕšim 14 rokov, dostanem vodičský preukaz, Martin dnes dostane z matematiky trojku, po pondelku nasleduje utorok, pri hode hracou kockou padne 8 bodov, naša trieda vyhrá v školskom kole matematickej olympiády, pri hode hracou kockou padne 5 bodov, pri delení čísla 10 dvomi bude nenulový zvyšok, pri hode mincou padne znak.

Rozdeľte tieto udalosti na **isté udalosti,** t. j. také, ktoré zo známych zákonov a príčin vždy nastanú, na **nemožné udalosti,** t.j. také, ktoré zo známych dôvodov a príčin nemôžu nastať, a na **náhodné udalosti,** o ktorých môžeme len s menšou alebo väčšou istotou predpokladať, že nastanú.

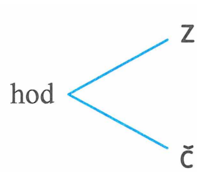
RIEŠENIE

Isté udalosti: východ a západ Slnka, zmena vody pri zohrievaní na paru, padanie predmetov smerom k zemi, magnet priťahuje železné predmety, po pondelku nasleduje utorok. Uveďte aj vy také udalosti, ktoré považujete za isté.

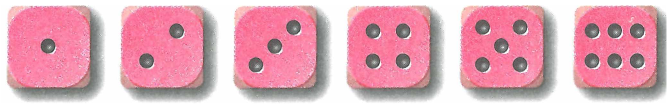
Nemožné udalosti: pred tým ako dovŕšim 14 rokov, dostanem vodičský preukaz, pri hode hracou kockou padne 8 bodov, pri delení čísla 10 dvomi bude nenulový zvyšok. Uveďte aj vy také udalosti, ktoré považujete za nemožné.

Náhodné udalosti: Peter v sobotu asi pôjde na prechádzku, v nedeľu navštívim priateľa, Martin dnes dostane z matematiky trojku, naša trieda vyhrá v školskom kole matematickej olympiády, pri hode hracou kockou padne päť bodov, pri hode mincou padne znak. Uveďte aj vy také udalosti, ktoré považujete za náhodné.

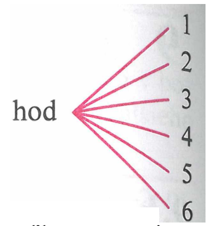
Ak hodíme mincou na pevnú podložku, uvidíme na jej hornej časti buď **znak** (štátny znak, skratka **z),** alebo **číslo (č).**



Ak hodíme kockou, uvidíme na hornej stene kocky 1, 2, 3, 4, 5 alebo 6 bodov.



1 2 3 4 5 6



Hod mincou alebo mincami, kockou alebo kockami, vytiahnutie guľky z neprehľadného vrecúška atď., nazývame **náhodným pokusom (experimentom).** Výsledok náhodného pokusu, napríklad „padol znak“, „padli 2 body“, nazývame **náhodnou udalosťou.** Všetky možné náhodné udalosti pri hode kockou sú, že padlo 1, 2, 3, 4, 5, 6 bodov, pri hode mincou padnutie znaku alebo čísla.

ÚLOHA

Uveďte aspoň tri náhodné udalosti, ktoré môžu nastať pri náhodnom pokuse - hode jednou hracou kockou.

PRÍKLAD

Hoďte hracou kockou 30-krát a výsledky zaznamenajte.

RIEŠENIE

Jedna z možností zaznamenania výsledkov pri hode hracou kockou je, že sa výsledky jednotlivých hodov sa zapíšu do číselného radu tak, ako sme ich pri jednotlivých hodoch dostali:

3, 5, 1, 6, 1, 3, 4, 3, 1, 1, 6, 4, 5, 6, 1, 4, 2, 1, 4, 6, 4, 1, 3, 2, 1, 5, 1, 3, 5, 4

Iný spôsob záznamu výsledkov hodu kockou je, že výsledok hodu zaznamenáme šikmou čiarkou, takzvanou **sčítacou čiarkou** do vopred pripravenej tabuľky pri príslušnom počte bodov (čísle).

Skôr ako začneme zaznamenávať do vopred pripravenej tabuľky výsledky jednotlivých hodov, vysvetlíme spôsob zaznamenávania jednotlivých hodov do tabuľky sčítacími čiarkami:

// → 2 //// → 4 ~~////~~ → 5

Ako vidieť, 5 jednotiek neznázorňujeme piatimi šikmými čiarkami, ale štyrmi šikmými čiarkami a jednou priečnou čiarkou, ktorá spája štyri šikmé a sama označuje piatu jednotku. Takýto spôsob záznamu je prehľadnejší a ľahšie sa dá sčítať počet sčítacích čiarok. Tak napr. čísla 7 a 11 sú zaznamenané takto:

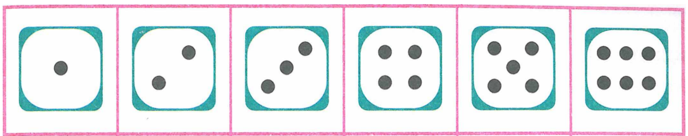
~~////~~ // → 7 ~~////~~ ~~////~~ / → 11

Jedna z možností, ako vytvoriť tabuľku je táto:

Výsledok hodu (body)	Záznam	Vyjadrenie hodu číslom
1	~~////~~ ////	9
2	//	2
3	~~////~~	5
4	~~////~~ /	6
5	////	4
6	////	4

Z takto zostavenej tabuľky získame lepší prehľad o tom, aký počet bodov padol najčastejšie, a aký najmenej krát.

Prehľadná tabuľka môže vyzerať aj takto:



~~////~~ ////	//	~~////~~	~~////~~ /	////	////
9	2	5	6	4	4

Z každého záznamu môžeme zistiť, že jeden bod (jednotka) padol 9-krát, 2 body (dvojka) 2-krát, 3 body (trojka) 5-krát, 4 body (štvorka) 6-krát, 5 bodov (päťka) 4-krát, 6 bodov (šestka) 4-krát.

CVIČENIA

1. Zapíšte do zošita 5 istých udalostí.
2. Zapíšte do zošita 5 nemožných udalostí.
3. Zapíšte do zošita 5 náhodných udalostí.
4. Do nepriehľadného vrecúška vložte kartičky s číslami 1, 2, 3, 4, 5. Z vrecúška vytiahnite jednu kartičku, zaznamenajte výsledok ťahu, kartičku vložte naspäť a pokračujte v ťahoch. Vytvorte vhodnú tabuľku, zaznamenajte do nej výsledky 50 ťahov sčítacími čiarkami a číslom.
5. Hoďte 30-krát mincou. Výsledky jednotlivých hodov zaznamenajte do vhodne zvolenej tabuľky.
6. Hádžeme jednou hracou kockou. Z uvedených udalostí:
   - *padol počet bodov 4,*
   - *padol počet bodov menší ako 3,*
   - *padol počet bodov väčší ako jedna ale menší ako 5,*
   - *padol párny počet bodov,*
   - *padol počet bodov menší ako 8,*
   - *padol počet bodov väčší ako 7,*
   - *padol počet bodov 10,*
   - *padol počet bodov väčší ako 0,*

   zapíšte do svojho zošita tie udalosti, ktoré sú:
   - isté,
   - nemožné,
   - náhodné.

9.2 Relatívna početnosť udalosti a jej výpočet

1 ***ÚLOHA***

Hoďte hracou kockou 20-krát. Výsledky hodov zaznamenajte do vami vytvorenej tabuľky.

Peter doma pokračoval v hádzaní hracou kockou. Vytvoril si takú tabuľku, ktorej prvý riadok obsahuje počty 10, 20, 30, ..., 80 hodov. V 2. riadku tabuľky uviedol, koľkokrát nastane udalosť *padol 1 bod.* Do 3. riadka uviedol pomer priaznivých hodov (údaje z 2. riadka) k celkovému počtu hodov (údaje z 1. riadka). Vo 4. riadku je vyjadrenie zlomku z 3. riadka, v podobe desatinného čísla. V 5. riadku je percentuálne vyjadrenie tohto pomeru.

Počet hodov (N)	10	20	30	40	50	60	70	80
Padol 1 bod (n)	2	4	6	6	8	9	13	14
Vyjadrené zlomkom $\left(\frac{n}{N}\right)$	$\frac{2}{10}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{6}{40}$	$\frac{8}{50}$	$\frac{9}{60}$	$\frac{13}{70}$	$\frac{14}{80}$
Vyjadrené desatinným číslom	0,2	0,2	0,2	0,15	0,16	0,15	0,19	0,18
Vyjadrenie v %	20	20	20	15	16	15	19	18

Z Petrovej tabuľky vidíme, že početnosť udalosti *padol jeden bod* v prípade 70 hodov je 13. Číslo 13 samo osebe, bez poznania celkového počtu hodov, nie je charakteristický údaj. Nie je jedno, či tento jednobodový počet hodov nastane zo 40, 60 alebo zo 100 hodov. Vždy musíme vedieť, koľkokrát sme hodili kockou a početnosti musíme dať do súvislosti s týmto údajom. Hovoríme, že pri hode kockou je relatívna (pomerná) početnosť udalosti *padol jeden bod* zo 70 hodov $\frac{13}{70}$, čo znamená, že zo 70 hodov v 13 prípadoch padol 1 bod.

Všeobecne:

Ak početnosť určitej priaznivej udalosti označíme n a celkový počet náhodných pokusov je N, tak relatívna početnosť danej udalosti je

$$\frac{n}{N}$$

V 3. riadku Petrovej tabuľky je uvedená relatívna početnosť zapísaná pomocou zlomku a v 4. riadku pomocou desatinného čísla. V poslednom riadku sme uviedli vyjadrenie relatívnej početnosti v percentách.

Tabuľka naznačuje, že ak uskutočníme dostatočne veľký počet hodov, relatívna početnosť udalosti *padol 1 bod* sa bude pohybovať okolo hodnoty $\frac{1}{6}$ alebo 0,166, t. j. zaokrúhlene 17 %. Vyplýva to z toho, že kocka má 6 pravidelných stien a na každú stenu môže padnúť s rovnakou pravdepodobnosťou.

ÚLOHA

Vykonajte 50 hodov jednou hracou kockou. Výsledky jednotlivých hodov zaznamenajte do pripravenej tabuľky sčítacími čiarkami, číslom a vyjadrite relatívnu početnosť viacerými spôsobmi (číslom, zlomkom, desatinným číslom, percentuálne). Vypočítajte relatívnu početnosť náhodnej udalosti, že padol:

a) párny počet bodov,
b) počet bodov väčší ako 2,
c) počet bodov väčší ako 4,
d) počet bodov väčší ako 6,
e) nepárny počet bodov.

Počet hodov	Záznam	Vyjadrené			
		číslom	zlomkom	desat. číslom	%
1					
2					
3					
4					
5					
6					

PRÍKLAD

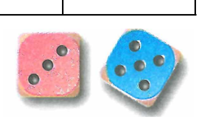
Hádžte dvoma hracími kockami (červenou a modrou) súčasne. Súčet bodov, ktoré padli na obidvoch kockách pri jednotlivých hodoch, zaznamenajte do tabuľky. Čo myslíte, ktorý súčet padne zo 100 hodov najčastejšie. Odôvodnite prečo.

RIEŠENIE

Zrejme sa súčty bodov na obidvoch kockách pri jednotlivých hodoch budú pohybovať medzi 2 a 12. Odôvodnite prečo. Za odlišné hody budeme považovať hod 4 + 2 a hod 2 + 4, lebo v prvom prípade padli na červenej kocke štyri body a na modrej dva body, v druhom prípade padli na červenej kocke dva body a na modrej štyri body.

Výsledky jednotlivých hodov zaznamenajte do takejto tabuľky:

Výsledky hodov	Záznam	Vyjadrené číslom
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		



Zrejme každý z vás dostal odlišné výsledky pre 100 hodov. Tieto budú, čo do početnosti, úmerné počtu možných súčtov, ktoré sa dajú vytvoriť z čísel 1 až 6. Početnosť možného vytvorenia jednotlivých súčtov názorne ukazuje nasledujúci rozpis:

$2 = 1 + 1$
$3 = 1 + 2 = 2 + 1$
$4 = 1 + 3 = 2 + 2 = 3 + 1$
$5 = 1 + 4 = 2 + 3 = 3 + 2 = 4 + 1$
$6 = 1 + 5 = 2 + 4 = 3 + 3 = 4 + 2 = 5 + 1$
$7 = 1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4 = 4 + 3 = 5 + 2 = 6 + 1$
$8 = 2 + 6 = 3 + 5 = 4 + 4 = 5 + 3 = 6 + 2$
$9 = 3 + 6 = 4 + 5 = 5 + 4 = 6 + 3$
$10 = 4 + 6 = 5 + 5 = 6 + 4$
$11 = 5 + 6 = 6 + 5$
$12 = 6 + 6$

Z vašej tabuľky vyplýva, že ak ste uskutočnili 100 hodov dvoma hracími kockami, najčastejšie ste dostali súčet 7 bodov. Môžeme prehlásiť, že pri hode dvoma hracími kockami udalosť *padlo 7 bodov* bude mať najväčšiu početnosť, a tým aj najväčšiu relatívnu početnosť.

Na základe uskutočnených pokusov môžeme prehlásiť, že relatívna početnosť udalosti *padne niektorý zo súčtov 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12* sa rovná 1, t. j. 100%. Takúto udalosť nazývame **istou udalosťou.**

Relatívna početnosť udalosti, že pri hode dvoma hracími kockami *padne súčet väčší ako 12* je vždy 0. Takáto udalosť nenastane nikdy, preto ju nazývame **nemožnou udalosťou.**

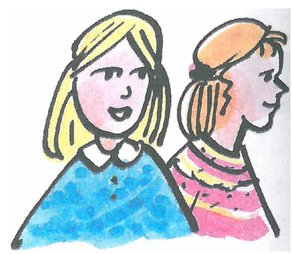
Pravdepodobnosť nemožnej udalosti je 0, t. j. 0 %.

3

ÚLOHA

Na základe výsledkov získaných v príklade 1 vypočítajte relatívnu početnosť udalosti a vyjadrite ju v percentách:

Padol súčet 4.
Padol súčet 1.
Padol súčet 10.
Padol súčet 5.
Padol súčet 8.
Padol súčet väčší ako 8.
Padol súčet menší ako 6.
Padol párny súčet.
Padol nepárny súčet.



C V I Č E N I A

1. Urobte 30 hodov súčasne dvoma hracími kockami (modrou a červenou) a počty bodov, ktoré padli navzájom vynásobte. Výsledky pokusov zaznamenajte do tabuľky a vypočítajte relatívne početnosti všetkých súčinov, ktoré sa takto dali vytvoriť.

2. Hoďte 20-krát jednou mincou. Výsledky jednotlivých hodov zaznamenajte sčítacou čiarkou a číslom. Vypočítajte relatívnu početnosť udalosti ***padol znak*** a vyjadrite ju zlomkom, desatinným číslom a percentami.

3. Hoďte 30-krát súčasne dvomi mincami. Výsledky jednotlivých hodov zaznamenajte sčítacou čiarkou a číslom. Vypočítajte relatívnu početnosť udalosti *padli rovnaké strany na obidvoch minciach* a vyjadrite ju zlomkom, desatinným číslom a percentami.

4. Z textu zadania príkladu 1 zistite početnosť výskytu samohlásky „a“ (veľkej aj malej). Vypočítajte relatívnu početnosť výskytu tejto samohlásky v danom texte.

9.3 Pravdepodobnosť udalosti a jej výpočet

PRÍKLAD

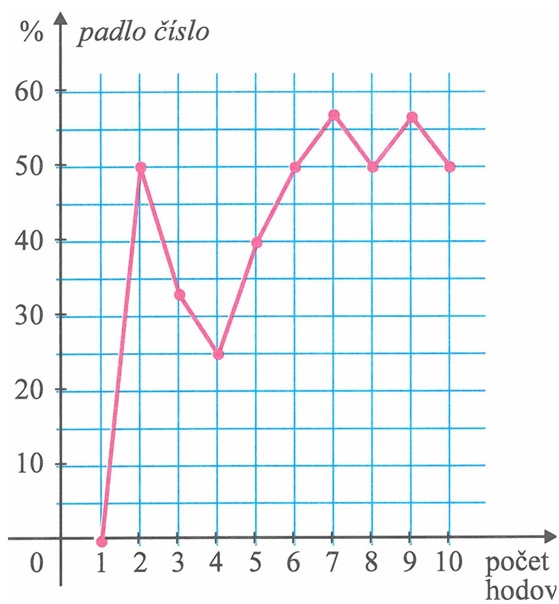
Marián a jeho spolužiak Vlado, uskutočnili 10 hodov mincou. Marián hádzal, Vlado výsledky jednotlivých hodov zaznamenal do tabuľky:

Počet hodov	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Padlo číslo	0	1	1	1	2	3	4	4	5	5
Relatívna početnosť (zlomkom)	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{5}{10}$
Relatívna početnosť (desatinným číslom)	0	0,5	0,33	0,25	0,4	0,5	0,57	0,5	0,56	0,5
Relatívna početnosť (v %)	0	50	33,3	25	40	50	57	50	56	50

Aká je relatívna početnosť udalosti *padlo číslo?* Znázornite graficky výsledky udalosti *padlo číslo* v závislosti od počtu hodov.

RIEŠENIE

Pri pokusoch sa žiaci Marián a Vlado dostali k výsledkom 2. riadka, kde zaznamenali výsledky po 1, 2, 3, ..., 10 pokusoch. Výsledky 3., 4. a 5. riadka vypočítali. Z 3. a 4. riadka vidieť, že relatívna početnosť kolíše okolo hodnoty $\frac{1}{2}$ (0,5) Pri väčšom počte pokusov je kolísanie hodnoty relatívnej početnosti okolo hodnoty $\frac{1}{2}$ (0,5) ešte výraznejšie. Presvedčte sa o tom.



Ak sa pri viacnásobnom vykonaní určitého pokusu relatívne početnosti konkrétnej udalosti blížia, alebo kolíšu okolo konkrétneho čísla, potom toto číslo nazývame pravdepodobnosťou tejto udalosti.

Uvedomme si, že ak chceme pravdepodobnosť určitej udalosti určiť experimentálnou cestou, musíme urobiť veľa pokusov, čo je veľmi zdĺhavé a často aj namáhavé. Preto skúsme uvažovať pri zisťovaní pravdepodobnosti takto:

Pri hode mincou sú dva možné výsledky pokusu: - *padol znak,* alebo
- *padlo číslo.*

Pre nás nech je priaznivá z týchto dvoch možností udalosť *padlo číslo.* Potom pravdepodobnosť tejto udalosti vypočítame:

Pravdepodobnosť, že nastane udalosť *padlo číslo* = $\dfrac{\text{počet priaznivých prípadov}}{\text{počet všetkých prípadov}} = \dfrac{1}{2}$

Pravdepodobnosť udalosti *padlo číslo* je $\frac{1}{2}$ alebo vyjadrené v percentách - 50 %.

2 *PRÍKLAD*

Náhodný pokus je aj ťahanie čísel napísaných na kartičky, ktoré sú umiestnené v nepriehľadnom vrecúšku. Kartičiek je 100, pričom na každú kartičku je napísané jedno z čísel 1, 2, 3, ... , 100. Vypočítajte pravdepodobnosť týchto náhodných udalostí:

a) *vytiahnutie kartičky s násobkom 10,*
b) *vytiahnutie kartičky s párnym číslom,*
c) *číslo vytiahnutej kartičky sa začína číslicou 1, 2, 3, alebo 4.*

RIEŠENIE

a) Ľahko zistíme, že medzi počtom 100 kartičiek je 100 : 10 = 10 takých kartičiek, na ktorých je napísaný násobok čísla 10. Potom pravdepodobnosť udalosti *vytiahnutie kartičky s násobkom 10* je

$$\frac{10}{100} = \frac{1}{10} = 10\ \%$$

b) Medzi počtom 100 kartičiek je 100 : 2 = 50 takých kartičiek, na ktorých je napísaný násobok čísla 2. Potom pravdepodobnosť udalosti *vytiahnutie kartičky s párnym číslom* je

$$\frac{50}{100} = \frac{5}{10} = 50\ \%$$

c) Medzi počtom 100 kartičiek spĺňajú podmienky našej úlohy
4 s jednociferným číslom,
40 s dvojciferným číslom (10, 11, - ..., 20, 21,..., 30, 31,..., 40, 41,...),
1 s trojciferným číslom (100).
Počet tých kartičiek, ktoré spĺňajú podmienku je: 4 + 40 + 1 = 45. Potom pravdepodobnosť udalosti *číslo vytiahnutej kartičky sa začína číslicou 1, 2, 3, alebo 4* je

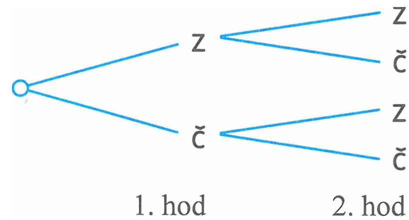
$$\frac{45}{100} = 45\ \%$$

3 *PRÍKLAD*

Vypočítajte pravdepodobnosť udalosti *padol dvakrát znak,* ak hodíme jednou mincou dvakrát za sebou.

RIEŠENIE

Pomôžeme si stromovým grafom:



Z grafu vidíme, že po dvoch hodoch mincou mohli nastať tieto štyri prípady:

zz (znak, znak) **zč** (znak, číslo)

čz (číslo, znak) **čč** (číslo, číslo)

Zistili sme, že početnosť udalosti *padol dvakrát znak* sa rovná 1. Počet všetkých možných udalostí sa rovná 4. Potom pravdepodobnosť tejto udalosti je $\frac{1}{4}$. Vyjadrené v percentách je to 25 %. To znamená, pravdepodobnosť udalosti, že po dvoch za sebou nasledujúcich hodoch jednou mincou padne dvakrát znak je 25 %**.**

ÚLOHA

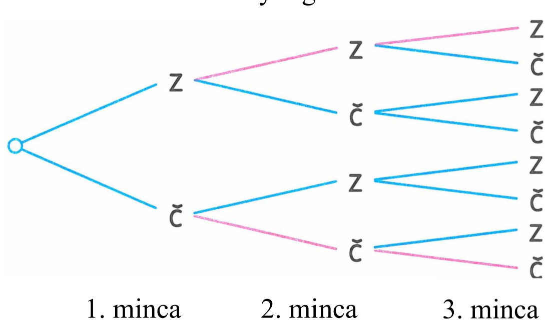
Hoďte jednou mincou dvakrát za sebou. Vypočítajte pravdepodobnosť udalosti *padol jedenkrát znak a jedenkrát číslo* **(zč** alebo **čz).**

PRÍKLAD

Vypočítajte pravdepodobnosť udalosti *padli tri rovnaké strany mincí* (**zzz** alebo **ččč)** pri súčasnom hode tromi mincami.

RIEŠENIE

Pomôžeme si stromovým grafom:



Z grafu vidíme, že pri súčasnom hode tromi mincami mohlo nastať týchto 8 prípadov: **zzz, zzč, zčz, zčč, čzz, čzč, ččz, ččč.** Z toho zistíme, že počet udalostí *padli tri rovnaké strany mincí* je 2 (**zzz, ččč).** Preto pravdepodobnosť tejto udalosti je:

$$\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Percentuálne vyjadrené je to 25 %. Inými slovami: Pri súčasnom hode tromi mincami všetky padnú na rovnakú stranu s 25-percentnou pravdepodobnosťou.

2 *ÚLOHA*

Hoďte jednou mincou trikrát za sebou. Vypočítajte využitím stromového grafu pravdepodobnosť udalosti:

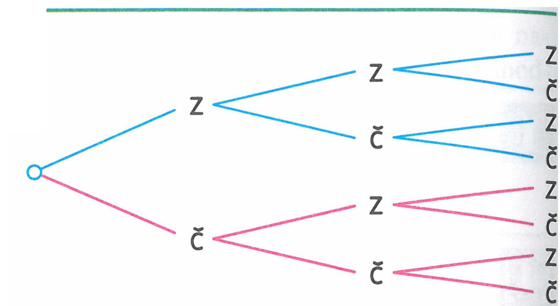
a) *padlo dvakrát číslo a jedenkrát znak,*
b) *padol trikrát znak,*
c) *padlo trikrát číslo,*
d) *padol dvakrát znak a jedenkrát číslo.*

5 *PRÍKLAD*

Peter má hodiť mincou trikrát za sebou. Jeden hod už vykonal. Pri prvom hode mu padlo číslo. Aká je pravdepodobnosť udalosti, že vo zvyšných dvoch hodoch *padol aspoň jeden znak.*

! *RIEŠENIE*

Vychádzajme zo stromového grafu.



1. hod 2. hod 3. hod

Vidíme, že keď pri Petrovom prvom hode padlo číslo **(č),** tak sme sa dostali do spodnej vetvy nášho grafu, z ktorej sa dajú vyčítať všetky možné hody za predpokladu, že pri prvom hode padlo číslo. Sú to: **čzz, čzč, ččz, ččč.** Z týchto štyroch možností sú pre nás priaznivé tieto možnosti: **čzz, čzč, ččz.** Potom pravdepodobnosť udalosti, že zo zvyšných dvoch hodov *padol aspoň jeden znak,* keď pri prvom hode padlo číslo je

$$\frac{3}{4} = 75\ \%$$

3 *ÚLOHA*

Marienka má hodiť mincou trikrát za sebou. Prvé dva hody už vykonala, padol jej dvakrát znak (z, z). Čo je viac pravdepodobné, že pri treťom hode padne opäť znak, alebo, že padne číslo? Aká je pravdepodobnosť toho, že pri všetkých troch hodoch padne znak? (Využite stromový graf).

4 *ÚLOHA*

Pri súčasnom hode tromi mincami vypočítajte pravdepodobnosť udalostí:

a) *padli tri čísla,*
b) *padli tri znaky,*
c) *padli dve rovnaké strany mince a jedna odlišná.*

V nasledujúcich úlohách vypočítajte pravdepodobnosť jednotlivých udalostí pri hode jednou alebo dvoma hracími kockami.

[6] **_PRÍKLAD_**

Vypočítajte pri hode jednou hracou kockou pravdepodobnosť udalosti *padlo päť bodov.*

RIEŠENIE

Pri hode jednou hracou kockou môžu nastať tieto prípady počtu bodov:

1, 2, 3, 4, 5, 6

Pre nás je priaznivý ten prípad, keď padne 5 bodov. Potom pravdepodobnosť udalosti *padlo päť bodov* $= \frac{1}{6} = 0,166 \doteq 17\ \%$

5 **_ÚLOHA_**

Pri hode jednou hracou kockou vypočítajte pravdepodobnosť udalosti *padlo šesť bodov.*

6 **_ÚLOHA_**

Pri hode jednou hracou kockou vypočítajte pravdepodobnosť udalosti *padol menší počet bodov ako 4.*

7 **_ÚLOHA_**

Pri hode jednou hracou kockou vypočítajte pravdepodobnosť udalostí *padol väčší počet bodov ako 3.*

[7] **_PRÍKLAD_**

Pri hode dvoma hracími kockami vypočítajte pravdepodobnosť udalosti *padne súčet 5.*

RIEŠENIE

Výsledok pokusu pri hode dvoma kockami je súčet bodov, ktoré padli na jednotlivých kockách. Týchto súčtov je jedenásť a sú to čísla od 2 do 12. Všetkých 11 súčtov sa vytvára celkom 36 rôznymi možnosťami (každý počet bodov z jednej kocky sa sčíta s každým počtom bodov z druhej kocky). My sa zaujímame len o súčet 5. Tento súčet sa dá vytvoriť štyrmi spôsobmi: 1 + 4, 4 + 1, 2 + 3, 3 + 2. Preto pravdepodobnosť udalosti, že pri hode dvoma hracími kockami *padne súčet 5* je $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$. Ďalej platí, že $\frac{1}{9} \doteq 0{,}11$. Vyjadrené v percentách $0{,}11 = \frac{11}{100} = 11\ \%$.

8 **_ÚLOHA_**

Vypočítajte pravdepodobnosť výskytu jednotlivých súčtov pri hode dvoma hracími kockami. Výsledky uveďte do tabuľky podľa tohto vzoru:

Súčet	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Pravdepodobnosť zlomkom											
Pravdepodobnosť v %											

[8] *PRÍKLAD*

Pri hode dvoma hracími kockami vypočítajte pravdepodobnosť udalosti *padne aspoň jedna päťka.*

RIEŠENIE

Všetkých možných dvojíc počtu bodov, ktoré sa dajú vytvoriť na základe počtu bodov na jednotlivých kockách je 36. Z nich sú pre nás priaznivé tie dvojice, ktorých jedna zložka je 5. Všetky pre náš prípad priaznivé výsledky sú:

$$(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6).$$

Jednotka môže padnúť na prvej kocke a päťka na druhej, tým vznikne dvojica (1, 5): preto všetkých dvojíc bude 11, pretože dvojica (5, 5) je rovnaká aj po zámene zložiek. Pravdepodobnosť udalosti vyjadrená v percentách, že pri hode dvoma hracími kockami *padne aspoň jedna päťka* je

$$\frac{11}{36} \doteq 0{,}31, \text{ platí, že } 0{,}31 = \frac{31}{100} = 31\ \%$$

9 *ÚLOHA*

Vypočítajte pravdepodobnosť udalosti, že pri hode dvoma hracími kockami

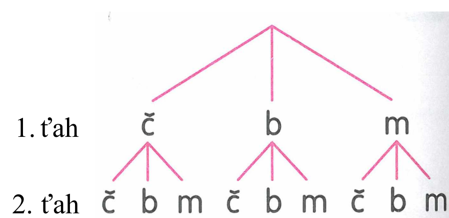
a) *padne práve jedna šestka,*
b) *padnú dve šestky,*
c) *nepadne nijaká šestka.*

[9] *PRÍKLAD*

Do nepriehľadného vrecúška sme vložili jednu červenú, jednu modrú a jednu bielu guľku. Z vrecúška vytiahneme jednu guľku, vložíme ju naspäť a znovu ťaháme druhú. Aká je pravdepodobnosť udalosti, že *pri obidvoch ťahoch vytiahneme bielu guľku?*

RIEŠENIE

Zrejme pravdepodobnosť toho, že pri prvom ťahu vytiahneme bielu guľku je $\frac{1}{3}$, ako to vyplýva aj zo stromového grafu.



Pri ľubovoľnom výsledku 1. ťahu a po vložení vytiahnutej guľky naspäť, bude pravdepodobnosť vytiahnutia bielej guľky opäť $\frac{1}{3}$.

Po znázornení obidvoch ťahov na stromovom grafe zisťujeme, že počet všetkých možností je 9.

Z deviatich možností ťahov je pre nás priaznivá len jedna možnosť (b, b), to znamená, že pravdepodobnosť udalosti, že *pri obidvoch ťahoch vytiahneme bielu guľku* je $\frac{1}{9}$. Máme teda približne 11,1 %-nú istotu, že pri dvoch ťahoch vytiahneme dvakrát za sebou bielu guľku.

Pri riešení tohto príkladu môžeme uvažovať aj tak, že pri prvom ťahu pravdepodobnosť vytiahnutia bielej guľky je $\frac{1}{3}$, pri druhom ťahu z tejto $\frac{1}{3}$ prípadov pravdepodobnosť opätovného vytiahnutia bielej guľky je $\frac{1}{3}$, t. j. $\frac{1}{9}$ je pravdepodobnosť toho, že vytiahneme dve biele guľky za sebou.

10 *ÚLOHA*

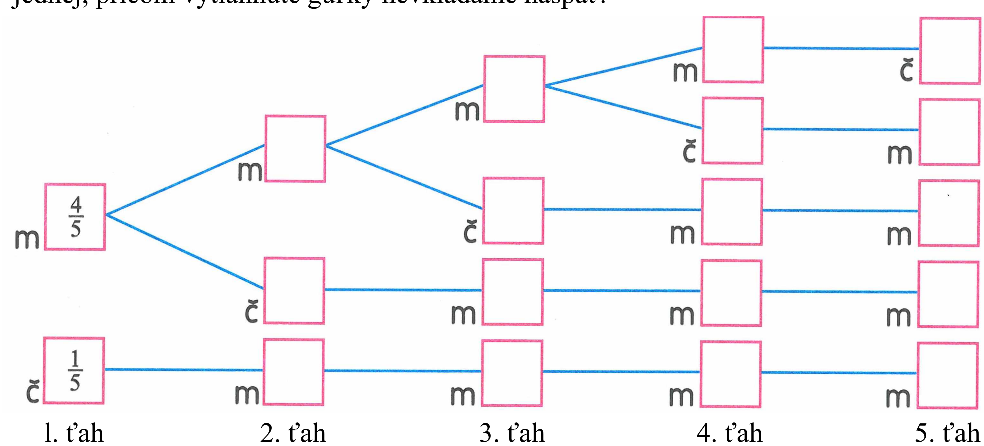
V prípade podmienok uvedených v príklade 9 zistite pravdepodobnosť udalostí:

a) *nevytiahneme červenú guľku,*
b) *vytiahneme za sebou dve modré guľky,*
c) *vytiahneme za sebou jednu modrú a jednu bielu guľku,*
d) *vytiahneme za sebou dve guľky rovnakej farby.*

11 *ÚLOHA*

Prekreslite stromový graf do zošita a do štvorčekov napíšte chýbajúce hodnoty pravdepodobnosti po jednotlivých ťahoch.

V nepriehľadnom vrecúšku sú 4 modré a jedna červená guľka. Guľky ťaháme po jednej, pričom vytiahnuté guľky nevkladáme naspäť.



[10] *PRÍKLAD*

Dané sú úsečky dĺžky 4 cm, 7 cm, 5 cm, 12 cm, 8 cm, 11 cm. Vypočítajte pravdepodobnosť udalosti, že *z náhodne vybratých troch úsečiek sa dá zostrojiť trojuholník.*

RIEŠENIE

Z kombinatoriky vieme, že zo šiestich úsečiek, nehľadiac na poradie výberu, možno vybrať tieto trojice:

4,7,5; 4,7,12; 4,7,8; 4,7,11; 4,5,12; 4,5,8; 4,5,11;
4,12,8; 4,12,11; 4,8,11; 7,5,12; 7,5,8; 7,5,11; 7,12,8;
7,12,11; 7,8,11; 5,12,8; 5,12,11; 5,8,11; 12,8,11.

Z geometrie je známe, že nie zo všetkých trojíc úsečiek sa dá zostrojiť trojuholník, ale len z tých, pre ktoré platí, že súčet ľubovoľných dvoch strán je väčší ako tretia strana. Z uvedených trojíc dĺžok úsečiek možno zostrojiť trojuholník len z týchto strán:

4,7,5; 4,7,8; 4,5,8; 4,12,11; 4,8,11; 7,5,8; 7,5,11;
7,12,8; 7,12,11; 7,8,11; 5,12,8; 5,12,11; 5,8,11; 12,8,11.

Odpoveď: Pravdepodobnosť udalosti, že *z náhodne vybratých troch úsečiek sa dá zostrojiť trojuholník* je $\frac{14}{20}$ (70 %).

12 ***ÚLOHA***

Určte dĺžku šiestich úsečiek tak, aby sa zo všetkých trojíc, ktoré sa môžu z týchto úsečiek vytvoriť, dal zostrojiť trojuholník.

13 ***ÚLOHA***

Určte dĺžky štyroch úsečiek tak, aby sa pravdepodobnosť udalosti, že *z náhodne vybratých troch úsečiek sa dá zostrojiť trojuholník* rovnala 25 %.

14 ***ÚLOHA***

Určte dĺžky piatich úsečiek tak, aby sa pravdepodobnosť udalosti, že z *náhodne vybratých troch úsečiek sa dá zostrojiť trojuholník* rovnala 70 %.

[11] ***PRÍKLAD***

Miško hľadal v neprítomnosti otecka kalkulačku v zásuvkách jeho písacieho stola. Vybral všetky štyri zásuvky zo stola. Keď kalkulačku našiel, uložil zásuvky do písacieho stola naspäť, ale nezapamätal si poradie, v akom boli pôvodne uložené. Aká je pravdepodobnosť, že sa mu podarilo zásuvky uložiť na ich pôvodné miesto?

! ***RIEŠENIE***

Pôvodné poradie zásuviek bolo 1, 2, 3, 4. Z kombinatoriky vieme, že tieto štyri zásuvky sa dajú uložiť celkom 1 . 2 . 3 . 4 =4! = 24 rôznymi spôsobmi. Medzi týmito možnými uloženiami je len jediné uloženie, ktoré je pre nás priaznivé. Preto pravdepodobnosť toho, že Miško správne uložil všetky zásuvky na svoje miesto je:

$$\frac{1}{24} \doteq 4\ \%$$

15 ***ÚLOHA***

Z príkladu 11 vypočítajte pravdepodobnosť toho, že Miško uložil 4. zásuvku na pôvodné miesto.

16 ***ÚLOHA***

Z príkladu 11 vypočítajte pravdepodobnosť toho, že Miško uložil 4. a 1. zásuvku na ich pôvodné miesta.

17 *ÚLOHA*

Do osudia sme vložili čísla od 1 až po 100. Z týchto čísel jedno vytiahneme. Hráč vyhráva vtedy, ak prvá cifra vytiahnutého čísla je 1, 2, 3, 4 alebo 5. Aká je pravdepodobnosť výhry?

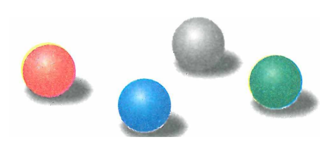
C V I Č E N I A

1. Hádžeme súčasne dvoma hracími kockami. Zistite, ktorá z týchto dvoch udalostí má väčšiu pravdepodobnosť:
   - *padol súčet bodov väčší ako 7,*
   - *padol súčet bodov menší ako 7.*

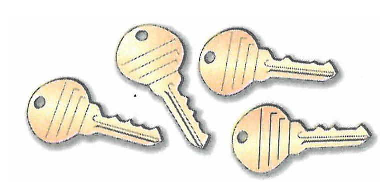
2. Hodili sme postupne 4-krát jednou mincou. Vypočítajte pravdepodobnosť udalostí:
   - *padlo trikrát číslo a jedenkrát znak,* - *padol štyrikrát znak,*
   - *padol dvakrát znak a dvakrát číslo,* - *padlo štyrikrát číslo,*
   - *padli štyri rovnaké strany mince.*

3. Do nepriehľadného vrecúška sme vložili žetóny, na ktorých sú čísla od 1 do 20. Po dôkladnom premiešaní vytiahneme jeden žetón. Aká je pravdepodobnosť, že sme vytiahli:
   - *číslo menšie ako 8,*
   - *jednociferné číslo,*
   - *dvojciferné číslo,*
   - *číslo s ciferným súčtom 10,*
   - *číslo väčšie ako 12,*
   - *číslo menšie ako 8,*
   - *číslo deliteľné tromi.*

4. Do nepriehľadného vrecúška sme vložili 1 červenú, 1 modrú, 1 bielu a 1 zelenú guľku. Z vrecúška vytiahneme jednu guľku, vložíme ju naspäť a znovu ťaháme druhú. Aká je pravdepodobnosť udalostí, že:
   - *pri obidvoch ťahoch vytiahneme bielu guľku,*
   - *vytiahneme modrú guľku,*
   - *vytiahneme modrú guľku a zelenú guľku,*
   - *vytiahneme dve rôznofarebné guľky.*



5. V ubytovni sú štyri izby. Kľúče k jednotlivým izbám nie sú očíslované. Každý zo štyroch hostí si zobral jeden kľúč. Vypočítajte, aká je pravdepodobnosť toho, že
   - *si každý zobral svoj kľúč,*
   - *len jeden si zobral správny kľúč,*
   - *dvaja hostia si zobrali správne kľúče,*
   - *že traja hostia si zobrali správne kľúče.*



6. Jožko hádže dvoma hracími kockami. Na jednej kocke mu padli 4 body. Aká je pravdepodobnosť, že na druhej kocke padne taký počet bodov, aby súčet na oboch kockách bol 9?

7. Do osudia sme vložili čísla od 1 až po 200. Z týchto čísel jedno vytiahneme. Hráč vyhráva vtedy, ak prvá cifra vytiahnutého čísla je 2, 4, 6 alebo 8. Aká je pravdepodobnosť výhry?

VYSKÚŠAJTE SA !

1. Uveďte jednu istú, jednu nemožnú a jednu náhodnú udalosť.

2. Hádžeme jednou hracou kockou. Vypočítajte pravdepodobnosť náhodnej udalosti, že *padne počet bodov menší ako 3.*

3. Pri hode dvoma mincami vypočítajte pravdepodobnosť udalosti, že *padli rovnaké strany mince.*

4. Pri súčasnom hode dvoma hracími kockami vypočítajte pravdepodobnosť udalosti, že *padne súčet 10.*

5. Do nepriehľadného vrecúška sme vložili tri modré a dve červené guľky. Z vrecúška vytiahneme jednu guľku, vložíme ju naspäť a ťaháme druhú. Aká je pravdepodobnosť udalosti, že po dvoch za sebou nasledujúcich ťahoch *vytiahneme jednu modrú a jednu červenú guľku?*

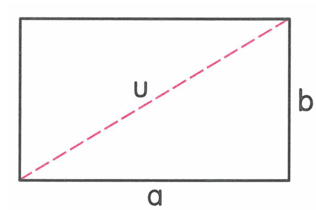
6. Petrova sestra, škôlkárka, prezerala Petrovu zbierku známok. Sériu piatich známok zo zbierky vybrala, ale nevedela ich dať naspäť na správne miesto v pôvodnom poradí. Preto ich tam vložila v ľubovoľnom poradí. Vypočítajte pravdepodobnosť udalosti, že *známky boli vložené na správne miesto* v *pôvodnom poradí.*

Poznanie pravdy je zdravie ľudského ducha.

R. Descartes

10 TOPOGRAFICKÉ PRÁCE V TERÉNE

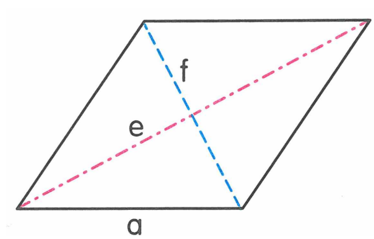
Na začiatok zovšeobecníme niektoré poznatky z geometrie a ukážeme, ako ich môžeme využiť pri topografických prácach v teréne.



Podľa Pytagorovej vety pre výpočet dĺžky uhlopriečky obdĺžnika platí:

$$u = \sqrt{a^2 + b^2}$$

a pre dĺžku strany kosoštvorca tiež platí:



$$a = \sqrt{\left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2}$$

Po úprave vzorcov dostaneme

$$\boldsymbol{u^2 = a^2 + b^2} \qquad \boldsymbol{e^2 + f^2 = 4a^2}$$

Ak vynásobíme obidve strany prvého vzorca dvoma, dostaneme

$$\boldsymbol{2u^2 = 2a^2 + 2b^2} \qquad \boldsymbol{e^2 + f^2 = 4a^2}$$

Po úprave: $\boldsymbol{u^2 + u^2 = a^2 + a^2 + b^2 + b^2}$

$$\boldsymbol{e^2 + f^2 = a^2 + a^2 + a^2 + a^2}$$

Pre obdĺžnik aj kosoštvorec teda platí:

Súčet druhých mocnín dĺžok uhlopriečok sa rovná súčtu druhých mocnín dĺžok jeho strán.

PROBLÉM

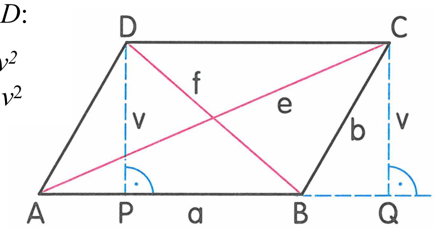
Platí toto tvrdenie aj pre kosodĺžnik?

RIEŠENIE

Nech je daný kosodĺžnik ***ABCD.***

Zostrojme body *P a Q na* priamke *AB* tak, že $DP \perp AB$, $CQ \perp AB$. Označme v = $|DP| = |CQ|$ *a* $x = |AP| = |BQ|$. Vypočítajme veľkosti uhlopriečok pomocou *v* a *x* z pravouhlých trojuholníkov *AQC a PBD*:

$$e^2 = |AC|^2 = |AQ|^2 + |QC|^2 = (a + x)^2 + v^2$$
$$f^2 = |BD|^2 = |PB|^2 + |PD|^2 = (a - x)^2 + v^2$$



Rovnice sčítame:

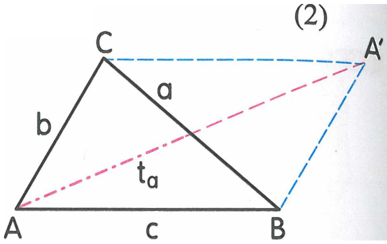
$$e^2 + f^2 = (a + x)^2 + v^2 + (a - x)^2 + v^2$$

$$e^2 + f^2 = (a + x)^2 + v^2 + (a - x)^2 + v^2$$

po úprave $$e^2 + f^2 = 2\,(a^2 + x^2 + v^2) \qquad (1)$$

Z Δ *BQC* podľa Pytagorovej vety $x^2 + v^2 = b^2$

Po dosadení do (1) dostaneme: $e^2 + f^2 = 2a^2 + 2b^2$ (2)



Vzťah (2) môžeme upraviť pre výpočet ťažnice trojuholníka daného veľkosťami všetkých troch strán.

V rovnobežníku *ABA'C* je ťažnica t_a polovicou uhlopriečky *AA'*. Po dosadení do vzťahu (2) dostaneme: $(2t_a)^2 + a^2 = 2c^2 + 2b^2$

Po úprave a odmocnení platí $$t_a = \frac{1}{2}\sqrt{2c^2 + 2b^2 - a^2} \qquad (3)$$

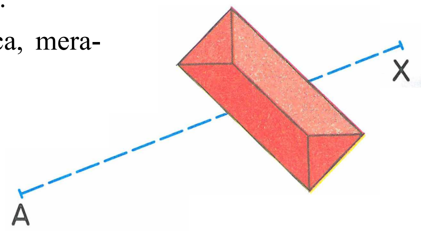
Potom pre ostatné ťažnice platí $$t_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$$

$$t_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$$

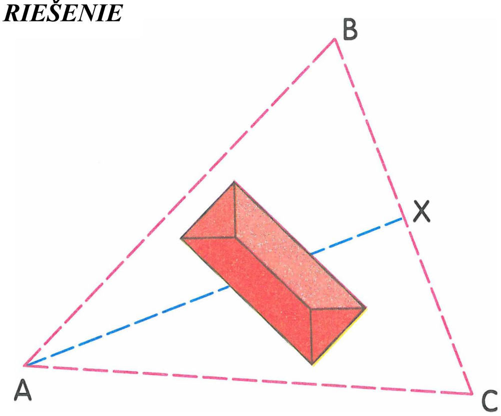
[1] ***PRÍKLAD***

V teréne je dané miesto *A* a miesto *X*, ktoré je z miesta *A* neviditeľné. Odmerajte vzdialenosť miest *A, X*. Úlohu riešte v teréne.

Pomôcky: Výtyčky, kolíky, špagát, olovnica, meracie pásmo.



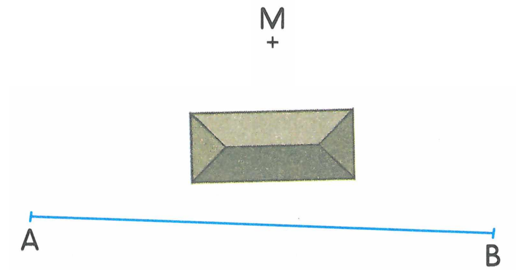
RIEŠENIE



Vytýčime vo vyhovujúcom smere na opačných polpriamkach so spoločným začiatkom v *X* body *B* a *C* v rovnakých vzdialenostiach |*BX*| = |*CX*|. Po odmeraní vzdialenosti |*AB*| a |*AC*| vypočítame veľkosť ťažnice *AX* v trojuholníku *ABC*. Pre hrubý výpočet stačí odkráčať vzdialenosti *BX, CX, AB, AC* a vypočítať potom vzdialenosť v krokoch.

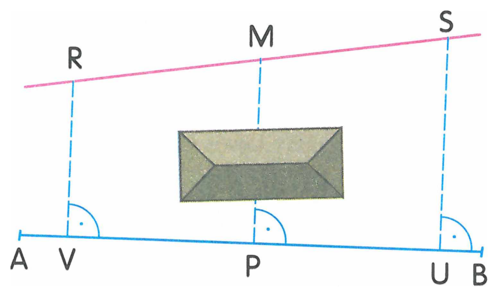
PRÍKLAD

V teréne je vytýčená priamka AB a mimo nej bod M. Určte vzdialenosť bodu M od priamky AB, pričom medzi bodom M a priamkou je prekážka.



RIEŠENIE

Využijeme teraz vlastnosť strednej priečky pravouhlého lichobežníka. Bodom M vedieme ľubovoľnú priamku a na nej určíme body R, S tak, aby $|MR| = |MS|$. Bodmi R, S vedieme kolmice RV, SU na priamku AB. (Použijeme vlastnosti rovnoramenného trojuholníka). Body U, V sú ich päty.



Stred P úsečky UV spolu s bodom M určuje strednú priečku lichobežníka $USRV$. Stačí odmerať vzdialenosti |RV| a $|SU|$. Potom

$$|PM| = \frac{1}{2}(|RV| + |SU|)$$

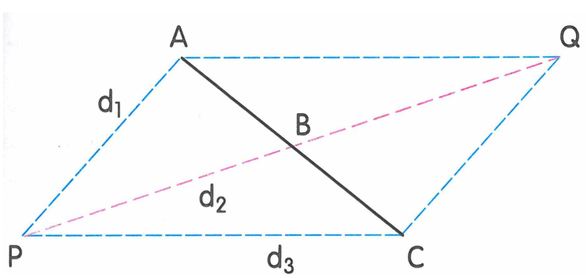
Ešte ukážeme riešenie jedného príkladu s použitím vzťahu (2).

PRÍKLAD

V dvoch rovnakých intervaloch po 10 sekundách boli z pozorovateľne P diaľkomerom odmerané vzdialenosti $d_1 = 2{,}5$ km, $d_2 = 3$ km, $d_3 = 4$ km lietadla letiaceho rovnomerne a priamočiaro. Vypočítajte rýchlosť, akou lietadlo letelo.

RIEŠENIE

Označme pozorovateľňu P, jednotlivé polohy lietadla A, B, C. Doplňme trojuholník APC s ťažnicou PB na rovnobežník $APCQ$.



V rovnobežníku $APCQ$ sú úsečky AC a PQ uhlopriečkami, takže vzťah (2) môžeme prepísať v tvare

$$|AC|^2 + |PQ|^2 = 2|PA|^2 + 2|PC|^2$$

čiže $|AC|^2 + (2\,d_2)^2 = 2d_1^2 + 2d_3^2$

Odtiaľ $|AC|^2 = 2d_1^2 + 2d_3^2 - (2d_2)^2$

po dosadení

$$|AC|^2 = 12{,}5 + 32 - 36 = 8{,}5$$

Na kalkulačke zistíme, že $|AC| = \sqrt{8{,}5} = 2{,}9$. Pretože 2,9 km je dĺžka dráhy, ktorú uletelo lietadlo za 20 sekúnd, dostaneme rýchlosť lietadla za sekundu v metroch delením 2 900 : 20 = 145.

Odpoveď: Lietadlo letelo rýchlosťou $145\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

11 ELEMENTÁRNE POZNATKY Z LOGIKY

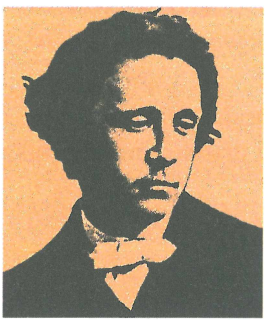
R

Čo je logika

„Viem, o čom rozmýšľaš," povedal Tidli, „ale tak to nie je. Ani nápad!"

„Naopak," pokračoval Fidli, „ak to tak bolo, mohlo to tak byť, a keby to tak bolo, mohlo by to tak byť, ale keďže to tak nie je, nemohlo to tak byť. To je logika, vieš?"

Z knihy Lewis Carroll: Alica v krajine zázrakov, Mladé letá, Bratislava, 1981, s. 144-145.



Charles Dodgsott umeleckým menom Lewis Carroll

(7. 1. 1832 až 14. 1. 1898)

Je známy predovšetkým ako autor kníh pre deti: Alica v krajine zázrakov (1865) a Za zrkadlom (1872). Pôsobil ako profesor matematiky na univerzite v Oxforde, v Anglicku. Napísal aj niekoľko učebníc matematiky a knihu z histórie matematiky: Euklides a jeho súčasní rivali (1879). Bol aj vynikajúcim fotografom.

V matematike sa myšlienky o matematických pojmoch formulujú stručne, výstižne a presne. Každá matematická definícia a každé tvrdenie by malo byť jednoznačné. Je to preto, aby všetci, ktorí sa matematickými pojmami zaoberajú, ich chápali rovnako. V bežnom živote to nebýva vždy tak.

1 R

PRÍKLAD

Dve sestry si rozdeľujú čokoládu. Zrazu jedna vykríkne: „Ale ja chcem tú väčšiu polovicu!" Čo na to poviete?

R

RIEŠENIE

Martina, ktorej inak čokoláda veľmi chutí, hovorí: „Je jasné, že sestra, ktorá vykríkla je nielen nenásytná a neslušná, ale aj nedôsledná vo vyjadrovaní. Neexistuje väčšia a menšia polovica jedného celku. Ak celok rozdelíme, matematicky presne, na dve polovice, obidve polovice musia byť rovnaké."

Prečítajte si nasledujúce dialógy a nájdite podobné príklady nepresného a nejednoznačného vyjadrovania.

DIALÓG 1

Karol uvaril Ľubošovi čaj.
Karol: „Prosíš si čaj?"
Ľuboš: „Poprosil by som."

Čo by mal odpovedať Karol, ktorý sa v matematike naučil presne vyjadrovať? Logicky by mala nasledovať strohá odpoveď: „Tak popros.“ Karol, ktorý si to s Ľubošom nechce rozhádzať, pretože s ním rád chodí bicyklovať, čaj Ľubošovi najskôr naleje a odpovie: „Nabudúce stačí povedať: Áno, prosím si.“

DIALÓG 2

R

Katka začala pravidelne navštevovať plaváreň a trikrát do týždňa zapláva jeden kilometer. Už to začína byť vidieť na jej postave a aj náladu má väčšinou výbornú. Určite k tomu dopomohlo pravidelné športovanie. Spolužiačky sa pýtajú, čo jej tak pomohlo.
Katka im to chcela priblížiť matematicky: „Keď som začala s plávaním, môj život sa otočil o 360 stupňov.“
Prečo sa dobré matematikárky Danka a Janka na seba iba pozreli a posmešne sa pousmiali?

DIALÓG 3

R

Pán s krásnym psom ušľachtilej rasy stojí pred obchodom s hračkami. Podíde k nemu pani a pýta sa: „Prosím vás, koľko stojí ten pes?“
„Neviem, asi desať minút,“ odpovie chladnokrvne pán.
Myslíte, že ten pán so psom je učiteľ matematiky?

Istotne ste sa už stretli s rôznymi úlohami, ktoré sa nazývajú *logické.* Otestujte si svoju logiku na nasledujúcich úlohách.

1 *ÚLOHA*

R

Pokúste sa správne (logicky) odpovedať:

a) Si moja dcéra, ale ja nie som tvoj otec. Kto som?
b) Je známe, že príbuzní nemôžu spolu uzatvárať manželstvo. Môže sa muž oženiť so sestrou svojej vdovy?
c) Ktorá verzia receptu na bielkový sneh je napísaná správne?
   (1) 200 *g práškového cukru, 2 žĺtky a trochu citrónovej šťavy vyšľahaj do hustej peny.*
   (2) 200 *g kryštálového cukru, 2 žĺtky a trochu citrónovej šťavy vyšľahaj do hustej peny.*
d) Dve mince majú spolu hodnotu 3 Sk, aj keď jedna z nich nie je koruna. Aké sú to mince?
e) Slimák potrebuje hodinu a pol, aby obišiel kruhovú závodnú dráhu v smere hodinových ručičiek. Keď sa plazí naspäť, stačí mu na to iba deväťdesiat minút. Ako je to možné?

ÚLOHA

Pohľadajte v časopisoch a knihách o zábavnej matematike podobné logické úlohy a zorganizujte v triede súťaž o najlepšieho logika triedy.

Výrok

Pod pojmom **výrok** si obyčajne predstavíme významnú vetu slávnej osobnosti alebo tiež výrok súdu či komisie odborníkov. Mnoho ľudí má dojem, že výrok je vždy pravdivé, nevyvrátiteľné tvrdenie. V matematickej logike má slovo výrok presne určený význam.

Výrok je taká oznamovacia veta, ktorá zrozumiteľne vyjadruje jednoznačné **tvrdenie,** ktoré môže byť iba **pravdivé** alebo iba **nepravdivé.**

Výrokmi nie sú vety

— **opytovacie:** *„Koľko je hodín?"*

— **zvolacie:** *„Dobréráno!"*

— **rozkazovacie:** *„Poďsem!"*

— **oznamovacie vety,** ktoré začínajú napríklad slovami: *„Zdá sa mi, že... "*.
O obsahu týchto viet nevieme povedať, či je to pravda alebo nepravda.

Výrokmi nie sú ani názvy, mená, ani čísla. Keď povieme *šesť,* nevieme, čoho alebo koho je šesť.

Veta: *„Je šesť hodín."* je výrok. Ak hodiny ukazujú práve šesť hodín, je to výrok pravdivý, ak nie, je nepravdivý.

Vety, o ktorých budeme uvažovať, či sú výroky alebo nie, označujeme písmenami veľkej abecedy: ***A, B, C***,...

PRÍKLAD

Rozhodnite, či sú nasledujúce vety výrokmi.

A Bratislava je hlavné mesto Slovenskej republiky.
B Nedaruj svoj život drogám!
C Idete domov?
D Cvičenia z matematiky.
E Nie.
F Rád čítam knihy o prírode.

RIEŠENIE

Adam usúdil správne, že výrokmi sú iba vety ***A*** a ***F.*** O pravdivosti ostatných sa nedá rozhodnúť. Veta ***B*** je zvolanie, **C** je otázka, ***D*** je názov, ***E*** je veta, ktorá nie je všeobecne zrozumiteľná.

ÚLOHA

Rozhodnite, ktoré z nasledujúcich viet sú výroky.

A Dnes je streda.
B Pôjdeme do kina.
C Neviem.
D Číslo 10 101 010 je deliteľné tromi.
E Prines žiacku knižku!
F Sneží?

ÚLOHA

Vo dvojiciach vymýšľajte rôzne vety a uvažujte o nich, či sú výroky alebo nie. Výroky si zapíšte do zošita.

Pravdivostná hodnota výroku

O každom výroku môžeme rozhodnúť, či je pravdivý alebo nepravdivý. Hovoríme, že sme mu priradili **pravdivostnú hodnotu.**

Každý **výrok** môže nadobudnúť práve jednu **pravdivostnú hodnotu:**
— **pravda** alebo **pravdivý výrok**
— **nepravda** alebo **nepravdivý výrok**

PRÍKLAD

Rozhodnite, či sú nasledujúce výroky pravdivé alebo nepravdivé.

A Budapešť je hlavné mesto Rakúskej republiky.
B Číslo 9 876 je štvorciferné.
C Niektorým živočíchom na Zemi hrozí vyhynutie.
D Je tma.
E Rok 2001 je prvý rok tretieho tisícročia.
F Sme žiaci prvého ročníka gymnázia.

RIEŠENIE

Slávka si zapísala:

A nepravdivý výrok
B pravdivý výrok
C pravdivý výrok
D Ak je deň - nepravdivý výrok, ak je noc - pravdivý výrok. Pravdivostná hodnota tohto výroku závisí od momentálnej situácie.
E pravdivý výrok
F nepravdivý výrok

ÚLOHA

Určte pravdivostnú hodnotu výrokov. Vypíšte tie výroky, ktorých pravdivostná hodnota závisí od momentálnej situácie.

A Riešim matematickú úlohu.
B Zajtra píšeme diktát zo slovenského jazyka.
C Zlomok $\frac{5}{20}$ nazývame desatinný zlomok.
D Učebnica Matematika pre 8. ročník, 2. časť, má 144 strán.
E $7 > 4$
F Sneží.
G Mám vlastný horský bicykel.

ÚLOHA

Vetám, ktoré sú výroky, priraďte ich pravdivostnú hodnotu.

A Tenis je kolektívny šport.
B Vodičský preukaz smie získať osoba, ktorá dovŕšila 18 rokov.
C Chráň si svoje zdravie!
D Najvyšší vrch Vysokých Tatier je Kriváň.
E Fajčíš?
F Fúka silný vietor.
G Orech je dužinatý plod.

Negácia výroku

PROBLEM 1

Jana tvrdí: *„Adam má modré oči.“* Dana jej oponuje: *„Nie je pravda, že Adam má modré oči.“* Hana povie: *„Adam má zelené oči.“* Ako je to s farbou Adamových očí, ak všetky tri dievčatá majú na mysli toho istého Adama?

RIEŠENIE

Označme jednotlivé výroky takto:

J Adam má modré oči.
D Nie je pravda, že Adam má modré oči.
H Adam má zelené oči.

Uvažujme, že Adam môže mať oči týchto farieb: modrá, zelená, hnedá, sivá. Predpokladajme, že výrok ***J:*** *„Adam má modré oči.“* je pravdivý. Akú pravdivostnú hodnotu majú potom výroky ***D*** a ***H***?

Výrok ***D:*** *„Nie je pravda, že Adam má modré oči.“* znamená, že Adam môže mať oči zelené, hnedé alebo sivé. Hovoríme, že výrok ***D*** má **opačnú pravdivostnú hodnotu** ako výrok ***J***. Slová: **nie je pravda, že** popierajú pravdivosť tvrdenia, ktoré za nimi nasleduje.

Pravdivosť výroku ***H:*** *„Adam má zelené oči."* sa nedá odvodiť od pravdivosti výroku ***J.*** Obidva hovoria iba o jednej možnosti pre farbu Adamových očí a obidva môžu byť nepravdivé, ak má Adam oči hnedé alebo sivé. Výrok ***H*** nemá opačnú pravdivostnú hodnotu ako výrok ***J.***

Výrok ***D:*** *„Nie je pravda, že Adam má modré oči."* nazývame negácia výroku ***J:*** *„Adam má modré oči."* Skrátene by sme mohli povedať: *„Adam nemá modré oči."*

Negácia výroku je taký výrok, ktorý má opačnú pravdivostnú hodnotu ako pôvodný výrok.
Hovoríme, že negáciou **popierame pravdivosť** pôvodného výroku.
Označenie: ***A*** pôvodný výrok
A' **negácia** výroku ***A***
Výrok a jeho negácia majú opačné pravdivostné hodnoty.
Ak sa vo výroku nachádza **jedna** z niekoľkých možností,
negácia musí zahŕňať **všetky** ostatné možnosti.

Najspoľahlivejší spôsob, ako vytvoriť správnu negáciu výroku je začať slovami: ***Nie je pravda, že*** a doplniť pôvodný nezmenený výrok.

PRÍKLAD

Vytvorte negácie týchto výrokov:

A Platí: $2 + 4 = 6$.
B Dnes je nedeľa.
C Skala prevísa päť metrov nad hladinu mora.

RIEŠENIE

Juraj uvažuje takto:

Výrok ***A:*** Platí $2 + 4 = 6$.
Negácia výroku ***A,*** výrok ***A':*** Nie je pravda, že $2 + 4 = 6$.
Skrátená negácia: ***A'*** Platí: $2 + 4 \neq 6$.

Výrok ***B:*** Dnes je nedeľa.
Negácia musí zahŕňať všetky ostatné možnosti: Dnes je pondelok, utorok, streda štvrtok, piatok alebo sobota.
Negácia výroku ***B,*** výrok ***B'***: ***Nie je pravda, že*** dnes je nedeľa.
Skrátene môžeme povedať: Dnes ***nie je*** nedeľa.

Výrok ***C:*** Skala prevísa päť metrov nad hladinu mora.
Negácia výroku ***C,*** výrok ***C':*** ***Nie je pravda, že*** skala prevísa päť metrov nad hladinu mora.
Skrátene: Skala ***neprevísa*** päť metrov nad hladinu mora.
Negácia ***C'*** hovorí, že skala prevísa menej ako päť metrov alebo viac ako päť metrov nad hladinu mora.

5 ***PRÍKLAD***

Pozorne si pozrite tabuľku a porozmýšľajte nad výrokmi a ich negáciami v nej uvedenými.

*Výrok **A***	Negácia výroku ***A***, výrok ***A'*** Skrátená negácia ***A'***	Výroky, ktoré nie sú negáciami výroku ***A'***
Včera pršalo.	Nie je pravda, že včera pršalo. Včera nepršalo.	Včera snežilo. Včera bola hmla.
Mám čiernu tašku.	Nie je pravda, že mám čiernu tašku. Nemám čiernu tašku.	Mám bielu tašku. Mám hnedú tašku. Nemám tašku.
Platí $7 > 4$.	Nie je pravda, že $7 > 4$. Platí $7 \leq 4$.	Platí $7 < 4$.
Mlčím.	Nie je pravda, že mlčím. Nemlčím.	Hovorím. Spievam.

7 ***ÚLOHA***

Povedzte negácie daných výrokov pomocou: *Nie je pravda, že...*
Pokúste sa správne formulovať aj skrátené negácie.

A V pondelok som bola v kine s Natašou.
B Žiaci boli v škole v prírode v Škutovkách.
C Plocha šachovnice je čieno-biela.
D Vedci v USA našli liek proti AIDS.
E Peru je krajina v Afrike.

8 ***ÚLOHA***

V ktorých dvojiciach viet ide o výrok a jeho negáciu? Ak negácia nie je správna, opravte ju.

a) Dané celé číslo je kladné. - Dané celé číslo je záporné.
b) Čísla 105 a 310 sú rôzne. - Čísla 105 a 310 sa rovnajú.
c) Madrid je hlavné mesto Portugalska. - Madrid je hlavné mesto Španielska.
d) Slnko vychádza na západe. - Slnko vychádza na východe.

9 ***ÚLOHA***

Odôvodnite, prečo výrok:
Platí $123 > 132$ nie je negáciou výroku *Platí* $123 < 132$.

10 ***ÚLOHA***

Vyslovte negáciu ***A'*** výroku ***A.***
A: Súčet všetkých prirodzených čísel od 1 po 500 je väčší než číslo 501 000.

Výroky s údajmi o počte

Údaje o počte osôb, vecí alebo matematických objektov, ktoré majú spoločnú určitú vlastnosť, často vyjadrujeme slovnými spojeniami: všetci, žiadny, aspoň jeden, práve dvaja, najviac jeden...

Číselné údaje, ktoré sa v týchto slovných spojeniach vyskytujú, sú **prirodzené čísla** alebo číslo **nula.**

PROBLÉM 2

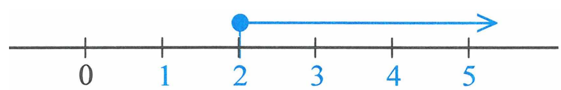
Znázornite na číselnej osi a zapíšte, čo znamenajú tieto slovné spojenia:

a) aspoň dva c) najviac tri
b) žiadny d) práve jeden

RIEŠENIE

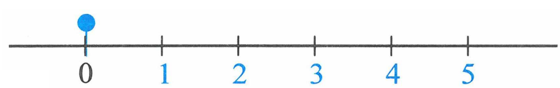
Juraj si ku každému slovnému spojeniu načrtne číselnú os.

a) aspoň dva



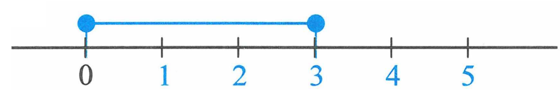
aspoň dva znamená: dva alebo tri alebo štyri alebo päť alebo viac, nemôže to byť jeden alebo žiadny

b) žiadny



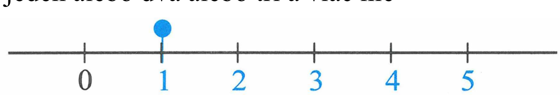
žiadny znamená: nula a nie viac

c) najviac tri



najviac tri znamená: nula alebo jeden alebo dva alebo tri a viac nie

d) práve jeden



práve jeden znamená: jeden a ani menej ani viac

11

ÚLOHA

Znázornite na číselnej osi a zapíšte, aký číselný údaj vyjadrujú slovné spojenia:

a) aspoň päť b) najviac tri c) práve dva

PROBLÉM 3

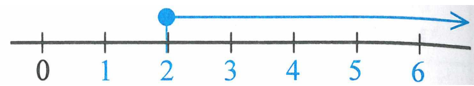
Napíšte negáciu výrokov:

A Aspoň dvaja chlapci hrajú futbal.
B Na stole nie je nijaká kniha.
C Najviac štyria lyžiari môžu ísť spolu na sedačke.
D Práve jeden počítač je pripojený na Internet.

RIEŠENIE

Petra využila Jurajove nákresy z predchádzajúceho problému.
Uvedomila si: Ak sa vo výroku nachádzajú číselné údaje, jeho negácia musí obsahovať všetky ostatné možnosti.

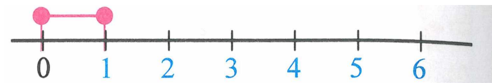
A **Aspoň dvaja** chlapci hrajú futbal.



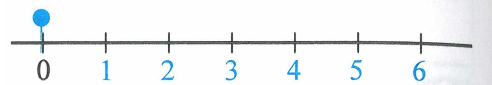
Výrok ***A*** hovorí: Futbal môžu hrať dvaja, traja, štyria alebo viac chlapcov.
Negácia výroku ***A*** musí obsahovať tie číselné údaje, ktoré neobsahuje výrok ***A***.

O alebo 1 znamená **najviac jeden**

A' Futbal hrá najviac jeden chlapec.

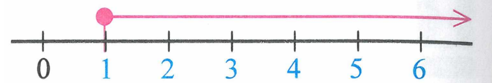


B Na stole **nie je žiadna** kniha.

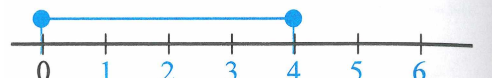


Negácia:

B' Na stole je **aspoň jedna** kniha.



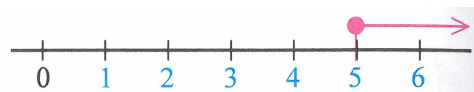
C **Najviac štyria** lyžiari môžu ísť spolu na sedačke.



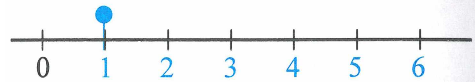
Výrok ***C*** hovorí: Na sedačke môžu ísť štyria, traja, dvaja alebo jeden lyžiar alebo je sedačka prázdna.

Negácia:

C' Na sedačke môže ísť spolu **aspoň päť** lyžiarov.



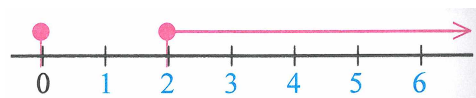
D **Práve jeden** počítač je pripojený na Internet.



Výrok ***D*** hovorí: Práve jeden, ani viac, ani menej.

Negácia:

D' **Žiadny počítač** alebo **aspoň dva** počítače sú pripojené na Internet.



12

ÚLOHA

Skontrolujte pomocou číselnej osi, či sú správne utvorené negácie výrokov.

Výroku	Výrok ***A'***
Aspoň dva vlaky meškajú.	Najviac jeden vlak mešká.
Nikto o tom nepochyboval.	Aspoň jeden o tom pochyboval.
Práve jeden žiak dostal jednotku.	Jednotku nedostal nikto alebo jednotku dostali aspoň dvaja žiaci.
Z divadla odišli najviac dvaja diváci.	Z divadla odišli aspoň traja diváci.

POZNÁMKA

V mnohých prípadoch sú slovné spojenia nahradené slovami, ktoré majú iný tvar, ale rovnaký význam (synonymami), napríklad: aspoň jeden = niekto, niektorý, niečo, existuje
žiadny = nikto, nič, nijaký, neexistuje
všetci = každý, ktokoľvek, hocikto
Pri použití ľubovoľného synonyma zostáva význam výroku rovnaký.

ÚLOHA 13 R

Napíšte negáciu výrokov. Pomôžte si číselnou osou.

A Aspoň dvaja žiaci navštevujú tanečnú školu.
B Najviac štyri dni bude pršať.
C Práve dve deti ochoreli.
D Každý deň cvičím.
E Žiadny hosť neprišiel neskoro.
F Význam pojmu životné prostredie chápe najviac dvadsať žiakov.

ÚLOHA 14 R

Nahraďte slová vyjadrujúce údaje o počte osôb a vecí príslušnými synonymami, a potom vyslovte negáciu výrokov.

A Niekto klopal.
B Nikoho z vás sa to netýka.
C Všetci to pochopili.
D Nikto sa o to nepokúsil.
E Možno nájsť vhodné ospravedlnenie.
F Hocikto s tým môže nesúhlasiť.

CVIČENIA R

1. Rozhodnite, ktoré z nasledujúcich viet sú výroky.
A V budove našej školy je dvadsať miestností.
B Dobre.
C Šetrite pitnou vodou!
D Zdá sa mi, že je potrebné opraviť strechu.
E Máte dnes šesť hodín?
F Pravidlá cestnej premávky.

2. Vymyslite päť viet, ktoré sú výroky a päť viet, ktoré nie sú výroky.

3. Povedzte, ktoré z nasledujúcich tvrdení sú pravdivé a ktoré nepravdivé výroky.
A Štvorec je štvoruholník, ktorý má všetky štyri strany zhodné.
B Štvorec je jediný štvoruholník, ktorý má všetky štyri strany zhodné.
C Číslo 18 je nepárne.
D Číslo 18 je jediné párne číslo.
E Trojuholníky rozdeľujeme na pravouhlé a rovnoramenné.
F Existujú pravouhlé rovnoramenné trojuholníky.

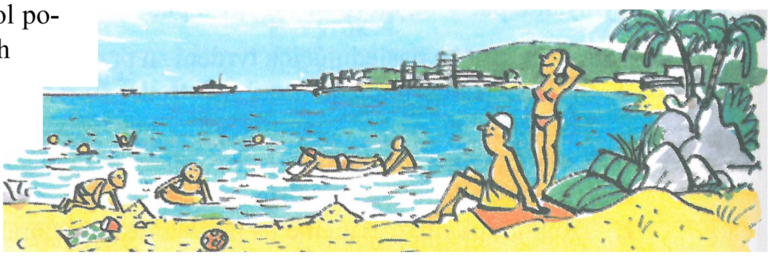
4. Vymyslite päť pravdivých a päť nepravdivých výrokov o matematických objektoch. Vyskúšajte svojich spolužiakov.

5. Posúďte pravdivosť výrokov o matematických objektoch a nájdite ich negácie.
A Každý trojuholník má súčet vnútorných uhlov 180°.
B Číslo 24 má najviac osem deliteľov.
C Medzi číslami 1 až 100 existuje práve dvadsaťpäť prvočísel.
D Druhá mocnina žiadneho záporného čísla nie je záporné číslo.
E Každá konštrukčná úloha má aspoň dve riešenia.
F Každé dve priamky sú navzájom rovnobežné.

6. Pokúste sa pohotovo, bez číselnej osi, vyjadriť negáciu nasledujúcich výrokov:
A Aspoň desiati mu uverili.
B Nedostala žiadny darček.
C Každý z nich by chcel ísť na olympiádu.
D Mám najviac deväť plagátov.
E Nikto nemal odvahu priznať sa.
F Všetci mu úprimne blahoželali.

7. Nasledujúce výroky sa týkajú ľudí prítomných v tom istom čase v jednej sále. Sformulujte ich negácie.
A Poznám najviac 15 z prítomných ľudí.
B Najstaršia dáma má aspoň 65 rokov.
C Práve osem prítomných má slávnostný oblek.
D Jeden chodí po miestnosti.
E Niekto zakašľal.
F Hostiteľ potriasol rukou minimálne osemdesiatim hosťom.
G Ktokoľvek môže odísť.
H Ani jeden neodmietol občerstvenie.
I Hostiteľka dostala najmenej dvadsať kytíc.
J Nikto nezaspal.

8. K nasledujúcim výrokom vytvorte ich negácie.
A Aspoň jeden žiak z triedy bol počas letných prázdnin pri mori.
B Všetci žiaci našej triedy boli počas letných prázdnin pri mori.
C Jeden žiak z našej triedy nebol počas letných prázdnin pri mori.
D Niektorý žiak z našej triedy bol počas letných prázdnin pri mori.
E Žiaden žiak z našej triedy nebol počas letných prázdnin pri mori.



u

12 RIEŠENIE ÚLOH S VYUŽITÍM ELEMENTÁRNYCH POZNATKOV Z TEÓRIE GRAFOV

R Kreslíme grafy

R

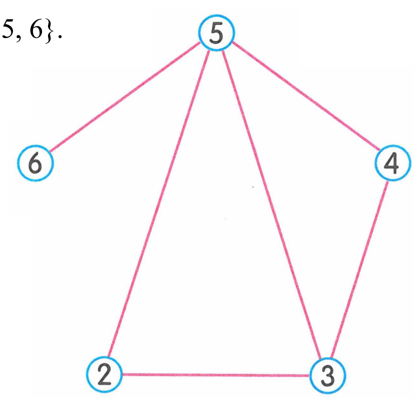
***POZOROVANIE 1** - O DOPRAVE*

Na obrázku je schematické zobrazenie železničnej siete Slovenska. Ak medzi dvoma mestami existuje železničná trať, tieto mestá sú spojené čiarou.

R

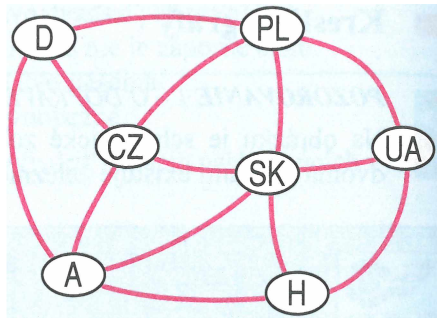
***POZOROVANIE 2** - O DELITEĽNOSTI*

Daná je množina prirodzených čísel $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$.
Čiarou sú spojené tie čísla z množiny $\boldsymbol{A}$,
ktoré sú nesúdeliteľné. Skontrolujte.



POZOROVANIE 3 - *ZO ZEMEPISU*

Porovnajte dva obrázky: časť mapy Európy a obrázok, na ktorom je symbolicky podľa tejto mapy zakreslené, ktoré štáty spolu susedia.



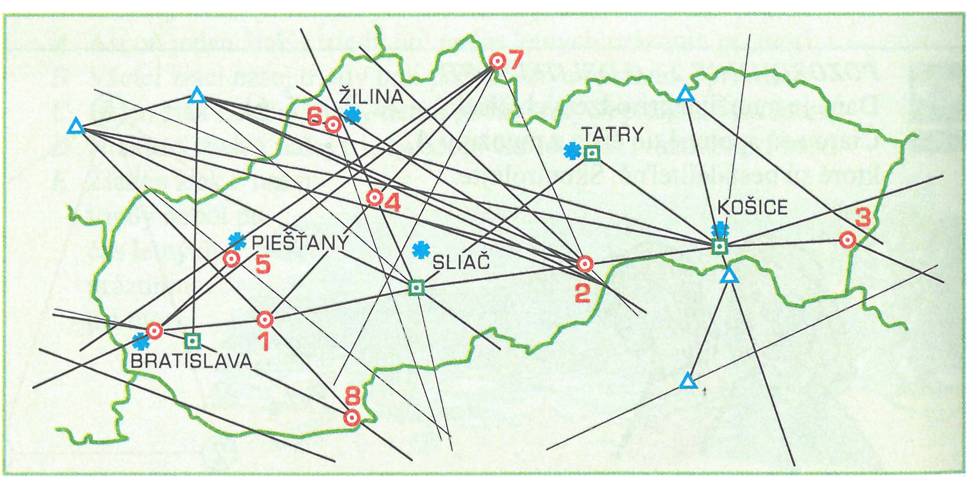
Veľa rôznych situácií z každodenného života nás vedie k obrázkom - podobným schémam, aké sú uvedené v predchádzajúcich pozorovaniach. Takéto obrázky sa nazývajú **grafy** a zaoberá sa nimi matematická disciplína nazývaná **Teória grafov.**

V grafe sa nachádzajú tieto prvky:

- body v rovine - **vrcholy grafu**
- čiary, ktoré tieto body v rovine spájajú - **hrany grafu**

ÚLOHA

Na obrázku je časť mapy vzdušného priestoru Slovenskej republiky. Vrcholmi grafu, ktorý túto mapu tvorí, sú letiská a dôležité navigačné miesta. Prekreslite si do zošita časť tejto mapy, ktorú tvoria vrcholy: Bratislava, Sliač, Tatry, ⊡ Košice a navigačné miesta ⊙ 1, ⊙ 2 a ⊙ 7.

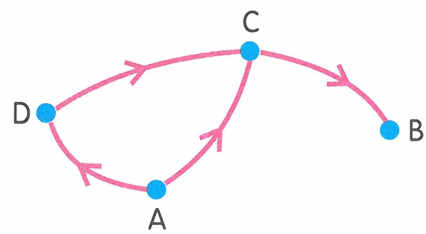


ÚLOHA

Vyberte zo zemepisného atlasu mapu alebo časť mapy niektorého kontinentu a nakreslite graf susediacich štátov podľa tejto mapy. Určte, koľko vrcholov a koľko hrán má vami vybraný graf.

POZOROVANIE 4 - O TURNAJI

Žiaci štyroch ôsmych tried hrajú volejbalový turnaj. Na obrázku je znázornený stav tohto turnaja po štyroch zápasoch. Šípka vedie od víťaza k porazenému.



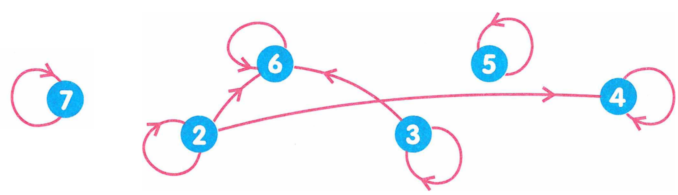
Odpovedzte podľa obrázka:

a) Koľko zápasov odohrala každá trieda?
b) Ktorá trieda vyhrala všetky zatiaľ zohraté zápasy?
c) Ktoré zápasy treba ešte odohrať?

Hrana grafu, ktorá má orientáciu naznačenú šípkou, sa nazýva **orientovaná hrana.**
Graf, v ktorom je každá hrana orientovaná sa nazýva **orientovaný graf.**
Graf, v ktorom žiadna hrana nie je orientovaná sa nazýva **neorientovaný graf.**

POZOROVANIE 5 - O DELITEĽNOSTI

Daná je množina prirodzených čísel $\boldsymbol{B} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Na obrázku je nakreslený graf vzťahu *„číslo x je deliteľom čísla y“* v tejto množine. Šípka hrany vedie od čísla x k číslu y, ktoré je deliteľné číslom x. Skontrolujte.



Hrana, ktorá spája ten istý vrchol sám so sebou sa nazýva **slučka.**
Slučka môže byť **orientovaná** alebo **neorientovaná.**


orientovaná slučka


neorientovaná slučka

3 R

ÚLOHA

V tabuľke sú uvedené výsledky volejbalového turnaja medzi družstvami dievčat, ktorý práve na škole prebieha.

	7. A	7. B	8. A	8. B	9. A	9. B
7. A	X	3 : 0	2 : 3	1 : 3		
7. B	0 : 3	X			2 : 3	
8. A	3 : 2		X			
8. B	3 : 1			X		3 : 1
9. A		3 : 2			X	
9. B				1 : 3		X

a) Nakreslite graf doteraz odohraných zápasov tohto turnaja. Šípka hrany bude viesť od víťaza k porazenému.
b) Prečo sa v tomto grafe nevyskytujú slučky?

4 R

ÚLOHA

Podľa tabuľky turnaja z predchádzajúceho príkladu nakreslite:
a) graf zápasov, ktoré ešte treba odohrať,
b) graf všetkých zápasov turnaja.
Budú tieto grafy orientované? Svoju odpoveď odôvodnite.

POZNÁMKA

Kreslenie grafov s rôznymi vlastnosťami patrí** v **teórii grafov k dôležitým úlohám. Kreslenie obrázkov a schém pomáha úlohy vyriešiť. Pri riešení matematických úloh si načrtnite obrázky vždy, keď je to možné!

R

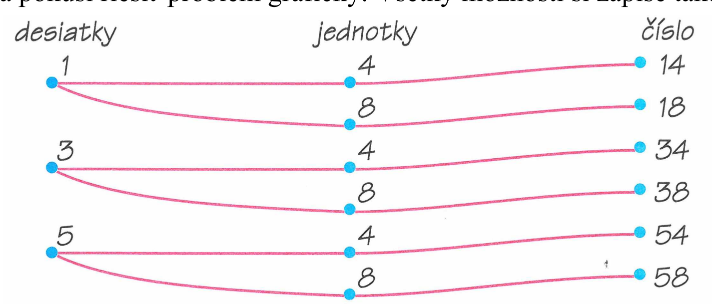
PROBLÉM 1

Napíšte všetky dvojciferné čísla, ktoré majú na mieste desiatok číslicu 1, 3 alebo 5 a na mieste jednotiek majú číslicu 4 alebo 8.

R

RIEŠENIE

Alena sa pokúsi riešiť problém graficky. Všetky možnosti si zapíše takto:



Takýto graf sa nazýva graf všetkých možností.

5

R

ÚLOHA

Pomocou grafu všetkých možností napíšte všetky:

a) dvojciferné čísla, ktoré majú na mieste desiatok číslicu 9, 8 alebo 7 a na mieste jednotiek číslicu 0, 6 alebo 9,

b) trojciferné čísla, ktoré sa skladajú z číslic 1, 2 a 3. Číslice sa v čísle môžu opakovať.

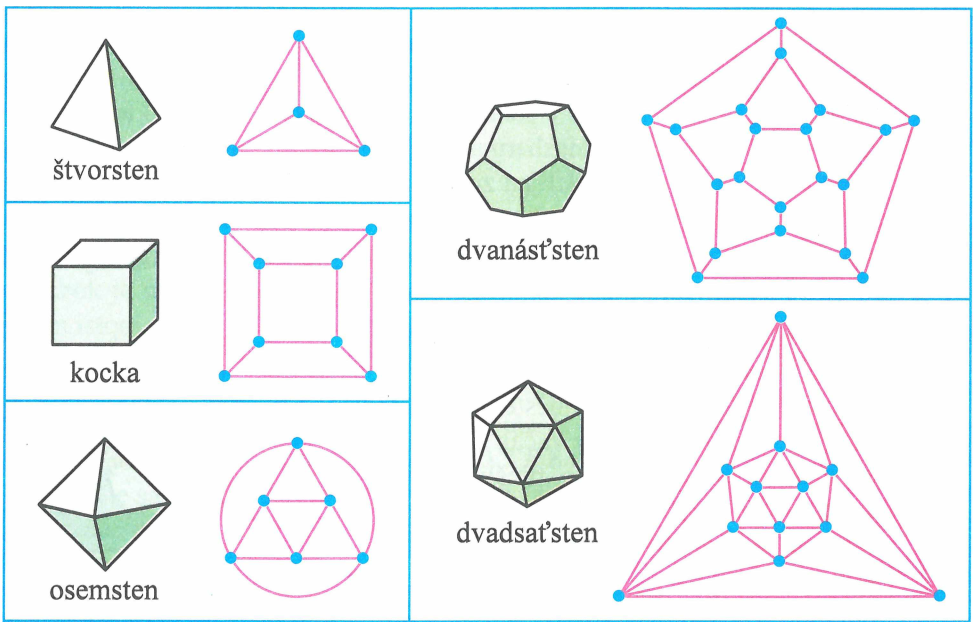
R

Niektoré grafy a ich názvy

Grafy mnohostenov

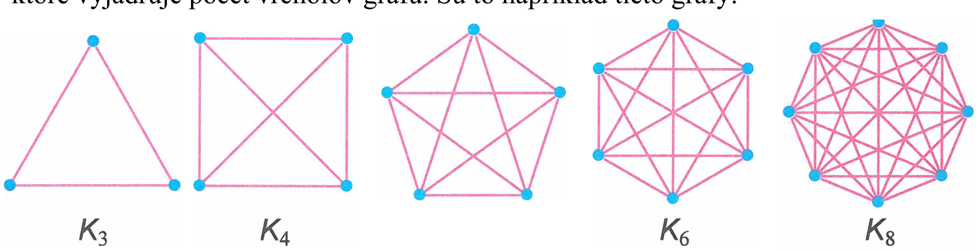
O pravidelných telesách, ktoré nazývame aj *Platónove (platónske) telesá* ste sa možno učili v siedmom ročníku (pozri učebnicu Matematika pre 7. ročník, 2. časť, s. 116).

V teórii grafov zobrazujeme tieto telesá nasledujúcimi grafmi.



Kompletné grafy

Sú neorientované grafy bez slučiek, v ktorých je každý vrchol spojený s každým práve jednou hranou. Kompletné grafy označujeme: K_n, kde n je prirodzené číslo, ktoré vyjadruje počet vrcholov grafu. Sú to napríklad tieto grafy:

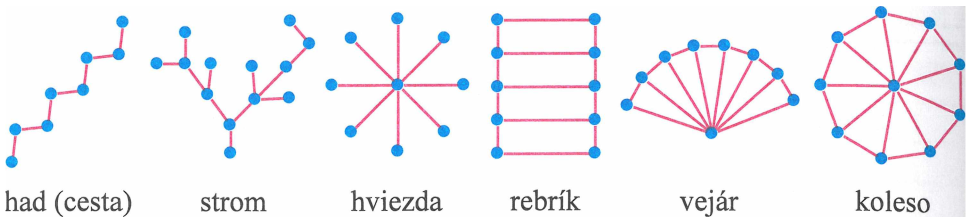


6 R

ÚLOHA

a) Ktorý kompletný graf ste pri riešení predchádzajúcich úloh už nakreslili?
b) Ako inak, v geometrii, nazývame kompletné grafy?

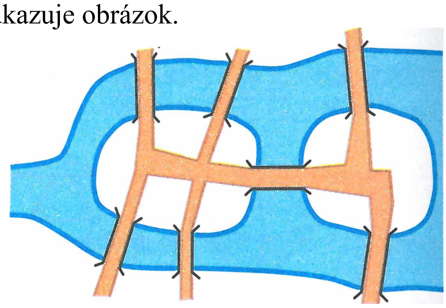
Grafy, ktorých názvy pochádzajú z bežného života



Eulerovské grafy (čítaj: ojlerovské)

nazývame podľa jedného z najvýznamnejších matematikov 18. storočia **Leonharda Eulera** (pozri Matematiku pre 5. ročník, 2. časť, s. 65). Euler je považovaný za otca teórie grafov. V roku 1763 žil v meste Kráľovec, ktoré sa v minulosti nazývalo Królewiec, Königsberg a tiež Kaliningrad (nájdite to mesto na súčasnej mape). Problém, ktorý riešili na začiatku teórie grafov ako matematickej disciplíny má názov Sedem mostov mesta Kráľovca a znie takto:

Mestom Kráľovec preteká rieka Pregel. Rieka obmýva dva ostrovy. Medzi brehmi rieky a ostrovmi je sedem mostov, ako to ukazuje obrázok.

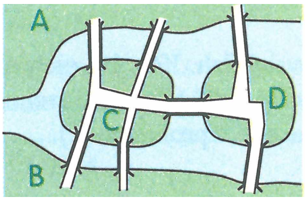


Obyvatelia mesta Kráľovca pri nedeľných prechádzkach často riešili problém: Je možné prechádzať sa v meste Kráľovec tak, aby sme prechádzku začali na ľubovoľnom mieste na pevnine, prešli každým mostom cez rieku Pregel práve raz a prechádzku skončili na tom istom mieste, kde sme začali?

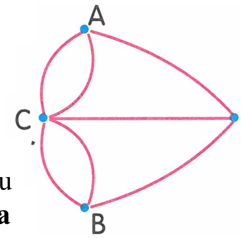
Mnoho ľudí, ktorí nepoznajú pojmy z teórie grafov, (a aj obyvatelia mesta Kráľovca za Eulerových čias), rieši tento problém prakticky (hovoríme aj empiricky - vlastnou skúsenosťou): vyberú sa na prechádzku ... a chodia dovtedy, kým nepadnú od únavy alebo zlosti, že sa im to nedarí. Problém takto nevyriešia, pretože taká prechádzka neexistuje. Ako to matematicky dokázať? Matematik Leonhard Euler to urobil takto:

Nakreslil graf, v ktorom **vrcholy** predstavujú pevninu (ľavý a pravý breh rieky a jeden i druhý ostrov) a hrany sú mosty (je ich sedem) a spájajú zodpovedajúce časti pevniny. Prechádzka je preformulovaná na matematický problém:

1. Obrázok musíme nakresliť jedným ťahom, to znamená: každú hranu práve raz.
2. Kreslenie musíme skončiť v tom istom vrchole, v ktorom sme začali kresliť.



Graf problému
Sedem mostov mesta Kráľovca



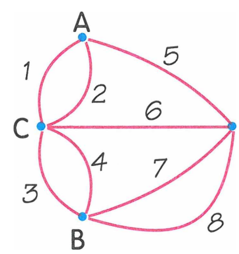
ÚLOHA

Presvedčte sa, že graf problému Sedem mostov mesta Kráľovca sa nedá nakresliť jedným ťahom. Urobte aspoň dva pokusy z každého vrcholu.

PROBLÉM 2

Keby občania mesta Kráľovca vybudovali ešte jeden most, dala by sa prechádzka uskutočniť?

RIEŠENIE



Adam si dokreslí do obrázka most medzi brehom ***B*** a ostrovom ***D*** a mosty očísluje.
Prechádzku - kreslenie začína na brehu - vo vrchole ***A*** a jednotlivé ťahy si zapíše takto:
A 1 C 3 B 1 D S B 4 C 6 D 5 A 2 C
Nakreslite graf podľa Adamovho postupu.
Obrázok je nakreslený, ale nespĺňa druhú Eulerovu podmienku: začať a skončiť v tom istom vrchole.
Adam skúša ďalej, nájde ešte ďalšie ťahy z vrcholu ***A***, ale vždy skončí vo vrchole C. Nájdite aj vy aspoň tri rôzne ťahy z vrcholu ***A*** **.**
Podobné je to, keď začne vo vrchole C, obrázok je nakreslený, ale kreslenie skončí vo vrchole ***A*** **.** Napríklad: ***C 3 B 4 C 6 D 7 B 8 D 5 A 1 C 2 A.***
Presvedčte sa o tom, nájdite aspoň tri rôzne ťahy z vrcholu ***C*** **.**
Z vrcholu ***B*** ani z vrcholu ***D*** sa mu obrázok jedným ťahom nakresliť napodarí.
Vždy aspoň jedna hrana chýba.
Napríklad: ***B 3 C 1 A 2 C 6 D 7 B 8 D 5 A*** chýba hrana 4
D 5 A 1 C 3 B 4 C 6 D 7 B 8 D chýba hrana 2
Adam vysloví takýto záver: Ak dokreslíme ešte jednu hranu, obrázok sa dá nakresliť jedným ťahom, ale neskončíme v tom istom vrchole, v ktorom sme začali.
Aj na takúto situáciu Leonhard Euler pamätal. Platí:

Ak sa graf dá nakresliť jedným ťahom t. j. ťah obsahuje všetky hrany grafu, hovoríme, že graf má **eulerovský ťah.**

Ak ťah začína a končí v tom istom vrchole, je to **uzavretý eulerovský ťah.**

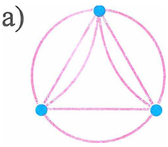
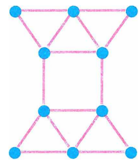
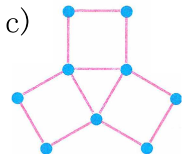
Ak konce ťahu sú dva rôzne vrcholy, je to **otvorený eulerovský ťah.**

Adam teda našiel v dokreslenom grafe otvorený eulerovský ťah.

8 R

ÚLOHA

Presvedčte sa, že nasledujúce grafy majú eulerovský ťah. Ktorý z nich má otvorený eulerovský ťah a ktorý má uzavretý eulerovský ťah? (Označte vrcholy grafu písmenami a hrany číslami a ťahy zapíšte podobne ako v probléme 2.)

a)

b)

c)


Leonhard Euler vyslovil a dokázal matematickú vetu, pomocou ktorej bez dlhého skúšania a kreslenia odhalíme, či sa daný graf dá nakresliť jedným ťahom. Rozdelíme ju na dve tvrdenia a nebudeme ju dokazovať.

Graf má **uzavretý eulerovský ťah** práve vtedy, keď **počet hrán,** ktoré vychádzajú z každého jeho vrcholu, **je párny.**

9 R

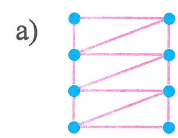
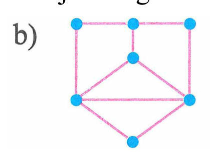
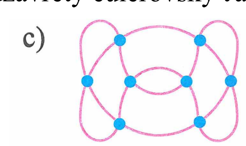
ÚLOHA

Doplňte do grafu ***Sedem mostov mesta Kráľovca*** ďalšie hrany tak, aby doplnený graf mal uzavretý eulerovský ťah. Najmenej koľko hrán musíte doplniť?

10 R

ÚLOHA

Určte bez kreslenia, ktoré z nasledujúcich grafov majú uzavretý eulerovský ťah.

a)

b)

c)


11 R

ÚLOHA

Vymyslite pre svojich spolužiakov grafy s aspoň piatimi vrcholmi, ktoré sa dajú nakresliť uzavretým eulerovským ťahom.

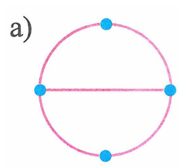
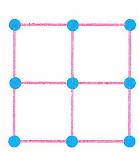
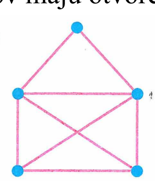
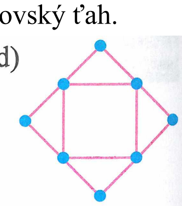
Graf má **otvorený eulerovský ťah** práve vtedy, keď má **práve dva vrcholy** také, že **počet hrán,** ktoré z týchto dvoch vrcholov vychádzajú, **je nepárny.**

Je to napríklad dokreslený graf z problému 2.

12 R

ÚLOHA

Bez kreslenia určte, ktoré z nasledujúcich grafov majú otvorený eulerovský ťah.

a)

b)

c)

d)


13 R

ÚLOHA

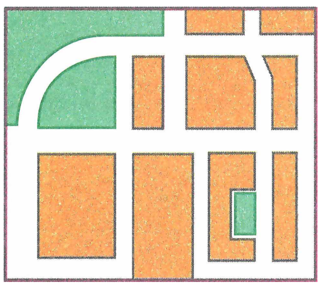
Vymyslite pre svojich spolužiakov grafy s aspoň piatimi vrcholmi, ktoré sa dajú nakresliť otvoreným eulerovským ťahom.

14 R

ÚLOHA

Vodič polievacieho auta má poliať všetky ulice v centre mesta.

a) Nakreslite podľa mapky graf centra tohto mesta. Vrcholy grafu sú križovatky, hrany grafu sú ulice.



b) Dá sa centrum mesta poliať tak, že každou ulicou prejde polievacie auto práve raz?

R

C V I Č E N I A

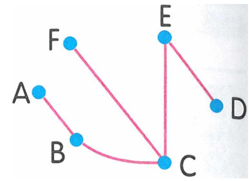
1. Nájdite v cestovných poriadkoch autobusovej a železničnej dopravy, v automapách schémy tratí a ciest - grafy a nakreslite ich do zošita.

2. Nájdite na mape siete železníc mesto, v ktorom bývate, alebo k vášmu bydlisku najbližšiu železničnú stanicu a nakreslite graf železničných staníc, ktoré sú k tejto stanici najbližšie.

3. Na mape je znázornené rozdelenie Slovenskej republiky na kraje (platné v roku 2000). Nakreslite graf susediacich krajov. (Vrcholy grafu sú kraje. Medzi vrcholmi existuje hrana vtedy, ak kraje na mape spolu susedia.)

4. Daná je množina $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$. Orientovaným grafom znázornite vzťah medzi číslami tejto množiny: *číslo x je násobkom čísla y*. Šípka hrany vedie od deliteľa k jeho násobku.

5. Graf na obrázku je grafom rozohratého šachovho turnaja, na ktorom hrá každý účastník s každým. Hranou sú spojení tí hráči, ktorí zápas odohrali. Ktoré zápasy ešte treba odohrať? Nakreslite graf zvyšných zápasov.



6. V spoločnosti desiatich ľudí každý podá ruku každému. Nakreslite graf tejto situácie. Koľko dvojíc si podá ruku?

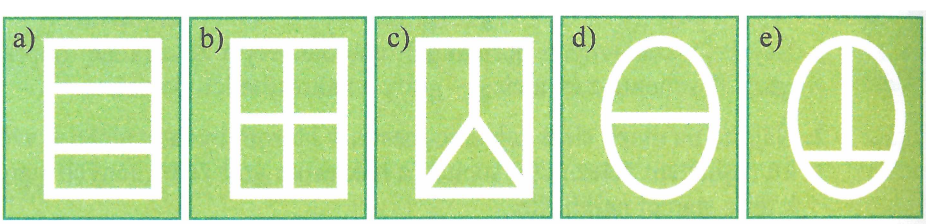
7. Pomocou grafu všetkých možností napíšte všetky:

a) dvojciferné čísla, ktoré majú na mieste desiatok číslicu 4 alebo 6 a na mieste jednotiek číslicu 7 alebo 9,

b) trojciferné čísla, ktoré sa skladajú z číslic 0, 8, 5 a 3. Číslice sa v čísle nemôžu opakovať.

8. V dvojkovej číselnej sústave používame iba číslice 0 a 1. Napíšte všetky možné dvojciferné, trojciferné a štvorciferné čísla, ktoré v tejto sústave existujú. Použite graf všetkých možností.

9. (Úloha zo súťaže KLOKAN, r. 1996)
Na obrázku sú zakreslené cesty v rôznych parkoch. Ktorý park sa dá prejsť tak, že prejdeme všetkými cestami, ale každou práve raz?

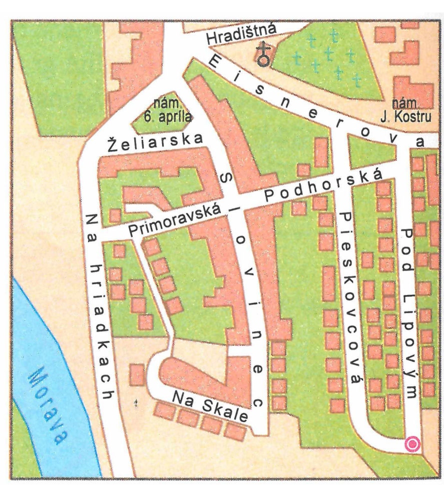


10. Sandra a Sebastián bývajú v Devínskej Novej Vsi a radi sa bicyklujú. Nájdite pre nich cyklistický okruh pri ktorom štart a cieľ budú vo vyznačenom bode na križovatke Pieskovcovej ulice a ulice Pod Lipovým, a platí:

a) prejdú každú vybratú ulicu alebo jej časť práve raz,

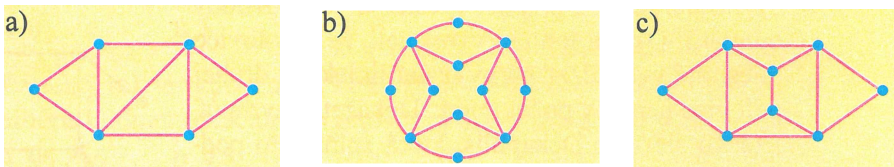
b) štart a cieľ bude na Pieskovcovej ulici, ale niektorými ulicami môžu prejsť dvakrát.

Nakreslite príslušné grafy cyklistických trás.

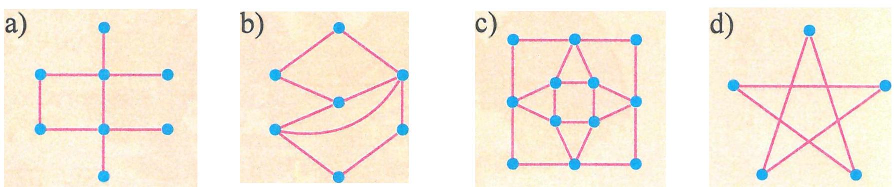


11. Na mape svojho okolia alebo obľúbenej turistickej lokality na Slovensku vytýčte niekoľko turistických alebo cyklistických okruhov a načrtnite ich grafy. Okruh znamená, že štart i cieľ sa nachádzajú v tom istom bode a každý úsek cesty prejdime práve raz.

12. Bez kreslenia povedzte, či nasledujúce grafy majú otvorený alebo uzavretý eulerovský ťah.

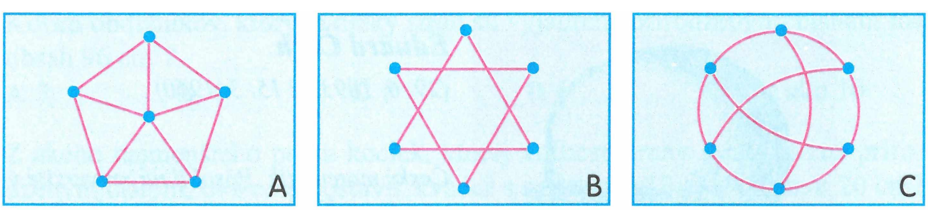


13. Práve dva z nasledujúcich grafov majú uzavretý eulerovský ťah, práve dva majú otvorený eulerovský ťah. Ktoré sú to grafy? Určte najskôr bez kreslenia a potom grafy nakreslite.



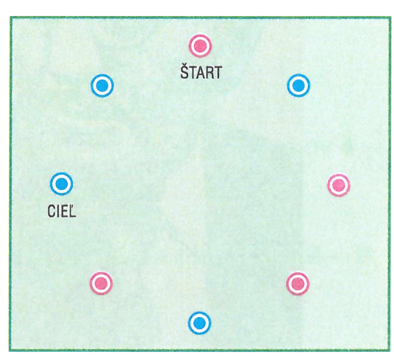
14. Doplňte nasledujúce grafy o minimálny počet potrebných hrán tak, aby sa dali nakresliť:

a) otvoreným eulerovským ťahom,
b) uzavretým eulerovským ťahom.



Priesečníky hrán nie sú vrcholmi grafu.

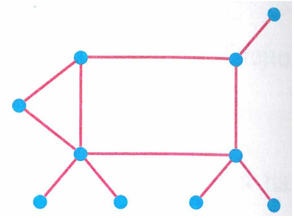
15. Na obrázku je znázornená trasa orientačnej hry. Susedné stanovištia sú od seba rovnako vzdialené. Nájdite najkratšiu trasu od štartu k cieľu, ak hra prebieha tak, že sa striedajú modré a červené stanovištia. Koľko takých trás viete nájsť?



16. Piati chlapci sa ubytovali na chate v detskom letnom tábore v jednej izbe. Je možné, aby každý z nich poznal práve troch spolubývajúcich? Pokúste sa nakresliť graf tejto situácie.

17. (Úloha zo súťaže PIKOMAT 1987/88)

V štáte Dekapolis (ktorý má desať miest) sa rozhodli vybudovať leteckú sieť, t. j. pospájať niektoré dvojice miest leteckými linkami. Prvý návrh je znázornený na obrázku. Ten však z estetických dôvodov odmietli. Okrem toho si vymysleli, že z polovice miest má vychádzať párny počet liniek a z druhej polovice nepárny počet liniek. Dokážete navrhnúť leteckú sieť pre Dekapolis, ktorá spĺňa túto podmienku?



Matematika je veda poriadku.

S. Weinberg

Eduard Čech

(29. 6. 1893 až 15. 3. 1960)

Český matematik. Pôsobil na univerzite v Brne, neskôr na Karlovej univerzite v Prahe.
Vo svojej vedeckej práci sa najviac venoval štúdiu projektívnych diferenciálnych vlastností geometrických útvarov. Neskôr sa zaoberal aj kombinatorickou topológiou. Zaslúžil sa o zlepšenie výučby elementárnej matematiky, napísal sériu stredoškolských učebníc matematiky.
Čechovou zásluhou bol vybudovaný Matematický ústav Československej akadémie vied a Matematický ústav Karlovej univerzity ako vedeckovýskumné strediská. Čech podporoval aj snahy o zriadenie Matematického ústavu v Slovenskej akadémii vied.

13 CVIČENIA NA OPAKOVANIE

1. Číslo $85^{2\,000}$ končí číslicou

   A 0 B 8 C 1 D 5 E 2

2. Svetelný rok je vzdialenosť, ktorú prejde svetlo za 1 rok, je to približne 9 a pol bilióna kilometrov. Ktorý zo zápisov zodpovedá tomuto číslu?

   A $95 \,.\, 10^{12}$ **B** $9{,}5 \,.\, 10^{11}$ C $9{,}5 \,.\, 10^{12}$ **D** $9{,}5 \,.\, 10^{10}$ E žiadny

3. $\left(-\frac{2}{3}x\right)^2 =$ **A** $-\frac{2^2}{3^2}x^2$ **B** $\frac{4}{9}x^2$ **C** $\frac{2}{3}x^2$ **D** $\left(-\frac{2}{3}x\right)\left(\frac{2}{3}x\right)$

   E ani jedna z možností **A – D**

4. Ktorý výsledok úlohy $1{,}9 \,.\, 10^6$ je správny?

   A19000000 B 19000 C $0{,}19.10^7$ D 1900000 E 190000

5. Polovica čísla 2^{48} je:

   A 2^{24} B 2^{47} C 2^{42} D 1^{48} E 1^{24}

6. $\sqrt{50} \,.\, \sqrt{50} =$

   A 50 B 500 C 100 D 25 E 250

7. $\frac{16^3}{81} : \frac{(2^5)^2}{3^2} =$

   A $\frac{3}{2^2}$ **B** $\frac{3^2}{2}$ **C** $\left(\frac{2}{3}\right)^2$ **D** $\left(\frac{3}{2}\right)^2$ **E** $\frac{3^2}{4}$

8. Koľko obdĺžnikov, ktorých dĺžky strán sú vyjadrené prirodzenými číslami má obsah 96 cm^2?

   A 3 B 4 C 5 D6 E viac ako 10

9. Z akého najmenšieho počtu kociek, ktorej veľkosť hrany je vyjadrená prirodzeným číslom, môžeme postaviť kváder s rozmermi 12 cm, 16 cm a 20 cm?

   A 60 B 40 C 20 D 25 E 12

10. Koľko deliteľov má číslo 60?

   A 6 B 12 C 14 D 6 E 16

11. V lesoparku je z 19 824 stromov a kríkov vysadená $\frac{1}{3}$ listnatých stromov a $\frac{5}{12}$ tvoria ozdobné kríky.

   a) Ihličnanov je:

   A 4 956 **B** 6 608 C 8 260 **D** 9 000 E žiadna z možností A **- D**

   b) Počet ozdobných kríkov je A, **B,** C, **D,** E.

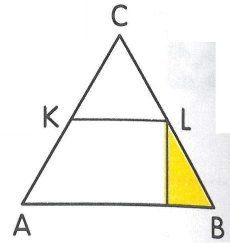
   c) Počet listnatých stromov je A, **B,** C, **D,** E.

12. Ôsmačky písali listy priateľom do cudziny. Hela napísala 1 list, Katka polovicu zo všetkých listov, Janka polovicu z toho čo Katka a Zuzka polovicu z Jankiných listov. Koľko listov napísali ôsmačky spolu?

A 10 B 20 C 8 D 6 E 16

13. Aká časť trojuholníka ABC je vyfarbená, ak vieme, že je to rovnoramenný trojuholník so základňou AB a úsečka KL je jeho stredná priečka?

A $\frac{1}{3}$ **B** $\frac{1}{7}$ **C** $\frac{1}{6}$ **D** $\frac{1}{10}$ **E** $\frac{1}{8}$



14. V zberovej lige vyhlásili na škole najlepších žiakov. Boli to Miško, Peter a Filip, ktorí spolu nazbierali 2 400 kg papiera v pomere 9 : 8 : 7 .

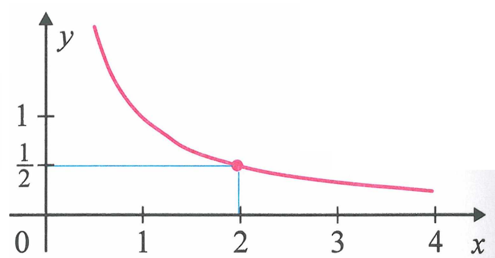
a) Nazbieral Peter 700 kg?
b) Nazbieral Miško najviac?
c) Nazbieral Filip viac ako Peter?

15. Plán bytu je zhotovený v mierke 1 : 200. Obývacia izba má na pláne rozmery 3,9 cm a 4 cm. Koľko korún zaplatíme za koberec, ktorý pokrýva $\frac{1}{3}$ izby, ak za 1 m^2 koberca zaplatíme 95 Sk?

A 2 000 Sk B 1 980 Sk C 1 976 Sk D viac ako 2 000 Sk
E menej ako 1 000 Sk

16. Na obrázku je graf úmernosti:

A $y = 2x$ **B** $y = \frac{1}{3}x$ **C** $y = x + 2$
D $y = \frac{1}{4}x$ **E** $\frac{1}{2}x + 2$



17. Graf nepriamej úmernosti $y = \frac{k}{x}$ prechádza bodom $X = \left[\frac{1}{2}, 3\right]$ práve vtedy, keď $k =$

A $3\frac{1}{2}$ **B** $\frac{1}{2}$ C 3 D 3,2 E 1,5

18. Na grafe priamej úmernosti $\boldsymbol{y} = 0{,}7 \cdot \boldsymbol{x}$ neleží bod:

A $\left[5, 3\frac{1}{2}\right]$ **B** [9; 6,3] **C** $\left[5, \frac{1}{4}\right]$ **D** [3; 2,1] **E** [1; 0,7]

19. Sčítame prvé a posledné z piatich za sebou idúcich prirodzených čísel a dostaneme číslo 40. Ktoré čísla sme sčítali?

20. Traja lyžiari - bežci vyrazili v tom istom čase k tomu istému cieľu. Prvý bežal rýchlosťou 15 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ a k cieľu dorazil o 14.00, druhý rýchlosťou 10 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ a do cieľa prišiel o 16.00, keď tam už tretí lyžiar s prvým hodinu popíjali čaj. Akou rýchlosťou bežal tretí lyžiar?

21. V prvom polroku roku 2000 sa v SR predalo 25 663 kusov osobných áut, je to pokles o 22,5 % v porovnaní s prvým polrokom roku 1999.

a) Koľko osobných áut sa predalo v prvom polroku roku 1999?

b) Koľko osobných áut sa predalo v ČR, ak to bolo 3,2-krát viac ako v SR?

22. Riešte rovnice a vykonajte skúšky správnosti:

a) $4 \,.\, (x-3) = 2 \,.\, (x+5)$ c) $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} - x = 2$

b) $3 \,.\, (2x-3) - \frac{1}{2}(x+1) = (x+1)$ d) $1 - \frac{4(3-2x)}{5} = 3x - \frac{x+1}{10}$

23. Štyria kamaráti dostali za zber starého papiera peniaze takto: Miro štvrtinu z celej sumy, Robo tretinu zo zvyšku, Boris polovicu z druhého zvyšku. Petrovi zostalo 16 Sk. Sumu, ktorú dostal Robo môžeme vyjadriť:

A $\frac{x}{3}\left(x - \frac{x}{4}\right)$ **B** $\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4}$ **C** $\frac{x}{3} - \frac{x}{4}$ **D** $\frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{4}x\right)$ **E** žiadna možnosť

24. Riešením rovnice $4\frac{1}{2}x - 8{,}5(1{,}4x + 5) = -31$ je

A x = 1,25 B x = -1 C x = 1 D nekonečne veľa čísel

E žiadna možnosť nie je správna

25. Riešením rovnice 3x = 8x je

A žiadne reálne číslo **B** $x = \frac{8}{3}$ **C** $x = \frac{3}{8}$ D $x = 0$ E nekonečne veľa riešení

26. Aké číslo treba napísať namiesto □, aby riešením rovnice $\frac{x}{3} + \frac{x}{2} = \square + x$ bolo číslo 12?

A 8 B -2 C 2 D 4 E iné číslo

27. Koreňom rovnice $\frac{x+3}{5} = 8 - \frac{x-1}{4}$ je číslo

A x = 17 B x = 9 **C** $x = \frac{134}{9}$ D nekonečne veľa čísel E iné číslo

28. Turista prešiel prvý deň polovicu cesty, druhý deň tretinu, na tretí deň mu zostalo prejsť ešte 12 km. Akú dlhú turistickú trasu si naplánoval prejsť?

A 25 km B 25,7 km C 72 km D 43 km E iné číslo

29. Riešte spamäti:

a) $8 < x - 3$ b) $2x - 5 < 7$ c) $-4 \geq -\frac{x}{3}$ d) $-16 > -4x$

30. Rozhodnite, či všetky riešenia daných nerovníc patria do množiny kladných reálnych čísel:

a) $2.(4x - 9) < 9(x - 2)$ b) $3.(3 + 4x) > 10 + 11x$ c) $-16(2 + x) < -7x - 32 - 8x$

31. Pomocou ekvivalentných úprav riešte nerovnice:

a) $300(t - 1) < 20(t + 1)$ b) $9 + 5n < 77 + 3n$

32. Pre ktoré párne prirodzené čísla $\boldsymbol{n}$ platí $-2 \leq \boldsymbol{n} < 5$?

33. Pre ktoré $\boldsymbol{x}$ je výraz: $\frac{x-3}{2}$ kladný?

34. Pre ktoré dvojciferné čísla $\boldsymbol{a}$ deliteľné číslom 5 platí: $20 \leq \boldsymbol{a} \leq 33$?

35. Cyklista išiel z Myjavy do Brezovej pod Bradlom rýchlosťou $16 \frac{km}{h}$, na spiatočnej ceste rýchlosťou $30 \frac{km}{h}$. Mestá sú vzdialené 10 km. Za aký čas prešiel cyklista obidve cesty?

36. Ktoré číslo je o 15 menšie (väčšie) ako jeho polovica?

37. Športové lietadlo letelo rýchlosťou $300 \frac{km}{h}$. Keď bolo 50 km od letiska, vzlietla za ním stíhačka rýchlosťou $550 \frac{km}{h}$. Za aký čas dostihne stíhačka športové lietadlo?

38. Bazén sa naplní jedným prívodom za 40 minút, druhým prívodom za 1 hodinu. Ako dlho potrvá naplnenie bazéna obidvoma prívodmi?

39. Do nádrže pritečie voda za 5 min. Plná nádrž sa odpadovým otvorom vyprázdni za 7 minút. Za aký čas sa naplní celá nádrž, ak je otvorený prívod aj odpadový otvor?

40. Číslo 8 rozdeľte na dva sčítance tak, aby jeden bol o $\frac{1}{2}$ väčší ako polovica druhého sčítanca.

41. Daný je trojuholník *ABC* so stranami $\boldsymbol{a} = 6$ cm, $\boldsymbol{b} = 4$ cm, $\boldsymbol{c} = 8$ cm. Napíšte dĺžky jeho stredných priečok.

42. Uhlopriečky štvoruholníka *ABCD* majú veľkosti 12 dm, 7 dm. Určte veľkosti strán štvoruholníka, ktorého vrcholy sú stredy strán štvoruholníka *ABCD.*

43. Základne lichobežníka majú dĺžky 6,4 dm, 5,7 dm. Určte dĺžku strednej priečky lichobežníka.

44. Základne lichobežníka majú dĺžky v pomere $4:3$. Väčšia má 2,4 m. Vypočítajte dĺžku strednej priečky lichobežníka.

45. Zostrojte lichobežník *ABCD* $(AB \| DC)$, keď sú dané veľkosti strán $a = 5$ cm, $b = 3$ cm, veľkosť strednej priečky $p = 4$ cm a veľkosť uhla $\beta = 75°$.

46. Ktoré z bodov *A, B, C, D, E, F* ležia na kružnici *k(S,* 3 cm), ktoré sú vnútri kružnice a ktoré zvonku kružnice, keď: |SA| = 18 mm, |*SB*| = 4 cm, |SC| = 30 mm, |*SD*| = 31 mm, |*SE*| = 29,5 mm, |*SF*| = 3 cm.

47. Na kružnici *k(S,* 2 cm) je daný bod *A*. Zostrojte tetivu *AB* tak, aby |□ASB| =45°.

48. V kružnici *k(S, 6* cm) sú zostrojené tetivy: |*AB*| = 6 cm, |*BC*| = 7 cm, |*AD*| = 1 cm, |*EF*| =11,9 cm, |*ED*| = 7,1 cm. Zostavte poradie uhlov □ *□SB, □ BSC, □ DSA, □ ESF,* □ *ESD* podľa veľkosti.

49. Stredy všetkých zhodných tetív kružnice *k,* menších než jej priemer, ležia na kružnici, ktorej stred splýva so stredom kružnice *k.* Dokážte.

50. Aká je vzájomná poloha priamky *p* a kružnice *k(S, 4* cm), keď má priamka *p* od stredu *S* vzdialenosť

a) 39 mm, b) 0,4 dm, c) 0,4 m, d) 0,04 m, e) 0,04 dm?

51. Zvoľte priamku *p* a mimo nej bod *S.* Zostrojte kružnicu, ktorá má stred v bode S a dotýka sa priamky *p.*

52. Narysujte priamku *t* a na nej zvoľte bod *T.* Zostrojte kružnicu s polomerom 3,5 cm, ktorá sa dotýka priamky *t* v bode *T.* Koľko je možností?

53. Priamky *m, n* sa dotýkajú kružnice *k* v bodoch *A, B,* ktoré sú koncovými bodmi priemeru kružnice *k.* Dokážte, že *m*||*n.*

54. Kružnice $k_1(S_1,$ 5 m), $k_2(S_2,$ 3 m) sa dotýkajú zvonka. Určte dĺžku ich strednej priečky.

55. Narysujte dve sústredné kružnice s polomermi 3,2 cm, 1,8 cm a pretnite ich priamkou *m* prechádzajúcou spoločným stredom obidvoch kružníc. Priesečníky označte *A, B, C, D* a určte vzdialenosť každých dvoch z týchto bodov.

56. Narysujte dve kružnice s polomermi 3 cm, 2 cm tak, aby ich spoločná tetiva mala najväčšiu dĺžku.

57. Priemer kolesa motocykla je 60 cm. Koľkokrát sa otočí koleso motocykla na ceste 1 km dlhej.

58. Vypočítajte obsah medzikružia určeného kružnicami, ktorých polomery majú veľkosti 6,4 dm, 3,7 dm.

59. Aký veľký je priemer *a* prierez kmeňa, ktorý má obvod a) 75 cm, b) 2 m?

60. Daná je úsečka *AB.* Určte množinu vrcholov *C* rovnoramenných trojuholníkov *ABC,* ktorých základňou je úsečka *AB.*

61. Trvanlivé polotučné mlieko obsahuje 1,5 % tuku. Koľko mililitrov tuku obsahujú 4 litre takéhoto mlieka?

62. Ovocnú šťavu Igor namiešal z dvoch litrov vody a 1,4 decilitra sirupu. Koľko percent nápoja tvorí sirup?

63. V 8. A triede je spolu 24 žiakov. Keby 4 dievčatá odišli, tvorili by chlapci 75 % žiakov. Koľko chlapcov chodí do 8. A?

64. Každý pracovný deň v týždni pokosil kosec $\frac{1}{8}$ lúky. Koľko percent lúky mu zostáva pokosiť počas soboty a nedele?

65. Študentovi univerzity zvýšili štipendium o 20 % a potom ešte raz o 10 %. Teraz dostáva 1 056 Sk. Aké bolo jeho pôvodné štipendium?

66. Za jednu hodinu vyrovná valec 5 m novej asfaltovej cesty. Koľko metrov novej cesty treba vyrovnať, ak za 6 hodín vyrovná 25 % z celkovej dĺžky novej cesty?

67. Počet mužov v učiteľskom zbore školy sa v roku 1998 znížil o 20 % a v roku 1999 ešte o 75 % tak, že na škole zostali dvaja učitelia. Koľko mužov - učiteľov pôvodne na škole učilo?

68. Ktorým číslom musíme vydeliť kladné číslo x, aby sme ho zmenšili o 75 %?

69. O koľko percent sa zväčší obsah štvorca, ak dĺžku jeho strany zväčšíme o 25 %? Zistite pomocou niekoľkých konkrétnych príkladov.

70. 1,25 miliardy obyvateľov zemegule nemá žiadnu lekársku starostlivosť. Koľko percent všetkých obyvateľov zemegule títo ľudia predstavujú, ak počet obyvateľov zemegule v roku 2000 bol asi 6,2 miliardy?

71. Na území Slovenskej republiky žije 348 druhov vtákov. Z nich je 234 druhov chránených. Koľko je to percent?

72. Cigaretový dym pôsobí na nefajčiarov veľmi škodlivo. Ak bezohľadný fajčiar fajčí v prítomnosti nefajčiara, je to akoby nefajčiar vyfajčil 25 % vyfajčených cigariet. Hovorí sa tomu pasívne fajčenie. Koľko cigariet pasívne vyfajčí nefajčiar, ak bol nútený vdychovať dym z 20 cigariet?

73. Najdlhšia kosť v ľudskom tele je stehenná kosť. Predstavuje 27,5 % výšky človeka. Akú dĺžku má tvoja stehenná kosť? (Zaokrúhli na desatiny centimetra).

74. Vedci skúmajú 2 190 druhov tropických rastlín, ktoré by mohli byť využité pri liečbe rakoviny. Je to 73 % všetkých doposiaľ známych rastlín, ktoré majú protirakovinové účinky. Koľko rastlín je doposiaľ známych svojimi protirakovinovými účinkami?

75. Svetové zásoby vody sa odhadujú na 1 360 mil. km^3 vody. Doplňte tabuľku:

Oceány	97,2 %	km^3
Ľadovce	2,15 %	km^3
Podzemná voda	0,625 %	km^3
Rieky a jazerá	0,0171 %	km^3
Vodná para	0,001 %	km^3

76. Z daných výrazov vypíšte: a) súčty, b) rozdiely, c) súčiny, d) podiely.
A $p+q$; $6a$; $\frac{c}{d}$; $10-a$; $8:4$; xy **B** $z:2$; $8+k$; $d-c$; $8\,.\,2$; $15+14$; $\frac{1}{a}$

77. Napíšte a pomenujte výraz, ktorý sa skladá:
a) zo sčítanca m a sčítanca n c) z dvoch rôznych sčítancov
b) z troch rôznych činiteľov d) z menšenca 20 a menšiteľa p

78. Napíšte výraz vyjadrený slovami:
a) podiel čísla k a čísla 5 c) súčin čísel 15 a x
b) súčet čísla 0,5 a čísla d d) rozdiel čísla y a čísla b

79. Napíšte číslo:
a) o 10 menšie ako u c) o b menšie ako 100 e) o $5\frac{1}{4}$ väčšie ako y
b) dvakrát väčšie ako z d) trikrát menšie ako v

80. Aké hodnoty nadobúda rozdiel $a - 6$ pre $a = 15$; 6,2; 6; 4,5? Počítajte spamäti.

81. Vypočítajte: a) $\left(5{,}4+3\frac{1}{2}\right).\,8$ c) $5\,.\,8-(5+8)$ e) $\frac{6\,.\,4+2}{65-19}$
b) $6\,.\,3+\frac{21}{3}$ d) $(117:13)-4$ f) $(32-17):\frac{24+6}{3\,.\,2}$

82. Napíšte a pomenujte výrazy:
a) rozdiel čísel b a 5 vynásobený dvoma;
b) od súčinu čísel 6 a p odčítame štvornásobok čísla s;
c) súčet čísel 11 a b odčítame od čísla c;
d) k podielu čísel x a y pričítame ich súčin.

83. Upravte: a) $4+a+6$ c) $a+1+b+c+2$ e) $0{,}4+a+5{,}6+x+1{,}5$
b) $x+\frac{3}{4}+y+\frac{1}{2}$ d) $15+u+13+v+12$

84. Vyjadrite $\boldsymbol{x}$:
a) $\boldsymbol{x}+6=12$ b) $\frac{3}{4}+x=1$ c) $x+10=b$ d) $x+u=0$ e) $0+x=u$

85. Dosaďte za $x = 10$, $y = 4$, $z = \frac{3}{2}$ a vypočítajte:

a) 10x - 4y b) x . z - (x + z) c) y : (x - z) d) x . y + 4z - x

86. Autobus prejde za jednu hodinu priemerne *k* kilometrov. Koľko kilometrov prejde za 5 hodín?

87. Sud s vodou má hmotnosť *m* kilogramov. Prázdny sud má hmotnosť *a* kilogramov. Akú hmotnosť má voda v 15 sudoch?

88. Vyjadrite ako súčet alebo rozdiel:

a) $(x + 5) . 6$ c) $\left(\frac{1}{2} + x\right) . 4$ e) $(0{,}5 - 0{,}4d) : \frac{1}{100}$

b) $10 . (0{,}3\,a - 1{,}2)$ d) $(18a - 4) : 2$

89. Vypočítajte: a) 5 - 4 - (-9) c) 10 - (1 - 0,1)

b) 1 - (-4) - 3 + (-6) d) - 12 - (18 - 30)

90. Doplňte tabuľku:

x	-4		100	$-\frac{1}{2}$	-3	15	
y	-25	-3		8			$\frac{2}{5}$
$x . y$		24	-50		27	0	-2

91. Upravte. O správnosti výsledku sa presvedčte dosadením.

a) 19x - 25y - 37 + 64y + 19x c) -2x + 5xy - 6 - 8xy + 7x + 7

b) 2rs + 4r + rs - 3r - s - 3rs

92. Upravte: a) (-3x) + (+4x) + (-5x) + (+8x)

b) (+6a2b) + 9ab + (-a2b) + (-2ab) + (-4a2b)

93. Sčítajte: a) (-8a - 16b + 24) - (20 + 12a)

b) -10uv + 6u - (3v + uv - 9u) + 5v

c) $(4x^2 + 2xy - y^2) - (-a^2 + y^2) + (3x^2 - 2xy + y^2)$

94. Vypočítajte rozdiel ***A* - *B*,** ak:

a) ***A*** = 3x- (2y + x) - 7**;** ***B*** = -4x + 3y + 5

b) ***A*** = $2x^2 + 3y^2 + z^2$; ***B*** = $x^2 - 2y^2 + z^2$

95. Keď k číslu ***r* + 5*s*** pričítame číslo o *7s* menšie, výsledok bude:

A *r- 2s* B *2r-2s* C *2r + 12s* D *r+12s* E žiadna možnosť nie je správna

96. Doplňte:

a) $a^2 . * = a^5$ b) $2x^2 + * = 3x^2$ c) $(-y^2). * = y^4$ d) $u^3 . (-u) . * = u^4$

97. Súčet dvoch za sebou idúcich prirodzených čísel, z ktorých väčšie je $\mathbf{5x}$ sa rovná:

A 5x +1 B 10x+1 C 5x + 5 D 10x E žiadna možnosť nie je správna

98. Dĺžka jednej strany trojuholníka je $2x + 3$, druhá je o $\frac{1}{2}$ kratšia a dĺžka tretej je $2,5x - 10$. Obvod trojuholníka potom je:

A $5,5x-\frac{11}{2}$ **B** $6,5x-4$ **C** $5,5x-4$ **D** $6,5x-\frac{1}{2}$ E žiadna možnosť nie je správna

99. Vynásobte. O správnosti výsledku sa presvedčte dosadením,

a) $(x^2 - 2x + 1). (-3x)$ b) $(3a - 4y) . 3ay$ c) $10 . \left(a^2 + 3ab - \frac{1}{3}b + 0,01\right)$

100. Vypočítajte:

a) $(3x + 5) . (3x - 5)$
b) $3x + 5 (3x - 5)$
c) $(3x + 5). 3x - 5$
d) $3x + 5 . 3x - 5$
e) $(a + 2). (b + 3)$
f) $(x + 4). (x - 2)$
g) $(x + a) .(x - b)$
h) $(a - 2) .(b - 1)$

101. Presvedčte sa, že:

a) $(x + 3) . (x + 5) = x^2 + (3 + 5) .x + 3 .5 = x^2 + 8x + 15$
b) $(x - 1).(x + 2) = x^2 + (-1 + 2).x + (-1).2 = x^2 + x - 2$
c) $(x - 4) . (x - 3) = x^2 + (-4 - 3).x + (-4) . (-3) = x^2 - 7x + 12$

102. Vypočítajte násobením a pomocou vzorcov:

a) $(x+y)^2$ b) $(x-y)^2$ c) $(a + 2)^2$ d) $(b-4)^2$ e) $(3x + 2y)^2$ f) $(x-3y)^2$

103. Riešte rovnice:

a) $(y + 1)^2 - y^2 = 19$
b) $(2x + 5)(2x - 5) - 4x (x - 2) = 15$
c) $2(x + 1)^2 - (x - 4)(x + 1) - (x + 2)(x + 3) = 14$

104. Rozložte na súčin:

a) $x - xy$, $2a + 2b$, $20u-10$, $6p + 4q$
b) $2xy- 7yz$, ab^2-ab, $4pq^2 + q^3$, $2x^5 - x^4y$
c) $3cb-3ba$, $6a +18b$, $13a^2 + 26ab$, $3xy^3 - 9y^2$

105. Vyjmite pred zátvorku číslo (-1):

a) $(-x - y)$, $(-3a - 2)$, $(4x - 3y)$, $(5m + 1)$
b) $-4a - 3b$, $a^2 - b^2$, $2x^2 + 1$, $x^2 - 2$

106. K daným mnohočlenom napíšte opačné mnohočleny:

a) $4xy - z$, $-x^2 + 5x$, $-12 + 9ab - 4ab^3$
b) $-x^3 + 3x^2 - 7x -1$, $3pq - x + 5q - 6$

107. Rozložte na súčin dvoch činiteľov:

a) $a(x + y) + b(x + y)$
b) $(4 - a) -2b(4 -a)$
c) $x(y - 8) - 15(8 - y)$
d) $a(c - d) - b(d - c)$

108. Rozložte na súčin podľa vzorca: $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$

a) $a^2 - b^2$; $25 - c^2$; $a^2 - s^2t^2$; $1 - x^2$;

b) $4x^2 - 81y^2$; $54^2 - 25^2$; $- a^2 + b^2$; $9r^2 - 1$;

c) $(u + 2)^2 - v^2$; $(x + 3)^2 - (2 + x)^2$; $(x + 4)^2 - 100$; $(a - 1)^2 - 1$.

109. Vnútorný bod pravého uhla má od jeho ramien vzdialenosti ***a, b.*** Určte jeho vzdialenosť od vrcholu uhla.

110. Vypočítajte dĺžku strany štvorca, keď je o 2 dm kratšia než jeho uhlopriečka.

111. Body *A, B, C* označujú tri mestá. Mesto *A* leží 30 km severne od mesta *B* a 50 km západne od mesta C. Určte vzdialenosť miest *B, C.*

112. Základňa rovnoramenného trojuholníka má 8 m, výška na základňu 4 m. Určte dĺžku ramien.

113. Rameno rovnoramenného trojuholníka má dĺžku 17 cm, jeho základňa 16 cm. Vypočítajte dĺžku výšky na základňu.

114. Polomer kružnice *k* má 89 cm, jej tetiva 16 dm. Vypočítajte vzdialenosť tejto tetivy od stredu kružnice *k.*

R **115.** Polomery dvoch pretínajúcich sa kružníc majú 13 cm a 15 cm. Ich spoločná tetiva je 24 cm dlhá. Vypočítajte vzdialenosť stredov týchto kružníc.

R **116.** Úsečky *AB, CD* sú dve rovnobežné tetivy kružnice, ktorej polomer má 15 cm, $|AB| = 18$ cm, $|CD| = 24$ cm. Vypočítajte vzdialenosť tetív *AB, CD.* (Sú dve možnosti.)

117. Zostrojte štvorec, ktorého obsah sa rovná rozdielu obsahov štvorcov so stranami 5 cm a 3 cm.

118. Daná je priamka *p* a úsečka *u.* Určte množinu bodov vzdialených od priamky *p* o úsečku *u.*

119. Daná je priamka *t* a úsečka *r.* Určte množinu stredov kružníc, ktoré majú polomer *r* a dotýkajú sa priamky *t.*

120. Určte množinu vrcholov *L* všetkých zhodných trojuholníkov *JKL,* ktorých strana *JK* leží na danej priamke *p.*

121. Dané sú body $A \neq B$ a úsečka *u.* Určte množinu vrcholov C všetkých trojuholníkov *ABC,* ktorých strana *BC* je zhodná s úsečkou *u.*

122. Zostrojte trojuholník *ABC,* keď je dané $c = 7$ cm, $v_a = 5$ cm, $v_b = 4{,}5$ cm.

123. Určte množinu stredov *S* kosoštvorcov *ABCD,* ktorých strana *AB* je pevná.

124. Daná je kružnica *k(S, r)* a na nej bod *M.* Určte množinu stredov *O* tetív kružnice *k,* ktoré prechádzajú bodom *M.*

125. Daná je kružnica $k(S, 3\text{ cm})$ a bod M, $|MS| = 7$ cm. Zostrojte dotyčnice kružnice k, ktoré prechádzajú bodom M.

126. Daný je rovnoramenný lichobežník. Opíšte mu kružnicu.

127. Zostrojte trojuholník, keď je daná poloha dvoch jeho vrcholov A, B a priesečník jeho výšok V. (Body $A \neq B \neq V$ neležia na jednej priamke).

128. Zostrojte pravouhlý trojuholník ABC s preponou AB, keď je dané $a = 5$ cm, $t_b = 6{,}5$ cm.

129. Zostrojte rovnoramenný trojuholník ABC *(AC □ BQ,* keď je dané: $v_c = 4{,}7$ cm, $t_a = 3{,}4$ cm.

130. Narysujte ľubovoľný päťuholník *ABCDE* a zostrojte jeho obraz v stredovej súmernosti so stredom *B*.

131. Ťažnica trojuholníka splýva s jeho výškou. Je tento trojuholník

a) rôznostranný, b) rovnoramenný, c) rovnostranný?

132. Zostrojte kosoštvorec, ak je daná veľkosť jeho strany a jedného vnútorného uhla:

a) 4 cm, 60° b) 3,8 cm, 30° c) 4,5 cm, 120°

133. Jedna uhlopriečka kosoštvorca je zhodná s jeho stranou. Určte veľkosti uhlov tohto kosoštvorca.

134. Zostrojte rovnobežník *ABCD*, ak je daná veľkosť jeho strany a uhlopriečok:

a) $|AB| = 4$ cm, $|AC| = 6$ cm, $|BD| = 5$ cm;

b) $|BC| = 2$ cm, $|AC| = 5{,}5$ cm, $|BD| = 4$ cm.

135. Koľko dm^2 organického skla treba na výrobu 50 podložiek tvaru pravidelného šesťuholníka, ktorého strana má dĺžku 8 cm?

136. Kosoštvorec *ABCD* má dĺžku strany a = 4 cm a dĺžka jednej uhlopriečky je 6,4 cm.

a) Vypočítajte dĺžku druhej uhlopriečky.

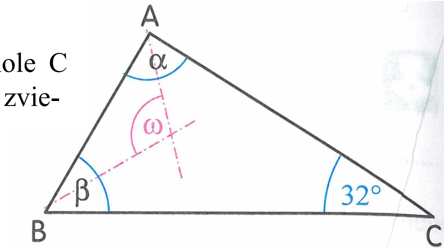
b) Zostrojte kosoštvorec *ABCD*.

137. Zostrojte obdĺžnik *ABCD,* ak poznáte dĺžku strany $a = |AB| = 6$ cm a veľkosť súčtu $b + e = 11$ cm (dĺžku uhlopriečky $AC = e$, dĺžku druhej strany obdĺžnika $BC = b$).

138. Vrcholmi daného $\Delta\ ABC$ narysujte rovnobežné priamky s protiľahlými stranami. Dokážte, že týmto dostanete štyri zhodné trojuholníky.

139. Medzi ramenami uhla *ASB* je daný bod *R*. Zostrojte takú priamku prechádzajúcu bodom *R*, ktorá vytne na ramenách uhla *ASB* rovnako dlhé úseky.

140. V trojuholníku *ABC* má uhol pri vrchole C veľkosť 32°. Určte veľkosť uhla, ktorý zvierajú osi súmernosti uhlov α, *β*.

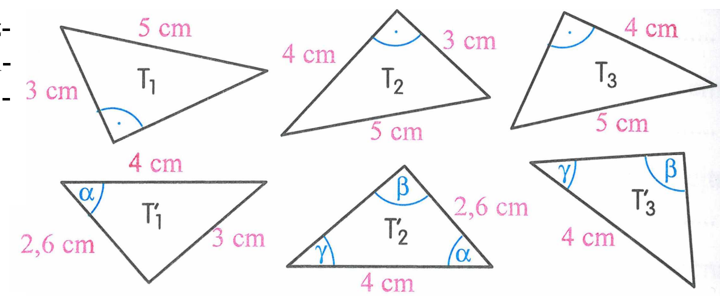


141. Sú dané dva body *A, C* a priamka o_c neprechádzajúca bodom *A*. Zostrojte kružnicu opísanú trojuholníku *ABC,* ak je o_c os strany *AB*.

142. Daný je štvorec *ABCD* s uhlopriečkou *AC*. Zostrojte kružnicu vpísanú do trojuholníkov *ABC* a *ACD* a rozhodnite, či tieto kružnice majú spoločné body.

143. Zostrojte trojuholník *ABC,* ak poznáte veľkosť strany *b* a veľkosti ťažníc t_a, t_c.

144. Nájdite na obrázku všetky dvojice zhodných trojuholníkov.



145. Zostrojte ľubovoľný tupouhlý trojuholník. Narysujte jeho stredné priečky. Trojuholník je strednými priečkami rozdelený na štyri trojuholníky, ktoré sú tiež tupouhlé. Odôvodnite to.

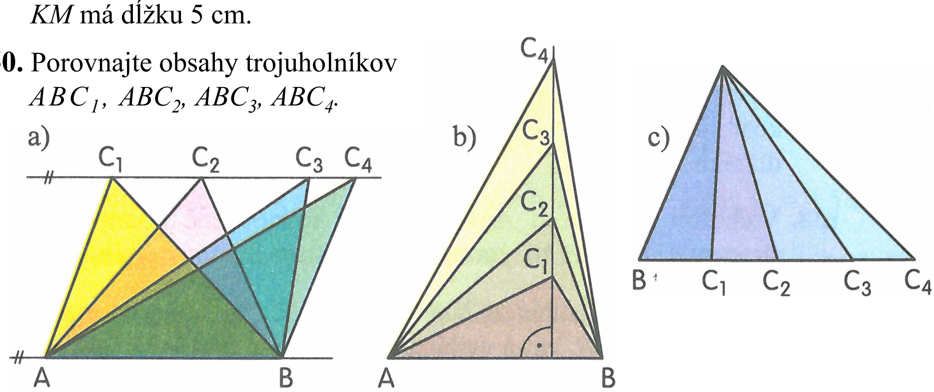
146. Zostrojte pravidelný osemuholník *ABCDEFGH* tak, aby jemu opísaná kružnica mala polomer 4 cm.

147. Zostrojte štvoruholník *KLMN,* ak je dané:
|*KL*| = 4 cm, |*LM*| = 5,5 cm, |MN| = 5 cm, |*NK*| = 3 cm, |*KM*| = 6 cm.

148. Zostrojte lichobežník *ABCD* so zhodnými ramenami *AD* a *BC* dĺžky 5 cm, ak |*AB*| = *7* cm a |□ *DAB*| = 60°.

149. Zostrojte kosoštvorec *KLMN* so stranou dĺžky 3,5 cm, ktorého uhlopriečka *KM* má dĺžku 5 cm.

150. Porovnajte obsahy trojuholníkov ABC_1, ABC_2, ABC_3, ABC_4.



151. Koľko rôznych trojpásových a trojfarebných zástav (trikolór) možno zostaviť z bielej, žltej a čiernej látky.

152. Koľko rôznych poradí existuje na spojenie štyroch bodov v rovine?

153. Členovia 5-člennej rodiny vstávajú každé ráno postupne za sebou. Koľko je rôznych poradí vstávania členov tejto rodiny?

154. Pán učiteľ vyskúšal na hodine matematiky štyroch žiakov, Janka, Karola, Betku a Miška. Nikto z nich nedostal päťku, ale ani dvaja nedostali rovnakú známku. Koľkými rôznymi spôsobmi mohli byť žiaci klasifikovaní?

155. Máme 5 kľúčov od 5 miestností. Najviac koľkými pokusmi na otvorenie sa dajú otvoriť všetky dvere?

156. Máme 5 rôznofarebných žetónov, vložených do nepriehľadného vrecúška. Ťaháme ich po jednom. V koľkých rôznych poradiach možno vytiahnuť postupne všetky žetóny.

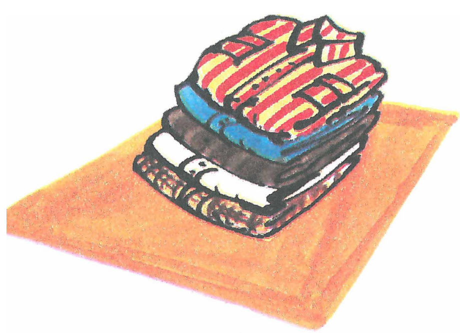
157. Pomocou cifier 2, 3, 4, 5 napíšte všetky dvojciferné čísla bez opakovania cifier. Koľko je takýchto čísel?

158. Koľkými rôznymi spôsobmi môžu členovia 8-členného šachového krúžku vybrať spomedzi seba tajomníka a hospodára krúžku?

159. V ume je červená, modrá a biela guľka. Súťažiaci vytiahne prvú guľku, potom ju vloží do umy naspäť a vytiahne druhú guľku, ktorú opäť vloží naspäť a ťahá tretiu guľku. Vyhráva vtedy, ak v trojici vytiahnutých guliek nie je červená. Vypočítajte pravdepodobnosť výhry.

160. Milan dostal od začiatku roka tri rôzne známky z matematiky. Aká je pravdepodobnosť, že nedostal päťku?

161. Milan má 4 rôzne viazanky a 5 rôznofarebných košieľ. Aká je pravdepodobnosť udalosti, že si oblečie bielu košeľu a modrú viazanku?



162. Z mesta ***A*** do mesta ***B*** vedú 4 cesty (1, 2, 3, 4), z mesta ***B*** do mesta ***C*** 3 cesty (a, b, c). Aká je pravdepodobnosť, že náhodný cestujúci pôjde cestou 3, ***b***?

163. V ume je 5 guliek, z ktorých 3 sú červené a 2 modré. Ťaháme prvú guľku potom ju vložíme naspäť a vytiahneme druhú guľku. Aká je pravdepodobnosť, že vytiahneme jednu červenú a jednu modrú guľku?

164. Na tanečnej zábave si traja chlapci Adam, Braňo a Dano mohli vybrať do tanca zo štyroch dievčat: Kláry, Milky, Zuzky a Lindy. Aká je pravdepodobnosť, že Dano a Klára tancovali spolu?

165. Zdenka má 5 guľôčkových pier, z ktorých má každé inú farbu: zelenú, hnedú, modrú, červenú a žltú. Dve rôznofarebné z nich chce darovať svojmu bratovi. Aká je pravdepodobnosť, že jedno z pier bude žlté?

Kultúrna úroveň určitej krajiny sa dnes posudzuje podľa priemernej matematickej úrovne jej obyvateľov.

A. Lichnerowitz

ROZUM DO HRSTI

Milí ôsmaci, úroveň vášho myslenia sa stále zvyšuje. Preto je potrebné riešiť aj zložitejšie a obtiažnejšie úlohy. Také vám teraz predkladáme. Hľadajte postupy na ich riešenie. Z výsledkov svojej práce budete mať určite radosť. Veľa úspechov!

1. Z číslic 1 až 9 zostavte dvojice čísel a výsledok ich násobenia tak, aby obidva činitele a ich súčin obsahovali každú z deviatich číslic, a to práve raz.

   Napríklad 18 . 297 = 5 346

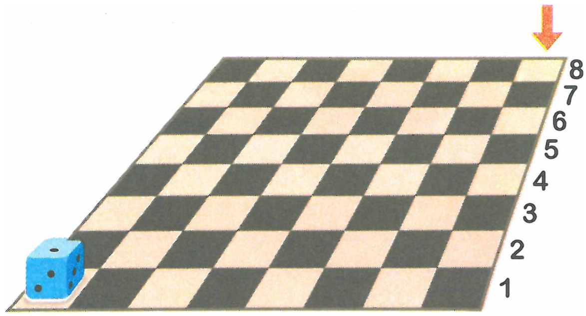
   Pomocou počítača sme zistili, že existuje ešte osem podobných súčinov. Pokúste sa ich nájsť.

2. V trojuholníku ABC sa $|AB| = 12$ cm, uhol pri vrchole A označte $\alpha = 30°$, uhol pri vrchole B označte $\beta = 45°$. Vypočítajte obsah trojuholníka ABC.

3. Môže mať lichobežník strany s veľkosťami 2, 2, 3, 5? Ktoré z týchto hodnôt sú potom dĺžkami jeho základní? Uveďte všetky riešenia.

4. Na číselnej osi leží päť navzájom rôznych bodov. Označme ich A, B, C, D, E tak, aby zároveň platilo:
a) bod A leží medzi bodmi B a E,
b) bod C leží medzi bodmi A a B,
c) bod D neleží medzi bodmi B a E.

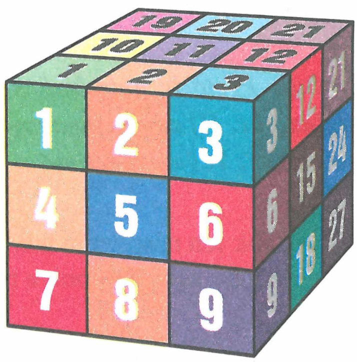
5. Na šachovnici na poli ***a*1** stojí hracia kocka. Preklápaním premiestnite kocku na pole ***h8***. Môžete meniť dráhy putujúcej kocky tak, aby sa na poli ***h8*** vystriedali všetky jej steny? Určte pre každú možnosť príslušnú dráhu kocky.



6. Sú dané dva body A, B. Zostrojte pravidelný osemuholník, ktorý má v bodoch A, B stredy niektorých dvoch strán. Napíšte všetky možnosti.

7. V obdĺžniku $ABCD$ sú E, F po rade stredy strán AB, CD. Obdĺžnik je rozdelený úsečkami AF, CE, BD na 6 častí, z ktorých dve najmenšie majú rovnaký obsah 24 cm^2. Vypočítajte obsah celého obdĺžnika.

8. Zostrojte rovnoramenný lichobežník $ABCD$ s dlhšou základňou $|AB| = 10$ cm, ak viete, že ho možno rozdeliť dvoma priamkami prechádzajúcimi bodom A na tri rovnoramenné trojuholníky, z ktorých jeden je trojuholník ABC.

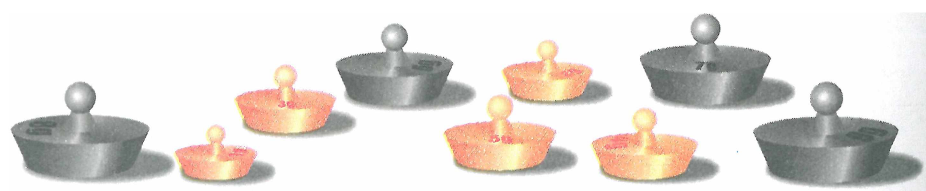
9. 

Na obrázku je znázornená kocka zlepená z 27 zhodných stavebnicových kociek. Zistite, aké rôzne počty stavebnicových kociek môžeme odobrať z veľkej kocky, aby zostalo teleso, v ktorom každá stavebnicová kocka sa dotýka práve dvoma svojimi stenami s inými stavebnicovými kockami. Pre každý možný počet stačí uviesť jeden príklad. Úloha má 7 riešení.

10. Janko sa chválil: „Keď budem mať 9 závaží s hmotnosťami 1 g, 2 g, 3 g........9 g, dokážem ich rozdeliť na 3 skupiny s rovnakými hmotnosťami.“

Jurko: „To nič nie je, ja viem rozdeliť na také skupiny aj 33 závaží s hmotnosťami od 1 g do 33 g.“

Karol: „Ja viem rozdeliť 33 závaží na 4 skupiny s rovnakými hmotnosťami.“ Zistite, kto z nich mohol svoje tvrdenie splniť. Ak rozdelenie možno vykonať, uveďte príklad, keď nie, odôvodnite prečo.



Spravodlivosť a pravda, to sú prvé ľudské povinnosti
Hovor pravdu a konaj dobro.

J. J. Rousseau

VÝSLEDKY ÚLOH A CVIČENÍ

6 Riešenie lineárnych rovníc a nerovníc

6.1 Riešenie lineárnych rovníc pomocou ekvivalentných úprav

Úlohy: **1.a)** $x = -6$, je rovnica; **b)** $2x = 0$, je rovnica; **c)** $0 \,.\, x = 7$, nie je rovnica; **d)** $0 \,.\, x = 0$, nie je rovnica; **2.** rovnice sú: b), c), e), f), g); **3.a)** –5; **b)** 3; **4.a)** $d = -4$; **b)** $d = 0$; **c)** $d = \frac{5}{4}$; **5.a)** $x = 5$; **b)** $a = 0$; **c)** $y = -7$; **d)** $r = \frac{1}{2}$; **e)** $k = \frac{23}{2}$; **6.a)** $x = 9$; **b)** $y = 5$; **c)** $x = 15$; **d)** $y = \frac{3}{2}$; **7.** E $\frac{10}{41}$; **8.** B 5.

Cvičenia: **1.** rovnice sú: a), c), d), e), g); **2.** b), c), d), e), f); **3.a)** 0; **b)** 1; **c)** 9; **d)** 4; **4.a)** $b = -7$; **b)** $b = -3$; **c)** $b = 5$; **d)** $b = \frac{1}{5}$; **5.a)** $x = -\frac{3}{5}$; **b)** $y = 27$; **c)** $z = \frac{1}{3}$; **d)** $v = -1$; **6.a)** $x = -8$; **b)** $x = 24$; **c)** $x = 0$; **d)** $y = 15$; **e)** $y = -3$; **f)** $y = -\frac{1}{5}$; **g)** $z = \frac{8}{3}$; **7.a)** $x = 14$; **b)** $y = -\frac{1}{6}$; **c)** $z = \frac{5}{3}$; **d)** $u = 6$; **e)** $v = -1$; **8.a)** $x = -8$; **b)** $x = -\frac{1}{2}$; **c)** $x = 3$; **d)** $x = 4$; **9.a)** $z = 5$; **b)** $x = 4$; **c)** $a = 9$; **10.** $\frac{1}{6}$; **11.a)** $x = 5$; **b)** $y = 8$; **12.a)** $a = -10$, Ľ = P = 0; **b)** $b = 11$, Ľ = P = = 3; **c)** $c = 2$, Ľ = P = 7; **d)** $d = \frac{27}{7}$, Ľ = P = $\frac{3}{7}$.

6.2 Vyjadrenie neznámej zo vzorca

Úlohy: **1.a)** $a = 3{,}6$ cm; **b)** $a = 4{,}56$ m; **c)** $a = 6{,}2$ cm; **2.** $c = 4{,}8$ cm; **3.** 55,9 kg.

Cvičenia: **1.a)** 3 mm; **b)** 5 m; **c)** 0,4 dm; **d)** 0,125 cm; **2.** nie; **3.** 3 cm; **4.** 18 minút; **5.a)** $v_a = 5$ cm; **b)** $v_a = 4$ dm; **c)** $v_a = 4$ cm; **6.** $c = 4$ cm; **7.** 1,1 cm; **8.** 34,56 kg; **9.** $m_1 = \frac{m_2c_2(t_2-t)}{c_1(t-t_1)}$; $c_1 = \frac{m_2c_2(t_2-t)}{m_1(t-t_1)}$; $m_2 = \frac{m_1c_1(t-t_1)}{c_2(t_2-t_1)}$; $c_2 = \frac{m_1c_1(t-t_1)}{m_2(t_2-t)}$; $t_1 = t - \frac{m_2c_2(t_2-t_1)}{m_1c_1}$; $t_2 = t + \frac{m_1c_1(t-t_1)}{m_2c_2}$; $t = \frac{m_1c_1t_1 + m_2c_2t_2}{m_1c_1 + m_2c_2}$.

6.3 Slovné úlohy riešené lineárnymi rovnicami

Úlohy: **1.** –14, –7, 3; **2.** B; **3.** –6, –4, –2, 0, 2, 4; **4.** C; **5.** prvý 3 720 Sk, druhý 7 440 Sk; tretí 4 340 Sk; **6.** mama 36, otec 40, Marta 10, sestra 14; **7.** C; **8.** 1 224 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$; **10.a)** 195 min; 0,7 min; 45 min; 54 min; 45 s; **b)** 0,7 h; 18 s; 0,25 min; 78 min; 2 400 s; **11.** 110 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$; **12.** 6,3 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$; 22,6 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$; **13.** 78 km; **14.** 2 h 48 min; **15.a)** za 30 minút; **b)** k Piešťanom; **16.** o 11 h 30 min; 10 km od A, 30 km od B; **17.a)** 30 min; **b)** 44 km; **18.** 24 km; **19.** 140 km; **20.a)** $\frac{1}{12}$; **b)** $\frac{5}{12}$; **c)** $\frac{x}{12}$; **21.** D; **22.** 4 hodiny; **23.** $\frac{16}{3}$ týždňa.

Cvičenia: **1.** 8; **2.** B; **3.** 4, 6, 8, 10, 12; **4.** 4 176 Sk; **5.** E, má byť $\frac{3}{5}x - 9 = \frac{x}{3} + 15$; **6.** D; **7.** 328; **8.** 18 km; **9.** 1,125; **10.** 0,28 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$; **12.** 1 km; **13.** áno; **14.** 2 000 km; **15.** 20 min, 6 km; **16.** 208 km; **17.a)** $\frac{2}{9}$; **b)** $\frac{2}{3}$; **c)** $\frac{2x}{9}$; **18.a)** 3; **b)** 2; **c)** $\frac{3}{2}$ týždňa; **19.** nie, za tri hodiny; **20.** za 2 hodiny.

Historické cvičenia: **1.** 15 míľ; **2.** 6 míľ.

6.4 Riešenie lineárnych nerovníc

Úlohy: **2.a)** $-2 < 4{,}7$; **b)** $\frac{1}{5} < 5$; **c)** $\frac{1}{7} > \frac{1}{11}$; **d)** $-5{,}1 < -4$; **e)** $-\frac{1}{4} > -\frac{1}{3}$; **f)** $1{,}2 > \frac{5}{6}$; **3.a)** $-\frac{3}{2}$; $-0{,}8$; 0; $\frac{1}{6}$; 2,6; 3; 4; **b)** naopak ako v a); **5.a)** $4 \geq 0$; **b)** $-9 \leq 7$; **c)** $0{,}6 < 0{,}9$; **d)** $-4{,}5 > -11$; **e)** $\frac{1}{3} > \frac{1}{5}$; **f)** $-\frac{2}{4} \geq -\frac{1}{2}$; **6.a)** 3, 4, 5; **b)** 2; **c)** $-10, -9, -8$; **d)** 15, 16, ... , 20; **8.** všetky okrem -3; **9.a)** $x < 2$; **b)** $x \geq 4$; **c)** $x \geq 3$; **d)** $x > 20$; **10.a)** $10 < x + 8$; **b)** $12 \leq 3y$; **c)** $14z - 2 > 2$; **d)** $15 \geq 7 - u$; **11.** a), d); **12.a)** $x < 34$; **b)** $x \geq -2$; **c)** $y \geq -5$; **d)** $y < 0$; **13.a)** $x < 1\,000$; **b)** $x \geq -6$; **c)** $x \geq 0$; **d)** $x > \frac{5}{3}$; **14.a)** $v < 10$; **b)** $x \leq -9$; **c)** $x \leq -3$; **d)** $x > 7$; **15.a)** $x < 4$; **b)** $y \leq -\frac{3}{2}$; **c)** $z < 2$; **d)** $x \leq -2$; **16.a)** $x > -1$; **b)** $y \geq -4$; **c)** $z \leq 5$; **d)** $v > 2$; **17.a)** $a \leq 25$; **b)** $b \leq -21$; **c)** $c < 9$; **d)** $x < -1$; **18.a)** $s > 5$; **b)** $t > 19$; **c)** $r \geq -9$; **d)** $p \geq 16$; **19.a)** $-15 \leq -1$; **b)** $0 > -6$; **20.a)** $7 \leq -6$; **b)** $-1 \geq 0$.

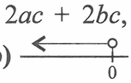
Cvičenia: **2.a)** $\frac{5}{6} > \frac{1}{3}$; **b)** $-0{,}5 < \frac{1}{2}$; **c)** $5{,}2 > \frac{20}{4}$; **d)** $-2{,}6 < \frac{26}{100}$; **3.a)** $-\frac{5}{6} < -\frac{7}{8} < -\frac{1}{3} < -\frac{1}{4} < \frac{1}{7} < \frac{1}{5} < \frac{8}{7} < \frac{6}{5} < \frac{5}{3}$; **b)** $-2{,}8 < -0{,}5 < -\frac{1}{5} < 0 < \frac{1}{3} < 0{,}6 < 3{,}2 < 4 < \frac{15}{2}$; **4.a)** $14 \leq 15$; **c)** $12 \leq 12$; **5.a)** 1, 2, ... , 6; **b)** 1, 2; **c)** $-2, -1, 0, \ldots, 5$; **d)** $-14, -13, \ldots, -5, -4$; **6.a)** $2 < 4$; **b)** $-1 \geq -9$; **c)** $10 < 25$; **d)** $\frac{9}{5} > \frac{4}{5}$; **7.** A, D, F; **8.a)** $10 < x - 9$; **b)** $-x > -3$; **c)** $6x \leq -12$; **d)** $45 \geq 5x$; **e)** $-\frac{x}{3} \leq -3$; **f)** $7 < \frac{x}{10}$; **9.** napr. 0, 2, -1; **10.** b); **12.a)** $y > 9$; **b)** $y \leq -12$; **c)** $y > -\frac{9}{2}$; **d)** $y \geq \frac{4}{3}$; **13.a)** $x < 2$; **b)** $x \geq 4$; **c)** $x \geq 2$; **d)** $x < -6$; **14.a)** $z \geq 2$; **b)** $z < \frac{1}{2}$; **c)** $z \geq 10{,}1$; **d)** $z > -\frac{33}{20}$; **e)** $z \geq -4{,}8$; **f)** $z < -\frac{1}{24}$; **15.** áno; **16.a)** $x > -\frac{3}{5}$; **b)** $x < \frac{3}{4}$; **c)** $x \leq 0$; **17.** iba nerovnica a); **19.a)** $-33 < 28$; **b)** $80 \geq 0$; **20.a)** $-11 > 6$; **b)** $-17 \geq 0$; **21.** C; **22.** D.

6.5 Slovné úlohy riešené lineárnymi nerovnicami

Úlohy: **1.** B; **2.** 2, 4, 5, 8, 10; **3.** za 7 mesiacov; **4.** 6 až 8 zásielok P - T expres, 9 a viac zásielok Quick expres.

Cvičenia: **1. a)** $6 \,.\, 103 > 9 \,.\, 65$; **b)** $n(55, 75) > n(42, 39)$; **c)** $d(240, 320) < d(360, 540)$; **2.a)** $20 = 20$; **b)** $91{,}8 = 91{,}8$; **c)** $68{,}2 < 117$; **d)** $52{,}5 < 53{,}76$; **3.a)** -5; **b)** 3; **c)** nedá sa určiť; **4.** nie; **5.** viac ako 65 km; **6.** viac ako 22.

Vyskúšajte sa!

1.a) $x = -3$; **b)** $r = 1$; **c)** $y = \frac{7}{4}$; **2.** A; **3.** C; **4.** Škoda 172 000, VW 72 000, Seat 36 000, Audi 6 000; **5.a)** 1 h 15 min; **b)** 40 km; **6.** $4\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$; **7.** 6 hodín; **8.** 3 hodiny; **9.a)** $o = a + b + 2r$, $a = o - b - 2r$, $b = o - a - 2r$, $r = \frac{o - (a+b)}{2}$; **b)** $S = 2ab + 2ac + 2bc$, $a = \frac{S - 2bc}{2(b+c)}$, $b = \frac{S - 2ac}{2(a+c)}$, $c = \frac{S - 2ab}{2(a+b)}$; **10.** $9 \leq v \leq 12$; **11.a)** $-4, -3, -2, -1$; **b)** 

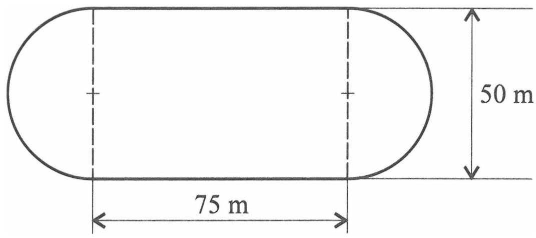
; **12.a)** $y \geq \frac{5}{4}$; **b)** $-33 < 28$, všetky reálne čísla; **c)** $x < -3$; **13.** $x = 15$; **14.** $x = -14$.

7 Riešenie konštrukčných úloh

7.1 Základné množiny bodov danej vlastnosti

Úlohy: **1.** použite trojuholníkovú nerovnosť; **2.** označte písmenom S priesečník osí strán, zrejme platí $|AS| = |BS|$, $|BS| = |CS|$, $|CS| = |AS|$; **3.** $|S_1X_1| = |S_1X_2|$, $|S_2Y_1| = |S_2Y_2|$; **4.** označte T_1, T_2 päty kolmíc spustených z bodu X na ramená uhla, platí: $|T_1Y| = |T_1X| + |XY| = |T_2X| + |XY| > |T_2Y|$; **5.** označte priesečník osí uhlov O; platí: $|O; AB| = |O; BC|$; $|O; BC| = |O; AC| \Rightarrow |O; AB| = |O; AC|$. **6.** využite vlastnosti vedľajších uhlov.

Cvičenia: **1.** množinou stredov kružníc *l*, ktoré majú polomer $r' = 2$ cm a majú vnútorný dotyk, je kružnica $m(S,\ r - r' = 2$ cm); **2.** množinou stredov kružníc, ktoré sa dotýkajú dvoch rovnobežných priamok a, 6, je os o pásu určeného priamkami a, b; **3.** je to stred kružnice určenej danými tromi bodmi; 4. je to stred kružnice, ktorá sa dotýka daných priamok; **5.** sú to priesečníky kružníc $k_1(A$, 4 cm), $k_2(B$; 3,5 cm); **6.** os úsečky určenej danými dvoma bodmi; **7**. priamka kolmá na priamku *t* prechádzajúca bodom *T*; **8.** použite Talesovu vetu; **9.** existujú dva body B, B'; dva priemery, z ktorých každý je kolmý na AB a $AB';$ koncové body priemerov k množinám nepatria; 10. priemer kružnice *k* rovnobežný s priamkou m, koncové body priemeru množine nepatria; 11. množina bodov útvaru je znázornená na obrázku



12. každý trojuholník, ktorého strana je AB a vrchol C je bodom priamky m || AB, |m, AB| = = v_c = 3 cm; **13.** každý trojuholník, ktorého strana je AB a vrchol C leží na kružnici k(C'; r = 2,5 cm) s výnimkou bodov AB, všetky trojuholníky ABC sú pravouhlé (Talesova veta), C' je stred úsečky AB.

7.3 Použitie množín všetkých bodov danej vlastnosti pri riešení konštrukčných úloh

Cvičenia: **1.** Talesova kružnica nad preponou AB a kružnica k(B; a = 4 cm); **6.** stred je priesečník osi základní a osi ramena; **8.** sú to dotyčnice ku kružnici k(B; 3 cm) idúce bodom A.

7.4 Použitie osovej a stredovej súmernosti pri riešení konštrukčných úloh

Cvičenia: **1**. využite vlastnosti stredu uhlopriečok rovnobežníka; **2.** využite stred úsečky AB; **3**. využite stredovú súmernosť so stredom v bode S; **4.** využite osovú súmernosť, ktorej os je osou úsečky AB; **5.** využite osovú súmernosť s osou p; **6.** využite osovú súmernosť s osou $\overleftrightarrow{PQ}$.

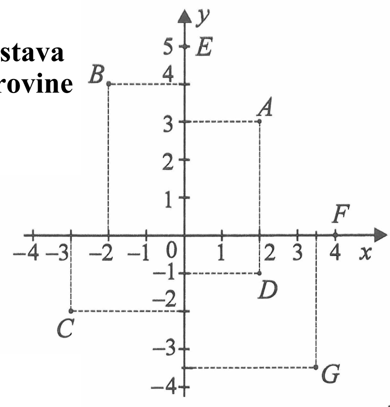
Vyskúšajte sa!

1. os uhla AVB; **2.** osi štyroch pravých uhlov; **3.** priemer kružnice k kolmý na priamku m, koncové body priemeru množine nepatria; **4**. bod C patrí prieniku kružnice k a Talesovej kružnice zostrojenej nad úsečkou AB; **7**. body X patria prieniku kružnice k(S, 4 cm) a kružnice m(A, 5 cm); **10.** zostrojíme najprv pravouhlý trojuholník BCC_0, kde C_0 je päta výšky v_c, tento je daný stranou a a v_c; **11.** použite stredovú súmernosť so stredom v uvažovanom priesečníku; **12.** použite stredovú súmernosť so stredom v bode S; **13.** použite osovú súmernosť s osou $\overleftrightarrow{PS}$ a potom osovú súmernosť s osou $\overleftrightarrow{PQ}$.

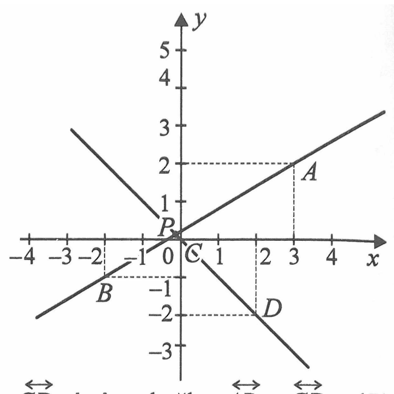
8 Funkcie

8.1 Pravouhlá sústava súradníc v rovine

Úlohy: **1.**



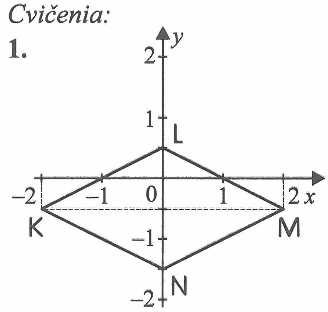
2.



$\overleftrightarrow{AB}$ a $\overleftrightarrow{CD}$ sú rôznobežky, $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} = \{P\}$

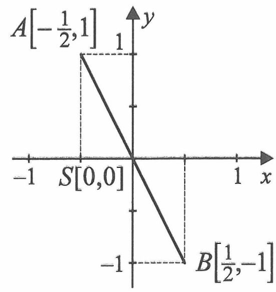
Cvičenia:

1.



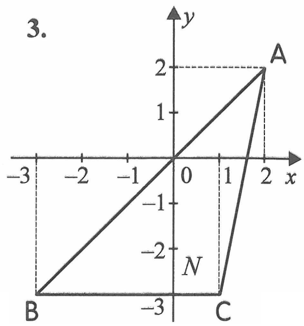
LN - uhlopriečka kosoštvorca leží na osi *y*
KNML patria funkcii

2. $A\left[-\frac{1}{2},1\right]$



stred úsečky *AB* je S[0,0]

3.

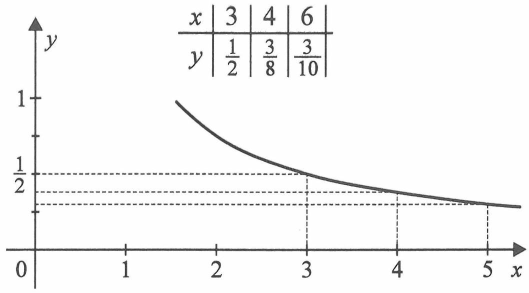


$|BC| = 4$ cm

8.2 Graf priamej a nepriamej úmernosti

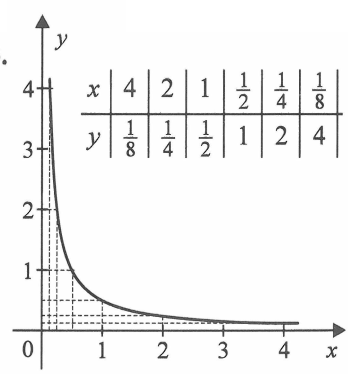
Úlohy: **1.** $y = \frac{1{,}5}{k}$

x	3	4	6
y	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{10}$



2. 15 000 Sk; **3.**

x	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
y	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4



4. $k = 7$; **5.** **D**.

Cvičenia: **1.** d); **2.** $y = 4{,}2 \,.\, x$, $B[4;\ 16{,}8]$, $C[5,\ 21]$; **3.** *Z*; **4.** $y_1 = 2x$; $y_2 = x$, $y_3 = \frac{3}{5}x$, $y_4 = \frac{1}{7}x$; **5.** e); **6.** $A \in y = \frac{1{,}2}{x}$; **7.** $y_1 = \frac{0{,}25}{x}$, $y_2 = \frac{1}{x}$, $y_3 = \frac{2}{x}$.

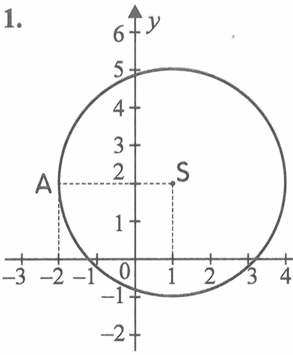
8.3 Funkčná závislosť medzi veličinami

Úlohy: **1.** všetky veličiny sú priamo úmerné.

Cvičenia: **1.** 90 m; **2.** asi 44 litrov; **3.** dvaja; **4.** o 10 dní; **6.** PRIAMA ÚMERNOSŤ.

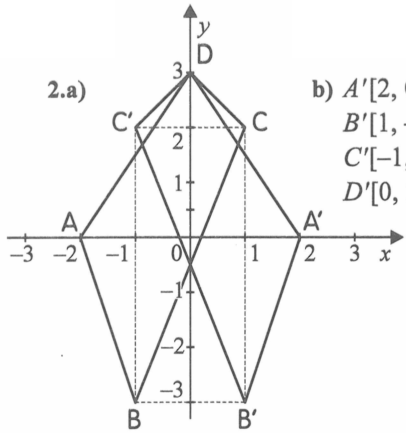
Vyskúšajte sa!

1.



$A[-2, 2]$
$B[1, -1]$
$C[4, 2]$
$D[1, 5]$

2.a)



b) $A'[2, 0]$ áno
$B'[1, -3]$ áno
$C'[-1, 2]$ áno
$D'[0, 3]$, nie $[3, 0]$

3.a)

x	8	16	24	30	40	60
y	40	20	$13\frac{1}{3}$	$10\frac{2}{3}$	8	$5\frac{1}{3}$

$y = \frac{320}{x}$ – nepriama úmernosť

b)

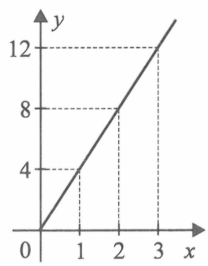
x	3	4	5	6	7	8
y	12	16	20	24	28	32

$y = 4 \,.\, x$ – priama úmernosť

c) ani priama, ani nepriama úmernosť;

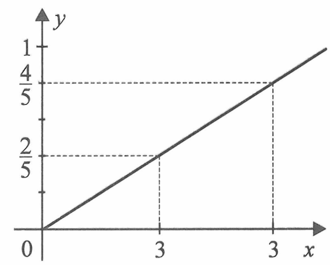
4.a)

x	1	2	3
y	4	8	12



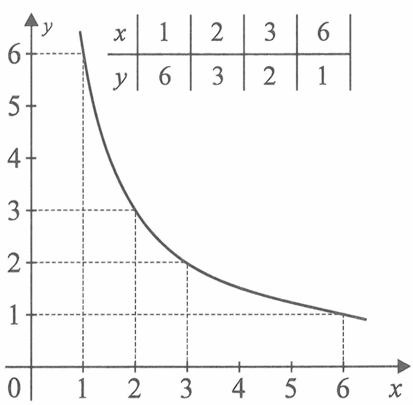
b)

x	1	2
y	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{5}$



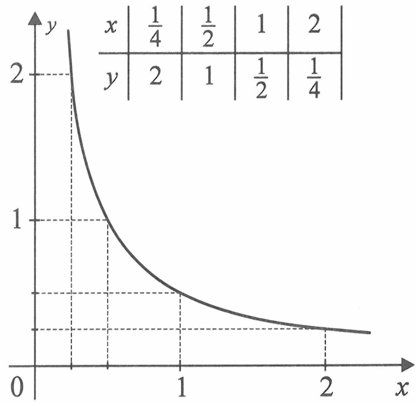
c)

x	1	2	3	6
y	6	3	2	1



d)

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2
y	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$



5.a) nepriama úmernosť: $y = \frac{3,5}{x}$, E – nepatrí grafu; **b)** priama úmernosť: $y = 2,8 \,.\, x$, N – nepatrí grafu; **6.** patrí; **7.** 800 litrov; **8.** o 10 km.

9 Kombinatorika a pravdepodobnosť

9.1 Náhodné pokusy

Úlohy: **1.** pri hode jednou kockou padol nepárny počet bodov. Padol menší počet bodov ako 7. Padol väčší počet bodov ako 5.

Cvičenia: **1.** Pri hode jednou hracou kockou padol menší počet bodov ako 7. Pri hode jednou hracou kockou padol počet bodov nedeliteľný číslom 9. Pri hode mincou padne číslo alebo znak. V lete Slnko svieti dlhšie ako v zime. Po ročnom období zima, nasleduje jar. **2.** Pri hode jednou hracou kockou padol menší počet bodov ako 1. Pri hode jednou hracou kockou padol počet bodov deliteľný číslom 7. Bratislava mala v roku 2000 milón obyvateľov. Budúci školský rok bude trvať len 6 mesiacov. Slovenská futbalová reprezentácia sa v roku 2000 stala majstrom Európy. **3.** Kedy sa ráno zobudím. Čo budem v nedeľu obedovať. Let slovenského astronauta na Mesiac. Vstup Slovenska do Európskej únie. Hádzanie hracou kockou. Hrať Keno.

4.

Výsledky ťahov	Záznam sčítacími čiarkami	Záznam číslom
1		
2		
3		
4		
5		

5.

Výsledok hodu	Záznam sčítacími čiarkami	Záznam číslom
znak (z)		
číslo (č)		

6. Isté udalosti: padol počet bodov menší ako 8; padol počet bodov väčší ako 0. Nemožné udalosti: padol počet bodov väčší ako 7; padol počet bodov 10. Náhodné udalosti: padol počet bodov 4; padol počet bodov menší ako 3; padol počet bodov väčší ako 1 a menší ako 5; padol párny počet bodov.

9.2 Relatívna početnosť udalosti a jej výpočet

Úlohy: **1.** pozri tabuľku v texte; **2.** podľa výsledkov hodov; **3.** $\frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{9}, \frac{5}{36}, \frac{10}{36}, \frac{10}{36}, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}$.

Cvičenia: **1.** všetky súčiny sú čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 30, 36; na základe výsledkov pokusov postupne vypočítajte relatívnu početnosť výskytu jednotlivých súčinov.

2.

Počet hodov *(N)*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Sčít. čiarkami																				
Číslom																				
Zlomkom																				
Desat. číslom																				
%																				

3.

Výsledok hodov	Sčítacími čiarkami	Číslom	Zlomkom	Desatinným číslom	%
zz					
zč					
čz					
čč					

4. $\frac{76}{180}$.

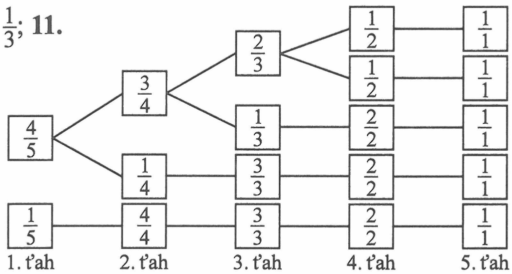
9.3 Pravdepodobnosť udalosti a jej výpočet

Úlohy: **1.** $\frac{1}{2}$; **2.a)** $\frac{3}{8}$; **b)** $\frac{1}{8}$; **c)** $\frac{1}{8}$; **d)** $\frac{3}{8}$; **3.** rovnako pravdepodobné; pravdepodobnosť pri treťom hode je $\frac{1}{2}$; **4.a)** $\frac{1}{8}$; **b)** $\frac{1}{8}$; **c)** $\frac{3}{4}$; **5.** $\frac{1}{6}$; **6.** $\frac{1}{2}$; **7.** $\frac{1}{2}$;

8.

Súčet	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Pravdepodobnosť zlomkom	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$
Pravdepodobnosť v %	2,8	5,5	8,3	11	14	19	14	11	8,3	5,5	2,8

9.a) $\frac{5}{18}$; **b)** $\frac{1}{36}$; **c)** $\frac{25}{36}$; **10.a)** $\frac{4}{9}$; **b)** $\frac{1}{9}$; **c)** $\frac{2}{9}$; **d)** $\frac{1}{3}$; **11.**



12. napríklad 5 cm, 6 cm, 7 cm, 8 cm, 9 cm, 10 cm; **13.** napríklad úsečky dĺžky 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm; z týchto úsečiek z trojice 2 cm, 3 cm, 5 cm sa nedá trojuholník zostrojiť; **14.** napríklad úsečky 3 cm, 4 cm, 5 cm, 7 cm, 8 cm; **15.** $\frac{1}{6}$; **16.** $\frac{1}{12}$; **17.** $\frac{56}{100} = 56\ \%$.

Cvičenia: **1.** sú rovnako pravdepodobné; **2.** $\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{3}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{8}$; **3.** $\frac{7}{20}, \frac{9}{20}, \frac{11}{20}, \frac{1}{20}, \frac{2}{5}, \frac{17}{20}, \frac{6}{20}$; **4.** $\frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{3}{4}$; **5.** $\frac{1}{24}, \frac{1}{4}, \frac{5}{24}, \frac{1}{24}$ lebo, ak traja zoberú správne kľúče, potom štvrtý už nemá na výber; **6.** $\frac{1}{6}$; **7.** $\frac{45}{200} = 22{,}5\ \%$.

Vyskúšajte sa!

1. pri hode hracou kockou padne počet bodov menší ako 10; cestovať v Bratislave v metre; stretnúť priateľa vo Vysokých Tatrách; **2.** $\frac{1}{3}$; **3.** $\frac{1}{4}$; **4.** $\frac{1}{9}$; **5.** $\frac{12}{25}$; **6.** $\frac{1}{120}$.

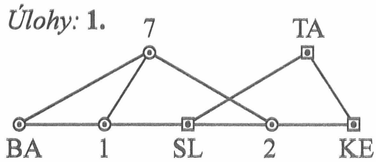
11 Elementárne poznatky z logiky

Úlohy: 1.**a)** matka; **b)** nie, pretože je mŕtvy; **c)** ani jedna, do bielkovej peny nepatria žĺtky; **d)** jedna je koruna, druhá dvojkorunák; **e)** je to ten istý čas; **3.** ***A***, ***B***, **D;** **5.** ***A***, ***B***, **F,** ***G;*** **6.** ***A*** nepravda; ***B*** pravda; ***D*** nepravda; ***G*** nepravda; C, ***E*** nie sú výroky; ***F*** závisí od momentálnej situácie; **8.a)** nie, dané celé číslo nie je kladné; **b)** áno; **c)** nie, Madrid nie je hlavné mesto Portugalska; **d)** nie, Slnko nevychádza na západe; **9.** negácia: $123 \leq 132$; **10.** ***A'*** Súčet všetkých prirodzených čísel od 1 po 500 je menší, alebo sa rovná číslu 501 000. **11.a)** päť alebo viac; **b)** jeden, dva, tri; **c)** dva, ani menej, ani viac; **13.** ***A'*** Najviac jeden žiak navštevuje tanečnú školu. ***B'*** Pršať bude aspoň päť dní. C' Žiadne dieťa neochorelo, alebo ochoreli aspoň tri deti. D' Aspoň jeden deň necvičím. ***E'*** Aspoň jeden hosť prišiel neskoro. ***F'*** Význam pojmu životné prostredie chápe aspoň dvadsaťjeden žiakov. **14.** ***A*** Aspoň jeden klopal. ***A'*** Nikto neklopal. ***B*** Netýka sa to žiadneho z vás. ***B'*** Týka sa to aspoň jedného z vás. ***C*** Každý to pochopil. C' Aspoň jeden to nepochopil. ***D*** Nepokúsil sa o to žiadny (človek). D' Aspoň jeden (človek) sa o to pokúsil. ***E*** Existuje ospravedlnenie. ***E'*** Neexistuje žiadne ospravedlnenie. **F** Ktokoľvek s tým môže nesúhlasiť. **F'** Niekto s tým môže súhlasiť.

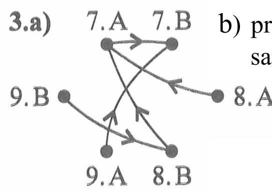
Cvičenia: **1.** ***A'*** **3.** ***A*** pravda, ***B*** nepravda, C nepravda, ***D*** nepravda, ***E*** nepravda, ***F*** pravda; **5.** ***A*** pravda; ***A'*** Aspoň jeden trojuholník nemá súčet vnútorných uhlov 180°. ***B*** pravda; ***B'*** Číslo 24 má aspoň 9 deliteľov. ***C*** pravda; ***C'*** Medzi číslami 1 - 100 existuje menej ako 25 alebo viac ako 25 prvočísel. ***D*** pravda; ***D'*** Druhá mocnina aspoň jedného záporného čísla je záporné číslo. ***E*** nepravda; ***E'*** Existuje aspoň jedna konštrukčná úloha, ktorá nemá riešenie, alebo má iba jedno riešenie. ***F*** nepravda; ***F'*** Existujú aspoň dve priamky, ktoré nie sú navzájom rovnobežné. **6.** ***A'*** Najviac deviati mu neuverili. ***B'*** Dostala aspoň jeden darček. ***C'*** Aspoň jeden z nich by nechcel ísť na olympiádu. ***D'*** Mám aspoň desať plagátov. ***E'*** Aspoň jeden mal odvahu priznať sa. ***F'*** Aspoň jeden mu neblahoželal. **7.** ***A'*** Poznám aspoň 16 z prítomných ľudí. ***B'*** Najstaršia dáma má menej ako 65 rokov. C' Slávnostný oblek má najviac 7 alebo najmenej 9 prítomných. ***D'*** Po miestnosti nechodí nikto alebo aspoň dvaja. ***E'*** Nikto nezakašľal, alebo aspoň dvaja zakašľali. ***F'*** Hostiteľ potriasol rukou najviac 79 hosťom. ***G'*** Nikto nemôže odísť. ***H'*** Aspoň jeden odmietol občerstvenie. ***I'*** Hostiteľka dostala najviac 19 kytíc. ***J'*** Aspoň jeden zaspal. **8.** ***A'*** Žiaden žiak nebol.... ***B'*** Aspoň jeden žiak nebol.... ***C'*** Aspoň dvaja žiaci boli.... ***D'*** Žiaden žiak nebol alebo aspoň dvaja žiaci boli.... ***E'*** Aspoň jeden žiak bol....

12 Riešenie úloh s využitím elementárnych poznatkov z teórie grafov

Úlohy: **1.**

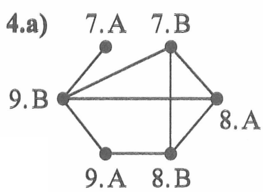


3.a)

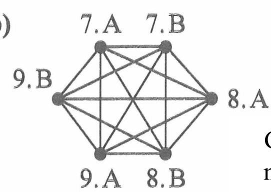


b) pretože zápas nehrá družstvo samo so sebou

4.a)

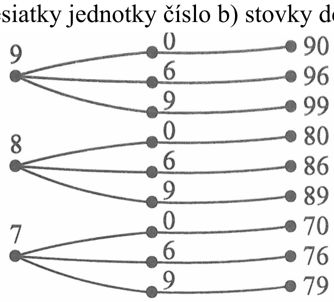


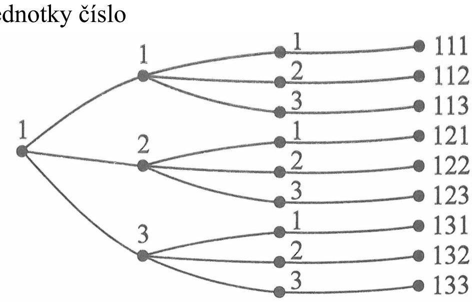
b)



Grafy nie sú orientované, pretože ešte nepoznáme víťaza.

5.a) desiatky jednotky číslo b) stovky desiatky jednotky číslo

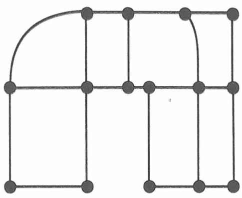




Pre číslice 2 a 3 na mieste stoviek podobne.

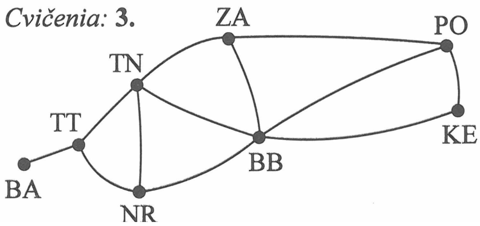
6.a) K_6 v úlohe **4**.b); **b)** n-uholník so všetkými uhlopriečkami; **9.** musíme doplniť najmenej tri hrany; **10.a)** otvorený eulerovský ťah; **b)** uzavretý eulerovský ťah; **c)** uzavretý eulerovský ťah; **12.** a), c);

14.a)

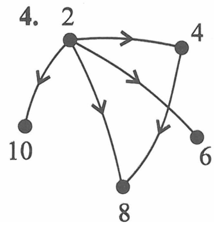


b) nedá, pretože v grafe sa vyskytuje 8 vrcholov nepárnehc stupňa.

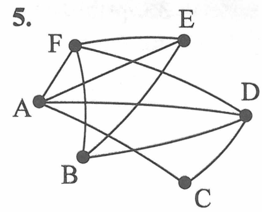
Cvičenia: **3.**



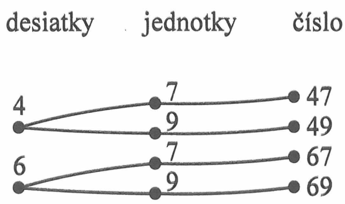
4.



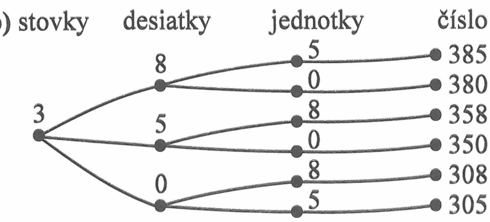
5.



7.a)



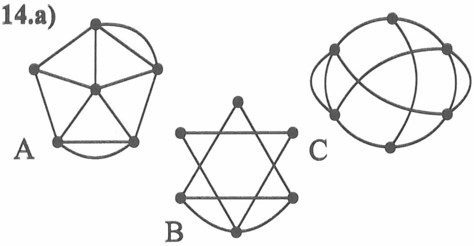
b)



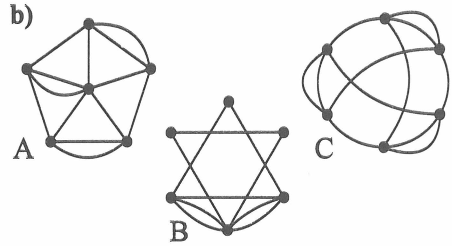
Pre číslice 8 a 5 na mieste stoviek podobne.

8. dvojciferné: 10, 11; trojciferné: 100, 101, 110, 111; štvorciferné: 1000, 1001, 1010, 1100, 1011, 1101, 1110, 1111; **9.** b), d); **10.** existuje viac riešení; **12.** otvorený: a), c); uzavretý: b); **13.** otvorený: a), b); uzavretý: c), d);

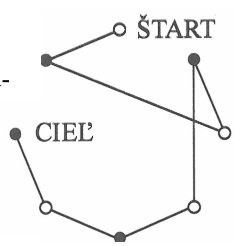
14.a)



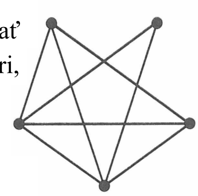
b)



15. Najkratšia trasa má sedem úsekov. Existujú tri trasy so siedmimi úsekmi. Najkratšia je na obrázku.



16. Nie, graf by mal mať každý vrchol stupňa tri, a to nie je možné.



17. Taká letecká sieť sa navrhnúť nedá. Keby platila podmienka zo zadania, musel by zo všetkých miest vychádzať nepárny počet liniek (5-krát párne číslo + 5-krát nepárne číslo = = nepárne číslo). Každá linka je ale započítaná dvakrát, preto by tento počet mal byť párne číslo. To je spor, preto taká sieť neexistuje.

13 Cvičenia na opakovanie

1. D; **2.** C; **3.** B; **4.** C, D; **5.** B; **6.** A; **7.** C; **8.** D; **9.** A; **10.** B; **11.a)** A; **b)** C; **c)** B; **12.** C; **13.** E; **14.a)** až 800 kg; **b)** áno, 900 kg; **c)** nie, Filip nazbieral 700 kg, čo je menej ako Peter; **15.** C; **16.** D; **17.** E; **18.** C; **19.** 18, 19, 20, 21; **20.** 12 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$; **21.a)** 33 114; **b)** 82 122; **22.a)** 11; **b)** $\frac{7}{3}$; **c)** –2; **d)** –1; **23.** D; **24.** E; **25.** D; **26.** B; **27.** A; **28.** E; **29.a)** $x > 11$; **b)** $x < 6$; **c)** $x \geq 12$; **d)** $x > 4$; **30.a)** áno; **b)** áno; **c)** nie; **31.a)** $t < 5$; **b)** $n < 34$; **32.** 0, 2, 4; **33.** $x > 3$; **34.** 20, 25, 30; **35.** približne za 58 min.; **36.** –30, (30); **37.** za 12 minút; **38.** 24 minút; **39.** 17,5 minúty; **40.** 3 a 5; **41.** 3, 2, 4; **42.** 6 dm; 3,5 dm; 6 dm; 3,5 dm; **43.** 6,05 dm; **44.** 2,1 m; **45.** najprv vypočítajte veľkosť strany c, $(c = 2p - a)$; **46.** na kružnici C, F; vo vnútri A, E; zvonka B, D; **48.** $\sphericalangle DSA < \sphericalangle ASB < \sphericalangle BSC < \sphericalangle ESD < \sphericalangle ESF$; **50.** sečnica: a), e); dotyčnica: b), d); nesečnica: c); **51.** zostrojte $l \perp m$, $S \in l$; **52.** stred S hľadanej kružnice leží na priamke $ST \perp t$ a $|ST| = 2{,}5$ cm, 2 riešenia; **53.** $m \perp AB$, $n \perp AB$, preto $m \| n$; **54.** 8 m; **55.** $|AB| = 1{,}4$ cm; $|AC| = 5$ cm; $|AD| = 6{,}4$ cm; $|BC| = 3{,}6$ cm; $|BD| = 5$ cm; $|CD| = 1{,}4$ cm; **56.** uvážte, že najdlhšia spoločná tetiva musí byť priemerom tej kružnice, ktorá má menší polomer; **57.** asi 530,8-krát; **58.** asi 85,627 8 dm²; **59.a)** $2r \doteq 23{,}87$ cm; $S \doteq 447$ cm²; **b)** $2r \doteq 0{,}64$ m; $S \doteq 0{,}322$ m²; **60.** os o úsečky AB bez priesečníka priamok o, AB; **61.** 60 ml; **62.** 6,54 %; **63.** 15; **64.** 37,5 %; **65.** 800 Sk; **66.** 120 m; **67.** 10; **68.** 4; **69.** 56,25 %; **70.** 20 %; **71.** 61 %; **72.** 5; **74.** 3 000; **75.** 1 321,92 mil. km³; 29,24 mil. km³; 8,3 mil. km³; 0,232 56 mil. km³; 0,013 6 mil. km³; **76.** A: **a)** súčty: $p + q$; **b)** rozdiely: $10 - a$; **c)** súčiny: $6a$, xy; **d)** podiely: $\frac{c}{d}$, $8 : 4$; B: **a)** súčty: $8 + k$, $15 + 14$; **b)** rozdiely: $d - c$; **c)** súčiny: $8 \,.\, 2$; **d)** podiely: $z : 2$, $\frac{1}{a}$; **77.a)** súčet $m + n$; **d)** $20 - p$; **78.a)** $k : 5$; **b)** $0{,}5 + d$; **c)** $15x$; **d)** $y - b$; **79.a)** $u - 10$; **b)** $2z$; **c)** $100 - b$; **d)** $\frac{v}{3}$; **e)** $y + 5\frac{1}{4}$; **81.a)** 71,2; **b)** 25; **c)** 27; **d)** 5; **e)** $\frac{13}{23}$; **f)** 3; **82.a)** $2(b - 5)$; **b)** $6p - 4s$; **c)** $c - (11 + b)$; **d)** $\frac{x}{y} + xy$; **83.a)** $10 + a$; **b)** $x + y + \frac{5}{4}$; **c)** $a + b + c + 3$; **d)** $u + v + 40$; **e)** $a + x + 7{,}5$; **84.a)** $x = 6$; **b)** $x = \frac{1}{4}$; **c)** $x = b - 10$; **d)** $x = -u$; **e)** $x = u$; **85.a)** 84; **b)** $\frac{7}{2}$; **c)** $\frac{8}{17}$; **d)** 24; **86.** $5 \,.\, k$; **87.** $(m - a) \,.\, 15$; **88.a)** $6x + 30$; **b)** $3a - 12$; **c)** $2 + 4x$; **d)** $9a - 2$; **e)** $50 - 40d$; **89.a)** 10; **b)** –4; **c)** 9,1; **d)** 0; **90.**

x	–4	–8	100	$-\frac{1}{2}$	–3	15	–1
x	–25	–3	$-\frac{1}{2}$	8	–9	0	$\frac{2}{5}$
$x \,.\, y$	100	24	–50	–4	27	0	–2

91.a) $38x + 39y - 37$; **b)** $r - s$; **c)** $5x - 3xy + 1$; **92.a)** $4x$; **b)** $a^2b + 7ab$; **93.a)** $-20a - 16b + 4$; **b)** $-11uv + 15u + 2v$; **c)** $7x^2 - y^2 + a^2$; **94.a)** $6x - 5y - 12$; **b)** $x^2 + 5y^2$; **95.** E; **96.a)** a^3; **b)** x^2; **c)** $-y^2$; **d)** –1; **97.** E; **98.** E; **99.a)** $-3x^3 + 6x^2 - 3x$; **b)** $9a^2y - 12ay^2$; **c)** $10a^2 + 30ab - \frac{10}{3}b + 0{,}1$; **100.a)** $9x^2 - 25$; **b)** $18x - 25$; **c)** $9x^2 + 15x - 5$; **d)** $18x - 5$; **e)** $ab + 3a + 2b + 6$; **f)** $x^2 + 2x - 8$; **g)** $x^2 + ax - bx - ab$; **h)** $ab - a - 2b + 2$; **102.a)** $x^2 + 2xy + y^2$; **b)** $x^2 - 2xy + y^2$; **c)** $a^2 + 4a + 4$; **d)** $b^2 - 8b + 16$; **e)** $9x^2 + 12xy + 4y^2$; **f)** $x^2 - 6xy + 9y^2$; **103.a)** $y = 9$; **b)** $x = 5$; **c)** nemá riešenie; **104.a)** $x(1 - y)$, $2(a + b)$, $10(2u - 1)$, $2(3p + 2q)$, **b)** $y(2x - 7z)$, $ab(b - 1)$, $q^2(4p + q)$, $x^4(2x - y)$; **c)** $3b(c - a)$, $6(a + 3b)$, $13a(a + 2b)$, $3y^2(xy - 3)$; **105.a)** $-1(x + y)$, $-1(3a + 2)$, $-1(3y - 4x)$, $-1(-5m - 1)$; **b)** $-1(4a + 3b)$, $-1(b^2 - a^2)$, $-1(-2x^2 - 1)$, $-1(2 - x^2)$; **106.a)** $z - 4yx$, $x^2 - 5x$, $12 - 9ab + 4ab^3$; **b)** $x^3 - 3x^2 + 7x + 1$, $x - 3pq - 5q + 6$; **107.a)** $(x + y) \,.\, (a + b)$; **b)** $(4 - a) \,.\, (1 - 2b)$; **c)** $(y - 8) \,.\, (x + 15)$; **d)** $(c - d) \,.\, (a + b)$; **108.a)** $(a + b) \,.\, (a - b)$, $(5 + c) \,.\, (5 - c)$, $(a + st) \,.\, (a - st)$, $(1 + x) \,.\, (1 - x)$; **b)** $(2x + 9y) \,.\, (2x - 9y)$, $(54 + 25) \,.\, (54 - 25)$, $(b + a) \,.\, (b - a)$, $(3r + 1) \,.\, (3r - 1)$; **c)** $(u + v + 2) \,.\, (u - v + 2)$, $(2x + 5) \,.\, 1$, $(x + 14) \,.\, (x - 6)$; **109.** $\sqrt{a^2 + b^2}$; **110.** $a = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2} - 1} \cdot \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 1} = 2 \cdot (\sqrt{2} + 1)$ dm; **111.** $10 \,.\, \sqrt{34}$ km; **112.** $4 \,.\, \sqrt{2}$ m;

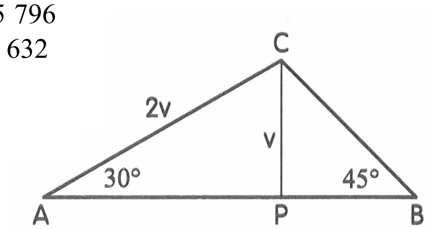
113. 15 cm; **114.** 39 cm; **115.** 14 cm; **116.** 21 cm alebo 3 cm; **117.** využite Pytagorovu vetu; **118.** dve rovnobežky s priamkou p vo vzdialenosti u od nej; každá z nich leží v jednej z navzájom opačných polrovín určených priamkou p; **119.** dvojica rovnobežiek q, q' s priamkou t vo vzdialenosti r od nej; **120.** všetky body L majú od priamky p zhodné vzdialenosti; **121.** kružnica $k(B, u)$ bez jej priesečníkov s priamkou AB; **122.** použite Talesovu kružnicu; **123.** určujeme množinu vrcholov S pravouhlých trojuholníkov ASB; **124.** o každom bode $O \neq S$ platí, že $\sphericalangle SOM$ je pravý uhol; kružnica nad priemerom SM bez bodu M; **125.** použite Talesovu kružnicu; **127.** bodom A veďte priamku $b \perp BV$ a bodom B priamku $a \perp AV$; (0 alebo 1 riešenie); **128.** zostrojte pravý uhol s vrcholom C, na jedno jeho rameno naneste úsečku BC, $|BC| = a$, druhé rameno pretnite kružnicou $k(B, t_b)$; (0 alebo 1 riešenie); **129.** v rovnoramennom $\triangle ABC$ je $t_a = t_b$ a $v_c = t_c$; najprv zostrojíme pomocný $\triangle ABT$, $|AT| = |BT| = \frac{2}{3}t_a$; bod T má od priamky vzdialenosť $\frac{1}{3}t_c$; **131.** rovnoramenný alebo rovnostranný; **133.** 60°, 120°; **134.** najprv zostrojíme trojuholník, ktorého stranami sú: daná strana rovnobežníka a polovice jeho uhlopriečok; **135.** približne 83,16 dm^2; **136.** 4,8; **137.** zostrojte $\triangle ABC'$, $|BC'| = b + e$, použite osovú súmernosť; **139.** bodom R zostrojte kolmicu na os uhla ASB; **140.** $\omega = 106°$; **141.** použite vlastnosť stredu S kružnice opísanej trojuholníku; **142.** jeden spoločný bod; **143.** najskôr zostrojte $\triangle ACT$; **144.** $T_1 \cong T_2 \cong T_3$; $T'_1 \cong T'_2 \cong T'_3$; **146.** najprv zostrojte pomocou uhlopriečok štvorec; **147.** začnite s $\triangle KLM$; **148.** aj uhol $|\sphericalangle ABC| = 60°$; **149.** najskôr $\triangle KLM$; **150.a)** majú rovnaké obsahy (majú spoločnú základňu a rovnaké výšky); **b)** majú rôzne obsahy (majú rôzne výšky); **c)** majú rôzne obsahy (majú rovnaké výšky, ale rôzne veľkosti základne); **151.** $3! = 6$; **152.** $4! = 24$; **153.** $5! = 120$; **154.** $4! = 24$; **155.** 15; **156.** $5! = 120$; **157.** 12; **158.** $8 \cdot 7 = 56$; **159.** $\frac{8}{27}$; **160.** $\frac{4}{10} = 40\ \%$; **161.** $\frac{1}{20}$; **162.** $\frac{1}{12}$; **163.** $\frac{8}{27}$; **164.** $\frac{1}{12}$; **165.** $\frac{8}{25}$.

ROZUM DO HRSTI *(VÝSLEDKY)*

1. Počítač našiel tieto výsledky:

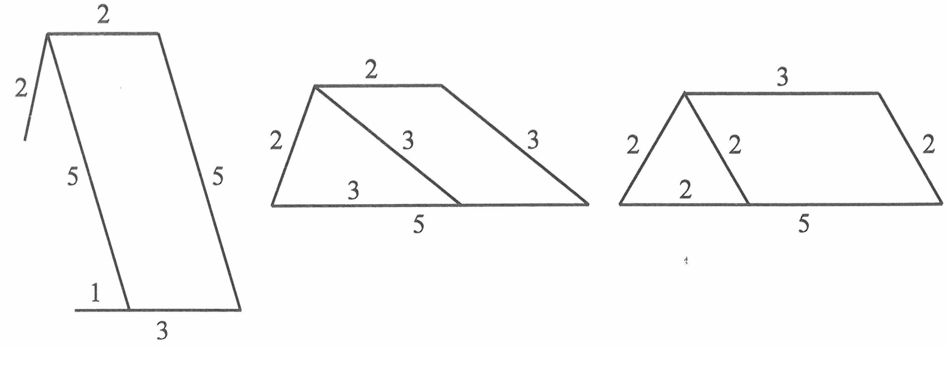
4 . 1 738 = 6 952
4 .1 963 = 7 852
12 . 483 = 5 796
18 . 297 = 5 346
27 . 198 = 5 346
28 . 157 = 4 396
39 . 186 = 7 254
42 . 138 = 5 796
48 . 159 = 7 632

2. Označme *P* pätu výšky z bodu *C* na stranu *AB*.



$v = |CP| = |PB|$, pretože pri vrchole *B* je uhol 45°. V pravouhlom trojuholníku *APC* sa $|AC| = 2v$. Potom podľa Pytagorovej vety $|AP| = v \cdot \sqrt{3}$. Bod *P* je bodom úsečky *AB*, preto platí $12 = v \cdot \sqrt{3} + v$, odkiaľ vypočítame $v = 6\,(\sqrt{3} - 1)$. Obsah trojuholníka *ABC* je $S = 36\,(\sqrt{3} - 1) = 26{,}354\ \text{cm}^2$.

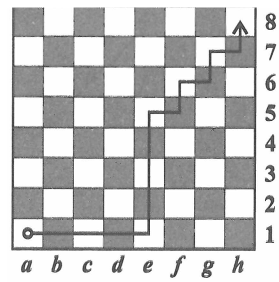
3. Základne lichobežníka nemôžu mať rovnaké dĺžky, preto sú možné tieto tri prípady: základne majú dĺžky 3 a 2, ramená 5 a 2, alebo sú základne 5 a 2 a ramená 2 a 3, alebo by musel byť lichobežník rovnoramenný s ramenami dĺžky 2 a základne dĺžok 5 a 3. Prvý prípad nemôže nastať, pretože neexistuje trojuholník so stranami 1, 2, 5. Zvyšné dva prípady sú možné.



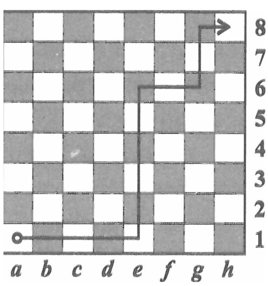
4. Pretože bod *A* leží medzi bodmi *B* a E, je poradie týchto troch bodov na číselnej osi *BAE* alebo *EAB*. Pretože bod *C* leží medzi bodmi *A*, B, musí byť poradie bodov *A, B, C, E* alebo *BCAE* alebo *EACB.* Bod *D* neleží medzi bodmi *B*, *E*, preto musí byť na začiatku pätice alebo na konci. Úloha má vtedy práve štyri riešenia: *DBCAE, BCAED, DEACB, EACBD.*

5. Ukážeme, že môžeme preklápaním premiestniť kocku na pole h8 tak, že na vrchu môže byť ktorákoľvek stena. Ak preklápame kocku po dráhe znázornenej na obrázku bude na poli ***h8*** na vrchu stena s jednou bodkou. Pritom po prvých ôsmich ťahoch bude kocka na poli ***e5*** s jednou bodkou na vrchu. Stačí teda overiť posledných 6 preklopení. Tento pohyb preklápaním kocky zapíšeme pomocou písmen ***P*** = preklopenie vpravo, ***Z*** = preklopenie zvisle:

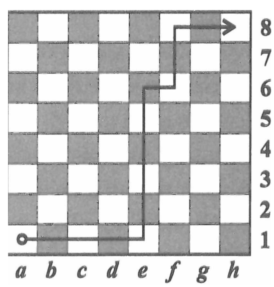
PPPPZZZZPZPZPZ na vrchu je „1“.



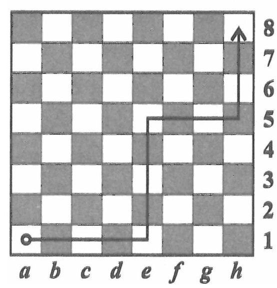
Podobne zapíšeme ďalšie tri pohyby kocky, pritom prvých osem ťahov (t. j. na pole ***e5)*** ponecháme bez zmeny:



PPPPZZZZZPPZZP
na vrchu je „3“

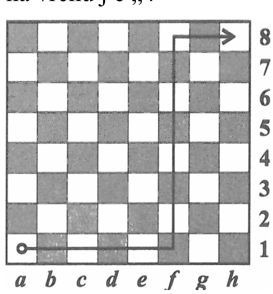


PPPPZZZZZPZZPP
na vrchu j e „4“

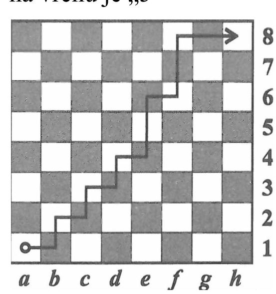


PPPPZZZZPPPZZZ
na vrchu je „5“

Posledné dva spôsoby prepremiestnenia zachytávajú zápisy:



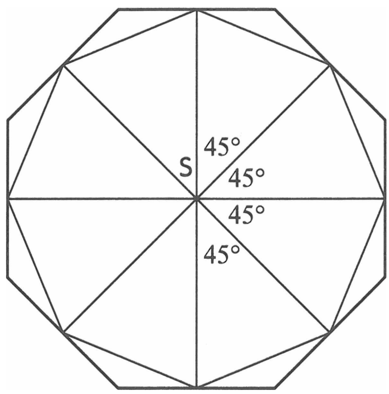
PPPPPZZZZZZZPP
na vrchu je „2“

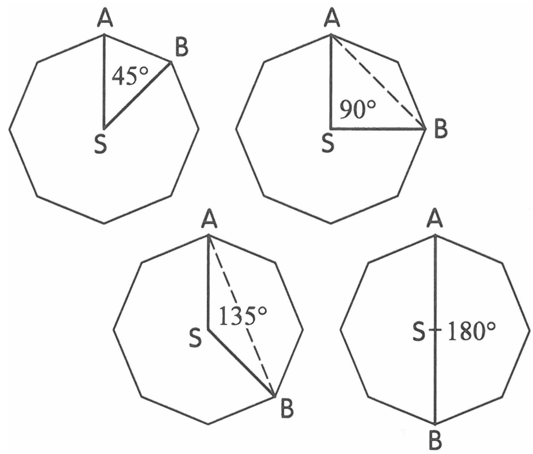


PZPZPZPZZPZZPP
na vrchu je „6“

Všetky tieto premiestnenia sú urobené pomocou 14 preklopení. Ľahko si uvedomíme, že menším počtom preklopení kocku premiestniť nemožno. Ľahko tiež zistíme, že existuje aj iné riešenie pomocou 14 alebo i viac preklopení.

6. Stredy strán pravidelného osemuholníka sú tiež vrcholy pravidelného osemuholníka (pozri obrázok). Obidva mnohouholníky majú spoločný stred ***S***. Stredy strán hľadaného (t. j. väčšieho) osemuholníka $\boldsymbol{V_8}$ sú teda vrcholy pomocného (menšieho) osemuholníka $\boldsymbol{M_8}$.





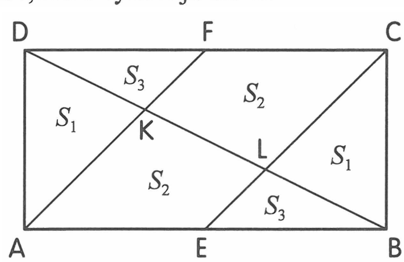
Uhol *ASB* môže mať veľkosti $\sigma = 45°, 90°, 135°, 180°$. Ak je $\sigma < 180°$ sú body *A*, *B*, *S* vrcholy rovnoramenného trojuholníka, ktorého uhly pri základni majú veľkosť $\alpha = \frac{1}{2}(180° - \sigma)$, t. j. v jednotlivých prípadoch $\alpha = 67{,}5°; 45°; 22{,}5°$.

Konštrukcia pre $\sigma < 180°$:

1. *A*, *B*
2. $\triangle ASB$; $|\sphericalangle SAB| = |\sphericalangle SBA| = \alpha$ (*usu*); v každej polrovine určenej priamkou *AB* jeden trojuholník
3. k; $k(S, |SA|)$
4. M_8; pravidelný osemuholník vpísaný kružnici *k* s vrcholom *A*
5. V_8; pravidelný osemuholník, ktorého strany sú dotyčnice kružnice *k* vo vrcholoch M_8.

Konštrukcia pre $\sigma = 180°$ sa líši v bode 2, bod *S* je stred úsečky *AB*.
Úloha má po 2 riešenia pre uhly $\sigma = 45°, 90°, 135°$ a jedno riešenie pre uhol $\sigma = 180°$. Celkom je teda 7 pravidelných osemuholníkov, ktoré vyhovujú úlohe.

7. Situácia je znázornená na obrázku.



Pretože *FC* □ *AE,* štvoruholník *AECF* je rovnobežník. V trojuholníku *DLC* je *KF* stredná priečka (lebo *DF* □ *FC* a *AF* je rovnobežné s *EC).* Preto *DK* □ *KL.* Podobne platí *KL* □ *LB.* Trojuholníky *DLC* a *BLC* majú vo vrchole C spoločnú výšku. Pretože $|DL| = 2 \,.\, |BL|$, je obsah trojuholníka *DLC* dvakrát väčší ako obsah trojuholníka *BLC.*

$$S_2 + S_3 = 2.\ S_1$$

Obsah S_1 je preto tretina obsahu trojuholníka *BCD* alebo šestina obsahu *S* celého obdĺžnika *ABCD:*

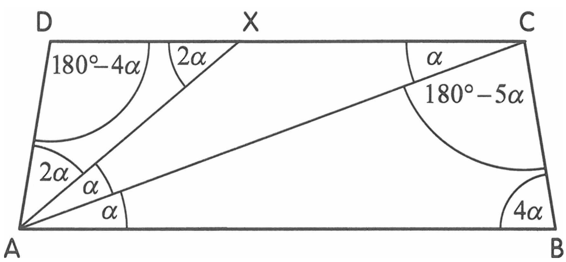
$$S_1 = \tfrac{1}{6}S,\ S_2 + S_3 = \tfrac{1}{3}S$$

Trojuholník *DKF* má strany aj výšky, ktoré sa rovnajú poloviciam strán a výšok trojuholníka *DLC*. Preto sa obsah trojuholníka *DKF* rovná štvrtine obsahu trojuholníka *DLC*.

$$S_3 = \tfrac{1}{2}(S_2 + S_3) = \tfrac{1}{12}S$$
$$S_2 = \tfrac{3}{4}(S_2 + S_3) = \tfrac{3}{12}S = \tfrac{1}{4}S$$

Z obsahov S_1, S_2, S_3 je najmenší $S_3 = \tfrac{1}{2}S$. Podľa zadania $S_3 = 24\ \text{cm}^2$. Teda obsah *S* daného obdĺžnika je $288\ \text{cm}^2$.

8. Načrtnime si hľadaný lichobežník a zvoľme označenie podľa obrázka.



V žiadnom rovnoramennom trojuholníku nemôže byť pri základni vnútorný uhol tupý. Preto musí byť v trojuholníku *AXD* hlavný vrchol *D* a v rovnoramennom trojuholníku *ACX* hlavný vrchol - bod *X*. Uhly pri základni rovnoramenného trojuholníka *ACX* označme α. Uhly *DCA* a *CAB* sú striedavé, preto uhol *CAB* sa rovná α. Podobne sú striedavé uhly *DXA* a *XAB*. Pretože pre uhol *XAB* = 2α, tak aj uhol *DXA* = *2α.* Trojuholník *AXB* má základňu *AX,* a teda i uhol *DAX* = *2α.* Tretí uhol *ADX* trojuholníka *AXD* sa rovná 180° - *4α.* V rovnoramennom lichobežníku sú uhly pri základniach zhodné, preto

$$|\square\, ABC| = 4\alpha\ |\square\, DCB| = 180° - 4\alpha$$

Odtiaľ dostaneme

$$|\square ACB| = (180° - 4\alpha) - \alpha = 180° - 5\alpha$$

Trojuholník *ABC* je rovnoramenný. Môžu nastať dve možnosti:

(1) $\alpha = 180° - 5\alpha$

(2) $4\alpha = 180° - 5\alpha$

V prípade (1) dostaneme:

$$6\alpha = 180°$$
$$\alpha = 30°$$

Z toho však vyplýva, že $|\square ABC| = 4\alpha = 120°$. Ale to nie je možné, pretože strana *AB* je v lichobežníku *ABCD* dlhšia základňa, a preto musí byť $\square\, ABC < 90°$.

V prípade (2) dostaneme

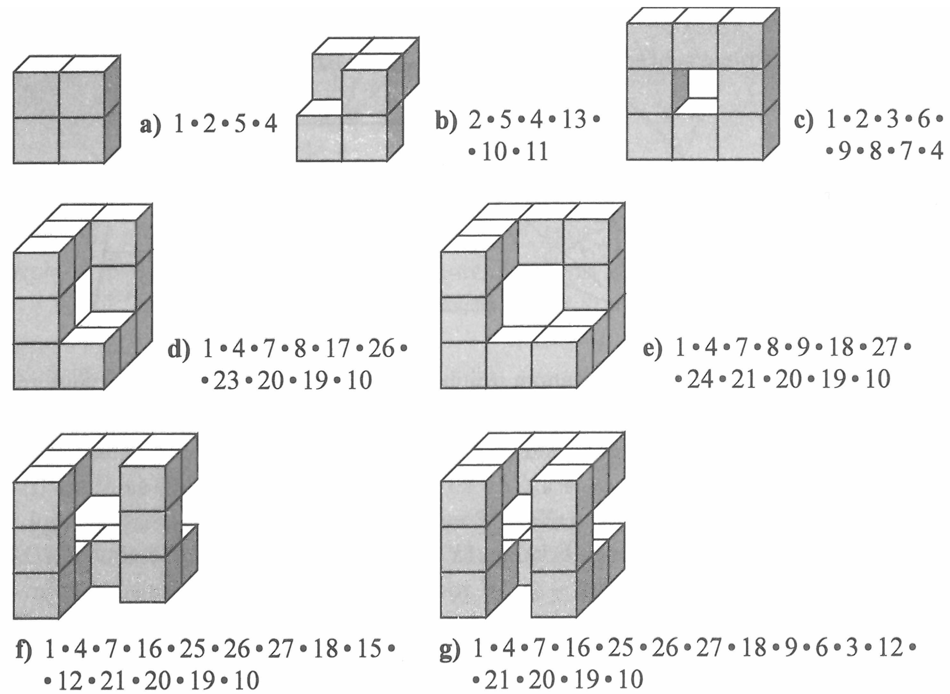
$$9\alpha = 180°$$
$$\alpha = 20°$$

Lichobežník *ABCD* má teda pri dlhšej základni vnútorné uhly $4\alpha = 80°$ a pri kratšej základni uhly $180° - 4\alpha = 100°$.

Konštrukcia lichobežníka *ABCD:*

1. *AB;* |*AB*| = 10 cm
2. *ABC*; (usu); |□ CAB| = 20°; |□□□□□ = 80°
3. *ACD; (usu);* |□*DAC*| = 60°; |□*DCA*| = 20°,
   D leží v opačnej polrovine k polrovine *ACB.*
4. *ABCD;* lichobežník.

9. Teleso, ktoré zostane, sa môže skladať zo 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 kociek. Odobrať môžeme teda 23, 21, 19, 17, 15, 13 alebo 11 kociek. Ukážky riešení sú na obrázkoch; čísla pri obrázkoch určujú čísla kociek, ktoré zostali v telese.



10. a) Janko mohol závažia rozdeliť napríklad takto:

1. skupina: 1, 2, 3,4, 5
2. skupina: 6, 9
3. skupina: 7, 8

V každej skupine je súčet hmotností 15, lebo

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 6 + 9 = 7 + 8 = 15$$

Rozdelenie je možné urobiť aj inak; napr. (4, 5, 6), (1, 2, 3, 9), (7, 8). Sami ešte ľahko nájdete ďalšie možnosti.

b) Aj Jurko môže urobiť svoje rozdelenie. Využije delenie, ktoré urobil Janko. Skupiny ďalej doplní napríklad takto:

1. skupina: (10, 33), (13, 30), (16, 27), (19, 24)
2. skupina: (11, 32), (14, 29), (17,26), (20,23)
3. skupina: (12,31), (15,28), (18,25), (21,22)

Jurko teda rozdelil závažia od 10 g do 33 g na 12 dvojíc tak, aby v každej dvojici bol súčet hmotností závaží rovnaký, a to 43 g. Týchto 12 dvojíc potom rozdelil na 3 skupiny po štyroch dvojiciach. Všetkých 33 závaží rozdelil na 3 skupiny s celkovou hmotnosťou 187 g (15 + 4 . 43 = 187).

Hmotnosť všetkých 33 závaží je teda 3 . 187 g = 561 g.

c) Karol nemôže 33 závaží od 1 g do 33 g v žiadnom prípade rozdeliť na 4 skupiny s rovnakou hmotnosťou, pretože celková hmotnosť týchto závaží je 561 g, a to nie je číslo deliteľné štyrmi.

Záznam o použití učebnice

Por. číslo	Meno žiaka	Školský rok	Stav učebnice	
			na začiatku škol. roku	na konci škol. roku
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

Prof. RNDr. Ondrej Šedivý, CSc.
PaedDr. Soňa Čeretková
PaedDr. Mária Malperová
PhDr. Ľudovít Bálint, CSc.

Matematika

pre 8. ročník základných škôl
2.časť

Zodpovedná redaktorka RNDr. Jana Belasová
Technická redaktorka Eva Onderčinová

Grafická a počítačová úprava, počítačové kresby
a návrh obálky Igor Imro
Ilustrovala akad. maliarka Táňa Žitňanová

Vyšlo v MÉDIA TRADE, spol. s r. o. - Slovenské pedagogické nakladateľstvo,
Sasinkova 5, 815 60 Bratislava 1

Litografie SHS, spol. s r. o., Leškova 10, 811 05 Bratislava
Vytlačili Tlačiarne BB, spol. s r. o., 974 01 Banská Bystrica

ISBN 80-08-03032-1