Matematika

pre 7. ročník základných škôl • 2. časť

Slovenské pedagogické nakladateľstvo

Ondrej Šedivý • Soňa Čeretková • Mária Malperová • Ľudovít Bálint

Matematika

pre 7. ročník základných škôl

2. časť

Slovenské pedagogické nakladateľstvo

Autori © Prof. RNDr. Ondrej Šedivý, CSc.
PaedDr. Soňa Čeretková
PaedDr. Mária Malperová
PhDr. Ľudovít Bálint, CSc., 2000

Lektorovali: RNDr. Ľudovít Hrdina, CSc.
(Slovenská matematická spoločnosť, sekcia JSMF)
Anna Ištoková
RNDr. Emília Petrovajová
Mgr. Ingrid Stupáková
Mgr. Eva Šišková

Illustrations © akademická maliarka Táňa Žitňanová, 2000
Design © Igor Imro, 2000

Schválilo Ministerstvo školstva Slovenskej republiky rozhodnutím
z 19. júla 1999 pod číslom 2845/99-41
ako alternatívnu učebnicu matematiky pre 7. ročník ZŠ, 2. časť.

Prvé vydanie, 2000

ISBN 80-08-02680-4

OBSAH

Isaac Newton
(4. 1. 1643 až 31. 3. 1727)

Anglický fyzik, mechanik, astronóm a matematik.
Vytvoril základy diferenciálneho a integrálneho počtu, študoval nekonečné rady, v geometrii klasifikoval krivky 3. stupňa.
Zaslúžil sa o rozvoj algebry (riešenie algebrických rovníc a základy teórie symetrických funkcií).
Pozoruhodné sú jeho výsledky v mechanike, astronómii a vo fyzike.
Jeho všeobecné fyzikálne predstavy zohrali takú rozhodujúcu úlohu, že sa fyzika 18. a 19. storočia často nazýva newtonovská.

Milí siedmaci!

Máte v rukách 2. časť učebnice matematiky pre 7. ročník. Nájdete v nej veľa zaujímavostí. Pomôže vám pri zvládnutí učiva o rovniciach, naučíte sa riešiť úlohy na percentá, oboznámite sa s trojčlenkou, naučíte sa vypočítať úrok, geometrické učivo obohatí vaše vedomosti o trojuholníku, stredovej a osovej súmernosti. V kapitole Kombinatorika nájdete veľa ďalších zaujímavých úloh. V rozširujúcom učive si prehĺbite vedomosti o mnohostenoch, zhodnom zobrazení a o topografických prácach.

Na konci učebnice nájdete úlohy z celoročného učiva a nezabudnite na „Rozum do hrsti".

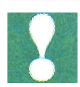
Veľa úspechov a chuti do učenia.

Autori

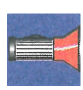
V učebnici používame tieto symboly:

 - príklad

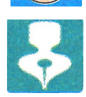
 - problém

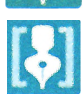
 - riešenie

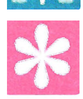
 - pokus

 - zapamätať si
- zhrnutie alebo poučka

 - úloha

 - cvičenia

 - vyskúšajte sa

 - poznámka

- rozširujúce učivo

7 LINEÁRNE ROVNICE

7.1 Rovnosť a rovnica

ZOPAKUJME SI

Zápisy s číslami alebo s číselnými výrazmi,
ktoré majú tvar:
4 + 2 = 6   8 - 4 = 2 . 2   5 . 3 = 30 : 6 + 10
nazývame **rovnosť.**

8 – 4 = 2 . 2
ľavá strana rovnosti | pravá strana rovnosti
Ľ = 4   P = 4
Ľ = P
Ak platí Ľ = P, rovnosť je **platná.**

Rovnosť 10 - 4 = -6 je **neplatná,** pretože
Ľ = 6   P = -6
Zápis opravíme takto: 10 - 4 ≠ -6 a nazývame ho **nerovnosť.**
Znak ≠ čítame: „*nerovná sa*“ alebo „*je rôzne od*“.

ÚLOHA 1

Overte, že dané rovnosti sú platné:
a) 2 . 3 + 3 . 3 = 5 . 3   b) -1 + 7 . 8 = 55   c) 12 = 2,5 + 9,5   d) $\frac{3}{4}+\frac{2}{8}=\frac{5}{5}$

ÚLOHA 2

Doplňte znamienko = alebo ≠ podľa toho, či ide o rovnosť alebo nerovnosť,
a) 8 . 4 + 8 □ 42   b) -1 + (-2) . 4 □ -9   c) 1,8 : (-3) □ 0,6   d) $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}$ □ $\frac{2}{6}$

ZOPAKUJME SI

Výrazy s jednou premennou $x + x + x$ $\frac{x}{5} + 3$ $2p - 8$

$3x$: koeficient ↙ ↘ premenná $3z + 5$: člen s premennou ↙ ↘ číslo (člen bez premennej)

Výrazy s premennou vieme:

- **sčitovať** $(6x + 2) + (5 - 2x) = 6x + 2 + 5 - 2x = 6x - 2x + 2 + 5 = 4x + 7$
- **odčitovať** $(6x + 2) - (5 - 2x) = 6x + 2 - 5 + 2x = 6x + 2x + 2 - 5 = 8x - 3$

Sčitujeme spolu koeficienty pri členoch s rovnakou premennou a spolu čísla - členy výrazu bez premennej.
Keď je pred zátvorkou znamienko „mínus“, zátvorku odstránime tak, že pri všetkých členoch výrazu v zátvorke zmeníme znamienka na opačné.

- **násobiť výraz číslom rôznym od nuly** $5 . (1{,}2a + 0{,}6) = 6a + 3$
  $-2. (5 - c) = -10 + c = c - 10$
  $(y - 6) . (-5) = -5y + 30 = 30 - 5y$
- **deliť výraz číslom rôznym od nuly** $(35d + 7) : 7 = 5d + 1$
  $(5c + 9) : 10 = 0{,}5c + 0{,}9$

Daným číslom násobíme alebo delíme každý člen výrazu.
Keď je číslo, ktorým výraz násobíme alebo delíme záporné, znamienka všetkých členov výrazu sa zmenia na opačné.

- **upravovať výraz vynímaním najväčšieho spoločného deliteľa všetkých členov pred zátvorku** $16a + 12 = 4 . (4a + 3)$
  $100 - 20y = 20. (5 - y)$

Najväčšieho spoločného deliteľa všetkých členov výrazu napíšeme (vyjmeme) pred zátvorku.
V zátvorke zostanú členy, ktoré sme týmto deliteľom vydelili.

POZNÁMKA

Znamienko operácie násobenia „ . “ môžeme vynechať.
Platí: $5 . (1{,}2a + 0{,}6) = 5(1{,}2a + 0{,}6)$

ÚLOHA 3

Upravte výrazy s premennou pomocou uvedených operácií:

a) $(6x + 12) + (x - 6)$ c) $4(0{,}4z - 0{,}5)$ e) $(5{,}6 - 2{,}8b) : (-7)$
b) $(y - 6) - (6 - 2y)$ d) $(2a - 22) : 2$ f) $\frac{1}{5}(25c + 15)$

ÚLOHA 4

Upravte výrazy vyňatím najväčšieho spoločného deliteľa pred zátvorku:

a) $17x + 34$ b) $12 - 9y$ c) $8 + 10z$ d) $16s - 8$

PROBLÉM 1

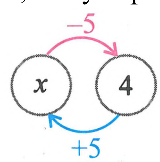
Ako nazývame zápis $x - 5 = 4$?
Čo vieme o ňom povedať?

RIEŠENIE

Odpovedá Adam:
Zápis x - 5 =4 nazývame **rovnica.**
Premennú x na ľavej strane nazývame **neznáma.**

Zápis $\underbrace{x - 5}_{Ľ} = \underbrace{4}_{P}$ je **rovnica s neznámou** x.
ľavá strana rovnice | pravá strana rovnice
Ľ P

Martin si nakreslí obrázok, ktorý si pamätá z piateho ročníka a zapíše:



$$x - 5 = 4$$
$$x = 4 + 5$$
$$x = 9$$

Riešenie rovnice
- je **postup,** ktorým vypočítame hodnotu neznámej x.
- je vypočítaná hodnota neznámej x, ktorú nazývame aj **koreň rovnice.**

Riešením alebo koreňom našej rovnice je hodnota $x = 9$.
Správnosť riešenia overíme **skúškou správnosti.**
Skúška: Ľ = x - 5 = 9 - 5 = 4
P = 4
platí Ľ = P rovnica je vyriešená správne.
Pre $x = 9$ je rovnica $x - 5 = 4$ platná rovnosť.

POZNÁMKA

Neznámu môžeme v *rovniciach označovať aj inými písmenami, napr. a, b, c,... x, y, z.*

ÚLOHA 5

Zistite, či číslo 3 je koreňom nasledujúcich rovníc:
a) $5x + 4 = 19$ b) $6 = 30 - 8y$ c) $11z - 10 = 22$

ÚLOHA 6

Overte, že rovnica:
a) $20 = 5x - 5$ má riešenie (koreň) číslo 5,
b) $6x + 1 = 7 - 3x$ má riešenie (koreň) číslo $\frac{2}{3}$,
c) $2y + 1 = y - 2$ má riešenie (koreň) číslo -3.

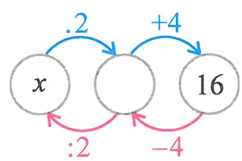
Niektoré jednoduchšie typy rovníc vieme riešiť:

PRÍKLAD 1

Skontrolujte riešenie nasledujúcej rovnice: $2x + 4 = 16$

RIEŠENIE

$2x + 4 = 16$
$2x = 16 - 4$
$2x = 12$
$x = 12 : 2$
$x = 6$



Skúška:
Ľ = 2 . 6 + 4 = 16
P = 16
platí: Ľ = P

***ÚLOHA** 7*

Zapíšte a vypočítajte ***x***, ak platí:

a) x je o 6 menšie ako 2
b) x je o $\frac{1}{2}$ väčšie ako $\frac{1}{4}$
c) x je 5,2-krát väčšie ako 2
d) x je 3-krát menšie ako 3,3

ÚLOHA 8

Riešte rovnice a vykonajte skúšku správnosti:

a) $y + 5{,}5 = 2{,}8 - 1$ b) $1{,}4 \cdot z = 0{,}7$ c) $\frac{1}{2} - a = \frac{1}{4}$ d) $5b + 2 = 13$

C V I Č E N I A

1. Overte, že dané rovnosti sú platné:
   a) $500 + 2 \cdot 200 + 5 \cdot 20 = 1\,000$
   b) $-4(6 + 2) + 12 = -5 \cdot 4$
   c) $0{,}8 + 0{,}9 = 0{,}3 \cdot 4 + 0{,}05 \cdot 10$
   d) $\frac{5}{3} - \frac{3}{5} = 2 - \frac{14}{15}$

2. Doplňte znamienko = alebo ≠ podľa toho, či ide o rovnosť alebo nerovnosť.
   a) $-4 \cdot (-3) - 10 \ \square\ -2$
   b) $5 \cdot (2{,}2 + 4) : 2 \ \square\ 21 - 0{,}4$
   c) $6{,}5 : 5 - 0{,}5 \cdot (10 - 12) \ \square\ 2{,}3$
   d) $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} \ \square\ \frac{4}{6}$

3. Upravte výrazy s premennou:
   a) $5x + 2 - 3x + 4$
   b) $5x + 2 - (3x + 4)$
   c) $-(5x + 2) + (3x + 4)$
   d) $5x + 2 - (3x - 4)$

4. Zjednodušte:
   a) $3(10 - 2y) + 2(3y - 4)$
   b) $(0{,}3 + 5y) \cdot 5 - 0{,}4y$
   c) $(6 + 0{,}2y) : 2 - 3 + 0{,}1y$
   d) $(3{,}5 + 7y) : (-7) + 0{,}5y$

5. Určte, pre ktoré x platí: a) $-x = -5$ b) $\frac{1}{7} = -x$ c) $\frac{x}{4} = \frac{2}{4}$

6. Dĺžka jednej strany obdĺžnika je *a,* druhá strana
a) je o 2,5 dlhšia; b) je 1,2-krát dlhšia; c) má $\frac{2}{3}$ dĺžky prvej.
Zostavte výrazy na výpočet obvodov a obsahov takýchto obdĺžnikov.

7. Zistite, či je číslo 7 koreňom niektorej z nasledujúcich rovníc:
a) $3x + 6 = (x - 4) . 9$ c) $0{,}3 + x = 2{,}7 - 10$
b) $2 = 20 - 3x$ d) $\frac{x}{2} + 3{,}5 = x$

8. Z množiny {-1, 0, 1, 2} vyberte tie čísla, ktoré sú koreňmi rovnice:
a) $2x - 1 = x + 1$ b) $x - 2 = 2x - 1$

9. Pokúste sa spamäti nájsť x, pre ktoré platí:
a) $x - 5 = 15$ b) $x : 5 = 15$ c) $x + 5 = 15$ d) $5 . x = 15$

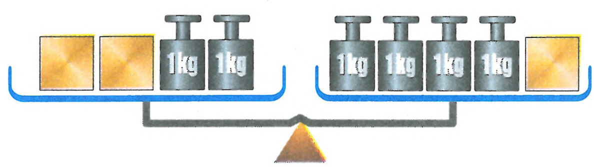
10. Riešte rovnice a urobte skúšky správnosti:
a) $24 - 4x = 20$ c) $2y = 4\left(0{,}5 + \frac{3}{2}\right) - 1$
b) $5z + \frac{1}{2} = 0$ d) $6 . \frac{2}{3} + x = 4$

7.2 Úpravy lineárnych rovníc

PROBLÉM

Siedmak Ivan rieši so svojou sestrou štvrtáčkou Betkou úlohy na prípravu do prímy osemročného gymnázia. Pomôžte mu Betke vysvetliť, ako sa dá iba z obrázka vyriešiť táto úloha.

Určte hmotnosť kocky:

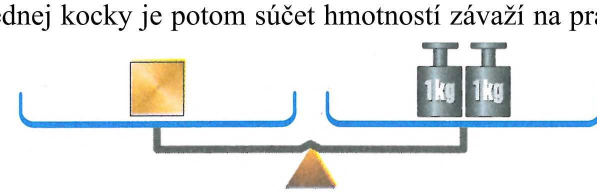


VŠIMNIME SI

Na rovnoramenných váhach nastane **rovnováha** vtedy, ak na ľavú aj pravú misku položíme závažia alebo predmety rovnakej hmotnosti. Hovoríme, že medzi hmotnosťami predmetov na oboch miskách váh nastala **rovnosť.**

RIEŠENIE

Betka určuje hmotnosť kocky:
rovnováha sa nezmení, ak z obidvoch misiek odoberiem po dve závažia a po jednej kocke. Hmotnosť jednej kocky je potom súčet hmotností závaží na pravej strane, teda 2 kg.



Odpoveď:
Hmotnosť kocky je 2 kg.

Ľavú a pravú stranu každej rovnice si môžeme predstaviť ako misky váh. Obrázok z problému 1 môžeme zapísať rovnicou: $2x + 2 = x + 4$, kde x je neznáma hmotnosť kocky.

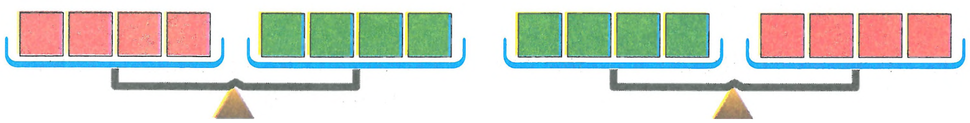
Teraz si popíšeme úpravy ktoré nám pomôžu rovnicu vyriešiť.

Ešte raz pripomíname:

Riešenie rovnice – je **postup** riešenia - výpočet neznámej ***x***
– je hodnota neznámej - **koreň** rovnice

Martina ukladá na misky váh farebné kocky rovnakej hmotnosti. Urobí s nimi niekoľko pokusov.

POKUS 1



Platí Ľ = P aj P = Ľ

Rovnováha na váhach sa nezmení, ak vymeníme obsah jednotlivých misiek.

Riešenie rovnice sa nezmení, ak vymeníme ľavú a pravú stranu rovnice.

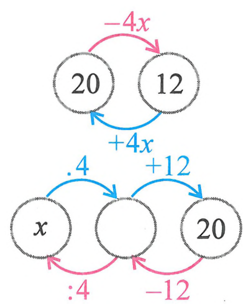
PRÍKLAD 1

Všimnite si riešenia nasledujúcich rovníc:

a) $20 - 4x = 12$ b) $14 - x = 2 + 45 : 9$

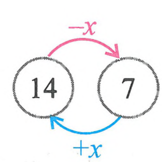
RIEŠENIE

a)
$$20 - 4x = 12$$
$$20 = 12 + 4x$$
$$4x + 12 = 20$$
$$4x = 20 - 12$$
$$4x = 8$$
$$x = 2$$



Skúška:
Ľ = 20 - 4 . 2 = 20 - 8 = 12
P = 12
platí: Ľ = P

b)
$$14 - x = 2 + 45 :9$$
$$14 - x = 2 + 5$$
$$14 - x = 7$$
$$14 = x + 7$$
$$x + 7 = 14$$
$$x = 14 - 7$$
$$x = 7$$



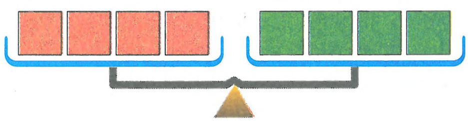
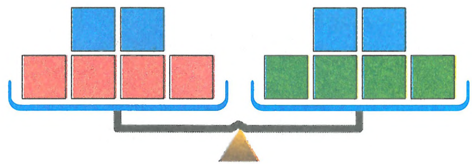
Skúška:
Ľ = 14 - 7 = 7
P = 2 + 45 : 9 = 2 + 5 = 7
platí: Ľ = P

ÚLOHA 1

Presvedčte sa, že rovnice $x + 2 = 5$ a $5 = x + 2$ majú rovnaké riešenie (ten istý koreň).

POKUS 2

Martina pridá na každú misku dve kocky.

Ľ = P $\qquad$ Ľ + a = P + a

Rovnováha zostane zachovaná, pretože hmotnosť sa na obidvoch stranách váh zväčší rovnako.

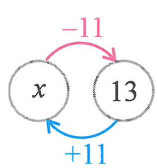
Riešenie rovnice sa nezmení, ak k obidvom stranám rovnice pričítame to isté číslo.

PRÍKLAD 2

Riešte rovnicu $x - 11 = 13$

RIEŠENIE

$x - 11 = 13$



K obidvom stranám rovnice pričítame číslo 11.

Zapíšeme: $\qquad x - 11 = 13 \qquad /+11$

Riešime: $\qquad x - 11 + 11 = 13 + 11$

$x = 24$

Skúška:

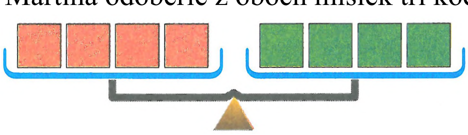
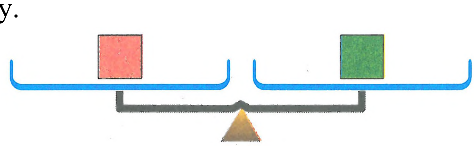
Ľ = 24 - 11 = 13

P = 13

platí: Ľ = P

POKUS 3

Martina odoberie z oboch misiek tri kocky.

Ľ = P $\qquad$ Ľ - a = P - a

Rovnováha zostane zachovaná, pretože hmotnosť sa na obidvoch stranách váh zmenší rovnako.

Riešenie rovnice sa nezmení, ak od obidvoch strán rovnice odčítame to isté číslo.

PRÍKLAD 3

Riešte rovnicu $\boldsymbol{x} + 6 = 10$

RIEŠENIE

$$\boldsymbol{x} + 6 = 10$$

Od obidvoch strán rovnice odčítame číslo 6.

Zapíšeme: $x + 6 = 10 \;/ -6$

Riešime: $\boldsymbol{x} + 6 - 6 = 10 - 6$

$$\boldsymbol{x} = 4$$

Skúška:

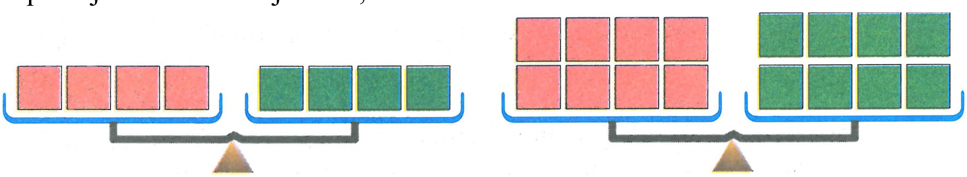
Ľ = 4 + 6 = 10

P = 10

platí: Ľ = P

POKUS 4

Martina zdvojnásobí počet kociek na ľavej miske. Aby zostala rovnováha zachovaná, musí zdvojnásobiť aj počet kociek na pravej miske. Hmotnosť na ľavej a pravej miske sa zdvojnásobí, zväčší sa dvakrát.



Ľ = P $\qquad\qquad$ n . Ľ = n . P

Riešenie rovnice sa nezmení, ak obidve strany rovnice vynásobíme tým istým číslom, rôznym od nuly.

PRÍKLAD 4

Riešte rovnicu $\frac{x}{5} = 6$

RIEŠENIE

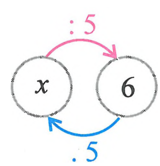
$$\frac{x}{5} = 6$$

Obidve strany rovnice vynásobíme číslom 5.

Zapíšeme: $\frac{x}{5} = 6 \qquad / .6$

Riešime: $\frac{x}{5} . 5 = 6 . 5$

$$\underline{x = 30}$$



Skúška:

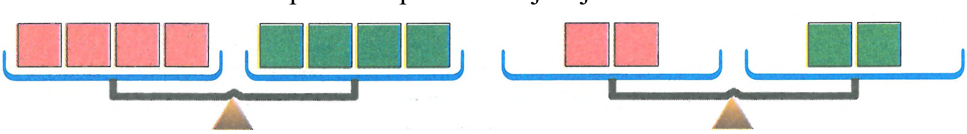
Ľ = $\frac{30}{5} = 6$

P = 6

platí: Ľ = P

POKUS 5

Martina odoberie z ľavej misky polovicu kociek. Aby váhy zostali v rovnováhe, musí aj z pravej misky odobrať polovicu kociek. Hmotnosť na ľavej aj pravej miske váh sa zmenší na polovicu predchádzajúcej hmotnosti.



Ľ = P $\qquad\qquad$ Ľ : n = P : n

Riešenie rovnice sa nezmení, ak obidve strany rovnice vydelíme tým istým číslom, rôznym od nuly.

PRÍKLAD 5

Riešte rovnicu 4x = 32

RIEŠENIE

4x = 32

Obidve strany rovnice vydelíme číslom 4.

Zapíšeme: 4x = 32 /: 4

Riešime: 4x : 4 = 32 : 4

$x = 8$

Skúška:

Ľ = 4 . 8 = 32

P = 32

platí: Ľ = P

ÚLOHA 2

Pomocou úprav z predchádzajúcich pokusov riešte rovnice s neznámou z:

a) z + 15 = 60 b) -9 + z = -12 c) 1,2z = 4,8 d) $\frac{z}{7} = 5{,}6$

Rovnice v predchádzajúcich príkladoch boli veľmi jednoduché. Na ich vyriešenie stačila iba jedna úprava, ktorá sa dala vykonať aj spamäti alebo nakresliť pomocou diagramu. Overte si to!

My si v nasledujúcich príkladoch ukážeme, ako postupujeme pri riešení zložitejších rovníc. Na ich vyriešenie (nájdenie ich koreňov) budeme musieť použiť viac ako jednu z predchádzajúcich úprav.

PRÍKLAD 6

Ivan sa vrátil k rovnici z problému 1 a rieši ju pomocou úprav, ktoré sa práve naučil. Pozrite si pozorne jeho riešenie a popíšte úpravy, ktoré urobil. Urobte aj skúšku správnosti. Ivan rieši rovnicu:

2x + 2 = x + 4

RIEŠENIE

2x + 2 = x + 4 /-2 Ivan odobral z každej misky dve závažia.

2x + 2 - 2 = x + 4 - 2

2x = x + 2 / -x Odobral z každej misky jednu kocku.

2x - x = x + 2 - x

x = 2 Hmotnosť jednej kocky je 2 kg.

POZNÁMKA

Ak pozorne sledujete Ivanove riešenie, zistíte, že od oboch strán rovnice môžeme odčítať (k obom stranám pričítať) aj členy s neznámou. Rovnicu sa snažíme upraviť tak, aby sme na jednej strane (obyčajne ľavej) osamostatnili neznámu a aby na druhej strane zostali iba čísla.

Ekvivalentné úpravy rovníc

- výmena ľavej a pravej strany rovnice
- pričítanie toho istého čísla alebo mnohočlena k obidvom stranám rovnice
- odčítanie toho istého čísla alebo mnohočlena od obidvoch strán rovnice
- vynásobenie oboch strán rovnice tým istým nenulovým číslom
- vydelenie obidvoch strán rovnice tým istým nenulovým číslom

POZNÁMKA

Slovo ekvivalentný pochádza z latinského slova aequivalens (čítaj ekvivalens) a znamená rovnaký, ten istý, rovnako hodnotný. Ekvivalentné úpravy rovníc sú tie, ktoré nezmenia riešenia (korene) rovnice a pomôžu nám rovnicu vyriešiť.

Ešte raz si na príkladoch podrobne ukážeme riešenie rovníc pomocou ekvivalentných úprav.

PRÍKLAD 7

Pomocou ekvivalentných úprav riešte rovnice:

a) $15 = 9 - 3x$ b) $x - 14 = 7x + 10$

RIEŠENIE

a) Člen s neznámou osamostatníme, ak od obidvoch strán rovnice odčítame číslo 9:

$$15 = 9 - 3x \qquad /-9$$
$$15 - 9 = 9 - 3x - 9$$
$$6 = -3x$$

Obidve strany rovnice vydelíme číslom -3:

$$6 = -3x \qquad /:(-3)$$
$$6 : (-3) = -3x : (-3)$$
$$-2 = x$$

Aby zápis výsledku bol prehľadnejší, vymeníme ľavú a pravú stranu rovnice:

$$\underline{x = -2}$$

Skúška: Ľ = 15

P = 9 - 3 . (-2) = 9 + 6 = 15

Ľ = P

b) $x - 14 = 7x + 10$

Túto rovnicu vyriešime dvoma spôsobmi, v ktorých urobíme rozdielne ekvivalentné úpravy. Popíšte a porovnajte ich. Urobte aj skúšky správnosti.

1. spôsob

$$x - 14 = 7x + 10 \qquad / + 14$$
$$x - 14 + 14 = 7x + 10 + 14$$
$$x = 7x + 24 \qquad / - 7x$$
$$x - 7x = 7x + 24 - 7x$$
$$-6x = 24 \qquad /:(-6)$$
$$-6x : (-6) = 24 : (-6)$$
$$x = -4$$

2. spôsob

$$
\begin{array}{rcll}
x - 14 &=& 7x + 10 & / -10 \\
x - 14 - 10 &=& 7x + 10 - 10 & \\
x - 24 &=& 7x & / -x \\
x - 24 - x &=& 7x - x & \\
-24 &=& 6x & \\
6x &=& -24 & / :6 \\
6x : 6 &=& -24 : 6 & \\
x &=& -4 &
\end{array}
$$

POZNÁMKA

Pri všetkých úpravách píšeme znak rovnosti pod seba. Úpravy rovnice zapisujeme za lomítko „/“ do stĺpca, ktorý je dostatočne ďaleko od riešenia rovnice.

ÚLOHA 3

Pomocou ekvivalentných úprav riešte rovnice:

a) $2x - 4 = 12$ b) $9x + 10 = 91$ c) $9x - 4 = 8x$ d) $-1 = 9x - 64$

ÚLOHA 4

a) Pomenujte ekvivalentné úpravy, ktoré sú použité pri tomto riešení rovnice a urobte skúšku správnosti:

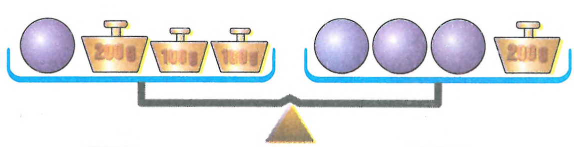
$$
\begin{array}{rcll}
40 - 7x &=& -2x + 5 & / +7x \\
40 - 7x + 7x &=& -2x + 5 + 7x & \\
40 &=& 5 + 5x & / -5 \\
40 - 5 &=& 5 + 5x - 5 & \\
35 &=& 5x & /:5 \\
7 &=& x & \\
x &=& 7 &
\end{array}
$$

b) Vyriešte tú istú rovnicu pomocou iných ekvivalentných úprav.

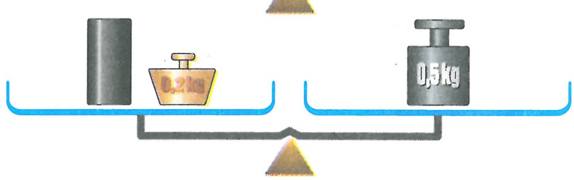
C V I Č E N I A

Nasledujúce dve cvičenia vyriešte najskôr úvahou, potom zostavte rovnicu a vyriešte ju. Nezabudnite na skúšku správnosti.

1. Katka váži guľôčky: Všetky guľôčky majú rovnakú hmotnosť. Koľko váži jedna guľôčka?



2. Určte hmotnosť kovového valčeka:



3. Máme závažia hmotnosti 1 kg, 3 kg a 9 kg a predmet, ktorý má hmotnosť
a) 5 kg b) 7 kg c) 11 kg.
Ako budú závažia i predmet rozložené na miskách váh, ak musíte použiť všetky závažia a váhy sú v rovnováhe? Znázornite graficky.

4. Riešte rovnice, pomenujte úpravy, ktoré robíte a skúšky správnosti urobte spamäti:
a) $5y = y + 16$ b) $0{,}4x = 36$ c) $-25 = 2x$ d) $5x - 6 = 24$

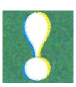
5. Riešte rovnice pomocou ekvivalentných úprav a urobte skúšky správnosti:
a) $5z - 1 = -19$ c) $-2x - 2 = 4 - 3x$
b) $15x + 1 = 8x - 13$ d) $5 + 4x = 5x - 22$

6. Vyberte správnu odpoveď:
Riešením (koreňom) rovnice $8x - 49 = -x - 4$ je číslo: **A** -5; **B** 5; **C** 6.

7.3 Riešenie jednoduchých lineárnych rovníc

PRÍKLAD 1

Riešte rovnicu so zátvorkami: $(5x + 6) - 2(x - 2) = x - 2 - (x - 3)$



RIEŠENIE

Odstránením zátvoriek zjednodušíme ľavú aj pravú stranu rovnice:

$$(5x + 6) - 2(x - 2) = x - 2 - (x - 3)$$
$$5x + 6 - 2x + 4 = x - 2 - x + 3$$
$$3x + 10 = 1$$

ďalej riešime pomocou ekvivalentných úprav:

$$3x + 10 = 1 \qquad /- 10$$
$$3x + 10 - 10 = 1 - 10$$
$$3x = -9 \qquad / :3$$
$$x = -3$$

Poslednú ekvivalentnú úpravu, vydelenie obidvoch strán rovnice číslom 3, sme vykonali spamäti.

Skúška: Ľ = $(5x + 6) - 2(x - 2) = [5 \cdot (-3) + 6] - 2(-3 - 2) = -15 + 6 + 6 + 4 = 1$
P = $x - 2 - (x - 3) = -3 - 2 - (-3 - 3) = -5 - (-6) = -5 + 6 = 1$
platí Ľ = P

PROBLÉM 1

Janko riešil rovnicu so zátvorkami. Skontrolujte jeho riešenie a popíšte vykonané úpravy rovnice. Ktoré výpočty urobil spamäti?

RIEŠENIE

$$\begin{aligned} -83 + 3(2x - 1) &= 5(x - 3) - 6(3x - 4) && \\ -83 + 6x - 3 &= 5x - 15 - 18x + 24 && \\ 6x - 86 &= -13x + 9 && / + 13x \\ 19x - 86 &= 9 && / + 86 \\ 19x &= 95 && / : 19 \\ x &= 5 && \end{aligned}$$

Skúška: Ľ = $-83 + 3(2x - 1) = -83 + 3(2.5 - 1) = -83 + 3.9 = -83 + 27 = -56$

P = $5(x - 3) - 6(3x - 4) = 5(5 - 3) - 6(3.5 - 4) = 5.2 - 6.11 = -56$

platí Ľ = P

ÚLOHA 1

Riešte nasledujúce rovnice so zátvorkami a urobte skúšku správnosti:

a) $2(y - 3) = y + 5$
b) $-(x - 10) = 3x + 2$
c) $2(z - 1) = 6 - 3(z + 1)$
d) $6(x - 3) = 10 - 2(x + 2)$

PROBLÉM 2

V ktorom riadku riešenia nasledujúcej rovnice je chyba? Urobte opravu a rovnicu vyriešte správne.

RIEŠENIE

$$\begin{aligned} t + 3t - (t + 4) &= 11 && \\ t + 3t - t + 4 &= 11 && \\ 3t + 4 &= 11 && /- 4 \\ 3t &= 7 && /: 3 \\ \underline{t = \tfrac{7}{3}} && \end{aligned}$$

Skúška: $Ľ = t + 3t - (t + 4) = \frac{7}{3} + 3 \cdot \frac{7}{3}\left(\frac{7}{3} + 4\right) = \frac{7}{3} + \frac{7}{1} - \left(\frac{7 + 12}{3}\right) = \frac{7}{3} + \frac{7}{1} - \frac{19}{3} =$

$= \frac{7 + 21 - 19}{3} = \frac{10}{3}$

P = 11

Ľ ≠ P

Správne riešenie:

Oprava v 2. riadku

$$\begin{aligned} t + 3t - t - 4 &= 11 && \\ 3t &= 15 && / : 3 \\ t &= 5 && \end{aligned}$$

Skúška: Ľ = $5 + 15 - (5 + 4) = 20 - 9 = 11$

platí Ľ = P

PRÍKLAD 2

Riešte rovnicu a urobte skúšku správnosti:

$$-8(4y - 7) - 7(1 + 4y) = 19 - 5(8y - 1)$$

RIEŠENIE

$$-8(4y - 7) - 7(1 + 4y) = 19 - 5(8y - 1)$$
$$-32y + 56 - 7 - 28y = 19 - 40y + 5$$
$$-60y + 49 = -40y + 24 \qquad / + 40y$$
$$-20y + 49 = 24 \qquad / - 49$$
$$-20y = -25 \qquad /: (-20)$$
$$y = \frac{25}{20}$$
$$\underline{y = \frac{5}{4}}$$

Skúška: $Ľ = -8(4y - 7) - 7(1 + 4y) = -8\left(4 \cdot \frac{5}{4} - 7\right) - 7\left(1 + 4 \cdot \frac{5}{4}\right) =$

$= -8(5 - 7) - 7(1 + 5) = -8 \cdot (-2) - 7 \cdot 6 = 16 - 42 = -26$

$P = 19 - 5(8y - 1) = 19 - 5\left(8 \cdot \frac{5}{4} - 1\right) = 19 - 5(2 \cdot 5 - 1) = 19 - 5 \cdot 9 =$

$= 19 - 45 = -26$

platí $Ľ = P$

POZNÁMKA

Ak pri poslednej úprave nebude koreň rovnice celé číslo, ponecháme ho v tvare zlomku, ktorý upravíme na základný tvar.

ÚLOHA 2

Riešte nasledujúce rovnice a urobte skúšky správnosti. Korene ponechajte v tvare zlomku.

a) $-23 + 5(7 - 12x) = 7(1 - 6x) - 3(2x + 1)$

b) $4x + 4(9 - x) = 2(x - 0,5) \cdot 9$

c) $8x - (2x - 9) = 4x - (4 + 4x)$

PRÍKLAD 3

Vlado rieši rovnicu, ktorej koeficienty sú desatinné čísla:

$$1,2 - 0,5x = 0,4 - (0,4x - 1,12)$$

RIEŠENIE

$$1.2 - 0,5x = 0,4 - (0,4x - 1,12)$$

Najprv odstráni zátvorky:

$$1,2 - 0,5x = 0,4 - 0,4x + 1,12$$
$$1.2 - 0,5x = -0,4x + 1,52$$

Potom upravuje rovnicu tak, aby členy s neznámou boli na ľavej strane rovnice:

$$1{,}2 - 0{,}5x = -0{,}4x + 1{,}52 \qquad / + 0{,}4x$$
$$1{,}2 - 0{,}5x + 0{,}4x = 1{,}52$$
$$1{,}2 - 0{,}1x = 1{,}52$$

Člen bez neznámej na ľavej strane prenesie na pravú stranu rovnice:

$$1{,}2 - 0{,}1x = 1{,}52 \qquad /- 1{,}2$$
$$-0{,}1x = 1{,}52 - 1{,}2$$
$$-0{,}1x = 0{,}32$$

Vlado potrebuje vypočítať x a preto násobí rovnicu číslom -10:

$$-0{,}1x = 0{,}32 \qquad /. (-10)$$
$$x = -3{,}2$$

Skúška: $Ľ = 1{,}2 - 0{,}5x = 1{,}2 - 0{,}5 \cdot (-3{,}2) = 1{,}2 + 1{,}6 = 2{,}8$

$P = 0{,}4 - (0{,}4x - 1{,}12) = 0{,}4 - (0{,}4 \cdot (-3{,}2) - 1{,}12) =$

$= 0{,}4 - (-1{,}28 - 1{,}12) = 0{,}4 - (-2{,}4) = 0{,}4 + 2{,}4 = 2{,}8$

platí Ľ = P

POZNÁMKA

Pri popise Vladovho riešenia rovnice sme použili výraz „prenesie na druhú stranu rovnice Všimnite si vyznačené členy. Iste vidíte, že pri pričítaní alebo odčítaní čísla alebo člena s neznámou k obom stranám rovnice, tento člen na jednej strane rovnice „ zmizne “ (vynuluje sa) a na druhej strane „sa objaví“ s opačným znamienkom. Hovoríme, že sme člen preniesli na druhú stranu rovnice.

Ak číslo alebo člen s neznámou prenesieme na druhú stranu rovnice,
zmení sa jeho znamienko.

ÚLOHA 3

Opíšte si do zošita nasledujúce riešenie rovnice. Zistite, v ktorých riadkoch sa členy preniesli na druhú stranu rovnice. Vyznačte v týchto riadkoch, ktoré ekvivalentné úpravy sa vykonali. Urobte aj skúšku správnosti.

$$25x - 5 - 2{,}7x + 0{,}2\,x = 6{,}5 - 0{,}5x$$
$$25x - 2{,}5x - 5 = 6{,}5 - 0{,}5x$$
$$22{,}5x + 0{,}5\,x = 6{,}5 + 5$$
$$23x = 11{,}5$$
$$x = 0{,}5$$

ÚLOHA 4

Riešte rovnice a urobte skúšku správnosti:

a) $3{,}5 + 1{,}5x + 0{,}5x = 4{,}5 + 1{,}5(2x - 1)$
b) $1{,}1y - (y - 0{,}6) + 0{,}3 = 0$
c) $0{,}2x + 0{,}5x - 6{,}5 = 2{,}7x + 5(1 - 5x)$

PROBLÉM 3

Ako budeme riešiť rovnice so zlomkami?

a) $\frac{x}{4} - 2 = 1$ b) $\frac{7x}{4} - 2 = \frac{3x}{2}$

RIEŠENIE

a) ***1. spôsob:*** Juraj najprv osamostatní člen s neznámou:

$$\frac{x}{4} - 3 = 1 \qquad / + 3$$

potom odstráni zlomok:

$$\frac{x}{4} = 4 \qquad /. 4$$

$$\underline{x = 16}$$

2. spôsob: Lukáš najskôr odstráni zlomok tak, že celú rovnicu vynásobí číslom štyri. Pozor, vynásobiť sa musí každý člen rovnice!

$$\frac{x}{4} - 3 = 1 \qquad /. 4$$

potom odstráni zlomok:

$$\frac{x}{4} . 4 - 3 . 4 = 1 . 4$$

$$x - 12 = 4 \qquad / + \; 12$$

$$\underline{x = 16}$$

Presvedčte sa skúškou správnosti, že obaja kamaráti našli správne riešenie.

b) 7. ***spôsob:*** Juraj znovu najprv osamostatňuje neznámu:

$$\frac{7x}{4} - 2 = \frac{3x}{2} \qquad / - \frac{3x}{2}$$

$$\frac{7x}{4} - \frac{3x}{2} - 2 = 0 \qquad / + 2$$

$$\frac{7x}{4} - \frac{3x}{2} = 2$$

$$\left(\frac{7}{4} - \frac{3}{2}\right)x = 2$$

$$\left(\frac{7 - 6}{4}\right)x = 2$$

Zlomok odstráni až nakoniec:

$$\frac{1}{4}x = 2 \qquad / . 4$$

$$x = 8$$

2. spôsob: Lukáš zase najskôr odstráni obidva zlomky. Spoločný menovateľ týchto zlomkov je číslo 4. Preto obidve strany rovnice (každý jej člen) vynásobí číslom 4.

$$\frac{7x}{4} - 2 = \frac{3x}{2} \qquad / . 4$$

$$\frac{7x}{4} . 4 - 2 . 4 = \frac{3x}{2} . 4$$

$$7x - 8 = 6x$$

Lukáš dostal rovnicu, v ktorej každý koeficient je celé číslo a túto už vie vyriešiť známym spôsobom.

$$\begin{aligned} 7x - 8 &= 6x && / + 8 \\ 7x &= 6x + 8 && / - 6x \\ 7x - 6x &= 8 && \\ x &= 8 && \end{aligned}$$

Skúška: $Ľ = \frac{7x}{4} - 2 = \frac{7 \, . \, 8}{4} - 2 = \frac{7 \, . \, 2}{1} - 2 = 14 - 2 = 12$

$P = \frac{3x}{2} = \frac{3 \, . \, 8}{2} = \frac{3 \, . \, 4}{1} = 12$

platí $Ľ = P$

POZNÁMKA

Lukášovo riešenie je rozumnejšie, jednoduchšie a kratšie, nemusíme počítať so zlomkami.

ÚLOHA 5

Riešte nasledujúce rovnice a urobte skúšky správnosti.

a) $\frac{x}{5} + 1 = 6$ b) $2 - \frac{x}{3} = 9$ c) $\frac{2}{5}x - 2 = 9 - \frac{3}{5}x$ d) $\frac{2x}{3} + \frac{5x}{2} = 19$

Pri riešení rovníc sa snažíme o prehľadný a zrozumiteľný zápis jednotlivých krokov. Výhodné je, ak postupujeme v tomto poradí:

1. Odstránime z rovnice zátvorky a zlomky.
2. Zjednodušíme ľavú aj pravú stranu rovnice.
3. Prenesieme členy s neznámou na jednu stranu a čísla na druhú stranu rovnice.
4. Ľavú aj pravú stranu rovnice znovu zjednodušíme.
5. Vydelíme obidve strany rovnice koeficientom pri neznámej.
6. Urobíme skúšku správnosti dosadením vypočítanej hodnoty do pôvodnej rovnice.

PRÍKLAD 4

Riešte rovnicu a urobte skúšku správnosti: $\frac{5 + x}{2} = 7$

RIEŠENIE

Martin najskôr odstráni zlomok, teda celú rovnicu vynásobí dvoma. Ďalej postupuje ekvivalentnými úpravami, pritom niektoré operácie urobí spamäti.

$$\begin{aligned} \frac{5 + x}{2} &= 7 && / \, . \, 2 \\ 5 + x &= 14 && / - 5 \\ \underline{x} &\underline{= 9} && \end{aligned}$$

Skúška: $Ľ = \frac{5 + x}{2} = \frac{5 + 9}{2} = \frac{14}{2} = 7$

$P = 7$

platí $Ľ = P$

ÚLOHA 6

Z týchto rovníc najskôr odstráňte zlomky, potom riešte a urobte skúšku správnosti:

a) $\frac{x+8}{3} = 4$ b) $\frac{x-9}{-5} = 3$ c) $\frac{1-5x}{4} = \frac{3}{2}$ d) $\frac{3{,}25+x}{-0{,}5} = -0{,}3$

ÚLOHA 7

Riešte uvedené rovnice a urobte skúšky správnosti:

a) $6x - 3(x+1) = 18 + 2(x+2)$

b) $\frac{y}{2} + \frac{2y}{2} = \frac{y}{5} + \frac{13}{5}$

c) $\frac{1}{5} - \frac{3x}{8} = \frac{19}{8} + \frac{9x}{5}$

Každá rovnica, ktorú sme doteraz riešili mala iba jednu neznámu, ktorú sme najčastejšie označovali x. Dokázali sme ju pomocou ekvivalentných úprav upraviť na tvar:

$$a\,.\,x = b$$

kde x je neznáma a *a, b* sú čísla, pričom $a \neq 0$.

Riešenie (koreň) rovnice je potom číslo:

$$x = \frac{b}{a}$$

Takúto rovnicu nazývame **lineárna rovnica** s jednou neznámou.

POZNÁMKA

Každá lineárna rovnica s jednou neznámou má vždy práve jedno riešenie (koreň) $x = \frac{b}{a}$.

PROBLÉM 4

Riešte rovnicu $3x + 1 = 3(x + 1)$

RIEŠENIE

$$\begin{aligned} 3x + 1 &= 3(x+1) \\ 3x + 1 &= 3x + 3 && /\ -3x - 1 \\ 0 &= 3x - 3x + 3 - 1 && /\ -3x + 3x \\ 3x - 3x &= 3 - 1 \\ 0\,.\,x &= 2 \end{aligned}$$

Pre rovnosť v poslednom riadku platí $a = 0$, teda pôvodná rovnosť dvoch výrazov $3x + 1 = 3(x + 1)$ nie je lineárna rovnica. Ak do nej za *x* dosadíme ľubovoľné číslo, vždy dostaneme rovnosť $0 = 2$, ktorá nie je platná. To znamená, že pôvodná rovnosť nie je platná pre nijaké *x*. Overte si to dosadzovaním ľubovoľných čísel za x.

ÚLOHA 8

Presvedčte sa, že nasledujúce rovnosti dvoch výrazov nie sú lineárne rovnice a nevyhovuje im žiadne číslo x:

a) $3(x - 1) + 2x = 5x + 2$ b) $\frac{3x}{2} - x = \frac{1}{2}(x - 2)$

PROBLÉM 5

Riešte: $2x + 3 = 3(x + 1) - x$

RIEŠENIE

$$2x + 3 = 3(x + 1) - x$$
$$2x + 3 = 3x + 3 - x$$
$$2x + 3 = 2x + 3 \qquad / - 2x - 3$$
$$\underline{0 \,.\, x = 0}$$

Pre rovnosť v poslednom riadku platí: $a = 0$, teda pôvodná rovnosť dvoch výrazov $2x + 3 = 3(x + 1) - x$ nie je lineárna rovnica. Ak do nej za x dosadíme ľubovoľné číslo, dostaneme rovnosť 0 = 0, ktorá je platná. To znamená, že pôvodná rovnosť je platná pre ľubovoľné x. Presvedčte sa o tom dosadzovaním ľubovoľných čísel za x.

ÚLOHA 9

Presvedčte sa, že nasledujúce rovnosti dvoch výrazov nie sú lineárne rovnice a vyhovuje im ľubovoľné číslo x.

a) $x - 15 - 4x = -3(5 + x)$ b) $\frac{5x}{12} - \frac{x}{4} + \frac{x}{6} - \frac{x}{3} = 0$

ÚLOHA 10

Zistite, či daná rovnosť je lineárna rovnica. Ak áno, nájdite koreň a urobte skúšku správnosti.

a) $2(10 - 2n) -12 + 2(3n - 4) = 0$ b) $5(0{,}5n - 0{,}1) + 0{,}4n = (n - 4{,}1) \,.\, 3 - 0{,}1n$

PRÍKLAD 5

Jakub rieši rovnosť: $(2x - 1) + 3(x - 1) = -4$. Skontrolujte jeho riešenie a povedzte, prečo je daná rovnosť lineárna rovnica, ktorá má práve jedno riešenie.

RIEŠENIE

$$(2x - 1) + 3(x - 1) = -4$$
$$2x - 1 + 3x - 3 = -4$$
$$5x - 4 = -4 \qquad / + 4$$
$$5x = 0 \qquad / : 5$$
$$x = 0$$

Skúška: Ľ = $(2x - 1) + 3(x - 1) = 2.0 - 1 + 3(0 - 1) = -1 + (-3) = -4$

P = -4

platí Ľ = P

ÚLOHA 11

Povedzte, ktorá z rovností je lineárna rovnica a prečo.

a) $0 \,.\, x = 0$ b) $2 \,.\, x = 0$ c) $0 \,.\, x = 2$

CVIČENIA

1. Riešte rovnice a urobte skúšky správnosti.

a) $5(x - 1) + 20 = 4(x - 3)$

b) $3x - (3x + 5) = 2(x - 2) - 3$

c) $3x - 3(x - 1) - 4(x + 3) = 3(1 - x) - 4x$

d) $-7(2x - 1) + 4(x + 2) = 30 - 9(3x - 4)$

e) $0{,}6x - 4 = -2{,}8$

f) $0{,}1 - 0{,}01x = -1$

g) $0{,}02x - 1{,}8 = 0{,}2$

2. Riešte rovnice s neznámou p. Výsledok nechajte v tvare zlomku a urobte aj skúšku správnosti.

a) $2(p - 2) + 7p - 3(1 + p) = 0$

b) $11p + 6(2p - 1) = 9(2p - 1)$

c) $(2p - 13) + (3p + 4) = -6(p - 8) - (1 + 9p)$

3. Vyberte správny výsledok:

a) $0{,}3(t - 1) = -0{,}4(t + 1) - 0{,}1(1 - t)$ $t = 3;\ t = \frac{4}{3};\ t = -\frac{1}{3}$

b) $2t - 2(0{,}5t - 2) + (t + 5) \,.\, 3 = -27$ $t = -\frac{2}{3};\ t = -\frac{3}{10};\ t = -\frac{23}{2}$

4. Riešenie (koreň) rovnice $-1{,}9y - (y - 0{,}6) + 0{,}3 \,.\, (4y - 0{,}3) = 0$ je číslo:

A $\frac{30}{17}$; **B** $\frac{51}{170}$; **C** $0{,}3$. Vyberte správnu odpoveď.

5. V nasledujúcich rovniciach najskôr odstráňte zlomky, a potom riešte pomocou ekvivalentných úprav. Nezabudnite urobiť skúšku správnosti.

a) $\frac{x}{2} + \frac{x}{6} = 12$ c) $-\frac{2}{3} + x + \frac{5}{12} = 2 + \frac{x}{4}$ e) $\frac{x - 7}{5} = 3$ g) $\frac{13 + 9x}{8} = \frac{1}{2}$

b) $\frac{2y}{3} - \frac{y}{3} = 2\frac{1}{3}$ d) $-\frac{x}{5} - 1 - \frac{x}{3} = \frac{1}{3}$ f) $\frac{-x - 5}{11} = -2$ h) $\frac{0{,}6 - 23x}{0{,}03} = 20$

6. Nájdite chybu v riešení nasledujúcej rovnice. Rovnicu správne vyriešte a urobte aj skúšku správnosti.

$$\begin{aligned}
2(x + 1) + 3(x - 2) &= \tfrac{x}{5} + \tfrac{1}{2} \qquad / \,.\, 10\\
20(10x + 10) + 30(10x - 20) &= 2x + 5\\
200x + 200 + 300x - 600 &= 2x + 5\\
500x - 400 &= 2x + 5 \qquad / - 2x + 400\\
498x &= 405\\
x &= \tfrac{405}{498}\\
x &= \tfrac{135}{166}
\end{aligned}$$

7. Zistite, ktorá z rovností je lineárna rovnica (má práve jeden koreň):

a) $2(1-x)=\frac{11}{3}-2x$ b) $x-\frac{2}{3}=1-\frac{1}{3}(5-3x)$ c) $3\left(x+\frac{1}{9}\right)+\frac{2}{3}=1$

8. Odôvodnite, prečo rovnosti dvoch výrazov $x-\frac{x}{3}+2=\frac{1}{6}-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}x$ nevyhovuje žiadne číslo.

9. Koreň prvej rovnice je šesťkrát väčší ako koreň druhej rovnice. Presvedčte sa o tom.

a) $2x-63=\frac{x}{4}$ b) $2x-3=\frac{x}{4}+\frac{15}{2}$

10. Čísla $\frac{1}{3}$, $-\frac{5}{6}$, $\frac{1}{6}$ sú koreňmi nasledujúcich rovníc. Ktorej rovnici patrí ktorý koreň?

a) $\frac{1}{2}=\frac{4}{3}+z$ b) $\frac{2}{3}=\frac{5}{6}-y$ c) $x+\frac{5}{3}=2$

11. Vyriešte rovnicu a urobte skúšku správnosti:

$9{,}75 + 1{,}3(x - 0{,}7) = 0{,}12(x + 10) + 5x$

7.4 Slovné úlohy vedúce na riešenie lineárnych rovníc

Slovná úloha od nás vyžaduje vyriešiť matematický problém z reálneho života. Denne počúvame a čítame informácie, v ktorých sa vyskytujú rôzne číselné údaje. Matematika nám pomáha číslam lepšie porozumieť, vedieť ich porovnať a počítať s nimi.

Takmer každý deň nakupujeme potraviny a iné potrebné veci do domácnosti, každý mesiac treba zaplatiť poplatky za bývanie, vodu, elektrinu, telefón, stravu v školskej jedálni i za cestovný lístok na dopravu.

Každodenný život nám tak ponúka veľa matematických úloh, ktoré by sme mali dobre pochopiť a naučiť sa ich riešiť, aby sa z nás stali nielen vzdelaní ľudia, ale aj dobrí hospodári.

Pri riešení slovnej úlohy sa snažme dodržať tieto zásady:

1. Úlohu si dôkladne prečítame. Ak je to potrebné, i viackrát.
2. Napíšeme si stručný zápis so všetkými známymi aj neznámymi údajmi. Môžeme si načrtnúť obrázok situácie popísanej v úlohe.
3. Premyslíme si, ako budeme úlohu riešiť.
4. Úlohu riešime výpočtom alebo zostavíme rovnicu. K výpočtu alebo riešeniu rovnice môžeme pripojiť slovný komentár, ktorý bližšie vysvetlí náš myšlienkový postup. Riešenie rovnice zapisujeme prehľadne.
5. Urobíme skúšku správnosti, ktorou sa vrátime k zadaniu úlohy.
6. Napíšeme odpoveď.

PRÍKLAD 1

Šachového turnaja sa zúčastnilo 35 žiakov. Dievčat bolo o 13 menej ako chlapcov. Koľko dievčat a koľko chlapcov sa zúčastnilo turnaja?

RIEŠENIE I

Peter si údaje z úlohy zapísal takto:

chlapcov . . . x
dievčat o 13 menej ako . . . $x - 13$
spolu . . . 35 žiakov

platí: $x + (x - 13) = 35$

Peter rieši rovnicu:

$$x + (x - 13) = 35$$
$$x + x - 13 = 35$$
$$2x - 13 = 35 \quad / + 13$$
$$2x = 48 \quad / :2$$
$$x = 24$$

Peter vypočítal, že šachového turnaja sa zúčastnilo 24 chlapcov. Keďže dievčat je o 13 menej ako chlapcov, počet dievčat je: 24 - 13 = 11

Skúška: chlapcov . . . 24
dievčat . . . 11
spolu . . . 35 to je údaj zo zadania

RIEŠENIE II

Juraj úlohu vyriešil tak, že za neznámu si zvolil počet dievčat:

dievčat . . . x
chlapcov o 13 viac ako . . . $x + 13$
spolu . . . 35 žiakov

platí:

$$x + (x + 13) = 35$$
$$2x + 13 = 35 \quad / - 13$$
$$2x = 22 \quad / :2$$
$$x = 11$$

Juraj vypočítal, že šachového turnaja sa zúčastnilo 11 dievčat. Keďže chlapcov bolo o 13 viac ako dievčat, počet chlapcov je: 11 + 13 = 24

Skúška: dievčat . . . 11
chlapcov . . . 24
spolu . . . 35 to je údaj zo zadania

Odpoveď: Šachového turnaja sa zúčastnilo 24 chlapcov a 11 dievčat.

Porovnávame dve veličiny **rozdielom:**
Odčítame ich a zistíme **o koľko** je prvá **väčšia** ako druhá.
o koľko je druhá **menšia** ako prvá.

ÚLOHA 1

Súčet dvoch čísel je 854, jedno je o 216 väčšie ako druhé. Ktoré sú to čísla?

ÚLOHA 2

Priamy uhol je rozdelený na dva uhly, z ktorých jeden je o 50° menší ako druhý. Aká je ich veľkosť?

PRÍKLAD 2

Na kurz klasických spoločenských tancov sa prihlásilo 252 účastníkov. Dievčat bolo 2-krát viac ako chlapcov. Koľko dievčat a koľko chlapcov sa prihlásilo?

RIEŠENIE I

Adam si neznámou x označil počet chlapcov

chlapcov . . . x
dievčat dvakrát viac ako . . . $2 \cdot x = 2x$
spolu . . . 252

platí:

$$x + 2x = 252$$
$$3x = 252 \quad /:3$$
$$\underline{x = 84}$$

Skúška: chlapcov . . . 84
dievčat . . . 2 . 84 = 168
spolu . . . 84 + 168 = 252
to je údaj zo zadania

RIEŠENIE II

Julka si neznámou ***x*** označila počet dievčat

dievčat . . x
chlapcov dvakrát menej ako . . $\frac{1}{2}x = \frac{x}{2}$
spolu . . . 252

$$x + \frac{x}{2} = 252 \quad / \cdot 2$$
$$2x + x = 504$$
$$3x = 504 \quad /:3$$
$$x = 168$$

Skúška: dievčatá . . . 168
chlapci . . . 168 : 2 = 84
spolu . . . 168 + 84 = 252 to je údaj zo zadania

Odpoveď: Na tanečný kurz sa prihlásilo 168 dievčat a 84 chlapcov.

POZNÁMKA

Adamov postup je výhodnejší, pretože zostavil rovnicu, v ktorej sa nevyskytujú zlomky.

Porovnávame dve veličiny **podielom:**
Vydelíme ich a zistíme **koľkokrát** je prvá **väčšia** ako druhá.
koľkokrát je druhá **menšia** ako prvá.

ÚLOHA 3

V ovocnom sade je spolu 568 jabloní a hrušiek. Koľko je ktorých, ak hrušiek je 3-krát menej ako jabloní?

ÚLOHA 4

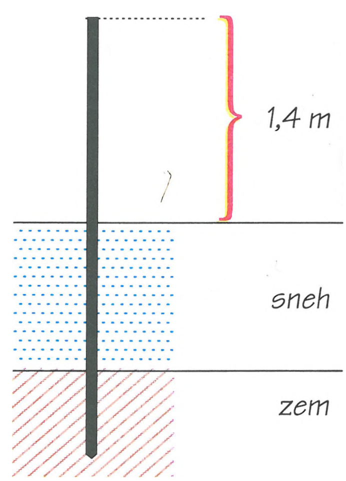
Na parkovisko prišlo za dopoludnie 354 áut. Osobných bolo 5-krát viac ako dodávkových. Koľko osobných a koľko dodávkových áut prišlo za dopoludnie na parkovisko?

PRÍKLAD 3

Orientačná tyč na turistickom chodníku vo Vysokých Tatrách je zapustená $\frac{1}{5}$ svojej dĺžky do zeme. V zime sneh prikryl $\frac{1}{3}$ jej celkovej dĺžky a nad snehom zostalo ešte 1,4 m. Aká je dĺžka celej tyče?

RIEŠENIE

Jana si nakreslila obrázok a zapísala údaje takto:



dĺžka tyče ... x metrov
nad snehom ... 1,4 m
pod snehom ... $\frac{1}{3}x = \frac{x}{3}$ m
v zemi ... $\frac{1}{5}x = \frac{x}{5}$ m

platí: $\frac{x}{3} + \frac{x}{5} + 1{,}4 = x$

Jana rieši rovnicu:

$$\begin{aligned} \frac{x}{3} + \frac{x}{5} + 1{,}4 &= x && /\,.\,15 \\ 3x + 5x + 21 &= 15x \\ 8x + 21 &= 15x && /-8x \\ 21 &= 7x \\ 7x &= 21 && /:7 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Jana si uvedomí: Počítala som v metroch, dĺžka tyče je 3 metre.

Skúška: v zemi ... $\frac{3}{5}$ m = 0,6 m
pod snehom ... $\frac{3}{3}$ = 1 m
spolu ... 1,6 m
nad snehom ... 3 – 1,6 = 1,4 m to je údaj zo zadania

Odpoveď: Dĺžka celej tyče je 3 m.

ÚLOHA 5

7\. B trieda bola na preventívnej zubnej prehliadke. Štvrtine žiakov zistili dva zubné kazy, osmine jeden kaz. Polovica triedy mala všetky zuby zdravé. Koľko žiakov chodí do 7. B, ak v deň zubnej prehliadky traja žiaci chýbali?

ÚLOHA 6

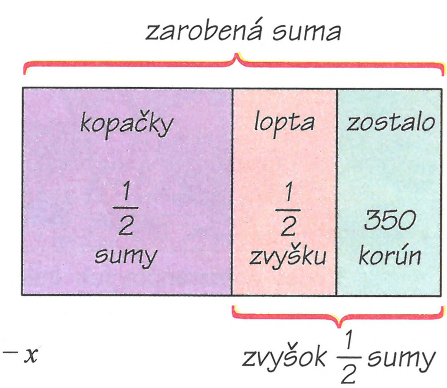
Cyklista prešiel v prvý deň $\frac{2}{5}$ cesty, druhý deň $\frac{3}{8}$ cesty. Do cieľa mu zostáva prejsť ešte 45 km.

a) Aká je dĺžka celej cesty?
b) Koľko kilometrov už prešiel?

PRÍKLAD 4

Matúš oznámil mame: Z peňazí, ktoré som si zarobil na brigáde mi zostalo 350 korún. Pritom za polovicu zarobenej sumy som si kúpil kopačky a za polovicu zvyšku futbalovú loptu. Viete vypočítať koľko korún zarobil Matúš na brigáde?

RIEŠENIE



spolu zarobil . . . x korún
kopačky . . . $\frac{x}{2}$ korún
zvyšok . . . $\left(x - \frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2}$ korún
lopta . . . $\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{2} = \frac{x}{4}$ korún
zostalo mu . . . 350 korún

platí

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + 350 = x$$
$$\frac{2x + x}{4} + 350 = x$$
$$\frac{3x}{4} + 350 = x \qquad / - 350 - x$$
$$\frac{3x}{4} - x = -350$$
$$\frac{3x - 4x}{4} = -350$$
$$-\frac{x}{4} = -350 \qquad / . (-4)$$
$$\underline{x = 1\,400}$$

Skúška: kopačky . . . 1 400 : 2 = 700
lopta . . . 700 : 2 = 350
zostalo mu . . . 1 400 (700 + 350) = 1 400 - 1 050 = 350 korún,
ako bolo v zadaní

Odpoveď: Matúš si na brigáde zarobil 1 400 korún.

***ÚLOHA** 7*

Koľko dievčat sa zúčastnilo súťaže Miss školy, ak deviatačky tvorili polovicu súťažiacich, dve tretiny zvyšných dievčat boli ôsmačky a siedmačky boli tri?

ÚLOHA 8

Peter rozdelil orechy dvom kamarátom. Každý z kamarátov dostal štvrtinu všetkých orechov a ešte dva orechy. Petrovi zostali dva orechy. Koľko orechov mal, keď začal rozdávať?

PRÍKLAD 5

Zmes ovocných cukríkov obsahuje cukríky s príchuťou pomarančovou, citrónovou a kivi. Citrónových je o 10 viac ako kivi, pomarančových trikrát viac ako kivi, ale presne toľko ako kivi a citrónových spolu. Koľko ktorých cukríkov obsahuje cukríková zmes?

RIEŠENIE

Martina je známa maškrtníčka, ale ani matematika jej nerobí veľké problémy. Rieši takto:
Zdá sa, že najmenej cukríkov je s príchuťou kivi. Ich počet bude neznáma x. Počet ostatných sa dá vyjadriť pomocou ***x***. Martina napíše zápis:

kivi . . . x
citrón . . . $x + 10$
pomaranč . . . $3x$ ale aj $x + (x + 10)$

Počet pomarančových cukríkov je vyjadrený dvomi výrazmi, ktoré sa musia rovnať. Preto budem riešiť rovnicu:

$$3x = x + (x + 10)$$
$$3x = 2x + 10 \qquad /-2x$$
$$x = 10$$

Skúška: kivi . . . 10
citrón . . . 10 + 10 = 20
pomaranč . . . 3 . 10 = 30 ale aj 10 + 20 = 30
platí 30 = 30, teda rovnica bola zostavená aj vyriešená správne

Odpoveď: V cukríkovej zmesi je 10 cukríkov s príchuťou kivi, 20 citrónových a 30 pomarančových.

Zopakujme si postup pri riešení slovných úloh pomocou lineárnych rovníc.

1. Označíme **neznámu** písmenom (napr. *x*) a napíšeme stručný **zápis** úlohy.
2. Nájdeme **výrazy,** ktorých hodnoty **sa rovnajú** a zostavíme **rovnicu.**
3. **Rovnicu vyriešime** pomocou ekvivalentných úprav.
4. Urobíme **skúšku správnosti,** ktorou sa vrátime k údajom zo zadania.
5. Ak sa údaje vypočítané v skúške správnosti:
   → **zhodujú** s údajmi zo zadania, **napíšeme odpoveď.**
   → **nezhodujú** s údajmi zo zadania, skontrolujeme celý postup riešenia alebo úlohu riešime ešte raz. Za neznámu si môžeme zvoliť iný údaj ako v pôvodnom riešení.

PRÍKLAD 6

Miškova stará mama chová sliepky a králiky. Miško spočítal, že spolu majú 20 hláv a 64 nôh. Koľko ktorých zvierat chová stará mama?

RIEŠENIE

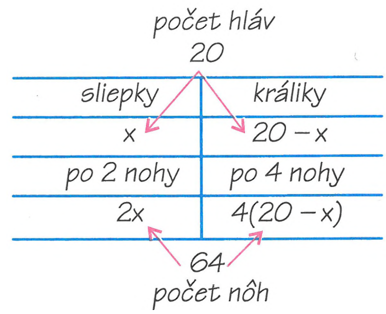
V úlohe vystupujú tri údaje: počet zvierat = počet hláv
počet nôh jedného zvieraťa
počet všetkých nôh

Zapíšeme si ich takto:

	Počet zvierat	Počet nôh jedného zvieraťa	Počet všetkých nôh
Sliepky	x	2	2x
Králiky	20 - x	4	4. (20 - x)
			spolu 64

platí $2x + 4 . (20 - x) = 64$

Miško si k úlohe nakreslil takýto obrázok:



riešime rovnicu

$$2x + 4.(20 - x) = 64$$

$$2x + 80 - 4x = 64 \qquad / -80$$

$$-2x = -16$$

$$x = 8 \qquad / :(-2)$$

Vypočítali sme, že stará mama chová 8 sliepok.
Počet králikov potom je 20 - 8 = 12.

Skúška: sliepky . . . 8 . . . nohy . . . 2 . 8 = 16
králiky . . . 12 . . . nohy . . . 4 . 12 = 48
spolu . . . 20 . . . nohy . . . 16 + 48 = 64 to je údaj zo zadania

Odpoveď: Stará mama chová 8 sliepok a 12 králikov.

ÚLOHA 9

Vyriešte príklad 6 ešte raz tak, že ako neznámu x si označíte počet králikov.

ÚLOHA 10

Tri základné školy navštevuje spolu 1 415 žiakov. Do druhej školy chodí dvakrát viac žiakov ako do prvej, do tretej školy chodí o 100 žiakov menej ako do druhej. Koľko žiakov navštevuje každú z troch škôl?

PRÍKLAD 7

V trojuholníku ABC je strana a o 2 cm dlhšia ako strana b, strana c je o 1,5 cm kratšia ako strana b. Obvod trojuholníka je 18,5 cm. Určte dĺžku každej strany trojuholníka.

RIEŠENIE

Ukážeme si, ako môžeme túto úlohu vyriešiť tromi rôznymi rovnicami, pretože za neznámu si môžeme zvoliť dĺžku ľubovoľnej z troch strán.
Údaje z úlohy zapíšeme do tabuľky:

Strana a	x	x + 2	(x + 1,5) + 2
Strana b	x - 2	x	x + 1,5
Strana c	(x - 2) - 1,5	x - 1,5	x
Obvod 18,5 cm	x+(x - 2)+[(x - 2)- 1,5]	(x + 2)+x+(x - 1,5)	[(x+1,5)+2]+(x+1,5)+x
	rovnica I	rovnica II	rovnica III

Napíšte zápis každého riešenia aj pomocou šípok a skontrolujte, či sú rovnice správne zostavené.

rovnica I $\quad x + (x - 2) + [(x - 2) - 1{,}5] = 18{,}5$

rovnica II $\quad (x + 2) + x + (x - 1{,}5) = 18{,}5$

rovnica III $\quad [(x + 1{,}5) + 2] + (x + 1{,}5) + x = 18{,}5$

Vyriešte postupne všetky rovnice a pri každej vypočítajte aj dĺžky zvyšných dvoch strán. Skontrolujte si riešenie:

a = 8 cm (koreň rovnice I)
b = 6 cm (koreň rovnice II)
c = 4,5 cm (koreň rovnice III)

Urobte skúšku správnosti a napíšte odpoveď.

PRÍKLAD 8

Otec má 36 rokov, syn 6 rokov. O koľko rokov bude otec trikrát starší ako syn?

RIEŠENIE

Hľadaný počet rokov bude neznáma x.
Údaje zo zadania zapíšeme prehľadne takto:

	Súčasný vek	Zmena	Nový vek
Otec	36	$+x$	$36+x$
Syn	6	$+x$	$6+x$

otec trikrát viac ako

Nový vek otca je vyjadrený dvomi výrazmi, ktoré sa rovnajú.

Riešime rovnicu: $36 + x = 3(6 + x)$

$$
\begin{aligned}
36 + x &= 18 + 3x &\quad& / -18 - x\\
18 &= 2x && /: 2\\
x &= 9
\end{aligned}
$$

Vypočítali sme, že sa tak stane o 9 rokov.

Skúška: otec . . . nový vek . . . 36 + 9 = 45 rokov
syn . . . nový vek . . . 6 + 9 = 15 rokov
platí: 45 : 15 = 3 teda otec je trikrát starší ako syn, čo bolo v zadaní

Odpoveď: Otec bude trikrát starší ako syn o 9 rokov.

ÚLOHA 11

Mama má 38 rokov, dcéra má 10 rokov. V ktorom roku maminho života bude mama päťkrát staršia ako dcéra? (Alebo sa to už stalo?)

PRÍKLAD 9

V jednom košíku je 48 orechov, v druhom 20 orechov. Koľko orechov musíme odobrať z prvého košíka a vložiť do druhého, aby v prvom košíku bolo o 6 orechov viac ako v druhom?

RIEŠENIE

Pozorne si prezrite nasledujúce riešenie:

	1. košík	2. košík
pôvodne	48	20
zmena	$-x$	$+x$
má byť	o 6 viac	

potom $48 - x > 20 + x$

teda $48 - x = 20 + x + 6$ alebo $48 - x - 6 = 20 + x$

Riešime rovnicu:

$$
\begin{aligned}
48 - x - 6 &= 20 + x \\
42 - x &= 20 + x \qquad / + x - 20 \\
22 &= 2x \qquad / \,.\, 2 \\
x &= 11
\end{aligned}
$$

Skúška: 1. košík $48 - 11 = 37$

2. košík $20 + 11 = 31$

platí: $37 - 31 = 6$ údaj zo zadania úlohy

Odpoveď: Z prvého košíka musíme odobrať a vložiť do druhého košíka 11 orechov.

CVIČENIA

1. Na železničnej stanici stálo 159 nákladných vagónov. Vytvorili z nich dva vlaky. Prvý vlak mal o 15 vagónov viac ako druhý. Koľko vagónov mal každý vlak?

2. Stará mama je o 5 rokov mladšia ako starý otec. Spolu majú 153 rokov. Koľko rokov má stará mama a koľko starý otec?

3. Úsečku s dĺžkou 15 cm sme rozdelili na dve úsečky. Rozdiel ich dĺžok je 84 mm. Akú dĺžku v centimetroch majú jednotlivé úsečky?

4. Jakub má v zbierke 171 obrázkov hokejistov. Amerických má dvakrát toľko ako kanadských. Koľko obrázkov amerických a koľko kanadských hokejistov má Jakub v zbierke?

5. V predajni predali 452 pecňov chleba. Čierneho chleba predali trikrát viac ako bieleho. Koľko bieleho a koľko čierneho chleba predali v predajni?

6. Obvod rovnobežníka je 65 cm. Dĺžka jednej strany je 1,5-násobok dĺžky kratšej strany. Akú dĺžku majú strany rovnobežníka?

7. Nájdite číslo, ktorého pätina zväčšená o 6 sa rovná 15.

8. Súčet šestiny a sedminy hľadaného čísla je 13. Ktoré je to číslo?

9. Filatelista Jozef sa chváli spolužiakom: $\frac{1}{5}$ z mojich známok sú ruské známky, $\frac{2}{3}$ sú slovenské a $\frac{1}{10}$ sú nemecké známky. Nepomýlil sa?

10. $\frac{1}{8}$ stromov v ovocnom sade v zime vymrzla, $\frac{1}{12}$ poškodili choroby a škodcovia. Zdravých stromov zostalo 152. Stačí, keď dosadia 35 stromov, aby obnovili pôvodný počet stromov v ovocnom sade?

11. Vodič diaľkového autobusu prešiel dopoludnia $\frac{2}{5}$ dĺžky trasy, popoludní $\frac{1}{3}$ tejto dĺžky. Do cieľa mu zostáva ešte 60 km. Aká dlhá je trasa diaľkového autobusu?

12. Natierač spotreboval na natretie plechovej strechy 3,5-krát viac farby ako na žľaby. Na natretie žľabov spotreboval o 3,1 kg farby viac ako na plot. Celkom spotreboval 20 kg farby. Koľko kilogramov farby spotreboval na natretie strechy, plota a žľabov?

13. Dana nakúpila za 464 Sk darčeky k narodeninám: košeľu, viazanku a ponožky. Za viazanku zaplatila 4,5-krát menej ako za košeľu a zároveň o 56 Sk viac ako za ponožky. Koľko korún zaplatila za jednotlivé darčeky?

14. V novom dome na sídlisku sú byty troch veľkostí. Z celkového počtu bytov je $\frac{1}{6}$ štvorizbových, $\frac{1}{3}$ zo zvyšku sú dvojizbové byty. Trojizbových bytov je 160. Koľko je v dome štvorizbových bytov a koľko dvojizbových?

15. Náklad (celkový počet výtlačkov) encyklopédie sa vypredal za tri týždne. Prvý týždeň sa vypredali $\frac{2}{5}$ nákladu, druhý týždeň $\frac{7}{12}$ zvyšku, tretí týždeň 5 000 výtlačkov. V akom náklade encyklopédia vyšla?

16. Koľko rokov má Petrov brat teraz, ak o 15 rokov bude mať štyrikrát toľko ako mal pred 15 rokmi?

17. Do predajne zeleniny dodali na zimné predzásobenie zemiaky, kapustu a mrkvu. $\frac{2}{7}$ z celkového množstva tvorí mrkva, $\frac{1}{3}$ je kapusty a zvyšok sú zemiaky. Mrkvy je o 10 kg menej ako kapusty. Koľko kilogramov zemiakov majú v predajni?

18. Mama má 32 rokov, otec 36 rokov a dcéra má 8 rokov. Vymyslite úlohu pre svojich spolužiakov, v ktorej tieto údaje použijete.

HISTORICKÉ CVIČENIA

Pokúste sa pochopiť a vyriešiť úlohy z učebnice matematiky, ktorá mala názov POČTOVEDA a vydali ju v Banskej Bystrici v roku 1866.

1. **Keďby sa za slnečný rok vzalo len** 365 **dní, a tých** 5 **hod.,** 48 **min. a** 48 **sek. vynechalo; jakáby z toho za** 544 **roky chyba povstala?**

2. **Herschel, slávny hvezdár, mal** 42 **roky,** 3 **mesiace,** 8 **dní, keď vynašiel Nebešťanku, čo bolo r.** 1781, 13. **marca. Zomrel ale r.** 1822, 27. **augusta. Kedy sa narodil, a jak bol starý, keď zomrel?**

VYSKÚŠAJTE SA !

1. Rozhodnite, či platí rovnosť:
a) $17 - 5 . 17 + 4 . 17 = 0$ b) $0{,}178 . 425{,}3 = 17{,}8 . 4{,}253$

2. Doplňte znak = alebo ≠ podľa toho, či rovnosť platí:
a) $-3 . \frac{3}{4} + 1\frac{1}{4} \ \square\ -1$ b) $5 . (-2) + \frac{1}{2} . 4 \ \square\ 1{,}2 . 5$

3. Zapíšte a vypočítajte k, ak platí:
a) k je o 5,47 väčšie ako 10,57 b) k je 5-krát menšie ako 37

4. Dosadením sa presvedčte, že číslo $x = -2$ je riešením rovnice:
$-7 - 5(x + 3) = (x - 2) . 3$

5. Majú nasledujúce rovnice rovnaký koreň?
$16 - 4.(x + 1) = 10x$ $24 - 6 . (x + 1) = 15x$

6. Riešte rovnice a urobte skúšky správnosti:
a) $3 . (2 + x) + 7 . (x - 1) - 8 . (2x - 1) - 3(x + 1) = 0$ b) $\frac{3}{8}x = \frac{x}{6} - \frac{2x}{3} + 1$
c) $1{,}5x - 2{,}5 . (3x - 5) = 2{,}5x - 3.(2{,}5x - 1{,}5)$

7. Rovnosť dvoch výrazov: $5 \cdot (0{,}5y - 0{,}1) + 0{,}4y = (y - 4{,}1) \cdot 3 - 0{,}1y$
a) má práve jedno riešenie
b) nemá žiadne riešenie
c) má nekonečne veľa riešení

8. Daniel má tento rok toľko rokov, že keď svoj vek vynásobí šiestimi a pričíta 16, dostane číslo 100. Koľko rokov má Daniel?

9. Súčet troch celých čísel je -80. Druhé číslo je trojnásobkom prvého a tretie je dvojnásobkom druhého. Ktoré sú to čísla?

10. Na kurz anglického jazyka sa prihlásilo 32 žiakov. Po prijímacom teste ich rozdelili na tri skupiny. V skupine začiatočníkov je o troch žiakov menej ako v skupine stredne pokročilých. Tam je zasa o dvoch žiakov menej ako v skupine pokročilých. Koľko žiakov je v každej skupine?

11. Júlia na výlete v Londýne prvý deň minula jednu tretinu libier, druhý deň dve tretiny zo zvyšku a posledný deň minula zostávajúcich 14 libier. Aké vreckové (v librách) mala Júlia na výlete?

12. Linda a jej strýko Slavo majú narodeniny v ten istý deň. Pred niekoľkými rokmi mala Linda 13 a strýko 45 rokov. Pred koľkými rokmi to bolo, ak dnes je strýko Slavo trikrát starší ako Linda?

13. Aká dlhá bola turistická cesta, ak na nej turisti prešli pešo štyri sedminy cesty, autobusom dvakrát menej ako pešo a zvyšných 14 km cestovali loďou?

14. Nájdite číslo *n*, pre ktoré platí:
a) zväčšené o 12 sa rovná svojmu trojnásobku,
b) jeho tretina je o tri menšia ako jeho polovica.

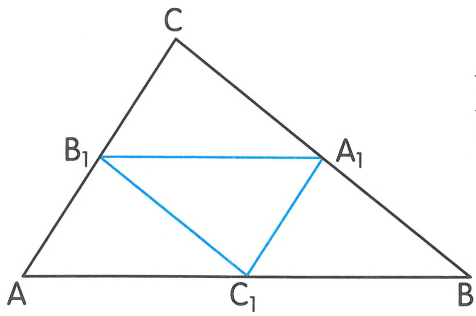
15. Boris a Braňo boli s rodičmi na dovolenke pri mori. Pobyt stál celú rodinu 21 700 korún. Cena zájazdu pre dieťa bola o 1 150 korún nižšia ako pre dospelého. Tento rok ešte obaja chlapci túto zľavu využili. Aká bola cena zájazdu pre dieťa a aká pre dospelého?

8 VÝZNAMNÉ PRVKY TROJUHOLNÍKA

8.1 Stredná priečka trojuholníka

V predchádzajúcich častiach geometrického učiva sme sa presvedčili, že trojuholník je základom aj pre iné geometrické obrazce. Preto sa opäť budeme zaoberať vlastnosťami trojuholníka.

Na obrázku je trojuholník ABC. Označme písmenami A_1, B_1, C_1, stredy strán BC, CA, AB. Narysujme úsečky A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1. Tieto úsečky nazveme stredné priečky trojuholníka ABC.



$\left.\begin{array}{l} A_1B_1 \\ B_1C_1 \\ C_1A_1 \end{array}\right\}$ stredné priečky trojuholníka ***ABC***

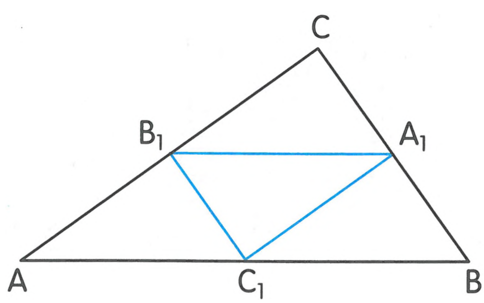
Stredná priečka trojuholníka je úsečka určená stredmi jeho dvoch strán. Stredná priečka trojuholníka je rovnobežná s treťou stranou trojuholníka.

$$A_1B_1 \parallel AB,\ B_1C_1 \parallel BC,\ C_1A_1 \parallel AC$$

ÚLOHA 1

Na základe uvedených vlastností určte dĺžku strednej priečky trojuholníka.

Dĺžka strednej priečky trojuholníka sa rovná polovici dĺžky tej strany trojuholníka, s ktorou je rovnobežná.



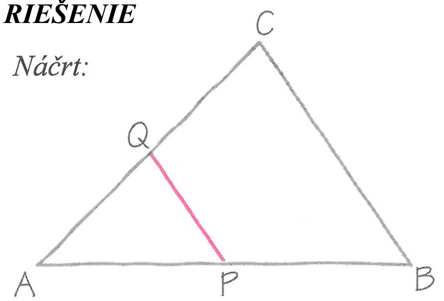
$$|A_1B_1| = \tfrac{1}{2}\,|AB|$$
$$|B_1C_1| = \tfrac{1}{2}\,|BC|$$
$$|A_1C_1| = \tfrac{1}{2}\,|AC|$$

PRÍKLAD 1

Body P a Q sú stredy strán AB a AC trojuholníka ABC. Vypočítajte obvod trojuholníka ABC, ak obvod trojuholníka APQ 21 cm.

RIEŠENIE

Náčrt:



$o_1 = 21$ cm
$o_2 = ...$ cm
$o_1 = |AP| + |PQ| + |AQ| = 21$ cm

Využijeme vlastnosť strednej priečky trojuholníka ABC a vlastnosť stredu úsečky.

$|AB| = 2|AP|$, $|BC| = 2|PQ|$, $|AC| = 2|AQ|$

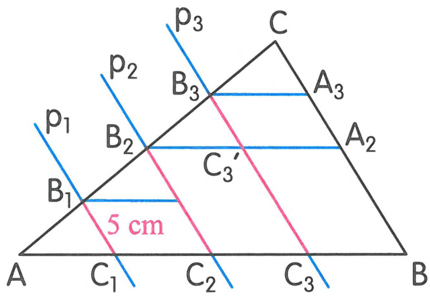
$o_2 = |AB| + |BC| + |AC| = 2 \,.\, |AP| + 2 \,.\, |PQ| + 2 \,.\, |AQ| = 2 \,.\, (|AP| + |PQ| + |AQ|) =$
$= 2 \,.\, 21$ cm $= 42$ cm

$o_2 = 42$ cm.

Odpoveď: Obvod trojuholníka ABC je dvojnásobok obvodu trojuholníka APQ, teda 42 cm.

PRÍKLAD 2

Strana AB trojuholníka ABC je rozdelená na štyri zhodné časti, deliacimi bodmi sú C_1, C_2, C_3. Týmito bodmi sú zostrojené priamky p_1, p_2, p_3 rovnobežné so stranou BC. Strany AB a AC trojuholníka na týchto rovnobežkách vytínajú tri úsečky. Dĺžka najkratšej z nich je 5 cm. Určte dĺžky zvyšných dvoch úsečiek.

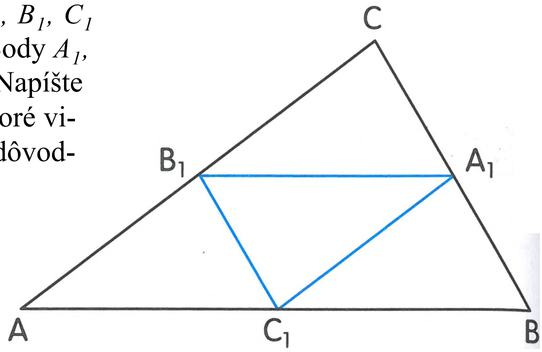


1. Úsečka C_1B_1 je stredná priečka trojuholníka AC_2B_2, preto $|C_2B_2| = 2 \,.\, |C_1B_1| =$ $= 2 \,.\, 5$ cm $= 10$ cm.
2. Úsečka C_2B_2 je stredná priečka trojuholníka ABC, preto $|C_2B_2| = |BA_2|$, kde A_2 je stred strany BC, teda $|BA_2| = |A_2C| = 10$ cm. Štvoruholník $B_2C_2C_3C'_3$ je rovnobežník, preto $|B_2C_2| = |C_3C'_3| = 10$ cm.
3. Úsečka C'_3B_3 je stredná priečka trojuholníka B_2A_2C, preto $|B_3C'_3| = \frac{1}{2} \,.\, |A_2C| =$ $= \frac{1}{2} \,.\, 10$ cm $= 5$ cm.
4. Potom $|C_3B_3| = |C_3C'_3| + |C'_3B_3| = 10$ cm $+ 5$ cm $= 15$ cm.

Odpoveď: Dĺžky zvyšných úsečiek sú 10 cm a 15 cm.

ÚLOHA 2

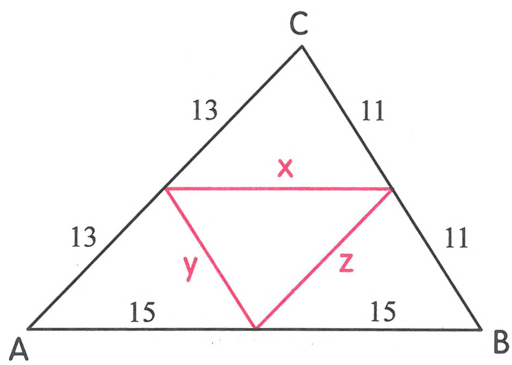
Daný je trojuholník ABC a body A_1, B_1, C_1 sú stredy jeho strán BC, CA, AB. Body A_1, B_1, C_1 určujú trojuholník $A_1B_1C_1$. Napíšte dvojice zhodných trojuholníkov, ktoré vidíte na obrázku. Svoje tvrdenie odôvodnite.



CVIČENIA

1. Narysujte trojuholník ABC, ak $|AB| = 7$ cm, $|BC| = 6$ cm, $|AC| = 5$ cm. Narysujte v ňom stredné priečky a bez merania určte ich dĺžky.

2. Na obrázku je trojuholník ABC a trojuholník, ktorého strany sú x, y, z. Možno určiť dĺžky x, y, z?



3. Vysvetlite, prečo k danému trojuholníku $X_1Y_1Z_1$ možno zostrojiť jediný trojuholník XYZ, ktorého strednými priečkami sú úsečky X_1Y_1, Y_1Z_1 a Z_1X_1. Popíšte, ako trojuholník XYZ zostrojíte.

4. Určte dĺžky strán trojuholníka, ak viete, že dĺžky jeho stredných priečok sú 2 cm; 3,5 cm a 3 cm.

5. Dĺžky stredných priečok trojuholníka RST sú 4 cm; 3,5 cm; 5 cm. Vypočítajte obvod trojuholníka RST.

6. Zistite, či existuje trojuholník, ktorého dve strany majú dĺžky 5 cm a 8 cm a stredná priečka určená ich stredmi má dĺžku:
a) 1,5 cm, b) 3 cm, c) 1 cm.

Ťažnice a ťažisko trojuholníka

Naučili sme sa, že v trojuholníku poznáme osi strán, osi uhlov, výšky a stredné priečky.

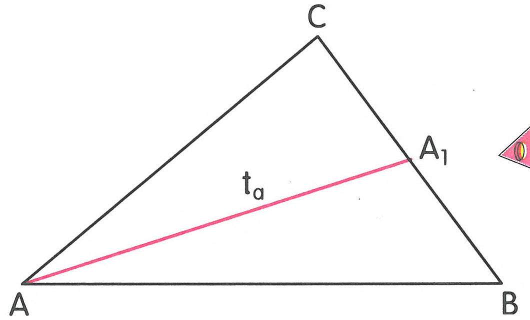
ÚLOHA 1

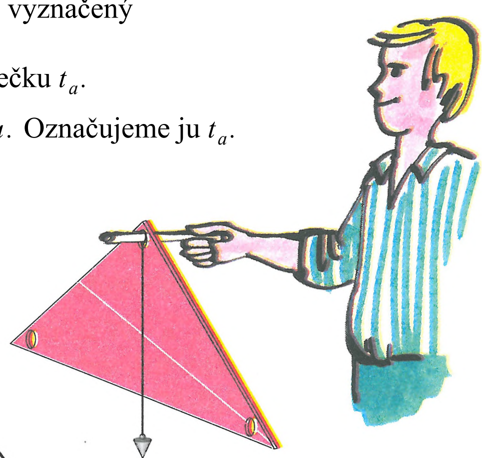
Narysujte ľubovoľný trojuholník ABC. Zostrojte v danom trojuholníku
a) osi strán, b) osi uhlov, c) výšky, d) stredné priečky.

Teraz sa oboznámime s ďalšími dôležitými úsečkami v trojuholníku.
Sú to **ťažnice.**

Na obrázku je trojuholník ABC, v ňom je vyznačený stred A_1 strany BC.
Zostrojme úsečku AA_1. Označme túto úsečku t_a.

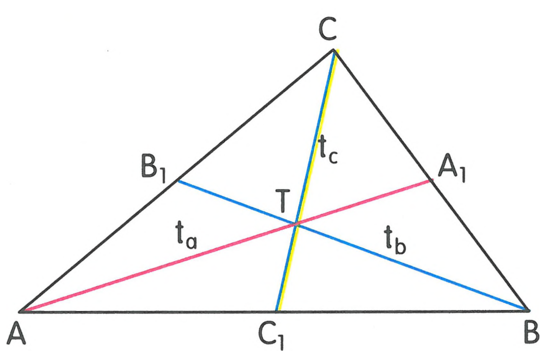
Úsečka AA_1, sa nazýva ťažnica k strane a. Označujeme ju t_a.

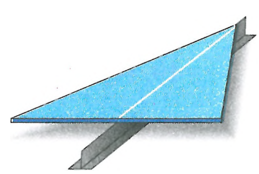


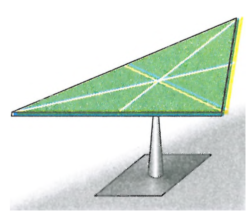


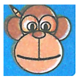
Ťažnica trojuholníka je úsečka určená vrcholom a stredom protiľahlej strany trojuholníka.

Každý trojuholník má tri ťažnice. Sú to úsečky t_a, t_b, t_c.



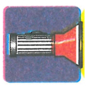




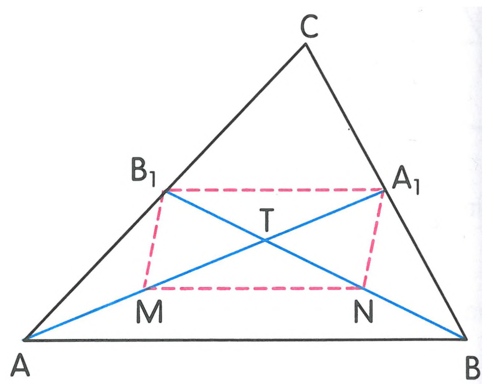


ÚLOHA 2

Narysujte do zošita trojuholník ABC, ktorého strany majú dĺžky $a = 7$ cm, $b = 5$ cm, $c = 8$ cm. Zostrojte všetky jeho ťažnice. Rysujte presne! Čo môžete povedať o všetkých troch ťažniciach?

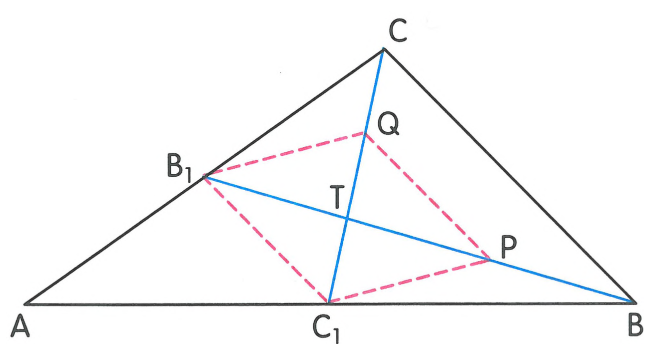


Tri ťažnice trojuholníka sa pretínajú v jednom bode, ktorý nazývame **ťažisko,** označujeme ho písmenom ***T.***



Urobme spoločne nasledujúcu úvahu.

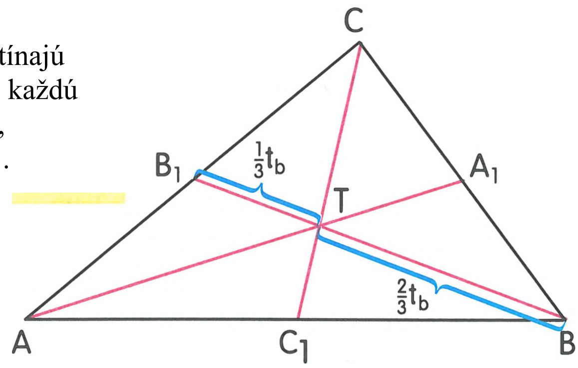
1. Narysujme trojuholník ABC (ľubovoľný)
2. Zostrojme ťažnice AA_1, BB_1.
3. Ich priesečník označme T.
4. Zostrojme úsečku A_1B_1, to je stredná priečka trojuholníka ABC.
5. Zostrojme úsečku MN, ktorá je stredná priečka trojuholníka ABT.
6. Úsečky A_1B_1 a MN sú rovnobežné so stranou AB a ich dĺžky sú polovicou dĺžky úsečky AB, teda $A_1B_1 \| MN$ a $|A_1B_1| = |MN|$. Odtiaľ vyplýva, že štvoruholník A_1B_1MN je rovnobežník. Z vlastností tohto rovnobežníka vyplýva:
$$|TM| = |TA_1|, |TN| = |TB_1|$$
7. Body M, N sú stredy úsečiek AT, BT, teda $|AM| = |MT|$, $|BN| = |NT|$.
8. Z bodov 6. a 7. vyplýva:
$$|AM| = |MT| = |TA_1|$$
$$|BN| = |NT| = |TB_1|$$
9. Z toho vyplýva, že ťažisko T rozdeľuje ťažnicu AA_1 a ťažnicu BB_1 v pomere 2 : 1 (ak začíname od vrcholov).
10. Podobnú úvahu môžeme urobiť aj pre ťažnice BB_1 a CC_1, (AA_1 a CC_1).



Z úvahy vyplýva:

Ťažnice trojuholníka sa pretínajú v ťažisku. Ťažisko rozdeľuje každú ťažnicu na dve úsečky, pomer ich dĺžok je 2 : 1 .

$|BT| = 2 . |TB_1|$
$|AT| = 2 . |TA_1|$
$|CT| = 2 . |TC_1|$



ÚLOHA 3

Narysujte do zošita trojuholník *ABC*. Zostrojte jeho ťažnice t_a, t_b, t_c. Presne odmerajte ťažnice a úsečky, na ktoré každú ťažnicu rozdelí ťažisko. Výsledky zapíšte do tabuľky:

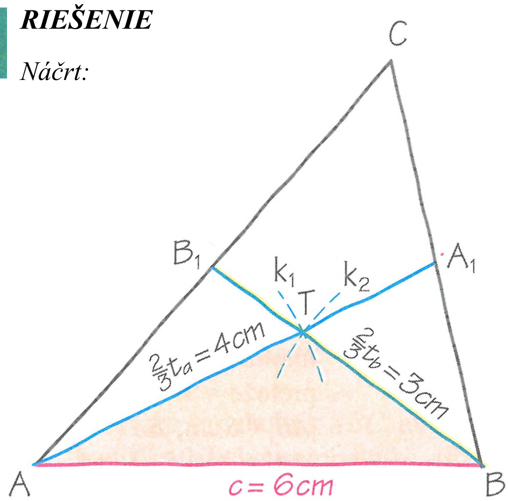
	Dĺžka		
Ťažnica	ťažnice	kratšej časti	dlhšej časti
t_a			
t_b			
t_c			

PRÍKLAD 1

Zostrojte trojuholník *ABC,* v ktorom poznáte dĺžku strany *c* a dĺžky ťažníc t_a, t_b. (Riešte: $c = 6$ cm, $t_a = 6$ cm, $t_b = 4{,}5$ cm.)

RIEŠENIE

Náčrt:

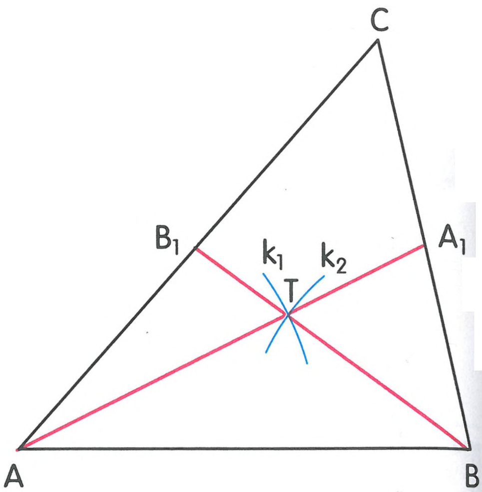


Rozbor:

1. Úsečku *AB* vieme zostrojiť, $|AB| = 6$ cm.
2. Ťažnice t_a, t_b sa pretínajú v bode *T*, ktorý rozdelí každú ťažnicu na dve úsečky. Dĺžka $|AT| = \frac{2}{3} \cdot t_a = 4$ cm, dĺžka $|BT| = \frac{2}{3} \cdot t_b = 3$ cm.
3. Trojuholník *ABT* vieme zostrojiť podľa *(sss)*.
4. Na zostrojenie bodu *C* využijeme definíciu ťažnice.

Konštrukcia:

1. AB; $|AB| = c = 6$ cm
2. k_1; $k_1(A, 4\text{ cm})$
3. k_2; $k_2(B, 3\text{ cm})$
4. T; $T \in k_1 \cap k_2$
5. A_1; $A_1 \in \overrightarrow{AT}$; $|TA_1| = \frac{1}{3} \cdot t_a = 2$ cm
6. $\overrightarrow{BA_1}$
7. B_1; $B_1 \in \overrightarrow{BT}$; $|TB_1| = \frac{1}{3} \cdot t_b = 1{,}5$ cm
8. $\overrightarrow{AB_1}$
9. C; $C \in \overrightarrow{AB_1} \cap \overrightarrow{BA_1}$
10. $\triangle ABC$



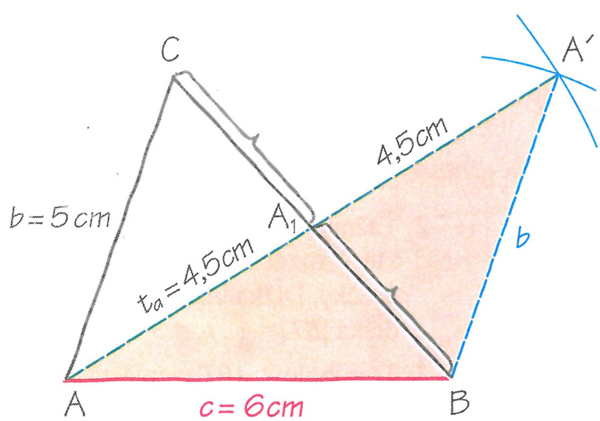
Skúška: Z postupu konštrukcie vyplýva, že $|AA_1| = |AT| + |TA_1| = (4 + 2)$ cm; $|BB_1| = |BT| + |TB_1| = (3 + 1{,}5)$ cm. Úsečka AB má dĺžku 6 cm. Teda trojuholník ABC spĺňa podmienky úlohy. Trojuholník ABC možno zostrojiť vždy vtedy, ak možno zostrojiť trojuholník ABT. V našom prípade $|AT| + |BT| = 4 + 3 > 6 = |AB|$.

PRÍKLAD 2

Zostrojte trojuholník ABC, ak sú dané dĺžky strán b, c, a dĺžka ťažnice t_a ($c = 6$ cm, $b = 5$ cm, $t_a = 4{,}5$ cm).

RIEŠENIE

Náčrt:

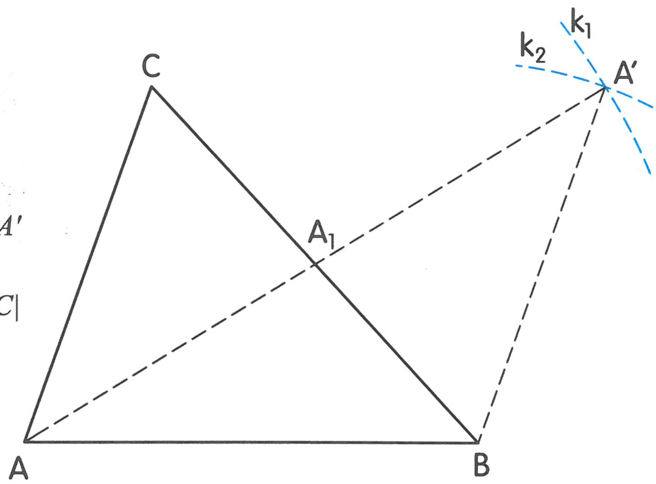


Rozbor:

1. Úsečku AB vieme zostrojiť, $|AB| = 6$ cm.
2. A_1 je stred strany BC. Na predĺžení úsečky AA_1 za bod A_1 zo- , strojíme bod A' tak, aby A_1 bol stredom úsečky AA'. Vieme, že uhlopriečky rovnobežníka sa navzájom rozpoľujú. Potom štvoruholník $ABA'C$ je rovnobežník, v ktorom poznáme $|AB| = 6$ cm, $|AC| = |BA'| = b = 5$ cm. Trojuholník ABA' vieme zostrojiť, pretože v ňom poznáme strany $|AB| = 6$ cm, $|BA'| = 5$ cm, $|AA'| = 2 \cdot 4{,}5 = 9$ cm.

Konštrukcia:

1. ABA'; $|AB| = 6$ cm; $|BA'| = 5$ cm; $|AA'| = 9$ cm (*sss*)
2. A_1; A_1 je stred úsečky AA'
3. $\overrightarrow{BA_1}$
4. C; $C \in BA_1$, $|BA_1| = |A_1C|$
5. $\triangle ABC$



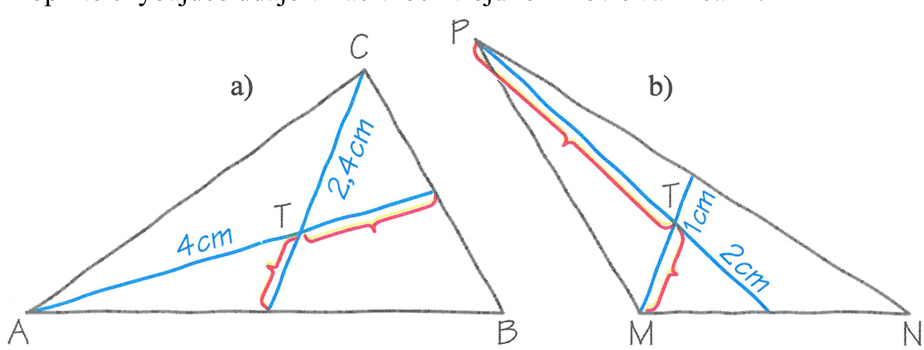
Skúška: Trojuholník ABA' sme zostrojili zo zadaných prvkov, bod A_1 je potom jediný; pomocou neho vieme jednoznačne zostrojiť bod C. Trojuholník ABC možno zostrojiť vždy, keď existuje trojuholník ABA'. V našom prípade je $|AB| + |BA'| > |AA'|$; všeobecne $c + b > 2 \cdot t_a$.

C V I Č E N I A

1. Zostrojte ľubovoľný tupouhlý trojuholník MNP. Narysujte jeho ťažnice a jeho ťažisko T. Vypočítajte dĺžky jeho ťažníc, ak meraním zistíte dĺžky úsečiek $|MT|$, $|NT|$, $|PT|$.

2. V trojuholníku ABC sme odmerali dĺžky strán b, c a všetkých troch ťažníc: $b \doteq 6{,}6$ cm, $c \doteq 8{,}6$ cm, $t_a \doteq 8{,}1$ cm, $t_b \doteq 6{,}3$ cm, $t_c \doteq 6{,}6$ cm. Ťažnice sa pretínajú v bode T. Bez merania určte dĺžky strán
   a) trojuholníka ABT, b) trojuholníka ATC.

3. Doplňte chýbajúce údaje v náčrtkoch trojuholníkov s ťažnicami:



4, Zostrojte trojuholník ABC, ak je dané $c = 8$ cm, $b = 7$ cm, $t_c = 6$ cm.

5. Zostrojte trojuholník ABC, ak sa $|AB| = 8{,}7$ cm, $|BT| = 5$ cm, $|AT| = 4$ cm, kde bod T je ťažisko trojuholníka ABC.

8.3 Riešenie úloh s využitím strednej priečky a ťažníc

ÚLOHA 1

Zostrojte priamku m, ktorá je rovnobežná s úsečkou AB, pričom ich vzdialenosť je $d = 5$ cm.

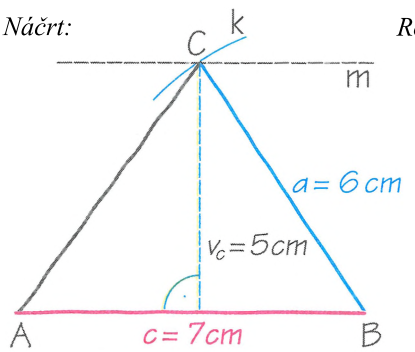
Zopakujme si niektoré konštrukcie trojuholníka.

PRÍKLAD 1

Zostrojte trojuholník ABC, ak je daná dĺžka strany $c = 7$ cm, výšky $v_c = 5$ cm, strany $a = 6$ cm.

RIEŠENIE

Náčrt:

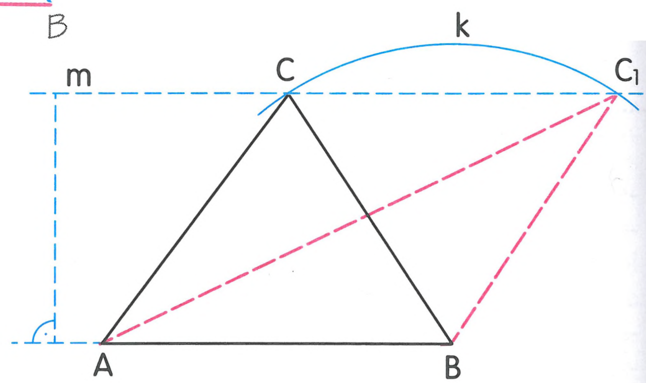


Rozbor:

1. Úsečku AB vieme zostrojiť, $|AB| = c = 7$ cm.
2. Bod C leží na priamke m, ktorá je rovnobežná s úsečkou AB vo vzdialenosti $v_c = 5$ cm.
3. Bod C je od bodu B vzdialený $a = 6$ cm, teda leží na kružnici $k(B, 6$ cm). Bod C je spoločný bod priamky m a kružnice k.

Konštrukcia:

1. AB; $|AB| = c = 7$ cm
2. m; $m \| AB$, $|AB, m| = v_c = 5$ cm
3. k; $k(B, 6$ cm)
4. C, C_1; $C, C_1 \in m \cap k$
5. $\triangle ABC, \triangle ABC_1$



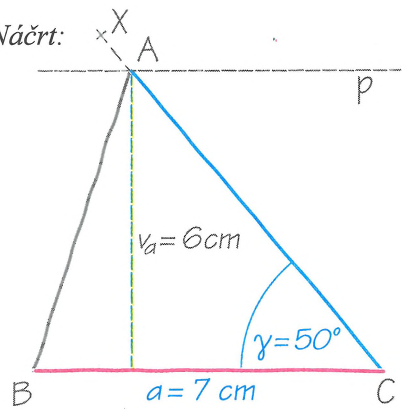
Skúška: Vzdialenosť bodov A, B je 7 cm, teda úsečka AB je strana c Δ ABC. Bod C leží na priamke m, jej vzdialenosť od priamky AB je 5 cm, teda výška ABC je 5 cm. Bod C leží na kružnici k, ktorej stred je bod B a polomer 6 cm. Teda $|BC| = a = 6$ cm.
Úloha má v tomto prípade dve riešenia, pretože priamka m a kružnica k majú dva spoločné body C, C_1.

PRÍKLAD 2

Zostrojte trojuholník *ABC,* ak je daná dĺžka strany $a = 7$ cm, $v_a = 6$ cm, $\gamma = 50°$.

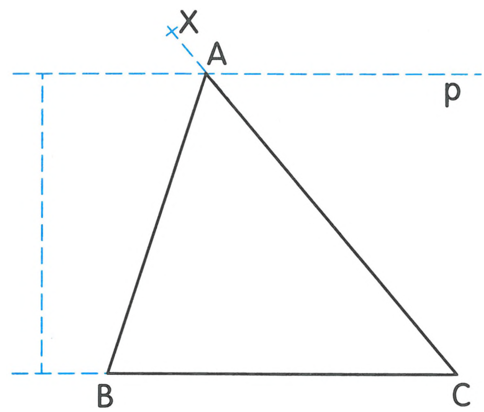
RIEŠENIE

Náčrt:



Rozbor:

1. Úsečku *BC* vieme zostrojiť, $|BC| = a = 7$ cm.
2. Bod *A* leží na priamke *p,* ktorá je rovnobežná s úsečkou *BC* vo vzdialenosti $v_a = 6$ cm.
3. Bod *A* leží na polpriamke *CX* tak, že $|\sphericalangle BCX| = \gamma = 50°$. Bod *A* je spoločný bod priamky *p* a polpriamky *CX.*



Konštrukcia:

1. $BC; |BC| = a = 7$ cm
2. $p; p \parallel BC, |BC, p| = v_a = 6$ cm
3. $\overleftrightarrow{CX}; |\sphericalangle BCX| = \gamma = 50°$
4. $A; A \in p \cap \overleftrightarrow{CX}$
5. $\triangle ABC$

Skúšku vykonajú žiaci.

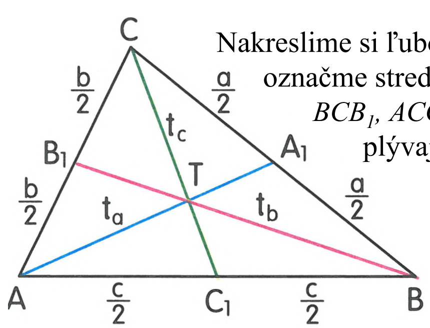
PRÍKLAD 3

Odôvodnite pre $\triangle ABC$ platnosť nasledujúcej nerovnosti:

$$t_a + t_b + t_c > \frac{(a+b+c)}{2}$$

kde a, b, c sú strany a t_a, t_b, t_c ťažnice daného trojuholníka *ABC.*

RIEŠENIE



Nakreslime si ľubovoľný trojuholník *ABC.* Písmenami A_1, B_1, C_1 označme stredy strán *BC, CA, AB.* Z trojuholníkov ABA_1, BCB_1, ACC_1 a platnosti trojuholníkovej nerovnosti vyplývajú tieto nerovnosti:

$$t_a + \tfrac{a}{2} > c \Rightarrow t_a > c - \tfrac{a}{2}$$
$$t_b + \tfrac{b}{2} > a \Rightarrow t_b > a - \tfrac{b}{2}$$
$$t_c + \tfrac{c}{2} > b \Rightarrow t_c > b - \tfrac{c}{2}$$

Po sčítaní nerovností na pravej strane dostaneme:

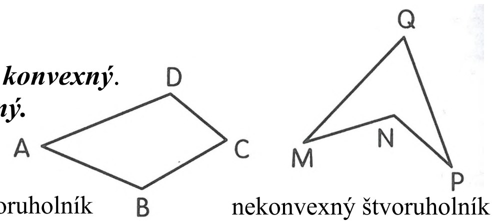
$$t_a + t_b + t_c > a + b + c - \frac{a}{2} - \frac{b}{2} - \frac{c}{2}$$

čiže

$$t_a + t_b + t_c > \frac{a + b + c}{2}$$

POZNÁMKA

Štvoruholník ABCD na obrázku nazývame ***konvexný****.*
Štvoruholník MNPQ nazývame ***nekonvexný.***



konvexný štvoruholník — nekonvexný štvoruholník

PRÍKLAD 4

Odôvodnite, prečo v každom konvexnom štvoruholníku sú stredy strán vrcholmi rovnobežníka.

RIEŠENIE

Na obrázku je konvexný štvoruholník $ABCD$. Nech P, Q, R, S sú stredy strán AB, BC, CD, DA štvoruholníka $ABCD$. Úsečky PQ, RS sú stredné priečky trojuholníkov ABC, ADC. Každá z nich je rovnobežná so spoločnou stranou AC uvedených trojuholníkov.

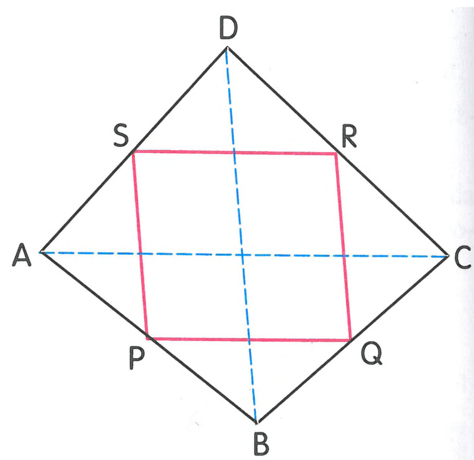
Teda:

$$PQ \| RS,\ |PQ| = |RS| = \frac{1}{2} \cdot |AC|$$

Analogicky

$$QR \| PS,\ |QR| = |PS| = \frac{1}{2} \cdot |BD|$$

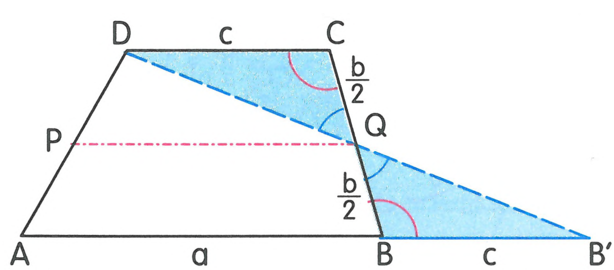
Štvoruholník $PQRS$ je rovnobežník.



PRÍKLAD 5

V 6. ročníku sme sa naučili, že stredná priečka lichobežníka má veľkosť $\frac{a+c}{2}$, kde a, c sú dĺžky základní. Toto tvrdenie teraz odôvodnite pomocou známej vlastnosti strednej priečky trojuholníka.

RIEŠENIE



P, Q sú stredy ramien lichobežníka. Treba odôvodniť, že $|PQ| = \frac{a+c}{2}$. Zostrojme B', ktorý je priesečníkom polpriamky DQ a polpriamky AB. Vznikli dva trojuholníky: $\triangle DQC$ a $\triangle B'QB$. Napíšme si vlastnosti týchto dvoch trojuholníkov.

$$|CQ| = |QB| = \frac{b}{2}$$
$$\sphericalangle DQC \cong \sphericalangle B'QB \text{ (vrcholové uhly)}$$
$$\sphericalangle DCQ \cong \sphericalangle B'BQ \text{ (striedavé uhly).}$$

Z toho vyplýva:

$$\triangle DQC \cong \triangle B'QB \ (usu)$$

Teda

$$|CD| = |BB'| = c$$

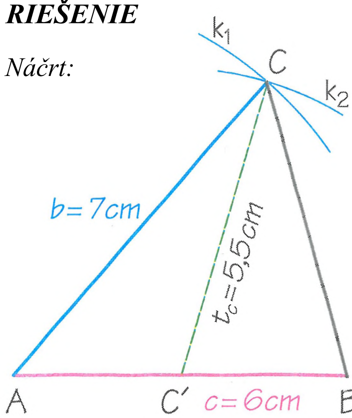
V trojuholníku $AB'D$ strana AB' má veľkosť $a + c$. Úsečka PQ je stredná priečka aj trojuholníka $AB'D$, preto je $|PQ| = \frac{a+c}{2}$.

PRÍKLAD 6

Zostrojte trojuholník ABC, v ktorom poznáme dĺžky strán c = 6 cm; b = 7 cm a t_c = 5,5 cm.

RIEŠENIE

Náčrt:

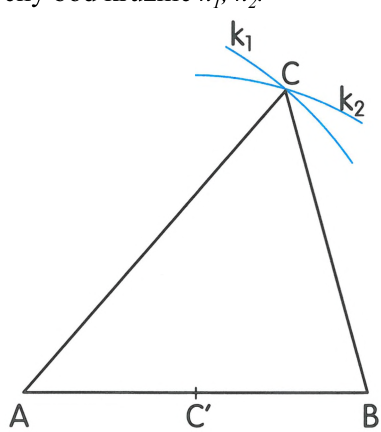


Rozbor:

1. Úsečku AB vieme zostrojiť, $|AB| = c = 6$ cm.
2. Bod C je od bodu A vo vzdialenosti $b = 7$ cm, teda leží na kružnici $k_1(A, 7 \text{ cm})$.
3. Bod C je od bodu C_1 vo vzdialenosti $t_c = 5{,}5$ cm, teda leží na kružnici $k_2(C_1; 5{,}5 \text{ cm})$.
4. Bod C je spoločný bod kružníc k_1, k_2.

Konštrukcia:

1. AB; $|AB| = c = 6$ cm
2. k_1; $k_1(A, 7 \text{ cm})$
3. C_1; $|AC_1| = |C_1B| = 3$ cm, $C_1 \in AB$
4. k_2; $k_2(C_1; 5{,}5 \text{ cm})$
5. C; $C \in k_1 \cap k_2$
6. $\triangle ABC$



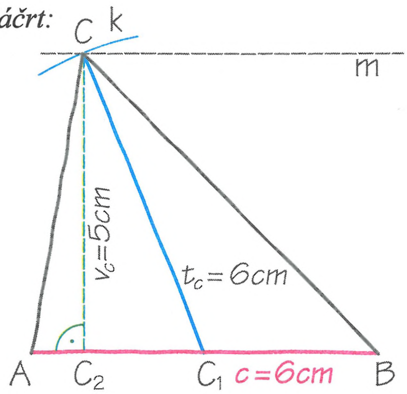
Skúška: Vzdialenosť bodov A, B je 6 cm, teda strana AB má dĺžku c = 6 cm. Bod C leží na kružnici k_1, preto AC má dĺžku 7 cm, súčasne leží aj na kružnici k_2, teda jeho ťažnica t_c má dĺžku 5,5 cm.

PRÍKLAD 7

Zostrojte trojuholník ABC, v ktorom poznáme dĺžku strany c = 6 cm, v_c = 5 cm, t_c = 6 cm.

RIEŠENIE

Náčrt:

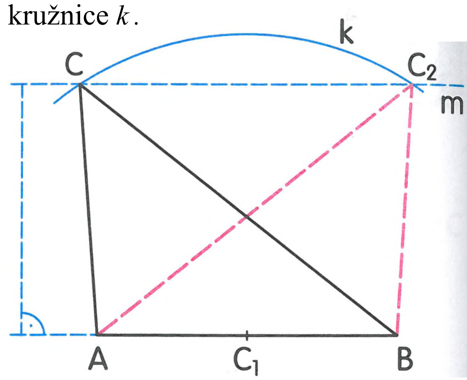


Rozbor:

1. Úsečku AB vieme zostrojiť, $|AB| = c$ = 6 cm.
2. Bod C leží na priamke m, ktorá je rovnobežná s úsečkou AB vo vzdialenosti v_c = 5 cm.
3. Bod C je od bodu C_1 (od stredu úsečky AB) vzdialený t_c= 6 cm, teda leží na kružnici $k(C_1$, 6 cm).
   Bod C je spoločný bod priamky m a kružnice k.

Konštrukcia:

1. AB; $|AB| = c$ = 6 cm
2. m; $m \| AB$, $|AB, m| = v_c$ = 5 cm
3. k; $k(C_1$, 6 cm), $|AC_1| = |C_1B|$, $C_1 \in AB$
4. C, C_2; C, $C_2 \in m \cap k$
5. $\triangle ABC$, $\triangle ABC_2$



Skúška: Vzdialenosť bodov A, B je 6 cm. Bod C leží na priamke m, teda jeho vzdialenosť od priamky AB je 5 cm. Bod C leží aj na kružnici k, ktorej stred je bod C_1 a polomer je 6 cm. Teda $|CC_1|$ = 6 cm = t_c. Úloha má v tomto prípade dve riešenia, lebo priamka m a kružnica majú dva spoločné body C a C_2.

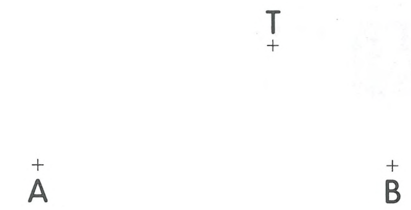
CVIČENIA

1. Daný je štvorec $ABCD$ a stredy M, N, P, Q jeho strán. Odôvodnite, že štvoruholník $MNPQ$ je opäť štvorec.

2. Daný je obdĺžnik $ABCD$ a stredy M, N, P, Q jeho strán. Zistite, aký útvar bude $MNPQ$.

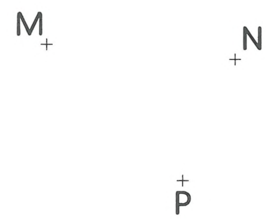
3. Keď splýva ťažnica trojuholníka s jeho výškou, je tento trojuholník rovnoramenný. Odôvodnite.

4. Daná je poloha troch bodov *A, B, T,* kde *A, B* sú vrcholy trojuholníka *ABC* a T je jeho ťažisko. (Pozri obrázok.) Zostrojte trojuholník *ABC.*



5. Zostrojte trojuholník *ABC,* v ktorom poznáte dĺžku strany c = 6 cm, veľkosť uhla $\alpha = 60°$ a dĺžku ťažnice t_c = 5 cm.

6. Zostrojte trojuholník *ABC,* ak poznáte stredy *M, N, P* jeho strán, pozri obrázok.

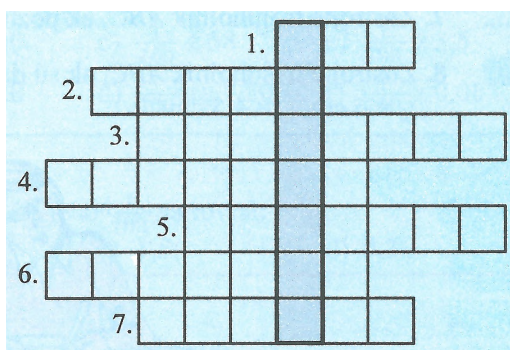


7. Zostrojte rovnoramenný trojuholník *ABC (AC ≅ BC),* keď je dané v_c = 4,7 cm, t_a = 3,4 cm.

8. Zostrojte rovnoramenný Δ *ABC (AC ≅ BC),* keď je daná veľkosť ramena b = 6 cm a dĺžka ťažnice t_b = 4,5 cm.

9. Zostrojte trojuholník *ABC,* v ktorom poznáte dĺžky strán $a = 5$ cm, $b = 6$ cm, a dĺžku ťažnice t_c = 4,5 cm.

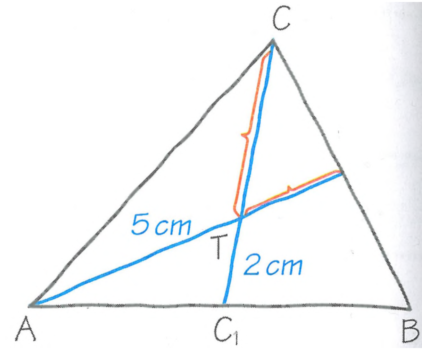
10. Riešte krížovku:



1. Pohyb na šachovnici.
2. Úsečka určená vrcholom trojuholníka kolmá na protiľahlú stranu.
3. *k(S, r)*
4. Priečka určená stredmi susedných strán trojuholníka sa nazýva ... .
5. Úsečka určená stredmi susedných strán trojuholníka je ... .
6. Priamka kolmá na inú priamku.
7. Úsečka *AB* trojuholníka je jeho ... .

V Y S K Ú Š A J T E S A !

1. Doplňte chýbajúce údaje v náčrtku trojuholníka s ťažnicami:



2. Daný je kosoštvorec $ABCD$ a stredy P, Q, R, S jeho strán. Zistite, aký štvoruholník je útvar $PQRS$. Tvrdenie odôvodnite.

3. Trojuholník ABC má obvod 45 cm. Určte obvod trojuholníka MNP, ktorého vrcholy M, N, P sú stredy strán AB, BC, CA trojuholníka ABC.

4. Narysujte ľubovoľný lichobežník, vyznačte jeho uhlopriečky a strednú priečku. Stredná priečka lichobežníka prechádza stredmi jeho uhlopriečok. Odôvodnite.

5. Platí tvrdenie: V štvoruholníku s nerovnobežnými protiľahlými stranami sú stredy uhlopriečok a stredy protiľahlých strán vrcholy rovnobežníka? Ak áno, odôvodnite!

6. Zostrojte trojuholník ABC, ak poznáte $c = 6$ cm, $\beta = 75°$, $t_c = 6$ cm.

7. Zostrojte trojuholník ABC, ak poznáte $c = 7{,}5$ cm, $t_a = 7{,}5$ cm, $t_c = 6$ cm.

R

8. Zostrojte trojuholník ABC, ak sú dané dĺžky všetkých troch ťažníc $t_a = 7{,}5$ cm, $t_b = 6$ cm, $t_c = 4{,}5$ cm.

Najlepšie, čo ľudský duch vytvoril, je uschované v knihách.

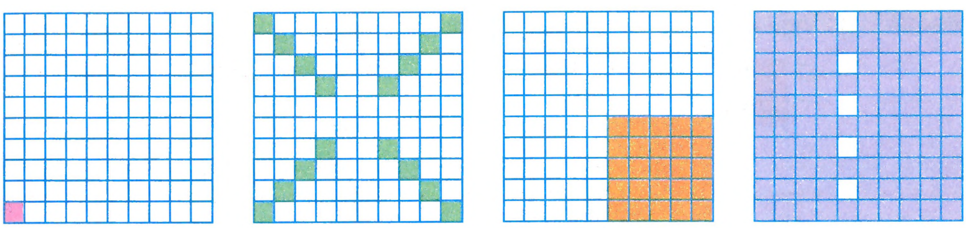
Frey

9 PERCENTÁ

9.1 Delenie celku na rovnaké časti

ZOPAKUJME SI

Jeden celok vieme rozdeliť na 100 rovnakých častí. Vieme vyjadriť zlomkom aj desatinným číslom, aká časť takto rozdeleného celku je vyfarbená.



$\frac{1}{100} = 0{,}01$ $\frac{16}{100} = 0{,}16$ $\frac{25}{100} = 0{,}25$ $\frac{95}{100} = 0{,}95$

ÚLOHA 1

Vypočítajte spamäti: a) $\frac{1}{100}$ z 200 c) $\frac{1}{100}$ z 58 e) $\frac{1}{100}$ z 3,5

b) $\frac{1}{100}$ z 320 d) $\frac{1}{100}$ zo 7 500 f) $\frac{1}{100}$ z 0,06

ÚLOHA 2

Vypočítajte hľadané číslo, ak platí, že jeho $\frac{1}{100}$ sa rovná:

a) 20; b) 234; c) 1,5; d) 0,3.

PRÍKLAD 1

Zapíšte a vypočítajte postupne $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{10}$ a $\frac{1}{100}$ z čísla 300.

RIEŠENIE

Dve spolužiačky zapísali a vypočítali príklad rôzne:

Dana: $\frac{1}{2}$ z 300 je $300 : 2 = 150$

$\frac{1}{10}$ z 300 je $300 : 10 = 30$

$\frac{1}{100}$ z 300 je $300 : 100 = 3$

Hana: $\frac{1}{2}$ z 300 je $300 \,.\, \frac{1}{2} = \frac{300}{2} = 150$

$\frac{1}{10}$ z 300 je $300 \,.\, \frac{1}{10} = \frac{30}{10} = 30$

$\frac{1}{100}$ z 300 je $300 \,.\, \frac{1}{100} = \frac{300}{100} = 3$

ÚLOHA 3

Nájdite všetky delitele čísla 100, potom upravte nasledujúce zlomky tak, aby sa ich menovateľ rovnal 100:

$\frac{7}{10}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{1}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{3}{20}$, $\frac{42}{50}$, $\frac{8}{25}$.

ÚLOHA 4

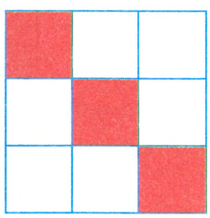
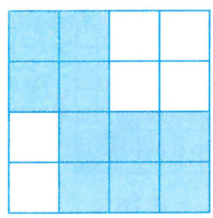
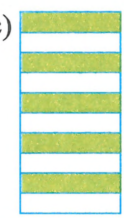
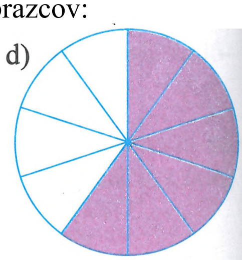
Narysujte 3 úsečky dĺžky 1 dm a vyznačte na prvej z nich $\frac{10}{100}$ z 1 dm, na druhej $\frac{50}{100}$ z 1 dm, na tretej $\frac{75}{100}$ z 1 dm.

ÚLOHA 5

Vypočítajte $\frac{3}{4}$ z: a) 1 500; b) 0,24; c) $\frac{5}{6}$.

CVIČENIA

1. Vyjadrite zlomkom v základnom tvare vyfarbené časti obrazcov:

a)  b)  c)  d) 

2. Spočítajte spamäti:

a) $\frac{1}{100}$ z 500 b) $\frac{1}{100}$ z 50 c) $\frac{1}{100}$ z 5 d) $\frac{1}{100}$ z 0,5

3. Vypočítajte: a) $\frac{1}{2}$ z 32; c) $\frac{1}{3}$ z 27 081 e) $\frac{1}{4}$ z 1,2

b) $\frac{1}{10}$ zo 120 d) $\frac{1}{5}$ z 2 050 f) $\frac{1}{8}$ zo 0,64

4. Vypočítajte:

a) $\frac{6}{100}$ z 5 000 b) $\frac{12}{100}$ z 4 300 c) $\frac{55}{100}$ z 3 226 d) $\frac{99}{100}$ z 561

5. Nájdite číslo, z ktorého:

a) $\frac{1}{2}$ je 2 400 c) $\frac{1}{6}$ je 2 400 e) $\frac{1}{12}$ je 2 400

b) $\frac{1}{4}$ je 2 400 d) $\frac{1}{8}$ je 2 400 f) $\frac{1}{24}$ je 2 400

6. Koľko minút z hodiny predstavujú zlomky: a) $\frac{2}{3}$; b) $\frac{4}{5}$; c) $\frac{3}{20}$; d) $\frac{7}{60}$?

7. Zapíšte nasledujúce čísla v tvare zlomkov s menovateľom 100:

a) $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{24}{50}$, $\frac{9}{20}$, $\frac{19}{10}$, $\frac{1}{25}$

b) 0,25; 0,47; 0,15; 0,01; 0,99; 0,21

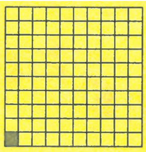
c) 1,2; 3; 2,5; 6,02; 100; 5,8

8. Torta má hmotnosť 750 g. Vyjadrite zlomkom 1 diel torty a vypočítajte hmotnosť 1 dielu, ak je torta rozdelená na:

a) 15 dielov; b) 5 dielov; c) 25 dielov.

9.2 Jedno percento. Percentová časť

Značku % **percento** každý z vás už iste videl. Stretávame sa s ňou pri vyjadrovaní rôznych údajov. Základ (celok) rozdelíme na 100 rovnakých častí, jedna časť predstavuje:



$$\frac{1}{100} = 0{,}01 = 1\ \%$$

1 % jedno percento je jedna stotina základu

POZNÁMKA

Percento je latinský názov jednej stotiny (lat. per cento = zo sto).
Zapisuje sa pomocou znaku %.

PRÍKLAD 1

Vypočítajte jedno percento (1 %)
a) zo 100 kg; b) z 2 500 Sk; c) z 1,5 km; d) z 1 200 žiakov.

a) základ . . . 100 kg
1 % . . . $\frac{1}{100}$ zo základu . . . $\frac{100}{100} = 100 : 100 = 1$ kg
<u>1 % zo 100 kg je 1 kg</u>

b) základ . . . 2 500 Sk
1 % . . . $\frac{1}{100}$ zo základu . . . $\frac{2\,500}{100} = 2\,500 : 100 = 25$ Sk
<u>1 % z 2 500 Sk je 25 Sk</u>

c) základ . . . 1,5 km
1 % . . . $\frac{1}{100}$ zo základu . . . $\frac{1{,}5}{100} = 1{,}5 : 100 = 0{,}015$ km $= 15$ m
<u>1 % z 1,5 km je 15 m</u>

d) základ . . . 1 200 žiakov
1 % . . . $\frac{1}{100}$ zo základu . . . $\frac{1\,200}{100} = 1\,200 : 100 = 12$ žiakov
<u>1 % z 1 200 žiakov je 12 žiakov</u>

ÚLOHA 1

Vypočítajte 1 % a) z 200; b) zo 7; c) z 2,5; d) z $\frac{1}{5}$.

ÚLOHA 2

Z 1 500 kusov časopisu pre mladých sa nepredalo 1 %. Koľko kusov časopisu sa nepredalo?

ÚLOHA 3

Pri prečerpávaní nafty na benzínovom čerpadle sa z cisterny stratí vyparením alebo rozliatím asi 1 % nafty. Koľko litrov nafty tvorí strata pri prečerpaní 2 910 litrov nafty?

PRÍKLAD 2

Školu navštevuje 500 žiakov. Z nich je 45 % chlapcov. Koľko chlapcov chodí do tejto školy?

RIEŠENIE

Jana počíta pomocou desatinných zlomkov:
základ . . . 500 žiakov
$\frac{1}{100}$ zo základu . . . $\frac{500}{100}$ = 5 žiakov
$\frac{45}{100}$ zo základu . . . 5 . 45 = 225 chlapcov

Zuzana si nakreslila obrázok a počíta pomocou percent:
základ . . . 100 % . . . 500 žiakov
1 % . . . 500 : 100 = 5 žiakov
45 % . . . 5 . 45 = 225 chlapcov

Odpoveď: Do školy chodí 225 chlapcov.

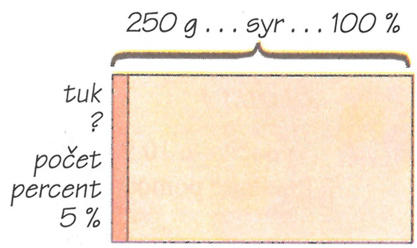
V úlohách s percentami sa údaje označujú názvami:

základ = celok = 100%
percentová časť = časť základu
počet percent = určuje koľko stotín zo základu tvorí percentová časť

PRÍKLAD 3

Hmotnosť balenia taveného syra je 250 g. 5,2 % syra tvorí tuk. Koľko gramov tuku obsahuje toto balenie syra?

RIEŠENIE



Jana jednotlivé údaje pomenuje:
základ . . . 250 g taveného syra
počet percent . . . 5 % tuku
Máme vypočítať percentovú časť - koľko gramov tuku je v 250 g taveného syra.

základ 100 % . . . 250 g
1% . . . 250 : 100 = 2,5 g
počet percent 5 % . . . 2,5 . 5 = 12,5 g . . . percentová časť

Odpoveď: 250 g taveného syra obsahuje 12,5 g tuku.

Počítame percentovú časť:

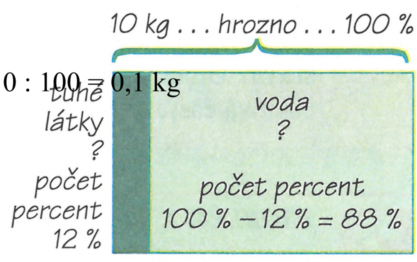
1. Základ vydelíme 100 (vypočítame 1 %).
2. Výsledok (1 %) vynásobíme daným počtom percent.

PRÍKLAD 4

Hrozno obsahuje 12 % tuhých látok, ostatné je voda. Koľko kg vody a koľko kg tuhých látok je v 10 kg hrozna?

RIEŠENIE

Zuzana najskôr počíta, koľko percent vody obsahuje hrozno:
základ . . . 100 % sa skladá z dvoch častí:
tuhé látky . . . 12 %
voda . . . 100% - 12% = 88%
základ . . . 100 % . . . 10 kg
1 % . . . 10 : 100 = 0,1 kg
voda . . . 88 % . . . 88. 0,1 = 8,8 kg
tuhé látky . . . 12 % . . . 12 . 0,1 = 1,2 kg



Skúška:
88 % . . . 8,8 kg
12 % . . . 1,2 kg
100 % . . . 10 kg

Odpoveď: V 10 kg hrozna je 8,8 kg vody a 1,2 kg tuhých látok.

1 % zo základu je $\frac{1}{100}$ základu
5 % zo základu je $\frac{5}{100}$ základu
72 % zo základu je $\frac{72}{100}$ základu
100 % zo základu je $\frac{100}{100}$ základu = celý základ
115 % zo základu je $\frac{115}{100}$ základu.

ÚLOHA 4

Spočítajte 10 %, 20 %, 30 %, ..., 90 % z 500.
Počítajte pomocou jedného percenta.

ÚLOHA 5

Zo štvorčekovaného papiera si vystrihnite 3 štvorce veľkosti 10 X 10 štvorčekov. Vyfarbite:

a) v prvom štvorci 5 % červenou,
b) v druhom štvorci 10 % červenou, 22 % modrou,
c) v treťom štvorci 45 % červenou, 30 % modrou, 20 % zelenou.

Koľko percent obsahu každého štvorca zostalo nevyfarbených?
(Snažte sa vyfarbením vytvoriť rôzne ornamenty a svoje diela si porovnajte.)

ÚLOHA 6

Základ je 2 600 000, počet percent je 24 %. Vypočítajte percentovú časť.

***ÚLOHA** 7*

Jedno balenie (1 000 g) multivitamínovej ovocnej šťavy obsahuje: 40 % pomarančovej šťavy, 10 % citrónovej šťavy, 30 % jablkovej šťavy, 15 % cukru a zvyšok je voda. Koľko gramov z každej zložky obsahuje ovocná šťava? Určte, čo je v úlohe základ, počet percent a percentová časť.

PROBLÉM 1

Môžu desatinné zlomky uľahčiť počítanie, ak porovnáme základ a počet percent?

RIEŠENIE

Lukáš uvažuje takto:

počet percent	desatinný zlomok	základ delím číslom
1 %	$\frac{1}{100}$	100
2 %	$\frac{2}{100} = \frac{1}{50}$	50
4 %	$\frac{4}{100} = \frac{1}{25}$	25
5 %	$\frac{5}{100} = \frac{1}{20}$	20
10 %	$\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$	10
20 %	$\frac{20}{100} = \frac{1}{5}$	5
25 %	$\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$	4
50 %	$\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$	2

ÚLOHA 8

Vypočítajte spamäti (použite tabuľku z problému 1):

a) 2 % z 250 c) 5 % zo 400 e) 20 % z 55 g) 50 % z 500

b) 4 % zo 75 d) 10 % z 2 583 f) 25 % zo 44 h) 100 % zo 454

ÚLOHA 9

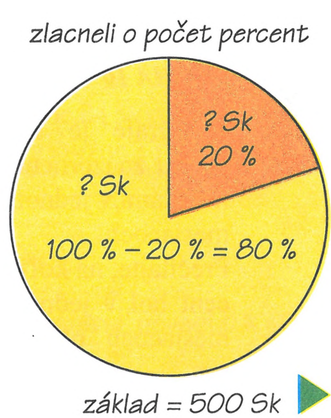
Dané počty percent vyjadrite zlomkom v základnom tvare a vypočítajte percentovú časť, ak základ je 1 000. 6 %, 8 %, 15 %, 30 %, 40 %, 75 %.

25 % = $\frac{1}{4}$ základu 75 % = $\frac{3}{4}$ základu

50 % = $\frac{1}{2}$ základu 100 % = 1 celý základ

POZNÁMKA

Na zobrazenie celku v úlohách o percentách sa môže používať aj zobrazenie celku v tvare kruhu, tak ako v nasledujúcom príklade (1 % = 3°36′, t.j. 360° : 100).



PRÍKLAD 5

Šaty, ktoré mali cenu 500 Sk zlacneli o 20 %.
Aká je ich cena po zlacnení?

RIEŠENIE I

Celok si zobrazíme v tvare kruhu:

Zapíšeme a počítame:

základ . . . 100 % . . . 500 Sk

1 % . . . 500 : 100 = 5 Sk

počet percent . . . 80 % . . . 5 . 80 = 400 Sk . . . percentová časť

Odpoveď: Šaty po zlacnení stoja 400 Sk.

RIEŠENIE II

základ . . . 100 % . . . 500 Sk

1 % . . . 500 : 100 = 5 Sk

20 % . . . 5 . 20 = 100 Sk . . . je suma, o ktorú šaty zlacneli

nová cena ... 500 - 100 = 400 Sk

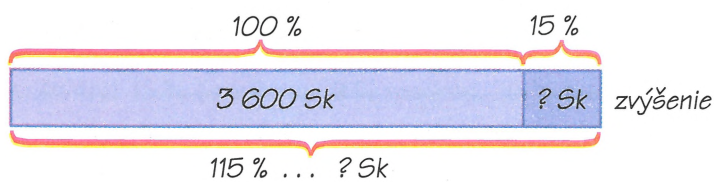
Odpoveď: Šaty po zlacnení stoja 400 Sk.

PROBLÉM 2

Cena horského bicykla bola zvýšená na 115 % pôvodnej ceny. Pôvodná cena bola 3 600 Sk. Koľko stojí bicykel teraz?

RIEŠENIE

Juraj kreslí:



základ . . . 100 % . . . 3 600 Sk

1 % . . . 3 600 : 100 = 36 Sk

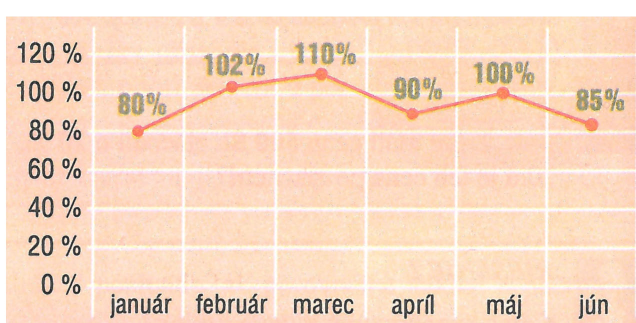
počet percent . . . 115 % . . . 36 . 115 = 4 140 Sk . . . percentová časť

Odpoveď: Bicykel stojí po zdražení 4 140 Sk.

Ak je počet percent väčší ako 100, potom je percentová časť väčšia ako základ.

ÚLOHA 10

Na grafe je lomenou čiarou znázornené plnenie plánu v jednotlivých mesiacoch.
Prečítajte, na koľko percent bol v jednotlivých mesiacoch plán splnený.



ÚLOHA 11

V závode mali vyrobiť za mesiac 300 mikroskopov.
Plán prekročili o 16 %.

a) Na koľko percent splnili plán?
b) Koľko mikroskopov vyrobili celkom?

ÚLOHA 12

Vypočítajte:

a) 220 % z 3 000; b) 150 % z 506; c) 105,5 % z 20.

ÚLOHA 13

Prekreslite názorné grafy z príkladov 2 až 4 z obdĺžnikového na kruhový tvar.

C V I Č E N I A

1. Vypočítajte jedno percento (1 %):
   a) z 5 200 km; b) z 200 kg; c) z 6 500 Sk; d) zo 7,6 l.

2. Vypočítajte jedno percento (1 %):
   a) zo 7; b) z 0,8; c) z 0,03; d) z $\frac{1}{5}$; e) z $\frac{3}{2}$; f) z $\frac{50}{12}$.

3. Pri čistení ovocia v konzervárni tvorí odpad 1 %. Aká je hmotnosť očisteného ovocia, ak sa spracovalo 620 kg ovocia?

4. Obsah konzervy má hmotnosť 300 g, 85 % hmotnosti obsahu tvorí mäso. Koľko gramov mäsa je v konzerve?

5. Zo 400 kusov pletených svetrov je 5 % druhej akosti, ostatné sú prvej akosti. Koľko kusov svetrov je prvej a koľko druhej akosti?

6. Volieb do parlamentu sa v roku 1998 zúčastnilo približne 84 % voličov. Koľko občanov bolo voliť, ak v tom čase bolo na Slovensku približne 3 389 000 oprávnených voličov?

7. Základ je 286 000. Vypočítajte percentovú časť 35 %.

8. V škole je 450 žiakov. Z nich 64 % vie plávať, ostatní plávať nevedia. Koľko je v škole plavcov a koľko neplavcov?

9. Vypočítajte: a) 32 % z 9 260 Sk; b) 48 % zo 480 t; c) 92 % zo 65 m.

10. Vypočítajte:
a) 15 % z 8,2; b) 24 % z 10,5; c) 59 % z 343,2.

11. Vypočítajte:
a) 12,5 % z 51 200; b) 19,7 % z 95; c) 82,3 % z 0,605.

12. Dané počty percent vyjadrite zlomkom v základnom tvare:
4 %; 12 %; 35 %; 65 %; 90 %.

13. Martina si v časopise všimla údaje o spotrebe vody v domácnosti:

Umývanie a kúpanie	WC	Pranie	Umývanie riadu v umývačke	Pitie a varenie	Vonku
27 %	24 %	17 %	14 %	10 %	8 %

a) Koľko vody na ktorú činnosť sa spotrebuje v domácnosti, ktorá má priemernú spotrebu 2 300 l vody mesačne?
b) Zistite, akú spotrebu vody má vaša domácnosť a vypočítajte vašu spotrebu na jednotlivé činnosti v domácnosti.

14. Čo je menej: 18 % z 500 alebo 8 % zo 625?

9.3 Základ

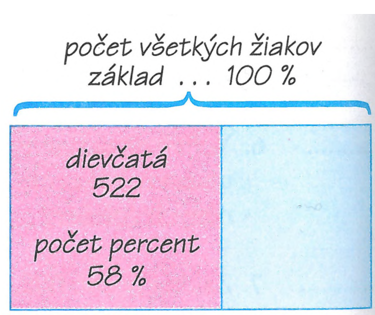
PRÍKLAD 1

Do školy chodí 522 dievčat, čo predstavuje 58 % počtu všetkých žiakov školy. Koľko žiakov má škola?

RIEŠENIE

Adam pomenuje jednotlivé číselné údaje:

počet percent . . . 58 %
percentová časť . . . 522
<u>mám vypočítať základ . . . 100 %</u>



Adam počíta: 58 % . . . 522
1 % . . . 522 : 58 = 9
100 % . . . 9 . 100 = 900

Adam vypočítal, že školu navštevuje 900 žiakov.

Skúška: základ . . . 100 % . . . 900
1 % . . . 900 : 100 = 9
58 % . . . 9 . 58 = 522 to je údaj zo zadania

Odpoveď: Škola má 900 žiakov.

Počítame základ:

1. Percentovú časť vydelíme počtom percent (vypočítame 1 %).
2. Výsledok (1 %) násobíme 100.

ÚLOHA 1

Vypočítajte základ, ak: a) 1 % základu je 0,25 c) 120 % základu je 6

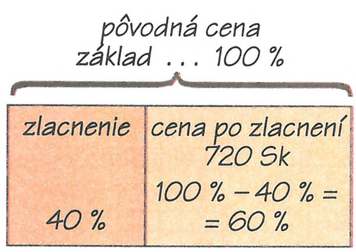
b) 75 % základu je 420 d) $\frac{1}{2}$ % základu je 1,8

PRÍKLAD 2

Zimné topánky zlacneli po sezóne o 40 %. Ich cena po zlacnení je 720 Sk. Aká bola pôvodná cena topánok?

RIEŠENIE

Martin uvažuje takto:



	percentá	koruny
pôvodná cena	. . . 100 %	. . . mám vypočítať
zlacneli o	. . . 40 %	. . . neviem koľko korún
cena po zlacnení	100 % - 40 %	. . . 720 Sk
platí: cena po zlacnení	. . . 60 %	. . . 720 Sk
	1 %	. . . 720 : 60 = 12
	100 %	. . . 12 . 100 = 1 200 pôvodná cena

Skúška: 100 % . . . 1 200

1 % . . . 1 200 : 100 = 12

40 % . . . 12 . 40 = 480

1 200 - 480 = 720 to je údaj zo zadania

Odpoveď: Pôvodná cena topánok bola 1 200 Sk.

ÚLOHA 2

Plesové šaty boli zlacnené o 15 %. Po tomto zlacnení stáli 2 295 Sk. Koľko stáli plesové šaty pred zlacnením?

ÚLOHA 3

Na školský výlet išlo 24 žiakov, čo predstavuje $85\frac{5}{7}$ % všetkých žiakov triedy. Koľko žiakov z tejto triedy nešlo na výlet?

CVIČENIA

1. Vypočítajte spamäti základ, ak:
   a) 1 % základu je 0,3 m;
   b) 10 % základu je 12 m;
   c) 20 % základu je 50 kg.

2. Vypočítajte číslo, z ktorého sa:
   a) 26 % rovná 169;
   b) 0,02 % rovná 4,32;
   c) 210 % rovná 840.

3. Poľnohospodári vysiali kukuricu na 45 ha, čo je 15 % celkovej výmery ich hospodárstva. Koľko hektárov polí obhospodarujú?

4. Kováčovci zaplatia mesačne za bývanie priemerne 3 000 Sk, čo je 24 % ich mesačného príjmu. Koľko korún im zostane na iné výdavky?

5. Pán Slovák našetril 48 000 Sk, čo je 15 % z ceny nového auta, ktoré si chce kúpiť. Koľko stojí nové auto?

6. Odhadnite základ, ak:
   a) 26 % je 439; b) 10,5 % je 0,06; c) 195 % je 60,5; d) 51 % je 1,6.

7. Za prácu na oprave auta zaplatil zákazník 2 966,40 Sk, čo predstavovalo 36 % z celkovej ceny opravy. Koľko stála celá oprava?

8. Záhrada okolo nového domu je rozdelená takto: 35 % zeleninové hriadky, 30 % ovocný sad, 10 % kvety a zvyšok 120 m^2 je trávnik. Aká je celková výmera záhrady?

9. Nájdite číslo, z ktorého 5 % je toľko, ako 7 % zo 45.

10. Fotoaparát po zlacnení o 20 % stojí 1 120 Sk.
    a) Koľko stál pred zlacnením?
    b) O koľko korún zlacnel?

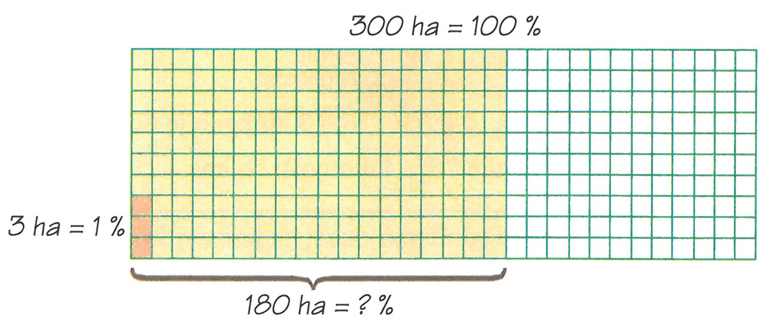
9.4 Počet percent

PRÍKLAD 1

Kombajn má zožať obilie na poli s výmerou 300 ha. Zatiaľ zožal 180 ha. Koľko percent výmery poľa už kombajn zožal?

RIEŠENIE

Nakreslime si obrázok:



Uvažujme:	celé pole . . .	300 ha	. . . základ . . . 100 %
	zožal . . .	180 ha	. . . percentová časť
	máme vypočítať		. . . počet percent

Počítame: 100 % . . . 300 ha
1 % . . . 300 : 100 = 3 ha

3 ha predstavujú 1 %
180 ha bude 180:3 = 60 %

Skúška: 100 % . . . 300 ha
1 % . . . 3 ha
60 % . . . 3 . 60 = 180 ha, to je údaj zo zadania

Odpoveď: Kombajn zožal 60 % výmery poľa.

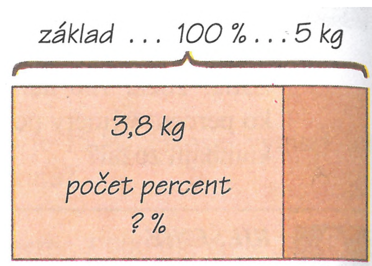
Počítame počet percent:

1. Základ delíme 100 (vypočítame 1 %).
2. Percentovú časť delíme výsledkom (delíme číslom, ktoré predstavuje 1 %).

PRÍKLAD 2

V 5 kg čierneho chleba je 3,8 kg múky. Koľko percent hmotnosti chleba predstavuje múka?

RIEŠENIE



základ . . . 100 % . . . 5 kg
percentová časť . . . 3,8 kg
počet percent . . . máme vypočítať

platí: 100 % . . . 5 kg
1 % . . . 5 : 100 = 0,05 kg
0,05 kg predstavuje 1 %
3,8 kg bude: 3,8 : 0,05
teda 380 : 5 = 76 %
3,8 kg múky predstavuje 76 % hmotnosti 5 kg chleba

Skúška: 100 % . . . 5 kg
1 % . . . 0,05 kg
76 % . . . 0,05 . 76 = 3,80 kg to je údaj zo zadania

Odpoveď: Múka predstavuje 76 % hmotnosti chleba.

ÚLOHA 1

Vypočítajte spamäti, koľko percent predstavuje:

a) 150 kg z 300 kg
b) 6 m zo 600 m
c) 12 žiakov zo 48 žiakov
d) 50 Sk z 200 Sk

ÚLOHA 2

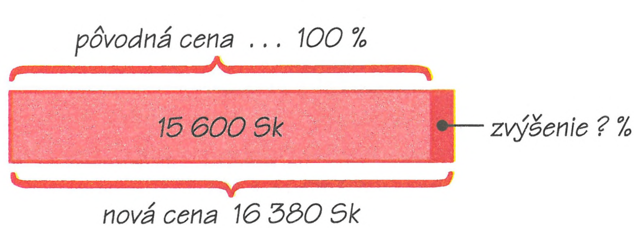
Základnou zložkou ľudského tela je voda. V tele človeka s hmotnosťou 60 kg je asi 39 kg vody. Koľko percent hmotnosti ľudského tela tvorí voda?

PRÍKLAD 3

Cenu farebného televízora zvýšili z 15 600 Sk na 16 380 Sk. O koľko percent zvýšili cenu?

RIEŠENIE

Adam kreslí:



základ . . . 100 % . . . 15 600 Sk
1 % . . . 15 600 : 100 = 156 Sk
cenu zvýšili o . . . 16 380 - 15 600 = 780 Sk
počet percent . . . 780 : 156 = 5 %

Odpoveď: Cenu televízora zvýšili o 5 %.

PRÍKLAD 4

V tabuľke sú zapísané obľúbené športy žiakov 7. C triedy a počet žiakov, ktorí ich pravidelne sledujú alebo sa im venujú. Andrej a Tomáš majú tabuľku doplniť.

	Počet žiakov	%
Trieda	34	100
Plávanie	8	
Lyžovanie	12	
Tenis	14	

RIEŠENIE

Andrej a Tomáš počítajú: základ . . . 34 žiakov
percentová časť . . . 8 plávanie
percentová časť . . . 12 lyžovanie
percentová časť . . . 14 tenis

100 % . . . 34 žiakov
1 % . . . 0,34

Andrej počíta počet percent na jedno desatinné miesto:
plávanie . . . 8 : 0,34 = 23,5
lyžovanie . . . 12 : 0,34 = 35,2
tenis . . . 14 : 0,34 = 41,1

Tomáš počíta počet percent na dve desatinné miesta a zaokrúhľuje na desatiny:
plávanie . . . 8 : 0,34 = 23,52 ≐ 23,5
lyžovanie . . . 12 : 0,34 = 35,29 ≐ 35,3
tenis . . . 14 : 0,34 = 41,19 ≐ 41,2

Skúška: Urobíme ju tak, že počet percent sčítame. Súčet by sa mal rovnať 100.

Andrej:	Tomáš:
23,5	23,5
35,2	35,3
41,1	41,2
99,8	100,0

Doplnená tabuľka:

	Počet žiakov	%
Trieda	34	100
Plávanie	8	23,5
Lyžovanie	12	35,6
Tenis	14	41,2

POZNÁMKA

Pri výpočtoch musíme počet percent niekedy zaokrúhliť. Výsledok nemusí byť vždy presne 100 %. Záleží to od presnosti, s ktorou počítame.

ÚLOHA 3

Obdĺžnikový pozemok v záhradkárskej kolónii má rozmery 8 m a 50 m. Osiata plocha predstavuje 320 m^2 celej plochy pozemku, záhradný domček 20 m^2 a zostatok plochy tvoria chodníčky. Koľko percent plochy záhrady tvorí

a) osiata plocha, b) záhradný domček, c) chodníčky?

CVIČENIA

1. Vypočítajte spamäti, koľko percent predstavuje:
   a) 20 cm z 80 cm c) 18 kg zo 60 kg e) 1,6 l zo 40 l
   b) 15 Sk z 1 000 Sk d) 300 dm^3 zo 400 dm^3 f) 6 m z 300 m

2. Vypočítajte približne, koľko percent z hodiny je: a) 5 min, b) 20 min, c) 1 s.

3. V triede je 35 žiakov, 7 z nich aktívne športuje. Koľko je to percent?

4. Kontrola kvality zistila, že zo 4 200 výrobkov bolo 3 074 bezchybných. Koľko percent predstavovali nepodarky?

5. a) Koľko percent z 1 m je: 1 cm, 15 cm, 90 cm, 25 cm, 50 cm, 1 mm, 5 mm?
   b) Koľko percent z 36 je: 1, 9, 4,18, 27, 36, 72,108, 144?

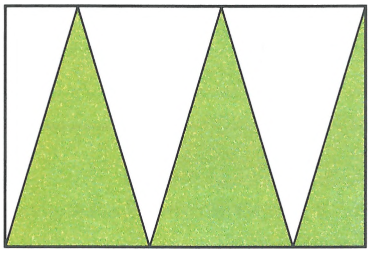
6. Cenu spoločenskej slovnej hry SCRABBLE zvýšili zo 600 Sk na 900 Sk. O koľko percent zvýšili cenu hry?

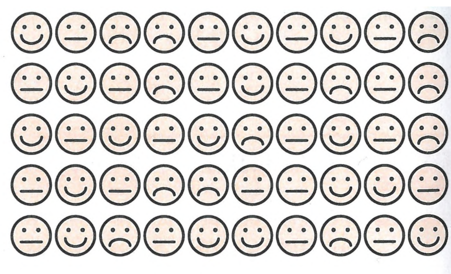
7. Čerstvé huby vážia 8 kg. Po usušení bola ich hmotnosť 96 dag. Koľko percent vody obsahujú čerstvé huby?

8. Z 50 ton zemiakov sa získa 9 ton zemiakovej múky. Koľko percent hmotnosti zemiakov predstavuje zemiaková múka?

9. Vypočítajte s presnosťou na dve desatinné miesta, koľko percent je:
   a) 15 min zo 4 h c) 2 dm^2 zo 400 cm^2
   b) 35 cm^2 z 12,5 dm^2 d) 0,2 l z 2,2 l

10. Určte z obrázka: a) Koľko percent obsahu obdĺžnika je vyfarbených?
    b) Koľko percent tváričiek sa usmieva?

a)


b)


11. Zo 150 detí, ktoré sa zúčastnili lyžiarskeho kurzu bolo: 20 výborných lyžiarov, 35 dobrých, 40 priemerných a zvyšok boli začiatočníci. Vypočítajte tieto údaje v percentách.

9.5 Trojčlenka v percentovom počte

ZOPAKUJME SI

V úlohách o percentách vystupujú tri číselné údaje:

základ
percentová časť
počet percent

Dva z týchto údajov sú vždy dané, tretí máme vypočítať. Základ je vždy 100 %. Percentová časť a počet percent sú pri pevnom základe **priamo úmerné** veličiny. Pri riešení úloh s percentami môžeme využiť ***trojčlenku.***

PRÍKLAD 1

Bronz je zliatina medi a cínu. Koľko cínu je v 3,6 kg bronzu, ak bronz obsahuje 15 % cínu?

RIEŠENIE

Peter údaje pomenuje: 3,6 je základ 100 %
15 % je počet percent
mám vypočítať percentovú časť.

Zapíše do trojčlenky:

$$\begin{array}{lcl} \uparrow\ 100\ \% & \ldots\ldots & 3{,}6\ \text{kg}\ \uparrow \\ \ \ 15\ \% & \ldots\ldots & x\ \text{kg} \end{array}$$

Šípkami naznačí, že ide o priamu úmernosť.

Rieši: $x : 3{,}6 = 15 : 100$

$$x = \frac{15 \cdot 3{,}6}{100}$$

$$x = 0{,}54$$

Peter vypočítal, že v 3,6 kg bronzu je 0,54 kg cínu.

Skúška: 3,6 kg . . . 100 %
0,036 kg . . . 1%
0,54 kg . . . 0,54 : 0,036
540 : 36 = 15 % to je údaj zo zadania

Odpoveď: V 3,6 kg bronzu je 0,54 kg cínu.

POZNÁMKA

Pri zápise úlohy s percentami pomocou trojčlenky píšeme vždy pod seba číselné údaje a pod seba údaje s percentami.

ÚLOHA 1

Železná ruda obsahuje priemerne 35 % železa. Koľko železa sa získa roztavením 300 ton železnej rudy?

ÚLOHA 2

Koncertná sála, ktorá má 750 miest bola zaplnená na 74 %. Koľko miest nebolo obsadených?

PRÍKLAD 2

Koľko pretekárov sa zúčastnilo behu na lyžiach, ak je v cieli už 32 pretekárov, čo predstavuje 40 **%** všetkých zúčastnených pretekárov.

RIEŠENIE

Viera najprv údaje pomenuje: 32 pretekárov je percentová časť
40 % je počet percent
mám vypočítať základ, t. j. 100 %.

Viera zapíše údaje do trojčlenky:

↑ 40 % . . . . . 32 ↑
100 % x

Rieši:

$$x : 32 = 100 : 40$$
$$x = \frac{100 \,.\, 32}{40}$$
$$x = 80$$

Viera vypočítala, že behu na lyžiach sa zúčastnilo celkove 80 pretekárov.

Skúška: 100 % . . . 80
1 % . . . 0,8
0,8 . 40 = 32 pretekárov, to je údaj zo zadania

Odpoveď: Behu na lyžiach sa zúčastnilo 80 pretekárov.

ÚLOHA 3

Pán Čierny ročne ušetrí 35 000 Sk, čo je 14 % jeho ročného príjmu. Aký je ročný príjem pána Čierneho?

ÚLOHA 4

Do základnej školy chodí 216 dievčat, čo je 54 % všetkých žiakov. Koľko žiakov navštevuje školu?

PRÍKLAD 3

Koľko percent vody z minerálneho prameňa sa využíva, ak z každých 5 000 litrov naplnia 2 800 litrových fliaš?

RIEŠENIE

Adam údaje pomenuje. 5 000 litrov je základ, t. j. 100 %
2 800 litrov je percentová časť
mám vypočítať počet percent.

Adam zapíše trojčlenku:

$$\begin{array}{lcr} \uparrow 5\,000\ \mathrm{l} & \ldots\ldots & 100\ \% \uparrow \\ 2\,800\ \mathrm{l} & \ldots\ldots & x\ \% \end{array}$$

Rieši:

$$x : 100 = 2\,800 : 5\,000$$

$$x = \frac{2\,800\ .\ 100}{5\,000}$$

$$x = 56$$

Adam vypočítal, že minerálny prameň sa využíva na 56 %.

Skúška: 5 000 l . . . 100 %
50 l . . . 1 %
50 . 56 = 2 800 fliaš, to je údaj zo zadania.

Odpoveď: Minerálny prameň sa využíva na 56 %.

ÚLOHA 5

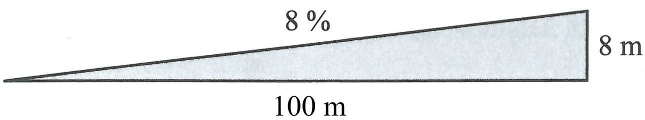
Cena zimného pobytu na horách pre štvorčlennú rodinu je 25 000 Sk. Koľko percent tvorí záloha, ak treba zaplatiť 11 250 Sk?

ÚLOHA 6

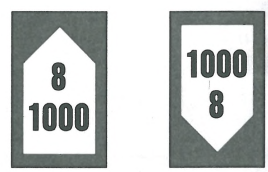
Nové auto stojí 450 000 Sk. To isté auto s nadštandardnou výbavou (centrálne uzamykanie, airbag, ABS, klimatizácia ...) stojí 540 000. Koľko percent z pôvodnej ceny auta predstavuje nadštandardná výbava?

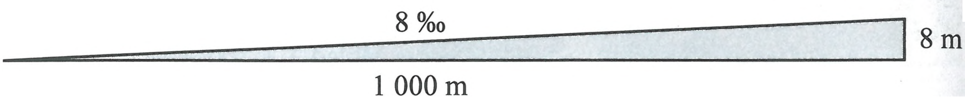
Pri cestách alebo pri železničných tratiach sa stretávame so značkami, ktoré označujú stúpanie alebo klesanie cesty v percentách.

Značka 8 % znamená, že na vodorovnom úseku dĺžky 100 m stúpne (alebo klesne) cesta o 8 m vo zvislom smere.
Nakresliť to môžeme takto:



Na železničných tratiach sa stúpanie alebo klesanie určuje v promile (značka ‰)
Značka 8 ‰ udáva, že na vodorovnom úseku dĺžky 1 000 m stúpne (alebo klesne) trať o 8 m vo zvislom smere.





Jedno promile je jedna tisícina základu

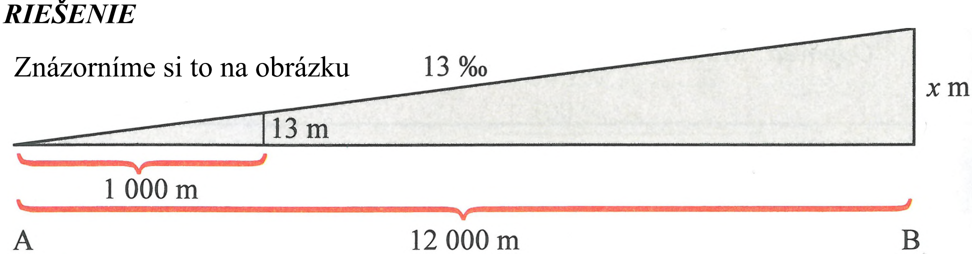
$$1\ ‰ = \frac{1}{1\,000} = 0{,}001$$

PRÍKLAD 4

Vodorovná vzdialenosť medzi železničnými stanicami A a B je 12 km. Na tomto úseku má železničná trať stúpanie 13 ‰. Aký je výškový rozdiel medzi týmito stanicami?

RIEŠENIE

Znázorníme si to na obrázku



13 ‰ znamená

$$\begin{array}{l} \text{na } 1\,000 \text{ m} \ldots 13 \text{ m stúpanie} \\ \text{na } 12\,000 \text{ m} \ldots x \text{ m stúpanie} \end{array}$$

$$x : 13 = 12\,000 : 1\,000$$

$$\frac{x}{13} = \frac{12\,000}{1\,000}$$

$$x = \frac{12\,000}{1\,000} \cdot 13$$

$$x = 156 \text{ m}$$

Odpoveď: Výškový rozdiel medzi stanicami je 156 m.

ÚLOHA 7

Železničná trať stúpa o 10 m na vodorovnej vzdialenosti 2 000 m. Vyjadrite jej stúpanie v promile.

PRÍKLAD 5

Vypočítajte 5 % z 25 % z 85.

RIEŠENIE

Martina použije dvakrát trojčlenku:

$$\begin{array}{l} 100\,\% \ldots 85 \\ 25\,\% \ldots x \end{array}$$

$$x : 85 = 25 : 100$$

$$\frac{x}{85} = \frac{25}{100}$$

$$x = \frac{25}{100} \cdot 85$$

$$x = 21{,}5$$

$$\begin{array}{l} 100\,\% \ldots 21{,}25 \\ 5\,\% \ldots x \end{array}$$

$$x : 21{,}25 = 5 : 100$$

$$\frac{x}{21{,}25} = \frac{5}{100}$$

$$x = \frac{5}{100} \cdot 21{,}25$$

$$x = 1{,}0625$$

ÚLOHA 8

Vypočítajte: a) 1 % z 8 % z 10, b) 2 % z 10 % z 200, c) 40 % zo 4 % z 20.

C V I Č E N I A

1. Číslo 60 zväčšite o: a) 10 %, b) 25 %, c) 150 %.

2. Pri ceste autom sme spotrebovali 30 % benzínu, ktorý bol v nádrži. Koľko litrov benzínu bolo pôvodne v nádrži, ak v cieli cesty bolo v nádrži 28 l benzínu?

3. Vlado mal za úlohu porýľovať $\frac{1}{2}$ záhrady. Porýľoval už $\frac{2}{5}$ záhrady. Na koľko percent má splnenú úlohu?

4. Na zhotovenie plechovej nádoby sme spotrebovali 320 m^2 plechu. 5 % spotreby materiálu tvoril odpad. Koľko m^2 tvoril odpad?

V cvičeniach 5 - 10 vyberte správnu odpoveď:

5. Ktoré číslo musíme zmenšiť o 20 %, aby sme dostali 116?
   A 158 **B** 145 **C** 200
6. Adam zjedol $\frac{1}{4}$ torty, jeho brat $\frac{1}{5}$. Koľko % torty im zostalo pre ostatných hostí?
   A 52 % **B** 45 % **C** 55 %
7. Aký je vzťah medzi číslami x a y, ak 40 % z čísla x je 50 a 50 % z čísla y je 40?
   A $x < y$ **B** $x > y$ **C** $x = y$
8. Aká bola pôvodná cena automatickej pračky, ak po zvýšení o 35 % stojí 12 690 Sk?
   A 9 400 Sk **B** 4 441,50 Sk **C** 8 625 Sk
9. Televízor zlacnel o 10 % a potom ešte raz o 10 % z novej ceny. Teraz stojí 9 720 Sk. Aká bola jeho pôvodná cena?
   A 12 150 Sk **B** 12 000 Sk **C** 11 664 Sk
10. Priemerný zárobok vo výrobných podnikoch na Slovensku bol v roku 1998 10 440 Sk, čo je o 7 % viac ako predchádzajúci rok. Aký bol priemerný zárobok v roku 1997?
    A 10 128 Sk **B** 9 757 Sk **C** 9 345 Sk

11. Vyjadrite klesanie 7 % v promile.

12. Výškový rozdiel medzi dolnou a hornou stanicou lanovej dráhy je 900 m. Ich vodorovná vzdialenosť je 1,5 km. Aké je priemerné stúpanie lanovky
    a) v percentách, b) v promile?

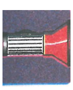
13. Medzi dvoma mestami, ktorých vodorovná vzdialenosť je 8,2 km je železničná trať, označená klesaním 11 ‰. Aký je výškový rozdiel medzi týmito mestami?

14. Vypočítajte: a) 1 % z 5 % z 20, c) 83 % z 25 % z 25, b) 4 % z 20 % z 1 000, d) 0,3 % zo 70 % z 90.

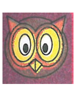
9.6 Úrok

Ak vložíme peniaze do sporiteľne alebo banky, alebo keď si z banky peniaze požičiavame, vyčíslia nám k danej sume úrok. Keď peniaze vkladáme, úrok predstavuje ročný poplatok, ktorý nám finančná inštitúcia bude vyplácať ako poplatok za právo, že môže s našimi peniazmi disponovať.
Keď si peniaze požičiame, úrok predstavuje ročný poplatok, ktorý my (dlžníci) musíme platiť navyše finančnej inštitúcii, ako poplatok za jej riziko, že nám peniaze požičala.

Vyriešime niekoľko jednoduchých príkladov z finančnej matematiky.

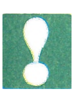


vklad = počiatočná istina = základ = 100 %
ročná úroková miera = počet percent
úrok = percentová časť



PRÍKLAD 1

Stará mama uložila vnučke Martine na vkladnú knižku 2 000 Sk pri úrokovej miere 4 %. Koľko korún bude na vkladnej knižke o rok, keď pripíšu úrok?



RIEŠENIE

vklad = počiatočná istina = základ . . . 2 000 Sk
ročná úroková miera = počet percent . . . 4 %

Výpočet I. vklad . . . 100 % . . . 2 000 Sk
úrok . . . 4 % . . . x Sk

$$x : 2\,000 = 4 : 100$$
$$x = \frac{4}{100} \cdot 2\,000$$
$$x = 80$$
$$x = 80 \text{ Sk}$$

Pri 4 %-nej úrokovej miere sa za rok pripíše 80 Sk.
Spolu: 2 000 + 80 = 2 080 Sk

Odpoveď: O rok bude na vkladnej knižke 2 080 Sk.

Výpočet II.

$$\begin{array}{lcr} 100\,\% & \ldots & 2\,000 \text{ Sk} \\ 104\,\% & \ldots & x \text{ Sk} \end{array} \qquad (100\,\% + 4\,\% \text{ úrok} = 104\,\% \text{ z vloženej sumy})$$

$$x : 2\,000 = 104 : 100$$
$$x = \frac{104}{100} \cdot 2\,000$$
$$x = 2\,080$$
$$x = 2\,080 \text{ Sk}$$

Odpoveď: O rok bude na vkladnej knižke 2 080 Sk.

PRÍKLAD 2

Akú sumu bude o dva roky predstavovať istina 12 000 Sk, ak sme ju uložili do banky pri ročnej úrokovej miere 6 % a peniaze nevyberáme?

RIEŠENIE

1. rok vklad (istina) . . .

$$\begin{array}{lcr} 100\,\% & \ldots & 12\,000 \text{ Sk} \\ 6\,\% & \ldots & x \text{ Sk} \end{array}$$

$$x : 12\,000 = 6 : 100$$
$$x = \frac{6}{100} \cdot 12\,000$$
$$x = 720 \text{ Sk}$$

Na konci prvého roka vklad vzrástol na 12 000 + 720 = 12 720 Sk.

Počiatočná istina v druhom roku je pôvodný vklad 12 000 Sk. Teda aj v druhom roku pribudne 720 Sk, ktoré predstavujú ročný úrok. Takémuto spôsobu počítania úrokov sa hovorí jednoduchý úrok.

Suma o dva roky: 12 720 + 720 = 13 440 Sk

Odpoveď: Na konci druhého roka bude istina predstavovať sumu 13 440 Sk.

POZNÁMKA

Istina rastie takto ďalej, ak peniaze nevyberáme. V banke z úroku ešte odpočítavajú daň (15 % až 20 %), my ju však neberieme do úvahy.

PRÍKLAD 3

Pán Kováč si požičal 50 000 Sk, ktoré má vrátiť o rok. Vypočítal, že musí vrátiť sumu 57 500 Sk. Aká je úroková miera jeho pôžičky?

RIEŠENIE

požičaná suma = základ = 100 %
suma, ktorú má vrátiť = percentová časť
počítame počet percent

Výpočet I.

50 000 Sk . . . 100 %
57 000 Sk . . . x % Sk

$$x : 100 = 57\,500 : 50\,000$$
$$x = \frac{57\,500}{50\,000} \cdot 100$$
$$x = 115$$
$$x = 115\ \%$$

Výpočet II.

rozdiel: 57 500 – 50 000 = 7 500 je úrok

50 000 Sk . . . 100 %
7 500 Sk . . . x %

$$x : 100 = 7\,500 : 50\,000$$
$$x = \frac{7\,500}{50\,000} \cdot 100$$
$$x = \frac{75}{5}$$
$$x = 15$$
$$x = 15\ \%$$

115 % predstavuje:
100 % ktoré treba vrátiť + úroková miera
115 - 100 = 15

Odpoveď: Úroková miera pôžičky pána Kováča je 15 %.

ÚLOHA 1

Vypočítajte spamäti úrok za 1 rok:
a) z 500 Sk pri úrokovej miere 3 %,
b) z 10 000 Sk pri úrokovej miere 5 %,
c) z 80 000 Sk pri úrokovej miere 12 %.

ÚLOHA 2

Z istiny 6 500 Sk dostal pán Petrík po prvom roku úrok 520 Sk. Na akú úrokovú mieru istinu uložil?

ÚLOHA 3

Koľko korún uložila firma „Úspech“ do banky, ak úrok z uloženej sumy za jeden rok bol 9 600 Sk pri úrokovej miere 8 %?

ÚLOHA 4

Za koľko mesiacov dostaneme úrok 520 Sk, ak sme uložili sumu 15 000 Sk na účet s ročnou úrokovou mierou 8 %?

CVIČENIA

1. Vypočítajte spamäti úrok za 1 rok:
   a) z 1 000 Sk pri úrokovej miere 6,5 %,
   b) z 3 000 Sk pri úrokovej miere 8 %,
   c) z 12 000 Sk pri úrokovej miere 10 %.

2. Vypočítajte úrok:
   a) z 800 Sk za 6 mesiacov pri úrokovej miere 7,5 % za rok,
   b) z 2 436 Sk za 1 mesiac pri úrokovej miere 4 % za rok.
   c) z 5 000 Sk za $\frac{3}{4}$ roka pri úrokovej miere 12 % za rok.

3. Rodičia uložili synovi do banky 30 000 Sk na účet s úrokovou mierou 11 % Akú istinu bude mať syn v banke o rok?

4. K istine 8 000 Sk pripísali po prvom roku úrok 1 040 Sk. Na akú úrokovú mieru je istina uložená?

5. Vypočítajte úrok z 20 000 Sk pri úrokovej miere 8,5 % za rok. Vypočítajte úrok za druhý rok pri rovnakej úrokovej miere. Koľko korún si môžeme vybrať po druhom roku, aby znovu zostalo uložených 20 000 Sk?

6. Koľko korún zaplatíme na úrokoch za rok, ak sme si požičali 150 000 Sk pri úrokovej miere 9,2 %?

7. Za koľko mesiacov zaplatíme úrok 100 Sk, ak sme si požičali 6 000 Sk pri úrokovej miere 4 % za rok?

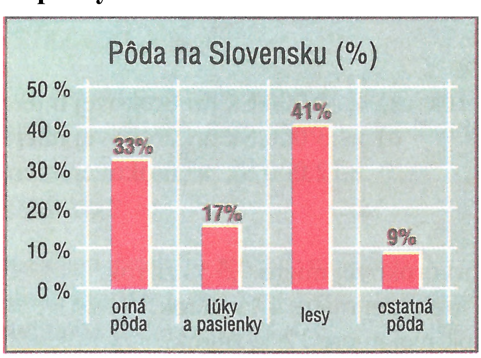
8. Pán Rybárik sa pochválil, že na vkladnej knižke s úrokovou mierou 6 % má uloženú takú sumu peňazí, že ročný úrok z nej mu stačí na zaplatenie celoročných poplatkov za byt. Aká je to suma, ak mesačné poplatky pána Rybárika za byt sú priemerne 1 800 Sk?

9.7 Diagramy

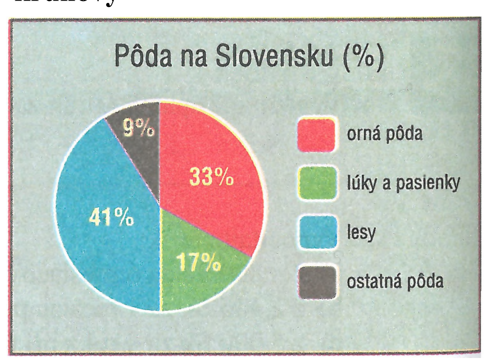
V novinách a časopisoch sa často nachádzajú obrázky, na ktorých sú graficky porovnávané rôzne údaje. Grafické znázornenie údajov sa nazýva **diagram** a poskytuje nám lepšiu predstavu o vzťahoch medzi porovnávanými údajmi. V súčasnosti existujú aj počítačové programy vybavené funkciami, ktoré umožnia rýchlo a ľahko zostaviť z daných údajov diagram.

Poznáme dva základné druhy diagramov:

stĺpcový



kruhový



Pri vytváraní diagramov obyčajne vychádzame z tabuľky údajov, v ktorej sú zaznamenané jednotlivé údaje a ich číselné hodnoty.

PRÍKLAD 1

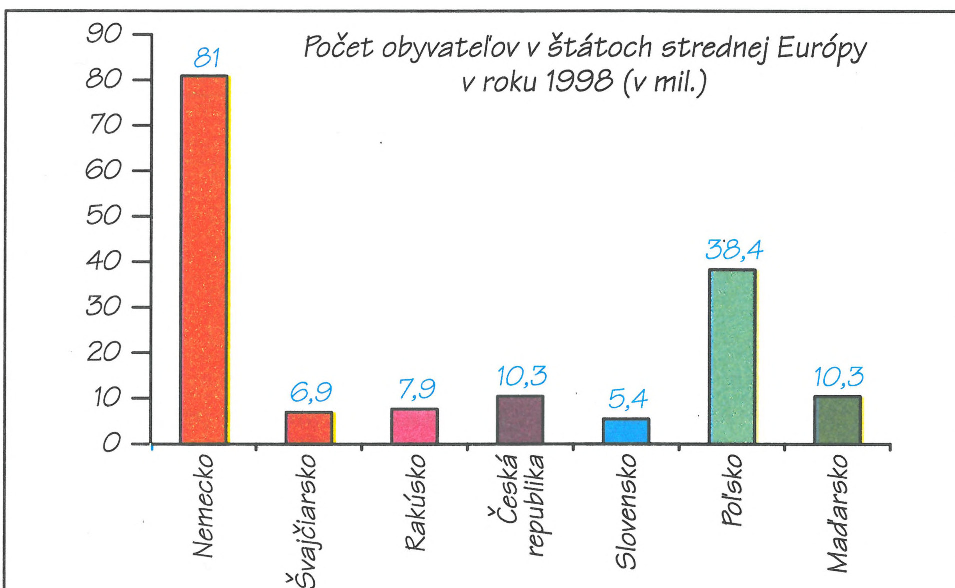
Zostrojte stĺpcový diagram, na ktorom graficky znázorníte počet obyvateľov krajín strednej Európy v roku 1998 podľa nasledujúcej tabuľky:

Krajina	Počet obyvateľov (mil.)
Nemecko	81
Švajčiarsko	6,9
Rakúsko	7,9
Česká republika	10,3
Slovensko	5,4
Poľsko	38,4
Maďarsko	10,3

RIEŠENIE

Zuzana pri konštrukcii grafu postupuje takto:

1. Zostrojí pravouhlú súradnicovú sústavu.
   Vodorovná os x je os, na ktorú zobrazí krajiny.
   Zvislá os y je os, na ktorú zobrazí počet obyvateľov.
2. Na oboch osiach zvolí mierku tak, aby diagram bol dobre čitateľný.
   os x: máme 7 údajov (7 krajín), každú krajinu bude predstavovať stĺpec šírky 6 mm. Vzdialenosť medzi stĺpcami bude 8 mm.
   os y: najmenší údaj je počet obyvateľov Slovenska (5,4 mil.), najväčší údaj je počet obyvateľov Nemecka (81 mil.). Jednotková úsečka na osi y bude predstavovať 10 mil. obyvateľov a bude mať dĺžku 6 mm.
3. Horná strana stĺpca siaha do výšky príslušnej hodnoty y.
4. Hodnoty na osiach diagramu popíše, nad každý stĺpec napíše príslušnú hodnotu a stĺpce vyfarbí.



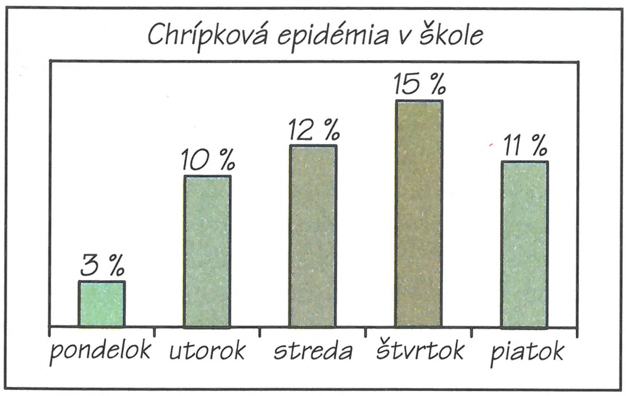
Stĺpcový diagram názorne porovnáva hodnoty jednotlivých údajov.

ÚLOHA 1

Urobte vo svojej triede anketu: „Koľko máš súrodencov?“ a zostrojte stĺpcový diagram, ktorým graficky znázorníte zistené údaje.

ÚLOHA 2

Nasledujúci stĺpcový diagram popisuje, ako postupovala chrípková epidémia v škole. Koľko žiakov bolo chorých v jednotlivé dni, ak do školy chodí 1 200 žiakov?



PRÍKLAD 2

Adam má za úlohu zostrojiť kruhový diagram, v ktorom znázorní tieto údaje: V balíčku s cibuľkami kvetov bolo 15 tulipánov, 10 hyacintov, 5 narcisov a 10 krókusov.

RIEŠENIE

Adam si pripraví tabuľku:

tulipány	15
hyacinty	10
narcisy	5
krókusy	10
spolu	40

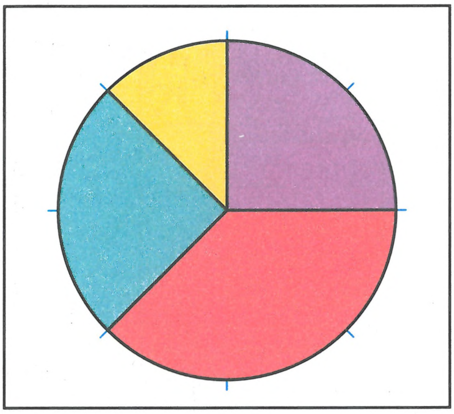
Adam rozmýšľa: V kruhovom diagrame kruh predstavuje celok. Každý údaj z tabuľky viem vyjadriť ako časť celku zlomkom alebo percentom.

Adam tabuľku doplní:

tulipány	$15 = \frac{15}{40} = \frac{3}{8}$	37,5 %
hyacinty	$10 = \frac{10}{40} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$	25,0 %
narcisy	$5 = \frac{5}{40} = \frac{1}{8}$	12,5 %
krókusy	$10 = \frac{10}{40} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$	25,0 %

Adam môže postupovať dvoma spôsobmi:

1. Rozdelí kruh na osminy a príslušný počet osmín pre jednotlivé počty kvetov vyfarbí inou farbou



2. Vie, že $\frac{1}{4} = 25\ \%$ predstavuje uhol $360° : 4 = 90°$.

V údajoch máme dvakrát 25 %, teda dvakrát uhol 90°,

12,5 % je uhol 45° lebo 25 : 2 = 12,5 % a teda aj 90 : 2 = 45°

a posledný uhol predstavuje 37,5 %.

Je to uhol 360° - (2 . 90° + 45°) = 135°

tulipány

hyacinty

narcisy

krókusy

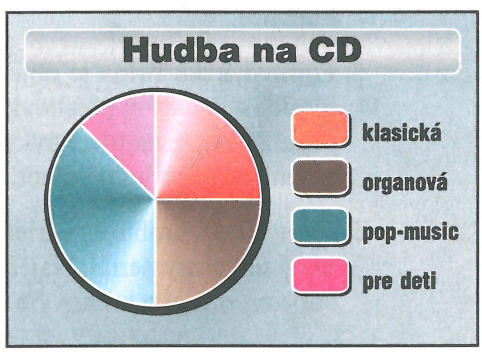
Kruhový diagram vyjadruje rozdelenie celku na časti.

ÚLOHA 3

V zemskej atmosfére je asi 78 % dusíka, 21 % kyslíka a 1 % tvoria ostatné plyny. Zostrojte príslušný kruhový diagram (1 % predstavuje uhol veľkosti 3°36').

ÚLOHA 4

Kruhový diagram vyjadruje zastúpenie CD nosičov s jednotlivými druhmi hudby v obchode s hudobninami. Aké zastúpenie (v %) majú jednotlivé druhy hudby?

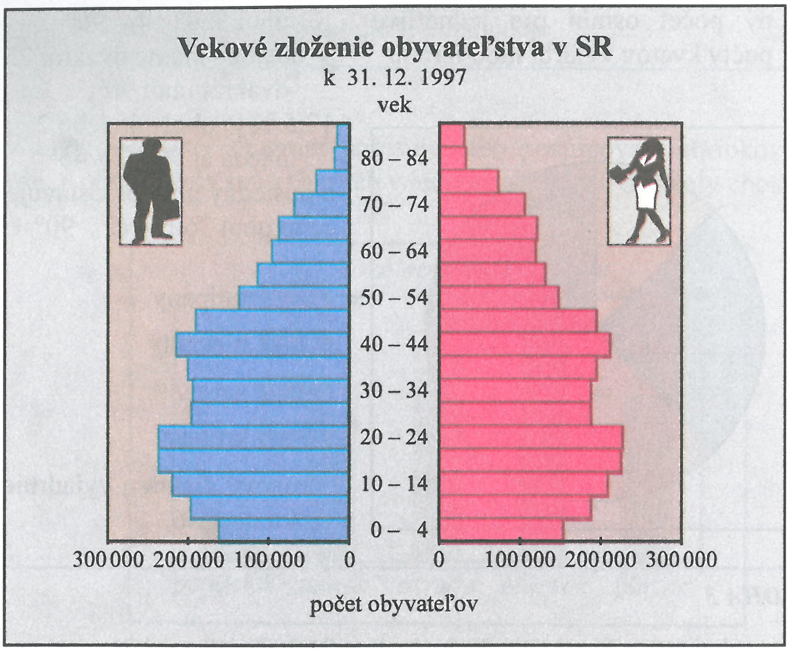


CVIČENIA

1. Zostrojte stĺpcový diagram, ktorý bude vyjadrovať prospech, aký dosiahli žiaci vašej triedy z matematiky na poslednom vysvedčení.

2. V roku 1960 žilo 32,8 % obyvateľov Slovenska v mestách, v roku 1980 to bolo 49,2 % a v roku 1997 približne 56,9 %. Zostrojte stĺpcový diagram, na ktorom tieto údaje znázorníte.

3. Štatistický úrad Slovenskej republiky uverejnil na svojich stránkach na Internete takýto diagram. Popíšte znázornené údaje. Do ktorého stĺpca ste patrili?



4. Knižnica mala prírastok 800 nových kníh. Z nich $\frac{3}{8}$ boli napísané v slovenskom jazyku, $\frac{3}{8}$ v českom jazyku a $\frac{1}{4}$ bola v iných jazykoch. Znázornite na kruhovom diagrame a vypočítajte, koľko kníh v ktorom jazyku pribudlo do knižnice.

5. Potravinárska firma si objednala v tlačiarňach 3 600 kusov etikiet na nový výrobok balený v plechovkách. 25 % bolo na plechovky s hmotnosťou obsahu 250 g, $\frac{2}{3}$ na plechovky s hmotnosťou obsahu 330 g a zvyšok na 500 g balenie. Koľko bolo jednotlivých etikiet? Znázornite na kruhovom diagrame.

6. Vymyslite a urobte si v triede anketu (napr.: Ako dochádzaš do školy? Obľúbený televízny seriál. Najčítanejší časopis a pod.) a získané údaje znázornite stĺpcovým alebo kruhovým diagramom.

VYSKÚŠAJTE SA!

1. Čo je viac: 6 % z 25 alebo 5 % z 30?

2. Čerstvý chlieb obsahuje 36 % vody. Koľko kg vody obsahuje peceň, ktorého hmotnosť je 1,3 kg?

3. V triede je 32 žiakov. Koľko žiakov chýbalo na vyučovaní, ak neprítomných bolo 12,5 %?

4. Doplňte do rámčeka chýbajúci údaj:
a) 10% z $\square$ je 8,4 b) 15 % z $\square$ je 1,05

5. Rodina minie mesačne za potraviny 5 120 Sk, čo je 40 % ich mesačného príjmu. Koľko korún zostane na ostatné výdavky?

6. Juraj má našetrených 864 Sk. Vypočítal, že je to 72 % z ceny novej CD-hry. Koľko stojí hra?

7. Koľko percent predstavuje: a) 28 Sk z 50 Sk b) 3 cm z 12 dm

8. Zo 76 účastníkov vodičského kurzu bolo v autoškole 19 žien. Koľko je to percent?

9. 1 kg morskej vody obsahuje 25 g soli.
a) Koľko je to percent?
b) Koľko kg morskej vody treba na získanie 1 kg morskej soli?

10. Závod na výrobu elektrických ohrievačov vody vyrobil a predal 85 000 kusov svojich výrobkov. Z nich 22 000 našlo odbyt v SR, dvakrát toľko v ČR a zvyšok v krajinách Európy,
a) Doplňte tabuľku:

	Počet kusov	%
SR	22 000	
ČR		
Európa		
Spolu	85 000	

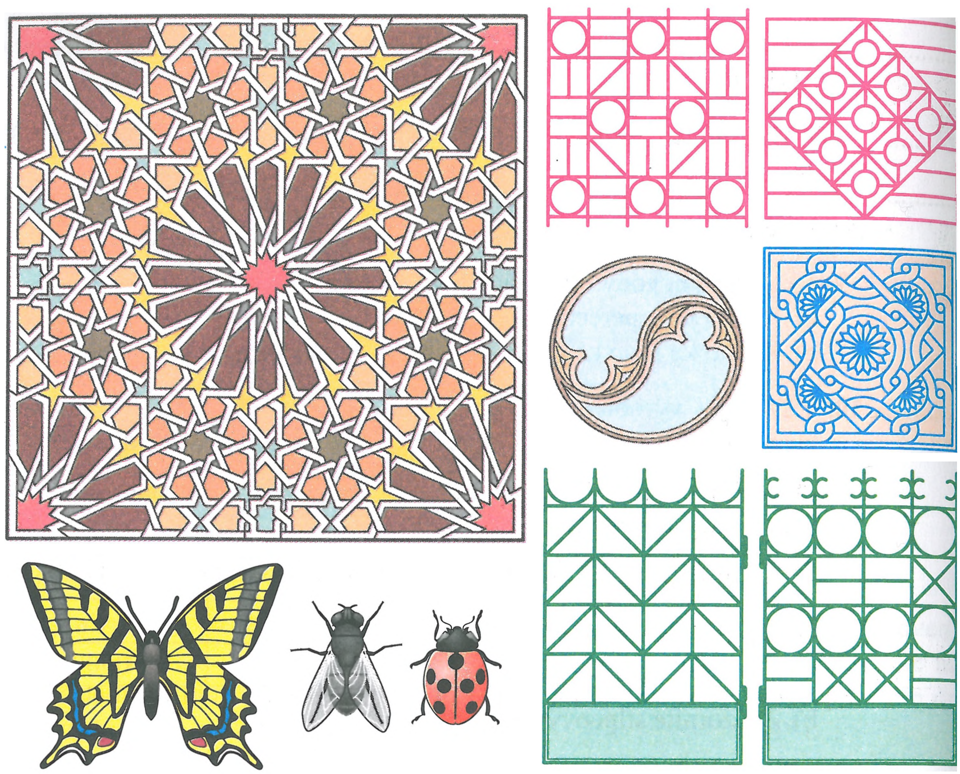
b) Znázornite stĺpcovým diagramom.

Joseph Louis Lagrange
(25. 1. 1736 až 10. 4. 1813)

Francúzsky matematik, fyzik a astronóm. Bol členom Parížskej akadémie vied. Dosiahol pozoruhodné výsledky v matematike (vo variačnom počte), mechanike a sférickej astronómii. Rozriešil mnohé problémy, ktorými sa zaoberali Euler, Newton, Bernoulli.

10 STREDOVÁ A OSOVÁ SÚMERNOSŤ

Pozorne si prezrite obrázky.

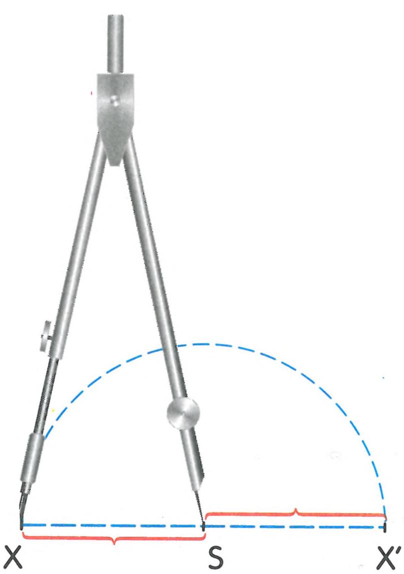


Páčia sa vám? Prečo?

10.1 Stredová súmernosť

Všimnite si obrázok, na ňom možno pozorovať jav, ktorý nazývame stredová súmernosť. Geometricky ho možno popísať takto: Zvoľme si ľubovoľný bod S. Ku každému bodu X rôznemu od bodu S zostrojme bod X' tak, že bod S je stredom úsečky XX'.

S - stred súmernosti
X - vzor
X' - obraz
$SX \cong SX'$
$|SX| = |SX'|$



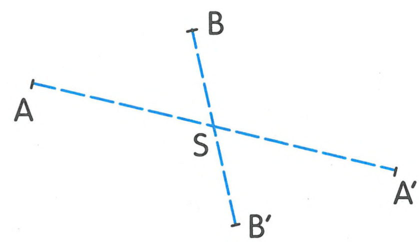
Stredová súmernosť v rovine je určená bodom S - stredom súmernosti.
Dva body X, X' nazývame súmerné podľa stredu S,
ak bod S je stredom úsečky XX'.
Bod X je vzor a bod X' je obraz v stredovej súmernosti.

PRÍKLAD 1

Dané sú tri body A, B, S. Zostrojte obrazy A', B' bodov A, B v súmernosti podľa stredu S.

RIEŠENIE

A, B ... dané body, vzory
S ... stred súmernosti
A', B' ... obrazy

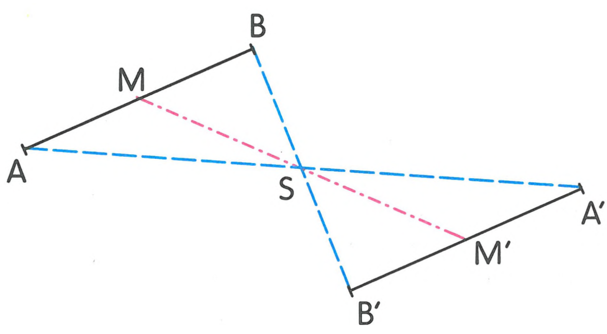


1. Zostrojíme polpriamku AS.
2. Zostrojíme bod $A' \in \overrightarrow{AS}$ tak, že $|SA| = |SA'|$. Polpriamky SA, SA' sú opačné.
3. Zostrojíme polpriamku BS.
4. Zostrojíme bod $B' \in \overrightarrow{BS}$ tak, že $|SB| = |SB'|$. Polpriamky SB, SB' sú opačné.

ÚLOHA 1

V príklade 1 sme zostrojili obrazy A', B' bodov A, B. Zostrojte v stredovej súmernosti obraz $A'B'$ úsečky AB. Charakterizujte útvar $A'B'$.

Obrazom úsečky je v stredovej súmernosti úsečka s ňou zhodná a rovnobežná.



$AB \parallel A'B'$
$AB \cong A'B'$
$M \in AB \Rightarrow M' \in A'B'$

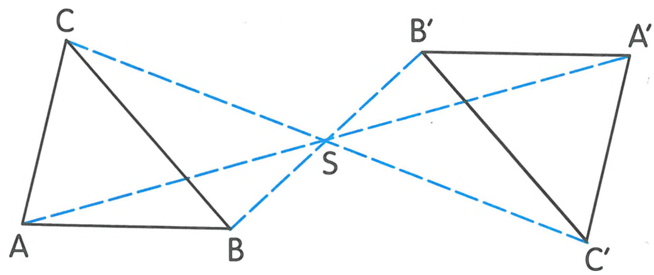
ÚLOHA 2

Čo je obrazom priamky p v súmernosti podľa stredu S? Popíšte vzájomnú polohu útvarov p a p'.

PRÍKLAD 2

Daný je trojuholník ABC a bod S, ktorý leží mimo neho. Zostrojte útvar $A'B'C'$, ktorý je obrazom trojuholníka ABC v stredovej súmernosti so stredom S. Pomocou priesvitky zistite, či útvary ABC a $A'B'C'$ sú zhodné.

RIEŠENIE



1. Postupujeme ako v príklade 1. Postupne zostrojíme obrazy A', B', C' bodov A, B, C. Trojuholník ABC sa zobrazil do trojuholníka $A'B'C'$.
2. Na priesvitku prenesieme trojuholník ABC a jej premiestnením sa presvedčíme, že trojuholník ABC na priesvitke a trojuholník $A'B'C'$ sa kryjú, teda sú zhodné.

PROBLÉM

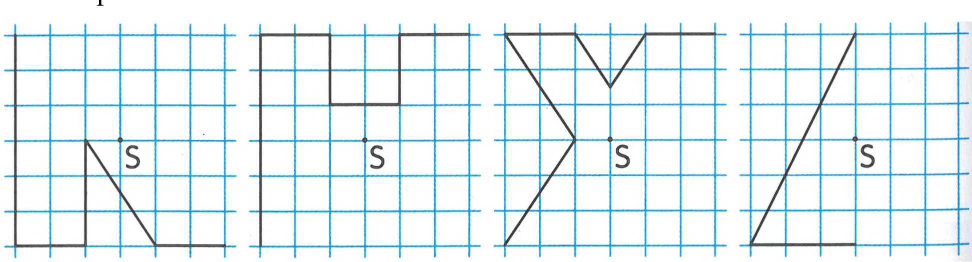
Peter pripomína: O zhodnosti trojuholníkov ABC a $A'B'C'$ sa môžeme presvedčiť aj bez prenášania trojuholníka pomocou priesvitky. Zvedavá Marienka ho hneď vyzýva: Ukáž nám ako!

RIEŠENIE

Peter hovorí a píše: Vieme, že v stredovej súmernosti sa úsečka AB zobrazí do úsečky $A'B'$, ktorá je s ňou zhodná, teda $AB \cong A'B'$.
Analogicky aj $BC \cong B'C'$ a $AC \cong A'C'$. Podľa vety *sss* je $\Delta\ ABC \cong \Delta\ A'B'C'$.

ÚLOHA 3

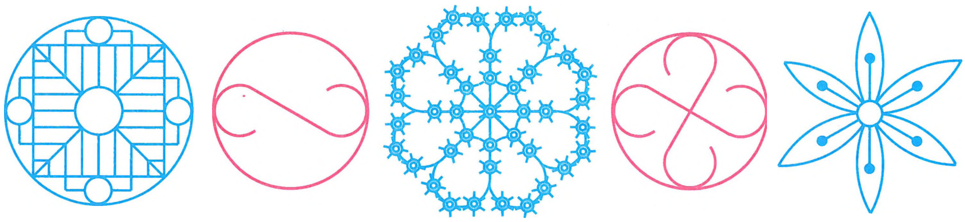
Prekreslite lomené čiary v štvorcovej sieti do zošita a zostrojte útvary k nim súmerné podľa stredu S.



V každom obrázku ste získali útvar, ktorý má tú vlastnosť, že každému jeho bodu v stredovej súmernosti podľa stredu ***S*** odpovedá bod toho istého útvaru.

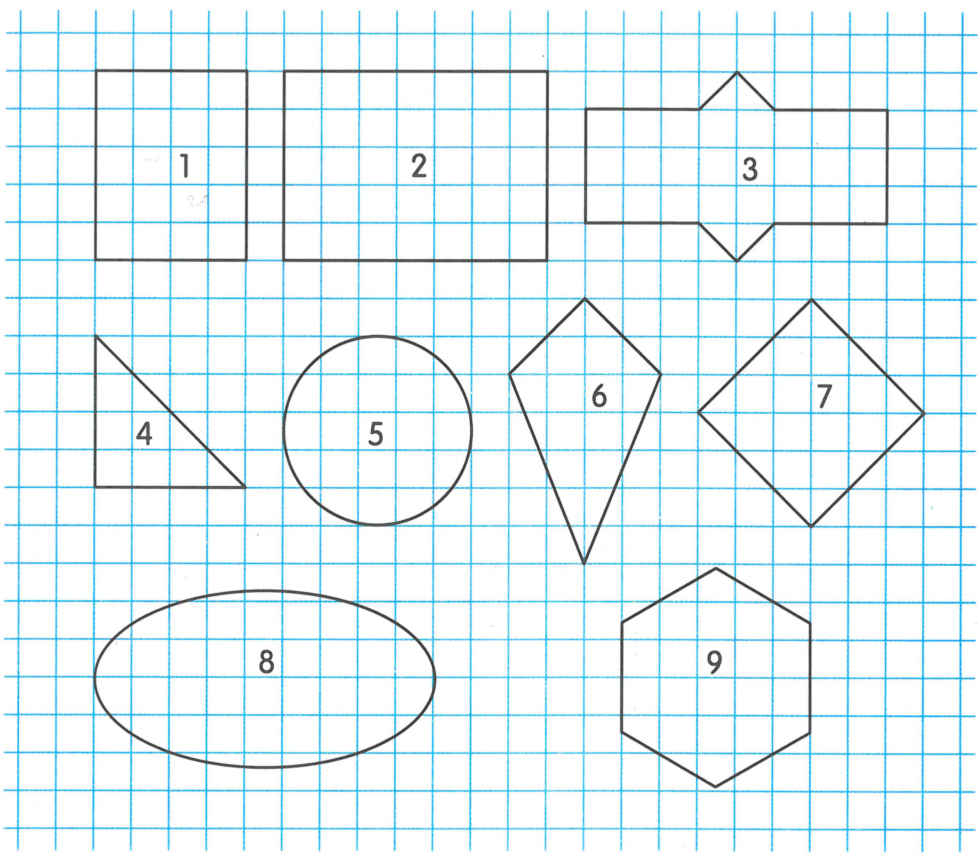
Bod S nazývame stredom súmernosti útvaru U, ak každému bodu útvaru U v stredovej súmernosti podľa stredu S odpovedá bod tohto útvaru U. Takémuto útvaru hovoríme, že je stredovo súmerný (alebo súmerný podľa stredu).

Na obrázku vidíte stredovo súmerné útvary.



ÚLOHA 4

Sú všetky útvary narysované na obrázku súmerné podľa stredu? V útvaroch súmerných podľa stredu nájdite stred súmernosti.

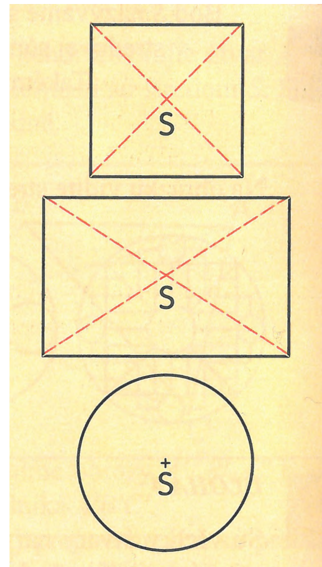


NEPAMÄTAJTE SI

Štvorec je stredovo súmerný.
Stred súmernosti je priesečník uhlopriečok:

Obdĺžnik je stredovo súmerný.
Stred súmernosti je priesečník uhlopriečok:

Kruh je stredovo súmerný.
Stred súmernosti je stred kruhu:

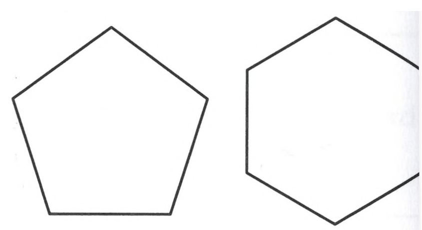


ÚLOHA 5

Narysujte ľubovoľný rovnostranný trojuholník. Rozhodnite, či útvar s ním stredovo súmerný je tiež rovnostranný trojuholník.

ÚLOHA 6

Na obrázku je narysovaný pravidelný päťuholník a pravidelný šesťuholník. Rozhodnite, ktorý z daných mnohouholníkov je stredovo súmerný. Svoje tvrdenie odôvodnite.



Pravidelný mnohouholník s párnym počtom vrcholov je stredovo súmerný (štvorec, pravidelný šesťuholník atď.)
Pravidelný mnohouholník s nepárnym počtom vrcholov nie je stredovo súmerný (rovnostranný trojuholník, pravidelný päťuholník atď.)

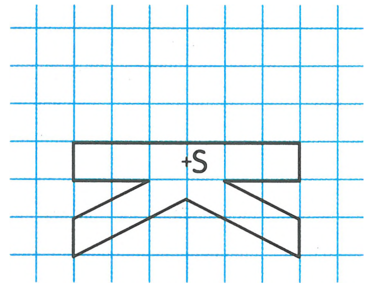
CVIČENIA

1. Nakreslite štvorec *ABCD.* Zostrojte jeho obraz v stredovej súmernosti so stredom v bode *B.*

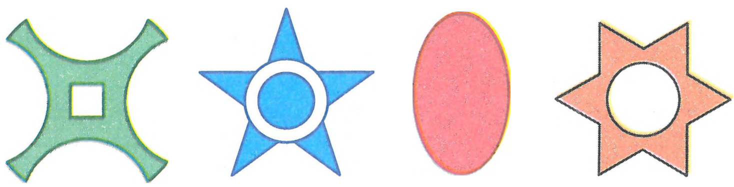
2. Daná je úsečka *AB,* Nájdite stred *S* stredovej súmernosti tak, aby bod *B* bol obrazom bodu *A.*

3. Ktoré z nasledujúcich útvarov sú stredovo súmerné:
a) úsečka, b) polpriamka, c) priamka.

4. V štvorcovej sieti je nakreslený útvar. Prekreslite si ho do zošita a zostrojte jeho obraz v stredovej súmernosti podľa vyznačeného stredu.

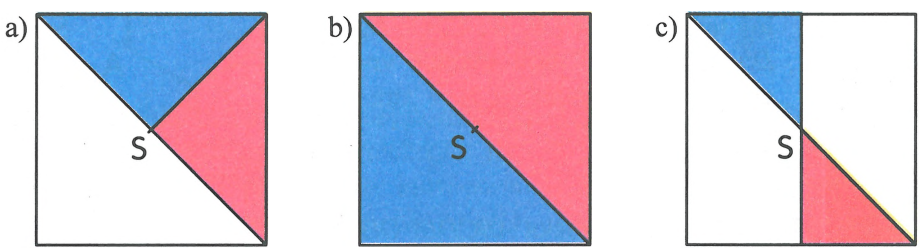


5. Pomocou priesvitky zistite, ktoré z nasledujúcich útvarov sú stredovo súmerné:

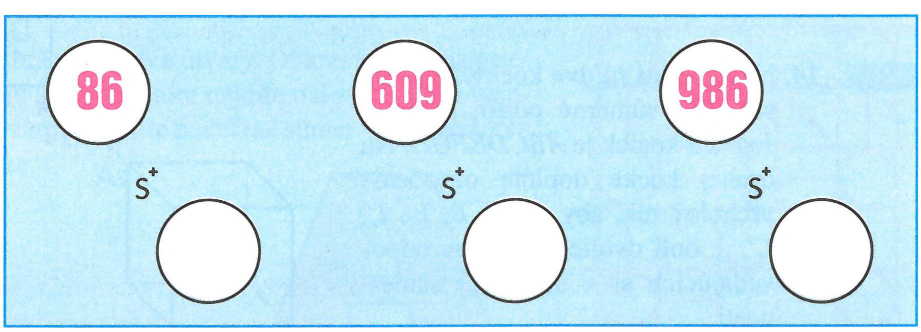


6. Sú dané dve kružnice $k_1(S_1, 3\text{ cm})$ a k_2 $(S_2, 3\text{ cm})$, $|S_1S_2| = 4\text{ cm}$. Nájdite stred súmernosti týchto kružníc.

7. Na každom z troch obrázkov sú dva útvary, jeden modrý a druhý červený. Zistite, či sú tieto útvary súmerné podľa stredu ***S***.



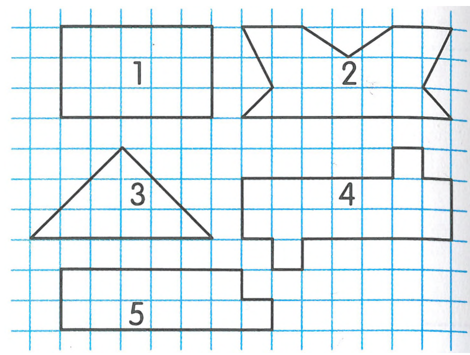
8. Na obrázku sú čísla 86, 609, 986. Ďalej je vyznačený stred a kruh. Pred nakreslením obrazov daných čísel v stredovej súmernosti s danými stredmi určte čísla, ktoré budú obrazmi daných čísel.



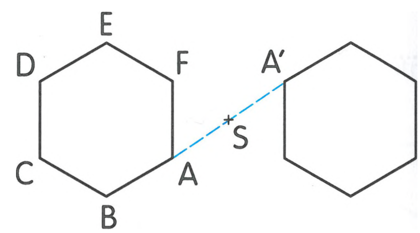
9. Rozhodnite, ktoré tvrdenie je správne: Ak tri body *A, B, C* neležia na jednej priamke, potom body *A', B', C'* s nimi súmerné podľa ľubovoľného stredu:
   a) ležia na jednej priamke,
   b) neležia na jednej priamke,
   c) splývajú v jednom bode.

10. Daný je rovnoramenný trojuholník *ABC,* v ktorom $|AB| = |BC| = 11{,}4$ cm, $|AC| = 4$ cm. Vypočítajte obvod trojuholníka *A'B'C',* ktorý je súmerný s daným trojuholníkom *ABC,* keď stred súmernosti je bod *A.*

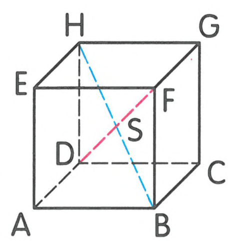
11. Ktoré z útvarov na obrázku majú stred súmernosti?



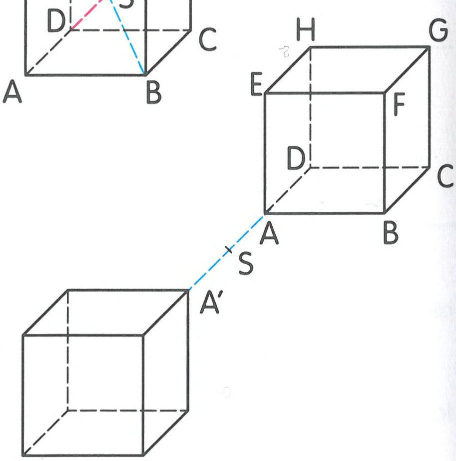
12. Na obrázku sú dva mnohouholníky, ktoré sú stredovo súmerné podľa stredu *S.* Jeden z nich je *ABCDEF.* Na druhom mnohouholníku doplňte označenie vrcholov tak, aby *A, A'; B, B'; C, C'; D, D'; E, E'; F, F'* boli dvojice vrcholov odpovedajúcich si v stredovej súmernosti.



R 13. Na obrázku je kocka *ABCDEFGH* a jej stred *S.* Napíšte dvojice vrcholov, ktoré si odpovedajú v stredovej súmernosti so stredom *S.*

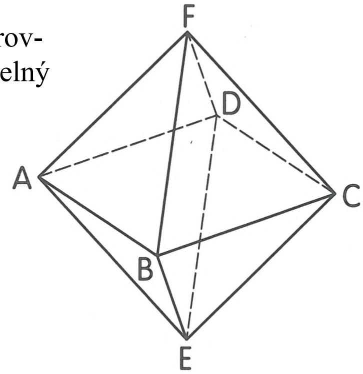


R 14. Na obrázku sú dve kocky, ktoré sú stredovo súmerné podľa bodu *S.* Jedna z kociek je *ABCDEFGH.* Na druhej kocke doplňte označenie vrcholov tak, aby *A, A'; B, B', C, C',* ... boli dvojice vrcholov odpovedajúcich si v stredovej súmernosti.



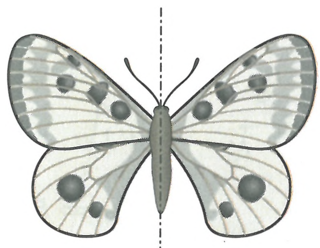
R

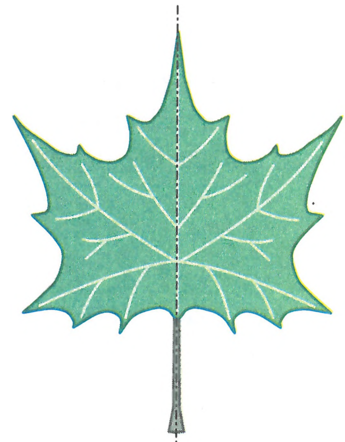
Na obrázku je útvar, ktorého každá stena je rovnostranný trojuholník (nazývame ho pravidelný osemsten). Je tento útvar stredovo súmerný?



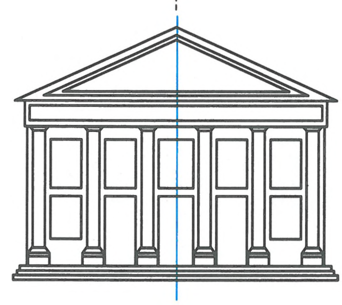
10.2 Osová súmernosť

Všimnime si obrázok motýľa a obrázok listu.



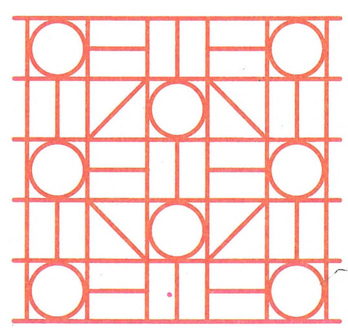


Priložme priesvitku a obkreslime obraz motýľa. Preložme priesvitku tak, aby sa preložením rozdelil obkreslený motýľ na dve časti, ktoré sa po preložení kryjú. Týmto preložením sme na priesvitke vyznačili priamku, ktorú nazývame osou súmernosti. Útvar, ktorý má os súmernosti, nazývame **osovo súmerný.**



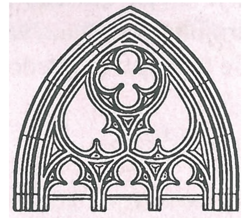
ÚLOHA 1

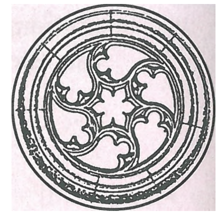
Na obrázku sú dva útvary. Obkreslite ich na priesvitku a jej zložením nájdite osi súmernosti týchto útvarov a zistite počet osí súmernosti v každom útvare.



ÚLOHA 2

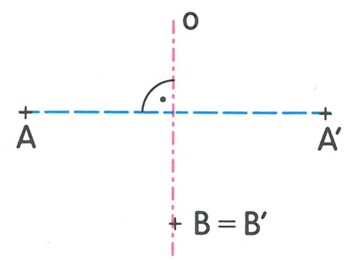
Na obrázku sú dva útvary. Zistite, ktorý z útvarov má stred súmernosti a ktorý os súmernosti.





Osovo súmerný útvar sa skladá z dvoch zhodných častí oddelených priamkou - osou súmernosti.

V predchádzajúcich úlohách sme si mohli pri preložení priesvitky všimnúť, že bod jednej časti útvaru sa kryl s bodom druhej časti útvaru. Po vyrovnaní priesvitky môžeme vidieť situáciu, ktorú geometricky môžeme znázorniť takto:



$A \notin o$ — A – vzor

$AA' \perp o$ — A' – obraz

o – os súmernosti

$B \in o \Rightarrow B = B'$ – samodružný bod

Osová súmernosť v rovine je určená priamkou o - osou súmernosti
Pre obraz A' ľubovoľného bodu A roviny platí:
a) Ak A neleží na osi o, potom priamka AA' je kolmá na os o a stred úsečky AA' leží na osi o.
b) Ak B leží na osi o, potom B' splýva s B. Bod B sa nazýva **samodružný bod.**
Body A a A' sa nazývajú súmerne združené podľa osi o alebo **osovo súmerné.**

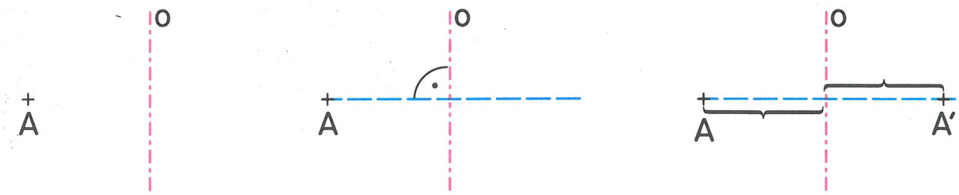
PRÍKLAD 1

V rovine je daná priamka o a bod A, ktorý na nej neleží. Zostrojte bod A', ktorý je s bodom A súmerne združený podľa osi o.

RIEŠENIE

Priamka o je osou úsečky AA', preto bod A' leží na polpriamke so začiatkom v bode A, ktorá je kolmá na os o. Zároveň priesečník tejto polpriamky s osou o

je stredom úsečky AA'. Pozorujme obrázky a postup použime v zošite pri zostrojení bodu A'.

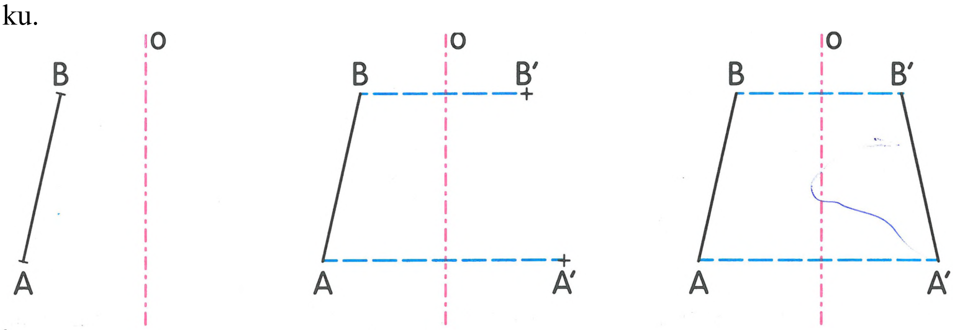


PRÍKLAD 2

Daná je úsečka AB a os o. Zostrojte obraz $A'B'$ úsečky AB v osovej súmernosti podľa osi o.

RIEŠENIE

Postupne využijeme postup uvedený v príklade 1. Konštrukciu vidíme na obrázku.

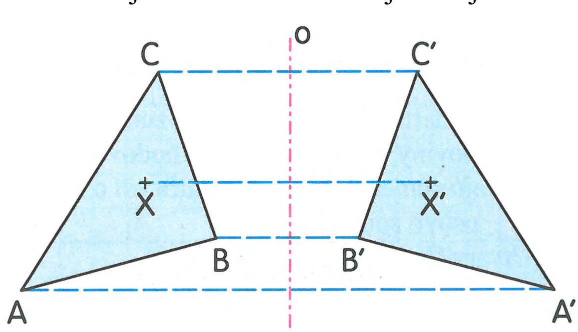


PRÍKLAD 3

Daný je trojuholník ABC a os o. Zostrojte obraz $A'B'C'$ trojuholníka ABC v osovej súmernosti danej osou o.

RIEŠENIE

V osovej súmernosti je bod A' obrazom vrchola A, bod B' obrazom vrchola B a C' je obrazom vrchola C. Podobnú vlastnosť má aj bod X', ktorý je obrazom bodu X trojuholníka ABC v danej osovej súmernosti.



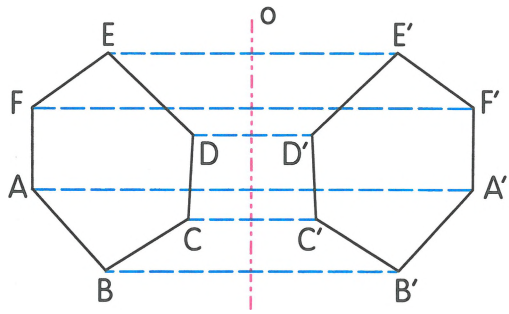
Obraz $A'B'C'$ trojuholníka ABC obsahuje obrazy všetkých bodov trojuholníka ABC a žiadne iné.

PROBLÉM

Marienka sa pýta: Ako zostrojíme obraz ľubovoľného mnohouholníka v osovej súmernosti?

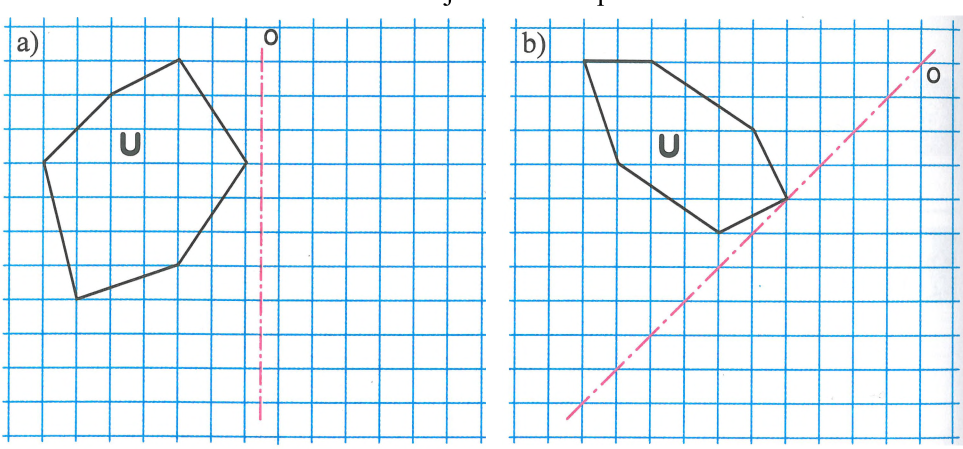
RIEŠENIE

Rieši Miško, hovorí: Každý mnohouholník možno rozdeliť na neprekrývajúce sa trojuholníky. Mohli by sme zostrojovať postupne obrazy týchto trojuholníkov, to už vieme. Môžeme však postup skrátiť, zostrojíme obrazy všetkých vrcholov mnohouholníka a potom ich v správnom poradí pospájame úsečkami. Miško to aj narysoval.



VLOHA 3

Prekreslite mnohouholník **U** a os o na štvorčekovaný papier podľa obrázkov. Nakreslite obraz **U'** útvaru **U** v osovej súmernosti podľa osi *o*.



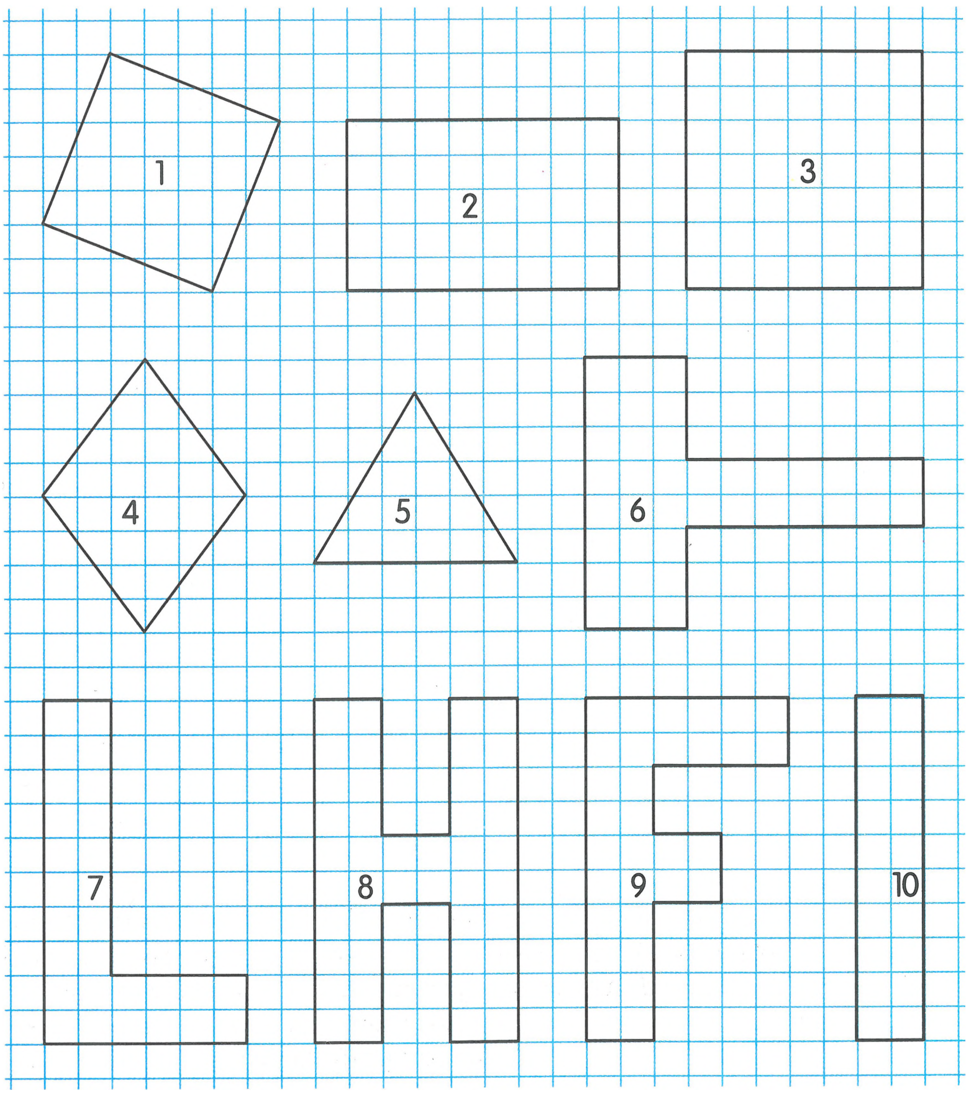
Obrazom útvaru **U** v osovej súmernosti danej osou o rozumieme útvar **U'** obsahujúci práve tie body roviny, ktoré sú obrazmi bodov útvaru U.
Útvary **U** a **U'** sa nazývajú súmerne združené podľa osi o alebo osovo súmerné.
Útvary **U** a **U'** sú zhodné.

V úvodnej časti osovej súmernosti sme sa oboznámili s útvarmi, ktoré sú osovo súmerné. Čo to znamená?

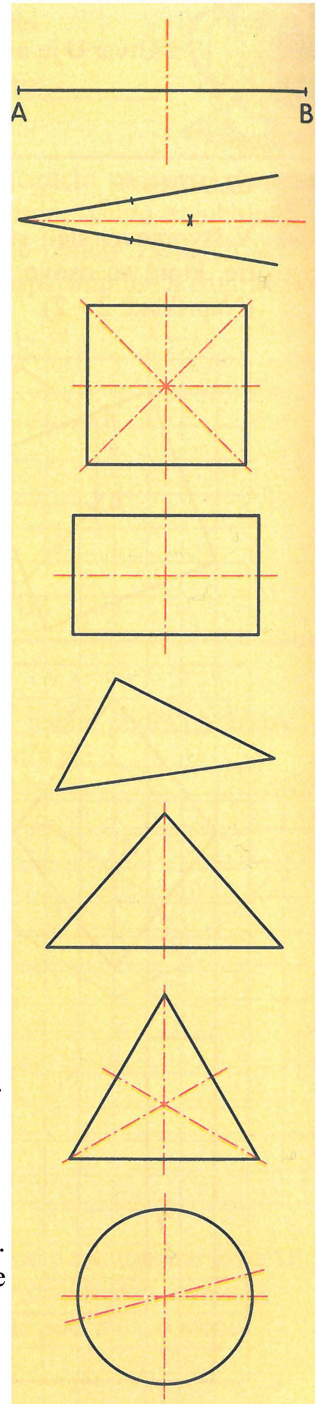
Útvar **U** je **osovo súmerný** podľa osi o, ak jeho obraz **U'** v osovej súmernosti danej osou ***o*** splýva s útvarom **U.**

ÚLOHA 4

V štvorcovej sieti sú nakreslené útvary, sú očíslované číslami 1 až 10. Vypíšte tie, ktoré sú osovo súmerné. Ku každému číslu pripíšte počet osí súmernosti. (Napríklad: 2 - 2).



NEPAMÄTAJTE SI



Úsečka má jednu os súmernosti.

Uhol má jednu os súmernosti.

Štvorec má štyri osi súmernosti.

ObdĺÍžnik má dve osi súmernosti

Rôznostranný trojuholník nemá os súmernosti.

Rovnoramenný trojuholník má jednu os súmernosti.

Rovnostranný trojuholník má tri osi súmernosti.

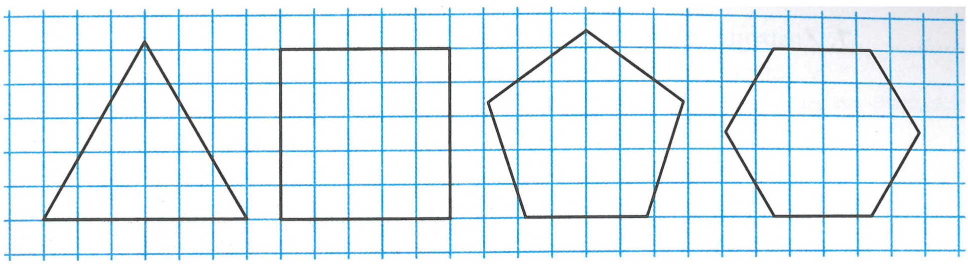
Kruh má nekonečne mnoho osí súmernosti. Každá priamka prechádzajúca stredom kruhu je jeho osou súmernosti.

ÚLOHA 5

Na obrázku sú nakreslené pravidelné útvary: rovnostranný trojuholník, štvorec, pravidelný päťuholník a pravidelný šesťuholník. Každý z nich má osi súmernosti. Určte ich počet. Načrtnite si obrázok každého útvaru a vyznačte osi súmernosti a sformulujte tvrdenie o určenosti osi súmernosti v mnohouholníkoch

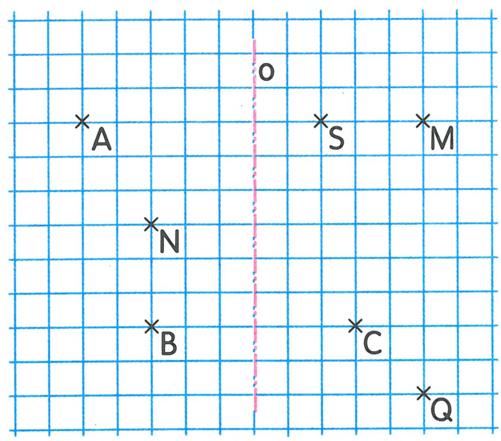
a) s párnym počtom vrcholov,

b) s nepárnym počtom vrcholov.



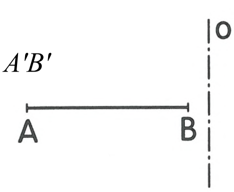
CVIČENIA

1. Ktoré z bodov *M, N, C, Q, S* zobrazené v štvorcovej sieti sú súmerné podľa osi *o* s bodom
   a) *A,* b) *B?*



2. Môžu byť body *A, A′* súmerne združené podľa osi *o,* ak ich vzdialenosti od osi *o* sú:
   a) 4 cm a 6 cm,
   b) 7 cm a 7 cm,
   c) 11,3 cm a 11,4 cm?

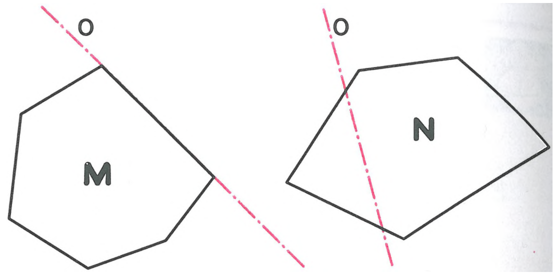
3. Daná je úsečka *AB* a os *o*. Zostrojte obraz *A′B′* úsečky *AB* v osovej súmernosti s osou *o*.



4. Dané sú body *A, A′*. Zostrojte os *o* osovej súmernosti, v ktorej sú *A* a *A′* súmerne združené body.

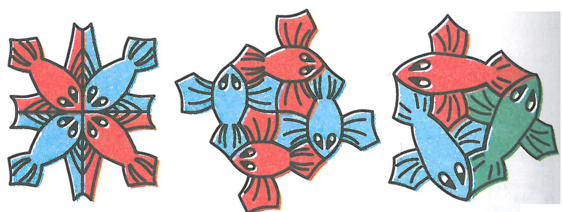
5. Narysujte pravidelný šesťuholník a zvoľte si ľubovoľnú priamku *o*. Zostrojte obraz daného šesťuholníka v osovej súmernosti s osou *o*.

6. Prekreslite na štvorčekovaný papier a zostrojte obrazy mnohouholníkov **M, N** v osovej súmernosti danej osou *o*.

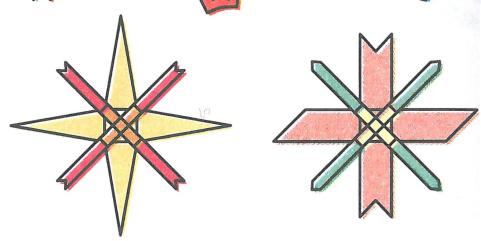


7. Zostrojte obraz slova MAT v osovej súmernosti danej osou *o*.

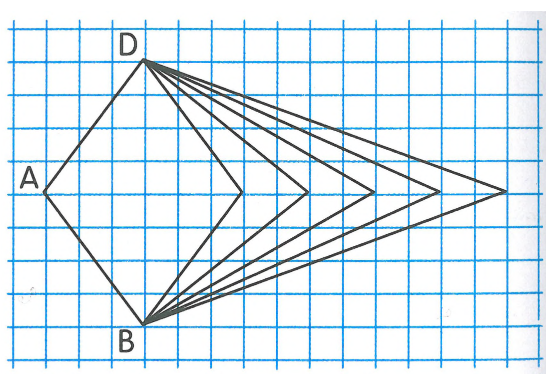
8. Na obrázkoch sú ornamenty zložené z rybičiek. Určte, ktorý z obrázkov je
   a) stredovo súmerný,
   b) osovo súmerný.



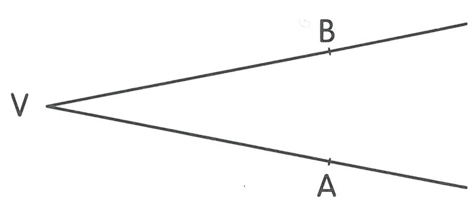
9. Sú útvary na obrázku súmerné? Určte, ktorý z nich je
   a) stredovo súmerný,
   b) osovo súmerný (určte počet osí súmernosti).



10. V štvorcovej sieti sú znázornené obrazce. Doplňte v nich vrchol C tak, aby obrazec $ABCD$ bol osovo súmerný
    a) s jednou osou súmernosti,
    b) s dvoma osami súmernosti.



11. Polpriamka VA je obrazom polpriamky VB v osovej súmernosti s neznámou osou. Ako túto os zostrojíte?

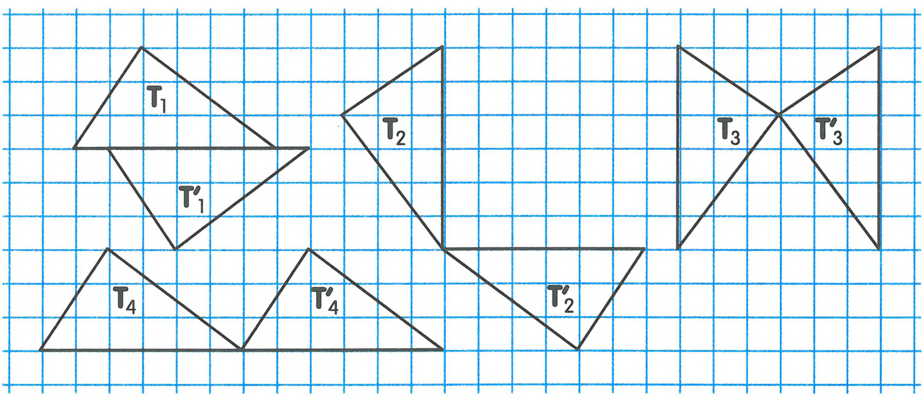


12. Body A_1, B_1, C_1 sú súmerne združené s vrcholmi trojuholníka ABC podľa osi o. Vypočítajte obvod trojuholníka $A_1B_1C_1$, ak $|AB| = 4{,}5$ cm, $|BC| = 5{,}5$ cm, $|CA| = 8$ cm.

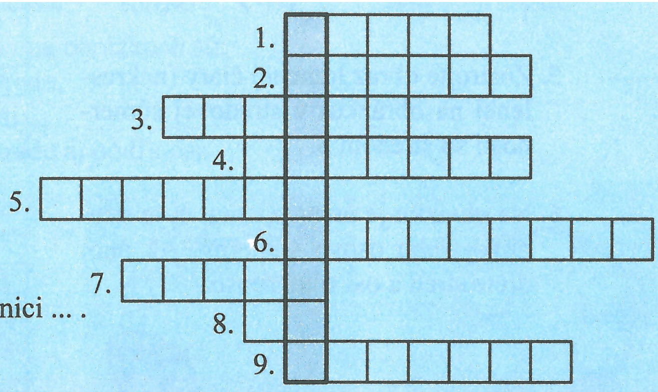
13. Narysujte nepravidelný šesťuholník, ktorý má dve osi súmernosti.

14. Zostrojte obraz obdĺžnika $ABCD$ ($|AB| = 6$ cm, $|BC| = 4$ cm) v osovej súmernosti s osou o, ktorá:
   a) má s obdĺžnikom spoločný jediný bod - vrchol D,
   b) pretína strany AB, BC vo vnútorných bodoch,
   c) prechádza vrcholmi A a C.

15. Rozhodnite, ktoré zhodné trujuholníky $\mathbf{T}_i$ a $\mathbf{T'}_i$ (kde $i = 1, 2, 3, 4$) na obrázku sú súmerne združené podľa nejakej osi.



16. Riešte krížovku:



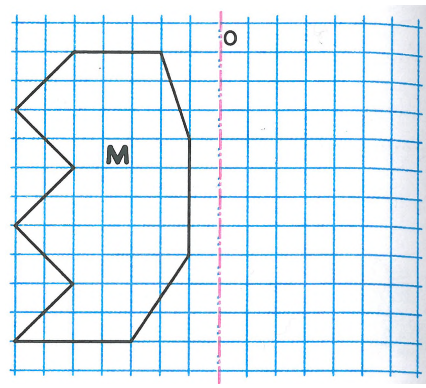
1. Bod S je v kružnici ... .
2. AB je ... .
3. Číslo $\frac{1}{2}$ je ... .
4. Dvojbodkou označujeme počtový výkon ... .
5. Písmenom r označujeme v kružnici ... .
6. Bodkou označujeme počtový výkon ... .
7. 55 je ... .
8. Priamka o je v osovej súmernosti ... .
9. Bod T je v trojuholníku ... .

VYSKÚŠAJTE SA !

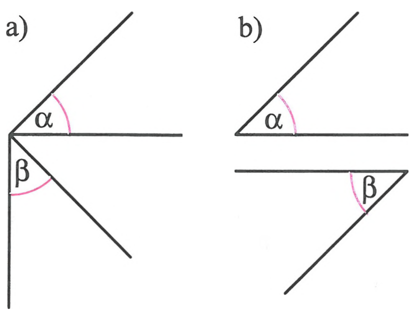
1. Narysujte ľubovoľný štvorec *ABCD*. Zostrojte jeho obraz v stredovej súmernosti so stredom v bode *D*.

2. Narysujte kružnicu *k*(*S*, 3 cm) a priamku *o*, ktorá ju nepretína. Zostrojte jej obraz v osovej súmernosti s osou *o*.

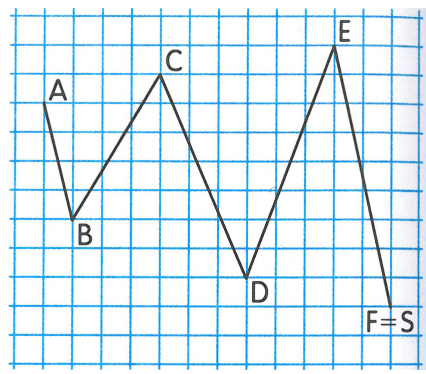
3. Prekreslite nasledujúci obrázok na štvorčekovaný papier a nakreslite obraz mnohouholníka **M** osovo súmerný podľa vyznačenej osi *o*.



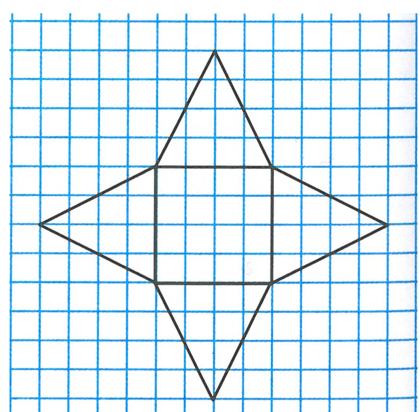
4. Narysujte dva uhly *α* a *β* s veľkosťou 45° (ako na obrázkoch). Je uhol *P* súmerne združený s uhlom *α* podľa nejakej osi? Ak áno, narysujte túto os.



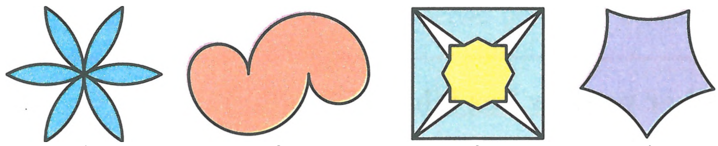
5. Zostrojte obraz lomenej čiary (nakreslenej na obrázku) v stredovej súmernosti so stredom *S*.



6. Na obrázku je útvar. Zistite, či je stredovo alebo osovo súmerný. Ak áno, určte stred a osi súmernosti.



7. Z útvarov na obrázku vyberte tie, ktoré sú:
   a) stredovo súmerné, b) osovo súmerné, c) stredovo aj osovo súmerné.

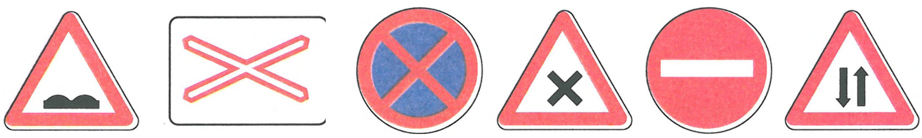


1 2 3 4

8. Nakreslite aspoň dva rôzne útvary, ktoré sú stredovo súmerné.

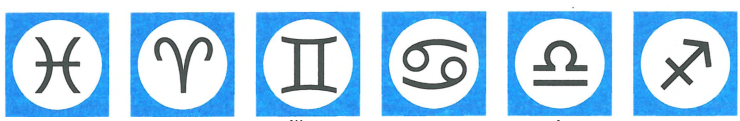
9. Napíšte aspoň tri veľké tlačené písmená slovenskej abecedy, ktoré sú osovo súmerné.

10. Na obrázku sú dopravné značky. Určte, ktoré z nich sú:
    a) osovo súmerné, b) stredovo súmerné.



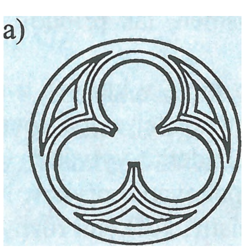
1 2 3 4 5 6

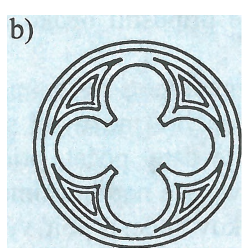
11. Na obrázkoch sú symboly znamení. Sú tieto symboly osovo alebo stredovo súmerné?

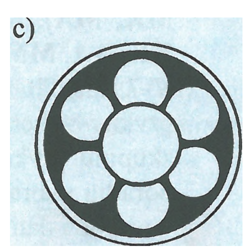


RYBY BARAN BLÍŽENCI RAK VÁHY STRELEC

12. Určte, ktoré z útvarov na obrázkoch sú:
    a) súmerné podľa stredu,
    b) súmerné podľa osi,
    c) súmerné podľa stredu aj podľa osi.







Najvyšším dobrom v živote je pokojná a veselá myseľ.

J. A. Komenský

11 KOMBINATORIKA

11.1 Výber prvkov bez ich usporiadania

V 6. ročníku sme riešili len také úlohy, v ktorých sme z daného počtu prvkov (cifier, písmen atď.) vybrali všetkými možnými spôsobmi menej alebo rovnako početnú skupinu prvkov ako je daný počet a vytvorili sme ich všetky možné usporiadania. Keď sme vybrali všetky prvky a usporiadali sme ich všetkými možnými spôsobmi, v tom prípade sme nepripustili opakovanie týchto prvkov. Riešili sme úlohy napríklad na vytváranie všetkých trojciferných čísel z cifier **1, 3, 5** bez opakovania cifier a dostali sme týchto 6 riešení:

135 315 513
153 351 531

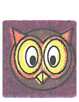
Ďalej sme riešili úlohy na vytváranie skupín prvkov s menším počtom ako je daný počet prvkov, pričom sme pripustili aj prípad, že sa prvky môžu opakovať. Riešili sme úlohy napríklad na vytváranie všetkých monogramov z písmen **K, A, M** tak, že písmená a) sa nemohli opakovať,
b) sa mohli opakovať.

V prvom prípade riešenie je: **KA AK MK**
KM AM MA

v druhom prípade: **KK AK MK**
KA AA MA
KM AM MM

Ako vidieť, z troch písmen sme vybrali všetkými možnými spôsobmi dve písmená **(KA, KM, AM),** ktoré sme všetkými možnými spôsobmi usporiadali **(AK, MK, MA).** Keď sme pripustili opakovanie písmen, tak pribudli ešte dvojice: **KK, AA, MM.**

V 7. ročníku sa oboznámime s riešením takých úloh, v ktorých z daného počtu prvkov vyberieme všetkými možnými spôsobmi menej alebo rovnako početnú skupinu prvkov ako je daný počet, pričom nebudeme vytvárať všetky možné poradia vybratých prvkov a nepripustíme ani opakovanie prvkov. Našou úlohou v prípade daných prvkov bude, urobiť výber a zistiť, koľkými rôznymi spôsobmi možno takýto výber uskutočniť.



PRÍKLAD 1

Pred odchodom na prázdniny sa štyria spolužiaci rozlúčili vzájomným podaním rúk. Koľko je to podaní rúk?

RIEŠENIE

Pri riešení tejto úlohy sa pani učiteľka rozhodla úlohu zdramatizovať. K tabuli prišli najprv dvaja žiaci. Podali si ruky. Je to jedno podanie rúk. Karol sa snažil matematickú časť diania pred tabuľou zachytiť do tabuľky:

počet žiakov	2
počet podaní rúk	1

Potom k tabuli prišiel ďalší žiak, ktorý podal každému z dvoch žiakov ruku, čím celkový počet podania rúk vzrástol na tri a Karolova tabuľka vyzerá takto:

počet žiakov	2	3
počet podaní rúk	1	3

K tabuli pribehol ešte štvrtý žiak, ktorý podal ruku každému z troch žiakov, čím sa zvýšil celkový počet podaní rúk o tri, čo je celkom šesť podaní.

počet žiakov	2	3	4
počet podaní rúk	1	3	6

Odpoveď: Pred odchodom na prázdniny sa štyria spolužiaci rozlúčili šiestimi vzájomnými podaniami rúk.

ÚLOHA 1

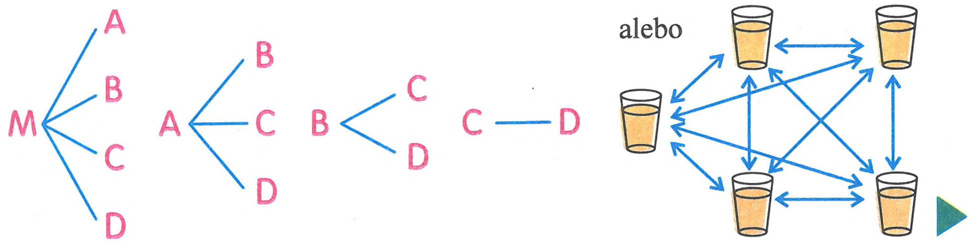
Podobnou úvahou zistite, koľko je podaní rúk, ak sa stretnú piati priatelia?

PRÍKLAD 2

Na Milkine meniny jej prišli zablahoželať štyri spolužiačky Alenka, Blanka, Cilka a Darinka. Na zdravie oslávenkyni si štrngli džúsom. Koľko štrngnutí bolo počuť, keď každá si štrngla s každou?

RIEŠENIE

Najprv zaveďme skratku na označenie jednotlivých priateliek: Milka **(M),** Alenka (**A**), Blanka **(B),** Cilka (**C**), Darinka **(D).** Priradené dvojice na stromovom grafe znázorňujú štrngnutie:



Zo znázornenia je zrejmé, že s Milkou si štrngli všetky štyri, s Alenkou si už Milka neštrngla, pretože už si raz štrngli, s ňou si štrngne Blanka, Cilka a Darinka, s Blankou si štrngli Cilka a Darinka, a napokon s Cilkou si štrngne len Darinka, lebo ostatné dievčatá si s ňou už štrngli.

Odpoveď: Počet všetkých štrngnutí je: $4 + 3 + 2 + 1 = 10$.

Milan uvažoval tak, že keby si každé z piatich dievčat štrnglo s ostatnými štyrmi, tak by to bolo $5 \,.\, 4 = 20$ štrngnutí a každá dvojica dievčat by štrngla 2-krát. Na tej istej oslave však nie je zvykom štrngnúť na zdravie 2-krát. Preto počet všetkých štrngnutí na zdravie bude:

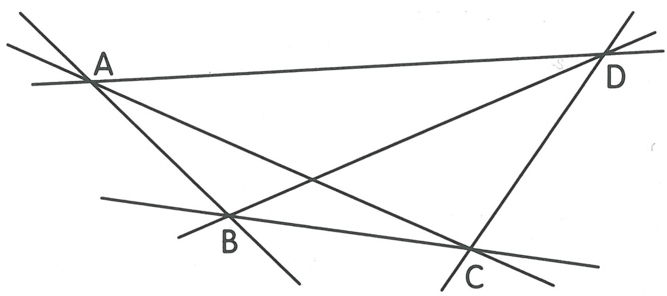
$$\frac{5\,.\,4}{2} = 10$$

PRÍKLAD 3

Koľko rôznych priamok určujú štyri rôzne body roviny, z ktorých žiadne tri neležia na jednej priamke. Zvoľte štyri body a narysujte tieto priamky.

RIEŠENIE

Označme zvolené body písmenami *A, B, C, D* ako je to na obrázku.



Odpoveď: Zvolené štyri body určujú týchto 6 priamok: *AB, AC, AD, BC, BD, CD.*

ÚLOHA 2

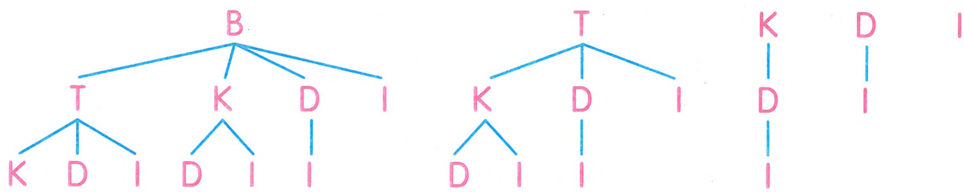
Koľko priamok určuje päť rôznych bodov roviny, z ktorých žiadne tri neležia na jednej priamke. Zvoľte päť bodov a narysujte tieto priamky.

PRÍKLAD 4

Tri kolá pred záverom futbalovej Superligy je už známe, že na prvých troch miestach sa môže umiestniť niektorá trojica z týchto piatich mužstiev: Slovan Bratislava (**B**), Spartak Trnava (**T**), 1. FC Košice (**K**), Dukla Trenčín (**D**), Inter Bratislava (**I**). Napíšte všetky možné trojice umiestnení mužstiev. Koľko je takýchto trojíc?

RIEŠENIE

Peter si zvolil riešenie s využitím znázornenia na stromovom grafe:



Z grafu mu vyplynulo, že prvé tri miesta môžu obsadiť tieto trojice mužstiev: **BTK, BTD, BTI, BKD, BKI, BDI, TKD, TKI, TDI, KDI.**

Odpoveď: Počet trojíc je 10.

Ondrej si zvolil iný postup: Vytvoril si tabuľku, v ktorej označil vždy tri vybrané mužstvá hviezdičkou:

B	*	*	*	*	*	*				
T	*	*	*				*	*	*	
K	*			*	*		*	*		*
D		*		*		*	*		*	*
I			*		*	*		*	*	*

Ondrejov postup bol tiež správny, dostal rovnaký výsledok ako Peter.

ÚLOHA 3

Karol dostal v poslednom štvrťroku tri rôzne známky z matematiky. Napíš, aké známky mohol dostať, ak a) vylúčime, že dostal päťku,
b) nevylúčime, že dostal päťku.

ÚLOHA 4

Soňa dostala za dobré vysvedčenie tieto knihy: Jakubko, Sobotné večery, Hrdinský zápisník, a Detská encyklopédia. Tri z nich prečítala ešte cez prázdniny. Napíšte všetky možné trojice kníh, ktoré mohla Zuzka cez prázdniny prečítať.

ÚLOHA 5

Do semifinále školského šachového turnaja sa prebojovali Kamil, Paľo, Vilo a Maroš. Každý hral s každým a zvíťazil ten, kto získal najviac víťazstiev.

a) Napíšte všetky odobraté zápasy medzi účastníkmi semifinále skratkou ich mien. Koľko zápasov odohrali?
b) Napíšte všetky trojice žiakov, ktorí mohli obsadiť prvé tri miesta.

CVIČENIA

1. Miško dostal na svoje narodeniny tri knižky: Africký zápisník, Šťastný princ a Prázdniny so strýcom Rafaelom. Rozhodol sa, že dve z nich za mesiac prečíta. Napíšte všetky možné dvojice kníh, ktoré Milan mohol za mesiac prečítať.

2. Ivan má 5 fixiek, z ktorých každá je inej farby: zelená, hnedá, modrá, červená a žltá. Napíšte koľkými spôsobmi môže:
   a) dve z nich darovať sestre,
   b) tri z nich darovať sestre,
   c) štyri z nich darovať sestre.

3. Zmrzlinár predáva päť druhov zmrzliny: jahodovú, banánovú, kakaovú, citrónovú a vanilkovú. Zuzka vždy kupuje z každého druhu len jednu porciu.
   a) Napíšte, koľko rôznych dvojitých zmrzlín si mohla kúpiť?
   b) Napíšte, koľko rôznych trojitých zmrzlín si mohla kúpiť?
   c) Napíšte, koľko rôznych štvoritých zmrzlín si mohla kúpiť.

4. Na jednom z typov cestovných lístkov mestskej dopravy sú cifry od 1 do 9 umiestnené do štvorčekových políčok, usporiadaných do tvaru 3 X 3. Strojček môže byť nastavený tak, že pri označení lístka urobí dierku do jedného, dvoch, troch alebo štyroch políčok. Nakreslite alebo napíšte a vypočítajte, koľkými rôznymi spôsobmi môže byť na lístku vyznačená:
   a) jedna dierka, b) dve dierky, c) tri dierky.

5. Koľko uhlopriečok má:
   a) štvoruholník, b) päťuholník, c) šesťuholník.

6. Vyznačte 6 rôznych bodov, z ktorých žiadne tri neležia na jednej priamke.
   a) Koľko rôznych priamok určuje týchto šesť bodov?
   b) Koľko rôznych trojuholníkov, ktorých vrcholy ležia v týchto bodoch, môžeme zostrojiť?

7. Dané sú číslice 2, 3, 5, 7, 9. Koľko dvojciferných a koľko trojciferných čísel možno z nich vytvoriť tak, že menšia cifra nemôže stáť za väčšou cifrou? Napíšte tieto čísla a bez delenia zistite, ktoré z nich sú deliteľné 5.

8. Koľkými rôznymi spôsobmi môže tréner hokejového mužstva vybrať zo šiestich útočníkov: a) dvoch, b) troch.

11.2 Ďalšie úlohy z kombinatoriky

Ďalej sa budeme zaoberať riešením iných typov úloh ako sme riešili doteraz. Postup riešenia týchto úloh má svoje spoločné znaky. Preto možno z týchto úloh triedením vytvoriť typové skupiny. V prvej skupine úloh, ktorou sa budeme zaoberať sú úlohy, ktoré vedú na súčin.

PRÍKLAD 1

Anička má bielu, zelenú a ružovú blúzku. Má aj tri sukničky: čiernu, modrú a vzorkovanú. Koľkorakým spôsobom si môže obliecť sukňu a blúzku?

RIEŠENIE

Úlohu môžeme riešiť aj s využitím tabuľky:

	Blúzky	biela	zelená	ružová
Sukne	čierna	čb	čz	čr
	modrá	mb	mz	mr
	vzorkovaná	vb	vz	vr

Z tabuľky je zrejmé, že Anička si ku každej sukni môže obliecť tri rôzne blúzky, to znamená, že celkom 3 . 3 = 9 rôznymi spôsobmi si môže obliecť blúzku a sukňu.

Odpoveď: Anička si môže 9 rôznymi spôsobmi obliecť blúzku a sukňu.

ÚLOHA 1

Andrej má tri rôzne košele: bielu, modrú, a zelenú. Vo svojej skrini má aj päť rôznych nohavíc: páskované, vzorkované, modré, fialové a béžové. Koľkorakým spôsobom si môže vybrať košeľu a nohavice?

ÚLOHA 2

Marienka sa môže 12 rôznymi spôsobmi obliecť tak, že bude mať oblečenú blúzku a sukničku. Koľko blúzok a sukničiek môže mať Marienka? Napíšte, ktoré prípady sú najviac možné a ktoré najmenej.

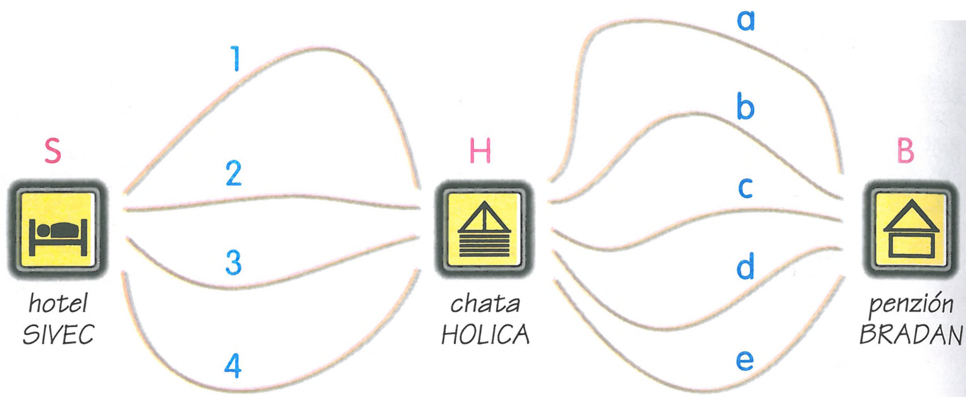
V ďalšej časti sa budeme zaoberať riešením takej skupiny úloh, v ktorých budeme zisťovať, koľkými rôznymi cestami sa možno dostať z určitého miesta na iné miesto tak, že medzitým prechádzame cez iné miesta, do ktorých je možné dostať sa niekoľkými cestami.

PRÍKLAD 2

Z hotela Sivec (**S**) na chatu Holiča (**H**) vedú štyri rôzne chodníky. Z chaty Holiča sa možno dostať do penzióna Bradan (**B**) piatimi rôznymi chodníkmi. Koľkými rôznymi chodníkmi sa možno dostať z hotela Sivec do penzióna Bradan cez chatu Holiča? Napíšte všetky cesty.

RIEŠENIE

Znázornime námet úlohy:



Označme jednotlivé chodníky z hotela Sivec na chatu Holiča číslicami 1, 2, 3, 4, jednotlivé chodníky z chaty Holiča do penzióna Bradan písmenami a, b, c, d, e. Ak z hotela Sivec na chatu Holiča dôjdeme prvým zo štyroch chodníkov, pokračovať môžeme ďalšími piatimi chodníkmi do penzióna Bradan. Podobne to platí aj pre druhý, tretí, štvrtý a piaty chodník, takže celkový počet ciest je:
$4 \cdot 5 = 20$.

Odpoveď: Z hotela Sivec do penzióna Bradan cez chatu Holiča sa možno dostať 20 rôznymi cestami. Jednotlivé cesty sú tieto: 1a, 1b, 1c, 1d, 1e, 2a,

ÚLOHA 3

Z mesta **A** do mesta **B** vedie päť ciest, z mesta **B** do mesta **C** tri cesty. Koľkými rôznymi cestami sa možno dostať z mesta **A** do mesta **C** cez mesto **B**?

ÚLOHA 4

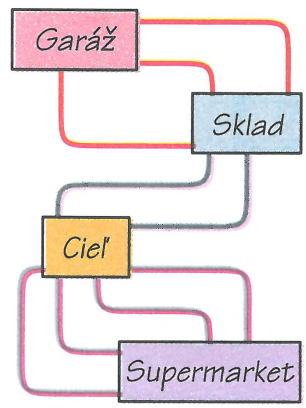
Z Košíc do Martina cez Levoču sa možno dostať 12 rôznymi cestami.

a) Koľkými rôznymi cestami sa možno dostať z Levoče do Martina, ak sa z Košíc do Martina možno dostať 3 rôznymi cestami?
b) Koľkými rôznymi cestami sa možno dostať z Košíc do Levoče, ak sa z Levoče do Martina možno dostať 2 rôznymi cestami?

PRÍKLAD 3

Šofér nákladného auta vychádza každé ráno z garáže. Do skladu sa môže dostať tromi rôznymi cestami. Zo skladu do obchodného domu Cieľ dvomi rôznymi cestami, z obchodného domu Cieľ do Supermarketu štyrmi rôznymi cestami. Koľkými rôznymi cestami sa môže dostať šofér nákladného automobilu:

a) Z garáže do obchodného domu Cieľ?
b) Zo skladu do Supermarketu?
c) Z garáže do Supermarketu?



RIEŠENIE

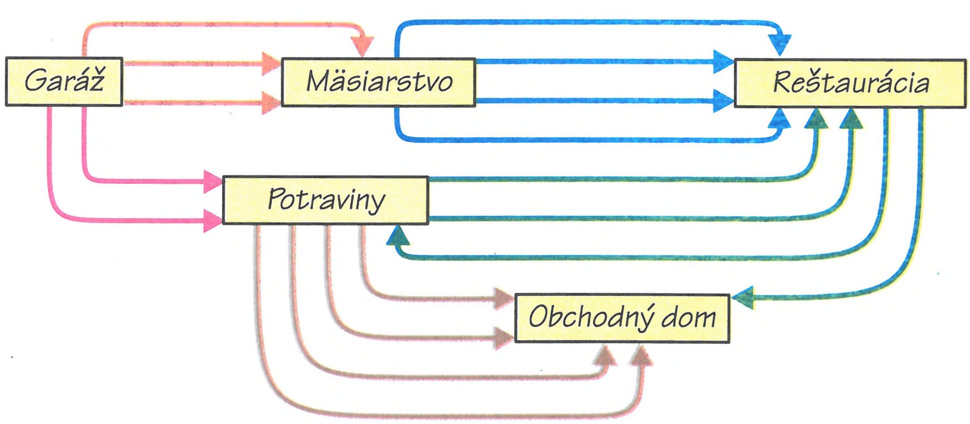
Umiestnenie jednotlivých objektov ukazuje obrázok:

a) Zo znázornenia vyplýva, že šofér nákladného automobilu sa z garáže do obchodného domu Cieľ dostane $3 \cdot 2 = 6$ rôznymi cestami.
b) Zo skladu do Supermarketu sa môže dostať $2 \cdot 4 = 8$ rôznymi cestami.
c) Z garáže do Supermarketu sa môže šofér dostať $3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$ rôznymi cestami.

Odpoveď: Z garáže do obchodného domu Cieľ cez sklad vedie 6 rôznych ciest, zo skladu do Supermarketu sa možno dostať 8 rôznymi cestami. Z garáže cez sklad a obchodný dom Cieľ do Supermarketu vedie 24 rôznych ciest.

ÚLOHA 5

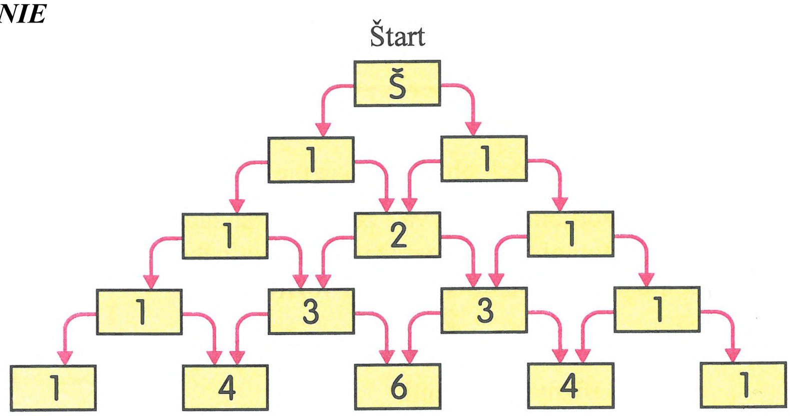
Servisný technik chladiarenských zariadení vychádza autom z garáže a ide vždy niektorou z trás vyznačených na obrázku. Zistite, koľkými cestami sa môže dostať k jednotlivým zákazníkom?



PRÍKLAD 4

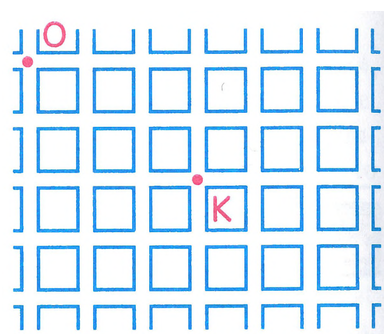
Na obrázku je znázornený labyrint. Medzi domami tohto labyrintu sa dá pohybovať len po vyznačených cestách. Šípky ukazujú smer možnej premávky. Zapíšte, koľkými cestami sa dostanete do každého domu, ak vychádzate z miesta štartu?

RIEŠENIE



ÚLOHA 6

Novovybudované mestečko má pravouhlú sieť ulíc. Zistite, koľkými cestami sa môže dostať obyvateľ tohto mestečka z križovatky **O** na križovatku **K,** keď postupuje smerom dolu (↓) alebo doprava (→). Pri riešení využite výsledky predchádzajúceho príkladu.



Teraz sa oboznámime s úlohami o škatuľkách a guľkách, ktoré sa dajú do nich umiestniť spôsobom, ako to bude ukázané. Úlohy sú na prvý pohľad nepraktické, v ďalšom však ukážeme aj ich aplikácie.

PRÍKLAD 5

Máme tri rovnaké škatuľky a dve rovnaké guľky. Ako možno umiestniť tieto guľky do škatuliek tak, aby guľky boli v škatuľkách po 1 alebo po 2, prípadne škatuľka môže byť aj prázdna. Koľko rôznych umiestnení existuje? Vyznačte ich.

RIEŠENIE

Janko je veľký praktik, preto on túto úlohu začal riešiť škatuľkami a guľkami, výsledok svojho experimentovania zachytil tak, že nakreslil vedľa seba tri škatuľky. Číslami 0, 1, 2 označil počet guliek v jednotlivých škatuľkách takto:

□	□	□
1	1	0
1	0	1
0	1	1
2	0	0
0	2	0
0	0	2

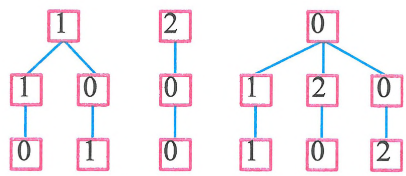
Odpoveď: Spolu existuje 6 rôznych umiestnení guliek v škatuľkách.

Marienka úlohu vyriešila pomocou stromového grafu takto:

v 1. škatuľke môže byť

v 2. škatuľke môže byť

v 3. škatuľke môže byť



ÚLOHA 7

Máme štyri rovnaké škatuľky a tri guľky. Umiestnite ich do týchto škatuliek tak, aby guľky v škatuľkách boli po 1, 2, 3 alebo je škatuľka prázdna. Koľko rôznych umiestnení existuje? Vyznačte ich.

PRÍKLAD 6

V penzióne boli 4 voľné izby, každá vhodná na ubytovanie jednej alebo dvoch osôb. Koľkými rôznymi spôsobmi môže majiteľ penziónu umiestniť dvoch hostí, ak hostia súhlasia tým, že prípadne budú ubytovaní spolu?

RIEŠENIE

Pri riešení môžeme postupovať tak, že jednotlivé izby označíme štvorčekom, do ktorého napíšeme číslo, označujúce počet ubytovaných. Izby môžeme označiť aj písmenami A, B, C, D. Dostaneme tieto možnosti umiestnenia hostí:

A	B	C	D
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	0	1	1
0	1	0	1
2	0	0	0
0	2	0	0
0	0	2	0
0	0	0	2

Odpoveď: Spolu existuje 10 rôznych umiestnení hostí.

ÚLOHA 8

Máme štyri rovnaké škatuľky a štyri guľky. Umiestnite ich do týchto škatuliek tak, aby guľky v škatuľkách boli po 1, 2, 3, 4, alebo škatuľka je prázdna. Koľko rôznych umiestnení existuje? Vyznačte ich.

Ďalšia skupina kombinatorických úloh súvisí s usporiadaním dvoch rôznofarebných skupín guliek (mužov a žien, detí a dospelých atď.) do radu. Pýtame sa, koľko rôznych usporiadaní existuje.

Prvú, jednu z najľahších z tejto skupiny úloh si každý z vás vyrieši sám.

ÚLOHA 9

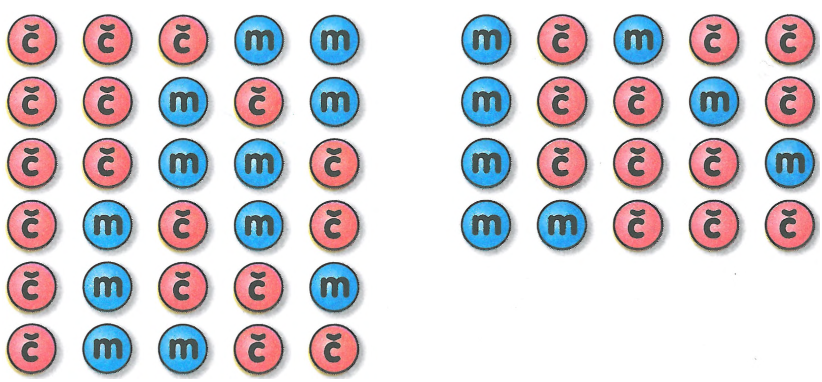
Máme 3 guľky, z ktorých 2 sú červené a 1 modrá. Usporiadajte ich do radu. Koľko rôznych usporiadaní existuje? Nakreslite situácie a napíšte trojice.

PRÍKLAD 7

Máme 5 guliek, z ktorých 3 sú červené a 2 modré. Usporiadajte ich do radu. Koľko rôznych usporiadaní existuje? Nakreslite alebo napíšte pätice.

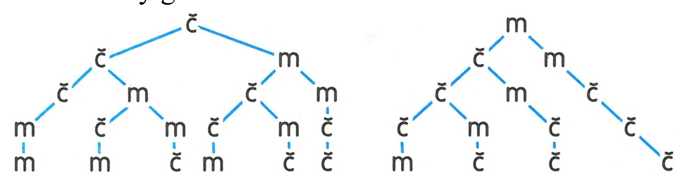
RIEŠENIE

Ivan riešil úlohu so skutočnými guľkami takto:



Karol pri riešení využil stromový graf takto:

1. guľka v rade
2. guľka v rade
3. guľka v rade
4. guľka v rade
5. guľka v rade



Odpoveď: Všetkých rôznych usporiadaní je 10. Sú to: čččmm, ččmčm, ččmmč, čmčmč, čmččm, čmmčč, mčččm, mččmč, mčmčč, mmččč.

ÚLOHA 10

Máme 5 guliek, z ktorých 4 sú červené a jedna modrá. Usporiadajte ich do radu Koľko rôznych usporiadaní existuje? Znázornite si to na obrázku a vypíšte pätice.

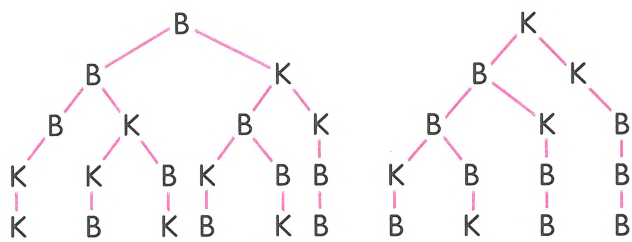
PRÍKLAD 8

Na futbalovom zápase medzi Slovanom Bratislava a 1. FC Košice padlo 5 gólov, pričom Slovan vyhral v pomere 3 : 2. Napíšte všetky možné poradia v akých mohli padať góly?

RIEŠENIE

Úlohu budeme riešiť pomocou stromového grafu, pričom na vrchole grafu je uvedené, kto mohol dať 1. gól, Slovan Bratislava (B) alebo 1. FC Košice (K).

1. gól dal
2. gól dal
3. gól dal
4. gól dal
5. gól dal



Odpoveď: Góly mohli padať v tomto poradí: BBBKK, BBKBK, BBKKB, BKBBK, BKBKB, BKKBB, KBBBK, KBBKB, KBKBB, KKBBB. Je to 10 rôznych možností.

Keď sa zamyslíme nad príkladom 8, dospejeme k záveru, že námetovo je síce táto úloha vzdialená od úloh usporiadania dvojfarebných guliek, ale matematický obsah je rovnaký. Stačí, keď góly strelené Slovanom považujeme za červené guľky a góly strelené Košicami za modré guľky.

V nasledujúcej úlohe zhrnieme výsledky riešenia úloh, v ktorých je potrebné nájsť všetky možné usporiadania guliek do radu, ak je medzi nimi rôzny počet guliek jednej alebo druhej farby.

PRÍKLAD 9

Do jednotlivých políčok tabuľky napíšte na základe riešenia predchádzajúcich úloh všetky možné usporiadania určitého počtu guliek, ak sú napríklad červené a modré.

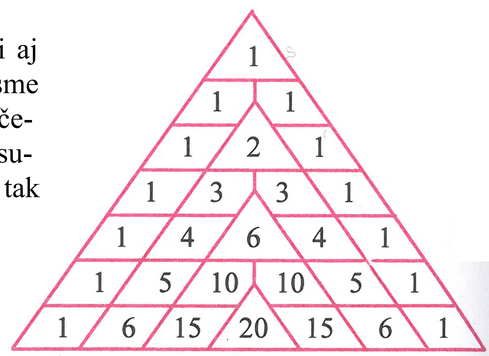
RIEŠENIE

Do záhlavia tabuľky uvedieme počet červených guliek z celkového počtu guliek (ostatné sú modré), do zvislého stĺpca uvedieme celkový počet guliek (tabuľka je zostavená pre 6 guliek).

	Počet červených guliek						
Počet všetkých guliek	0	1	2	3	4	5	6
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Ak je počet všetkých guliek napr. 4 (pozri 4. riadok), tak z tabuľky vyplýva, že ak nie je medzi nimi červená guľka (0), tak počet všetkých usporiadaní je 1, ak je jedna červená, tak počet usporiadaní je 4, ak sú 2 červené, tak počet všetkých možných usporiadaní je 6 atď.

K podobnému výsledku sme sa dostali aj pri riešení príkladu 4 o labyrinte, kde sme prechádzali medzi domami po vyznačených cestách. Ak upravíme tabuľku posunutím jednotlivých riadkov doľava, tak dostaneme takéto usporiadanie:



CVIČENIA

1. Števko má 3 tričká a 4 trenírky. Koľkými rôznymi spôsobmi si môže obliecť tričko a trenírky?

2. Anička zistila, že celkom 15 rôznymi spôsobmi si môže obliecť sukňu a blúzku. Koľko môže mať sukieň, ak má 5 blúzok?

3. V určitom meste sa možno z miesta **A** do miesta **B** dostať električkou, trolejbusom alebo autobusom. Z miesta **B** do miesta **C** taxíkom, električkou, autobusom alebo trolejbusom. Koľkými rôznymi spôsobmi sa možno dostať z miesta **A** do miesta **C** cez miesto **B**?

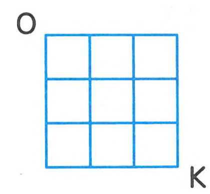
4. Máme tri rovnaké škatuľky a tri rovnaké guľky. Treba umiestniť tieto guľky do škatuliek tak, aby guľky boli v škatuliach po 1, 2, prípadne škatuľka bola prázdna. Koľko rôznych umiestnení existuje? Vyznačte ich.

5. Máme 4 guľky, z ktorých 2 sú čierne a 2 biele. Usporiadajte ich do štvoríc. Koľko rôznych usporiadaní štvoríc guliek existuje? Nakreslite alebo napíšte ich.

6. Žiaci 7. A triedy pripravujú koncoročný večierok. Rozhodli sa, že dvojica žiakov, chlapec-dievča bude pozývať všetkých učiteľov. Na túto úlohu sa spomedzi chlapcov dobrovoľne prihlásili Maťo, Števo, Laco a Karol. Z dievčat Magda, Alenka, Barbora a Zuzka. Koľkými spôsobmi z nich možno vybrať dvojicu chlapec-dievča?

7. Na tanečnom večierku si traja chlapci Andrej, Braňo a Dano mohli vybrať do tanca zo štyroch dievčat: Kláry, Milky, Zuzky a Lucky. Koľko tanečných dvojíc mohli utvoriť?

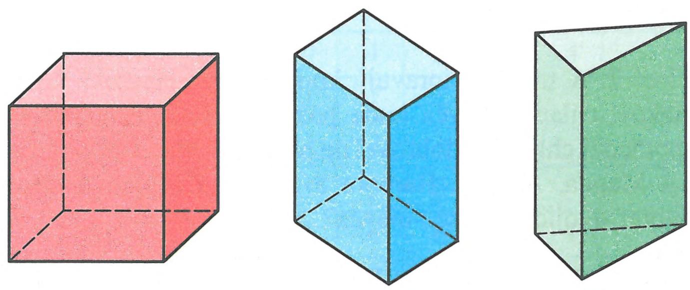
8. Koľkými rôznymi spôsobmi je možné dostať sa z miesta **O** do miesta **K**, keď môžeme ísť len smerom dole (↓) a doprava (→) po štvorcovej sieti?



9. V letnom tábore sa na každý deň určí služba: jeden chlapec a jedno dievča. Koľkými spôsobmi možno určiť takúto dvojicu, keď sa má vybrať z tých, ktorí ešte službu nemali. Sú to: Jožko, Paľko, Kamil, Tono, Monika, Vierka, Edita, Andrejka a Zdenka.

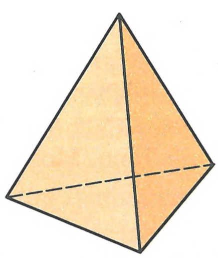
12 MNOHOSTENY

R Poznáme už niektoré hranaté telesá, napr. kocku, kváder, trojboký hranol.

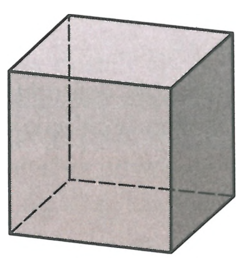


12.1 Pravidelné mnohosteny

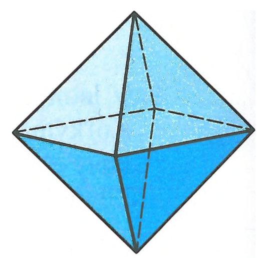
R Ďalej uvádzame pravidelné mnohosteny, ktoré sa často nazývajú **Platónove telesá.** Sú to:



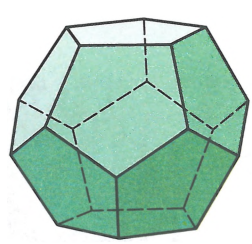
štvorsten (tetraéder)



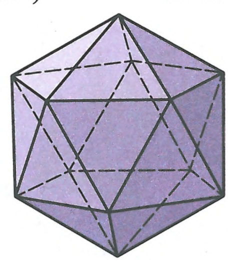
kocka (hexaéder)



osemsten (oktaéder)



dvanásťsten (dodekaéder)



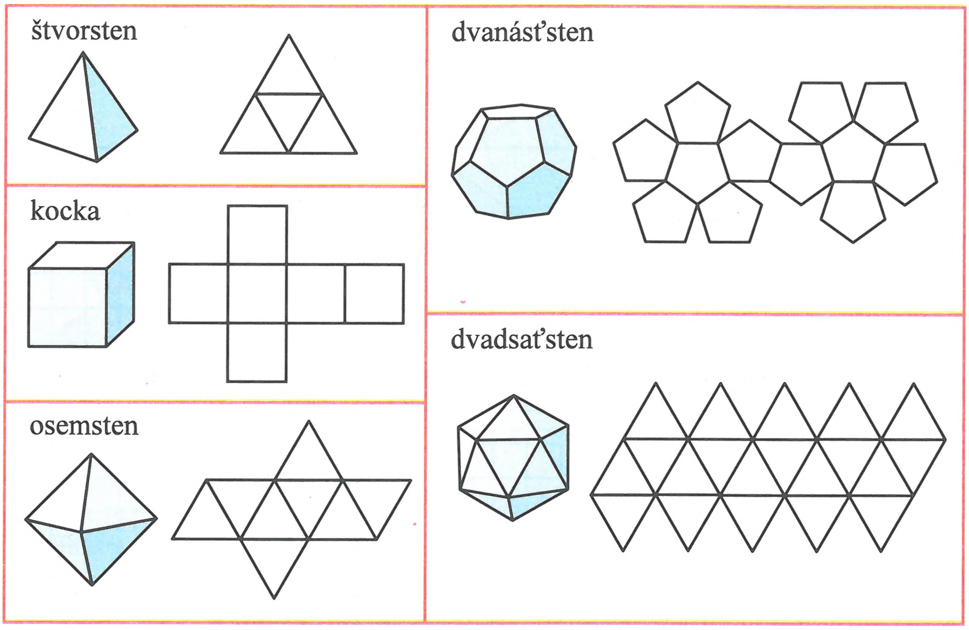
dvadsaťsten (ikosaéder)

V zátvorkách je pomenovanie gréckeho pôvodu, ktoré vychádza z gréckych číslovniek:

tetraéder	- *tettares*	- štyri	
hexaéder	- *hex*	- šesť	
oktaéder	- *okto*	- osem	***éder*** - plocha
dodekaéder	- *dodeka*	- dvanásť	
ikosaéder	- *eikosi*	- dvadsať	

Kocka je pravidelný šesťsten, ktorého steny sú zhodné štvorce.
Pravidelný štvorsten, pravidelný osemsten a *pravidelný dvadsaťsten* majú všetky steny v tvare pravidelných trojuholníkov.
Pravidelný dvanásťsten má všetky steny v tvare pravidelného päťuholníka.

Na obrázkoch sú zobrazené siete jednotlivých pravidelných telies:



Všimnime si niektoré vlastnosti pravidelných mnohostenov.
Pravidelné mnohosteny:

1. Sú hranaté telesá (typu mnohosten)
2. Všetky sú konvexné
3. Steny majú tvar pravidelných (konvexných) n-uholníkov
4. Pri každom vrchole je zoskupený ten istý počet stien.

ÚLOHA 1

Doplňte tabuľku (v = počet vrcholov, h = počet hrán, s = počet stien)

Pravidelný mnohosten	v	h	s	$v - h + s$
štvorsten				
kocka				
osemsten				
dvanásťsten				
dvadsaťsten				

VŠIMNIME SI

Číslo $v - h + s$ je pre všetky telesá (pravidelné mnohosteny ale aj pre nepravidelné mnohosteny „bez otvorov“) rovnaké číslo.
Je to tzv. **Eulerova konštanta** (čítaj ojlerova konštanta).

R

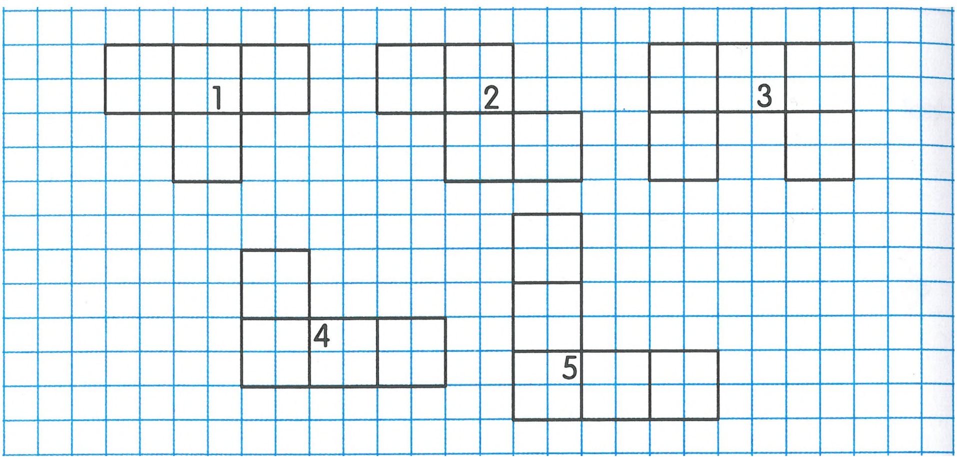
ÚLOHA 2

Z papiera vyhotovte model kocky s hranou dĺžky 5 cm.

R

ÚLOHA 3

Ktoré obrazce na obrázku môžete doplniť na sieť kocky?



R

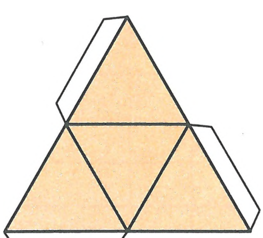
PROBLÉM 1

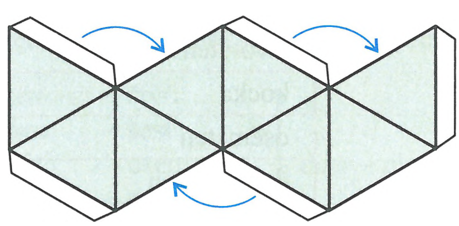
Miško sa pýta: Možno urobiť aj modely ostatných pravidelných mnohostenov?

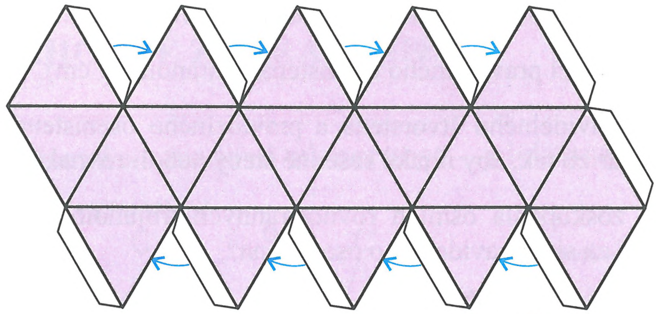
R

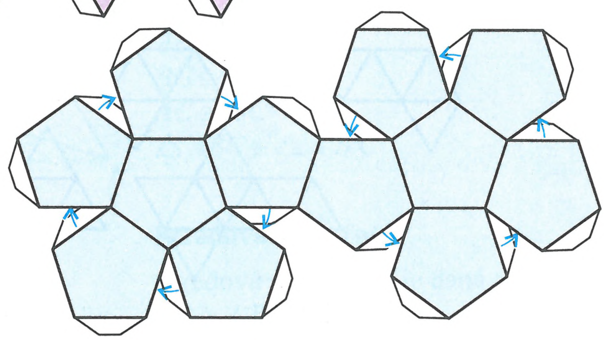
RIEŠENIE

Pani učiteľka nakreslila siete a doplnila ich tak, aby sa modely mohli zlepiť.





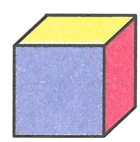




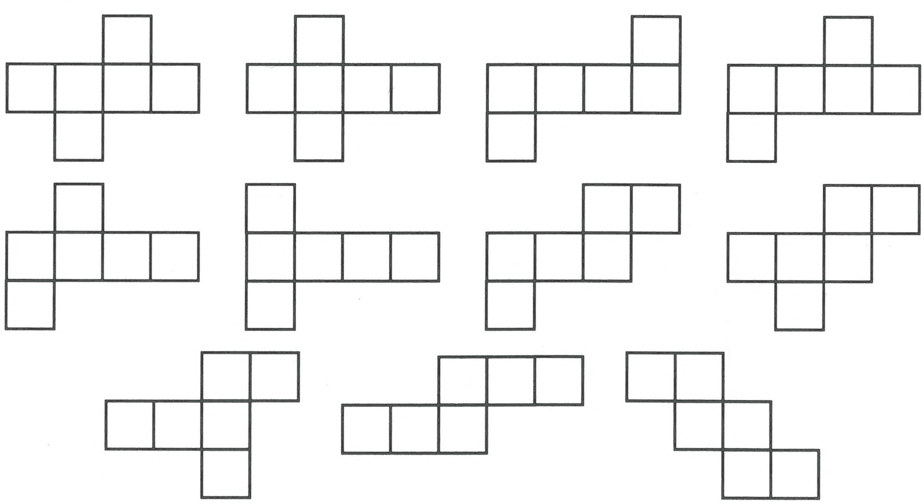
CVIČENIA

1. Na papierovom modeli kocky vyznačte červenou farbou aspoň jednu cestu idúcu po hranách cez všetky vrcholy kocky.

2. Zafarbite steny papierovej kocky troma farbami tak, aby nijaké dve susedné steny neboli rovnakej farby.



3. Na obrázku sú zoskupenia šiestich štvorcov. Možno všetky považovať za sieť kocky?

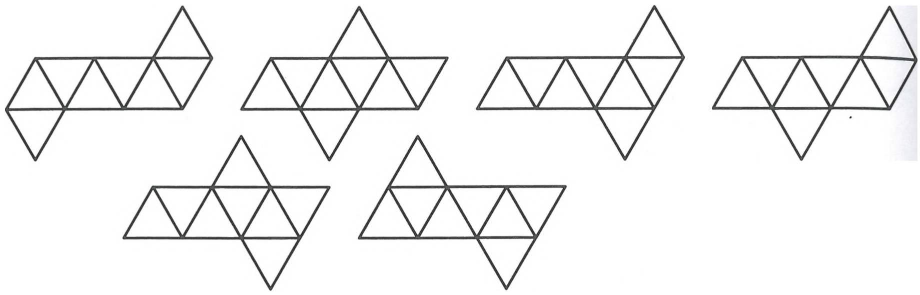


4. Urobte z papiera model pravidelného štvorstena (s hranou 7 cm).

5. Urobte z papiera model pravidelného osemstena (s hranou 5,5 cm).

6. Vyfarbite steny pravidelného štvorstena a pravidelného osemstena čo najmenším počtom farieb tak, aby nijaké susedné steny neboli rovnakej farby.

7. Na obrázku sú zoskupenia ôsmich rovnostranných trojuholníkov. Možno všetky považovať za sieť pravidelného osemstena?



Gaspard Monge

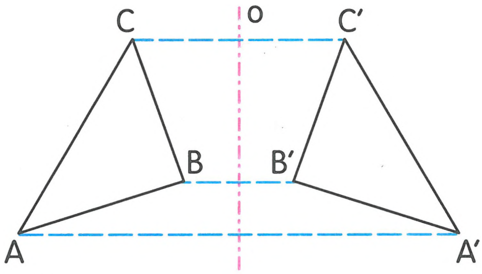
(10. 5. 1764 až 28. 7. 1818)

Francúzsky geometer. Pôsobil ako profesor na vojenskej akadémii v Paríži. Bol tvorcom deskriptívnej geometrie, najmä pravouhlého premietania na dve združené priemetne (Mongeova projekcia). Významne sa zaslúžil aj o rozvoj analytickej a diferenciálnej geometrie.

13 ZHODNÉ ZOBRAZENIE

13.1 Osová a stredová súmernosť - niektoré vlastnosti

R ***ZOPAKUJME SI***



Osová súmernosť

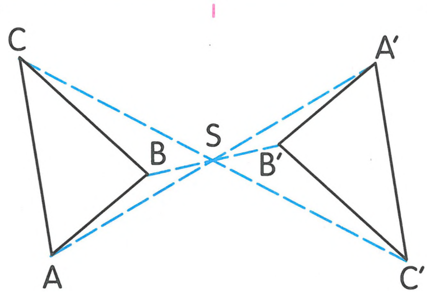
Osová súmernosť je daná osou *o*.

$AB \cong A'B'$

$BC \cong B'C'$

$AC \cong A'C'$

$\Delta\ ABC \cong \Delta\ A'B'C'$



Stredová súmernosť

Stredová súmernosť je daná stredom ***S***.

$AB \cong A'B'$

$BC \cong B'C'$

$AC \cong A'C'$

$\Delta\ ABC \cong \Delta\ A'B'C'$

Osová súmernosť a stredová súmernosť zachovávajú zhodnosť úsečiek.
Osová súmernosť aj stredová súmernosť sú zhodné zobrazenia.

R ***ÚLOHA 1***

Narysujte obraz *A'B'C'* trojuholníka *ABC* v osovej súmernosti danej osou *o* (trojuholník *ABC* a os *o* si zvoľte ľubovoľne). Na priesvitku nakreslite trojuholník *ABC* a bez preklopenia priesvitku premiestnite a skúste stotožniť trojuholník *ABC* s trojuholníkom *A'B'C'*. Dokážete to?

R ***ÚLOHA 2***

Narysujte obraz *A'B'C'* trojuholníka *ABC* v stredovej súmernosti so stredom *S* (opäť si trojuholník *ABC* a stred *S* zvoľte ľubovoľne). Na priesvitku nakreslite trojuholník *ABC* a bez preklopenia priesvitku premiestnite a skúste stotožniť trojuholník *ABC* s trojuholníkom *A'B'C'*. Je to možné?

Ak nemusíme priesvitku preklopiť a trojuholníky *ABC* a *A'B'C'* vieme stotožniť, hovoríme, že trojuholníky sú **súhlasne zhodné** - ide o **priamu zhodnosť.**

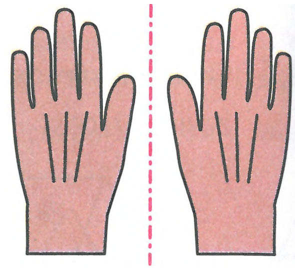
Ak musíme priesvitku preklopiť, aby sme stotožnili trojuholníky *ABC* a *A'B'C'*, hovoríme, že trojuholníky sú **nesúhlasne zhodné** - ide o **nepriamu zhodnosť.**

Prečo je súmernosť podľa stredu priama zhodnosť?
Prečo je osová súmernosť nepriama zhodnosť?

R

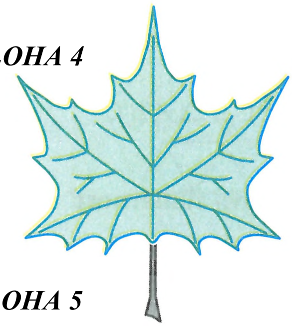
ÚLOHA 3

Na obrázku je znázornený obraz rukavice v osovej súmernosti. Vzor nakreslite na priesvitku. Možno bez preklopenia priesvitky obraz a vzor stotožniť?



R

ÚLOHA 4



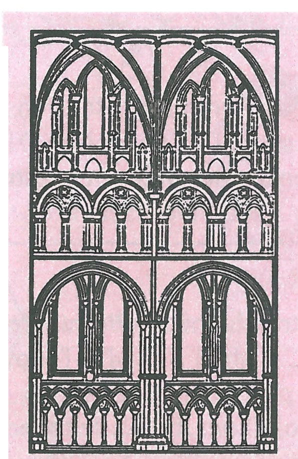
Na obrázku je znázornený list. Nájdite na liste také body, ktoré sa v osovej súmernosti zobrazia do seba. Ktoré sú to?

R

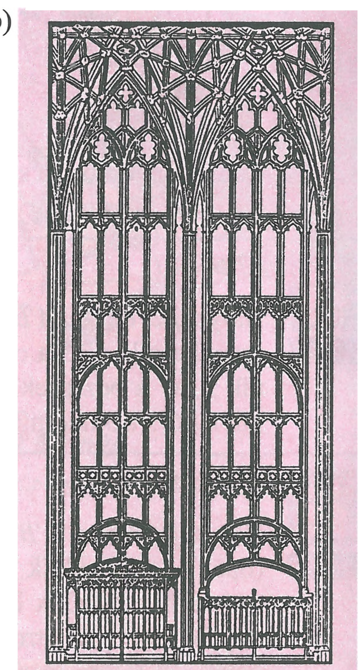
ÚLOHA 5

Na obrázku a) je schéma hlavnej lode katedrály v Lincolne. Na obrázku b) je schéma chóru gloucesterskej katedrály. Nájdite na nich časti, v ktorých je porušená osová súmernosť

a)



b)

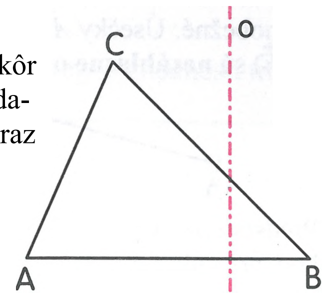


Každý bod, ktorý splýva so svojím obrazom sa nazýva **samodružný bod.**
Všetky body osi *o* osovej súmernosti sú samodružné body osovej súmernosti.
Bod *S* stredovej súmernosti je jediný samodružný bod stredovej súmernosti.

R

ÚLOHA 6

Na obrázku je trojuholník ABC a os o. Najskôr nájdite samodružné body trojuholníka ABC v danej osovej súmernosti, a potom zostrojte obraz $A'B'C'$ trojuholníka ABC.



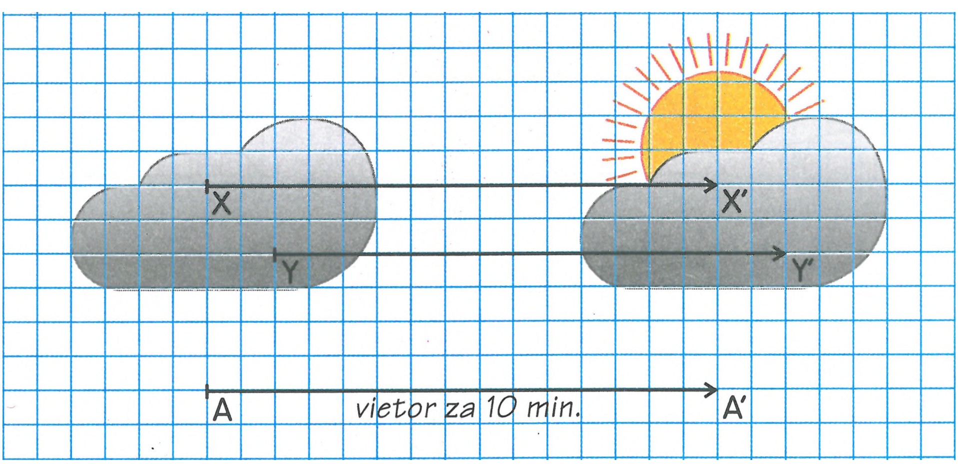
POZNÁMKA

Súmernosť sa nazýva aj symetria (slovo gréckeho pôvodu, ktoré znamená aj súlad medzi časťami celku). Preto sa niekedy hovorí o osovej symetrii, o stredovej symetrii. Opakom symetrie je asymetria — nesúmernosť, nesúlad.

13.2 Posunutie

R

V štvorcovej sieti je zakreslené Slnko a oblak, ktorý sa pohybuje pod vplyvom vetra. Rýchlosť a smer pohybu oblaku je vyznačený úsečkou so šípkou. Po desiatich minútach oblak zastiera časť Slnka. Ak si všimneme určitý bod X oblaku v pôvodnej polohe a po premiestnení X', tieto dva body určujú úsečku, ktorej veľkosť a smer sa zhoduje s úsečkou označenou šípkou.



Doteraz sme pri úsečke neuvažovali o nejakom poradí krajných bodov. V niektorých súvislostiach je však užitočné prehlásiť jeden z krajných bodov úsečky za **začiatočný** a druhý za **koncový.** Napr. pri vyznačení bodu X a bodu X' na obrázku alebo rýchlosť a smer vetra A a A'. Takúto úsečku nazývame **orientovaná úsečka,** budeme ju označovať $\overrightarrow{AA'}$ alebo $\overrightarrow{XX'}$.

Orientovaná úsečka $\overrightarrow{AB}$ a orientovaná úsečka $\overrightarrow{BA}$ sú rôzne, líšia sa orientáciou.

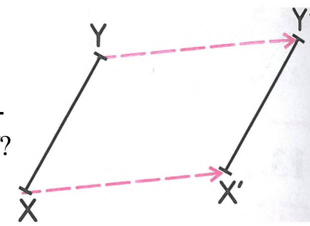
Na obrázku sú zakreslené úsečky $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ a $\overrightarrow{EF}$. Všetky majú rovnakú dĺžku a sú rovnobežné. Úsečky $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ sú **súhlasne orientované,** ale úsečky $\overrightarrow{CD}$ a $\overrightarrow{EF}$ ($\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{EF}$) sú **nesúhlasne orientované** (alebo **opačne orientované**).

Predstavme si pohyb oblaku znázorneného na obrázku na str. 123. Každý jeho bod pri pohybe oblaku sa premiestni do novej polohy, pričom sa pohybuje po úsečke. Všetky tieto orientované úsečky sú navzájom zhodné, rovnobežné a súhlasne orientované. Tomuto premiestneniu hovoríme **posunutie.** Bod ***X*** nazývame **vzorom** a bod *X'* jeho **obrazom.**

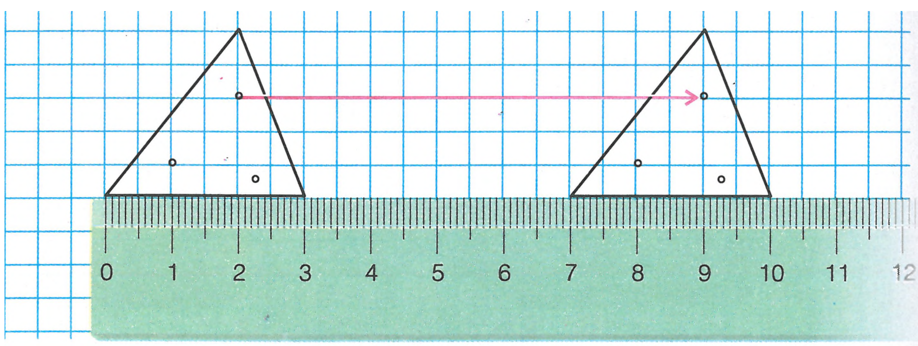
ÚLOHA 1

R

Úsečka $X'Y'$ je obrazom úsečky XY v posunutí. Čo môžeme povedať o vzájomnej polohe úsečiek XY a $X'Y'$? Platí rovnosť $|XY| = |X'Y'|$? Odôvodnite.



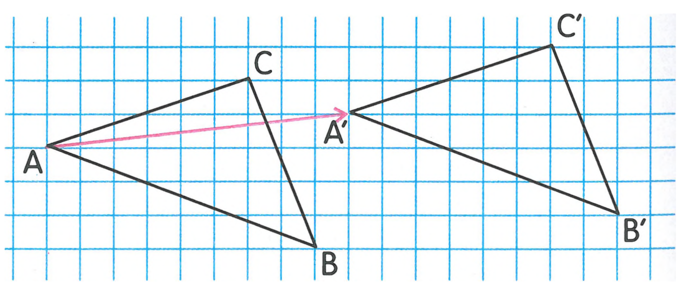
Pre každú dvojicu rôznych bodov X, Y a ich obrazov X', Y' v danom posunutí platí, že orientované úsečky $\overrightarrow{XY}$, $\overrightarrow{X'Y'}$ sú zhodné (t.j. majú rovnakú dĺžku, sú navzájom rovnobežné a sú rovnako orientované).



ÚLOHA 2

R

Porovnajte pomocou priesvitky trojuholník ABC a jeho obraz $A'B'C'$ v posunutí danom orientovanou úsečkou AA'.



$\Delta\ ABC \cong \Delta\ A'B'C'$. Posunutie je zhodné zobrazenie.

ÚLOHA 3

Uvedené tvrdenie odôvodnite pomocou niektorej vety o zhodnosti trojuholníkov.

ÚLOHA 4

Posunutie je priama zhodnosť. Odôvodnite.

ÚLOHA 5

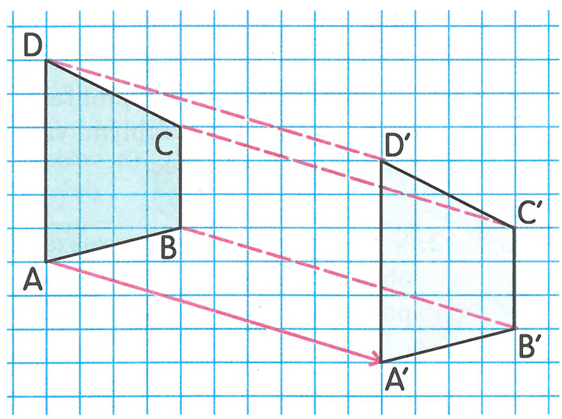
Môže byť v posunutí nejaký bod samodružný? Svoje tvrdenie odôvodnite!

PRÍKLAD 1

Na štvorčekovanom papieri zostrojte obraz $A'B'C'D'$ štvoruholníka $ABCD$ v posunutí určenom orientovanou úsečkou $\overrightarrow{AA'}$.

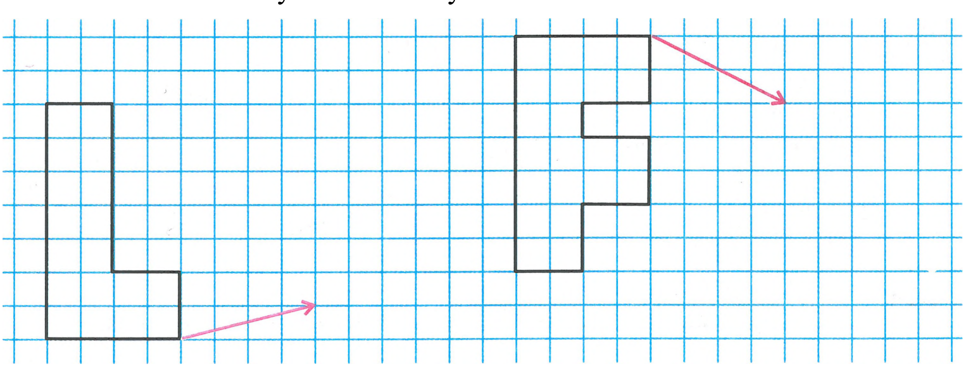
RIEŠENIE

Zo zadania úlohy vyplýva, že bod A' obraz je obraz bodu A. Zostrojíme postupne obrazy B', C', D' bodov B, C, D, pričom bude platiť:
$BB' \| AA'$, $CC' \| AA'$, $DD' \| AA'$,
$|BB'| = |AA'|$, $|CC'| = |AA'|$,
$|DD'| = |AA'|$.



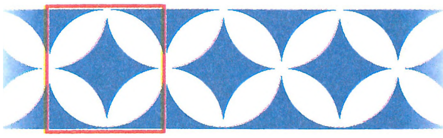
ÚLOHA 6

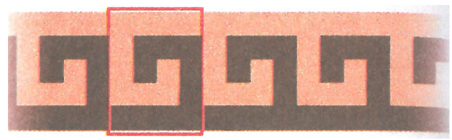
Na štvorčekovanom papieri zostrojte obrazy písmen L a F vo vyznačených posunutiach. Vzor a obraz vyfarbite odlišnými farbami.



ÚLOHA 7

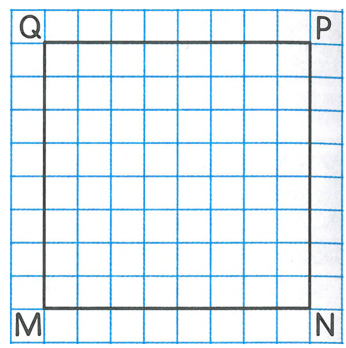
Na obrázkoch sú ornamenty. V rámčekoch sú základné útvary, z ktorých sú ornamenty vytvorené. Vysvetlite postup, ktorým možno ornamenty tvoriť. Prekreslite si ich na štvorčekovaný papier a vhodne vyfarbite.



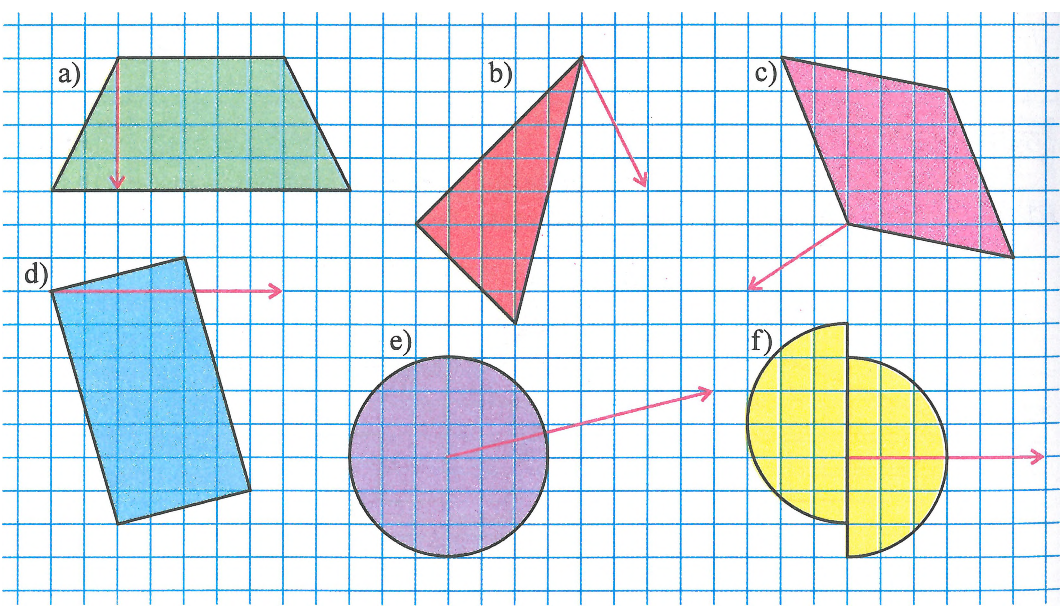


CVIČENIA

1. V štvorcovej sieti je daný štvorec *MNPQ*. Zostrojte jeho obraz v osovej súmernosti a vyznačte samodružné body (pokiaľ existujú). Os osovej súmernosti si zvoľte tak, aby:
   a) obsahovala jednu stranu štvorca,
   b) prechádzala stredmi protiľahlých strán,
   c) prechádzala protiľahlými vrcholmi,
   d) nepretínala štvorec.

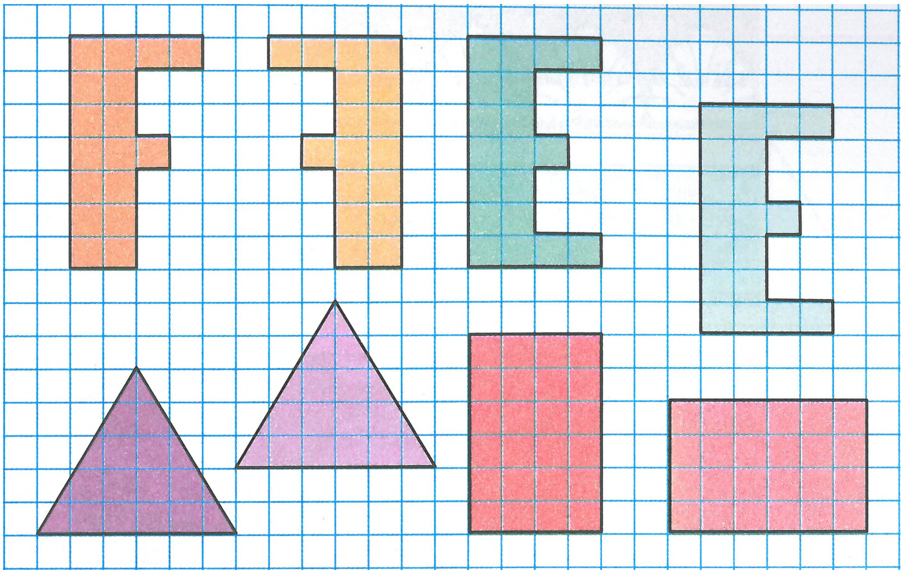


2. V štvorcovej sieti máte znázornený útvar a smer posunutia. Prekreslite si obrázok na štvorčekovaný papier a zostrojte obraz každého útvaru v danom posunutí. Vzor a jeho obraz vyfarbite odlišnými farbami.

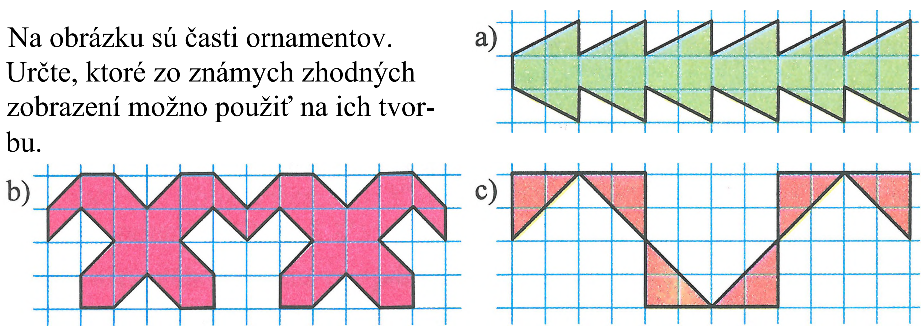


R

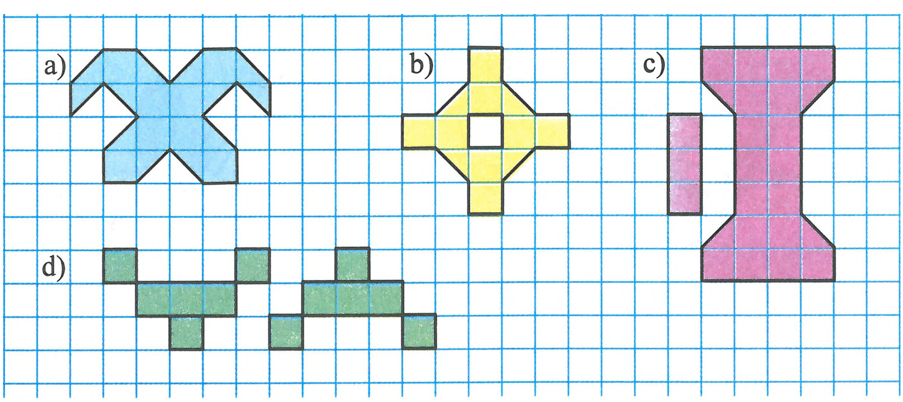
3. Určte, ktoré zo zobrazených útvarov si odpovedajú v posunutí. Určte orientovanú úsečku, ktorá toto posunutie určuje.



4. Na obrázku sú časti ornamentov. Určte, ktoré zo známych zhodných zobrazení možno použiť na ich tvorbu.

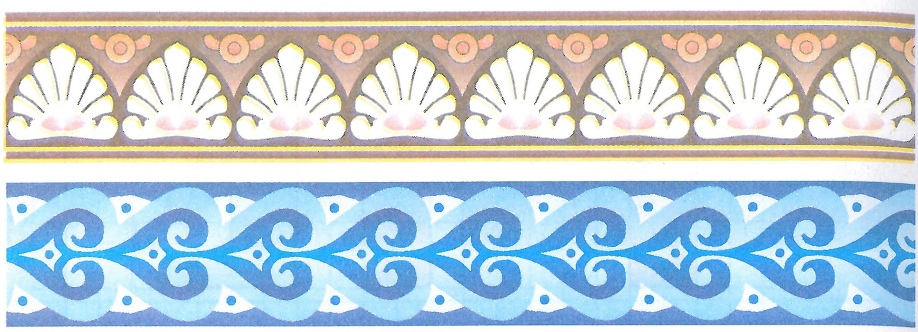


5. Na obrázku sú základné obrazce, z ktorých možno vytvárať ornament. Dokreslite si do zošita niekoľko ďalších častí ornamentu.

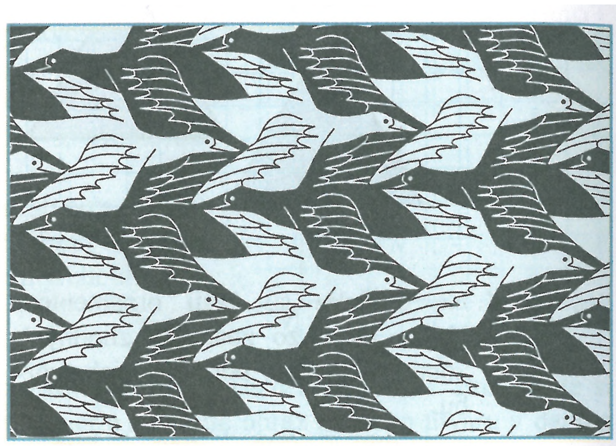


R

6. Na obrázku sú časti ornamentov. Nájdite základné obrazce, pomocou ktorých možno zhodným zobrazením ornamenty vytvoriť.



7. Možno nájsť zhodné zobrazenie aj v ornamente M. C. Eschera?



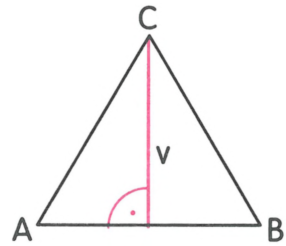
Hovor len vtedy, keď to, čo chceš povedať, je múdrejšie ako mlčanie.

Sokrates

14 TOPOGRAFICKÉ PRÁCE V TERÉNE

14.1 Vytýčenie pravého uhla bez použitia zámerného kríža

R Poznáme vlastnosti výšky rovnoramenného trojuholníka.



ZOPAKUJME SI

Výška rovnoramenného trojuholníka je kolmá na základňu a rozdeľuje rovnoramenný trojuholník na dva zhodné pravouhlé trojuholníky.

ÚLOHA 1

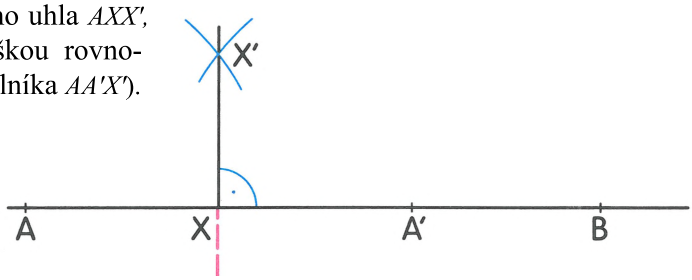
R

V bode X priamky AB zostrojte kolmicu na priamku AB bez použitia zámerného kríža.

Pomôcky: meracie pásmo, špagát, značkovacie kolíky.

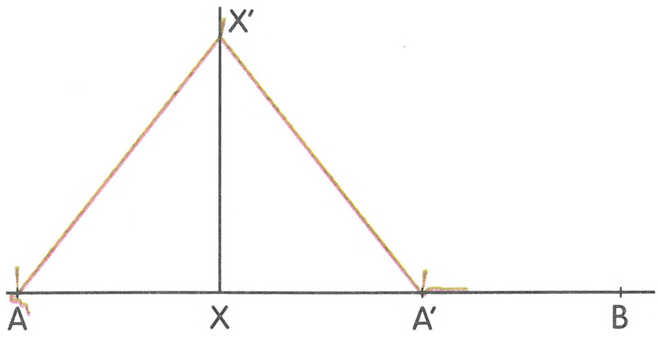
Odporúčný postup:

1. Predpokladáme, že máme vyznačené body A, X, B značkovacími kolíkmi.
2. Vzdialenosť bodov A, X odmeriame meracím pásmom alebo špagátom a prenesieme ju na polpriamku XB. Dostaneme bod A'.
3. S ľubovoľným polomerom (väčším ako je dĺžka úsečky AX) opíšeme z bodov A, A' v zvolenej polrovine pomocné oblúčiky. Na to využijeme špagát a vyznačovací kolík. Priesečník X' určuje spolu s bodom X priamku, ktorá je kolmá na priamku AB. Bod X' vyznačíme kolíkom.
4. Pozdĺž napnutého špagátu vyznačíme v teréne priamku XX' (polpriamka XX' je ramenom pravého uhla AXX', úsečka XX' je výškou rovnoramenného trojuholníka $AA'X'$).

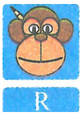


POZNÁMKA

Na zostrojenie bodu X' môžeme využiť ďalšiu vlastnosť rovnoramenného trojuholníka: Ramená rovnoramenného trojuholníka sú zhodné úsečky. Môžeme to urobiť takto: Použijeme meracie pásmo alebo špagát dlhší (aspoň dvojnásobok dĺžky úsečky AA'). Prehnutím určíme stred špagátu. Obidva konce špagátu upevníme na kolíky v bodoch A, A' a stred špagátu určí bod X', ktorý vyznačíme opäť kolíkom.



14.2 Vytýčenie rovinného obrazca v teréne

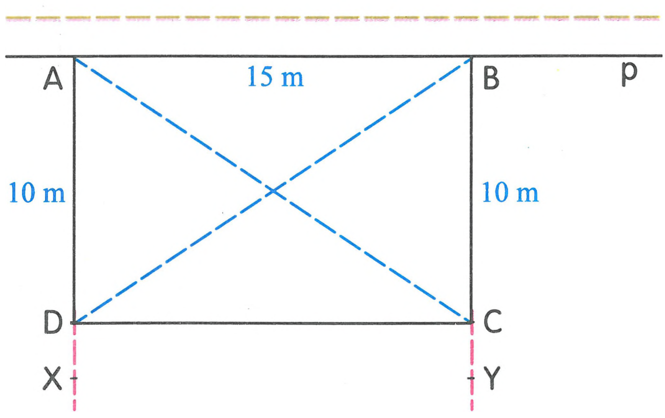


ÚLOHA 1

Pozdĺž priameho chodníka p vytýčte záhon tvaru obdĺžnika s danými rozmermi (a = 15 m, b = 10 m).
Pomôcky: zámerný kríž, špagát, meracie pásmo, značkovacie kolíky, výtyčky.

Odporúčaný postup:
Označme si vrcholy hľadaného obdĺžnikového záhona označme *A, B, C, D.*

1. Vyznačíme kolíkom vrchol A na okraji chodníka.
2. Nameriame vzdialenosť 15 m a vyznačíme kolíkom vrchol B.
3. Zámerným krížom (alebo aj bez neho) vytýčime k bodom *A, B* polpriamky *AX, BY,* ktoré sú kolmé na smer p.
4. Nameriame vzdialenosti $|AD| = |BC| = 10$ m. Body C, D vyznačíme kolíkmi.



POZNÁMKA

Vieme, že uhlopriečky obdĺžnika sú zhodné. Túto vlastnosť môžeme využiť na kontrolu, či sme správne vytýčili vrcholy záhonu. Špagátom alebo meracím pásmom odmeriame napr. AC a porovnáme so vzdialenosťou bodov B, D.

14.3 Použitie stredovej súmernosti pri meraní vzdialeností

Často treba v teréne zmerať vzdialenosť bodov, medzi ktorými je určitá prekážka (napr. nepriehľadný terén alebo nejaká neprístupná prekážka).

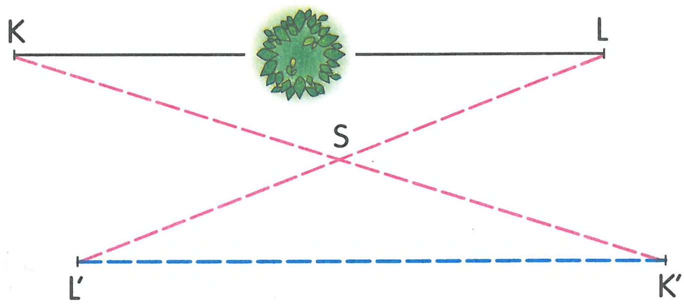
R

ÚLOHA 1

Dané sú v teréne dva viditeľné body *K, L,* medzi ktorými je prekážka. Zistite vzdialenosť bodov *K, L.*
Pomôcky: výtyčky, meracie pásmo.

Odporúčaný postup:

1. Zvolíme si taký bod *S,* pre ktorý sa budú dať odmerať vzdialenosti *KS, LS.*
2. Vytýčime polpriamky *KS, LS.*
3. Na polpriamku *KS* nanesieme dĺžku úsečky *KS* z bodu *S* do bodu *K'.*
4. Na polpriamku *LS* nanesieme dĺžku úsečky *LS* z bodu *S* do bodu L'.
5. Vzdialenosť *K'L'* sa rovná vzdialenosti bodov *KL* na základe stredovej súmernosti.



R

C V I Č E N I A

1. Vytýčte v teréne štvorec, ktorého dĺžka strany je 10 m. Polohu jednej strany si v teréne ľubovoľne zvoľte. Pravý uhol vytýčte bez zámerného kríža.

2. Na školskom dvore si vyznačte dva body tak, aby medzi nimi bola časť školskej budovy. Zmerajte ich vzdialenosť.

Je chybou nás všetkých, že slová považujeme za dôležitejšie ako skutky.

A. Maurois

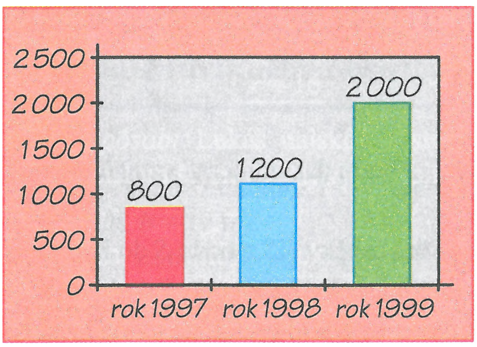
15 DIAGRAMY

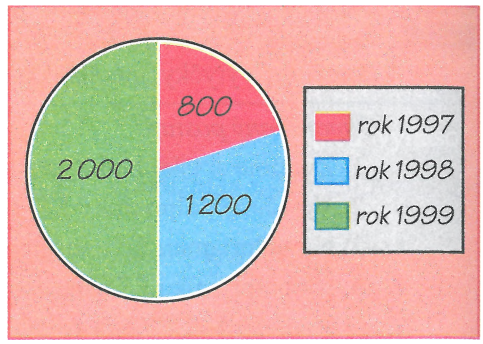
R ***ZOPAKUJME SI***

Grafické znázornenie číselných údajov sa nazýva **diagram.**
Poznáme dva základné druhy diagramov:

stĺpcový **kruhový**

Ako rástol počet čitateľov školského časopisu NAŠI SIEDMACI.





Stĺpcový diagram
porovnáva hodnoty jednotlivých údajov.

Kruhový diagram
vyjadruje rozdelenie celku na časti.

Diagramy uverejňované v novinách a časopisoch sú väčšinou zostrojené pomocou počítačových programov. Zdrojom údajov pre diagram sú tabuľky údajov. Spracovaním týchto tabuliek dokáže počítač presne nakresliť diagramy rôznych typov.
Pri kreslení stĺpcového diagramu bez počítača, môžeme výhodne využiť milimetrový papier.

PRÍKLAD 1

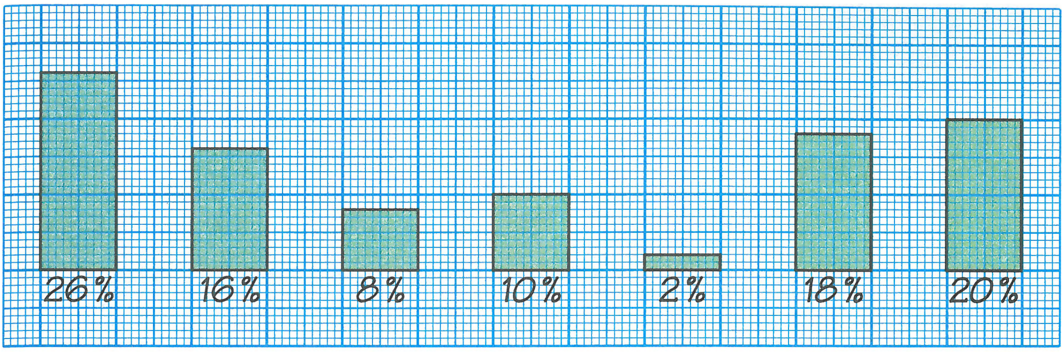
R

Jozef zostrojil stĺpcový diagram, v ktorom zobrazil nasledujúce údaje:
Návštevy zahraničných turistov na Slovensku v lete roku 1998.

Rekreačný pobyt	26 %
Liečebný pobyt	16 %
Nákupná turistika	8 %
Kultúmo-poznávací pobyt	10 %
Pracovná cesta	2 %
Návšteva rodiny	18 %
Tranzit	20 %

RIEŠENIE

Jozef použil milimetrový papier. 1 % sa rovná 1 mm na milimetrovom papieri a stĺpec má šírku 10 mm.



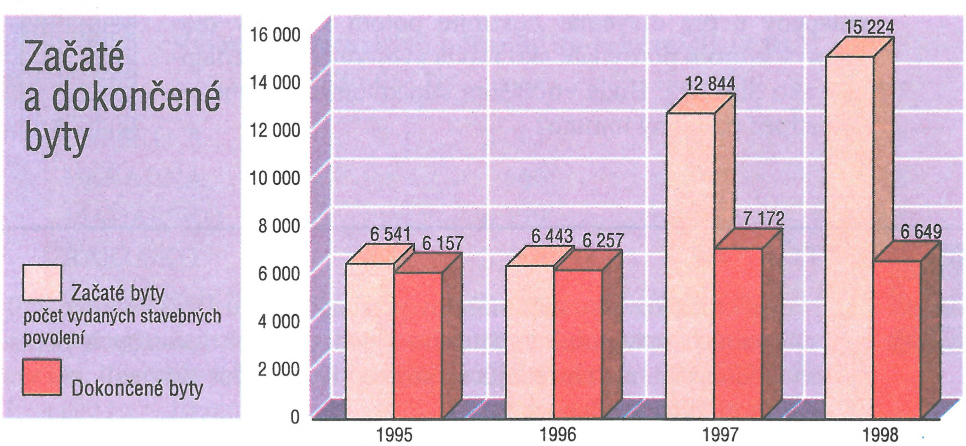
ÚLOHA 1

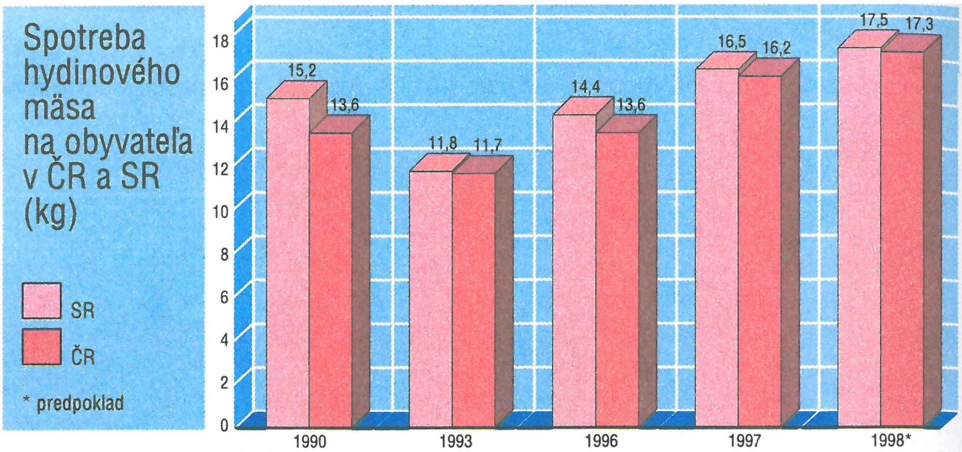
Juraj si v časopise prečítal:

> ***Útoky žralokov na človeka.***
> Ročne sa zaznamená priemerne 130 útokov žralokov na človeka pri pobrežiach svetových morí a oceánov. Sú to: Austrália 27 %, USA 19 %, Oceánia 12 %, Južná Afrika 8 % a ostatné oblasti 34 %.

Zostrojte stĺpcový diagram zodpovedajúci uvedeným údajom na milimetrovom papieri.

Pomocou stĺpcového diagramu môžeme vhodne porovnávať aj dvojice údajov, ktoré v rôznych časových úsekoch sledujú ten istý jav. Pozrite si diagramy uverejnené v slovenských denníkoch v januári 1999. Analyzujte údaje v nich znázornené, zapíšte ich do tabuliek.





R

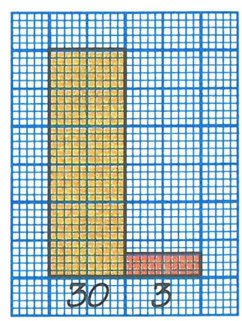
ÚLOHA 2

Zostrojte na milimetrovom papieri stĺpcový diagram, v ktorom porovnáte tieto dvojice údajov:
V roku 1998 sa zo Slovenskej republiky vyviezol tovar v hodnote 375 921 mil. Sk. V porovnaní s rokom 1997 vývoz tovaru vzrástol o 51 903 mil. Sk. Do Slovenskej republiky sa v roku 1998 doviezol tovar v celkovej hodnote 456 713 mil. Sk. V porovnaní s rokom 1997 dovoz vzrástol o 64 346 mil. Sk. (Údaje vhodne zaokrúhlite a zvoľte vhodnú mierku, napr. 100 mil. Sk = 10 mm na milimetrovom papieri, šírka stĺpca je 10 mm.)

R

ÚLOHA 3

Urobte anketu medzi svojimi spolužiakmi: *Ako trávíš svoj voľný čas po vyučovaní?* Odpovede môžu byť: príprava do školy, šport, počúvanie hudby, hra na hudobný nástroj, sledovanie TV, stretávanie sa s priateľmi, počítačové hry. Údaje usporiadajte do tabuľky a vyhodnoťte ich zvlášť pre chlapcov a pre dievčatá. Zostrojte potom stĺpcový diagram, v ktorom porovnáte ako trávia svoj voľný čas chlapci a ako dievčatá. Bude vo vašom stĺpcovom diagrame jeden stĺpec podobný tomuto?

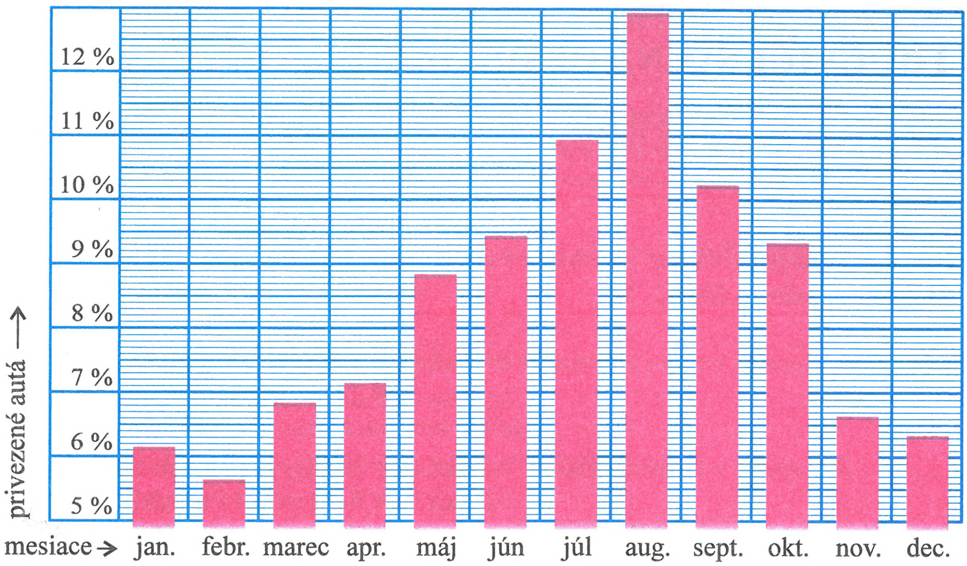


R

C V I Č E N I A

1. Na veľké vrakovisko automobilov priviezli v roku 1998 celkove 250 000 havarovaných automobilov. Situáciu v jednotlivých mesiacoch popisuje stĺpcový diagram na nasledujúcej strane. Koľko áut priviezli na vrakovisko v jednotlivých mesiacoch?

R



2. Z údajov Štatistického úradu Slovenskej republiky:

Vývoj zahraničného obchodu v roku 1998		
Krajina	Vývoz zo Slovenska	Dovoz na Slovensko
NEMECKO	28,9 %	25,9 %
ČESKÁ REPUBLIKA	20,3 %	18,5 %
RAKÚSKO	7,4 %	4,7 %
FRANCÚZSKO	3,4 %	3,9 %
TALIANSKO	7,1 %	6,4 %

Údaje v tabuľke zaokrúhlite na celé percentá a zostrojte stĺpcový diagram, v ktorom porovnáte dvojice údajov: dovoz a vývoz z tej istej krajiny. (Použite milimetrový papier, 1 **%** = 1 mm, stĺpec má šírku 10 mm.)

3. Nasledujúca tabuľka popisuje cestovanie občanov SR:

Výjazdy slovenských občanov do zahraničia (v tis.)			
Krajina / Rok	1995	1996	1997
POĽSKO	3 085	3 837	3 055
UKRAJINA	666	348	208
MAĎARSKO	4 129	4 228	4 868
RAKÚSKO	3 499	4 349	3 820
ČESKÁ REPUBLIKA	6 566	10 012	10 055

Zostrojte diagram na milimetrovom papieri, v ktorom porovnáte trojicu údajov: vycestovanie do jednotlivých krajín v rokoch 1995, 1996, 1997.
(100 tis = 10 mm).

16 CVIČENIA NA OPAKOVANIE

1. Napíšte všetky zlomky, v ktorých čitateľ bude jedno z čísel 0, 1 a menovateľ jedno z čísel 2, 4.

2. Zapíšte v tvare zlomku: a) Aká časť metra je jeden decimeter?
b) Aká časť decimetra sú tri centimetre?

3. Zapíšte v tvare zlomku: a) Aká časť hodiny je jedna minúta?
b) Aká časť hodiny je 15 minút?

4. Zapíšte v tvare zlomku: $4\frac{2}{7}$, $5\frac{3}{8}$, $2\frac{4}{5}$, $13\frac{2}{3}$, $2\frac{14}{17}$.

5. Zapíšte v tvare zmiešaného čísla: $\frac{11}{3}$, $\frac{23}{4}$, $\frac{63}{5}$, $\frac{1\,025}{4}$, $\frac{135}{34}$.

6. Usporiadajte podľa veľkosti: $\frac{9}{7}$, $\frac{11}{5}$, $\frac{2}{3}$.

7. Napíšte aspoň tri čísla, ktoré vyhovujú nerovnici $x > \frac{1}{5}$.

8. Žiaci Miško a Janko boli pomáhať pri zbere jahôd. Miško z celkového množstva 75 kg jahôd nazbieral $\frac{2}{5}$ a ostatné nazbieral Janko. Koľko kg jahôd nazbieral Janko?

9. Liter petroleja má hmotnosť $\frac{4}{5}$ kg, liter benzínu je o $\frac{1}{10}$ kg ľahší. Akú hmotnosť má liter benzínu?

10. Vypočítajte: a) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right):\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)$, b) $\left(2\frac{1}{2}+2\frac{1}{3}\right).\left(2\frac{1}{2}-1\frac{1}{3}\right)$.

11. Víno sa predáva vo fľašiach s objemom $\frac{7}{10}$ l. Koľko takýchto fliaš potrebujeme na stočenie 70 l vína?

12. Koľko krokov urobí Miško vo vzdialenosti $60\frac{3}{5}$ m, ak jeho krok meria $\frac{3}{5}$ m?

13. Vyjadrite v tvare zlomku: a) 6,3; b) 1,03; c) 0,003.

14. Vyjadrite v tvare desatinného čísla:

15. Tyč je zabetónovaná do $\frac{2}{7}$ svojej dĺžky. Nad zemou vyčnieva 65 cm. Aká dlhá je celá tyč?

16. Tri pristavené železničné vagóny majú úložný priestor 65 m^3. Dopoludnia robotníci naložili $21\frac{3}{4}$ m^3, popoludní naložili $19\frac{3}{5}$ m^3. Aký objem zostal na naloženie na druhý deň?

17. V kotli bolo 275 l šťavy. Odparením sa jej objem zmenšil na $\frac{3}{5}$. Aký objem šťavy zostal v kotli po odparení?

18. Napíšte číselné výrazy a určte ich hodnoty:
a) súčet čísel 18,08 a -2,02,
b) rozdiel čísla tri osminy a osem tretín,
c) súčin čísel mínus tri štvrtiny a mínus dve pätiny,
d) podiel čísel -1,6 a 15.

19. Vypočítajte: a) $0,5 + 0,04 \,.\, 8 - (1,7 + 2,3) : 10$
b) $-0,16 : 4 + 0,5 - 0,8 + (10 - 20,5) : 5$

20. Napíšte číselné výrazy a určte ich hodnoty:
a) k súčtu čísel $\frac{5}{3}$ a $\frac{3}{5}$ pričítajte ich rozdiel a podiel,
b) podiel čísel 100 a 75 zmenšený o $\frac{1}{4}$.

21. Určte hodnotu výrazu s premennou (môžete riešiť tabuľkou):
a) $5 - 3x$ pre $x = 1; -2; 0,4; \frac{1}{3}$
b) $\frac{a}{4} + \frac{a}{2}$ pre $a = 12; -10; -\frac{3}{2}; 0,8$

22. Napíšte ako výraz: a) päťkrát viac ako x,
b) o 6 viac ako y,
c) o jednu štvrtinu menej ako $\frac{7}{2}$,
d) trikrát menej ako $\frac{a}{5}$.

23. Vypočítajte: a) $8x - (12x + 5) + (3x - 5)$
b) $(2x + 6) + (3x - 8) - (6x + 1)$
c) $(x + 0,11) - (-3x + 4,44)$

24. Od súčtu výrazov $(10a + 11)$ a $(10 - 11a)$ odčítajte ich rozdiel.

25. Zapíšte výrazy: a) k rozdielu čísel a a b sme pričítali rozdiel čísel c a d,
b) k číslu $2a$ sme pričítali $3b$ a rozdiel čísel c a $-3d$.

26. Vypočítajte: a) $(100y + 10x) : (-10)$
b) $(18a + 27b) : 9$
c) $(16x + 14) : 0,2$

27. Zjednodušte: a) $5 + (6x - 2) \,.\, 3 + x$
b) $3x + 6y + 2(x - y) + (10x + 15y) : (-3)$

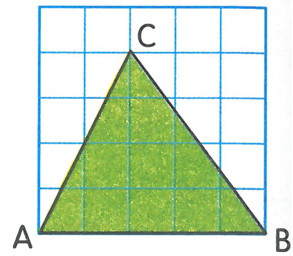
28. Vypočítajte obvod obdĺžnika, ak jedna strana má dĺžku $\boldsymbol{x}$ a druhá strana je dvakrát kratšia.

29. Upravte výrazy vyňatím najväčšieho spoločného deliteľa:
a) $15a + 10b + 5c$ b) $12a + 18b - 21c$ c) $16a - 24b + 80c$

30. Do 7. A chodí $\boldsymbol{x}$ žiakov, do 7. B o 5 viac a do 7. C o 3 menej ako do 7. B. Koľko žiakov je vo všetkých siedmych triedach spolu?

31. Vynásobte:
a) $\left(\frac{5}{2}x - 6\right) . \left(\frac{-4}{3}\right)$ b) $(6x - 1{,}2y) . 0{,}6$ c) $1{,}5 . (0{,}5 - 1{,}6x)$

32. Akú veľkú časť obsahu štvorca vypĺňa trojuholník ABC? Aký obsah má nevyfarbená časť?



33. Napíšte namiesto hviezdičiek čísla, aby platila:
a) rovnosť: $\frac{*}{8} = \frac{10}{40} = \frac{30}{*} = \frac{15}{*}$
b) nerovnosť: $\frac{*}{3} < \frac{*}{6} < \frac{10}{*} < \frac{*}{5}$

34. Polovica zo všetkých stromov v ovocnom sade bola napadnutá škodcami. Po prvom použití ekologického postreku sa ovocinárom podarilo zachrániť $\frac{1}{3}$ z napadnutých stromov. Po druhom použití postreku ešte $\frac{10}{15}$ stromov. Bol postrek dostatočne účinný?

35. Do prázdnych políčok tabuľky doplňte čísla tak, aby platil počtový výkon vyznačený šípkou na obrázkoch a), b), c), d).

a) $+\frac{2}{7}$

$\frac{3}{8}$			$\frac{9}{10}$
	$\frac{2}{3}$	$-\frac{3}{14}$	

b) $-\frac{3}{4}$

$\frac{5}{6}$		-5	3,5
	$-\frac{3}{4}$		

c) $\cdot 1\frac{1}{5}$

$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{5}$		
		1	4,8

d) $: 1{,}2$

$\frac{3}{8}$	0	0,6	
			$\frac{1}{2}$

36. Z poškodeného kohútika vytečie denne (24 hodín) 84 l vody.
a) Koľko litrov vody vytečie za $\frac{3}{4}$ dňa?
b) Za koľko dní vytečie 21 hektolitrov?

37. Zloženie bylinkového čaju je takéto:
$\frac{1}{10}$ zmesi tvorí kozlík lekársky, $\frac{2}{5}$ mäta pieporná a $\frac{1}{2}$ kvet rumančeka. Koľko gramov byliniek je v 1 kg zmesi?

38. Upravte: a) $\dfrac{\frac{1}{4} + \frac{2}{5}}{\frac{7}{10} - \frac{1}{4}}$ b) $\dfrac{\frac{3}{8} - 1}{5}$ c) $\dfrac{-2\frac{1}{2}}{-\frac{4}{7} - \frac{1}{2}}$

39. Bod X rozdeľuje úsečku AB dĺžky 12 cm na dve úsečky, ktorých dĺžky sú v pomere 3 : 5 . Určte dĺžky úsečiek AX a BX.

40. Výkony troch strojov môžeme vyjadriť postupným pomerom 2 : 5 : 7 . Stredným strojom vyrobili za 1 hodinu 325 súčiastok. Čo môžete zistiť z daných údajov?

41. Napíšte mierku, ktorá vyjadruje, že zobrazené predmety sú:
a) 120-krát zmenšené,
b) nakreslené v skutočnej veľkosti,
c) 250-krát zväčšené.

42. 120 m priadze má hmotnosť 3,2 g. Koľko metrov priadze má hmotnosť 100 g?

43. Auto idúce z mesta ***A*** do Bratislavy priemernou rýchlosťou 105 km/h absolvovalo cestu za 2 hodiny. Akou rýchlosťou by muselo ísť auto, ak by posádka mala byť v Bratislave o 15 minút skôr?

44. Podľa originálu obrazu Ľudovíta Fullu Pieseň a práca boli v pomere 2 : 5 zhotovené reprodukcie s rozmermi 66 cm x 80,2 cm. Aké sú skutočné rozmery obrazu? Navrhnite niekoľko ďalších veľkostí reprodukcií podľa tohto originálu.

45. V škole je 1 200 žiakov. V prvom polroku mali takéto známky z matematiky: výborne 10 %, veľmi dobre 25 %, dobre 50 %, dostatočne 10 %. Zvyšok mal známku nedostatočný. Koľko bolo jedničkárov, dvojkárov ... ?

46. Semená repky olejnej obsahujú 32 % oleja. Koľko oleja je v 100 kg semien?

47. Na štvorčekovaný papier narysujte obdĺžnik, ktorého obsah je 200 štvorčekov. Vyfarbite rôznymi farbami 1 %; 5 %; 10 %; 15 %; 20 % obsahu obdĺžnika.

48. Na štvorčekovaný papier narysujte obdĺžnik so stranami dĺžky 5 a 20 štvorčekov. Narysujte druhý obdĺžnik, ktorého obsah je 115 % obsahu prvého obdĺžnika.

49. Vieme, že 10 % zo 120 sa rovná 12. Vypočítajte spamäti, koľko je:
a) 5 %　　b) 20 %　　c) 30 %　　d) 90 %

50. Vieme, že 25 % = $\frac{1}{4}$, 50 % = $\frac{1}{2}$, 75 % = $\frac{3}{4}$. Vypočítajte spamäti tieto počty percent, ak základ je 360.

51. Narysujte úsečku, ktorej dĺžka je 120 mm. Bez predchádzajúceho výpočtu narysujte druhú úsečku, ktorej dĺžka je 75 % prvej úsečky. Výpočtom skontrolujte.

52. Vypočítajte: a) 149 % zo 105 b) 152 % z 2 000 c) 276 % z 8

53. Čo je viac?
a) 75 % zo 420 alebo 60 % z 520
b) 4 % zo 75 alebo 5 % zo 70
c) 120 % zo 6 alebo 150 % z 5

54. Šunka obsahuje 25 % bielkovín, 36 % tuku, 28 % vody a zostatok sú minerálne látky. Koľko kilogramov každej látky je v 5 kg šunky?

55. Čistá hmotnosť tovaru sa označuje slovom netto, hrubá hmotnosť (aj s obalom) slovom brutto, ich rozdiel (hmotnosť obalu) sa označuje slovom tara. Aké percento tvorí tara, ak brutto tovaru je 12 kg, netto 11,2 kg?

56. Záhradkár pestuje zeleninu na 492 m^2, čo predstavuje 82 % plochy záhrady. Aká je výmera celej záhrady?

57. V cukrárni mali zásobu 80 kg vlašských orechov. 56 kg už spotrebovali. O koľko percent sa znížili zásoby vlašských orechov?

58. Predpokladaná tržba na jeden deň bola v obchode 26 500 korún. Skutočná tržba bola 24 280 korún. Koľko percent z predpokladanej tržby predstavuje skutočná tržba?

59. Zo 625 stieracích losov predali 84 %. Koľko losov majú ešte predať?

60. Vypočítajte počet percent, ak
a) základ je 400 a percentová časť 280
b) základ je 5 600 a percentová časť 4 800
c) základ je 10 500 a percentová časť 6 300

61. Jedna nádrž na vodu má objem 70 l, druhá $36\frac{1}{2}$ l. O koľko percent je objem prvej nádrže väčší než objem druhej nádrže? (Výsledok zaokrúhlite na jednotky.)

V cvičeniach 62 - 67 vyberte správnu odpoveď.

62. V roku 1977 sa na gymnázium hlásilo 720 žiakov. V roku 1998 počet záujemcov klesol o 15 %. Koľko žiakov sa hlásilo na gymnázium v roku 1998?
A 608 **B** 620 **C** 612

63. Zjazdové lyže stáli 5 600 Sk. Po sezóne ich cenu znížili o 25 %. Koľko stáli lyže po zlacnení? **A** 1 400 Sk **B** 4 200 Sk **C** 3 600 Sk

64. Zo 100 kg mlieka sa vyrobí 4,6 % masla.

a) Koľko kilogramov masla sa vyrobí zo 100 kg mlieka?

A 4,6 kg **B** 46 kg **C** 0,46 kg

b) Koľko kilogramov masla sa vyrobí zo 400 kg mlieka?

A 1,4 kg **B** 18,4 kg **C** 124 kg

65. Cukrová repa obsahuje priemerne 14,5 % cukru. Koľko kilogramov cukru sa vyrobí z 35 ton cukrovej repy?

A 1 168 kg **B** 5 075 kg **C** 44 530 kg

66. Žiaci chceli nazbierať 150 kg šípok. Svoj záväzok splnili na 130 %. Koľko kg šípok nazbierali?

A 205 kg **B** 185 kg **C** 195 kg

67. Na obnovu lesného porastu bolo potrebné vysadiť 3 260 stromčekov. Lesným robotníkom pomáhali mladí ochranári a spolu vysadili o 5 % stromčekov viac. Koľko stromčekov vysadili?

A 3 423 **B** 3 323 **C** 3 420

68. Určte spamäti koreň rovnice:

a) $5x + 3 = 38$ b) $-x - 4 = -1$ c) $18 = 3x - 3$ d) $11x - 5 = 10x + 4$

69. Zistite, či číslo $\boldsymbol{x} = 3$ je koreňom danej rovnice:

a) $3x - 16 + 8x = 12x + 20$ b) $2x + 4x + 6x = 100 - 64$

70. Ktoré z nasledujúcich rovníc majú rovnaký koreň?

a) $2x - (5 - x) = 7$ c) $2x + (5 - x) = 7$

b) $x + 3(x - 1) = 5$ d) $x - 3(x + 1) = -5$

71. Riešte rovnice a urobte skúšku správnosti:

a) $y + 3y - (y + 4) = 11$ c) $8 + 2y - 9 = 3y + 7y - 5$

b) $y - 3(y - 5) + (y + 4) = 29$

72. Riešte rovnice a urobte skúšku správnosti: a) $\frac{5x}{2} = \frac{4x}{3} + 1$ b) $\frac{1}{5} - 2x = \frac{2}{5} + x$

73. Odôvodnite, prečo dané rovnosti nie sú rovnicami:

a) $3x - (5 - 9x) = 3 \,.\, (x - 1) - 2 + 9x$ c) $\frac{x+5}{3} - \frac{x}{2} = \frac{x-2}{3} - \frac{x-3}{2}$

b) $3x - (x - 6) = -\frac{1}{2}(1 - 2x)$

74. Riešte rovnicu, skúšku správnosti urobte spamäti.

a) Číslo a zväčšené o svoju pätinu sa rovná rozdielu svojho trojnásobku a čísla 9.

b) Desať percent z čísla x je o 108 menšie ako číslo x.

c) Číslo $\boldsymbol{y}$ sa rovná súčtu svojej štvrtiny a tretiny zväčšenej o 250.

75. Vieme, že $x = \frac{4}{7}x + \frac{2}{7}x + 14$. Čomu sa rovná $5x$?

76. Nahraďte * znakom počtovej operácie tak, aby rovnica, ktorá vznikne, mala koreň $\boldsymbol{x} = 0$.
a) 2x * 5 = x + 5   b) 12 * (-8x) = 12 * 4x   c) 6 . (x + 3) = x * 18

77. Súčet troch po sebe idúcich nepárnych čísel je 333. Ktoré sú to čísla?

78. V obchode platili traja kupujúci spolu 1 000 Sk. Prvý platil päťkrát viac ako druhý, tretí o 300 korún viac ako druhý. Koľko Sk platil každý z nich?

79. Všetci žiaci školy išli na filmové predstavenie. V kine je 380 sedadiel. Dva rady po 18 sedadiel zostali neobsadené, 15 miest obsadili učitelia. Koľko žiakov bolo v kine?

80. Anička má 3-krát toľko rokov ako Janka. O 6 rokov bude Anička len 2-krát staršia ako Janka. Koľko rokov majú Anička a Janka teraz?

81. Trom robotníkom rozdelili sumu 9 000 Sk. Druhý dostal 1,5-krát viac ako prvý a tretí o 50 % menej ako prvý. Koľko Sk dostal každý?

V cvičeniach 82-86 vyberte správnu odpoveď.

82. Otec má 36 rokov, jeho synovia 15, 14 a 9 rokov. Kedy bude mať otec toľko rokov, ako všetci jeho synovia spolu?
A o rok   **B** bolo to minulý rok   **C** nikdy

83. Mesačný zisk rozdelil podnikateľ na 4 diely takto: jeden diel sa rovnal jednej dvanástine zisku, druhý diel bol 2-krát väčší ako prvý diel, tretí diel bol 1,5-krát väčší ako druhý diel a štvrtý diel bol 24 000,- Sk. Aký bol mesačný zisk podnikateľa?
A 30 000 Sk   **B** 48 000 Sk   **C** 66 500 Sk

84. V košíku boli hrušky. Prvý deň deti zjedli jednu tretinu, druhý deň polovicu zo zvyšku, tretí deň dve tretiny zvyšku a štvrtý deň posledné 3 hrušky. Koľko hrušiek bolo v košíku?
A 18   **B** 54   **C** 27

85. Robotník vyrobil dopoludnia 28 súčiastok, čo predstavuje $\frac{2}{3}$ jeho dennej normy. Koľko súčiastok musí vyrobiť do konca zmeny, ak chce normu prekročiť o $\frac{1}{3}$?   **A** 28   **B** 14   **C** 42

86. Peter prečítal knihu za 12 dní. Ak by prečítal každý deň o 5 strán viac, prečítal by ju o 4 dni skôr. Koľko strán má kniha?
A 120   **B** 136   **C** 96

87. Lichobežník má dĺžky základní 10 cm a 6 cm. Môže mať výšku 4,5 cm, keď jeho obsah je 32 cm^2?

88. Akú hmotnosť bude mať hrada zo smrekového dreva, keď dĺžka hrady je 6 m a prierez hrady je 196 cm^2? 1 dm^3 smrekového dreva má hmotnosť 0,55 kg.

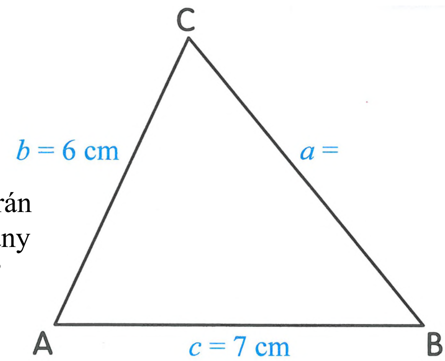
89. Zostrojte trojuholník ABC, ak sú dané:

a) $a = 5$ cm, $b = 6$ cm, $c = 7$ cm,

b) $c = 8$ cm,$\alpha = 45°$, $\beta = 60°$,

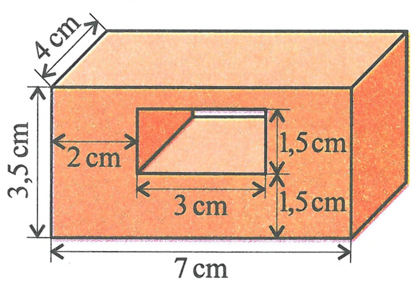
c) $a = 6$ cm, $\gamma = 60°$, $b = 6$ cm.

90. Na obrázku sú uvedené dĺžky dvoch strán trojuholníka. Doplňte rozmer tretej strany (celé číslo). Existuje len jedno riešenie?

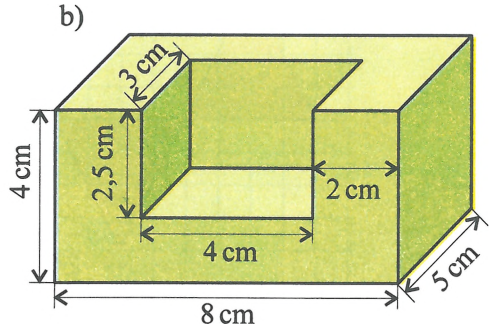


91. Vypočítajte objem a povrch telesa:

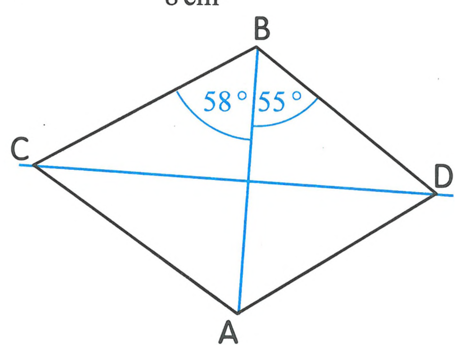
a)



b)



92. Priamka *CD* na obrázku je osou úsečky *AB*. Súčasne sú vyznačené uhly pri vrchole *B*. Sú trojuholníky *ABC, ABD* zhodné? Prečo?

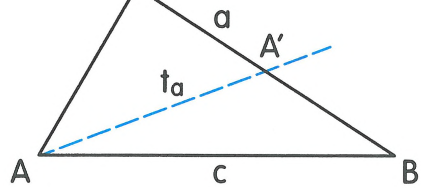


93. Na obrázku je narysovaný trojuholník *ABC*. Je v ňom vyznačená ťažnica t_a. Rozhodnite, či uvedené dĺžky môžu byť rozmermi v trojuholníku *ABC:*

a) $c = 1$ cm, $a = 6$ cm, $t_a = 10$ cm,

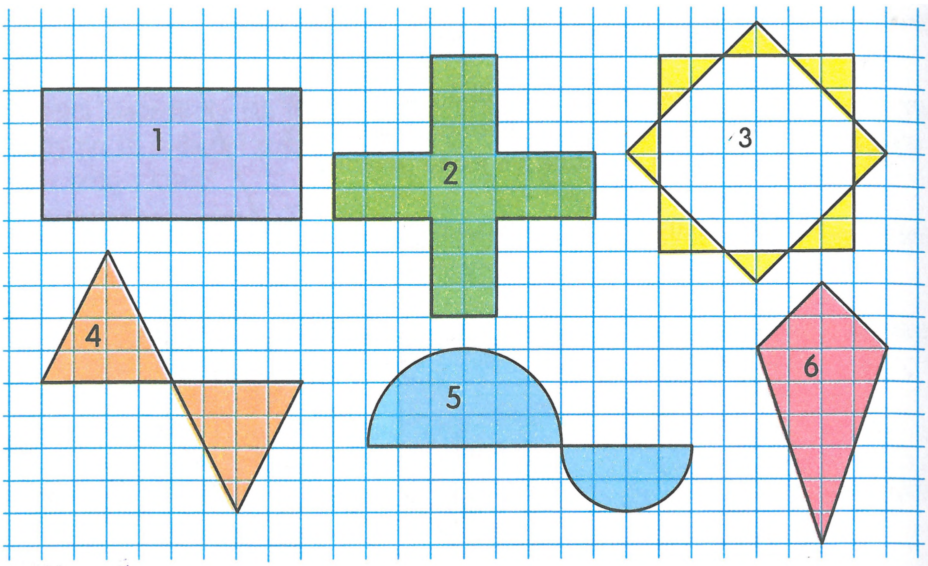
b) $c = 8$ cm, $a = 7$ cm, $t_a = 10$ cm,

c) $c = 7$ cm, $a = 6$ cm, $t_a = 8$ cm.



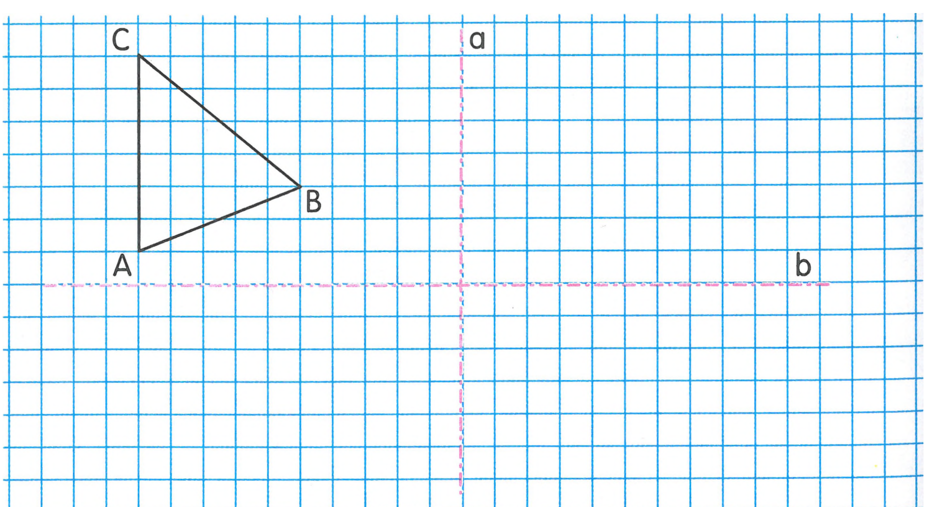
94. Narysujte trojuholník *ABC,* v ktorom poznáme $a = 7$ cm, $t_b = 9$ cm, $t_c = 7{,}5$ cm.

95. V štvorcovej sieti sú nakreslené útvary a sú očíslované číslami. Nakreslite ich na štvorčekovaný papier a vypíšte:
a) všetky osovo súmerné útvary (vyznačte osi súmernosti)
b) všetky stredovo súmerné útvary (vyznačte stred súmernosti)
c) všetky stredovo a súčasne osovo súmerné útvary.



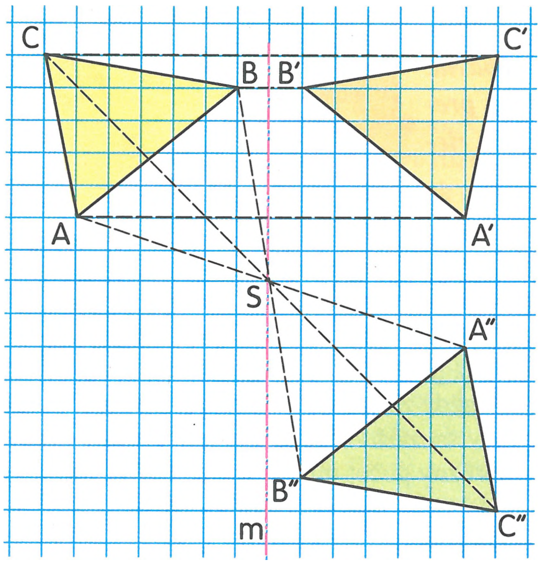
R

96. Dané sú dve navzájom kolmé priamky *a, b* a trojuholník *ABC.* Zostrojte obraz *A'B'C'* trojuholníka *ABC* v osovej súmernosti s osou *a,* potom zostrojte obraz *A"B"C"* trojuholníka *A'B'C'* v osovej súmernosti s osou *b.* Sú trojuholníky *ABC* a *A"B"C"* zhodné? Je trojuholník *A"B"C"* obrazom trojuholníka *ABC* v stredovej súmernosti so stredom *S*?



R **97.** Platí tvrdenie: Ak útvar U má dve osi súmernosti a tieto sú na seba kolmé, potom je aj stredovo súmerný? Nakreslite niekoľko takých útvarov.

R **98.** Na obrázku je daný trojuholník ABC. Trojuholník $A'B'C'$ je obrazom trojuholníka ABC v osovej súmernosti s osou m. Trojuholník $A''B''C''$ je obrazom trojuholníka ABC v stredovej súmernosti so stredom v bode S ($S \in m$). Viete zostrojiť priamku n tak, aby v osovej súmernosti s osou n bol trojuholník $A''B''C''$ obrazom trojuholníka $A'B'C'$?



99. Narysujte pravidelný šesťuholník $ABCDEF$. Vyznačte v ňom všetky osi súmernosti a stred súmernosti.

100. Nakreslite ľubovoľný útvar **U**, ktorý bude osovo aj stredovo súmerný.

101. Daný je trojuholník ABC. Zostrojte
a) priesečník jeho výšok,
b) ťažisko.

102. Daný je trojuholník ABC a v ňom vyznačená ťažnica t_b. Zostrojte ťažisko tohto trojuholníka bez zostrojenia ďalších ťažníc.

103. Na tanečnom večierku štyria chlapci Miško, Robo, Jožko a Andrej sedeli pri jednom stole so štyrmi dievčatami Ľubkou, Katkou, Alenkou a Zuzankou. Začali hrať do tanca. Koľko možných tanečných dvojíc mohli utvoriť?

ROZUM DO HRSTI

Milí siedmaci, v prvej časti učebnice ste sa stretli s 13 úlohami. Boli to úlohy matematickej olympiády. Aj teraz vám ponúkame 13 úloh. Sú to netradičné, ale zábavné úlohy. Pokúste sa ich vyriešiť. Sme presvedčení, že budete mať radosť z ich riešenia. Veľa úspechov!

1. ***Dobročinný testament***

Jeden pán nechal vo svojom testamente pokyn, aby sa raz ročne rozdalo 66 000 korún medzi chudobnými v jeho štvrti. Ale v plnení tohto pokynu sa má pokračovať len tak dlho, pokým sa to bude môcť uskutočniť rôznymi spôsobmi za podmienky, že každá zo žien dostane 1 800 korún a každý z mužov 3 000 korún. Koľko rokov sa môže dobročinný príspevok rozdávať? Rôznymi spôsobmi sa rozumie rôzny počet mužov a žien každý rok.

2. ***Nekontrolovaná dobročinnosť***

Láskavého muža jedného večera cestou domov požiadali postupne traja chudobní o peniaze. Prvému dal o korunu viac ako bola polovica toho čo mal práve vo vrecku. Druhému dal o dve koruny viac ako bola polovica zostatku jeho hotovosti. Tretiemu dal o tri koruny viac, ako bola polovica jeho poslednej hotovosti. Po príchode domov mal jednu korunu. Môžeme presne povedať, koľko korún mal na začiatku svojej cesty?

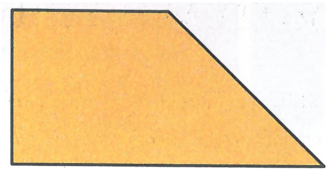
3. ***Rodinný večierok***

Istého rodinného večierka sa zúčastnil 1 dedko, 1 babička, 2 oteckovia, 2 mamičky, 4 deti, 3 vnúčatá, 1 brat, 2 sestry, 2 synovia, 2 dcéry, 1 nevesta, 1 svokor a 1 svokra. Povedali by ste 23 ľudí. Ale nie, bolo tam len 7 osôb. Viete ako je to možné?

4. ***Vybrané správanie***

V istej zmiešanej škole, v ktorej vštepovali svojim žiakom zvláštne spôsoby vybraného správania, pestovali neobyčajný druh pozdravu na rannom zhromaždení. Každé dievča sa poklonilo každému inému dievčaťu, každému chlapcovi a učiteľovi. Každý chlapec sa poklonil každému inému chlapcovi, každému dievčaťu a učiteľovi. Dievčat bolo dvakrát viac ako chlapcov. Celkom sa v tejto vzornej škole vykonalo každé ráno deväťsto poklôn. Dokážete vypočítať, koľko bolo v škole chlapcov?

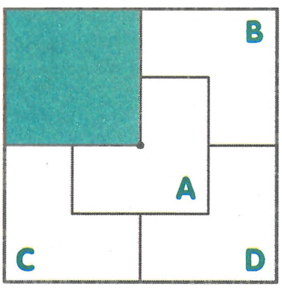
5. ***Delenie obrazca***



Vystrihnite z papiera obrazec rovnakého tvaru ako je na obrázku. Je to pravouhlý lichobežník, ktorý možno rozdeliť na štvorec a polovicu zhodného štvorca. Úlohou je rozdeliť daný obrazec na štyri časti rovnakého tvaru a veľkosti.

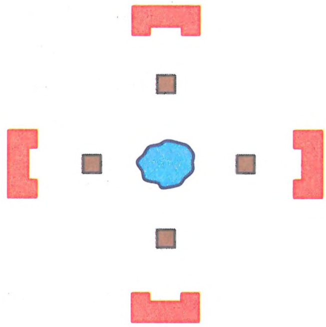
6. ***Štyria synovia***

Jeden muž vlastnil štvorcový pozemok. Svojej manželke zanechal jednu štvrtinu (je zafarbená). Zvyšok má byť rozdelený rovnakým dielom medzi štyroch synov tak, aby každý dostal pozemok rovnakej veľkosti a rovnakého tvaru. Na obrázku je vyznačené také delenie. Uprostred pozemku bola studňa, ktorá je vyznačená bodkou. Benjamín, Cyril a Dávid sa sťažovali, že rozdelenie nie je spravodlivé, pretože Alfréd má prístup k studni, ale oni sa k nej nemôžu dostať priamo zo svojich pozemkov. Úlohou je ukázať, ako sa má pozemok rozdeliť, aby každý syn dostal kus zeme rovnakej veľkosti a tvaru a pritom, aby každý mal prístup k studni bez toho, aby vstúpil na cudzí pozemok.



7. ***Problémový múr***

Okolo jedného malého jazera si štyria chudobní postavili malé domčeky. Potom si štyria bohatí postavili svoje panské sídla (ako je znázornené na obrázku). Bohatí chceli mať jazierko len pre seba a preto nariadili staviteľovi, aby postavil čo najkratší múr, ktorý by im umožnil voľný prístup k jazeru a znemožnil prístup k jazeru chudobným. Ako sa mal múr postaviť?

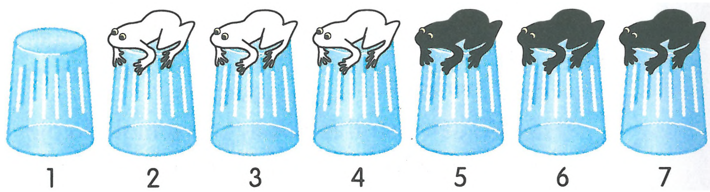


8. ***Desať mincí***

Položte desať mincí na papier štvorcového tvaru, ako je to znázornené na obrázku, a to päť na každú stranu. Potom premiestnite štyri mince (bez toho, aby ste pohli ostatnými) tak, aby týchto desať mincí utvorilo päť radov po štyroch minciach. Navrhnite niekoľko možností.

9. ***Chytré žaby***

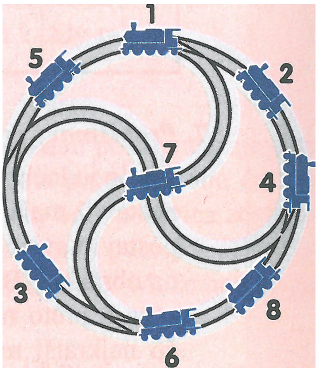
Našich šesť chytrých žiab sa naučilo ďalšie nové a efektné vystúpenie. Keď sa postavia na poháre podľa obrázka, potom si vedia skokmi vymeniť strany tak, že tri čierne budú vľavo, tri biele vpravo a prázdny zostane pohár na opačnom konci (pohár č. 7).



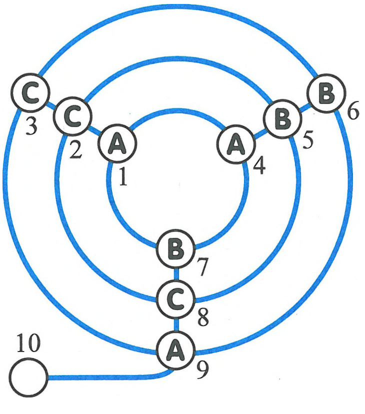
Môžu skákať na susedný prázdny pohár, alebo cez jednu alebo dve žaby na nasledujúci prázdny pohár. Skákať sa môže oboma smermi cez rovnakú farbu, opačnú alebo obe farby. Štyri nasledujúce príklady skokov to objasnia: zo 4 na 1, z 5 na 4, z 3 na 5 a zo 6 na 3. Dokážete vymyslieť, ako to urobiť desiatimi skokmi?

10. ***Osem lokomotív***

Obrázok znázorňuje lokomotívové depo. Lokomotívy majú stanovištia na deviatich vyznačených miestach, jedna výhybka je teraz prázdna. Vedenie depa prikázalo presunúť lokomotívy postupne jednu po druhej tak, aby pomocou sedemnástich presunov holi usporiadané podľa svojich čísel na vonkajšom obvode a stred zostal voľný. Ale jednej z nich došla para a nemohla sa pohybovať. Ako to zariadili? A ktorá lokomotíva zostala po celú dobu presunu na svojom mieste?

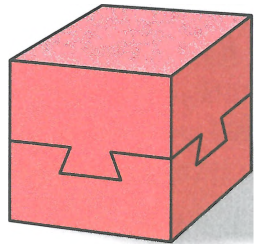


11. ***Železničný hlavolam***



Prekreslite si obrázok na veľký list papiera a označte tri lokomotívy písmenom A, tri písmenom B a tri písmenom C. Na obrázku je na priesečníkoch čiar deväť krúžkov a desiaty je pripojený k vonkajšiemu kruhu. Umiestnite trojice lokomotív označené písmenami A, B, C na miesta podľa obrázka. Úlohou je presúvať lokomotívy jednu po druhej po čiarach z miesta na miesto pokiaľ sa nepodarí dostať A, B, C na každý kruh a súčasne na každú priamu čiaru. Aký je najmenší počet ťahov, ktorými sa dá daná úloha vyriešiť?

12. ***Spojené kusy***



Na obrázku je zostava z dvoch kusov dreva pevne spojených. Na dvoch stenách, ktoré sú vzadu, sú spojenia rovnako vyznačené ako na predných. Ako sa podarilo kusy spojiť?

13. ***Kto bol prvý?***

Anderson, Briggs a Carpenter stáli na brehu mora. Rozhodli sa previesť sa na člne. Keď boli asi kilometer a pol od brehu, niekto vystrelil ich smerom. Kto a prečo strieľal nás nezaujíma, pretože o tom nemožno nič zistiť. Z daných skutočností ale môžeme sformulovať úlohu.
Zdá sa, že Anderson počul len výstrel, Briggs spozoroval záblesk a dym, Carpenter videl ako strela rozvinila vodu. Otázka: Ktorý z nich prvý vedel o výstrele?

Nikolaj Ivanovič Lobačevskij

(1. 12. 1792 až 24. 2. 1856)

Ruský matematik. Narodil sa v Nižnom Novgorode, pôsobil ako profesor na univerzite v Kazani. Položil základy neeuklidovskej geometrie. Jej objav zohral významnú úlohu nielen v rozvoji geometrie, ale celej matematickej vedy. Dosiahol pozoruhodné výsledky v teórii funkcií a v teórii trigonometrických radov.

VÝSLEDKY ÚLOH A CVIČENÍ

7 Lineárne rovnice

7.1 Rovnosť a rovnica

Úlohy: **2.a)** $\neq$; **b)** = ; **c)** $\neq$; **d)** = ; **3.a)** $7x + 6$; **b)** $3y - 12$; **c)** $1{,}6z - 2$; **d)** $a - 11$; **e)** $-0{,}8 + 0{,}4b$; **f)** $5c + 3$; **4.a)** $17(x + 2)$; **b)** $3(4 - 3y)$; **c)** $2(4 + 5z)$; **d)** $8(2s - 1)$; **5.a)** áno; **b)** áno; **c)** nie; **7.a)** $x + 6 = 2$; $x = -4$; **b)** $x - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$; $x = \frac{3}{4}$; **c)** $x : 5{,}2 = 2$; $x = 10{,}4$; **d)** $x \,.\, 3 = 3{,}3$; $x = 1{,}1$; **8.a)** $y = -3{,}7$; **b)** $z = 0{,}5$; **c)** $a = \frac{1}{4}$; **d)** $b = \frac{11}{5}$.

Cvičenia: **2.a)** $\neq$; **b)** $\neq$; **c)** = ; **d)** = ; **3.a)** $2x + 6$; **b)** $2x - 2$; **c)** $-2x + 2$; **d)** $2x + 6$; **4.a)** 22; **b)** $24{,}6y + 1{,}5$; **c)** $0{,}2y$; **d)** $-0{,}5 - 0{,}5y$; **5.a)** $x = 5$; **b)** $x = -\frac{1}{7}$; **c)** $x = 2$; **6.a)** $4a + 5$; **b)** $4{,}4a$; **c)** $\frac{10}{3}a$; **7.a)** áno; **b)** nie; **c)** nie; **d)** áno; **8.a)** $x = 2$; **b)** $x = -1$; **10.a)** $x = 1$; **b)** $z = -\frac{1}{10}$; **c)** $y = \frac{7}{2}$; **d)** $x = 0$.

7.2 Úpravy lineárnych rovníc

Úlohy: **2.a)** $z = 45$; **b)** $z = -3$; **c)** $z = 4$; **d)** $z = 39{,}2$; **3.a)** $x = 8$; **b)** $x = 9$; **c)** $x = 4$; **d)** $x = 7$.

Cvičenia: **1.** 100 g; **2.** 0,3 kg; **3.a)** predmet + 1 kg + 3 kg = 9 kg; **b)** predmet + 3 kg = = 1 kg + 9 kg; **c)** predmet + 1 kg = 3 kg + 9 kg; **4.a)** $y = 4$; **b)** $y = 90$; **c)** $x = -\frac{25}{2}$; **d)** $x = \frac{18}{5}$; **5.a)** $z = -\frac{18}{5}$; **b)** $x = -\frac{12}{7}$; **c)** $x = 6$; **d)** $x = 27$; **6.** B.

7.3 Riešenie jednoduchých lineárnych rovníc

Úlohy: **1.a)** $y = 11$; **b)** $x = 2$; **c)** $z = 1$; **d)** $x = 3$; **2.a)** $x = \frac{2}{3}$; **b)** $x = \frac{5}{2}$; **c)** $x = -\frac{13}{6}$; **4.a)** $x = 0{,}5$; **b)** $y = -9$; **c)** $x = 0{,}5$; **5.a)** $x = 25$; **b)** $x = -21$; **c)** $x = 11$; **d)** $x = 6$; **6.a)** $x = 4$; **b)** $x = -6$; **c)** $x = -1$; **d)** $x = -3{,}1$; **7.a)** $x = 25$; **b)** $y = 2$; **c)** $x = -1$; **8.** dostaneme: **a)** $0 = 5$; **b)** $0 = -2$; **9.** dostaneme: **a), b)** $0 = 0$; **10.a)** áno, $n = 0$; **b)** nie $0 = -11{,}8$; **11.a)** nie, má nekonečne veľa riešení; **b)** áno, $x = 0$; **c)** nie, nemá žiadne riešenie.

Cvičenia: **1.a)** $x = -27$; **b)** $x = 1$; **c)** $x = 4$; **d)** $x = 3$; **e)** $x = 2$; **f)** $x = 110$; **g)** $x = 100$; **2.a)** $p = \frac{7}{6}$; **b)** $p = \frac{3}{5}$; **c)** $p = \frac{14}{5}$; **3.a)** $t = -\frac{1}{3}$; **b)** $t = -\frac{23}{2}$; **4.** C; **5.a)** $x = 18$; **b)** $y = 7$; **c)** $x = 3$; **d)** $x = -\frac{5}{2}$; **e)** $x = 22$; **f)** $x = 17$; **g)** $x = -1$; **h)** $x = 0$; **6.** chyba je v druhom riadku; **7.a)** nie je; **b)** nie je; **c)** je; $x = 0$; **8.** po úprave dostaneme $5 = 0$; **10.a)** $z = -\frac{5}{6}$; **b)** $y = \frac{1}{6}$; **c)** $x = \frac{1}{3}$; **11.** $x = 2$.

7.4 Slovné úlohy vedúce na riešenie lineárnych rovníc

Úlohy: **1.** 319 a 535; **2.** 65° a 115°; **3.** hrušiek 142, jabloní 426; **4.** dodávkových 59, osobných 295; **5.** 24; **6.a)** 200 km; **b)** 155 km; **7.** 18; **8.** 12; **9.** rovnica bude: $2 \,.\, (20 - x) + 4x = 64$; **10.** 303, 606, 506; **11.** $x = -3$, pred troma rokmi.

Cvičenia: **1.** 72 a 87; **2.** 74 a 79; **3.** 11,7 cm a 3,3 cm; **4.** 114 a 57; **5.** 113 a 339; **6.** 13 a 19,5; **7.** 45; **8.** 42; **9.** pomýlil; **10.** nie, potrebujú dosadiť 40 stromov; **11.** 225 km; **12.** strecha 14,7 kg; žľaby 4,2 kg; plot 1,1 kg; **13.** košeľa 360 Sk; viazanka 80 Sk, ponožky 24 Sk; **14.** 48 štvorizbových, 80 dvojizbových; **15.** 20 000; **16.** 25 rokov; **17.** 80 kg.

Historické cvičenia: **1.** 131 dní 18 hodín 27 minút 12 sekúnd; **2.** narod. 5. 12. 1738, žil 83 rokov 8 mesiacov 22 dní.

Vyskúšajte sa!

1.a) áno; **b)** áno; **2.a)** = ; **b)** ≠ ; **3.a)** $k = 16{,}04$; **b)** $k = 7{,}4$; **5.** nie; **6.a)** $x = \frac{4}{9}$; **b)** $x = \frac{8}{7}$; **c)** $x = 8$; **7.** b; **8.** 14; **9.** −8, −24, −48; **10.** 8, 11, 13; **11.** 63; **12.** pred troma rokmi; **13.** 98; **14.a)** $n = 6$; **b)** $n = 18$; **15.** dospelý 6 000 Sk; dieťa 4 850 Sk.

8 Významné prvky trojuholníka

8.1 Stredná priečka trojuholníka

Úlohy: **1.** útvar $AC_1A_1B_1$ je rovnobežník, preto $|A_1B_1| = |A_1C_1| = \frac{1}{2}|AB|$. Analogicky $|A_1C_1| = |AB_1| = \frac{1}{2}|AC|$, $|B_1C_1| = |CA_1| = \frac{1}{2}|BC|$; **2.** $\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle AC_1B_1$, $\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle A_1BC_1$, $\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle A_1B_1C$ $\triangle AC_1B_1 \cong \triangle C_1BA_1$, $\triangle AC_2B_1 \cong \triangle B_1A_1C$, $\triangle C_1BA_1 \cong \triangle B_1A_1C$.

Cvičenia: **1.** $|A_1B_1| = 3{,}5$ cm, $|B_1C_1| = 3$ cm, $|A_1C_1| = 2{,}5$ cm; **2.** $x = 15$, $y = 11$, $z = 13$; **3.** $XY \| X_1Y_1$, $Z_1 \in XY$, $|XY| = 2 \,.\, |X_1Y_1|$, $YZ \| Y_1Z_1$, $X_1 \in YZ$, $|YZ| = 2 \,.\, |Y_1Z_1|$, $XZ \| X_1Z_1$, $Y_1 \in XZ$, $|XZ| = 2 \,.\, |X_1Z_1|$; **4.** 4 cm, 7 cm, 6 cm; **5.** 25 cm; **6.a)** nie; **b)** áno; **c)** nie.

8.2 Ťažnice a ťažisko trojuholníka

Úlohy: **2.** ťažnice sa pretínajú v jednom bode.

Cvičenia: **2.a)** $|AB| \doteq 8{,}6$ cm, $|AT| \doteq 5{,}4$ cm, $|BT| \doteq 4{,}2$ cm; **b)** $|AT| \doteq 5{,}4$ cm, $|CT| \doteq 4{,}4$ cm, $|AC| = 6{,}6$ cm; **3.a)** 1,2 cm, 2 cm; **b)** 2 cm, 4 cm.

8.3 Riešenie úloh s využitím strednej priečky a ťažníc

Cvičenia: **1.** využite vlastnosti uhlopriečok štvorca a vlastnosti strednej priečky trojuholníka; **2.** rovnobežník; **3.** vyplýva z vlastnosti rovnoramenného trojuholníka; **10.** ŤAŽNICA.

Vyskúšajte sa!

1. 2,5 cm, 4 cm; **2.** obdĺžnik; **3.** 22,5 cm; **4.** vlastnosť strednej priečky trojuholníka; **5.** áno, každé dve protiľahlé strany tohto útvaru sú rovnobežné s jednou uhlopriečkou daného štvoruholníka.

9 Percentá

9.1 Delenie celku na rovnaké časti

Úlohy: **2.a)** 2 000; **b)** 23 400; **c)** 150; **d)** 30; **3.** $\frac{70}{100}$; $\frac{40}{100}$; $\frac{100}{100}$; $\frac{125}{100}$; $\frac{15}{100}$; $\frac{84}{100}$; $\frac{32}{100}$; **5.a)** 1 125; **b)** 0,18; **c)** $\frac{15}{24}$.

Cvičenia: **1.a)** $\frac{1}{3}$; **b)** $\frac{5}{8}$; **c)** $\frac{1}{2}$; **d)** $\frac{3}{5}$; **3.a)** 16; **b)** 12; **c)** 9 027; **d)** 410; **e)** 0,3; **f)** 0,08; **4.a)** 300; **b)** 516; **c)** 1 774, 3; **d)** 555, 39; **5.a)** 4 800; **b)** 9 600; **c)** 14 400; **d)** 19 200; **e)** 28 800; **f)** 57 600; **6.a)** 40; **b)** 48; **c)** 9; **d)** 7; **7.a)** $\frac{75}{100}, \frac{40}{100}, \frac{48}{100}, \frac{45}{100}, \frac{190}{100}, \frac{4}{100}$; **b)** $\frac{25}{100}, \frac{47}{100}, \frac{15}{100}, \frac{1}{100}, \frac{99}{100}, \frac{21}{100}$; **c)** $\frac{120}{100}, \frac{300}{100}, \frac{250}{100}, \frac{602}{100}, \frac{10\,000}{100}, \frac{580}{100}$; **8.a)** $\frac{1}{15}$; 50g; **b)** $\frac{1}{5}$; 150g; **c)** $\frac{1}{25}$; 30g.

9.2 Jedno percento. Percentová časť

Úlohy: **1.a)** 2; **b)** 0,07; **c)** 0,025; **d)** $\frac{1}{500}$; **2.** 15; **3.** 29,1 l; **4.** 50, 100, 150, . . . , 450; **6.** 624 000; **7.** pomarančovej 400 g; citrónovej 100 g; jablkovej 300 g; cukru 150 g, vody 50 g; **9.** zlomky: $\frac{3}{50}$; $\frac{2}{25}$; $\frac{3}{20}$; $\frac{3}{10}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{3}{4}$; percentová časť: 60, 80, 150, 300, 400, 750; **11.a)** na 116 %; **b)** 348; **12.a)** 6 600; **b)** 759; **c)** 21,1.

Cvičenia: **1.a)** 52 km; **b)** 2 kg; **c)** 65 Sk; **d)** 0,076 l; **2.a)** 0,07; **b)** 0,008; **c)** 0,000 3; **d)** $\frac{1}{500}$; **e)** $\frac{3}{200}$; **f)** $\frac{1}{24}$; **3.** 613,8 kg; **4.** 255 g; **5.** prvej 380, druhej 20; **6.** 2 846 760; **7.** 100 100; **8.** 288 plavcov, 162 neplavcov; **9.a)** 2 963,20 Sk; **b)** 230,4 t; **c)** 59,8 m; **10.a)** 1,23; **b)** 2,52; **c)** 202,488; **11.a)** 6 400; **b)** 18,715; **c)** 0,497 915; **12.** $\frac{1}{25}, \frac{3}{25}, \frac{7}{20}, \frac{13}{20}, \frac{9}{10}$; **13.** umývanie 621 l; WC 552 l; pranie 391 l; umývanie v umývačke 322 l; pitie a varenie 230 l, vonku 184 l; **14.** 8 % zo 625.

9.3 Základ

Úlohy: **1.a)** 25; **b)** 560; **c)** 5; **d)** 360; **2.** 2 700 Sk; **3.** 4.

Cvičenia: **2.a)** 650; **b)** 21 600; **c)** 400; **3.** 300 ha; **4.** 9 500 Sk; **5.** 320 000 Sk; **6.a)** 1 700; **b)** 0,6; **c)** 31; **d)** 3; **7.** 8 240 Sk; **8.** 480 m^2; **9.** 63; **10.a)** 1 400 Sk; **b)** o 280 Sk.

9.4 Počet percent

Úlohy: **2.** 65 %; **3.a)** 80 %; **b)** 5 %; **c)** 15 %.

Cvičenia: **2.a)** 8,3 %; **b)** 33,3 %; **c)** 0,03 %; **3.** 20 %; **4.** 26,8 %; **5.a)** 1 %; 15 %; 90 %; 25 %; 50 %; 0,1 %; 0,5 %; **b)** $\frac{25}{9}$ %; 25 %; $\frac{100}{9}$ %; 50 %; 75 %; 100 %; 200 %; 300 %; 400 %; **6.** o 50 %; **7.** 88 %; **8.** 18 %; **9.a)** 6,25 %; **b)** 2,8 %; **c)** 50 %; **d)** 9,09 %; **10.a)** 50 %; **b)** 32 %; **11.** 13,3 %; 23,3 %; 26,7 %; 36,7 %.

9.5 Trojčlenka v percentovom počte

Úlohy: **1.** 105 t; **2.** 195; **3.** 250 000 Sk; **4.** 400; **5.** 45 %; **6.** 20 %; **7.** 5 ‰; **8.a)** 0,008; **b)** 0,4; **c)** 0,32.

Cvičenia: **1.a)** 66; **b)** 75; **c)** 150; **2.** 40 l; **3.** 80 %; **4.** 16 m^2; **5.** B; **6.** C; **7.** B; **8.** A; **9.** B; **10.** B; **11.** 70 ‰; **12.a)** 60 %; **b)** 600 ‰; **13.** 90,2 m; **14.a)** 0,01; **b)** 8; **c)** 5, 1 875; **d)** 0,189.

9.6 Úrok

Úlohy: **2.** 8 %; **3.** 120 000 Sk; **4.** za 5 mesiacov.

Cvičenia: **2.a)** 30 Sk; **b)** 8,12 Sk; **c)** 450 Sk; **3.** 33 300 Sk; **4.** 13 %; **5.** 3 400 Sk; **6.** 13 800 Sk; **7.** za 5 mesiacov; **8.** 360 000 Sk.

9.7 Diagramy

Úlohy: **2.** pondelok 36; utorok 120; streda 144; štvrtok 180; piatok 132.

Cvičenia: **4.** slovenských 300, českých 300, iné 200; **5.** 900; 2 400; 300.

Vyskúšajte sa!

1. rovnako; **2.** 0,468 kg; **3.** 4; **4.a)** 84; **b)** 7; **5.** 7 680 Sk; **6.** 1 200 Sk, **7.a)** 56 %; **b)** 2,5 %

8. 25 %; **9.a)** 2,5 %; **b)** 40 kg; **10.**

SR	22 000	≐ 25,89 %
ČR	22 000	≐ 25,89 %
Európa	41 000	≐ 48,24 %
Spolu	85 000	≐ 100 %

10 Stredová a osová súmernosť

10.1 Stredová súmernosť

Úlohy: **1.** úsečka $A'B'$; **2.** p' je priamka rovnobežná s priamkou p; **4.** útvary súmerné podľa stredu sú 1, 2, 3, 5, 7, 8, 9; **5.** áno; **6.** pravidelný šesťuholník.

Cvičenia: **2.** stred úsečky; **3.a)** úsečka; **5.** všetky okrem druhého; **6.** stred úsečky S_1S_2; **7.a)** nie; **b)**, **c)** áno; **8.** 98, 609, 986; **9.** b); **10.** 26,8 cm; **11.** 1, 4; **13.** A, G; B, H; C, E; D, F; **15.** áno.

10.2 Osová súmernosť

Úlohy: **1.** prvý, jedna os; druhý, dve osi; **2.** prvý je osovo súmerný, druhý je aj stredovo aj osovo súmerný; **4.** 1 – 4, 2 – 2, 3 – 4, 4 – 2, 5 – 1, 6 – 1, 8 – 2, 10 – 2; **5.a)** osi súmernosti mnohouholníkov s párnym počtom vrcholov prechádzajú protiľahlými vrcholmi a stredmi protiľahlých strán; **b)** osi súmernosti mnohouholníkov s nepárnym počtom vrcholov prechádzajú vrcholmi a stredmi protiľahlých strán.

Cvičenia: **1.a)** M; **b)** C; **2.a)** nie; **b)** áno; **c)** nie; **8. a)** prvý a druhý; **b)** prvý; **9.** sú **a)** obidva, **b)** prvý, 4 osi; **11.** os uhla; **12.** 18 cm; **15.** T_2, T'_2; T_3, T'_3; **16.** SÚMERNOSŤ.

Vyskúšajte sa!

4.a) áno, **b)** nie; **6.** áno; **7.a)** 1, 2, 3; **b)** 1, 3, 4; **c)** 1, 3; **9.** napr. A, V, H, E, X, Y, T, . . . ; **10.a)** 1, 2, 3, 4, 5; **b)** 3, 5; **11.** áno; **12.a)** b, c; **b)** a, b, c; **c)** b, c.

11 Kombinatorika

11.1 Výber prvkov bez ich usporiadania

Úlohy: **1.** 10; **2.** 10; **3.a)** 1, 2, 3; 1, 2, 4; 1, 3, 4; 2, 3, 4; **b)** 1, 2, 3; 1, 2, 4; 1, 2, 5; 1, 3, 4; 1, 3, 5; 1, 4, 5; 2, 3, 4; 2, 3, 5; 2, 4, 5; 3, 4, 5; **4.** označme: Jakubko (J), Sobotné večery (S), Hrdinský zápisník (H), Detská encyklopédia (D) – J, S, H; J, S, D; J, H, D; S, H, D; **5.** označme: Kamil (K), Paľo (P), Vilo (V), Maroš (M) – **a)** K, P; K, V; K, M; P, V; P, M; V, M; **6.b)** K, P, V; K, P, M; K, V, M; P, V, M.

Cvičenia: **1.** označme: Africký zápisník (A), Šťastný princ (S), Prázdniny so strýcom Rafaelom (P) – A, S; A, P; S, P; **2.** označme: zelená (z), hnedá (h), modrá (m), červená (č), žltá (ž) – **a)** zh, zm zč, zž, hm, hč, hž, mč, mž, čž; **b)** zhm, zhč, zhž, zmč, zmž, zčž, hmč, hmž, hčž, mčž; **c)** zhmč, zhmž, zhčž, zmčž, hmčž; **3.** označme: jahodová (j), banánová (b), kakaová (k), citronová (c), vanilková (v) – **a)** jb, jk, jc, jv, bk, bc, bv, kc, kv, cv; **b)** jbk, jbc, jbv, jkc, jkv, jcv, bkc, bkv, bcv, kcv; **c)** jbkc, jbkv, jbcv, jkcv, bkcv; **4.a)** 9; **b)** 36; **c)** 84; **5.a)** 2; **b)** 5; **c)** 9; **6. a)** 15; **b)** 20; **7.** 23, <u>25</u>, 27, 29, <u>35</u>, 37, 39, 57, 59, 79, <u>235</u>, 237, 239, 257, 259, 279, 357, 359, 379, 579, podčiarknuté čísla sú deliteľné piatimi; **8.a)** 15; **b)** 20.

11.2 Ďalšie úlohy z kombinatoriky

Úlohy: **1.** 3 . 5 = 15; **2.**

blúzka	1	2	3	4	6	12
suknička	12	6	4	3	2	1

načastejšie sa vyskytujúce prípady: 3, 4 a 4, 3, najmenej vyskytujúce sa prípady sú: 1, 12 a 12, 1; **3.** 5 . 3 = 15; **4.a)** 4 cestami; **b)** 6 cestami; **5.** mäsiarstvo (3), reštaurácia (12 + 4), potraviny (12 + 2), obchodný dom (48 + 16 + 8); **6.** 10; **7.** 16; **8.** 35; **9.** 3; **10.** 5; ččččm, čččmč, ččmčč, čmččč, mčččč.

Cvičenia: **1.** 12; **2.** 3; **3.** 12; **4.** 7; **5.** 6, ččbb, čbčb, čbbč, bččb, bčbč, bbčč; **6.** 20; **7.** 12; **8.** 20; **9.** 20.

12 Mnohosteny

12.1 Pravidelné mnohosteny

Úlohy: **1.**

Pravidelný mnohosten	v	h	s	$v-h+s$
štvorsten	4	6	4	2
kocka	8	12	6	2
osemsten	6	12	8	2
dvanásťsten	20	30	12	2
dvadsaťsten	12	30	20	2

3. 1, 2, 4.

Cvičenia: **3.** áno; **7.** áno.

13 Zhodné zobrazenie

13.1 Osová a stredová súmernosť - niektoré vlastnosti

Úlohy: **1.** nie; **2.** áno; **3.** nie.

13.2 Posunutie

Úlohy: **1.** $XY \| X'Y'$, $XY \cong X'Y'$, $|XY| = |X'Y'|$; **3.** *sss*; **5.** nie.

Cvičenia: **3.** obrazy písmena E, trojuholníky; **4. a)** posunutie; **b)** posunutie alebo osová súmernosť; **c)** osové súmernosti; **7.** áno, posunutia.

15 Diagramy

Cvičenia: **1.** január 15 250, február 14 000, marec 17 000, apríl 17 750, máj 22 000, jún 23 500, júl 27 250, august 32 250, september 25 500, október 23 250, november 16 500, december 15 750.

16 Cvičenia na opakovanie

1. $\frac{0}{2}$, $\frac{0}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$; **2.a)** $\frac{1}{10}$; **b)** $\frac{3}{10}$; **3.a)** $\frac{1}{60}$; **b)** $\frac{1}{4}$; **4.** $\frac{30}{7}$, $\frac{43}{8}$, $\frac{14}{5}$, $\frac{41}{3}$, $\frac{48}{17}$; **5.** $3\frac{2}{3}$, $5\frac{3}{4}$, $12\frac{3}{5}$, $256\frac{1}{4}$, $3\frac{33}{34}$; **6.** $\frac{2}{3} < \frac{9}{7} < \frac{11}{5}$; **7.** napr. $\frac{1}{3}$, 1, $\frac{2}{5}$; **8.** 45 kg; **9.** $\frac{7}{10}$ kg; **10.a)** 5; **b)** $\frac{203}{36}$; **11.** 100; **12.** 101; **13.a)** $\frac{63}{10}$; **b)** $\frac{103}{100}$; **c)** $\frac{3}{1\,000}$; **14.a)** 5,2; **b)** 3,6; **c)** 8,5; **15.** 91 cm; **16.** $23\frac{13}{20}$ m^3; **17.** 165 l; **18.a)** 16,06; **b)** $-\frac{55}{24}$; **c)** $\frac{3}{10}$; **d)** $-\frac{8}{75}$; **19.a)** 0,42; **b)** –1,74; **20.a)** $\frac{55}{9}$; **b)** $\frac{13}{12}$;

21.a)

x	1	–2	0,4	$\frac{1}{3}$
$5 - 3x$	2	11	3,8	4

b)

a	12	–10	$-\frac{3}{2}$	0,8
$\frac{a}{4} + \frac{a}{2}$	9	$-\frac{15}{2}$	$-\frac{9}{8}$	0,6

22.a) $5x$; **b)** $y + 6$; **c)** $\frac{7}{2} - \frac{1}{4}$; **d)** $-\frac{3a}{5}$; **23.a)** $-x - 10$; **b)** $-x - 3$; **c)** $4x - 4{,}33$; **24.** $-22a + 20$; **25.a)** $(a - b) + (c - d)$; **b)** $2a + 3b + (c + 3d)$; **26. a)** $-10y - x$; **b)** $2a + 3b$; **c)** $80x + 70$; **27.a)** $19x - 1$; **b)** $\frac{5}{3}x - y$; **28.** $3x$; **29.a)** $5(3a + 2b + c)$; **b)** $3(4a + 6b - 7c)$; **c)** $8(2a - 3b + 10c)$; **30.** $3x + 7$; **31.a)** $-\frac{10}{3}x + 8$; **b)** $3{,}6x - 0{,}72y$; **c)** $0{,}75 - 2{,}4x$; **32.** $\frac{2}{5}$, 15 štvorcov; **33.a)** $\frac{2}{8} = \frac{10}{40} = \frac{30}{120} = \frac{15}{60}$, 2, 120, 60; **b)** napr. $\frac{1}{3} < \frac{3}{6} < \frac{10}{18} < \frac{3}{5}$, nekonečne veľa riešení; **34.** bol, zachránili všetky stromky; **35.a)** $\frac{37}{56}$, $\frac{8}{21}$, $-\frac{1}{2}$, $\frac{83}{70} = 1\frac{13}{70}$; **b)** $\frac{1}{12}$, 0, $-\frac{23}{4}$, $\frac{11}{4}$; **c)** $\frac{3}{5}$, $-\frac{6}{25}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{144}{25}$; **d)** $\frac{5}{16}$, 0, –0,5, 0,6; **36.a)** 63 l; **b)** 25 dní; **37.** kozlík lekársky –100 gramov, mäta pieporná – 400 gramov, kvet rumančeka – 500 gramov; **38.a)** $\frac{13}{9}$; **b)** $-\frac{1}{8}$; **c)** $\frac{7}{3}$; **39.** $|AX| = 4{,}5$ cm, $|BX| = 7{,}5$ cm; **40.** prvý stroj vyrobil za 1 hodinu 130 súčiastok, tretí 455 súčiastok; **41.a)** 1:120; **b)** 1:1; **c)** 250:1; **42.** 3 750 m; **43.** 120 km/h; **44.** 165 cm × 200,5 cm; **45.** výborne – 120 žiakov, veľmi dobre – 300 žiakov, dobre – 600 žiakov, dostatočne – 120 žiakov, nedostatočne – 60 žiakov; **46.** 32 kg; **49.a)** 6; **b)** 24; **c)** 36; **d)** 108; **50.** 90, 180, 270; **51.** 90 mm; **52.a)** 156,45; **b)** 3 040; **c)** 22,08; **53.a)** 75 % zo 420 je viac ako 60 % z 520; **b)** 5 % zo 70 je viac ako 4 % zo 75; **c)** 150 % z 5 je viac ako 120 % zo 6; **54.** 1,25 kg bielkovín, 1,8 kg tuku, 1,4 kg vody a 0,55 kg minerálnych látok; **55.** približne 6,66 %; **56.** 600 m^2; **57.** o 70 %; **58.** približne 91,6 %; **59.** 100 losov; **60.a)** 70 %; **b)** 85,7 %; **c)** 60 %; **61.** o 48 %; **62.** C: 612 žiakov; **63.** B: 4 200 Sk; **64.a)** A: 4,6 kg; **b)** B: 18,4 kg; **65.** B: 5 075 kg; **66.** C: 195 kg; **67.** A: 3 423; **68.a)** $x = 7$; **b)** $x = -3$; **c)** $x = 7$; **d)** $x = 9$; **69.a)** nie; **b)** áno; **70.** b) a c); **71.a)** $y = 5$; **b)** $y = -10$; **c)** $y = \frac{1}{2}$; **72.a)** $x = \frac{6}{7}$; **b)** $x = \frac{1}{15}$; **73.a)** vyhovuje každé reálne číslo; **b)** pre žiadne reálne číslo neplatí rovnosť; **c)** pre žiadne reálne číslo neplatí rovnosť; **74.a)** $a = 5$; **b)** $x = 120$; **c)** $y = 600$; **75.** $5x = \frac{20}{7}x + \frac{10}{7}x + \frac{x}{70}$; **76. a)** +; **b)** + alebo –; **c)** +; **77.** 110, 111, 112; **78.** 500 Sk, 100 Sk, 400 Sk; **79.** 329 žiakov; **80.** Anička má 18 rokov, Janka 6 rokov; **81.** 3 000 Sk, 4 500 Sk, 1 500 Sk; **82.** B: bolo to minulý rok; **83.** B: 48 000 Sk; **84.** C: 27 hrušiek; **85.** A: 28 súčiastok; **86.** A: 120 strán; **87.** nie; **88.** 64,68 kg; **90.** napr. 6 cm; riešenie 1 cm < a < 13 cm; **91. a)** $V = 80$ cm^3, $S = 160$ cm^2; **b)** $V = 130$; cm^3, $S = 196$ cm^2; **92.** nie, zhodujú sa v strane AB, odpovedajúce uhly nie sú zhodné; **93. a)** nie, $c + \frac{a}{2} = t_a$; **b)** áno, $c + \frac{a}{2} > t_a$; **c)** áno, $c + \frac{a}{2} > t_a$; **95. a)** 1, 2, 3, 6; **b)** 1, 2, 3, 4; **c)** 1, 2, 3; **96.** áno; **97.** áno; **98.** áno, prechádza bodom S a $n \perp m$; **102.** $|BT| = 2 \,.\, |TB_1|$; **103.** 16.

ROZUM DO HRSTI (*VÝSLEDKY*)

1. Je sedem rôznych spôsobov:

5 žien a 19 mužov,
10 žien a 16 mužov,
15 žien a 13 mužov,
20 žien a 10 mužov,
25 žien a 7 mužov,
80 žien a 9 muži,
35 žien a 1 muž.

Posledný prípad sa ale nemôže počítať, pretože podmienka bola („každý z mužov“ a jeden muž nie sú muži. Odpoveď je teda šesť rokov.

2. Na začiatku cesty mal x korún.

Po prvom darovaní mu zostalo $\frac{x}{2} - 1$;
po druhom darovaní mu zostalo $\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} - 1\right) - 2$;
po treťom darovaní mu zostalo $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} - 1\right) - 2\right] - 3$, a to bola 1 koruna.
Riešením rovnice $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} - 1\right) - 2\right] - 3 = 1$,
dostaneme $x = 42$

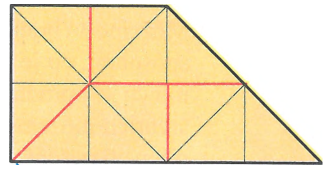
Láskavý muž mal na začiatku cesty 42 korún.

3. Večierka sa zúčastnili dve malé dievčence, chlapec, ich otec a matka a otec s matkou ich otca (7 osôb).

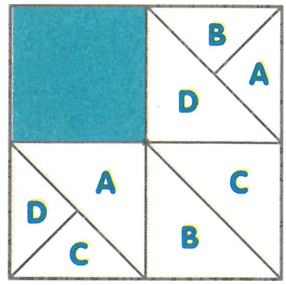
4. Bolo tam 10 chlapcov a dvadsať dievčat. Ako to určíme?
Označme písmenom x počet chlapcov, písmenom y počet dievčat.
Každý chlapec pozdravil x - 1 chlapcov, t. j. bolo $x(x - 1)$ poklonení
Každý chlapec pozdravil y dievčat, t.j. $x \,.\, y$ poklonení
Každý chlapec pozdravil učiteľa, t.j. x poklonení
Každé dievča pozdravilo y - 1 dievčat, t. j. $y(y - 1)$ poklonení
Každé dievča pozdravilo x chlapcov, t. j. $y \,.\, x$ poklonení
Každé dievča pozdravilo učiteľa, t.j. y poklonení
Po sčítaní

$$x(x - 1) + xy + x + y(y - 1) + xy + y = 900$$
$$x^2 + 2xy + y^2 = 900$$
$$x + y = 30$$
$$y = 2x$$
$$3x = 30$$
$$x = 10$$

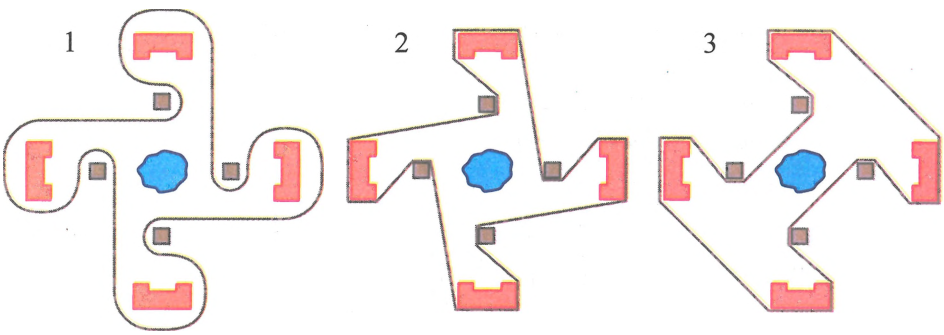
5. Riešenie tejto úlohy je na obrázku. Daný útvar sme najprv rozdelili na 12 zhodných trojuholníkov. Rezy, ktoré sú riešením, sú vyznačené farebne.



6. Obrázok znázorňuje najlepšie rozdelenie pozemku, každý syn dostal kus zeme rovnakej veľkosti a tvaru a pritom každý mal prístup ku studni bez toho aby vstúpil na cudzí pozemok.

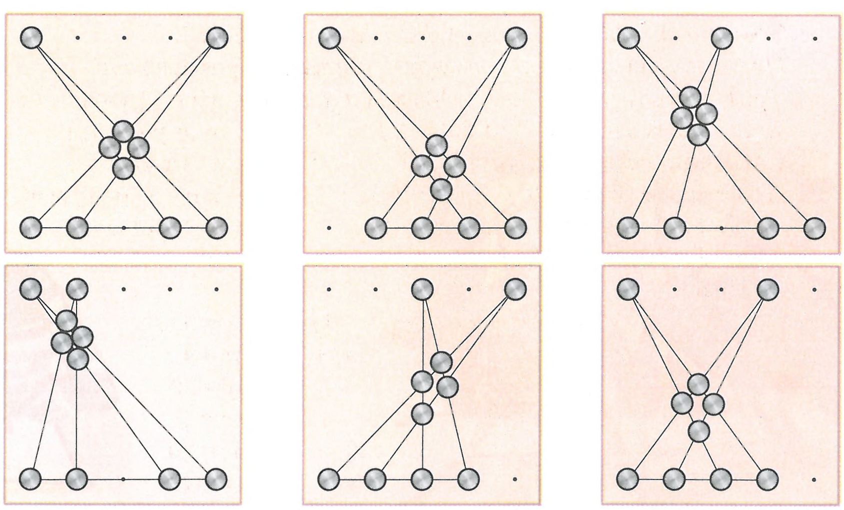


7. Návrh je na obrázkoch 1 až 3.



Zrejme riešenie na obrázku 3 spĺňa podmienku úlohy (najkratší múr).

8. Ľubovoľné tri mince sa môžu vziať z jedného radu a skombinovať ich s jednou mincou z druhého radu. Na obrázkoch je šesť riešení.



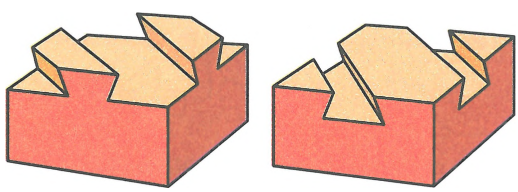
Môžeme vybrať tri mince z horného radu desiatimi spôsobmi a jednu zdola piatimi spôsobmi, čo je spolu päťdesiat možností. Podobne môžeme vybrať tri zdola a jednu mincu z horného radu. Takže štyri mince môžeme vybrať sto spôsobmi. Vybranú štvoricu môžeme usporiadať 4 . 3 . 2 = 24 spôsobmi. To je celkom 24 . 100 = 2 400 rôznych riešení.

9. Sú to tieto skoky: 2 na 1, 5 na 2, 3 na 5, 6 na 3, 7 na 6, 4 na 7, 1 na 4, 3 na 1, 6 na 3, 7 na 6.

10. Lokomotíva č. 5 sa nebude pohybovať. Ostatné sa budú pohybovať v tomto poradí: 7, 6, 3, 7, 6, 1, 2, 4, 1, 3, 8, 1, 3, 2, 4, 3 a 2, to je celkom sedemnásť presunov, ktorými sa lokomotívy dostanú do požadovaného usporiadania.
Existujú ešte dve odlišné riešenia.

11. Tento hlavolam sa dá vyriešiť deviatimi ťahmi. Posunujeme lokomotívy takto: z 9 na 10, z 6 na 9, z 5 na 6, z 2 na 5, z 1 na 2, z 7 na 1, z 8 na 7, z 9 na 8 a z 10 na 9. Teraz máme lokomotívy **A, B, C** na každom z troch kruhov a na každej priamej čiare. Je to najkratšie riešenie.

12. Tajomstvo je objasnené na obrázku. Vidieť, že kusy sú spojené v smere uhlopriečky tak, že sa do seba zasunú.



13. Briggs, ktorý zbadal záblesk, bol prvý. Carpenter, ktorý videl dopad strely na vodu, bol druhý. Anderson, ktorý výstrel počul, bol posledný.

Prof. RNDr. Ondrej Šedivý, CSc.
PaedDr. Soňa Čeretková
PaedDr. Mária Malperová
PhDr. Ľudovít Bálint, CSc.

Matematika

pre 7. ročník základných škôl
2. časť

Zodpovedná redaktorka RNDr. Jana Belasová
Technická redaktorka Eva Onderčinová

Grafická a počítačová úprava, počítačové kresby
a návrh obálky Igor Imro
Ilustrovala akad. maliarka Táňa Žitňanová

Vyšlo v MEDIA TRADE, spol. s r. o. - Slovenské pedagogické nakladateľstvo,
Sasinkova 5, 815 60 Bratislava 1

Litografie SHS, spol. s r. o., Leškova 10, 811 05 Bratislava 1
Vytlačili Tlačiarne BB, spol. s r. o., 974 01 Banská Bystrica

ISBN 80-08-02680-4

ISBN 80-08-02680-4