Matematika

pre 6. ročník základných škôl • 2. časť

Slovenské pedagogické nakladateľstvo

Ondrej Šedivý • Soňa Čeretková • Mária Malperová • Ľudovít Bálint

Matematika

pre 6. ročník základných škôl

2. časť

Slovenské pedagogické nakladateľstvo

Autori © Prof. RNDr. Ondrej Šedivý, CSc.
PaedDr. Soňa Čeretková
PaedDr. Mária Malperová
PhDr. Ľudovít Bálint, CSc., 1999

Lektorovali: RNDr. Ľudovít Hrdina, CSc.
(Slovenská matematická spoločnosť, sekcia JSMF)
Anna Ištoková
RNDr. Emília Petrovajová
Mgr. Ingrid Stupáková
Mgr. Eva Šišková

Schválilo Ministerstvo školstva Slovenskej republiky rozhodnutím
z 30. novembra 1998 pod číslom 4425/98–41
ako alternatívnu učebnicu matematiky pre 6. ročník ZŠ, 2. časť.

Prvé vydanie, 1999

ISBN 80-08-02678-2

OBSAH

François Viète

(1540 až 1603)

Francúzsky matematik, ktorý je považovaný za otca algebry, pretože v teórii rovníc zaviedol označovanie čísel písmenami. Rozpracoval jednoznačnosť riešenia rovníc druhého, tretieho a štvrtého stupňa a novú metódu riešenia kubických rovníc. Zaslúžil sa aj o trigonometrické riešenie rovníc. Viètov jazyk písmen otvoril v matematike nové možnosti a podstatne prispel k rozvoju algebry a analytickej geometrie.

Milí šiestaci,

opäť dostávate do rúk druhú časť učebnice matematiky. Nájdete v nej veľa pekných úloh, ich riešením si osvojíte poznatky o trojuholníkoch, štvoruholníkoch, rovnobežníkoch a lichobežníkoch. Naučíte sa tieto útvary zostrojovať, čo vám bude užitočné aj v živote. Naučíte sa vypočítať aj ich obvody a obsahy, rozriešite tiež mnoho úloh z praktického života. V časti kombinatorika sa oboznámite s metódami usporiadania daného počtu prvkov.

V rozširujúcom učive nájdete poučenie z rôznych oblastí matematiky. Učebnica prináša dostatok cvičení, ktorých vyriešenie vám pomôže pri hlbšom osvojení učiva. Prečítajte si aj základné údaje zo života významných matematikov.

Želáme vám veľa chuti do práce a úspechy v matematike.

Autori

V učebnici používame tieto symboly:

 – príklad

 – problém

 – riešenie

 – zapamätať si
– zhrnutie alebo poučka

 – úloha

 – cvičenia

 – vyskúšajte sa

 – poznámka

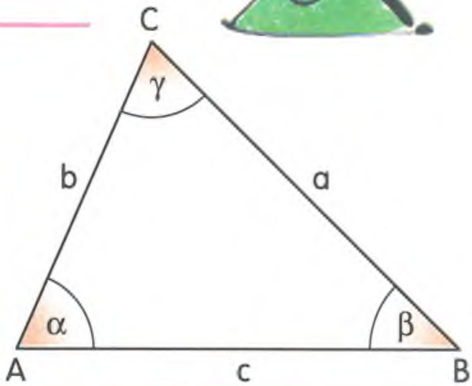
– rozširujúce učivo

5 TROJUHOLNÍK

5.1 Opakovanie

ZOPAKUJME SI

A, B, C – vrcholy trojuholníka
a, b, c – strany trojuholníka
α, β, γ – uhly trojuholníka
$\triangle ABC$ – trojuholník ABC



ÚLOHA 1

Zapíšte uhly α, β, γ pomocou vrcholov A, B, C.

ÚLOHA 2

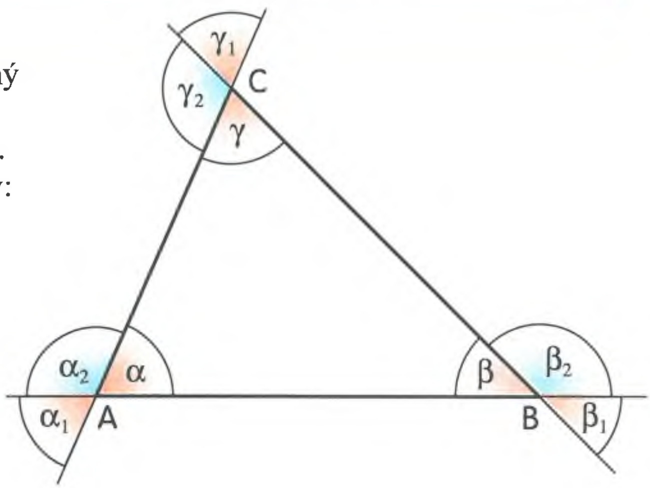
Zapíšte trojuholníkovú nerovnosť pre strany a, b, c trojuholníka ABC.

ÚLOHA 3

Zapíšte uhly, ktoré ležia oproti stranám a, b, c.

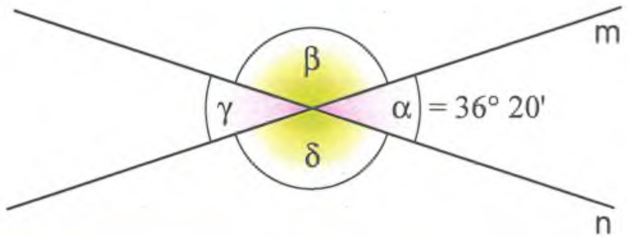
ÚLOHA 4

Na obrázku je narysovaný trojuholník ABC.
Jeho strany sú predĺžené.
Pomenujte dvojice uhlov:
a) α a α_1, β a β_1, γ a γ_1
b) α a α_2, β a β_2, γ a γ_2



PRÍKLAD 1

Rôznobežky m, n zvierajú uhly α, β, γ, δ. Uhol α meria 36° 20'. Vypočítajte veľkosti zvyšných troch uhlov.



RIEŠENIE

Uhly α a γ sú vrcholové uhly a preto sú zhodné, teda $\gamma = 36°\ 20'$.
Uhly α a β sú susedné uhly a preto platí:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 180° \\ 36°\ 20' + \beta &= 180° \\ \beta &= 180° - 36°\ 20' \\ \beta &= 143°\ 40' \end{aligned} \qquad\qquad \begin{array}{r} 179°\ 60' \\ -\ 36°\ 20' \\ \hline 143°\ 40' \end{array}$$

Uhly β a δ sú vrcholové uhly a preto $\delta = 143°\ 40'$.

Odpoveď: Uhol β má veľkosť 143° 40', uhol γ má veľkosť 36°20' a uhol δ má veľkosť 143° 40'.

CVIČENIA

1. Narysujte uhol $\alpha = 26°$. Vyznačte k nemu susedný uhol β. Odmerajte a vypočítajte veľkosť uhla β.

.... **2.** Narysujte pravý uhol α. K nemu zostrojte vrcholový uhol β a susedný uhol γ. Čo môžete o nich povedať?

.... **3.** Veľkosť jedného z dvoch susedných uhlov je:
a) 30°; b) 47° 20'; c) 115° 30'; d) 179°; e) 100° 45'; f) 2° 35'.
Vypočítajte veľkosť druhého uhla.

.... **4.** Jeden z dvoch susedných uhlov je uhol:
a) ostrý; b) pravý; c) tupý.
Pomenujte zvyšný uhol.

.... **5.** Zvoľte jeden z dvoch susedných uhlov tak, aby zvyšný uhol bol:

a) ostrý,
b) pravý,
c) tupý.

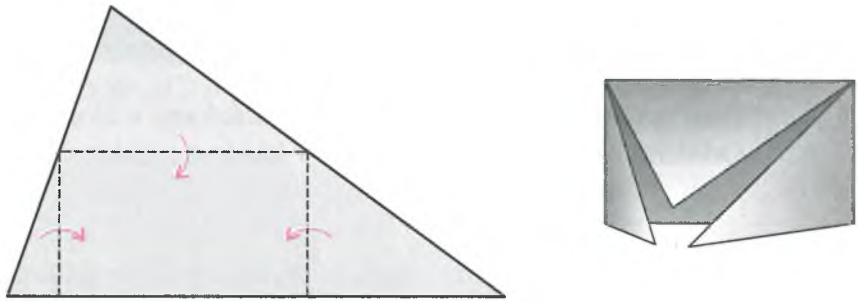
5.2 Vnútorné a vonkajšie uhly trojuholníka

Uhly $\alpha = \sphericalangle BAC$
$\beta = \sphericalangle ABC$
$\gamma = \sphericalangle ACB$
nazývame **vnútorné uhly** trojuholníka ABC.

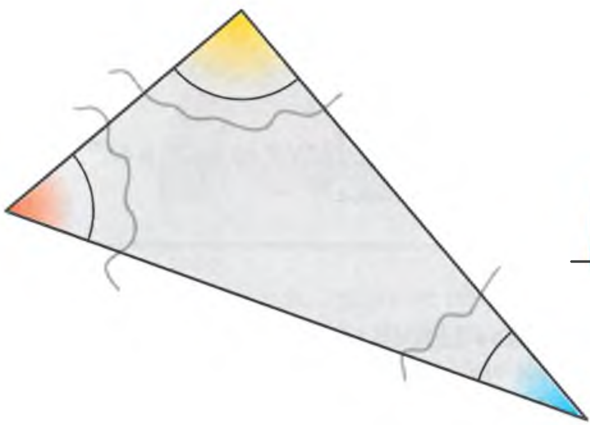
ÚLOHA 1

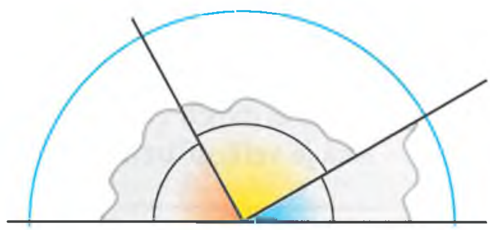
Na voľný list papiera si nakreslite ľubovoľné trojuholníky a vystrihnite ich. Jeden poskladajte podľa obrázka.

a)



b) Z druhého trojuholníka odstrihnite časti s vrcholmi, poukladajte a nalepte ich do zošita tak, ako to vidíte na obrázku.

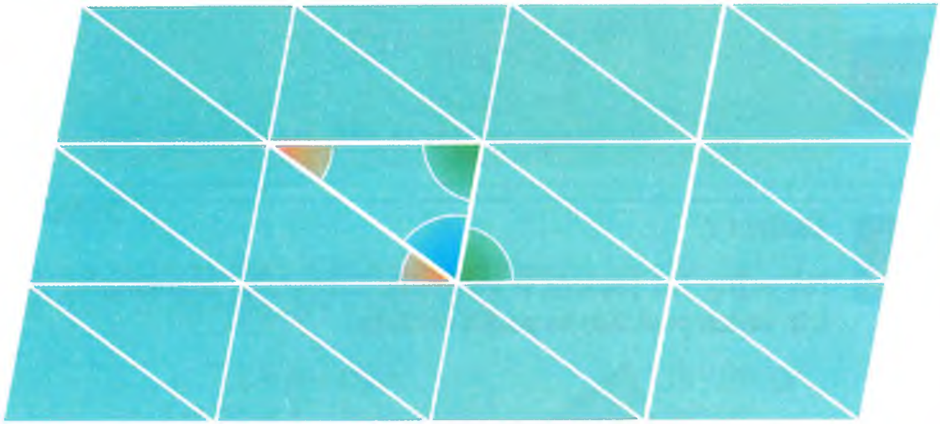




Čo ste zistili?

ÚLOHA 2

Majme niekoľko rovnakých dlaždíc tvaru trojuholníka, ktorého strany a uhly sú rôzne. Pokryme nimi časť podlahy. Vyznačme na podlahe uhly v jednom trojuholníku a uhly pri vrchole, v ktorom sú vrcholy troch susedných trojuholníkov.
Všimnite si nasledujúci obrázok.



Porovnajte výsledok pozorovania s obrázkami v úlohe 1.
Odmerajte veľkosti uhlov α, β, γ v každom z nakreslených trojuholníkov a ich veľkosti sčítajte.

V každom trojuholníku je grafickým súčtom všetkých jeho vnútorných uhlov priamy uhol.
Súčet veľkostí všetkých vnútorných uhlov každého trojuholníka sa rovná 180°.

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

PRÍKLAD 1

Veľkosti dvoch vnútorných uhlov trojuholníka *MNP* sú 102° a 66°. Aká je veľkosť tretieho uhla tohto trojuholníka.

RIEŠENIE

Pre súčet veľkostí vnútorných uhlov každého trojuholníka platí:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

$$\alpha = 102^\circ$$
$$\beta = 66^\circ$$
$$\gamma = \ldots^\circ$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

$$
\begin{aligned}
102^\circ + 66^\circ + \gamma &= 180^\circ \\
168^\circ + \gamma &= 180^\circ \\
\gamma &= 180^\circ - 168^\circ \\
\gamma &= 12^\circ
\end{aligned}
$$

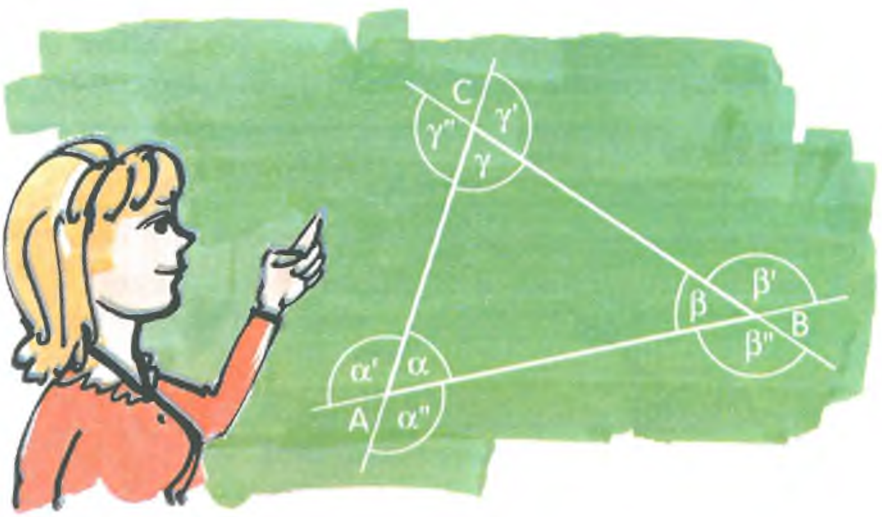
Odpoveď: Tretí vnútorný uhol $\triangle MNP$ má veľkosť $\gamma = 12^\circ$.

PROBLÉM

Peter sa po dlhšom rozmýšľaní opýtal pani učiteľky: Prečo hovoríme o vnútorných uhloch trojuholníka? Existujú aj iné uhly ako vnútorné?

RIEŠENIE

Pani učiteľka narysovala trojuholník ABC, predĺžila úsečky AB, BC, CA, vyznačila uhly α', α''; β', β''; γ', γ'' a vysvetľuje Petrovi:

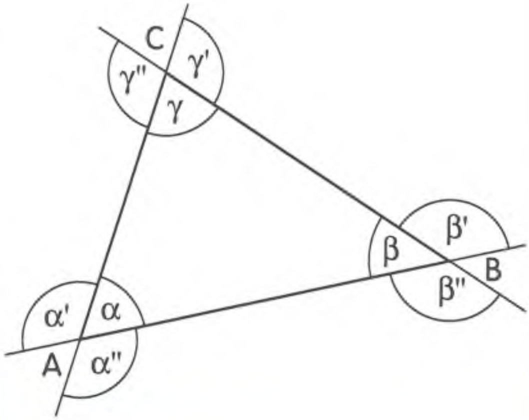


Uhly α, β, γ sú vnútorné uhly trojuholníka ABC. Uhly α', α'' sú susedné uhly k uhlu α, uhly β', β'' sú susedné uhly k uhlu β, uhly γ', γ'' sú susedné uhly k uhlu γ. Susedné uhly k vnútorným uhlom trojuholníka sa nazývajú **vonkajšie uhly** trojuholníka.

α, β, γ	**vnútorné uhly** $\triangle\, ABC$
α', α'' β', β'' γ', γ''	**vonkajšie uhly** $\triangle\, ABC$

Pri každom vrchole trojuholníka sú dva vonkajšie uhly. Vonkajšie uhly pri tom istom vrchole sú vrcholové, a preto sú zhodné.

$$\alpha' \cong \alpha'', \beta' \cong \beta'', \gamma' \cong \gamma''$$



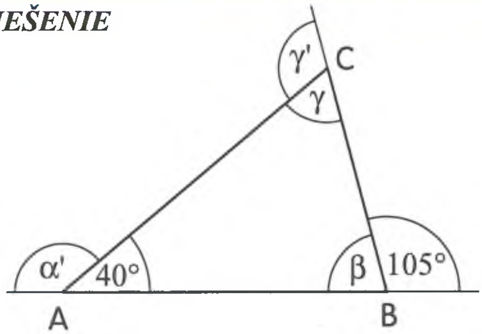
Súčet vnútorného uhla a vonkajšieho uhla pri tom istom vrchole je priamy uhol.
Súčet veľkostí vnútorného uhla a vonkajšieho uhla pri tom istom vrchole je 180°.

$$\alpha + \alpha' = 180°, \beta + \beta' = 180°, \gamma + \gamma' = 180°$$

PRÍKLAD 2

V trojuholníku ABC je veľkosť uhla $\alpha = 40°$ a veľkosť uhla $\beta' = 105°$. Vypočítajte veľkosti vnútorných a vonkajších uhlov daného trojuholníka.

RIEŠENIE



$$\begin{aligned} \alpha &= 40° \\ \alpha' &= \ldots° \end{aligned}$$

$$\alpha + \alpha' = 180°$$

$$\begin{aligned} 40° + \alpha' &= 180° \\ \alpha' &= 180° - 40° \\ \alpha' &= 140° \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta' &= 105° \\ \beta &= \ldots° \end{aligned}$$

$$\beta + \beta' = 180°$$

$$\begin{aligned} \beta + 105° &= 180° \\ \beta &= 180° - 105° \\ \beta &= 75° \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha &= 40° \\ \beta &= 75° \\ \gamma &= \ldots° \end{aligned}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

$$\begin{aligned} 40° + 75° + \gamma &= 180° \\ 115° + \gamma &= 180° \\ \gamma &= 180° - 115° \\ \underline{\gamma} &\underline{= 65°} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma &= 65° \\ \gamma' &= \ldots° \end{aligned}$$

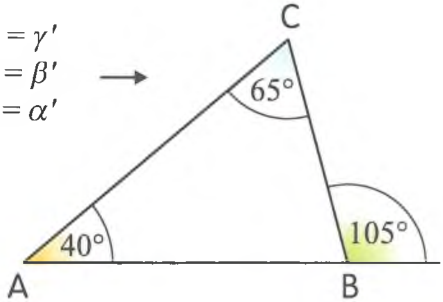
$$\gamma + \gamma' = 180°$$

$$\begin{aligned} 65° + \gamma' &= 180° \\ \gamma' &= 180° - 65° \\ \underline{\gamma'} &\underline{= 115°} \end{aligned}$$

Odpoveď: Veľkosti vnútorných uhlov $\triangle ABC$ sú 40°, 75°, 65° a veľkosti vonkajších uhlov sú 140°, 105°, 115°.

Po vyriešení príkladu 2 si Miško všimol súčty uhlov a napísal:

$40° + 75° = 115°$	$\alpha + \beta = \gamma'$
$40° + 65° = 105°$	$\alpha + \gamma = \beta'$ $\rightarrow$
$75° + 65° = 140°$	$\beta + \gamma = \alpha'$



Potom nakreslil aj obrázok pre uhol β'.

Výsledok sformuloval takto:
Vonkajší uhol trojuholníka pri jednom vrchole sa rovná súčtu vnútorných uhlov pri ostatných dvoch vrcholoch trojuholníka.

V piatom ročníku sme sa naučili, že trojuholníky rozdeľujeme podľa vnútorných uhlov na tri skupiny:

Trojuholník, ktorého každý vnútorný uhol je ostrý, sa nazýva **ostrouhlý trojuholník.**

Trojuholník, ktorý má práve jeden vnútorný uhol pravý, sa nazýva **pravouhlý trojuholník.**

Trojuholník, ktorý má práve jeden vnútorný uhol tupý, sa nazýva **tupouhlý trojuholník.**

CVIČENIA

1. Vypočítajte veľkosť tretieho vnútorného uhla v trojuholníku ABC, keď:

a) $\alpha = 30°, \beta = 60°$	e) $\beta = 60°, \gamma = 60°$
b) $\alpha = 100°, \gamma = 32°30'$	f) $\alpha = 30°, \gamma = 120°$
c) $\beta = 36°45', \gamma = 91°40'$	g) $\alpha = 15°20', \beta = 45°40'$
d) $\gamma = 126°20', \beta = 15°20'$	h) $\gamma = 90°, \alpha = 45°$

V každom prípade napíšte, či trojuholník ABC je ostrouhlý, pravouhlý alebo tupouhlý.

.... **2.** Vypočítajte veľkosti vonkajších uhlov trojuholníka ABC, keď poznáte veľkosť jeho dvoch vnútorných uhlov:

a) $\alpha = 35°, \beta = 56°$
b) $\alpha = 127°, \beta = 14°$
c) $\gamma = 75°20', \beta = 70°40'$

.... **3.** Vypočítajte veľkosti zvyšných vnútorných a zvyšných vonkajších uhlov trojuholníkov, keď poznáte:

a) $\alpha = 45°, \beta' = 130°$
b) $\gamma = 60°, \alpha' = 105°$
c) $\alpha' = 100°, \beta = 72°$
d) $\beta = 30°, \alpha' = 48°$

.... **4.** Rozhodnite, či dané uhly môžu byť vnútornými uhlami trojuholníka:

a) 35°, 40°, 105°
b) 107°, 3°, 40°20'
c) 30°, 45°, 44°35'
d) 120°, 33°, 27°5'

.... **5.** Trojuholník je ostrouhlý, keď:

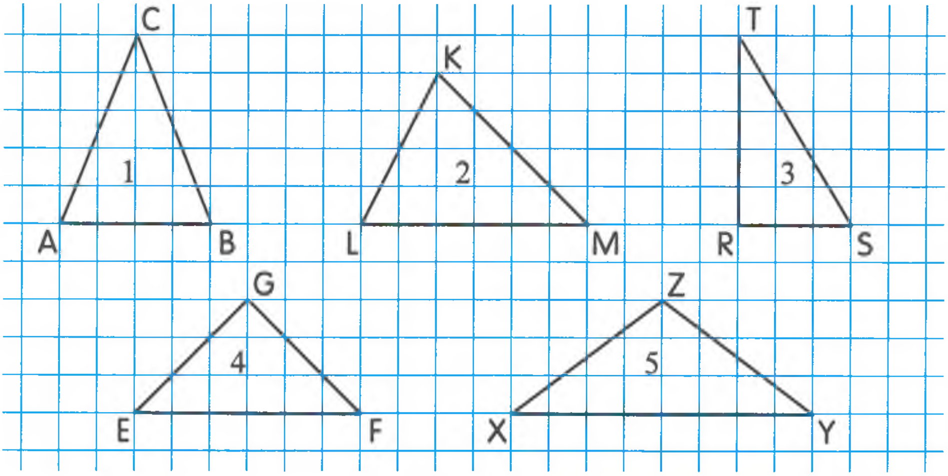
a) má dva uhly ostré a jeden tupý,
b) má dva uhly ostré a jeden pravý,
c) má jeden uhol pravý,
d) má všetky uhly ostré.

Vyberte správnu odpoveď.

5.3 Rovnoramenný trojuholník

ÚLOHA 1

V štvorcovej sieti sú narysované rôzne trojuholníky. Odmerajte strany každého z nich a porovnajte strany v každom trojuholníku. Zapíšte tie trojuholníky, v ktorých majú dve strany rovnakú dĺžku.

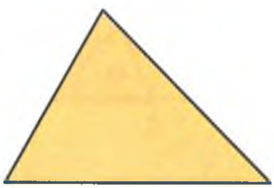
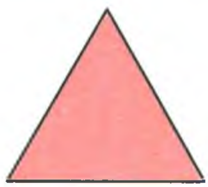


Trojuholníky na základe dĺžky strán rozdeľujeme:

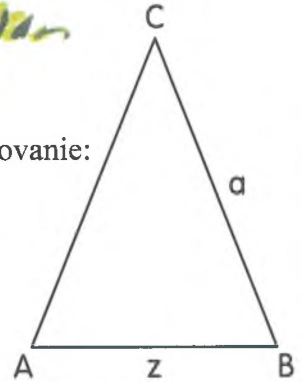
Trojuholník, ktorého všetky strany sú rôzne, sa nazýva **rôznostranný trojuholník.**

Trojuholník, ktorého dve strany sú zhodné, sa nazýva **rovnoramenný trojuholník.**

Trojuholník, ktorého všetky tri strany sú zhodné, sa nazýva **rovnostranný trojuholník.**

		
rôznostranný	rovnoramenný	rovnostranný

Na obrázku vidíme štíty striech, ktoré majú tvar rovnoramenného trojuholníka.

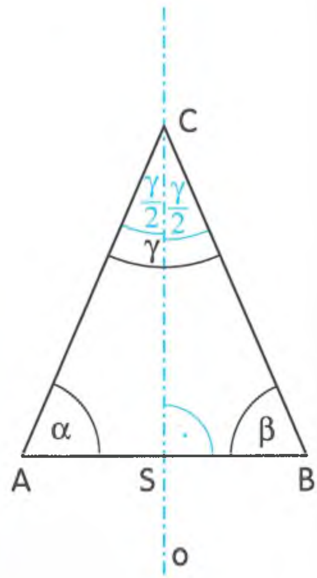


Strany rovnoramenného trojuholníka majú pomenovanie:
strana AB je **základňa,**
zhodné strany AC, BC sú **ramená.**

Vrchol C, ktorý leží oproti základni AB, je **hlavný vrchol** rovnoramenného trojuholníka.

ÚLOHA 2

Na obrázku je narysovaný trojuholník ABC, v ktorom bod S je stred úsečky AB. Priložte priesvitku a narysujte tento trojuholník na priesvitku. Prehnite priesvitku tak, aby prehnutie prechádzalo bodom C a bodom S. Splynie bod A s bodom B? Čo môžeme povedať o uhloch $\sphericalangle\, CAB$ a $\sphericalangle\, CBA$?



Uhly pri základni rovnoramenného trojuholníka sú zhodné.
V rovnoramennom trojuholníku ABC so základňou AB platí:

$$AC \cong BC$$

$$\sphericalangle\, CAB \cong \sphericalangle\, CBA$$

Priamka CS je osou strany AB a súčasne osou $\sphericalangle\, ACB$.

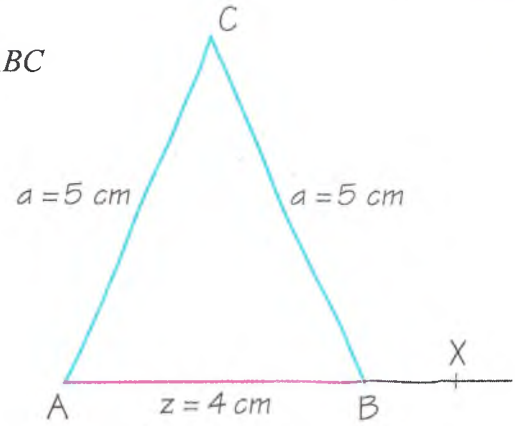
PRÍKLAD 1

Zostrojte rovnoramenný trojuholník *ABC*, v ktorom poznáte dĺžku základne $z = 4$ cm a dĺžku ramena $a = 5$ cm.

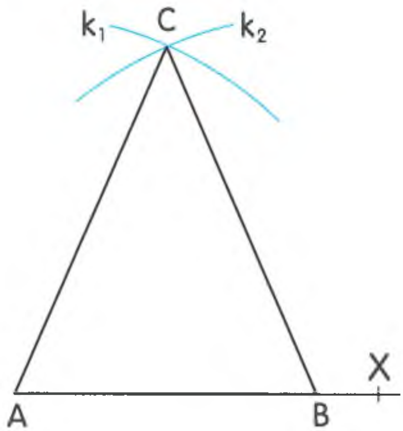
RIEŠENIE

Miško urobil náčrt trojuholníka *ABC* a vyznačil základňu *z* a rameno *a*.

Zapísal: $|AB| = z = 4$ cm
$|BC| = a = 5$ cm, ale aj
$|AC| = a = 5$ cm
$5 + 4 > 5$
$5 - 4 < 5$



Zapísal postup, ktorý chce použiť:
1. Zvolím si polpriamku *AX* a na nej zostrojím bod *B*, $|AB| = z = 4$ cm.
2. Zostrojím kružnicu k_1 so stredom v bode *A* a polomerom $r = 5$ cm.
3. Zostrojím kružnicu k_2 so stredom v bode *B* a polomerom $r = 5$ cm (lebo ramená majú rovnakú dĺžku).
4. Zostrojím spoločný bod *C* kružníc k_1 a k_2.
5. Narysujem $\triangle ABC$.



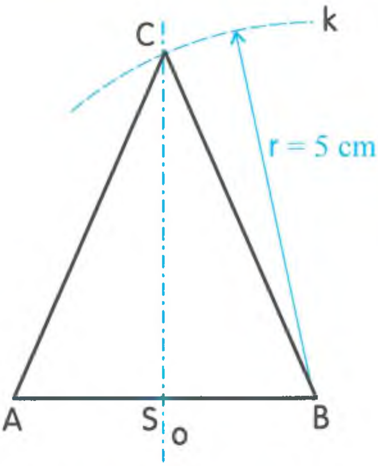
Peter nesúhlasil s obrázkom, ktorý Miško narysoval a opýtal sa: Čo s druhým priesečníkom kružníc k_1 a k_2, ktorý leží v opačnej polrovine?

Miško mu povedal: Ak by sme vyznačili aj trojuholník v opačnej polrovine, dostali by sme zhodný trojuholník s trojuholníkom *ABC*. Zostrojený útvar budeme aj v ďalšom vyznačovať len v jednej polrovine.

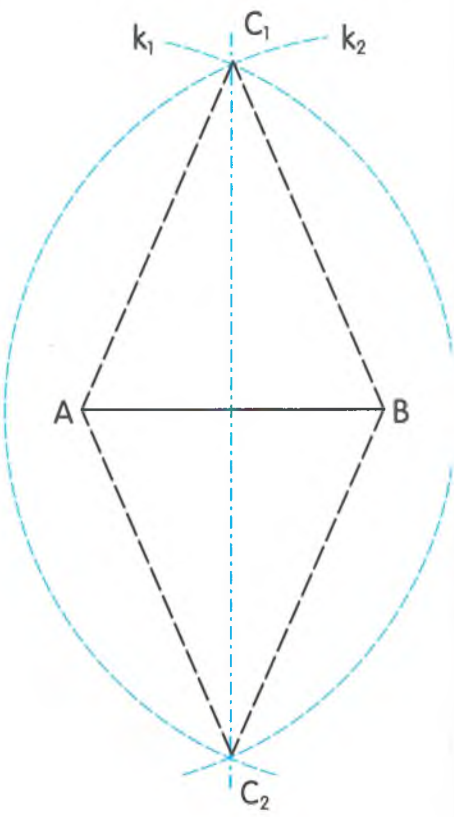
PROBLÉM 1

Peter namieta. Ja som rovnoramenný trojuholník ABC zostrojil pomocou osi o strany AB, zostrojil som taký istý trojuholník ako Miško. Ukáž postup, žiadajú ho spolužiaci.

RIEŠENIE



Peter narysoval obrázok a poznamenal: Os o úsečky AB sme sa naučili zostrojovať v 5. ročníku pomocou trojuholníka s ryskou.



Marienka upresnila: Os úsečky môžeme zostrojiť aj bez trojuholníka s ryskou. Úsečku AB môžeme pokladať za základňu ľubovoľného rovnoramenného trojuholníka ABC_1, zostrojeného v jednej polrovine a rovnoramenného trojuholníka ABC_2, ktorý leží v opačnej polrovine a má ramená zhodné s ramenami trojuholníka ABC_1. Narysovala obrázok.

Pani učiteľka zdôraznila: Konštrukciu osi úsečky pomocou dvoch kružníc budeme často používať.

ÚLOHA 3

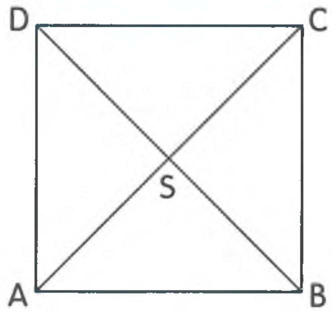
V príklade 1 je narysovaný rovnoramenný trojuholník *ABC*. Aký je súčet veľkostí všetkých jeho strán – obvod trojuholníka *ABC*?

Obvod rovnoramenného trojuholníka vypočítame podľa vzorca

$$o = z + 2 \cdot a$$

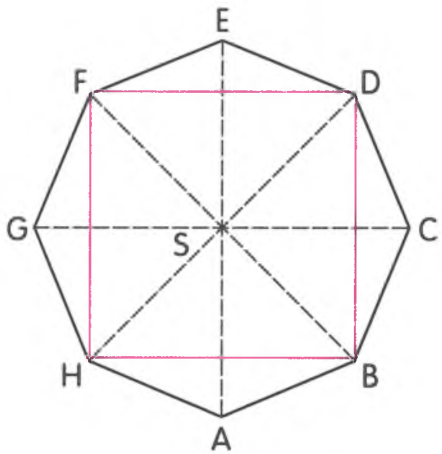
ÚLOHA 4

Na obrázku je štvorec *ABCD*. V ňom sú zostrojené úsečky *AC*, *BD* a ich priesečník *S*. Vyhľadajte všetky rovnoramenné trojuholníky, ktoré na obrázku vidíte, zapíšte ich.



ÚLOHA 5

Na obrázku je pravidelný osemuholník *ABCDEFGH* so stredom *S*. Súčasne je na obrázku farebne narysovaný štvorec *BDFH*. Čiarkovane sú vzájomne pospájané protiľahlé vrcholy osemuholníka. Napíšte všetky rovnoramenné trojuholníky, ktoré na obrázku vidíte. Miško ich spočítal a bolo ich 28. Dobre ich Miško spočítal?



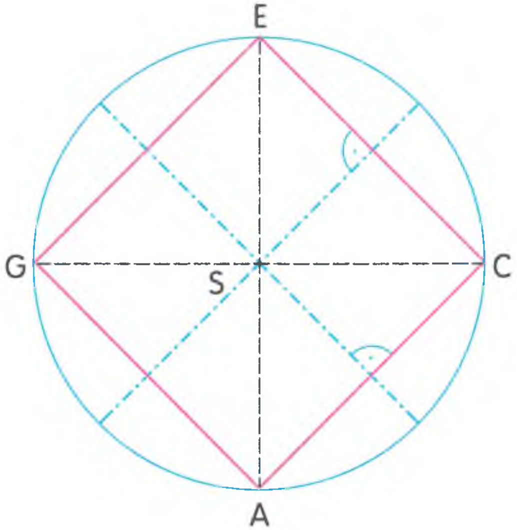
PROBLÉM 2

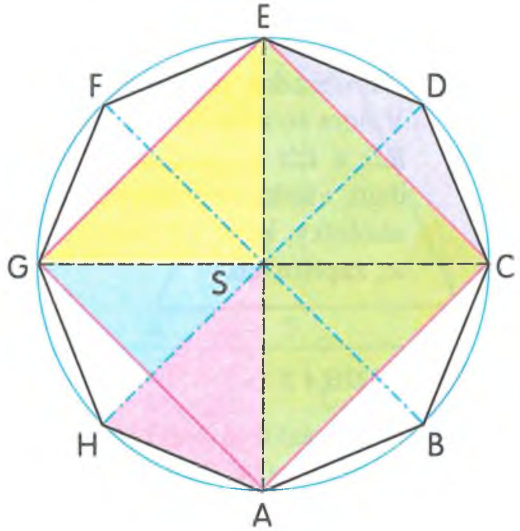
Marienka pozerá na obrázok, páči sa jej tento útvar. Chce si ho narysovať do zošita, nevie ako začať, požiada Miška o pomoc.

RIEŠENIE

Miško pohotovo využije známe vlastnosti rovnoramenného trojuholníka. Rysuje a nahlas hovorí postup:

1. Zvolím si stred S.
2. Narysujem kružnicu $k(S, r)$, polomer si zvolím napr. $r = 3$ cm.
3. Narysujem dva kolmé priemery kružnice k, spojím ich koncové body a tak dostanem štvorec.
4. Vznikli štyri rovnoramenné trojuholníky, zostrojím osi ich základní a tieto pretnú kružnicu k v ďalších bodoch, a to sú ostatné vrcholy osemuholníka.
5. Narysujem strany osemuholníka.





Marienke sa postup páči. Osemuholník si narysovala do zošita. Zapísala aj všetky rovnoramenné trojuholníky. Zistila, že ich je 28.

CVIČENIA

1. Narysujte obdĺžnik *MNPQ*. Narysujte úsečky *MP*, *NQ*, ich stred označte *S*. Zapíšte všetky rovnoramenné trojuholníky, ktoré na obrázku vidíte.

.... **2.** Narysujte rovnoramenný trojuholník *ABC*, v ktorom základňa $z = 3{,}5$ cm a jeho ramená majú dĺžku $a = 4{,}5$ cm.

.... **3.** Vypočítajte obvod rovnoramenného trojuholníka, v ktorom základňa z má dĺžku 1 m a rameno je dlhé 3 m.

.... **4.** Vypočítajte dĺžku základne rovnoramenného trojuholníka, v ktorom rameno má dĺžku 5 cm a jeho obvod je 13 cm.

.... **5.** Jeden uhol pri základni rovnoramenného trojuholníka má veľkosť 45°. Rozhodnite, či tento trojuholník je pravouhlý.

.... **6.** Rozhodnite, či uhol γ pri hlavnom vrchole C rovnoramenného trojuholníka ABC môže mať veľkosť 120°.

.... **7.** Rozhodnite, či uhol α pri základni rovnoramenného trojuholníka môže mať veľkosť 120°.

.... **8.** Môže byť rovnoramenný trojuholník tupouhlým trojuholníkom?

.... **9.** Nakreslite do zošita dopravnú značku STOP. Zvoľte kružnicu, ktorej polomer $r = 3{,}5$ cm.

5.4 Rovnostranný trojuholník

Miško túži po motorke, opakuje si dopravné značky. Niektoré vystrihnuté doniesol aj do školy a ukazoval ich spolužiakom.

Križovatka

Pozor, deti!

Cestička pre chodcov

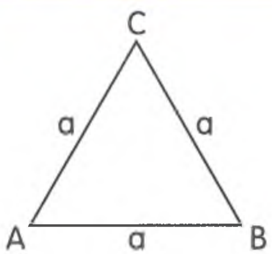
Cestička pre cyklistov

Priechod pre chodcov

Svetelné signály

Peter hovorí:
Niekde som čítal, že tie dopravné značky, ktoré majú tvar trojuholníka, sú všetky rovnako veľké a každá ich strana má dĺžku 90 cm.

Trojuholník, ktorý má všetky tri strany zhodné, sa nazýva **rovnostranný trojuholník.**



$$AB \cong BC$$
$$AB \cong AC$$
$$AC \cong BC$$

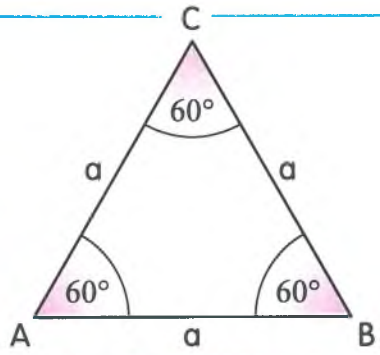
$$|AB| = |BC|$$
$$|AB| = |AC|$$
$$|AC| = |BC|$$

Všetky tri vnútorné uhly rovnostranného trojuholníka sú zhodné.
Každé dva vnútorné uhly v rovnostrannom trojuholníku sú zhodné.

ÚLOHA 1

Odôvodnite tvrdenie:

Každý vnútorný uhol rovnostranného trojuholníka má veľkosť 60°.



ÚLOHA 2

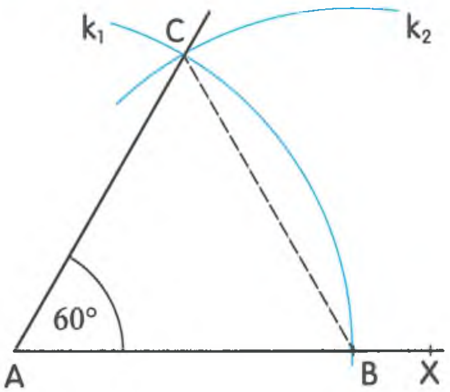
Zostrojte rovnostranný trojuholník *ABC*, v ktorom dĺžka strany je 6 cm.

PRÍKLAD 1

Bez uhlomeru zostrojte uhol veľkosti 60°.

RIEŠENIE

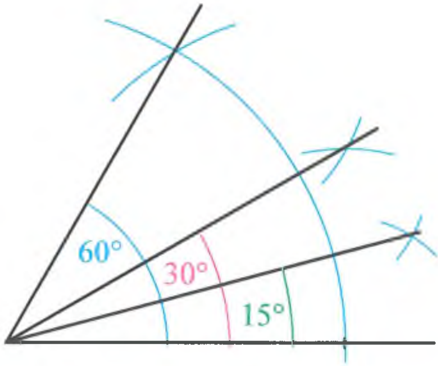
Peter pohotovo rieši príklad. Využijem vlastnosti rovnostranného trojuholníka.



1. Zvolím si polpriamku *AX*.
2. Zvolím si na polpriamke *AX* ľubovoľný bod *B*.
3. Zostrojím kružnicu k_1 so stredom v bode *A* a polomerom $|AB|$.
4. Zostrojím kružnicu k_2 so stredom v bode *B* a polomerom $|AB|$.
5. *C* je priesečník kružníc k_1, k_2. Zostrojím polpriamku *AC*.
6. $|\sphericalangle\ BAC| = 60°$, lebo $\triangle\ ABC$ je rovnostranný.

Miško poznamenal:
Ak bez uhlomeru vieme zostrojiť uhol veľkosti 60°, potom pomocou osi uhla vieme bez uhlomeru zostrojiť aj uhly veľkostí 30°, 15°, 45°, 75°, 120°.

Na obrázku niektoré z nich zostrojil.



Marienka na farebné papiere narysovala niekoľko rovnostranných trojuholníkov, všetky mali zhodné strany a robila z nich skladačky. Jedna z nich je na obrázku.

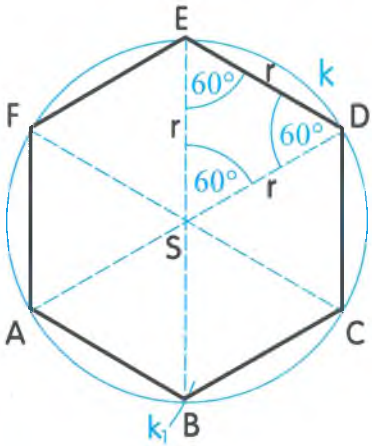
Vznikol útvar, ktorý nazývame **pravidelný šesťuholník.**

Pravidelný šesťuholník má všetky strany zhodné.

Keďže pravidelný šesťuholník vznikol zjednotením šiestich zhodných rovnostranných neprekrývajúcich sa trojuholníkov, môžeme ho zostrojiť pomocou kružnice.

1. Zostrojíme kružnicu $k(S, r)$.
2. Na kružnici zvolíme ľubovoľný bod A.
3. Zostrojíme priemer AD.
4. Z krajných bodov priemeru zostrojíme kružnicové oblúky s polomerom r.
5. Postupne označíme body B, C, E, F.

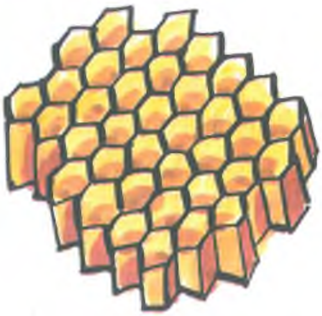
$|AB| = |BC| = |CD| = |DE| = |EF| = |FA| = r$



Dĺžka strany pravidelného šesťuholníka sa rovná polomeru kružnice k, ktorá je opísaná tomuto šesťuholníku.

Peter sa pozerá na obrázok, páči sa mu tvar pravidelného šesťuholníka.

Igor si zase uvedomí, že pred školou je chodník vydláždený dlaždicami, ktoré majú tvar pravidelného šesťuholníka.



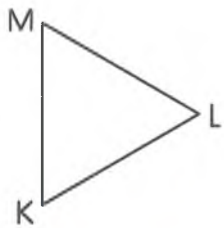
Miškov starý otec je včelár a raz Miškovi rozprával: Taký malý tvor ako včela, ktorá je veľmi pracovitá, je spojený s geometriou. Včely vytvárajú po celý svoj život geomerické útvary, ktorých pravidelnosť nás musí upútať. Pri bežnom pohľade na včelí plást vidíme šesťuholníkové otvory. Ak prerežeme plást kolmo na otvory, zistíme, že ide o pravidelné šesťuholníky so stranou dlhou 2,71 mm. Všetky včelie bunky sú úplne rovnaké.

CVIČENIA

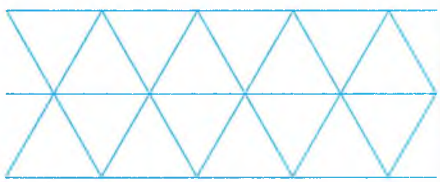
1. Zostrojte pomocou pravítka a kružidla uhly $\alpha = 60°$, $\beta = 120°$, $\gamma = 75°$.

.... 2. Narysujte rovnostranný trojholník *ABC* so stranou dĺžky 4 cm. Vyznačte v ňom vnútorné uhly a vonkajšie uhly. Akú veľkosť má každý vonkajší uhol rovnostranného trojuholníka?

.... 3. Na obrázku je rovnostranný trojuholník *KLM.* Prekreslite ho do zošita a doplňte na pravidelný šesťuholník.



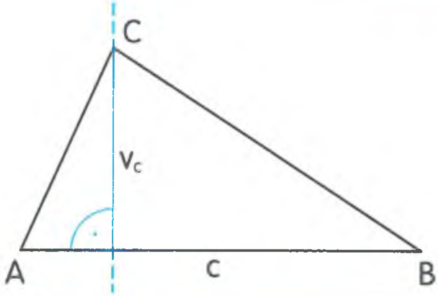
.... 4. Na obrázku je časť trojuholníkovej siete. Prekreslite si ju do zošita a farebne v nej vyznačte pravidelné šesťuholníky a ich časti tak, aby bola pokrytá celá sieť.



.... 5. Zostrojte pravidelný šesťuholník *ABCDEF*, keď je daná poloha jeho vrcholov *A*, *B*. Koľko takýchto šesťuholníkov môžete zostrojiť?

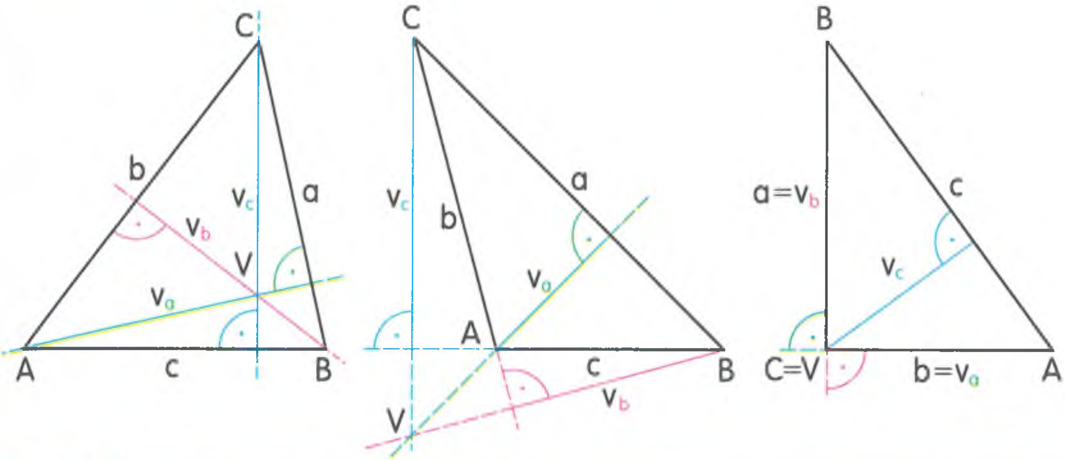
5.5 Výška trojuholníka

Na obrázku je narysovaný trojuholník ABC. Zostrojme vrcholom C kolmicu na priamku AB. Túto kolmicu nazveme výškou trojuholníka. Označíme ju v_c.



Kolmica zostrojená z vrcholu trojuholníka na priamku, na ktorej leží protiľahlá strana trojuholníka, sa nazýva **výška trojuholníka.**

Pretože trojuholník má tri vrcholy, má každý trojuholník tri výšky.



Výšky trojuholníka sa pretínajú v jednom bode V. Tento bod nazývame **priesečník výšok** alebo **ortocentrum.**

ZAPAMÄTAJTE SI

V ostrouhlom trojuholníku je bod V vnútorným bodom trojuholníka.
V tupouhlom trojuholníku bod V leží mimo trojuholníka.
V pravouhlom trojuholníku bod V splýva s vrcholom pravého uhla.

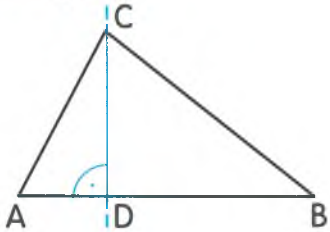
ÚLOHA 1

Narysujte rovnoramenný trojuholník ABC s hlavným vrcholom v bode C. Zostrojte výšku tohto trojuholníka, ktorá prechádza hlavným vrcholom. Označte pätu tejto výšky písmenom D. Bude bod D stredom úsečky AB?

ÚLOHA 2

Narysujte ľubovoľný rovnostranný trojuholník ABC. Zostrojte všetky výšky tohto trojuholníka. Označte ich päty písmenami D, E, F. Čo platí o bodoch D, E, F?

POZNÁMKA



Názov výška trojuholníka bude znamenať:
a) priamku CD,
b) úsečku CD,
c) dĺžku úsečky CD.
Hovoríme, že názov ***výška*** *má tri významy.*

CVIČENIA

1. Narysujte ľubovoľný ostrouhlý trojuholník ABC. Zostrojte výšky tohto trojuholníka a odmerajte vzdialenosti vrcholov od piat výšok.

.... **2.** Narysujte ľubovoľný tupouhlý trojuholník ABC. Zostrojte priesečník výšok tohto trojuholníka – ortocentrum.

.... **3.** Narysujte ľubovoľný trojuholník MNP. Odmeraním zistite vzdialenosť každého vrcholu od protiľahlej strany. Výsledky merania zapíšte.

.... **4.** Aký trojuholník má dĺžky výšok:
a) rovnaké,
b) rôzne,
c) dve má rovnaké, tretia je rôzna?

5.6 Konštrukcia trojuholníka

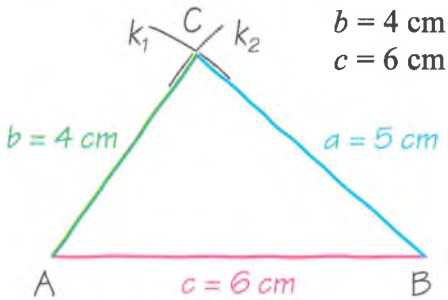
Už sme zostrojovali trojuholníky. Teraz sa naučíme postupy, ktoré pri konštrukcii trojuholníkov budeme používať aj vo vyšších ročníkoch. Postupy pri konštrukcii budeme aj skrátene zapisovať.

PRÍKLAD 1

Zostrojte trojuholník ABC, keď sú dané dĺžky jeho strán:
$a = 5$ cm, $b = 4$ cm, $c = 6$ cm.

RIEŠENIE

Náčrt:



Rozbor:

$a = 5$ cm
$b = 4$ cm
$c = 6$ cm

V náčrte si farebne vyznačíme tie prvky, ktoré sú v príklade dané.

Presvedčíme sa, či dané dĺžky spĺňajú trojuholníkovú nerovnosť

$5 - 4 < 6 < 5 + 4$

Trojuholníková nerovnosť je splnená.
Trojuholník teda možno zostrojiť.

Stranu AB vieme zostrojiť, jej dĺžku poznáme.

Ďalší vrchol C musí spĺňať tieto podmienky:

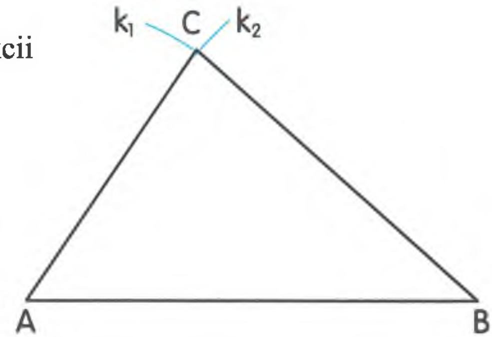
a) Bod C je od bodu A vzdialený 4 cm, teda leží na kružnici k_1 opísanej zo stredu A, s polomerom 4 cm.
b) Bod C je od bodu B vzdialený 5 cm, teda leží na kružnici k_2 opísanej zo stredu B, s polomerom 5 cm.

Bod C bude priesečníkom kružníc k_1 a k_2.

Konštrukcia:

Určíme si kroky, ktoré pri konštrukcii musíme vykonať.

1. $c = AB$; $|AB| = 6$ cm
2. k_1; $k_1(A, 4$ cm$)$
3. k_2; $k_2(B, 5$ cm$)$
4. C; $C \in k_1 \cap k_2$
5. $\triangle ABC$



Skúška:

Úlohou bolo zostrojiť trojuholník so stranami $a = 5$ cm, $b = 4$ cm, $c = 6$ cm. Odmeraním zistíme, či majú strany trojuholníka ABC dané dĺžky.

Trojuholník sme zostrojili konštrukciou z troch strán (skrátene *sss*).

Pri konštrukcii *sss* musí byť dĺžka každej strany zostrojovaného trojuholníka menšia ako súčet dĺžok zvyšných dvoch strán a súčasne väčšia ako rozdiel ich dĺžok (trojuholníková nerovnosť).

ÚLOHA 1

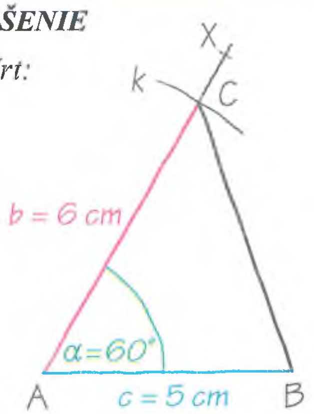
V príklade 1 sme napísali: $5 - 4 < 6 < 5 + 4$. Neoverili sme platnosť trojuholníkovej nerovnosti pre ostatné strany. Bolo to postačujúce?

PRÍKLAD 2

Zostrojte trojuholník ABC, keď je dané $b = 6$ cm, $c = 5$ cm, $\alpha = 60°$.

RIEŠENIE

Náčrt:



Rozbor:

Stranu AB dĺžky 5 cm vieme zostrojiť.

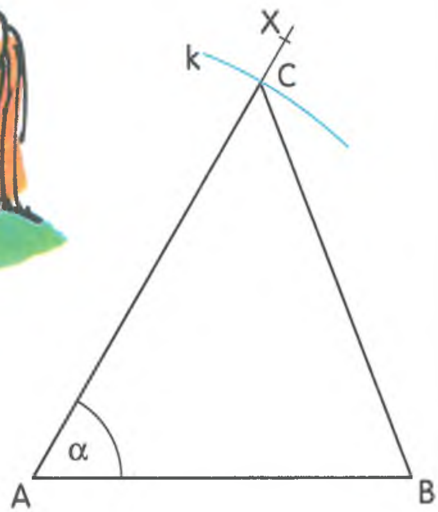
Bod C leží:

a) na polpriamke AX, ktorá je ramenom uhla BAX,

b) na kružnici k, ktorá má stred v bode A a jej polomer je 6 cm.

Konštrukcia:

1. AB; $|AB| = 5$ cm
2. $\sphericalangle BAX$; $|\sphericalangle BAX| = 60°$
3. k; $k(A, 6 \text{ cm})$
4. C; $C \in \overrightarrow{AX} \cap k$
5. $\triangle ABC$



Skúška:

Úlohou bolo zostrojiť trojuholník so stranami $b = 6$ cm, $c = 5$ cm, $\alpha = 60°$. Odmeraním dĺžok strán b, c a veľkosti uhla α sa presvedčíme, že zostrojený trojuholník spĺňa podmienky úlohy.

Trojuholník sme zostrojili konštrukciou z dvoch strán a z uhla, ktorý tieto strany zvierajú (skrátene *sus*).

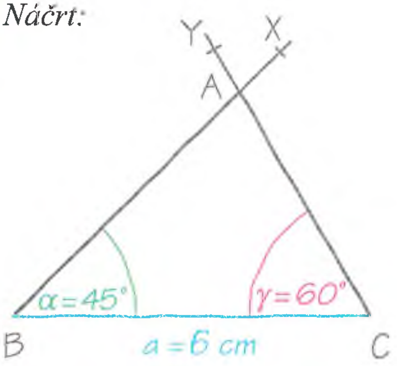
Pri konštrukcii ***sus*** musí byť veľkosť daného uhla menšia ako 180°.

PRÍKLAD 3

Zostrojte trojuholník ABC, keď je dané $a = 6$ cm, $\beta = 45°$, $\gamma = 60°$.

RIEŠENIE

Náčrt:



Rozbor:

Vrcholy B, C vieme zostrojiť, pretože $|BC| = 6$ cm.

Bod A leží:

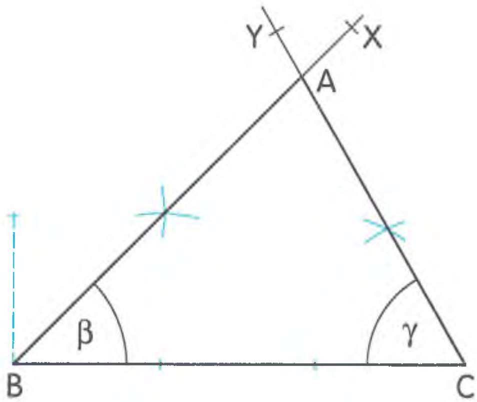
a) na polpriamke BX, ktorá je ramenom uhla CBX,

b) na polpriamke CY, ktorá je ramenom uhla BCY.

$\beta + \gamma = 45° + 60° = 105° < 180°$

Konštrukcia:

1. BC; $|BC| = 6$ cm
2. $\beta = \sphericalangle CBX$; $|\sphericalangle CBX| = 45°$
3. $\gamma = \sphericalangle BCY$; $|\sphericalangle CBY| = 60°$
4. A; $A \in \overrightarrow{BX} \cap \overrightarrow{CY}$
5. $\triangle ABC$



Skúška:

Úlohou bolo narysovať trojuholník, ktorého dĺžka strany a je 6 cm a veľkosti uhlov sú $\beta = 45°$, $\gamma = 60°$.
Skúšku urobíme odmeraním dĺžky strany a a veľkosti uhlov β a γ.

Trojuholník sme skonštruovali z jednej strany a z dvoch priľahlých uhlov (skrátene *usu*).

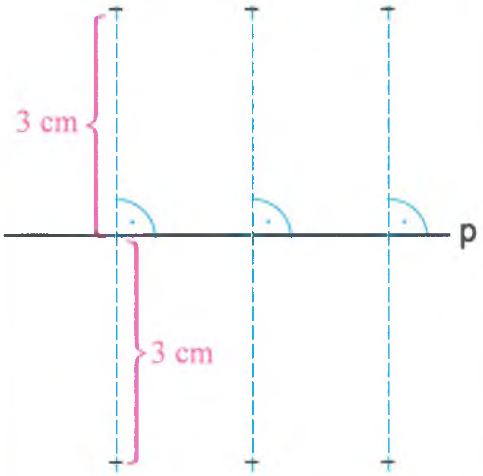
Pri konštrukcii ***usu*** musí byť súčet veľkostí daných uhlov menší ako 180°.

PROBLÉM 1

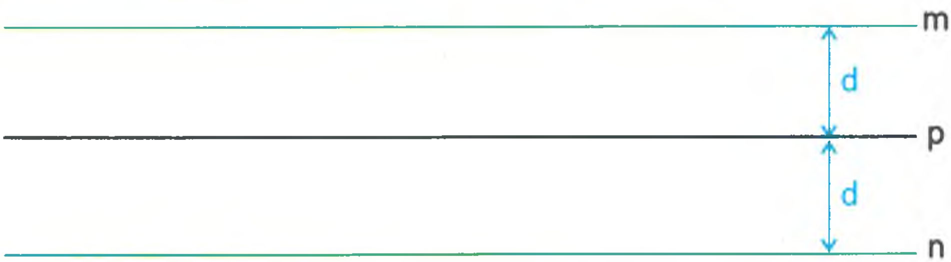
Miško sa pýta: Trojuholník možno zostrojiť len z jeho strán a uhlov? Pani učiteľka mu odpovedá: Trojuholník možno zostrojiť aj z iných jeho prvkov. Ukážeme si to na príklade. Najprv vyriešime úlohu 2.

ÚLOHA 2

Nájdite všetky body roviny, ktoré majú od danej priamky rovnakú vzdialenosť (napr. 3 cm).



Množina bodov v rovine, ktoré majú od danej priamky rovnakú vzdialenosť, sú dve rovnobežné priamky s danou priamkou, každá z nich má od tejto priamky danú vzdialenosť.

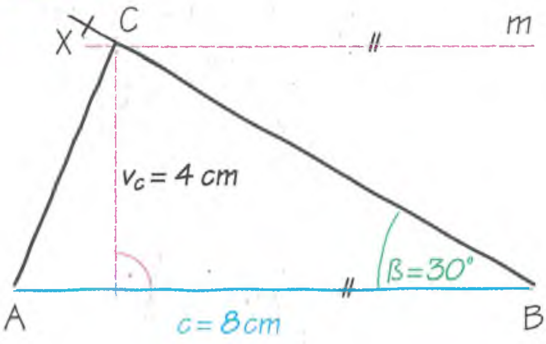


PRÍKLAD 4

Zostrojte trojuholník ABC, v ktorom poznáte dĺžku strany $c = 8$ cm, veľkosť uhla $\beta = 30°$ a dĺžku výšky $v_c = 4$ cm.

RIEŠENIE

Náčrt:



Rozbor:

Vrcholy A, B vieme zostrojiť, pretože $|AB| = 8$ cm.

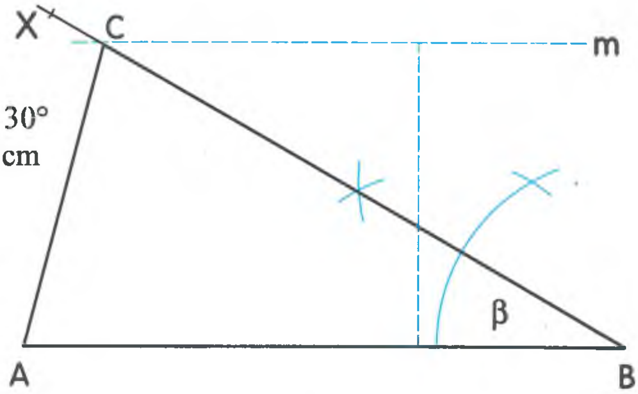
Bod C leží:

a) na polpriamke BX, ktorá je ramenom $\sphericalangle ABX$,

b) na priamke m, ktorá je rovnobežná s priamkou AB
a ich vzdialenosť je $v_c = 4$ cm.

Konštrukcia:

1. AB; $|AB| = 8$ cm
2. $\beta = \sphericalangle ABX$; $|\sphericalangle ABX| = 30°$
3. m; $m \parallel AB$; $|m, AB| = 4$ cm
4. C; $C \in \overrightarrow{BX} \cap m$
5. $\triangle ABC$



Skúška:
Skúšku vykonajú žiaci sami.

CVIČENIA

1. Zostrojte trojuholník ABC, ak je dané:
a) $a = 4$ cm, $b = 6$ cm, $c = 7$ cm
b) $a = 4$ cm, $b = 4$ cm, $c = 5$ cm
c) $a = 6$ cm, $b = 6$ cm, $c = 6$ cm

.... **2.** Zostrojte trojuholník ABC, ak je dané:
a) $a = 5$ cm, $c = 6$ cm, $\beta = 45°$
b) $b = 4$ cm, $c = 5$ cm, $\alpha = 75°$
c) $a = 5$ cm, $b = 6{,}5$ cm, $\gamma = 60°$

.... **3.** Zostrojte trojuholník ABC, ak je dané:
a) $a = 6$ cm, $v_a = 5$ cm, $\gamma = 60°$
b) $b = 7$ cm, $v_b = 3{,}5$ cm, $\alpha = 75°$
c) $a = 5$ cm, $c = 6$ cm, $v_a = 4$ cm
d) $a = 6$ cm, $b = 6$ cm, $v_b = 5$ cm
e) $a = 5$ cm, $v_a = 4$ cm, $\beta = 60°$

.... **4.** Zostrojte trojuholník MNP, ak je dané:
a) $p = 4$ cm, $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$
b) $p = 6$ cm, $n = 5$ cm, $v_p = 4$ cm
c) $p = 5$ cm, $\alpha = 60°$, $v_p = 5$ cm

VYSKÚŠAJTE SA!

1. Trojuholník ABC má uhly veľkosti $\alpha = 36° 20'$, $\beta = 76° 45'$. Vypočítajte veľkosť tretieho uhla γ.

.... 2. Vypočítajte veľkosti zvyšných vnútorných a zvyšných vonkajších uhlov trojuholníka, keď poznáte $\alpha = 35° 20'$, $\beta' = 115° 30'$.

.... 3. Vypočítajte veľkosti uhlov pri základni rovnoramenného trojuholníka, keď veľkosť uhla pri jeho hlavnom vrchole je $\gamma = 47° 20'$.

.... 4. Obvod rovnoramenného trojuholníka je 100 cm, dĺžka jeho ramena je 30 cm. Vypočítajte dĺžku jeho základne.

.... 5. Narysujte pravidelný osemuholník, ktorý je vpísaný do kružnice s polomerom 4 cm.

.... 6. Narysujte pravidelný šesťuholník, ktorého strana má dĺžku 4,5 cm.

.... 7. Zostrojte trojuholník ABC, v ktorom sa $a = 8$ cm, $b = 5$ cm, $c = 4{,}5$ cm. Ďalej zostrojte priesečník V výšok tohto trojuholníka – ortocentrum.

.... 8. Zostrojte trojuholník ABC, v ktorom sa $a = 7$ cm, $\beta = 45°$, $\gamma = 60°$.

.... 9. Zostrojte trojuholník ABC, v ktorom sa $b = 6$ cm, $c = 6$ cm, $\alpha = 60°$.

.... 10. Zostrojte trojuholník ABC, v ktorom sa $a = 6$ cm, $v_a = 4{,}5$ cm, $b = 7$ cm.

Musíme byť vďační tým, ktorí nám ukazujú naše nedostatky.

B. Pascal

6 ZLOMKY

6.1 Zlomok

PRÍKLAD 1

Na návštevu k Ivane prišlo päť spolužiačok. Ako si šesť dievčat podelilo pizzu, ak vieme, že si každá pochutnala na rovnako veľkom kúsku?

RIEŠENIE

Katka vysvetľuje: Pizza predstavuje celok. Rozdelíme ho na šesť rovnakých dielov. Jeden diel vyjadruje jednu šestinu z celku.

Píšeme: $\frac{1}{6}$.

Odpoveď: Každé dievča si pochutnalo na $\frac{1}{6}$ pizze.

PRÍKLAD 2

Zapíšte zlomkom: Janko zjedol tri diely čokolády, ktorá je rozdelená na štyri rovnaké obdĺžniky.

RIEŠENIE

Celok ... $\frac{4}{4}$

1 diel ... $\frac{1}{4}$

3 diely ... $\frac{3}{4}$

Zlomok $\frac{3}{4}$
– čitateľ
– zlomková čiara
– menovateľ

ÚLOHA 1

a) Môžeme rozdeliť celok na dva rovnaké diely? Akým zlomkom každý diel zapíšeme?
b) Môžeme rozdeliť celok na nula rovnakých dielov? Akým zlomkom takýto diel zapíšeme?
c) Môžeme rozdeliť celok na jeden diel? Akým zlomkom takýto diel zapíšeme?

CVIČENIA

1. Prečítajte zlomky: $\frac{3}{8}, \frac{17}{2}, \frac{19}{23}, \frac{306}{200}, \frac{0}{11}, \frac{904}{904}$.

2. Napíšte aspoň tri zlomky, v ktorých je čitateľ o päť menší ako menovateľ.

3. Napíšte najviac päť zlomkov, v ktorých v čitateli aj v menovateli budú iba prvočísla.

4. Zapíšte zlomkami, akou časťou hodiny je:
a) 1 minúta, c) 30 minút, e) 90 minút,
b) 7 minút, d) 60 minút, f) 200 minút?

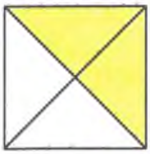
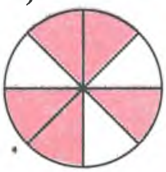
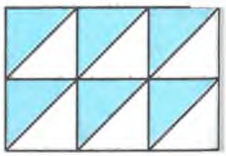
5. Zapíšte zlomkami, akou časťou dňa je:
a) 1 hodina, b) 6 hodín, c) 12 hodín.

6. Koľko hodín je: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{5}{24}$ dňa?

7. Narysujte úsečku dlhú 9 cm. Znázornite farebne $\frac{2}{3}$ úsečky.

8. Vyjadrite zlomkom, aké časti sú znázornené na obrázkoch:

a)

b)

c)

d)


9. Zapíšte zlomkami, akou časťou metra je:
a) 1 cm, 5 cm, 17 cm; b) 2 dm, 5 dm, 10 dm.

6.2 Rovnosť zlomkov
Rozširovanie a krátenie zlomkov

PROBLÉM 1

Štyria kamaráti mali za úlohu natierať časti štyroch rovnako dlhých stĺpov plota. Janko mal natrieť $\frac{1}{3}$ z prvého, Ferko $\frac{2}{6}$ z druhého, Ondrej $\frac{3}{9}$ z tretieho a Peter $\frac{4}{12}$ zo štvrtého stĺpa. Kto z chlapcov natrel najviac a kto najmenej?

RIEŠENIE

Elenka kreslí a vysvetľuje:

Janko $\frac{1}{3}$:

Ferko $\frac{2}{6}$:

Ondrej $\frac{3}{9}$:

Peter $\frac{4}{12}$:

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{4}{12}$$

Odpoveď: Všetci štyria chlapci natreli rovnako veľké časti stĺpov plota.

Všimnite si

$$\frac{1}{3} = \frac{1 \cdot \boxed{2}}{3 \cdot \boxed{2}} = \frac{2}{6} \qquad \frac{1}{3} = \frac{1 \cdot \boxed{3}}{3 \cdot \boxed{3}} = \frac{3}{9} \qquad \frac{1}{3} = \frac{1 \cdot \boxed{4}}{3 \cdot \boxed{4}} = \frac{4}{12}$$

Hodnota zlomku sa nezmení, keď čitateľa aj menovateľa zlomku vynásobíme rovnakým číslom, rôznym od nuly.
Hovoríme, že **zlomok rozširujeme.**

PRÍKLAD 1

Rozšírte zlomok $\frac{3}{4}$ číslami od 2 do 5. Porovnajte výsledky.

RIEŠENIE

$\frac{3}{4}=\frac{3.2}{4.2}=\frac{6}{8}$ $\quad \frac{3}{4}=\frac{3.3}{4.3}=\frac{9}{12}$ $\quad \frac{3}{4}=\frac{3.4}{4.4}=\frac{12}{16}$ $\quad \frac{3}{4}=\frac{3.5}{4.5}=\frac{15}{20}$

Porovnanie výsledkov: $\frac{6}{8}=\frac{9}{12}=\frac{12}{16}=\frac{15}{20}$

PRÍKLAD 2

Akým číslom sme rozšírili zlomok $\frac{5}{9}$, ak platí: $\frac{5}{9}=\frac{45}{81}$?

RIEŠENIE

$$\frac{5}{9}=\frac{5.9}{9.9}=\frac{45}{81}$$

Odpoveď: Zlomok $\frac{5}{9}$ sme rozšírili číslom 9.

PRÍKLAD 3

Doplňte chýbajúce čísla v čitateli alebo v menovateli zlomkov, aby platili rovnosti:

a) $\frac{3}{7}=\frac{?}{49}$ $\quad$ b) $\frac{?}{9}=\frac{12}{27}$ $\quad$ c) $\frac{5}{14}=\frac{100}{?}$

RIEŠENIE

a) $\frac{3}{7}=\frac{3.7}{7.7}=\frac{21}{49}$ $\quad$ b) $\frac{4}{9}=\frac{4.3}{9.3}=\frac{12}{27}$ $\quad$ c) $\frac{5}{14}=\frac{5.20}{14.20}=\frac{100}{280}$

Odpoveď: Chýbajúce čísla sú: a) 21, b) 4, c) 280.

ÚLOHA 1

Napíšte ako zlomky s menovateľom 36: $\frac{5}{12}, \frac{1}{2}, \frac{7}{18}, \frac{2}{9}$.

PROBLÉM 2

Šiestaci mali vyčistiť lesné cestičky rovnakej šírky i dĺžky.

Žiaci 6. A triedy za 2 hodiny vyčistili $\frac{6}{8}$ z celku, žiaci 6. B triedy $\frac{3}{4}$ celku.

Ktorá trieda bola usilovnejšia?

RIEŠENIE

Lenka schematicky znázorňuje cestičky:

Píše: $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$, lebo $\frac{6}{8} = \frac{6:2}{8:2} = \frac{3}{4}$

Odpoveď: Obidve triedy boli rovnako usilovné.

Ak čitateľa aj menovateľa zlomku delíme rovnakým číslom, rôznym od nuly, hodnota zlomku sa nezmení. Hovoríme, že **zlomok krátime.**

Zuzka pripomína:
Zlomky krátime vtedy, ak sú v čitateli aj v menovateli zlomku čísla súdeliteľné.
Napríklad: $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$, $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$, $\frac{14}{35} = \frac{2}{5}$

Hovoríme, že sme zlomky upravili na **základný tvar.**
Zlomok je v základnom tvare, ak jeho čitateľ a menovateľ sú nesúdeliteľné čísla.

Všimnite si:

$\frac{2}{2}$ chleba = 1 chlieb

$\frac{4}{4}$ koláča = 1 koláč

$\frac{10}{10}$ dm = 1 dm

PRÍKLAD 4

Upravte nasledujúce zlomky na základný tvar: $\frac{5}{15}$, $\frac{12}{20}$, $\frac{4}{9}$

RIEŠENIE

$\frac{5}{15} = \frac{5:5}{15:5} = \frac{1}{3}$ – zlomok $\frac{5}{15}$ sme krátili číslom 5

$\frac{12}{20} = \frac{12:4}{20:4} = \frac{3}{5}$ – zlomok $\frac{12}{20}$ sme krátili číslom 4

$\frac{4}{9}$ – čísla sú nesúdeliteľné, zlomok je v základnom tvare.

ÚLOHA 2

Upravte zlomky na základný tvar: $\frac{2}{4}$, $\frac{7}{21}$, $\frac{5}{30}$, $\frac{24}{26}$, $\frac{25}{45}$, $\frac{81}{99}$

ÚLOHA 3

Z troch zlomkov vyberte dva, ktoré sa rovnajú:

a) $\frac{4}{7}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{20}{35}$ b) $\frac{18}{20}$, $\frac{36}{40}$, $\frac{36}{60}$

CVIČENIA

1. Rozšírte zlomky

a) číslom 2: $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{13}{15}$

b) číslom 5: $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{10}{11}$

c) číslom 9: $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{10}{13}$, $\frac{7}{100}$

.... **2.** Upravte zlomky tak, aby ich menovateľ bol

a) 72: $\frac{13}{36}$, $\frac{15}{24}$, $\frac{7}{18}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{1}{8}$

b) 100: $\frac{9}{50}$, $\frac{7}{25}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{8}{5}$, $\frac{11}{4}$, $\frac{1}{2}$

.... **3.** Kráťte nasledujúce zlomky siedmimi: $\frac{14}{70}$, $\frac{21}{49}$, $\frac{7}{35}$, $\frac{56}{42}$

.... **4.** Upravte zlomky na základný tvar:

a) $\frac{9}{36}$, $\frac{3}{9}$, $\frac{4}{20}$, $\frac{5}{70}$, $\frac{8}{64}$

b) $\frac{24}{32}$, $\frac{16}{40}$, $\frac{25}{80}$, $\frac{28}{49}$, $\frac{54}{81}$

c) $\frac{63}{81}$, $\frac{44}{77}$, $\frac{26}{39}$, $\frac{45}{105}$, $\frac{80}{120}$

.... **5.** Zistite, či platí rovnosť zlomkov:

a) $\frac{54}{100} = \frac{27}{50}$ b) $\frac{15}{19} = \frac{40}{38}$ c) $\frac{13}{17} = \frac{78}{102}$

.... **6.** Doplňte čitateľa alebo menovateľa zlomku tak, aby platila rovnosť:

a) $\frac{3}{10} = \frac{21}{*}$, $\frac{5}{8} = \frac{*}{56}$, $\frac{*}{40} = \frac{13}{20}$

b) $\frac{17}{*} = \frac{51}{21}$, $\frac{105}{210} = \frac{35}{*}$, $\frac{*}{4} = \frac{60}{80}$

.... **7.** Rozšírte zlomok $\frac{3}{4}$ číslom 12 a vzniknutý zlomok kráťte najprv číslom 3 a potom číslom 4. Čo ste zistili?

6.3 Zápis zlomkov desatinnými číslami

PRÍKLAD 1

Zapíšte zlomky $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{70}{25}$ a $\frac{1}{8}$ v tvare desatinných čísel.

RIEŠENIE I

Všetky dané zlomky vieme upraviť tak, aby mali v menovateli zlomku číslo 10, 100 alebo 1 000. Potom nie je problém zapísať ich ako desatinné čísla:

$\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0{,}5$ $\frac{3}{4} = \frac{75}{100} = 0{,}75$ $\frac{70}{25} = \frac{280}{100} = 2{,}8$ $\frac{1}{8} = \frac{125}{1\,000} = 0{,}125$

RIEŠENIE II

Eva má iný návrh: Vieme, že zlomok je v podstate podiel, v ktorom platí:

zlomok = čitateľ : menovateľ

teda

$\frac{1}{2} = 1 : 2 = 0{,}5$ $\frac{3}{4} = 3 : 4 = 0{,}75$ $\frac{70}{25} = 70 : 25 = 2{,}8$ $\frac{1}{8} = 1 : 8 = 0{,}125$

PROBLÉM 1

a) Vieme upraviť zlomok $\frac{2}{3}$ na desatinný zlomok?

b) Môžeme ho zapísať v tvare desatinného čísla?

RIEŠENIE

a) $\frac{2}{3} = \frac{?}{10\ (100,\ 1\ 000,\ ...)}$ Číslo 3 nevieme rozšíriť tak, aby sme v menovateli zlomku dostali číslo 10, 100, 1 000, ...

b) Využijeme to, že zlomok je podiel: $\frac{2}{3} = 2 : 3 = 0{,}666...$

20

20

20

⋮

Pri delení dostávame stále zvyšok 2 a v podiele sa opakuje číslica 6, takže delenie je neukončené.
Číslica 6, ktorá sa opakuje, sa nazýva perióda. Napíšeme ju len raz a vyznačíme nad ňou čiaru.

Píšeme: $\frac{2}{3} = 0{,}\overline{6}$
Čítame: nula celá, šesť periodických.

PRÍKLAD 2

Zapíšte zlomok $\frac{12}{11}$ ako desatinné číslo.

RIEŠENIE

$\frac{12}{11} = 12 : 11 = 1{,}090\ 9...$

100

100

⋮

Skupina cifier 09 sa stále opakuje. Je to perióda.
Odpoveď: $\frac{12}{11} = 1{,}\ \overline{09}$.

PRÍKLAD 3

Zapíšte $\frac{7}{12}$ ako desatinné číslo.

RIEŠENIE

$\frac{7}{12} = 7 : 12 = 0{,}583\ 3...$

70

100

40

40

⋮

Odpoveď: $\frac{7}{12} = 0{,}58\overline{3}$.

Čítame: nula celá, päťstoosemdesiattri tisícin, tri periodické.

PRÍKLAD 4

Koľko metrov sú $\frac{4}{11}$ km?

RIEŠENIE

1 m = 0,001 km $\qquad \frac{4}{11} = 4 : 11 = 0{,}363\,6... = 0{,}\overline{36}$

$0{,}\overline{36} = 0{,}363\,6... \doteq 0{,}364$

Zaokrúhlime na tisíciny.

Odpoveď: $\frac{4}{11}$ km je približne 364 m.

ÚLOHA 1

Koľko gramov je $\frac{5}{12}$ kg?

CVIČENIA

1. Upravte dané zlomky na desatinné zlomky, a potom ich premeňte na desatinné čísla:

a) $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{7}{20}$, $\frac{81}{25}$

b) $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{50}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{11}{25}$

c) $\frac{3}{6}$, $\frac{30}{20}$, $\frac{6}{16}$, $\frac{81}{45}$

d) $\frac{18}{36}$, $\frac{12}{50}$, $\frac{5}{50}$, $\frac{12}{200}$

.... **2.** Vyjadrite zlomky v tvare desatinných čísel:

$\frac{3}{25}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{11}{20}$, $\frac{8}{12}$, $\frac{7}{28}$, $\frac{8}{40}$

.... **3.** Napíšte zlomky v tvare desatinných čísiel a určte periódu:

$\frac{7}{9}$, $\frac{16}{3}$, $\frac{5}{27}$, $\frac{70}{22}$, $\frac{16}{44}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{7}{30}$

.... **4.** Koľko cm je $\frac{1}{6}$ metra?

.... **5.** Koľko metrov sú $\frac{2}{7}$ km?

.... **6.** Zapíšte desatinné čísla v tvare zlomkov a upravte ich na základný tvar: 0,4; 0,12; 1,5; 2,08; 32,5; 60,04; 21,48; 12,8.

6.4 Usporiadanie zlomkov podľa veľkosti

PROBLÉM 1

a) Čo je viac: $\frac{3}{4}$ čokolády alebo $\frac{1}{4}$ čokolády?

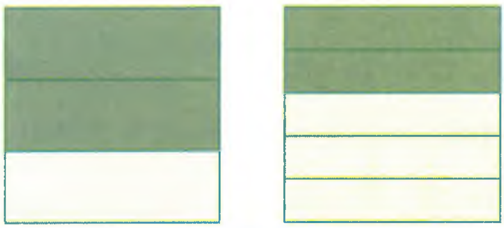
Odpoveď: $\boxed{\frac{3}{4} > \frac{1}{4}}$, pretože $3 > 1$

b) Čo je viac: $\frac{3}{5}$ úsečky alebo $\frac{4}{5}$ úsečky?

Odpoveď: $\boxed{\frac{3}{5} < \frac{4}{5}}$, pretože $3 < 4$

Z dvoch zlomkov s rovnakými menovateľmi je väčší ten, ktorý má väčšieho čitateľa.

c) Čo je viac: $\frac{2}{3}$ štvorca alebo $\frac{2}{5}$ štvorca?



Odpoveď: $\boxed{\frac{2}{3} > \frac{2}{5}}$, pretože $3 < 5$

Z dvoch zlomkov s rovnakými čitateľmi je väčší ten, ktorý má menšieho menovateľa.

ÚLOHA 1

Porovnajte zlomky: $\frac{7}{11}$ a $\frac{9}{11}$, $\frac{3}{14}$ a $\frac{5}{14}$, $\frac{3}{10}$ a $\frac{3}{4}$, $\frac{15}{17}$ a $\frac{15}{22}$

PROBLÉM 2

Čo je viac: $\frac{1}{2}$ hrušky alebo $\frac{3}{4}$ hrušky?

Odpoveď: $\boxed{\frac{1}{2} < \frac{3}{4}}$

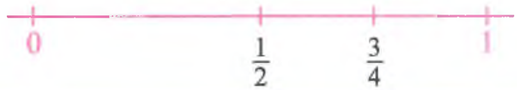
RIEŠENIE I

$\frac{1}{2}$ a $\frac{3}{4}$ upravíme na rovnaké menovatele, a potom ich porovnáme:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} \qquad \frac{2}{4} < \frac{3}{4}, \quad \text{pretože } 2 < 3, \quad \text{teda} \quad \frac{1}{2} < \frac{3}{4}$$

RIEŠENIE II

Znázorníme zlomky na číselnej osi a porovnáme ich:



$$\frac{3}{4} > \frac{1}{2}$$

RIEŠENIE III

Premeníme zlomky na desatinné čísla a porovnáme ich:

$$\frac{1}{2} = 0{,}5 \qquad \frac{3}{4} = 0{,}75 \qquad 0{,}5 < 0{,}75$$

$$\frac{1}{2} < \frac{3}{4}$$

PRÍKLAD 1

Usporiadajte zlomky podľa veľkosti: $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{6}{5}$

RIEŠENIE

Vieme, že $\frac{6}{5} > 1$ a $\frac{3}{5} < 1$ aj $\frac{4}{7} < 1$.

Porovnávame iba $\frac{3}{5}$ a $\frac{4}{7}$ úpravou na rovnaké menovatele: $\frac{3}{5} = \frac{21}{35}$, $\frac{4}{7} = \frac{20}{35}$

$$\frac{21}{35} > \frac{20}{35}, \text{ pretože } 21 > 20, \text{ teda } \frac{3}{5} > \frac{4}{7}$$

Odpoveď: $\frac{6}{5} > \frac{3}{5} > \frac{4}{7}$.

PRÍKLAD 2

Porovnajte zlomky: $\frac{7}{8}$ a $\frac{9}{11}$

RIEŠENIE

Zuzka navrhuje:

$\frac{7}{8}$ a $\frac{9}{11}$ upravíme na rovnaké menovatele :

$\underbrace{\frac{7\,.\,11}{8\,.\,11}}$ $\underbrace{\frac{9\,.\,8}{11\,.\,8}}$ – zlomky po vhodnom rozšírení majú rovnaké menovatele, stačí teda porovnať čitatele:

$7\,.\,11 > 9\,.\,8$, preto $\frac{7}{8} > \frac{9}{11}$

Súčiny 7 . 11 a 9 . 8 určujú šípkové pravidlo: $\boxed{\frac{7}{8} \times \frac{9}{11}}$

Odpoveď: $\frac{7}{8} > \frac{9}{11}$.

PRÍKLAD 3

Znázornite čísla $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$ a $\frac{7}{9}$ na číselnej osi a usporiadajte ich podľa veľkosti.

RIEŠENIE

Peter hovorí: Zvolíme si na číselnej osi jednotkovú úsečku, napr. 9 cm.
Potom: $\frac{2}{3}$ predstavujú 6 cm, $\frac{5}{6}$ predstavuje 7,5 cm a $\frac{7}{9}$ predstavuje 7 cm.

Odpoveď: $\frac{2}{3} < \frac{7}{9} < \frac{5}{6}$.

ÚLOHA 2

Porovnajte zlomky $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{12}$ pomocou šípkového pravidla alebo znázornením na číselnej osi.

ZHRNUTIE:

Zlomky s rovnakými menovateľmi	$\frac{3}{7}$? $\frac{5}{7}$	$3 < 5$	$\frac{3}{7} < \frac{5}{7}$
Zlomky s rovnakými čitateľmi	$\frac{9}{10}$? $\frac{9}{11}$	$10 < 11$	$\frac{9}{10} > \frac{9}{11}$
Zlomky s rôznymi menovateľmi	$\frac{4}{5}$? $\frac{7}{8}$	upravíme $\frac{32}{40} < \frac{35}{40}$,	preto $\frac{4}{5} < \frac{7}{8}$
	šípkovým pravidlom: $4\,.\,8 < 7\,.\,5$		$\frac{4}{5} < \frac{7}{8}$

CVIČENIA

1. Porovnajte zlomky: a) $\frac{5}{7}$ a $\frac{3}{8}$; $\frac{4}{9}$ a $\frac{5}{6}$; $\frac{2}{5}$ a $\frac{3}{7}$

b) $\frac{3}{4}$ a $\frac{5}{8}$; $\frac{2}{5}$ a $\frac{4}{15}$; $\frac{5}{6}$ a $\frac{10}{12}$

.... **2.** Ktoré z čísel $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{6}$ a $\frac{1}{11}$ vyhovujú nerovnici $x < \frac{2}{3}$?

.... **3.** Nájdite aspoň 1 zlomok, ktorý je:

a) väčší ako $\frac{5}{7}$ a menší ako $\frac{8}{9}$;

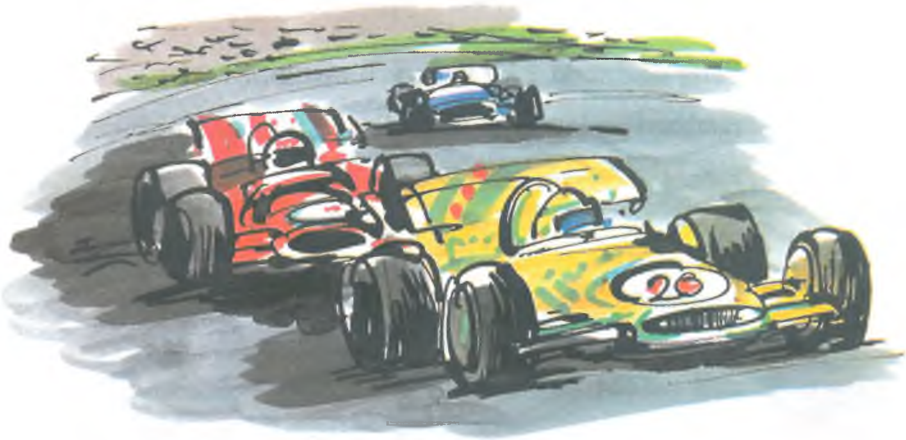
b) väčší ako $\frac{2}{3}$ a menší ako $\frac{5}{6}$.

c) Koľko je takých zlomkov, ktoré vyhovujú podmienkam v a) a b) ?

.... **4.** Usporiadajte zlomky podľa veľkosti: a) $\frac{7}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{9}{10}$

b) $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{11}$, $\frac{8}{22}$, $\frac{6}{10}$

.... **5.** Tri autá **A, B, C,** idúce rôznou rýchlosťou, prešli danú dráhu takto: **A** za $\frac{2}{3}$ hodiny, **B** za $\frac{4}{5}$ hodiny a **C** za $\frac{7}{12}$ hodiny.
Ktoré z áut išlo najväčšou a ktoré najmenšou rýchlosťou?



.... **6.** Tri rôzne firmy vyrábali rovnaké množstvo výrobkov zhodného druhu. Za rovnaký čas vyrobila prvá firma $\frac{7}{8}$, druhá firma $\frac{9}{10}$ a tretia firma $\frac{11}{12}$ predpokladaného množstva výrobkov. Ktorá firma mala najslabšiu a ktorá najvýkonnejšiu výrobu?

VYSKÚŠAJTE SA!

1. Zapíšte najviac päť zlomkov, v ktorých je menovateľ dvojnásobkom čitateľa.

.... **2.** Čo viete povedať o všetkých zlomkoch z 1. úlohy, ak ich upravíte na základný tvar?

.... **3.** Úsečka je dlhá 8 cm. Znázornite na nej tieto zlomky: $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{5}{8}$.

.... **4.** Zistite, či platí rovnosť zlomkov:

a) $\frac{13}{15} = \frac{39}{45}$ b) $\frac{96}{72} = \frac{48}{36} = \frac{4}{3}$ c) $\frac{5}{17} = \frac{9}{34}$ d) $\frac{3}{7} = \frac{12}{28} = \frac{36}{56}$

Viete v prípade nerovnosti odstrániť chybu tak, aby platila rovnosť?

.... **5.** Zapíšte zlomky v tvare desatinných čísel: $\frac{7}{2}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{19}{20}$, $\frac{7}{50}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{3}{17}$.

.... **6.** Vyjadrite zlomkom, akou časťou minúty je 20 sekúnd, 35 sekúnd, 36 sekúnd.

.... **7.** Koľko metrov je $\frac{7}{20}$, $\frac{3}{1\,000}$, $\frac{29}{100}$ km?

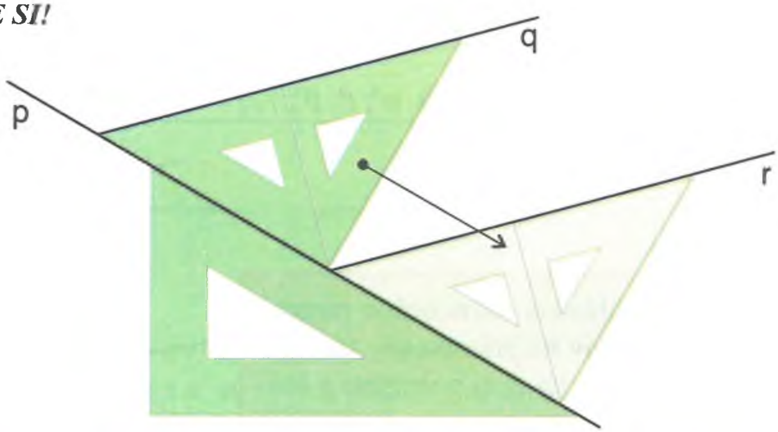
.... **8.** Usporiadajte čísla podľa veľkosti: $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{7}{24}$.

.... **9.** Peter nazbieral $\frac{3}{4}$ kg liečivých rastlín, Katka nazbierala $\frac{3}{5}$ kg liečivých rastlín, Elenka $\frac{7}{10}$ kg liečivých rastlín. Kto nazbieral najviac a kto najmenej liečivých rastlín?

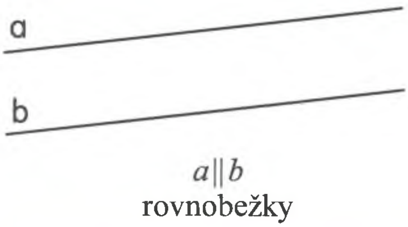
ROVNOBEŽNOSŤ
ROVNOBEŽNÍK, LICHOBEŽNÍK

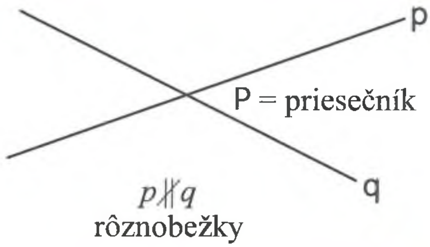
Rovnobežky preťaté priečkou

V 5. ročníku sme sa naučili rysovať rovnobežné priamky.
ZOPAKUJME SI!

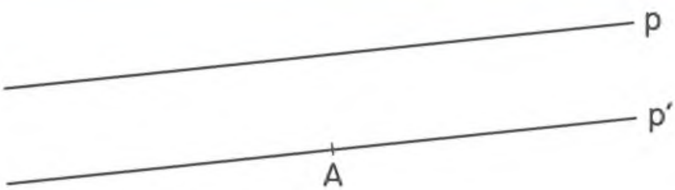


Rovnobežné priamky nemajú spoločný bod.
Rôznobežné priamky majú jediný spoločný bod.

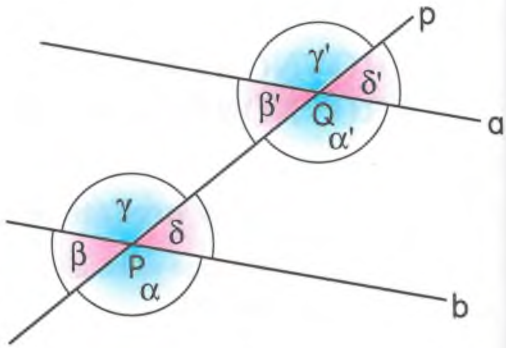




Daným bodom A neležiacim na priamke p možno k danej priamke p zostrojiť jedinú rovnobežku p'.



Nech sú dané dve rôzne rovnobežné priamky a, b a priamka p, ktorá ich pretína v bodoch P, Q. Hovoríme, **že rovnobežné priamky a, b sú preťaté priečkou p.**

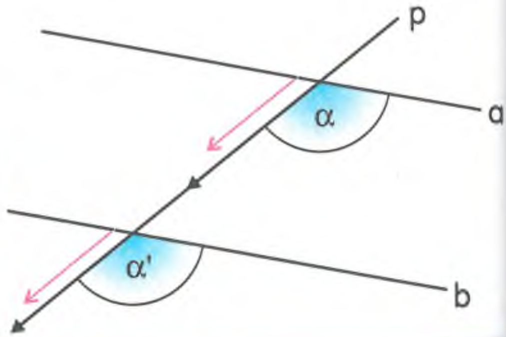


Vznikne niekoľko uhlov.
Rozdeľme ich na dve skupiny.

1. Dvojice uhlov α, α'; β, β'; γ, γ'; δ, δ' sa nazývajú súhlasné uhly.

Súhlasné uhly

Súhlasne rovnobežné ramená uhlov na priamke p – uhly ležia v tej istej polrovine s hranicou p.



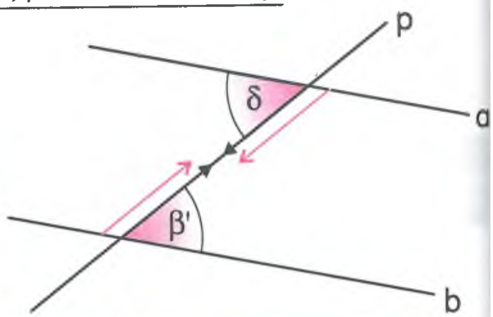
Ak sú priamky a, b preťaté priečkou p rovnobežné, tak každá dvojica súhlasných uhlov sú zhodné uhly.

Ak namiesto jedného z dvoch súhlasných uhlov vezmeme jeho vrcholový uhol, potom dostaneme dvojicu striedavých uhlov.

2. Dvojice uhlov α, γ'; β, δ'; γ, α'; δ, β' sú striedavé uhly.

Striedavé uhly

Nesúhlasne rovnobežné ramená uhlov na priamke p – uhly ležia v opačných polrovinách s hranicou p.



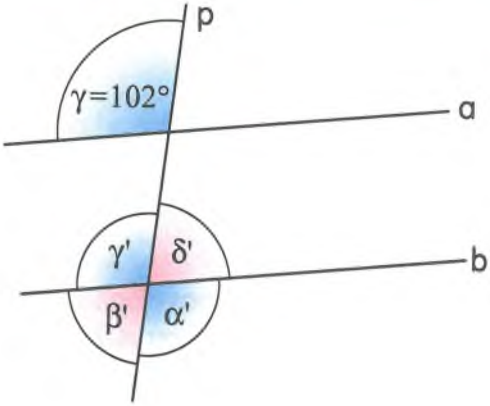
Ak sú priamky a, b preťaté priečkou p rovnobežné, tak každá dvojica striedavých uhlov sú zhodné uhly.

ÚLOHA 1

Odôvodnite predchádzajúce tvrdenie (využite zhodnosť súhlasných uhlov a vrcholových uhlov).

PRÍKLAD 1

Na obrázku je uhol $\gamma = 102°$. Zistite veľkosť ostatných uhlov vyznačených na obrázku, ak sú priamky a, b rovnobežné.



RIEŠENIE

$\gamma = 102°$

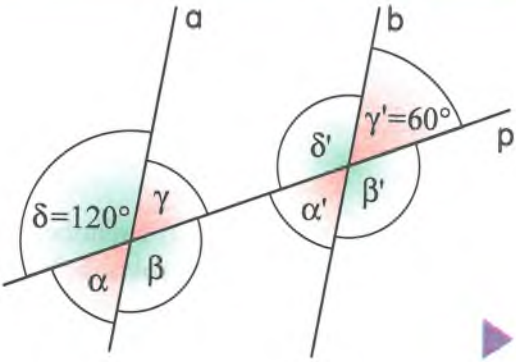
a) $\gamma = \gamma' = 102°$, uhly γ a γ' sú súhlasné uhly
b) $\gamma = \alpha' = 102°$, uhly γ a α' sú striedavé uhly (môžeme využiť aj vlastnosť vrcholových uhlov γ' a α'.)
c) $\gamma' + \beta' = 180°$
$\beta' = 180° - 102°$
$\beta' = 78°$, uhly γ' a β' sú susedné uhly
d) $\beta' = \delta' = 78°$, β' a δ' sú vrcholové uhly.

Často využívame obrátené tvrdenie.

> Ak sú niektoré dva súhlasné alebo striedavé uhly vytvorené dvoma priamkami preťatými priečkou zhodné, sú tieto dve priamky rovnobežné.

PRÍKLAD 2

Na obrázku sú priamky a, b preťaté priamkou p. Tak vytvárajú dve štvorice uhlov. Aká je vzájomná poloha priamok a, b, keď $\delta = 120°$, $\gamma' = 60°$.



RIEŠENIE

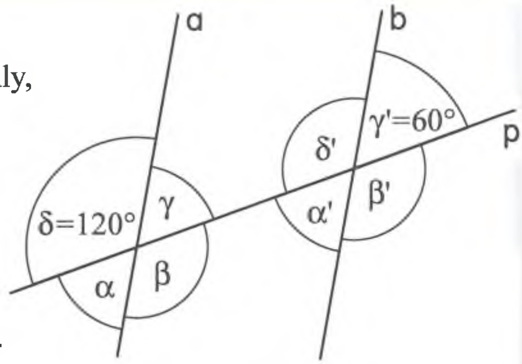
$\delta + \gamma = 180°$, δ a γ sú susedné uhly, preto

$\gamma = 180° - 120° = 60°$

Pretože

$\gamma = \gamma' = 60°$

sú súhlasné uhly γ, γ' zhodné, teda priamky a, b sú rovnobežné.

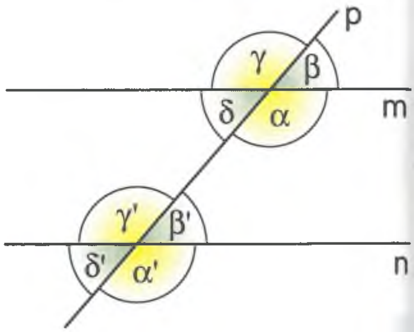


ÚLOHA 2

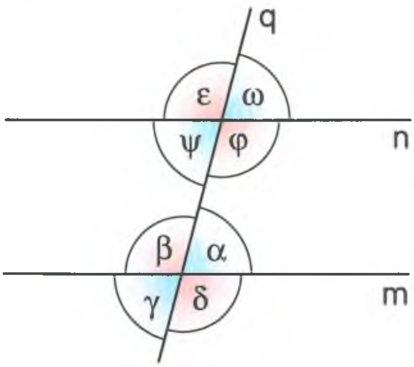
Zostrojte ľubovoľný trojuholník ABC a jeho vrcholom C veďte rovnobežku so stranou AB. Pomocou vlastnosti striedavých uhlov dokážte už známe tvrdenie, že súčet veľkostí vnútorných uhlov trojuholníka sa rovná 180°.

CVIČENIA

1. Na obrázku sú dve štvorice uhlov. Vymenujte všetky dvojice
a) súhlasných uhlov,
b) striedavých uhlov,
c) vedľajších uhlov,
d) vrcholových uhlov.

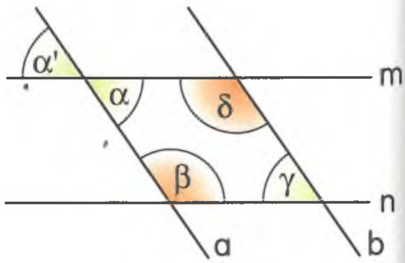


.... **2.**

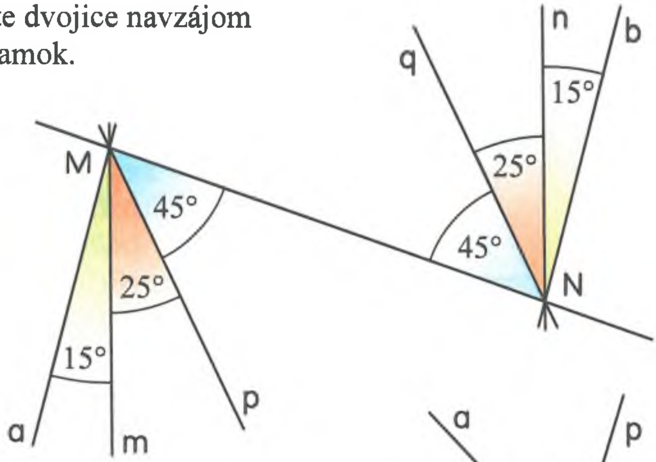


Na obrázku sú rovnobežné priamky m, n preťaté priečkou q. Uhol α má veľkosť 75°30'. Vypočítajte veľkosti všetkých vyznačených uhlov.

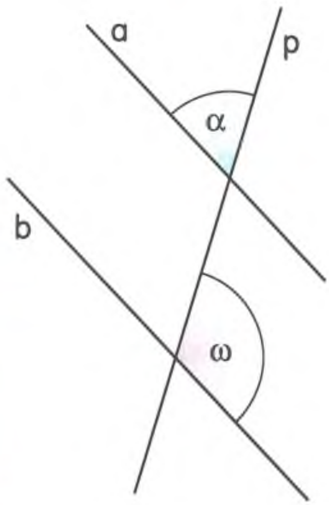
.... **3.** Na obrázku sú rovnobežné priamky a, b preťaté rovnobežnými priamkami m, n. Uhol $\alpha' = 55°\,30'$. Vypočítajte veľkosť uhlov $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.



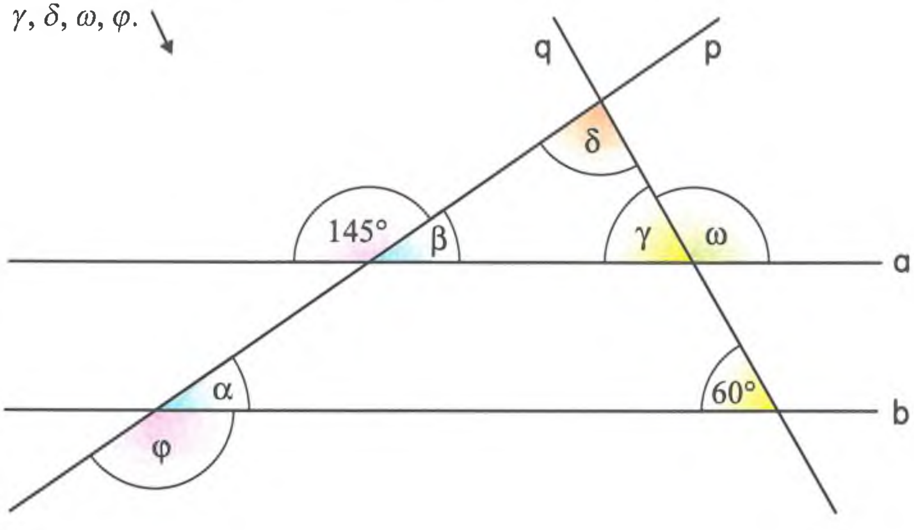
.... **4.** Na obrázku nájdite dvojice navzájom rovnobežných priamok.



.... **5.** O uhloch na obrázku platí: $\omega = 2\alpha$, $\alpha = 60°$. Aká je vzájomná poloha priamok a, b? ⟶

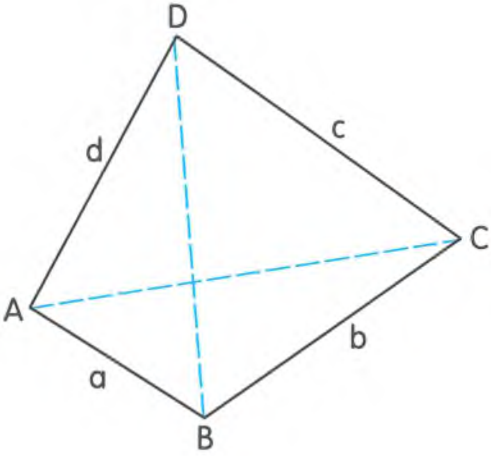


.... **6.** Dané sú rovnobežné priamky a, b. Priamky p, q ich pretínajú, pričom sú známe vyznačené uhly. Vypočítaje veľkosti uhlov α, β, γ, δ, ω, φ.



7.2 Rovnobežník a jeho vlastnosti

Na obrázku je nakreslený útvar, ktorý nazývame **štvoruholník.**

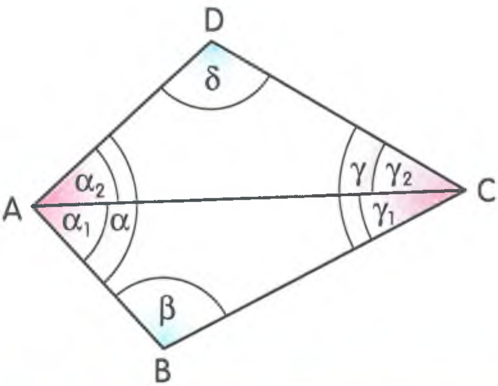


AB, BC, CD, DA – strany štvoruholníka

$$\left.\begin{array}{l} |AB| = a \\ |BC| = b \\ |CD| = c \\ |DA| = d \end{array}\right\} \text{ veľkosti strán štvoruholníka}$$

AC, BD – uhlopriečky štvoruholníka

$$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle DAB \\ \sphericalangle ABC \\ \sphericalangle BCD \\ \sphericalangle CDA \end{array}\right\} \text{ vnútorné uhly štvoruholníka}$$



Uhlopriečka rozdelí štvoruholník na dva trojuholníky ABC, ACD.
Zrejme platí.
$\alpha_1 + \beta + \gamma_1 = 180°$
$\alpha_2 + \gamma_2 + \delta = 180°$
Po sčítaní uhlov dostaneme:

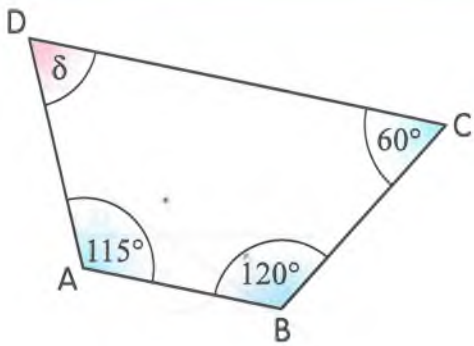
$$\underbrace{\alpha_1 + \alpha_2}_{\alpha} + \beta + \underbrace{\gamma_1 + \gamma_2}_{\gamma} + \delta = 180° + 180°$$

$$\boxed{\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°}$$

Súčet veľkostí všetkých vnútorných uhlov každého štvoruholníka je 360°.

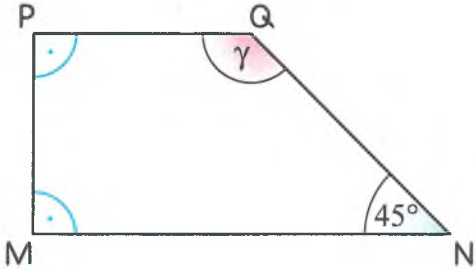
ÚLOHA 1

Na obrázku je nakreslený štvoruholník $ABCD$. V ňom sú vyznačené tri vnútorné uhly. Vypočítajte veľkosť štvrtého uhla δ.



ÚLOHA 2

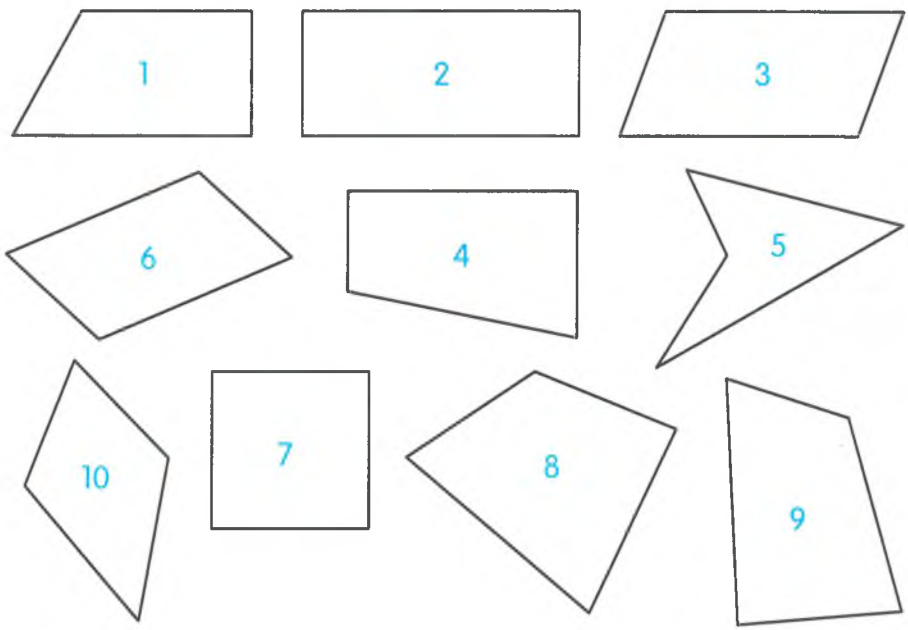
Na obrázku je nakreslený štvoruholník *MNPQ*, ktorý má dva pravé uhly, tretí jeho uhol má veľkosť 45°. Vypočítajte veľkosť štvrtého uhla γ.



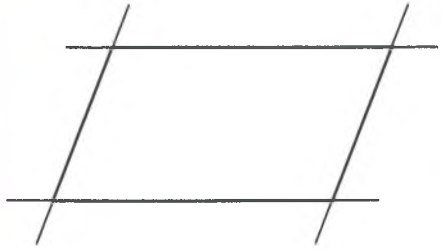
ÚLOHA 3

Na obrázku sú rôzne štvoruholníky, ktoré sú očíslované číslami 1 až 10. Zapíšte tie, pre ktoré platí, že majú:

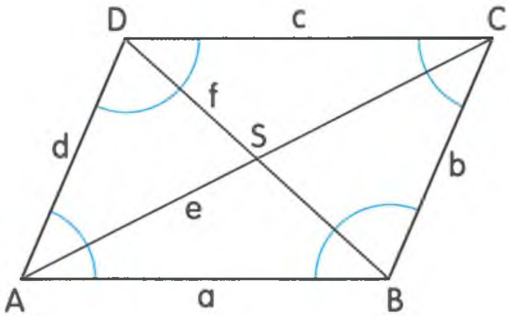
a) dve protiľahlé strany rovnobežné,
b) každé dve protiľahlé strany rovnobežné,
c) všetky strany zhodné,
d) každé dve protiľahlé strany zhodné,
e) protiľahlé strany rovnobežné a zhodné,
f) protiľahlé strany rovnobežné, ale nie zhodné,
g) všetky strany zhodné a každé dve susedné navzájom kolmé.



Niektoré štvoruholníky na obrázku majú každé dve protiľahlé strany rovnobežné, nazývame ich **rovnobežníky.**



Rovnobežník je štvoruholník, ktorého
každé dve protiľahlé strany
ležia na rovnobežných
priamkach.



A, B, C, D – vrcholy rovnobežníka
AB, BC, CD, DA – strany rovnobežníka
AC, BD – uhlopriečky rovnobežníka
$\sphericalangle DAB$, $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle BCD$, $\sphericalangle CDA$ – vnútorné uhly rovnobežníka
S – stred uhlopriečok AC, BD
a, b, c, d – označenie strán rovnobežníka
e, f – označenie uhlopriečok rovnobežníka

ÚLOHA 4

S využitím vlastností súhlasných a striedavých uhlov zistite vlastnosti protiľahlých uhlov a priľahlých uhlov ku každej strane rovnobežníka.

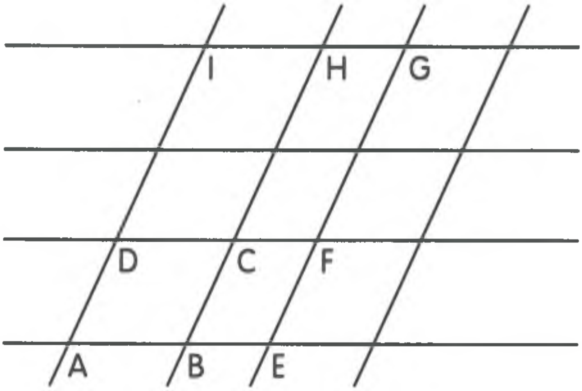
Ďalšie vlastnosti rovnobežníka:

1. Každé dve protiľahlé strany rovnobežníka sú zhodné.
2. Každé dva protiľahlé vnútorné uhly rovnobežníka sú zhodné.
3. V každom rovnobežníku sa uhlopriečky navzájom rozpoľujú (majú spoločný stred).

CVIČENIA

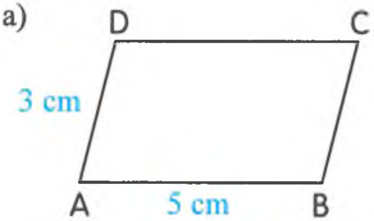
1. Na obrázku sú štyri rovnobežky preťaté ďalšími štyrmi rovnobežkami. V tejto sieti sú vyznačené body A, B, C, D, E, F, G, H, I.

a) Napíšte aspoň päť rovnobežníkov, ktoré majú vrcholy v daných bodoch.
b) Sú rovnobežníky aj tieto útvary: $BEGD$, $ABCI$?

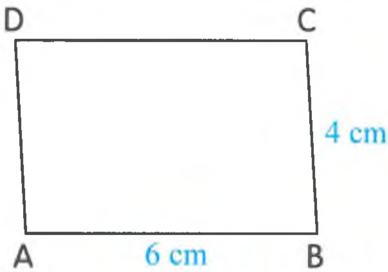


.... **2.** Na obrázku sú štvoruholníky, v ktorých $AB \| CD$, $AD \| BC$. Ako nazývame tieto štvoruholníky? Doplňte rozmery zvyšných strán.

a)

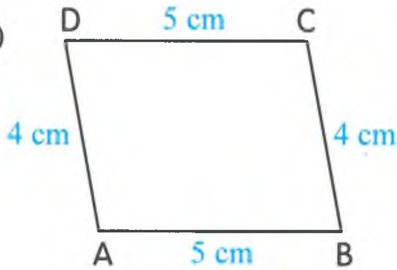


b)

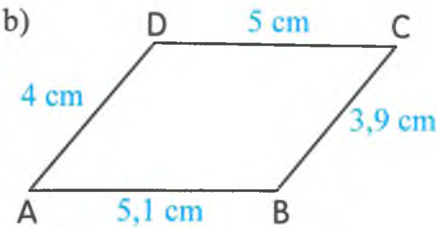


.... **3.** Na obrázku sú štvoruholníky. Rozhodnite, ktorý z nich je rovnobežník.

a)

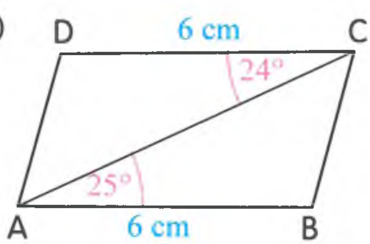


b)

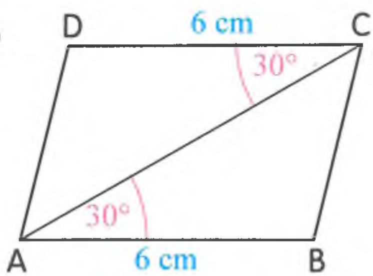


.... **4.** Je štvoruholník *ABCD* rovnobežník? Svoje tvrdenie odôvodnite.

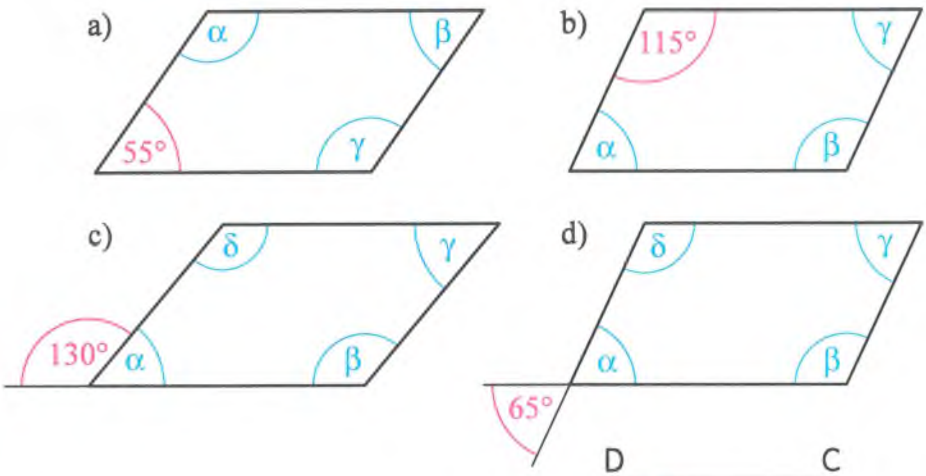
a)



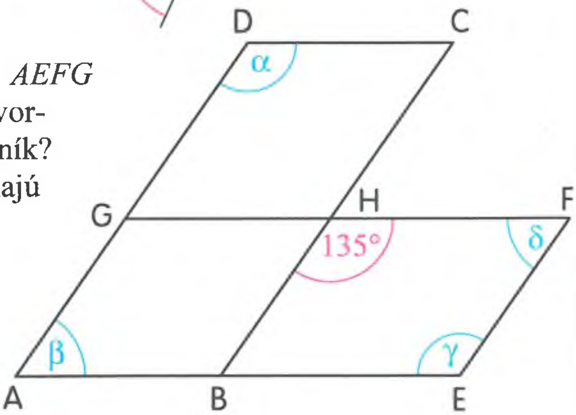
b)



.... **5.** Na obrázku sú štyri rovnobežníky. Určte veľkosti uhlov α, β, γ, δ.



.... **6.** Štvoruholníky $ABCD$ a $AEFG$ sú rovnobežníky. Je aj štvoruholník $ABHG$ rovnobežník? Prečo? Koľko stupňov majú uhly α, β, γ, δ?



.... **7.** Sú dané tri body A, B, S, ktoré neležia na jednej priamke. Body A, B sú dva susedné vrcholy rovnobežníka, bod S je stredom jeho uhlopriečok. Zostrojte rovnobežník $ABCD$.

.... **8.** V rovnobežníku $ABCD$ poznáme veľkosť jedného vnútorného uhla. Vypočítajte veľkosť ostatných vnútorných uhlov rovnobežníka.
a) $\alpha = 45°$;   b) $\beta = 103° \, 30'$.

.... **9.** Koľko tupých uhlov môže byť v rovnobežníku, ktorý neobsahuje žiaden pravý uhol?

.... **10.** Aká je veľkosť uhlov β, γ, δ rovnobežníka $ABCD$, ak uhol α má veľkosť 90°?

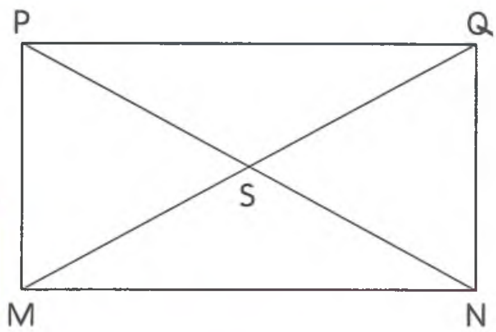
7.3 Obdĺžnik a kosodĺžnik, štvorec a kosoštvorec

V 5. ročníku sme rysovali obdĺžnik. Vychádzali sme z toho, že obdĺžnik má každé dve susedné strany na seba kolmé a každé dve protiľahlé strany majú rovnakú dĺžku.
Tieto vlastnosti doplníme takto:

Obdĺžnik je rovnobežník, ktorého každý vnútorný uhol je pravý.
Obdĺžnik je pravouhlý rovnobežník.

ÚLOHA 1

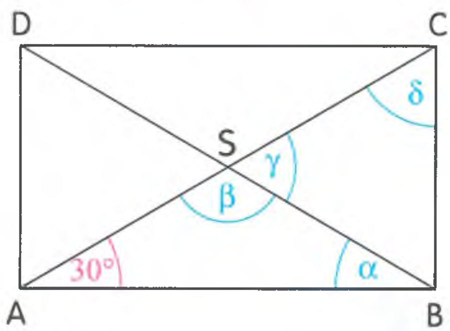
Na obrázku je narysovaný obdĺžnik *MNPQ*. *MP*, *NQ* sú jeho uhlopriečky. Odmerajte jeho uhlopriečky a porovnajte ich veľkosti.



Každý obdĺžnik
má uhlopriečky zhodné.

PRÍKLAD 1

Na obrázku je obdĺžnik *ABCD*, v ktorom je vyznačený uhol veľkosti 30°, ďalej sú vyznačené uhly α, β, γ, δ. Určte veľkosti týchto uhlov.



RIEŠENIE

Príklad rieši Peter. Využijeme vlastnosti obdĺžnika, rovnobežníka, rovnoramenného trojuholníka a ďalšie vlastnosti.

1. $AS \cong BS$, $\triangle ABS$ je rovnoramenný, preto $\alpha = 30°$.
2. $\beta + 30° + 30° = 180°$ – súčet uhlov v trojuholníku

$$\beta = 180° - 60°$$
$$\beta = 120°$$

3. $\beta + \gamma = 180°$ – súčet susedných uhlov

$$120° + \gamma = 180°$$
$$\gamma = 180 - 120°$$
$$\gamma = 60°$$

4. $BS \cong CS$ – $\triangle BCS$ je rovnoramenný

$$\delta + \delta + 60° = 180°$$
$$2\delta = 180° - 60°$$
$$\delta = 60°$$

Odpoveď: Veľkosti daných uhlov sú $\alpha = 30°$, $\beta = 120°$, $\gamma = 60°$, $\delta = 60°$.

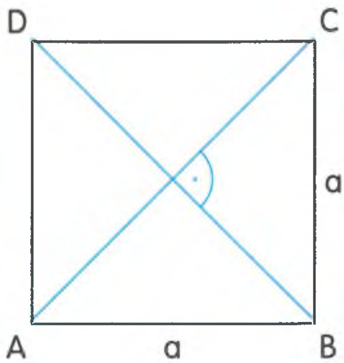
Pravouhlý rovnobežník, ktorý má všetky strany zhodné sa nazýva **štvorec.**

Štvorec je pravouhlý rovnobežník, ktorého všetky strany sú zhodné.

Všetky vnútorné uhly každého štvorca sú pravé.

Každý štvorec má zhodné uhlopriečky.

Uhlopriečky každého štvorca sú navzájom zhodné, kolmé a rozpoľujú sa.



ÚLOHA 2

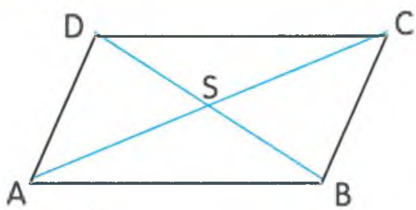
Uhlopriečky štvorca ležia na osiach vnútorných uhlov štvorca. Odôvodnite.

PROBLÉM

Ako budeme nazývať rovnobežníky, ktoré nie sú pravouhlé? Kladie otázku Marienka.

RIEŠENIE

Pani učiteľka hovorí: Tieto nazývame **kosodĺžniky**, ich uhly nie sú pravé, sú ostré a tupé. Taký rovnobežník nakreslila.



ÚLOHA 3

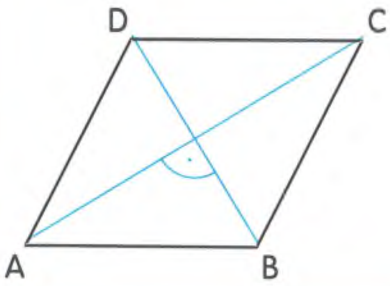
Vymenujte vlastnosti, ktoré kosodĺžnik nemá v porovnaní s obdĺžnikom.

Kosodĺžnik je rovnobežník, ktorého každý vnútorný uhol je ostrý alebo tupý.
Uhlopriečky kosodĺžnika nie sú zhodné, navzájom sa rozpoľujú.

Ak má rovnobežník všetky strany zhodné, nazýva sa **kosoštvorec.**

Kosoštvorec je rovnobežník, ktorého všetky strany sú zhodné.

Uhlopriečky kosoštvorca sú na seba kolmé a ležia na osiach vnútorných uhlov kosoštvorca, navzájom sa rozpoľujú.

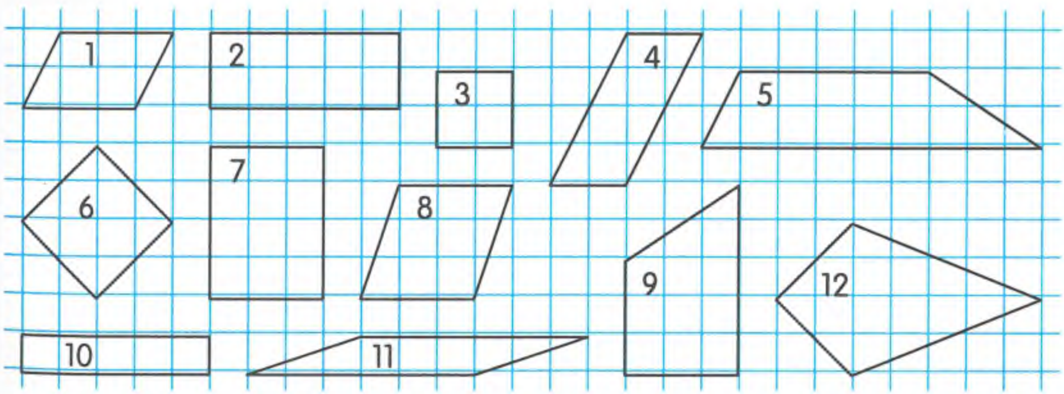


ÚLOHA 4

Kosoštvorec je rovnobežník, a preto má všetky jeho vlastnosti. Vymenujte ich!

CVIČENIA

1. Na obrázku sú rôzne štvoruholníky označené číslami 1 až 12. Zapíšte:
a) všetky rovnobežníky,
b) všetky obdĺžniky,
c) všetky štvorce,
d) všetky kosodĺžniky,
e) všetky kosoštvorce,
f) všetky štvoruholníky, ktoré patria aspoň do dvoch predchádzajúcich skupín,
g) všetky štvoruholníky, ktoré nepatria ani do jednej skupiny.

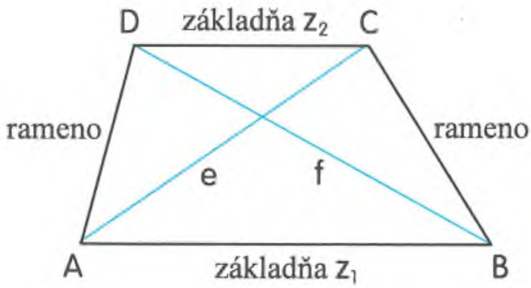


.... **2.** Vymenujte zo svojho okolia aspoň tri predmety, ktoré majú tvar:
a) obdĺžnika,
b) štvorca,
c) kosoštvorca.

.... **3.** Na obrázku sú dopravné značky. Viete čo znamenajú? Pomenujte geometrické útvary, ktoré na nich vidíte.

7.4 Lichobežník

Medzi štvoruholníky patrí aj útvar, ktorý nazývame **lichobežník.**



AB, CD – základne lichobežníka
$AB \parallel CD$
AD, BC – ramená lichobežníka
$AD \nparallel BC$
AC, BD – uhlopriečky lichobežníka

Lichobežník je štvoruholník, ktorého dve protiľahlé strany sú rovnobežné a zvyšné dve protiľahlé strany sú rôznobežné.

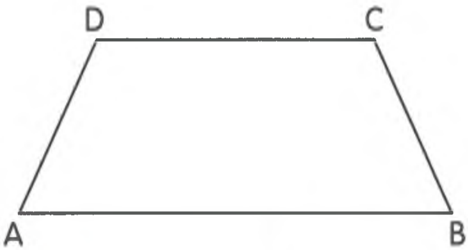
ÚLOHA 1

Zistite súčet vnútorných uhlov lichobežníka. Svoje tvrdenie odôvodnite.

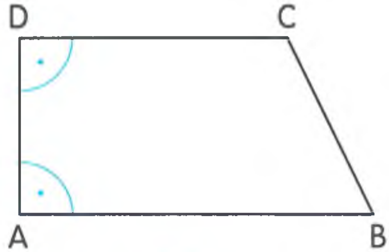
Súčet vnútorných uhlov lichobežníka je 360°.

Ak sú v lichobežníku obidve ramená zhodné úsečky, tak tento lichobežník nazývame **rovnoramenný lichobežník.**

$AD \cong BC$



Ak je v lichobežníku jedno jeho rameno kolmé na základne, tak tento lichobežník nazývame **pravouhlý lichobežník.**



ÚLOHA 2

Môžu byť obidve ramená lichobežníka kolmé na základne? Svoje tvrdenie odôvodnite.

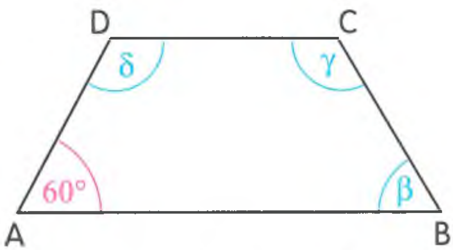
ÚLOHA 3

Môžu byť dvojice zhodných uhlov v a) rovnoramennom,
b) pravouhlom lichobežníku?

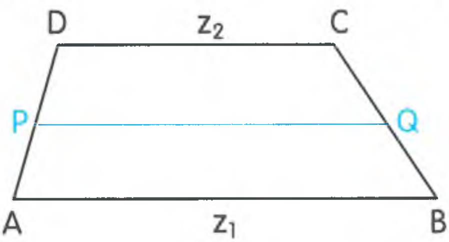
Ak áno, ktoré sú to?

CVIČENIA

1. Uveďte aspoň dva príklady zo svojho okolia, v ktorých sú predmety tvaru
a) lichobežníka,
b) rovnoramenného lichobežníka.



.... **2.** Na obrázku je rovnoramenný lichobežník *ABCD*. V ňom sa uhol $\alpha = 60°$. Určte veľkosti uhlov β, γ, δ.



.... **3.** Meraním a výpočtom zistite, či dĺžka úsečky *PQ* je aritmetickým priemerom dĺžok základní z_1, z_2.

7.5 Konštrukcia rovnobežníka a lichobežníka

Poznáme vlastnosti rovnobežníka a lichobežníka. Teraz sa naučíme zostrojovať rovnobežníky a lichobežníky z prvkov, ktoré si vopred určíme. Úlohy takého typu nazývame **konštrukčné úlohy.** Riešenie takýchto úloh bude mať opäť tri časti: rozbor, konštrukciu a skúšku (overenie správnosti konštrukcie).

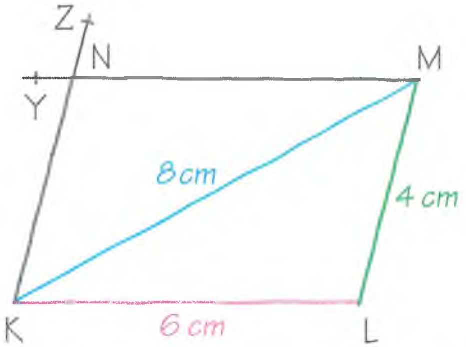
PRÍKLAD 1

Zostrojte rovnobežník $KLMN$, ak $|KL| = 6$ cm, $|KM| = 8$ cm a $|LM| = 4$ cm.

RIEŠENIE

Načrtneme si rovnobežník a vyznačíme dané údaje.

Náčrt:

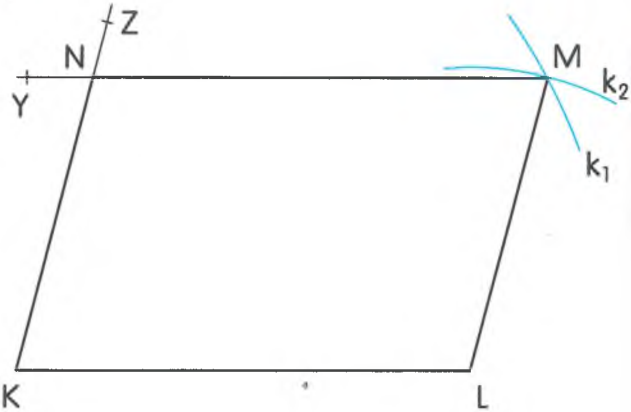


Rozbor:

1. Bod M je vrcholom $\triangle KLM$, v ktorom poznáme všetky tri strany. Trojuholník KLM zostrojíme podľa konštrukcie *sss*.
2. Využijeme vlastnosti rovnobežníka a bod N bude priesečník polpriamok MY a KZ, pričom $\overrightarrow{MY} \| KL$, $\overrightarrow{KZ} \| LM$.

Konštrukcia:

1. KL; $|KL| = 6$ cm
2. k_1; k_1 $(K, 8 \text{ cm})$
3. k_2; k_2 $(L, 4 \text{ cm})$
4. M; $M \in k_1 \cap k_2$
5. $\overrightarrow{MY}$; $\overrightarrow{MY} \| KL$
6. $\overrightarrow{KZ}$; $\overrightarrow{KZ} \| LM$
7. N; $N \in \overrightarrow{KZ} \cap \overrightarrow{MY}$
8. $\square$ $KLMN$



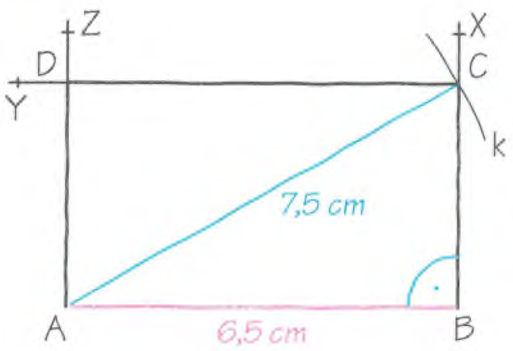
Skúška: Skontrolujeme dĺžky KM, KL, LM a overíme, či je útvar $KLMN$ rovnobežník.

PRÍKLAD 2

Zostrojte obdĺžnik $ABCD$, ak $|AB| = 6{,}5$ cm, $|AC| = 9$ cm.

RIEŠENIE

Náčrt:



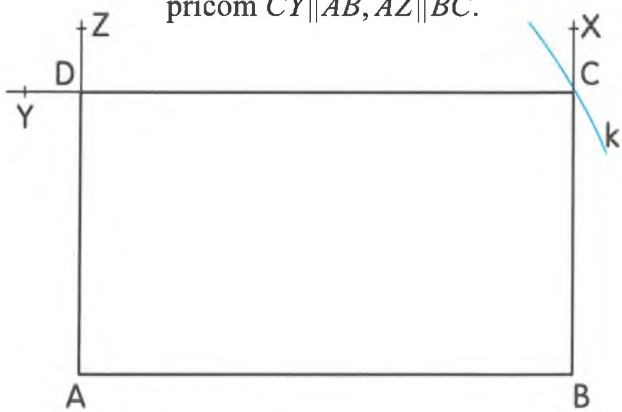
Rozbor:

Vyznačíme dané prvky, je to strana AB, uhlopriečka AC. Vieme, že v obdĺžniku sú všetky vnútorné uhly pravé.

1. Trojuholník ABC je pravouhlý a poznáme dĺžku strany AB a dĺžku strany AC.
2. Hľadaný vrchol D obdĺžnika zostrojíme opäť ako priesečník polpriamok $\overrightarrow{CY}$ a $\overrightarrow{AZ}$, pričom $\overrightarrow{CY} \| AB$, $\overrightarrow{AZ} \| BC$.

Konštrukcia:

1. AB; $|AB| = 6{,}5$ cm
2. $\overrightarrow{BX}$; $\overrightarrow{BX} \perp AB$
3. k; $k(A, 9\text{ cm})$
4. C; $C \in \overrightarrow{BX} \cap k$
5. $\overrightarrow{CY}$; $\overrightarrow{CY} \| AB$
6. $\overrightarrow{AZ}$; $\overrightarrow{AZ} \| BC$
7. D; $D \in \overrightarrow{AZ} \cap \overrightarrow{CY}$
8. $\square ABCD$



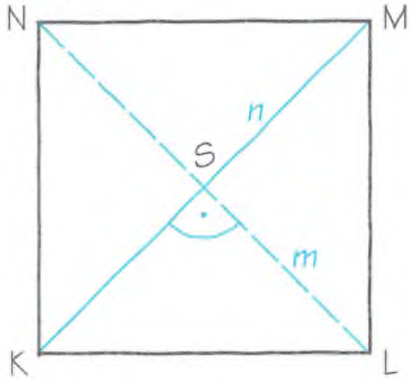
Skúška: Prenecháme ju žiakom.

PRÍKLAD 3

Zostrojte štvorec $KLMN$, keď jeho uhlopriečka KM má dĺžku 7 cm.

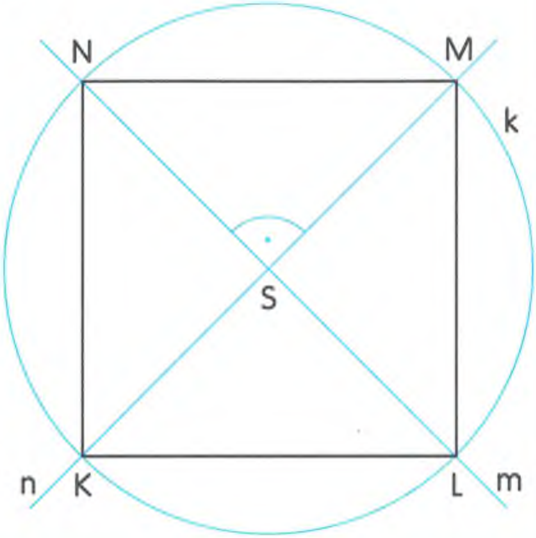
RIEŠENIE

Náčrt:



Rozbor:
Vieme, že uhlopriečky štvorca sú na seba kolmé, sú zhodné a navzájom sa rozpoľujú. Preto môžeme zostrojiť priamky m, n tak, že $m \perp n$. Ich priesečník je S.
Body K, M ležia na priamke n, pričom $|KS| = |SM|$. Body L, N ležia na priamke m, pričom $|SL| = |SN|$. Body K, L, M, N budú priesečníky kružnice $k(S;$ 3,5 cm) s priamkami m, n.

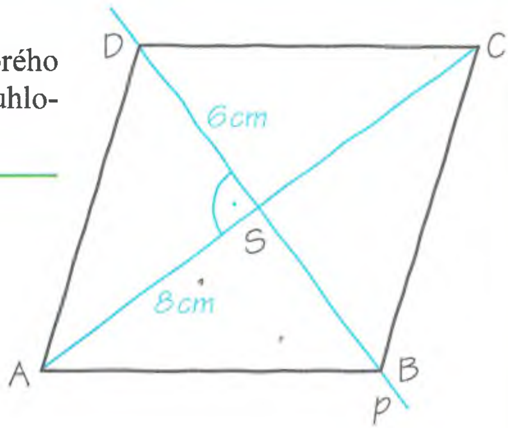
Konštrukcia:
1. m
2. n; $n \perp m$, $S \in m \cap n$
3. k; $k(S;$ 3,5 cm)
4. K, M; $K, M \in k \cap n$
5. L, N; $L, N \in k \cap m$
6. □ $KLMN$



Skúška:
Priamky m, n sú na seba kolmé, ich priesečník je S. Body K, L, M, N ležia na kružnici $k(S;$ 3,5 cm), potom $|KM| =$ = 7 cm (priemer kružnice).

PRÍKLAD 4

Zostrojte kosoštvorec $ABCD$, ktorého uhlpriečka AC má dĺžku 8 cm a uhlopriečka BD má dĺžku 6 cm.



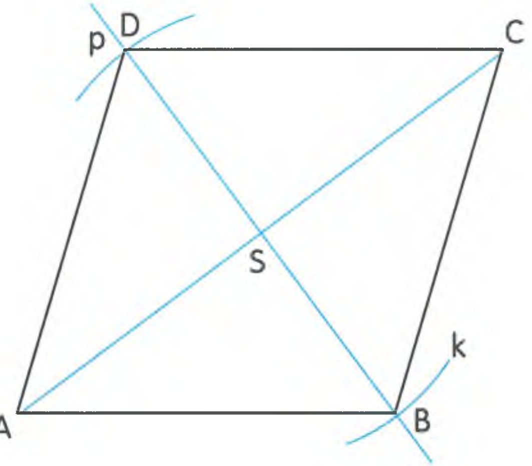
RIEŠENIE

Náčrt:

Rozbor:

Vieme, že uhlopriečky kosoštvorca sú na seba kolmé a navzájom sa rozpoľujú.

1. Narysujeme úsečku AC a rozpolíme ju. Dostaneme bod S.
2. V bode S zostrojíme kolmicu p na priamku AC. Na nej budú ležať vrcholy B, D.



Konštrukcia:

1. AC; $|AC| = 8$ cm
2. S; S rozpoľuje AC
3. p; $p \perp AC$; $S \in p$
4. k; $k(S, 3$ cm$)$
5. B, D; $B, D \in k \cap p$
6. $\square ABCD$

Skúška:

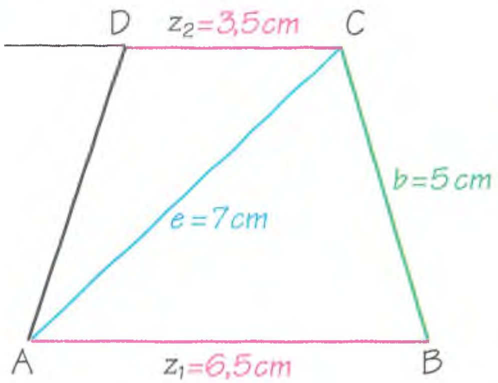
Uhlopriečky AC, BD sú na seba kolmé, lebo $p \perp AC$. Odmeraním sa presvedčíme, že uhlopriečka AC má dĺžku 8 cm a uhlopriečka BD má dĺžku 6 cm. Zistíme, či strany kosoštvorca sú zhodné a navzájom rovnobežné.

PRÍKLAD 5

Zostrojte lichobežník $ABCD$, v ktorom dĺžka základne $z_1 = 6{,}5$ cm a základňa $z_2 = 3{,}5$ cm, dĺžka ramena $b = 5$ cm a dĺžka uhlopriečky $e = 7$ cm.

RIEŠENIE

Náčrt:

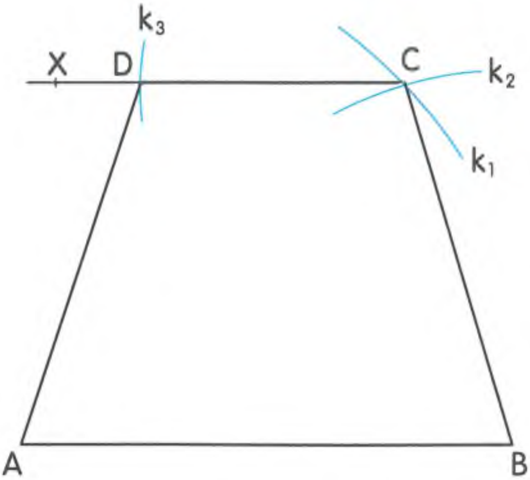


Rozbor:

1. Úsečka AB má dĺžku 6,5 cm.
2. Bod C má od bodu A vzdialenosť 7 cm, teda leží na kružnici $k_1(A, 7$ cm$)$.
3. Bod C má od bodu B vzdialenosť 5 cm, teda leží na kružnici $k_2(B, 5$ cm$)$.
4. Základňa CD je rovnobežná so základňou AB, teda leží na polpriamke CX rovnobežnej s priamkou AB.
5. $|CD| = 3{,}5$ cm, bod D leží na kružnici $k_3(C; 3{,}5$ cm$)$.

Konštrukcia:

1. AB; $|AB| = 6{,}5$ cm
2. k_1; k_1 $(A, 7$ cm$)$
3. k_2; k_2 $(B, 5$ cm$)$
4. C; $C \in k_1 \cap k_2$
5. $\overrightarrow{CX}$; $\overrightarrow{CX} \| AB$
6. k_3; $k_3(C;\ 3{,}5$ cm$)$
7. D; $D \in k_3 \cap \overrightarrow{CX}$
8. ⏢ $ABCD$



Skúška:

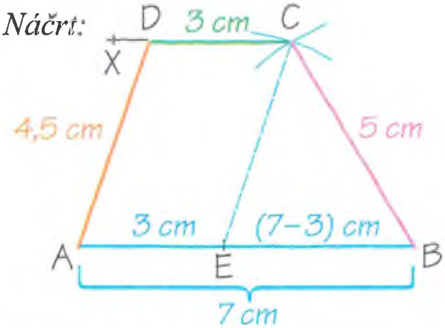
Úsečka AB má veľkosť 6,5 cm, úsečka BC má veľkosť 5 cm, pretože bod C leží na kružnici k_2. Bod C leží aj na kružnici $k_1(A, 7$ cm$)$, preto dĺžka úsečky AC je 7 cm. Ďalej $\overrightarrow{CX} \| AB$, $|CD| = 3{,}5$ cm.

PRÍKLAD 6

Zostrojte lichobežník, ak poznáte dĺžky jeho strán: $a = 7$ cm, $b = 5$ cm, $c = 3$ cm, $d = 4{,}5$ cm.

RIEŠENIE

Náčrt:



Rozbor:

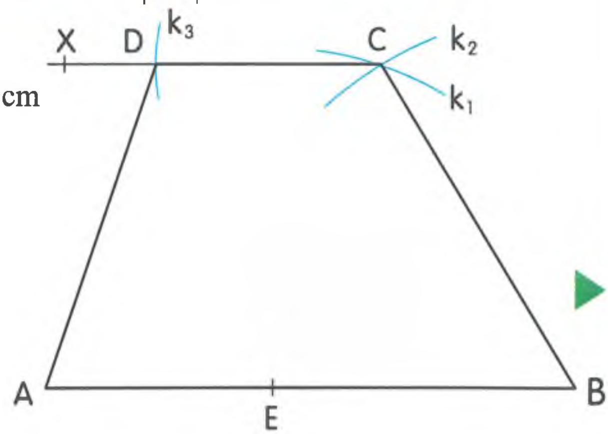
Keď bodom C vedieme rovnobežku so stranou AD, lichobežník $ABCD$ rozdelíme na rovnobežník $AECD$ a trojuholník EBC. V trojuholníku EBC poznáme všetky strany $(b, d, a - c)$, platí $a - c < b + d$.

Najprv zostrojíme trojuholník EBC.

Bod D je na polpriamke $\overrightarrow{CX} \| AB$. $|CD| = 3$ cm.

Konštrukcia:

1. AB; $|AB| = a = 7$ cm
2. E; $E \in AB$, $|AE| = c = 3$ cm
3. k_1; $k_1(E;\ 4{,}5$ cm$)$
4. k_2; k_2 $(B, 5$ cm$)$
5. C; $C \in k_1 \cap k_2$
6. $\overrightarrow{CX}$; $\overrightarrow{CX} \| AB$
7. k_3; $k_3(C, 3$ cm$)$
8. D; $D \in CX \cap k_3$
9. ⏢ $ABCD$



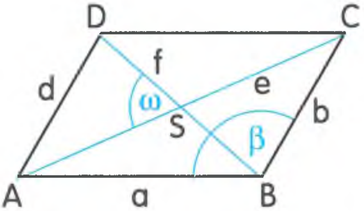
Skúška:

Trojuholník EBC má rozmery $a - c$, b, d. Rovnobežník $AECD$ má rozmery c, d. Potom lichobežník $ABCD$ má rozmery a, b, c, d. Trojuholník EBC sa dal zostrojiť, lebo trojuholníková nerovnosť $a - c < b + d$ platí.

CVIČENIA

1. Zostrojte rovnobežník $ABCD$, ak $|AB| = 7$ cm, $|BC| = 3{,}5$ cm, $\beta = 110°$.

2. Zostrojte rovnobežník, ak poznáte:
a) $a = 6{,}2$ cm, $d = 3{,}5$ cm, $f = 4{,}2$ cm
b) $a = 6{,}5$ cm, $e = 8{,}5$ cm, $\beta = 115°$
c) $a = 50$ mm, $e = 60$ mm, $f = 45$ mm
d) $e = 6$ cm, $f = 44$ mm, $\omega = 70°$



3. Jedna strana rovnobežníka má dĺžku 6 m. Môžu mať jeho uhlopriečky dĺžky: a) 4 m a 6 m b) 7 m a 8 m

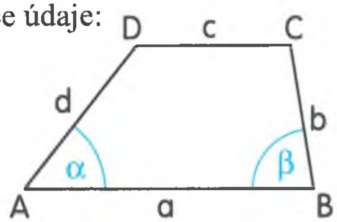
4. Zostrojte kosoštvorec, ktorého strana má dĺžku 5 cm a kratšia uhlopriečka f má dĺžku 3 cm.

5. Zostrojte kosoštvorec s použitím úsečiek dĺžok 4 cm, 5 cm, 6 cm. Vyberte z úsečiek dve tak, aby jedna bola strana kosoštvorca a druhá jeho uhlopriečka. Nájdite čo najviac riešení.

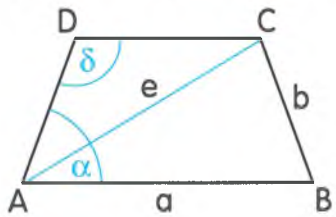
6. Zostrojte obdĺžnik $MNOP$, keď:
a) $|MN| = 6{,}5$ cm, $|MO| = 9$ cm b) $|MN| = 7$ cm, $|\sphericalangle NMO| = 30°$

7. Zostrojte štvorec $ABCD$, ak je dané:
a) $|BD| = 9$ cm b) $|CD| = 5$ cm

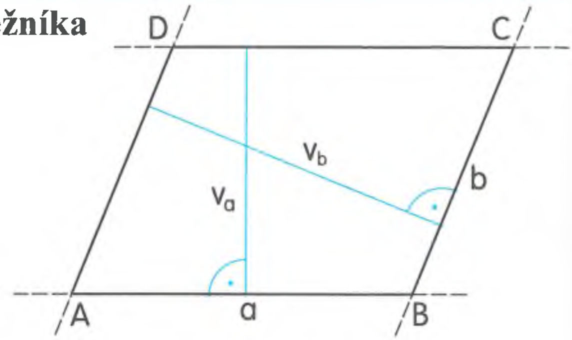
8. Zostrojte lichobežník, ak sú dané nasledujúce údaje:
a) $a = 6$ cm, $b = 4$ cm, $c = 4$ cm, $d = 5$ cm
b) $a = 5$ cm, $b = 4$ cm, $\alpha = 60°$, $\beta = 75°$
c) $a = 6$ cm, $b = 3$ cm, $c = 5$ cm, $\alpha = 60°$



9. Zostrojte rovnoramenný lichobežník, ak poznáte:
a) $a = 6$ cm, $b = 5$ cm, $e = 7$ cm
b) $a = 6$ cm, $e = 7$ cm, $\delta = 105°$
c) $a = 6$ cm, $b = 5{,}5$ cm, $\alpha = 60°$



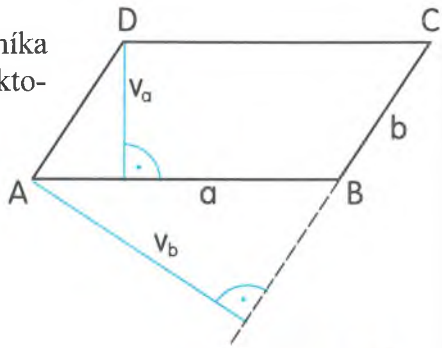
7.6 Obsah a obvod rovnobežníka



Protiľahlé strany rovnobežníka ležia na rovnobežných priamkach. Vzdialenosť týchto priamok budeme nazývať **výška rovnobežníka.**

Výška rovnobežníka je vzdialenosť priamok, na ktorých ležia protiľahlé strany rovnobežníka.

Každý rovnobežník má dve dvojice rovnobežných strán, preto má aj dve výšky.
Výšku, ktorá prislúcha k stranám a, c označíme v_a, výšku prislúchajúcu k stranám b, d označíme v_b.
Niekedy hovoríme, že výška rovnobežníka je vzdialenosť vrcholu od priamky, na ktorej leží protiľahlá strana rovnobežníka.



V 5. ročníku sme sa naučili počítať obsahy obdĺžnika a štvorca. Pripomeňme si, že obsahy sme vyjadrovali v štvorcových jednotkách. Zopakujme si ich:

$1\ m^2 = 100\ dm^2 \qquad 1\ dm^2 = \frac{1}{100}\ m^2$

$1\ dm^2 = 100\ cm^2 \qquad 1\ cm^2 = \frac{1}{100}\ dm^2$

$1\ cm^2 = 100\ mm^2 \qquad 1\ mm^2 = \frac{1}{100}\ cm^2$

ÚLOHA 1

Doplňte tabuľku

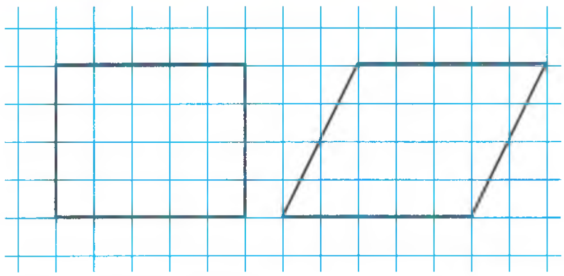
m^2	dm^2	cm^2	mm^2
2,5			
	125		
			200 000
		35 000	

ZOPAKUJME SI

Obsah obdĺžnika vypočítame podľa vzorca: $S = a \cdot b$
Obsah štvorca vypočítame podľa vzorca: $S = a \cdot a = a^2$

PROBLÉM 1

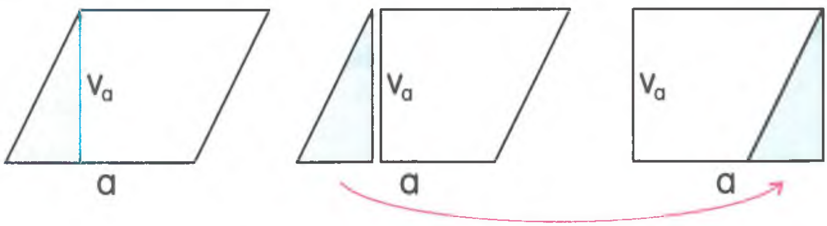
V štvorcovej sieti sú umiestnené dva rovnobežníky. Vypočítajte ich obsahy.



RIEŠENIE

Prvý rovnobežník je obdĺžnik. Jeho obsah vieme vypočítať podľa vzorca $S = a \cdot b$, teda $S = 5 \cdot 4 = 20$ (jednotkových štvorcov). Počet jednotkových štvorcov by sme vedeli zistiť aj spočítaním štvorcov štvorcovej siete.

Druhý rovnobežník nie je obdĺžnik, vzorec pre výpočet obsahu rovnobežníka zatiaľ nepoznáme. Vyberme tento rovnobežník zo štvorcovej siete.



Oddeľme z neho vyfarbený trojuholník a premiestnime ho podľa obrázka. Dostali sme obdĺžnik, ktorý má rozmery a, v_a. Obsah tohto obdĺžnika už vieme vypočítať. Obsah daného rovnobežníka sa bude rovnať

$$S = 5 \cdot 4 = 20 \text{ (jednotkových štvorcov)}$$

Vidíme, že obsah obdĺžnika (prvého rovnobežníka) sa rovná obsahu rovnobežníka, ktorého dĺžka strany sa rovná dĺžke strany obdĺžnika a výška rovnobežníka sa rovná dĺžke druhej strany obdĺžnika.

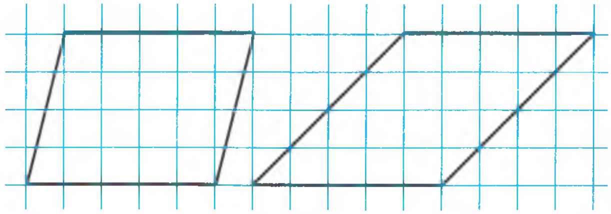
$$S = a \cdot v_a$$

Obsah rovnobežníka sa rovná súčinu dĺžky strany rovnobežníka a výšky prislúchajúcej k tejto strane.

Všimnime si ešte jednu zaujímavosť.

ÚLOHA 2

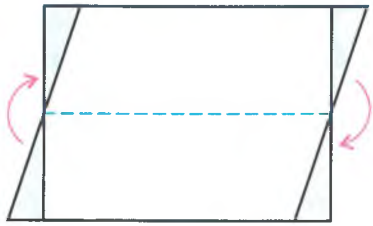
Vypočítajte obsahy rovnobežníkov zobrazených v štvorcovej sieti.



Rovnobežníky, s rovnakými dĺžkami strán a rovnakými výškami, majú aj rovnaké obsahy.

ÚLOHA 3

Na obrázku sú premiestnené dva trojuholníky oddelené z rovnobežníka. Možno tento postup použiť na odvodenie vzorca na výpočet obsahu rovnobežníka? Odôvodnite!



ÚLOHA 4

Rovnobežník má strany a, b a výšky v_a, v_b prislúchajúce k týmto stranám. Rozhodnite, či pre jeho obsah platí:

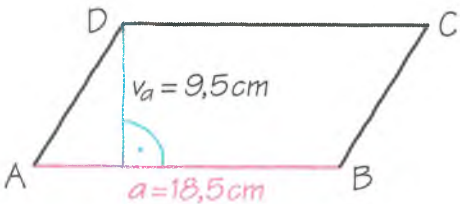
$\boxed{S = a \cdot v_a = b \cdot v_b}$ Svoje tvrdenie odôvodnite!

PRÍKLAD 1

Vypočítajte obsah rovnobežníka, ktorého jedna strana má dĺžku 18,5 cm a výška prislúchajúca k tejto strane je 9,5 cm.

RIEŠENIE

Načrtneme si rovnobežník, zapíšeme dané údaje:



$a = 18,5$ cm
$v_a = 9,5$ cm
$S = \dots$ cm^2

$S = a \cdot v_a$

$S = 18,5 \cdot 9,5$
$S = 175,75$

$S = 175,75$ cm^2

Odpoveď: Obsah rovnobežníka je 175,75 cm^2.

PROBLÉM 2

Záhradkár má pozemok tvaru rovnobežníka, ktorý má rozmery 21 m a 29 m. Chce ho oplotiť. Koľko metrov pletiva má kúpiť na oplotenie? Miško ihneď zahlásil: 100 m. Ako si to tak rýchlo vypočítal? Spýtala sa Marienka.

RIEŠENIE

Miško veľa nevysvetľoval, o to rýchlejšie napísal

$$21 + 29 = 50$$
$$2 \,.\, 50 = 100$$

Obvod rovnobežníka vypočítame, keď súčet dĺžok dvoch susedných strán vynásobíme dvoma:

$$o = (a + b) \,.\, 2$$

ÚLOHA 5

Odvoďte vzorec pre obvod kosoštvorca.

Obvod kosoštvorca vypočítame, keď dĺžku jednej strany násobíme štyrmi:

$$o = a \,.\, 4$$

NEZABUDNITE!

Pri výpočte obsahov a obvodov všetkých rovinných útvarov musia byť ich rozmery vždy vyjadrené **v rovnakých dĺžkových jednotkách.**

CVIČENIA

1. Vypočítajte obsah rovnobežníka $ABCD$, keď poznáte:

a) $a = 5$ m, $v_a = 3{,}5$ m
b) $a = 7{,}2$ cm, $v_a = 4{,}2$ cm
c) $b = 13{,}5$ dm, $v_b = 40$ cm
d) $a = 6{,}8$ cm, $v_a = 37$ mm

.... **2.** Vypočítajte obvod rovnobežníka *MNPQ*, keď poznáte dĺžky *m*, *n* jeho dvoch susedných strán:
a) $m = 4$ cm, $n = 5$ cm
b) $m = 7{,}5$ m, $n = 3{,}8$ m
c) $m = 135$ cm, $n = 67{,}5$ cm

.... **3.** Vypočítajte obsah kosoštvorca *ABCD*, keď jeho strana má dĺžku 13,7 cm a výška je 7 cm.

.... **4.** Aká dlhá je strana kosoštvorca, keď jeho obsah je 1 504 cm^2 a jeho výška je 32 cm?

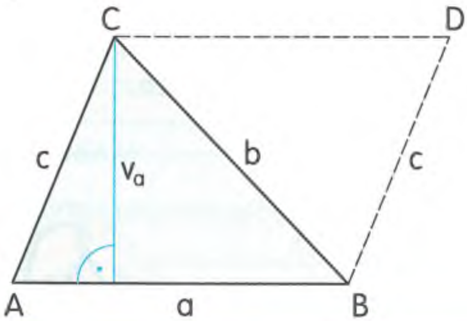
.... **5.** Aká široká je záhrada tvaru rovnobežníka, keď jej výmera je 1 378 m^2 a jej dlhšia strana meria 53 m?

.... **6.** Vypočítajte obvod kosoštvorca, ak má jeho strana dĺžku:
a) 5 m b) 375 cm c) 2 km d) 37,5 dm

.... **7.** O koľko metrov viac pletiva je potrebné na oplotenie pozemku tvaru rovnobežníka s rozmermi 50 m a 40 m ako na oplotenie pozemku tvaru kosoštvorca, ktorého strana má dĺžku 40 m?

7.7 Obsah a obvod trojuholníka

Na obrázku je trojuholník *ABC*. Zostrojme rovnobežník *ABDC*, ktorého strany *BD*, *DC* sú rovnobežné so stranami *AC*, *AB*.



Obsah rovnobežníka *ABDC* vypočítame

$$\boxed{S = a \cdot v_a}$$

Trojuholník *ABC* je polovicou rovnobežníka, preto sa jeho obsah rovná polovici obsahu rovnobežníka

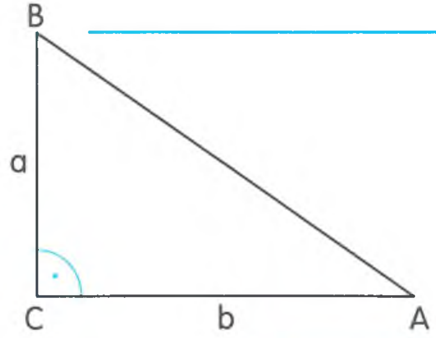
$$\boxed{S = \frac{1}{2} a \cdot v_a}$$

Obsah trojuholníka sa rovná jednej polovici súčinu dĺžky strany trojuholníka a výšky prislúchajúcej k tejto strane:

$$S = \frac{1}{2} a \cdot v_a = \frac{1}{2} b \cdot v_b = \frac{1}{2} c \cdot v_c$$

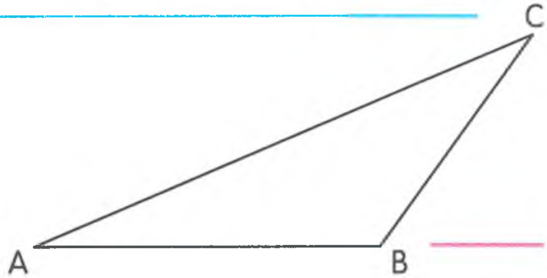
ÚLOHA 1

Daný je pravouhlý trojuholník ABC s odvesnami a, b. Vypočítajte jeho obsah.



ÚLOHA 2

Platí vzorec $S = \frac{1}{2} a \cdot v_a$ aj pre tupouhlý trojuholník? Odôvodnite svoje tvrdenie.



PRÍKLAD 1

Vypočítajte obsah trojuholníka, ktorého strana $a = 7{,}5$ cm a výška $v_a = 4{,}3$ cm.

RIEŠENIE

$a = 7{,}5$ cm
$v_a = 4{,}3$ cm
$S = \ldots$ cm^2

$$S = \frac{1}{2} a \cdot v_a$$

$$S = \frac{7{,}5 \cdot 4{,}3}{2}$$

$$S = \frac{32{,}25}{2}$$

$$S = 16{,}125 \text{ cm}^2$$

Odpoveď: Obsah trojuholníka je 16,125 cm^2.

ÚLOHA 3

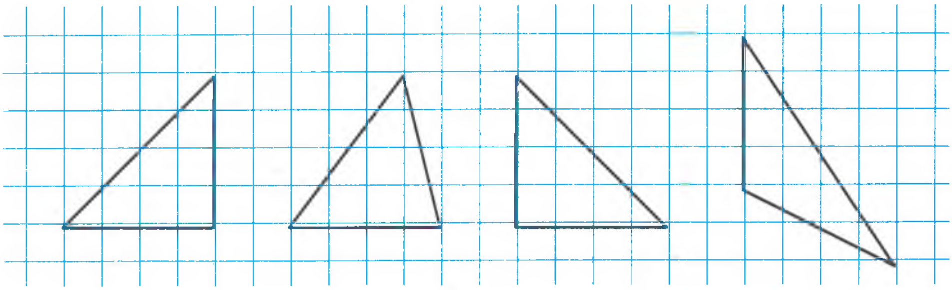
Odvoďte vzorec pre obvod trojuholníka.

Obvod trojuholníka sa rovná súčtu dĺžok jeho strán

$$o = a + b + c$$

ÚLOHA 4

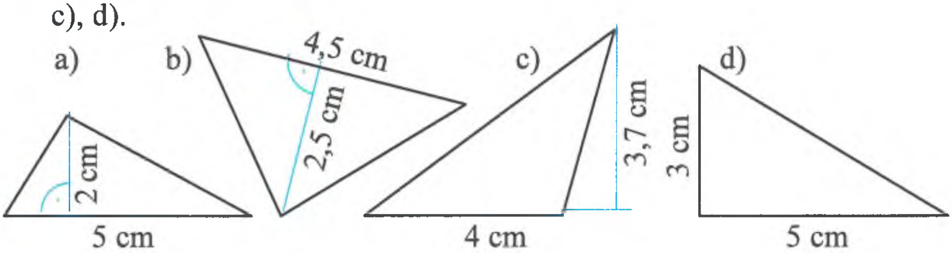
Trojuholníky umiestnené v štvorcovej sieti majú rovnaké obsahy. Odôvodnite toto tvrdenie. Majú trojuholníky aj rovnaké obvody?



CVIČENIA

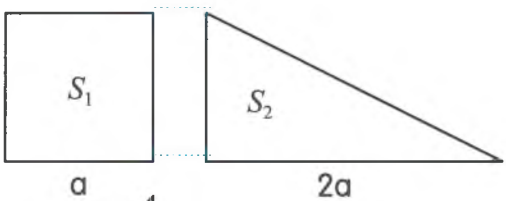
1. Narysujte tri rôzne trojuholníky, pravouhlý, ostrouhlý a tupouhlý. V každom z nich vyznačte jednu stranu a k nej príslušnú výšku.

.... 2. Vypočítajte obsahy trojuholníkov zobrazených na obrázkoch a), b), c), d).

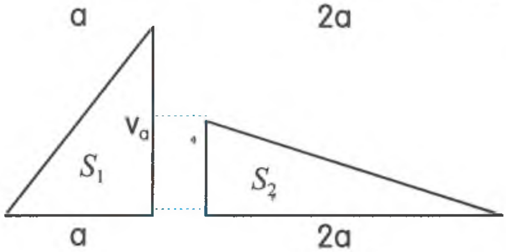


.... 3. Nakreslite ľubovoľný trojuholník ABC, odmerajte jednu jeho stranu a k tejto strane prislúchajúcu výšku. Vypočítajte obsah tohto trojuholníka.

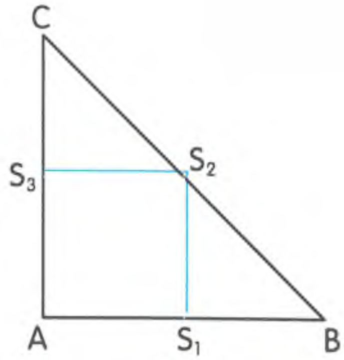
.... 4. Porovnajte obsahy týchto dvoch útvarov.



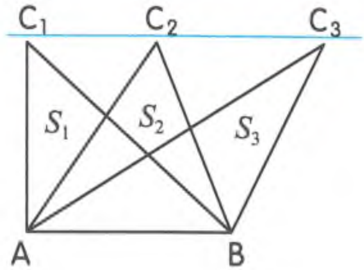
.... 5. Porovnajte obsahy týchto dvoch trojuholníkov.



.... **6.** Na obrázku je pravouhlý rovnoramenný trojuholník ABC, S_1, S_2, S_3 sú stredy jeho strán. Obsah štvorca $AS_1S_2S_3$ je 9 cm². Aký je obsah daného trojuholníka ABC?



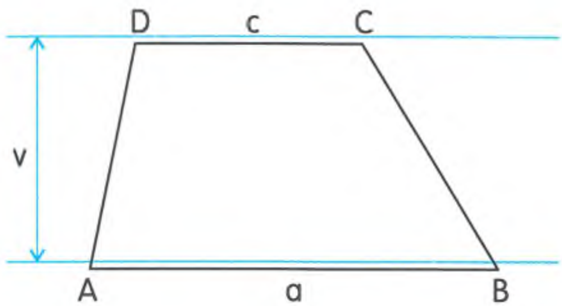
.... **7.** Na obrázku sú tri trojuholníky ABC_1, ABC_2, ABC_3 so spoločnou základňou. Ich vrcholy ležia na priamke rovnobežnej s priamkou, na ktorej leží základňa. Čo platí o ich obsahoch S_1, S_2, S_3?



.... **8.** Kosoštvorec je rozdelený uhlopriečkami na štyri trojuholníky. Dĺžky uhlopriečok sú 9 cm a 7 cm. Aký bude obsah jedného trojuholníka? Budú obsahy týchto trojuholníkov rovnaké?

.... **9.** Úsečka určená vrcholom C a stredom S strany AB delí trojuholník ABC na dva trojuholníky s rovnakým obsahom. Prečo?

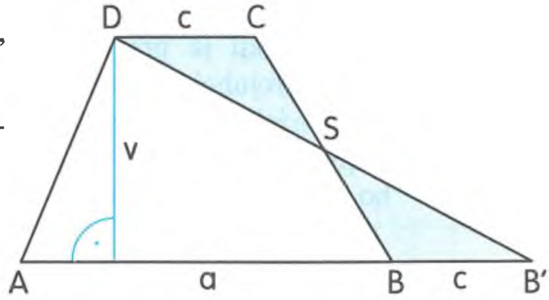
7.8 Obsah a obvod lichobežníka



Základne lichobežníka ležia na rovnobežných priamkach. Ich vzdialenosť je výška lichobežníka.

Výška lichobežníka je vzdialenosť priamok, na ktorých ležia základne lichobežníka.

Z lichobežníka možno urobiť trojuholník.
Všimnime si nasledujúci obrázok.



Premiestnením $\triangle SCD$ do novej polohy ($\triangle SBB'$) vznikol z lichobežníka trojuholník, ktorého základňa má dĺžku $a + c$ a jeho výška sa rovná výške lichobežníka v. Obsah lichobežníka sa rovná obsahu tohto trojuholníka.

Obsah lichobežníka sa rovná jednej polovici súčinu súčtu základní a výšky lichobežníka

$$S = \frac{1}{2}(a + c) \cdot v$$

PRÍKLAD 1

Vypočítajte obsah lichobežníka, ak $a = 12$ cm, $c = 8,5$ cm, $v = 4$ cm.

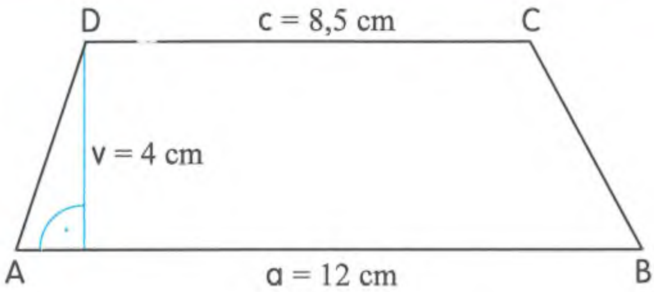
RIEŠENIE

$a = 12$ cm
$c = 8,5$ cm
$v = 4$ cm
$S = \dots$ cm^2

$S = \frac{1}{2}(a + c) \cdot v$

$S = \frac{1}{2}(12 + 8,5) \cdot 4$
$S = (12 + 8,5) \cdot 2$
$S = 41$

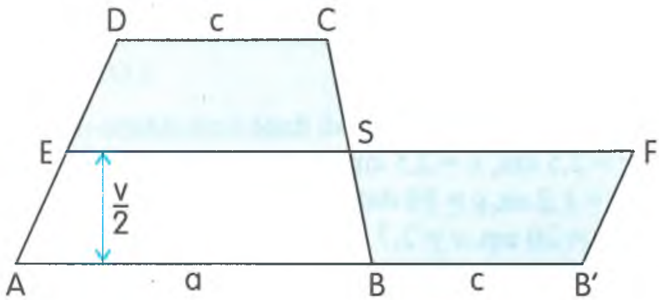
$S = 41$ cm^2



Odpoveď: Obsah lichobežníka je 41 cm^2.

ÚLOHA 1

Na obrázku je znázornené premiestnenie lichobežníka *ESCD* do novej polohy, čím z lichobežníka *ABCD* vznikol rovnobežník *AB'FE*. Obsah lichobežníka *ABCD* sa rovná obsahu rovnobežníka *AB'FE*. Ako vypočítame v tomto prípade obsah daného lichobežníka? Porovnajte odvodený vzorec s už uvedeným vzorcom.



ÚLOHA 2

Lichobežník má strany a, b, c, d. Napíšte vzorec na výpočet obvodu lichobežníka.

Obvod lichobežníka so stranami a, b, c, d sa rovná súčtu dĺžok jeho strán.

$$o = a + b + c + d$$

PRÍKLAD 2

Vypočítajte obvod lichobežníka, ak a = 8 cm, b = 3,3 cm, c = 4 cm, d = 33 mm.

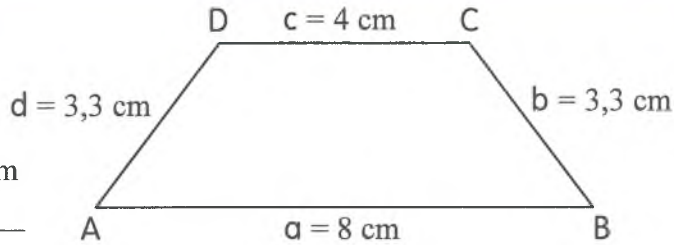
RIEŠENIE

a = 8 cm
b = 3,3 cm
c = 4 cm
d = 33 mm = 3,3 cm
o = … cm

$o = a + b + c + d$

$o = 8 + 3{,}3 + 4 + 3{,}3$
$o = 18{,}6$

o = 18,6 cm

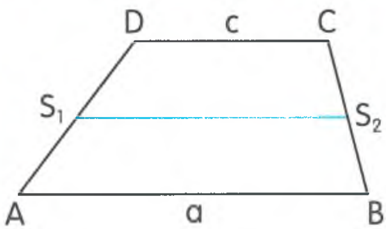


Odpoveď:
Obvod daného lichobežníka je 18,6 cm.

Úsečka určená stredmi ramien sa nazýva **stredná priečka lichobežníka.**

Dĺžka strednej priečky lichobežníka je

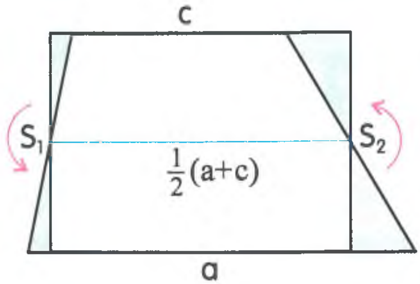
$$\frac{1}{2}(a + c)$$



CVIČENIA

1. Vypočítajte obsah lichobežníka, ak sú dané tieto údaje:
   a) $a = 5$ cm, $c = 2{,}5$ cm, $v = 2{,}5$ cm
   b) $a = 2{,}8$ m, $c = 1{,}2$ m, $v = 10$ dm
   c) $a = 3{,}5$ dm, $c = 20$ cm, $v = 2{,}7$ dm
   d) $a = 320$ m, $c = 280$ m, $v = 205$ m

.... 2. Na obrázku je zobrazené premiestnenie dvoch trojuholníkov, čím vznikol z lichobežníka obdĺžnik. Na základe tohto premiestnenia odvoďte vzorec na výpočet obsahu lichobežníka.



.... 3. Doplňte chýbajúce údaje lichobežníka (údaje sú v cm, resp. cm²).

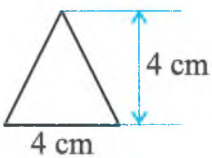
Základne		Výška	Obsah
20	13	8	
	15	11	220
30	10		360
75		50	3 500

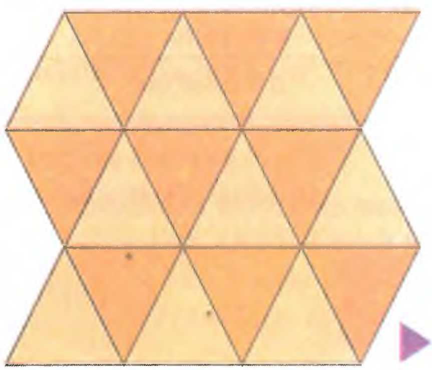
.... 4. Vypočítajte obsah a obvod lichobežníka, v ktorom $a = 7$ cm, $b = 4$ cm, $c = 4$ cm, $d = 3{,}5$ cm, $v = 3{,}3$ cm.

7.9 Slovné úlohy na výpočty obsahov a obvodov

PRÍKLAD 1

Mozaiková drevená doštička má tvar rovnoramenného trojuholníka, ktorého základňa má dĺžku 4 cm a k nej príslušná výška meria 4 cm. Najmenej koľko takých doštičiek treba na obklad steny, ktorej obsah je 2,5 m²?





RIEŠENIE

a) Vypočítame obsah S jednej doštičky:

$a = 4$ cm
$v_a = 4$ cm
$S = \dots$ cm²

$S = \frac{a \,.\, v_a}{2}$

$S = \frac{4 \,.\, 4}{2}$
$S = 8$

$S = 8$ cm²

b) Vypočítame potrebný počet doštičiek:

2,5 m² = 2,5 . 10 000 cm² = 25 000 cm²
$S_1 = 25\,000$ m²
$S = 8$ cm²
$p = \dots$ kusov

$p = S_1 : S$

$p = 25\,000 : 8$
$p = 3\,125$

$p = 3\,125$ kusov

Odpoveď: Na obklad danej steny treba najmenej 3 125 kusov doštičiek.

PRÍKLAD 2

Pole tvaru lichobežníka sa rozprestiera medzi dvoma rovnobežnými cestami, ktoré sú od seba vzdialené 320 m. Dĺžky rovnobežných strán poľa sú 230 m a 270 m. Aká je výmera poľa? Koľko kukurice sa na ňom urodilo, keď na 1 ha sa urodilo 7,8 t kukurice?

RIEŠENIE

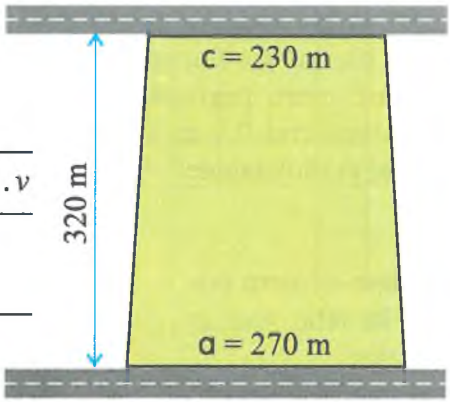
a) Vypočítame obsah lichobežníka, čo je výmera poľa

$a = 270$ m
$c = 230$ m
$v = 320$ m
$S = \dots$ m²

$S = \frac{1}{2}(a + c) \,.\, v = \frac{a + c}{2} \,.\, v$

$S = \frac{270 + 230}{2} \,.\, 320$
$S = 80\,000$

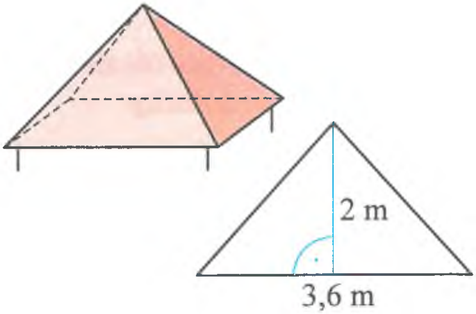
$S = 80\,000$ m²
$S = 8$ ha



b) Na 1 ha sa urodilo 7,8 t, na 8 ha sa urodilo 8 . 7,8 t = 62,4 t kukurice.

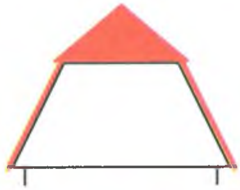
Odpoveď: Na 8 ha poľa tvaru lichobežníka sa urodilo 62,4 t kukurice.

CVIČENIA



1. Koľko krytiny treba na pokrytie strechy nad transformátorom, ktorú tvoria štyri zhodné trojuholníky? Dĺžka strany každého z nich je 3,6 m, príslušná výška je 2 m.

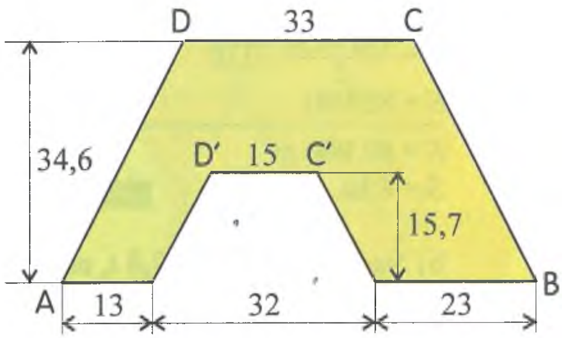
.... **2.** Koľko priesad sirôtok vysadí záhradník v parku na záhon tvaru trojuholníka, ktorého jedna strana má dĺžku 4,8 m a výška na túto stranu je 2,5 m? Pri sadení musí počítať s 2 dm^2 miesta pre jednu priesadu.



.... **3.** Štít domu má tvar rovnoramenného lichobežníka. Základne majú dĺžku 10,2 m, 5,4 m a výška 4,8 m. Aký je obsah tohto štítu?

.... **4.** Nový mestský park má tvar kosoštvorca. Výmera parku je 400 000 m^2. Obvod parku je 3,2 km. Aký dlhý je chodník, ktorý vedie kolmo cez park?

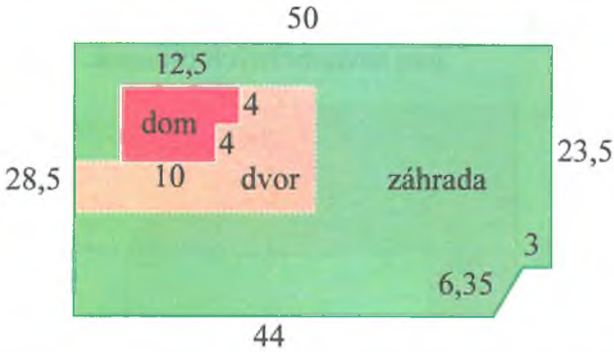
.... **5.** Z tabule plechu s obsahom 1,48 m^2 odstrihli časť tvaru pravouhlého trojuholníka s odvesnami 0,9 m a 0,64 m. Aký obsah mal zvyšok tabule?



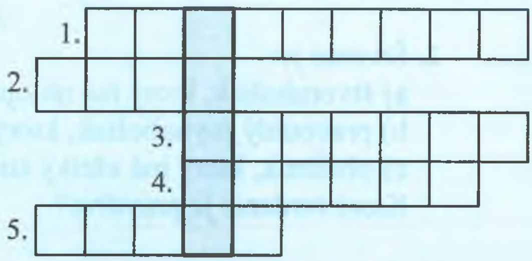
.... **6.** Vypočítajte výmeru pozemku, ktorého tvar je na obrázku. (Rozmery sú v metroch; $AB \parallel CD \parallel D'C'$).

.... **7.** Obdĺžnikový pozemok zmenšený o časť tvaru lichobežníka je znázornený na obrázku. Na ňom je postavený dom daného pôdorysu. Rozmery sú v metroch.

Na dvor pripadá 1,75 a. Aká výmera zostáva na záhradu? Koľko pletiva treba na oplotenie pozemku?

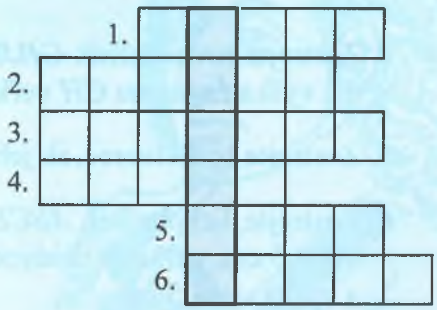


.... **8.** Nájdite tajničku:



1. 2, 3, 5, 7 sú
2. uhol väčší ako pravý
3. pravouhlý rovnostranný rovnobežník
4. teleso, ktoré má rozmery a, b, c
5. podľa vzorca $S = \frac{1}{2}(a + c) \cdot v$ vypočítame

.... **9.** Nájdite tajničku:

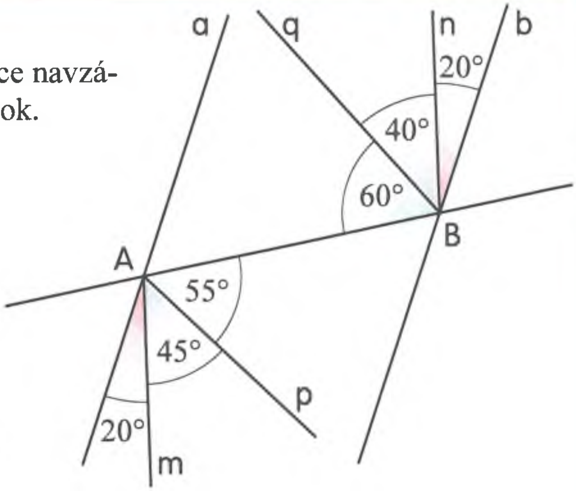


1. ⊾ je znak pre ... uhol
2. štvorec má štyri
3. v obdĺžniku sú ... a, b
4. bod S je
5. 0
6. podľa vzorca $o = a + b + c$ vypočítame

Čím je človek rozumnejší a hodnotnejší, tým viac dobra pozoruje v ľuďoch. *B. Pascal*

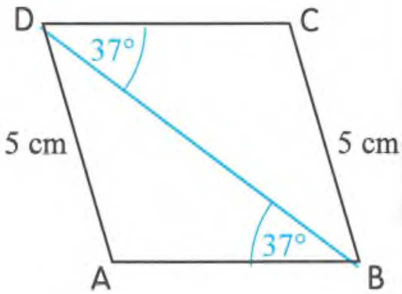
VYSKÚŠAJTE SA!

1. Na obrázku nájdite dvojice navzájom rovnobežných priamok.



.... **2.** Štvorec je:
a) štvoruholník, ktorý má uhlopriečky na seba kolmé,
b) pravouhlý rovnobežník, ktorý má uhlopriečky na seba kolmé,
c) obdĺžnik, ktorý má všetky strany zhodné.
Ktoré tvrdenie je pravdivé?

.... **3.** Je štvoruholník *ABCD* rovnobežník? Svoje tvrdenie odôvodnite.



.... **4.** Zostrojte rovnobežník *GHJK*, keď $|\sphericalangle KGH| = 75°$, $|GJ| = 8{,}5$ cm a ak má výška na stranu *GH* veľkosť 3,8 cm.

.... **5.** Zostrojte kosoštvorec, ak jeho obsah je 9 cm² a dĺžka strany je 4,5 cm.

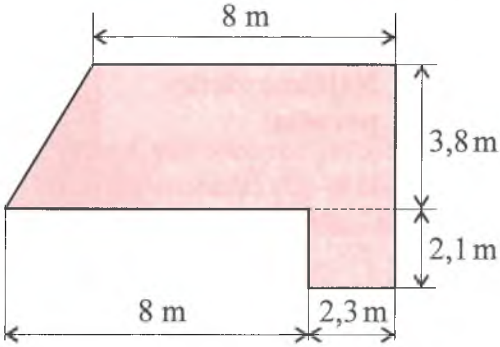
.... **6.** Zostrojte lichobežník *ABCD* ($AB \| CD$), keď je daná dĺžka základne $a = 5{,}5$ cm, veľkosti obidvoch k nej priľahlých uhlov $\alpha = 75°$, $\beta = 60°$ a výška $v = 3{,}5$ cm.

.... **7.** Uhly trojuholníka *ABC* majú 38°, 75°, 67°. Určte veľkosti uhlov trojuholníka, ktorého vrcholy sú stredy strán trojuholníka *ABC*.

.... **8.** Jedna základňa lichobežníka je dvojnásobkom druhej. Jeho obsah je 27 cm², výška $v = 6$ cm. Vypočítajte dĺžky základní daného lichobežníka.

.... **9.** Pri rozširovaní cesty musela byť šírka obdĺžnikovej záhrady zmenšená o 5 m. O koľko metrov sa musela zväčšiť dĺžka tejto záhrady, aby výmera pozemku zostala taká istá, keď jej pôvodné rozmery boli 60 m a 35 m?

.... **10.** Koľko kusov škridlíc potrebujeme na pokrytie danej časti strechy, ak na 1 m^2 potrebujeme 18 kusov škridlíc?



Blaise Pascal

(1623 až 1662)

Francúzsky matematik, fyzik a filozof. Zaslúžil sa o rozvoj mnohých matematických disciplín. Viacero prác venoval aritmetickým radom a kombinatorike. Známy je Pascalov trojuholník na určenie binomických koeficientov. Spolu s Fermatom je zakladateľom teórie pravdepodobnosti. Zaslúžil sa tiež o rozvoj teórie funkcií. Zaujímal sa aj o otázky hydrostatiky, sformuloval základný zákon o rovnomernom šírení tlaku v kvapaline. Roku 1642 skonštruoval prvý mechanický počítací stroj pre dva základné aritmetické úkony.

8 KOMBINATORIKA V ÚLOHÁCH

Nájdime všetky poradia!

PROBLÉM 1

Traja žiaci zo 6. A triedy, Adam, Beáta a Cyril sa zúčastnili okresného kola matematickej olympiády. Keď sa vrátili zo súťaže, svojim spolužiakom prezradili len toľko, že každý z nich obsadil jedno z prvých troch miest. Až keď spolužiaci napíšu všetky možné poradia ich umiestnenia na prvých troch miestach, sú ochotní prezradiť, kto z nich v skutočnosti obsadil prvé, druhé a tretie miesto.

RIEŠENIE

Miško bol najaktívnejší a možno aj najzvedavejší. Aby nemusel vypisovať celé mená žiakov, navrhol označiť jednotlivých žiakov písmenami **A**, **B**, **C**. Pripojila sa k nemu Anička, ktorá prehlásila, že ako prvý sa umiestnil Adam, lebo on je najlepší matematik triedy. Na obsadenie druhého miesta sa už názory žiakov rozchádzali. Preto Miško zapisoval na tabuľu mienku triedy takto:

1.	2.	3.
A	B	C
A	C	B

Nesmelo sa ozval Peter. Prehlásil, že on na prvé miesto tipuje Beátu, lebo je veľmi dôkladná a bystrá. Miško na tabuľu zapísal aj tento návrh, pričom názory na obsadenie druhého miesta sa opäť rozchádzali. Zápis bol takýto:

1.	2.	3.
B	A	C
B	C	A

Jožko pripomenul svojim spolužiakom, že Cyril síce nie je taký rýchly v počítaní ako Adam a Beáta, ale takmer sa nestane, aby urobil chybu. Preto aj on mal reálne šance získať prvé miesto. Aj to Miško zapísal na tabuľu:

1.	2.	3.
C	A	B
C	B	A

Teraz už olympionici prezradili svoje skutočné umiestnenie, pretože pri príprave na súťaž sa stretli aj s príkladmi z kombinatoriky a tak vedeli, že viac poradí už neexistuje. Prvý bol Cyril, druhá Beáta a tretí Adam.

Pani učiteľka pochválila žiakov za vyriešenie problému a prezradila im, že v ďalšom sa budú učiť zostavovať všetky možné usporiadania daného počtu prvkov tak, aby nezabudli na žiadny možný prípad usporiadania.

8.1 Všetky možné usporiadania daného počtu prvkov

S úlohami tohto typu ste sa stretli v samotnej matematike, napríklad pri napísaní všetkých dvojciferných čísel pomocou dvoch cifier, všetkých trojciferných čísel pomocou troch cifier, bez opakovania jednotlivých cifier. Najprv si zopakujte riešenie takýchto úloh.

ÚLOHA 1

Pomocou číslic 4 a 7 napíšte všetky dvojciferné čísla bez opakovania cifier. Koľko je takýchto čísel?

ÚLOHA 2

Z písmen K, A napíšte všetky dvojpísmenové slová bez opakovania písmen. Koľko je takýchto slov?

Teraz pristúpime k riešeniu podobných, ale náročnejších úloh.

PRÍKLAD 1

Pomocou číslic 2, 5, 7 napíšte všetky trojciferné čísla bez opakovania cifier. Koľko je takýchto čísel?

RIEŠENIE

Úlohu skúste najprv vyriešiť samostatne. Po ukončení riešenia porovnajte vaše riešenie s postupmi riešenia dvoch žiakov, ktoré uvádzame a ktoré sú vhodné aj na nájdenie všetkých štvor- alebo viacciferných čísel. Miško pri riešení uvažoval takto: Na prvé miesto (rád stoviek) napíšem číslicu 2. Potom na druhom mieste (rád desiatok) môžu byť číslice 5, 7. Názorne:

$$2 \begin{array}{l} \nearrow 5 \ \ldots \ 25- \\ \searrow 7 \ \ldots \ 27- \end{array}$$

Na chýbajúce tretie miesto (rád jednotiek) Miško napísal tretiu číslicu z daných troch:

$$2 \begin{array}{l} \nearrow 5 - 7 \ \ldots \ 257 \\ \searrow 7 - 5 \ \ldots \ 275 \end{array}$$

Spôsob grafického znázornenia, ktorý Miško použil, nazývame **stromový graf**. Tento stromový graf má dve vetvy: vetvu 2 — 5 — 7, pomocou ktorej sme sa dostali k trojcifernému číslu 257 a vetvu 2 — 7 — 5, ktorá dáva číslo 275.

Na prvé miesto Miško potom napísal postupne číslice 5 a 7. Tak dostal všetky trojciferné čísla:

$$5 \begin{array}{l} \nearrow 2 - 7 \ \ldots \ 527 \\ \searrow 7 - 2 \ \ldots \ 572 \end{array} \qquad 7 \begin{array}{l} \nearrow 2 - 5 \ \ldots \ 725 \\ \searrow 5 - 2 \ \ldots \ 752 \end{array}$$

Odpoveď: Pomocou cifier 2, 5, 7 sa dajú zapísať bez opakovania cifier tieto trojciferné čísla: 257, 275, 527, 572, 725, 752. Ich počet je $3 . 2 . 1 = 6$.

Miško svoj postup pri vytváraní všetkých trojciferných čísel, ktoré sa dajú napísať pomocou troch daných cifier vysvetlil takto: Prvú cifru pri zápise trojciferného čísla môžeme vybrať trojakým spôsobom, druhú cifru dvojakým spôsobom a tretiu už len jediným spôsobom. Preto počet všetkých trojciferných čísel, ktoré sa dajú zapísať tromi ciframi je $3 . 2 . 1 = 6$.

Zuzka postupovala pri riešení takto: Zhotovila si tri kartičky, na ktoré napísala dané číslice $\boxed{2}\boxed{5}\boxed{7}$. Potom položila na lavicu kartičku $\boxed{2}$, za ňou kartičku $\boxed{5}$ a potom kartičku $\boxed{7}$. Dostala trojciferné číslo:

$$\boxed{2}\boxed{5}\boxed{7}$$

Zuzka zistila, že ak zamení poradie číslic na druhom a treťom mieste, dostane ďalšie trojciferné číslo:

$$\boxed{2}\boxed{7}\boxed{5}$$

Ďalšie trojciferné čísla dostala tak, že na prvom mieste najprv zamenila kartičku s cifrou $\boxed{2}$ za kartičku s cifrou $\boxed{5}$ a ostatné dve číslice na druhom a treťom mieste vystriedala:

$$\boxed{5}\boxed{2}\boxed{7} \qquad \boxed{5}\boxed{7}\boxed{2}$$

Potom číslicu $\boxed{5}$ zamenila s číslicou $\boxed{7}$ a dostala ďalšie dve trojciferné čísla:

$$\boxed{7}\boxed{2}\boxed{5} \qquad \boxed{7}\boxed{5}\boxed{2}$$

Odpoveď: Pomocou číslic 2, 5, 7 sa dajú napísať bez opakovania cifier tieto trojciferné čísla:

257 275
527 572
725 752

Ich počet je 3 . 2 . 1 = 6.

ÚLOHA 3

Tréner reprezentačného futbalového mužstva na jednom zápase postupne vystriedal troch hráčov s číslami 3, 5, 9. Napíšte všetky možné poradia vystriedania týchto hráčov. Koľko je takýchto poradí?

ÚLOHA 4

Pomocou písmen **L**, **O**, **S** napíšte všetky trojpísmenové slová bez opakovania písmen. Koľko je takýchto slov? Podčiarknite slová, ktoré majú v slovenčine význam.

PRÍKLAD 2

Nakreslite všetky rôzne trojpásové trojfarebné zástavy (trikolóry) modrej, červenej a žltej farby.
Koľko je takýchto rôznych zástav?

RIEŠENIE

Prvý horný pás sa dá vyfarbiť trojakým spôsobom:

modrá	červená	žltá

Druhý, stredný pás možno vyfarbiť len dvojakým spôsobom a tretí, spodný pás už len jediným spôsobom

modrá		červená		žltá	
červená	žltá	modrá	žltá	modrá	červená
žltá	červená	žltá	modrá	červená	modrá

Odpoveď: Z tabuľky sa dá zistiť, že možno vyhotoviť 6 rôznych trojfarebných zástav.
Sú to: **mčž, čmž, žmč,**
mžč, čžm, žčm.

PROBLÉM 2

Zistite, či sú medzi týmito trikolórami také, ktoré patria niektorému štátu sveta alebo Európy.

ÚLOHA 5

Koľkými spôsobmi sa môžu posadiť traja žiaci, Karol, Peter, Ivan, na tri stoličky vedľa seba? Nájdite a napíšte všetky možné poradia. Koľko je rôznych poradí sedenia?

ÚLOHA 6

Traja žiaci Albert, Braňo a Cyril prechádzali na telocviku po úzkej lavičke za sebou. Nakreslite alebo napíšte všetky možné poradia prechodu chlapcov cez lavičku. Koľko je všetkých rôznych možností poradia ich prechodu?

PRÍKLAD 3

Členovia trojčlennej rodiny, otec (**o**), matka (**m**), dcéra (**d**), neodchádzajú ráno z domu spoločne, ale každý sám. Nájdite a napíšte všetky možné poradia odchodu. Koľko je rôznych poradí ich odchodu z domu?

RIEŠENIE

Janko túto úlohu riešil pomocou stromového grafu takto:

1. z domu odchádza:	**o**		**m**		**d**	
2. z domu odchádza:	**m**	**d**	**o**	**d**	**o**	**m**
3. z domu odchádza:	**d**	**m**	**d**	**o**	**m**	**o**

Odpoveď: Všetky možné poradia odchodu:
omd, odm, mod, mdo, dom, dmo.
Všetkých možných poradí odchodu z domu je: 3 . 2 . 1 = 6.

Anička túto úlohu riešila takto: Napísala poradie odchodu z domu, pod to napísala osoby a vytvorila takúto tabuľku:

1.	2.	3.
o	**m**	**d**
o	**d**	**m**
m	**o**	**d**
m	**d**	**o**
d	**o**	**m**
d	**m**	**o**

Odpoveď: Rôznych poradí odchodu je 3 . 2 . 1 = 6.

ÚLOHA 7

Žiaci 6. A triedy dostali za úlohu zostrojiť trojuholník, ak sú dané strany *a*, *b*, *c* trojuholníka. V koľkých rôznych poradiach mohli žiaci zostrojiť jednotlivé strany trojuholníka? Napíšte všetky možné poradia zostrojenia strán trojuholníka.

ÚLOHA 8

Koľkými rôznymi spôsobmi môžete napísať poradie sčítancov v súčte

$$32 + 24 + 16$$

Nájdite všetky možnosti. Koľko ich je?

PRÍKLAD 4

Pomocou číslic 4, 5, 8, 9 napíšte všetky štvorciferné čísla bez opakovania cifier. Koľko je takýchto čísel?

RIEŠENIE

Karol sa pustil do riešenia a postupoval podobne ako Miško v 1. príklade, ale s tým rozdielom, že prvú cifru (rádu tisícok) mohol zvoliť štvorakým spôsobom. Môže to byť číslica 4, 5, 8 alebo 9. Druhú cifru ku každej prvej mohol zvoliť trojakým spôsobom.

4 — 5, 8, 9
5 — 4, 8, 9
8 — 4, 5, 9
9 — 4, 5, 8

Pri každej voľbe prvej a druhej cifry tretiu cifru zvolil dvojakým spôsobom a štvrtú cifru už len jediným spôsobom.

4 — 5 — 8 — 9 ... 4589
4 — 5 — 9 — 8 ... 4598
4 — 8 — 5 — 9 ... 4859
4 — 8 — 9 — 5 ... 4895
4 — 9 — 5 — 8 ... 4958
4 — 9 — 8 — 5 ... 4985

5 — 4 — 8 — 9 ... 5489
5 — 4 — 9 — 8 ... 5498
5 — 8 — 4 — 9 ... 5849
5 — 8 — 9 — 4 ... 5894
5 — 9 — 4 — 8 ... 5948
5 — 9 — 8 — 4 ... 5984

8 — 4 — 5 — 9 ... 8459
8 — 4 — 9 — 5 ... 8495
8 — 5 — 4 — 9 ... 8549
8 — 5 — 9 — 4 ... 8594
8 — 9 — 4 — 5 ... 8945
8 — 9 — 5 — 4 ... 8954

9 — 4 — 5 — 8 ... 9458
9 — 4 — 8 — 5 ... 9485
9 — 5 — 4 — 8 ... 9548
9 — 5 — 8 — 4 ... 9584
9 — 8 — 4 — 5 ... 9845
9 — 8 — 5 — 4 ... 9854

Odpoveď: Pomocou číslic 4, 5, 8, 9 sa dajú zapísať tieto štvorciferné čísla:

4 589	5 489	8 459	9 458
4 598	5 498	8 495	9 485
4 859	5 849	8 549	9 548
4 895	5 894	8 594	9 584
4 958	5 948	8 945	9 845
4 985	5 984	8 954	9 854

Ich počet je 4 . 3 . 2 . 1 = 24.

PROBLÉM 3

Na predchádzajúcom príklade vysvetlite, prečo sa rovná počet všetkých štvorciferných čísel zapísaných pomocou štyroch cifier bez opakovania súčinu 4 . 3 . 2 . 1 = 24.

ÚLOHA 9

Napíšte číslice 2, 3, 4, 7 na kartičky. Vyložte z nich na lavici všetky možné štvorciferné čísla a zapíšte ich do zošita. Zakrúžkujte tie čísla, ktoré sú deliteľné štyrmi.

ÚLOHA 10

Pán učiteľ dnes vyskúšal štyroch žiakov zo 6. A triedy: Jurka, Vlada, Tomáša a Borisa. Každý z nich dostal jednu zo známok 1, 2, 3, 4. Napíšte všetky možnosti oznámkovania jednotlivých žiakov pánom učiteľom. Koľko je týchto možností?

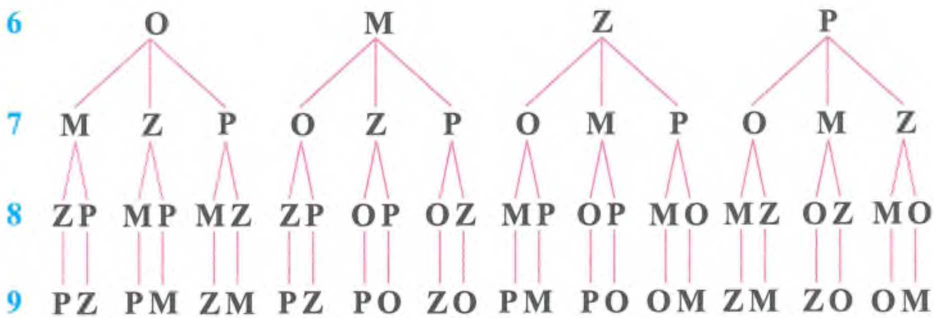
PRÍKLAD 5

Štyri kamarátky Oľga, Milka, Zuzka a Patrícia sa vybrali do divadla. Oľga zakúpila vstupenky do prvého radu s číslami sedadiel 6, 7, 8, 9. Ešte pred začiatkom predstavenia rozdelila vstupenky svojim kamarátkam. Napíšte všetky možné spôsoby rozdelenia vstupeniek medzi kamarátkami. Koľko rôznych rozdelení ste našli?

RIEŠENIE

S využitím stromového grafu sa dostaneme k všetkým možným spôsobom rozdelenia vstupeniek:

Číslo sedadla



Všetky možné rozdelenia vstupeniek sú:

Číslo sedadla:	6 7 8 9	6 7 8 9	6 7 8 9	6 7 8 9
	O M Z P	M O Z P	Z O M P	P O M Z
	O M P Z	M O P Z	Z O P M	P O Z M
	O Z M P	M Z O P	Z M O P	P M O Z
	O Z P M	M Z P O	Z M P O	P M Z O
	O P M Z	M P O Z	Z P O M	P Z O M
	O P Z M	M P Z O	Z P M O	P Z M O

Odpoveď: Počet všetkých rozdelení vstupeniek je 4 . 3 . 2 . 1 = 24.

ÚLOHA 11

Milan cez prázdniny prečítal štyri knihy: Jakubko, Sobotné večery, Prešporský zvon, Skrytý prameň. Nájdite a napíšte všetky možné poradia prečítania jednotlivých kníh. Koľko je rôznych poradí?

CVIČENIA

1. Pomocou číslic 3, 4, 8 napíšte všetky trojciferné čísla bez opakovania cifier. Koľko je takýchto čísel? Podčiarknite párne čísla.

.... 2. Máte tri kartičky s ciframi 2, 3, 4. Koľko rôznych trojciferných čísel možno pomocou nich zostaviť? Napíšte ich. Čo možno povedať o deliteľnosti týchto čísel tromi?

.... 3. Pomocou číslic 1, 4, 7, 9 napíšte všetky štvorciferné čísla bez opakovania cifier. Koľko je takýchto čísel? Koľko je medzi nimi párnych čísel?

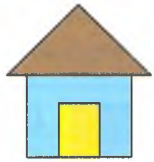
.... 4. Máte štyri kartičky s písmenami B, E, L, O. Koľko rôznych štvorhláskových slov možno pomocou nich zostaviť.

.... 5. Pred záverečným kolom hokejovej extraligy je známe, že na prvých troch miestach v tabuľke sa umiestnia: Bratislava, Košice a Trenčín. Napíšte všetky možné konečné poradia mužstiev na prvých troch miestach.

.... 6. Na prízemí budovy školy sú štyri učebne, ktoré sú očíslované číslami 1, 2, 3, 4. Do týchto učební budú umiestnení žiaci 1. ročníka, tried A, B, C, D. Napíšte všetky možné umiestnenia tried. Určte ich počet.

.... **7.** Milan navštívil cez prázdniny s rodičmi 4 mestá na Slovensku: Čadcu, Michalovce, Brezno a Komárno. Nájdite a napíšte všetky možné poradia návštevy jednotlivých miest. Koľko je rôznych poradí?

.... **8.** Nakreslite domčeky podľa obrázka. Vyfarbite ich hnedou, žltou a modrou farbou tak, aby na každom domčeku mala strecha, stena a dvere inú farbu. Koľko takých rôznych domčekov možno vyfarbiť?



8.2 Výber a usporiadanie prvkov

Doteraz sme riešili len také úlohy, keď daný počet prvkov (číslic, farieb, súťažiacich) bolo potrebné usporiadať všetkými možnými spôsobmi, bez opakovania prvkov. V ďalšom budeme riešiť také úlohy, keď z daného počtu prvkov (cifier, farieb, súťažiacich atď.) všetkými možnými spôsobmi vyberieme menšiu nanajvýš rovnako početnú skupinu prvkov a vytvoríme ich všetky možné usporiadania. Na konkrétnych príkladoch však ukážeme, že ak vyberieme všetky prvky danej skupiny, tak riešime vlastne úlohy predchádzajúceho typu.

PRÍKLAD 1

Pomocou kartičiek s číslicami $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{4}$ zostavte všetky možné dvojciferné čísla. Koľko dvojciferných čísel možno zostaviť pomocou týchto kartičiek?

RIEŠENIE

Viera postupovala pri riešení takto: Na prvé miesto (na mieste desiatok) položila kartičku s cifrou $\boxed{1}$, potom kartičku s cifrou $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$. Teda prvú kartičku s cifrou pri tvorení dvojciferných čísel Vierka mohla zvoliť štvorakým spôsobom. Druhú potom trojakým spôsobom takto:

$\boxed{1}$ – $\boxed{2}$ ... 12, $\boxed{3}$ ... 13, $\boxed{4}$ ... 14

$\boxed{2}$ – $\boxed{1}$ ... 21, $\boxed{3}$ ... 23, $\boxed{4}$ ... 24

$\boxed{3}$ – $\boxed{1}$ ... 31, $\boxed{2}$ ... 32, $\boxed{4}$ ... 34

$\boxed{4}$ – $\boxed{1}$ ... 41, $\boxed{2}$ ... 42, $\boxed{3}$ ... 43

Odpoveď: Všetky dvojciferné čísla sú: 12, 13, 14, 21, 23, 24, 31, 32, 34, 41, 42, 43. Ich počet je 4 . 3 = 12.

ÚLOHA 1

Pomocou číslic 7, 8, 9 napíšte všetky dvojciferné čísla bez opakovania cifier. Koľko je takýchto čísel?
Ktoré z nich sú deliteľné a) dvoma, b) tromi, c) šiestimi.

ÚLOHA 2

Pomocou písmen *a*, *b*, *c*, *d* napíšte všetky dvojpísmenové spojenia bez opakovania hlások. Koľko je takýchto spojení?

PRÍKLAD 2

Pomocou kartičiek s číslicami 1 2 3 4 zostavte všetky trojciferné čísla bez opakovania cifier. Koľko je takýchto čísel?

RIEŠENIE

Vierka postupovala rovnako ako pri zostavení dvojciferných čísel. Na prvom mieste (v prípade vytvárania trojciferných čísel na mieste stoviek), môže byť hociktorá zo štyroch kartičiek s cifrou. Na druhom mieste (na mieste desiatok) môžu byť tri zo štyroch kartičiek s cifrou a na výber tretej kartičky s cifrou sú dve možnosti:

- 1
  - 2
    - 3...123
    - 4...124
  - 3
    - 2...132
    - 4...134
  - 4
    - 2...142
    - 3...143
- 2
  - 1
    - 3...213
    - 4...214
  - 3
    - 1...231
    - 4...234
  - 4
    - 1...241
    - 3...243
- 3
  - 1
    - 2...312
    - 4...314
  - 2
    - 1...321
    - 4...324
  - 4
    - 1...341
    - 2...342
- 4
  - 1
    - 2...412
    - 3...413
  - 2
    - 1...421
    - 3...423
  - 3
    - 1...431
    - 2...432

Odpoveď: Všetky trojciferné čísla sú uvedené v riešení.
Ich počet je 4 . 3 . 2 = 24.

Milan pri riešení tejto úlohy postupoval tak, že na vytvorenie trojciferných čísel využil už vytvorené dvojciferné čísla z príkladu 1.
Všetky dvojciferné čísla sú: 12, 21, 13, 31, 14, 41, 23, 32, 24, 42, 34, 43.
Všetky trojciferné čísla odvodené od dvojciferných sú:

12 < 123, 124 21 < 213, 214 13 < 132, 134 31 < 312, 314 14 < 142, 143 41 < 412, 413

23 < 231, 234 32 < 321, 324 24 < 241, 243 42 < 421, 423 34 < 341, 342 43 < 431, 432

Milan dospel k tomu istému výsledku ako Vierka.
Všetky štvorciferné čísla dostaneme tak, že ku každému trojcifernému číslu priradíme chýbajúcu štvrtú kartičku s cifrou. To ale znamená, že počet štvorciferných čísel je 1-krát väčší ako počet trojciferných. Teda pre ich počet platí: 4 . 3 . 2 . 1 = 24. To je už pre nás známy výpočet z predchádzajúcej časti učiva.

ÚLOHA 3

Jurko chodí do gymnázia a v tomto štvrťroku už dvakrát odpovedal z matematiky. Prezradil svojmu bratovi šiestakovi len toľko, že nedostal žiadne rovnaké známky a nedostal ani päťku. Žiadal od svojho brata, aby mu napísal všetky možnosti v akom poradí a aké známky mohol dostať. Ak to napíše správne, potom mu prezradí, aké známky a v akom poradí ich naozaj dostal. Napíšte aj vy všetky možnosti.

ÚLOHA 4

Pomocou číslic 5, 6, 7, 8 napíšte všetky trojciferné čísla bez opakovania cifier. Koľko je takýchto čísel?

PRÍKLAD 3

Koľkými rôznymi spôsobmi môžu členovia 7-členného turistického krúžku zvoliť zo svojich radov tajomníka a hospodára?

RIEŠENIE

Členovia krúžku môžu postupovať tak, že najprv zvolia tajomníka. Na výber tajomníka je 7 možností. Ak je už tajomník vybratý, tak ku každému tajomníkovi môžu vybrať hospodára 6 spôsobmi. Označme jednotlivých členov turistického krúžku písmenami **A**, **B**, **C**, **D**, **E**, **F**, **G**. Riešenie znázorníme stromovým diagramom:

tajomník:

hospodár:

Odpoveď: Tajomníka a hospodára môžu zvoliť 7 . 6 = 42 rôznymi spôsobmi. Jednotlivé dvojice určujú vetvy stromového grafu.

ÚLOHA 5

Pomocou troch rôznych farieb vyfarbite všetky dvojpásové zástavy. Koľko je takýchto zástav?

PRÍKLAD 4

Na školských cyklistických pretekoch štartovali štyria žiaci zo 6. B triedy: Karol (**K**), Peter (**P**), Maroš (**M**) a Laco (**L**). V akom poradí mohli dôjsť prví traja do cieľa? Napíšte všetky možnosti a určte ich počet.

RIEŠENIE

Prvé miesto mohol obsadiť hociktorý z nich. Teda sú štyri možnosti na obsadenie prvého miesta. Druhé miesto mohli obsadiť len zvyšní traja, a tretie miesto len tí dvaja, ktorí neobsadili ani prvé, ani druhé miesto. Riešenie pomocou stromového grafu bude:

1. miesto: K P M L

2. P M L K M L K P L K P M

3. ML PL PM ML KL KM PL KL KP PM KM KP

Odpoveď: Prví traja mohli do cieľa dôjsť v 4 . 3 . 2 = 24 rôznych poradiach. Tieto poradia sú: KPM, KPL, KMP, KML, KLP, KLM, PKM, PKL, PMK, PML, PLK, PLM, MKP, MKL, MPK, MPL, MLK, MLP, LKP, LKM, LPK, LPM, LMK, LMP.

ÚLOHA 6

Štyria priatelia Andrej, Boris, Cyril a Dušan navštívili lunapark. Striedavo dvaja a dvaja sa povozili na elektrických autíčkach, pričom sa vždy striedali pri volante. Koľko kôl absolvovali celkom, keď každý sa povozil s každým?

PRÍKLAD 5

Šachového turnaja sa zúčastnilo 6 účastníkov. Hralo sa systémom každý s každým aj s odvetou. Koľko zápasov bolo odohratých na tomto turnaji?

RIEŠENIE

Riešenie tejto úlohy môžeme zaznamenať aj v podobe tabuľky. Jednotlivých súťažiacich označme písmenami veľkej abecedy: **A**, **B**, **C**, **D**, **E**, **F**.

	A	B	C	D	E	F
A						
B						
C						
D						
E						
F						

Odpoveď: Každý zo šiestich hráčov hral 5 zápasov, čiže v turnaji sa hralo $6 \,.\, 5 = 30$ vzájomných zápasov.

ÚLOHA 7

V kvalifikácii na Majstrovstvá Európy vo futbale pre rok 2000 sú v našej skupine tieto mužstvá: Slovenská republika, Azerbajdžan, Luxembursko, Maďarsko, Portugalsko, Rumunsko. Koľko zápasov zohrajú v tejto skupine, ak každé mužstvo má hrať s každým, doma aj vonku. Koľko zápasov zohrá slovenská futbalová reprezentácia?

Doteraz sme riešili také úlohy, v ktorých spomedzi číslic, farieb, ľudí a podobne, sme vybrali a usporiadali menší počet ako je ich celkový počet. Pričom sa vybrané prvky neopakovali. Ak sme vytvárali dvojciferné čísla, tak sme nepripustili, aby do výberu patrili čísla 22, 11 a podobne. V ďalšom vyriešime niekoľko úloh, v ktorých pripúšťame aj opakovanie vybraných prvkov.
Zrejme ste sa už stretli s úlohou vytvoriť z dvoch alebo z troch cifier dvoj- alebo trojciferné čísla tak, že sa cifry môžu opakovať. Čo myslíte, počet čísel, ktoré sa dajú napísať pomocou určitého počtu cifier (dvoch, troch, ...) s opakovaním cifier, bude väčší ako počet čísel zapísaných bez opakovania cifier? Zistime, ako to je.

PRÍKLAD 6

Pomocou číslic 8, 9 napíšte všetky možné dvojciferné čísla, v ktorých sa môžu tieto cifry opakovať. Koľko je takýchto čísel?

RIEŠENIE

Prvú cifru môžeme vybrať dvojakým spôsobom. Tým, že sa cifry môžu opakovať, aj druhú cifru môžeme vybrať dvojakým spôsobom. Znázornením dostaneme:

$$8 \begin{cases} 8 \ldots 88 \\ 9 \ldots 89 \end{cases} \qquad 9 \begin{cases} 8 \ldots 98 \\ 9 \ldots 99 \end{cases}$$

Odpoveď: Dvojciferné čísla napísané pomocou číslic 8, 9 s opakovaním sú: 88, 89, 98, 99.
Počet všetkých dvojciferných čísel je $2 \,.\, 2 = 4$.

ÚLOHA 8

Pomocou písmen A, B napíšte všetky dvojpísmenové monogramy. Zistite, či má niektorý žiak z vašej triedy rovnaký monogram ako sú vytvorené monogramy.

PRÍKLAD 7

Pomocou číslic 4, 5, 6 napíšte všetky trojciferné čísla s opakovaním cifier. Koľko je takýchto čísel?

RIEŠENIE

Prvú cifru môžeme vybrať trojakým spôsobom. Keďže sa cifry môžu opakovať, aj druhú cifru môžeme vybrať trojakým spôsobom:

$$4 \begin{cases} 4 \ldots 44- \\ 5 \ldots 45- \\ 6 \ldots 46- \end{cases} \quad 5 \begin{cases} 4 \ldots 54- \\ 5 \ldots 55- \\ 6 \ldots 56- \end{cases} \quad 6 \begin{cases} 4 \ldots 64- \\ 5 \ldots 65- \\ 6 \ldots 66- \end{cases}$$

Ku každému už vytvorenému dvojcifernému číslu môžeme tretiu cifru pripísať tiež trojakým spôsobom:

- 4
  - 4
    - 4 ... 444
    - 5 ... 445
    - 6 ... 446
  - 5
    - 4 ... 454
    - 5 ... 455
    - 6 ... 456
  - 6
    - 4 ... 464
    - 5 ... 465
    - 6 ... 466
- 5
  - 4
    - 4 ... 544
    - 5 ... 545
    - 6 ... 546
  - 5
    - 4 ... 554
    - 5 ... 555
    - 6 ... 556
  - 6
    - 4 ... 564
    - 5 ... 565
    - 6 ... 566
- 6
  - 4
    - 4 ... 644
    - 5 ... 645
    - 6 ... 646
  - 5
    - 4 ... 654
    - 5 ... 655
    - 6 ... 656
  - 6
    - 4 ... 664
    - 5 ... 665
    - 6 ... 666

Odpoveď: Všetky trojciferné čísla vytvorené z troch cifier 4, 5, 6 s opakovaním sú uvedené v riešení.
Ich počet je $3 \,.\, 3 \,.\, 3 = 27$.

ÚLOHA 9

Na dnešnej hodine matematiky odpovedali traja žiaci: Ivana, Janko a Karol. Nikto z nich nedostal horšiu známku ako 3. Napíšte všetky možné trojice známok, ktoré žiaci mohli dostať. Koľko je takýchto trojíc?

ÚLOHA 10

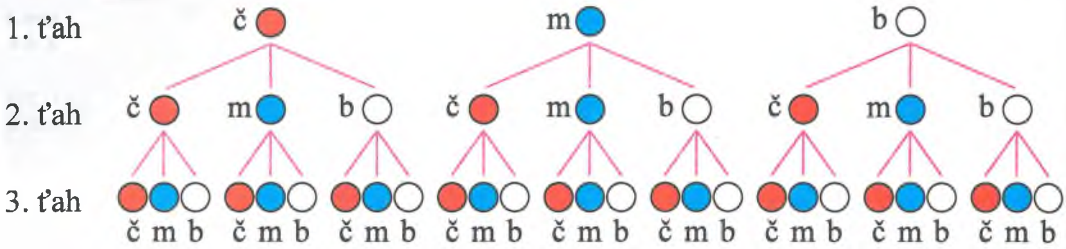
Pomocou písmen *A*, *K*, *T* napíšte všetky trojpísmenové slová s opakovaním písmen. Koľko je takýchto slov? Koľko z týchto slov má v slovenskom jazyku význam? Podčiarknite ich.

PRÍKLAD 9

V urne sú červené, modré a biele žetóny. Súťažiaci vytiahne prvý žetón, potom ho vloží do urny naspäť a vytiahne druhý žetón, ktorý opäť vloží naspäť a ťahá tretí žetón. Vyhráva vtedy, ak v trojici vytiahnutých žetónov nie je červený žetón. Napíšte všetky možné trojice žetónov, ktoré súťažiaci mohol vytiahnuť. Podčiarknite vyhrávajúce trojice žetónov.

RIEŠENIE

Prvým ťahom súťažiaci môže vytiahnuť červený, modrý alebo biely žetón.



Odpoveď: Všetky možné trojice sú tieto:

ččč, ččm, ččb, čmč, čmm, čmb, čbč, čbm, čbb
mčč, mčm, mčb, mmč, mmm, mmb, mbč, mbm, mbb
bčč, bčm, bčb, bmč, bmm, bmb, bbč, bbm, bbb

Všetkých možných ťahov je 3 . 3 . 3 = 27.

PRÍKLAD 10

Pomocou číslic 1, 2, 3, 4 napíšte všetky možné dvojciferné čísla. Koľko je takýchto čísel?

RIEŠENIE

Prvú číslicu dvojciferného čísla (desiatku) môžeme zvoliť štvorakým spôsobom. Tým, že číslice sa môžu opakovať, aj na výber druhej číslice (označujúcej jednotky) máme štyri možnosti. Riešenie pomocou stromového grafu bude:

Odpoveď: Dvojciferné čísla, ktoré sa dajú vytvoriť sú:

11, 12, 13, 14, 21, 22, 23, 24, 31, 32, 33, 34, 41, 42, 43, 44.

Počet týchto čísel je 4 . 4 = 16.

ÚLOHA 11

Z písmen R, S, T, U, Z vytvorte všetky dvojpísmenové monogramy. Koľko takýchto monogramov možno vytvoriť? Sú medzi nimi aj monogramy tvojich spolužiakov?

CVIČENIA

1. Pomocou číslic 3, 4, 5 napíšte všetky možné dvojciferné čísla:
   a) bez opakovania cifier,
   b) s opakovaním cifier.

.... 2. Koľkými rôznymi spôsobmi možno vybrať z 5-členného družstva vojakov dvojčlennú hliadku zloženú z veliteľa hliadky a člena hliadky.

.... 3. Koľko rôznych monogramov možno vytvoriť z písmen E, H, N?

.... 4. Mišo a Braňo sa v sobotu chystajú na výlet. Nevedia sa rozhodnúť, či pôjdu na výlet peši, na bicykloch alebo autobusom. Koľkými rôznymi spôsobmi mohli ísť na výlet, ak každý rozhodoval o spôsobe sám, nezávisle od druhého?

.... 5. Hádžeme dvoma hracími kockami. Napíšte všetky možné výsledky hodov. Koľko ich je?

.... 6. Pomocou číslic 3, 4, 7 napíšte všetky trojciferné čísla s opakovaním cifier. Koľko rôznych trojciferných čísel možno pomocou nich zostaviť?

.... 7. Morseova abeceda sa skladá z týchto dvoch znakov:
   · (bodka), — (čiarka). Koľko dvojprvkových a koľko trojprvkových znakov možno vytvoriť:
   a) bez opakovania znakov,
   b) s opakovaním znakov.

.... **8.** Linda mala v škatuľke červené, zelené a žlté cukríky – lentilky. Siahla do škatuľky a vybrala postupne tri kusy. Zapíšte všetky možné poradia, v akých mohla tri lentilky vybrať zo škatuľky.

.... **9.** Traja žiaci z našej triedy Peťo, Rudo a Stano sa zúčastnili na jarných atletických majstrovstvách školy v troch rôznych disciplínach. Napíšte všetky možnosti umiestnenia týchto žiakov na atletických majstrovstvách školy. Koľko je týchto možností?

VYSKÚŠAJTE SA!

1. Traja bratia Milan, Karol a Ľuboš prichádzajú domov zo školy po jednom. Nájdite a napíšte všetky možné poradia príchodu bratov domov. Koľko je takýchto poradí?

.... **2.** Pomocou číslic 4, 6, 7, 9 napíšte všetky štvorciferné čísla bez opakovania cifier. Zakrúžkujte z nich párne čísla.

.... **3.** Pomocou číslic 3, 4, 5, 6 napíšte všetky dvojciferné čísla aj s opakovaním cifier. Zakrúžkujte z nich čísla deliteľné tromi.

.... **4.** Koľkými spôsobmi mohli štyria účastníci finále stolnotenisového turnaja Peťo, Juro, Martin a Števo obsadiť prvé tri miesta? Napíšte jednotlivé možnosti.

.... **5.** V nepriehľadnom vrecúšku sú štyri kartičky s číslami 1, 2, 3, 4. Koľkými spôsobmi možno z nich postupne vytiahnuť 3, ak každú vytiahnutú kartičku vložíme späť do vrecúška. Napíšte jednotlivé možnosti.

Existuje len jedno dobro, a to je vedomosť,
existuje len jedno zlo – nevedomosť. *Sokrates*

9 CVIČENIA NA OPAKOVANIE

1. Koľkociferné je číslo, ktorého prvá číslica sprava označuje 7 tisícok, ďalšia dve stotisícky a ďalšia osemsto miliónov.

2. Určte, medzi ktorými dvoma prirodzenými číslami ležia čísla: 116,2; 28,3; 17,17; 0,236 5 a 105,108.

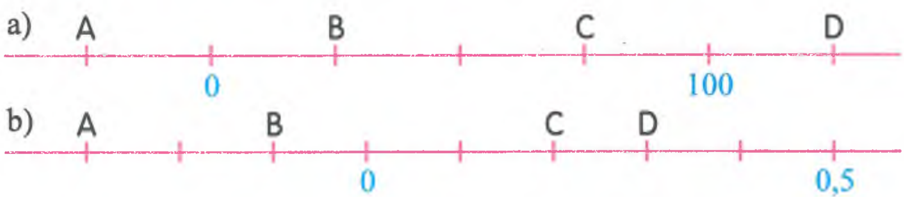
3. Ktoré najväčšie šesťciferné číslo sa dá zapísať z číslic 1, 2, 3, 5, 7, 9 ak má byť každá číslica zapísaná práve raz. Pritom: číslica 5 má byť zapísaná na mieste desiatok a číslica 9 na mieste tisícok.

4. Určte číslo, ktoré má:
   a) 11 desiatok a 11 jednotiek,
   b) 33 stoviek, 33 desiatok a 33 jednotiek,
   c) 22 tisícok, 55 stoviek, 44 desiatok a 11 jednotiek.

5. Koľkociferné číslo môže vzniknúť sčítaním:
   a) dvoch trojciferných čísel,
   b) štyroch päťciferných čísel,
   c) desiatich dvojciferných čísel?

6. Na vhodne zvolenej časti číselnej osi znázornite čísla:
   a) 269, 251, 340, 375
   b) 0,45; 1,15; 0,7; 0,95; 0,19
   c) 1 100, 1 020, 850, 1 380
   d) –12, –18, –20, –11, –15

7. Zapíšte čísla, ktorých obrazmi sú body na číselných osiach:



8. Zapíšte symbolicky:
   a) číslo a je menšie ako –5
   b) číslo b je väčšie ako –7
   c) číslo c je kladné
   d) číslo d je záporné

9. Napíšte jedno kladné a jedno záporné číslo x tak, aby vyhovovalo nasledujúcim nerovnostiam:
a) $x < 5$ b) $x < 1$ c) $x > -0{,}2$ d) $x > -0{,}01$

10. Nájdite dve po sebe idúce celé čísla, medzi ktorými leží číslo:
a) 8,25 b) –8,25 c) 45,9 d) –45,9

11. Usporiadajte čísla od najmenšieho po najväčšie:
a) –504, –45, –540, –450, –54, –405;
b) –0,21; –2,01; –1,2; –1,02; –0,12; –2,1.

12. Určte, či je číslo x kladné alebo záporné, ak platí:
a) $x > 0$ c) $x > 12$ e) $x > -3$
b) $x < 0$ d) $x < -2$ f) $-5 > x$

13. Vypočítajte:
a) $456 + 682 - 400 - 82 + 54$
b) $-72 + 263 + (-39) + (-63) - (-71) + 40$
c) $-6 + 1{,}2 + 7 - 2{,}3 + 8{,}8 - 3{,}7$

14. Určte súčet a rozdiel čísel (odčítajte menšie od väčšieho):
a) 87,3 a 9,456 b) 63 a –2 c) –15 a –40 d) 2,5 a –1,8

15. Vypočítajte, ktoré čísla patria do prázdnych políčok tabuľky:

x	9	–10	–6	10	–10	–10
y	14	13	–7	10,6	10,7	–10,8
$x + y$						
$x - y$						

16. Vynásobte a výsledok zaokrúhlite na dve desatinné miesta:
a) 1,5 . 2,2 . 0,02 c) 23 . 55 . 3,2 . 0,001
b) 11,1 . 0,6 . 0,33 d) 101 . 66 . 2,2 . 0,000 1

17. Vypočítajte:
a) 124 . 9
124 . 16
124 . 25

b) 30,5 . 1,5
30,5 . 2,2
30,5 . 3,7

(Pri počítaní posledného súčinu skúste využiť predchádzajúce výsledky.)

18. Vydeľte s presnosťou na jedno desatinné miesto:
a) 17,79 : 0,8 b) 154,29 : 5,26

.... **19.** Nájdite všetky delitele čísla 105.

.... **20.** K číslu 1 246 nájdite najbližšie menšie číslo, ktoré je deliteľné šiestimi.

.... **21.** Nájdite všetky spoločné delitele čísel 210 a 770.

.... **22.** Nájdite najväčšieho spoločného deliteľa čísel 504 a 540.

.... **23.** Nájdite najmenšie štvorciferné prirodzené číslo, ktoré je spoločným násobkom čísel 2 a 3.

.... **24.** Nájdite všetky spoločné násobky čísel 4, 6 a 10, ktoré sú menšie ako 200.

.... **25.** V zápise 7 1*5 nahraďte hviezdičku číslicou tak, aby vzniklo číslo deliteľné číslom 15.

.... **26.** Rozložte číslo 11 400 na súčin prvočísel.

.... **27.** Ktorú číslicu musíte škrtnúť v čísle 5 342, aby ste dostali trojciferné číslo deliteľné šiestimi?

.... **28.** Napíšte všetky štvorciferné čísla, ktoré sú zapísané iba číslicami 2 a 3 a zároveň sú deliteľné tromi.

.... **29.** Tanečný súbor nastúpil na javisko vo dvojiciach. Počas tanca tanečníci postupne vytvárali skupiny po štyroch, šiestich a deviatich tanečníkoch. Koľko členov mal tanečný súbor, ak vieme, že ich bolo menej ako 50?

.... **30.** Dve krajčírky mali rovnaký bal látky, ktorého dĺžka bola menšia ako 25 metrov. Prvá rozstrihala látku na sukne, druhá na šaty, pričom žiadnej z nich nezostal žiaden zvyšok. Na sukňu treba 80 cm látky, na šaty 3 m. Koľko metrov látky mala každá krajčírka?

.... **31.** V kvetinárstve mali viac ako 150 a menej ako 200 červených ruží. Zistili, že keď budú viazať kytice po troch, štyroch, piatich či šiestich ružiach, vždy jedna ruža zostane. Koľko ruží mali v kvetinárstve, ak do kytíc poviazali skoro všetky ruže?

32. Určte najmenší počet účastníkov výletu, ak viete, že na sedačkovej lanovke sedeli po dvoch, pri obede sedeli za stolmi po štyroch, spávali v trojlôžkových izbách a po ceste vlakom sedeli v kupé po ôsmich. Do príslušných skupín sa vždy rozdelili tak, že žiadny nezvýšil.

.... **33.** Môže byť najmenší spoločný násobok skupiny čísel menší ako ľubovoľné z týchto čísel?

.... **34.** Najmenší spoločný násobok dvoch čísel je 24. Jedno z týchto čísel je 8. Určte druhé číslo.

.... **35.** Stará mama rozdelila 16 pomarančov svojim vnukom spravodlivo bez toho, aby nejaký rozkrojila. Koľko vnukov mohla mať?

.... **36.** Koľko čísel menších ako 20 je s týmto číslom súdeliteľných? Určte ich.

.... **37.** Môžu byť medzi tromi rôznymi súdeliteľnými číslami dve prvočísla?

.... **38.** Určte súčet prvých 10 prvočísel.

.... **39.** Koľkými rôznymi spôsobmi možno vyjadriť číslo 21 ako súčet troch rôznych prvočísel? (Na poradí sčítancov nezáleží.)

.... **40.** Vyjadrite zlomkom, akou časťou kilometra je 100 m, 150 m, 500 m.

.... **41.** Rozšírte číslom 4 zlomky: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{15}$, $\frac{1}{30}$.

.... **42.** Upravte zlomky: $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{25}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{4}$ tak, aby ich menovateľ bol 100.

.... **43.** Napíšte zlomky $\frac{1}{2}$, $\frac{9}{8}$, $\frac{11}{6}$, $\frac{5}{12}$ ako zlomky s menovateľom 24.

.... **44.** Upravte zlomky na základný tvar: $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{12}$, $\frac{5}{15}$, $\frac{9}{27}$, $\frac{6}{24}$, $\frac{3}{24}$, $\frac{8}{24}$.

.... **45.** Platia rovnosti $\frac{8}{6}=\frac{1}{2}$, $\frac{3}{17}=\frac{9}{51}$, $\frac{7}{25}=\frac{21}{75}$, $\frac{35}{42}=\frac{5}{6}$?

.... **46.** Napíšte ako desatinné číslo: $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{25}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{100}$.

47. Vyjadrite zlomky desatinnými číslami s presnosťou na stotiny: $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{9}{11}$.

.... **48.** Porovnajte zlomky: $\frac{5}{7}$ a $\frac{12}{7}$, $\frac{4}{5}$ a $\frac{6}{7}$, $\frac{3}{8}$ a $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$ a $\frac{5}{12}$.

.... **49.** Napíšte aspoň štyri čísla, ktoré vyhovujú nerovnici:
a) $x > \frac{1}{3}$ b) $x < \frac{1}{9}$ c) $x > \frac{2}{7}$

.... **50.** Usporiadajte zlomky podľa veľkosti: $\frac{1}{3}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{9}{10}$.

.... **51.** Zmestí sa 600 litrov roztoku do nádrže tvaru kvádra s rozmermi dna 2,5 m a 1,0 m a výškou 0,3 m?

.... **52.** Kusový tovar v škatuľkách tvaru kocky s hranou dĺžky 7,5 cm je uložený v kartóne, ktorý má vnútorné rozmery 60 cm, 45 cm a 30 cm. Koľko kusov je v jednom kartóne?

.... **53.** Na parkovisku tvaru štvorca so stranou dĺžky 42 m položili asfaltový koberec vysoký 15 cm. Koľko kubických metrov materiálu spotrebovali?

.... **54.** Koľko korún zaplatíte za 15 kusov dosiek 6,0 m dlhých, 15 cm širokých a 25 mm hrubých, ak jeden kubický meter dosiek stojí 5 200 Sk? Cenu zaokrúhlite na celé koruny.

.... **55.** V bazéne s vodorovným dnom 25 m dlhým a 12,5 m širokým je 562,5 m^3 vody.
a) Aká je hĺbka bazéna, ak hladina vody je 20 cm pod okrajom?
b) Aký je objem bazéna?

.... **56.** Z meteorologického spravodajstva sme sa dozvedeli, že pri búrkach napršalo 18 mm vody.
a) Koľko litrov vody napršalo priemerne na 1 m^2?
b) Koľko kubických metrov vody odtieklo z dlažby obdĺžnikového námestia širokého 95 m a dlhého 140 m?

57. Vypočítajte spamäti objem kocky, ktorá má povrch 600 cm^2?

58. Narysujte uhol $\omega = 126°$. Zostrojte k nemu susedný a vrcholový uhol. Vypočítajte ich veľkosti. Presnosť rysovania porovnajte.

.... **59.** Vypočítajte veľkosti všetkých vonkajších uhlov trojuholníka ABC, ak veľkosti jeho vnútorných uhlov sú:
a) $\alpha = 76°$, $\beta = 43°$, $\gamma = 61°$;
b) $\alpha = 102°34'$, $\beta = 47°45'$, $\gamma = 29°41'$.

.... **60.** K pravítku prikladajte:
a) rovnoramenný trojuholník s ryskou,
b) rôznostranný trojuholník bez rysky,
c) obidva trojuholníky
a zistite, ktoré uhly môžete zostrojiť bez použitia uhlomeru.

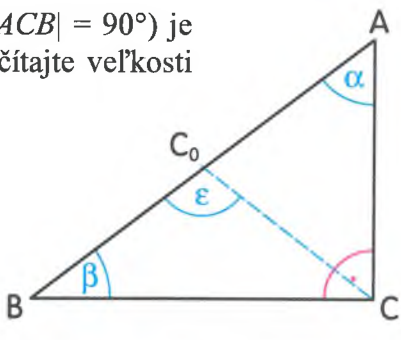
.... **61.** Z čísel 72, 48, 37, 95, 71, 13, 61 vyhľadajte také trojice čísel, ktoré by mohli byť veľkosťami vnútorných uhlov v trojuholníku.

.... **62.** Určte veľkosti vnútorných uhlov trojuholníka ABC, pre ktorý platí:
$\alpha = 2\beta$, $\gamma = 3\beta$.
Ako sa nazýva tento trojuholník?

.... **63.** Vypočítajte obvod rovnoramenného trojuholníka, ak sú dĺžky dvoch jeho strán 4,3 cm a 56 mm. Úloha má dve riešenia.

.... **64.** Uhol pri hlavnom vrchole rovnoramenného trojuholníka má veľkosť:
a) 74°, b) 55°, c) 134°28'.
Vypočítajte veľkosti vnútorných uhlov pri jeho základni.

.... **65.** V pravouhlom trojuholníku ABC ($|\sphericalangle ACB| = 90°$) je C_0 stred strany AB a $\varepsilon = 106°$. Vypočítajte veľkosti uhlov α a β.



.... **66.** Zostrojte rovnostranný trojuholník, ktorého obvod je 16,2 cm.

.... **67.** Narysujte rovnostranný trojuholník ABS, a = 3 cm. Zostrojte pravidelný šesťuholník $ABCDEF$, kde S je stred kružnice opísanej šesťuholníku.

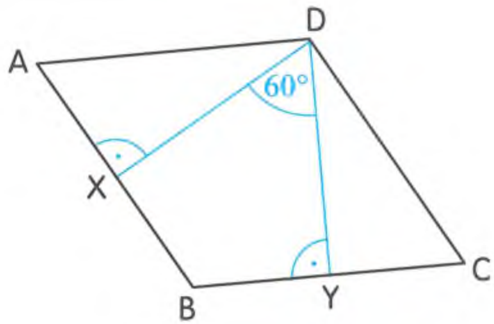
.... **68.** Zostrojte všetky výšky trojuholníka ABC, ak:
a) $a = 5{,}5$ cm, $b = 5$ cm, $c = 6$ cm
b) $a = 5$ cm, $b = 12$ cm, $c = 13$ cm

.... **69.** Možno zostrojiť trojuholník, ktorého strany majú dané dĺžky:
a) 4 cm, 6 cm, 7 cm
b) 10 cm, 28 cm, 18 cm
c) 36 mm, 2,6 cm, 46 mm
d) 25 mm, 3 cm, 6 cm

.... **70.** Možno zostrojiť trojuholník ABC, ak sú dĺžky strán a veľkosti uhlov:
a) $a = 4$ cm, $b = 5$ cm, $\gamma = 128°$
b) $\alpha = 47°$, $\beta = 108°$, $c = 62$ mm
c) $a = 6$ cm, $\beta = 75°$, $\gamma = 105°$
d) $c = 7$ cm, $\alpha = 86°$, $\gamma = 96°$

.... **71.** Ako sa nazýva obrazec, v ktorom majú uhlopriečky dĺžku 5 cm a 8 cm, navzájom sa rozpoľujú a sú na seba kolmé?

.... **72.** Vypočítajte veľkosti vnútorných uhlov rovnobežníka $ABCD$, ak $|\sphericalangle XDY| = 60°$. XD, YD sú výšky rovnobežníka.



.... **73.** Určte veľkosť uhla γ v rovnobežníku $ABCD$, ak
a) $\beta = 106°17'$, b) $\alpha = 110°42'$, c) $\delta = 120°15'$.

.... **74.** Zostrojte kosoštvorec $EFGH$, ak je dané $|EF| = 4$ cm, $|\sphericalangle HEF| = 60°$.

.... **75.** Zostrojte kosodĺžnik $JKLM$, ak je dané $|JK| = 63$ mm, $|JL| = 85$ mm, $|KL| = 3$ cm.

.... **76.** Zostrojte kosoštvorec, ktorý má dĺžku strany 7 cm a výšku 4 cm.

.... **77.** Zostrojte rovnobežník $ABCD$, ak je dané $|AB| = 72$ mm, $|AC| = 5{,}8$ cm, $|\sphericalangle CAB| = 30°$.

78. Obvod obdĺžnika je 18 cm. Zostrojte štvorec, ktorý má taký istý obvod ako daný obdĺžnik.

.... 79. Koľko štvorcových metrov skla potrebovali v dielni na zasklenie 48 oblokov tvaru rovnostranného trojuholníka, ak dĺžka strany obloka je 0,6 m a výška 0,52 m?

.... 80. Vypočítajte obsah lichobežníka, ak je dané:
a) $a = 85$ mm, $c = 35$ mm, $v = 65$ mm
b) $a = 92$ cm, $c = 44$ cm, $v = 85$ cm

.... 81. Z daných prvkov zostrojte lichobežník (AB, CD sú základne):
a) $|AB| = 68$ mm, $|CD| = 32$ mm, $|\sphericalangle DAB| = \alpha = 75°$, $v = 52$ mm
b) $|AB| = 7{,}2$ cm, $|AD| = 5{,}5$ cm, $|CD| = 2{,}8$ cm, $|\sphericalangle DAB| = 75°$

.... 82. Traja kamaráti, Miško, Peter a Janko chodia do jednej triedy. Do triedy nikdy nechodia spolu, ale každý sám. Napíšte všetky možné poradia ich príchodu do triedy. Koľko je rôznych poradí príchodu?

.... 83. Koľkými rôznymi spôsobmi môžu členovia 10-členného tenisového krúžku zvoliť zo svojich radov vedúceho a kapitána?

Gottfried Wilhelm Leibniz

(1646 až 1716)

Nemecký matematik, fyzik a filozof, organizátor a prvý prezident Berlínskej akadémie vied (1700). Mnoho rokov pôsobil ako právnik a diplomat, zaoberal sa aj históriou, jazykovedou, teológiou, biológou a geológiou. Osobitne plodná bola jeho vedecká činnosť v matematike, predovšetkým v oblasti funkcií a radov. Položil tiež základy symbolickej logiky, ktorá je priamou predchodkyňou modernej matematickej logiky. Spolu s I. Newtonom sa zaslúžil o vznik a rozvoj diferenciálneho a integrálneho počtu. Zdokonalil tiež Pascalov počítací stroj.

10 ELEMENTÁRNE POZNATKY Z LOGIKY. MATEMATICKÁ VETA

V matematike sa zaoberáme rôznymi pojmami, ktoré si vieme predstaviť, napísať, načrtnúť alebo narysovať. Nazývame ich **základné matematické pojmy**, sú to napríklad: prirodzené číslo, zlomok, bod, priamka, rovina. Pomocou nich vytvárame (definujeme pomocou matematických definícií) ďalšie nové dôležité pojmy, napríklad: súčet, rozdiel, súčin a podiel prirodzených čísel alebo zlomkov, rôzne geometrické útvary – trojuholník, štvorec, obdĺžnik, uhol.

Matematické vety popisujú vlastnosti nového pojmu. Sú to vždy pravdivé tvrdenia, pretože každá matematická veta musí byť v príslušnej matematickej teórii dokázaná. Nedokázaná matematická veta sa nazýva **hypotéza**. Dôkazy matematických viet sú často veľmi zložité.

Pripomenieme si niektoré matematické vety, ktoré už poznáme a vieme používať a pokúsime sa sformulovať nové matematické vety. Tieto nové matematické vety si dokážeme neskôr, keď už naše matematické vedomosti budú bohatšie a hlbšie. Matematická veta sa obyčajne skladá z dvoch častí.

Matematická veta

PREDPOKLAD	ZÁVER
Ak má prirodzené číslo na mieste jednotiek číslicu 0,	**tak** je deliteľné číslom 10.
Ak má práve jeden vnútorný uhol trojuholníka veľkosť 90°,	**tak** je tento trojuholník pravouhlý.

ÚLOHA 1

Zopakujte si pravidlá o deliteľnosti dvoma a tromi a sformulujte ich ako matematické vety. Určte v nich predpoklad a záver.

Slová „ak“ a „tak“ sa v matematickej vete môžu zameniť za slová rovnakého významu alebo sa môžu aj vynechať. Napríklad:

Ak zameníme poradie sčítancov,	súčet sa nezmení.
Ak je pred zátvorkou znamienko „mínus“,	potom všetky znamienka v zátvorke sa zmenia na opačné.

PRÍKLAD 1

Peter si napísal dva jednoduché príklady na sčítanie takto:

$$\begin{array}{ccccc} 4 & + & 6 & = & 10 \\ 2\,.\,2 & & 2\,.\,3 & & 2\,.\,5 \\ & & & & 2\,.\,(2+3) \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccc} 9 & + & 15 & + & 18 & = & 42 \\ 3\,.\,3 & & 3\,.\,5 & & 3\,.\,6 & & 3\,.\,14 \\ & & & & & & 3\,.\,(3+5+6) \end{array}$$

Akú matematickú vetu mohol vysloviť?

RIEŠENIE

Číslo 4 aj číslo 6 je deliteľné dvoma a dvoma je deliteľný aj ich súčet
$4 + 6 = 10$
Čísla 9, 15 aj 18 sú deliteľné tromi a tromi je deliteľný aj ich súčet
$9 + 15 + 18 = 42$

Peter sformuloval matematickú vetu:

Ak je každý sčítanec deliteľný daným číslom, tak je týmto číslom deliteľný aj ich súčet.

Táto matematická veta sa nazýva **pravidlo o deliteľnosti súčtu**.

ÚLOHA 2

Čo platí o deliteľnosti súčtu dvoch čísel, ak jeden zo sčítancov nie je deliteľný daným číslom? Vysvetlite na nasledujúcich príkladoch:

$$\begin{array}{ccccc} 12 & + & 16 & = & 28 \\ 3\,.\,4 & & 3\,.\,5+1 & & 3\,.\,9+1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} 17 & + & 20 & = & 37 \\ 5\,.\,3+2 & & 5\,.\,4 & = & 5\,.\,6+2 \end{array}$$

ÚLOHA 3

Pravidlo o deliteľnosti súčtu vysvetlite na príkladoch:

a) $20 + 40 = 60$ (skúmajte deliteľnosť číslom 10)
b) $21 + 42 = 63$ (skúmajte deliteľnosť číslom 7)
c) $16 + 22 = 38$ (skúmajte deliteľnosť číslom 4)
d) $10 + 44 = 54$ (skúmajte deliteľnosť číslom 9)

R

ÚLOHA 4

Platí nasledujúce pravidlo o deliteľnosti rozdielu?
Ak sú dve prirodzené čísla deliteľné daným číslom, potom je týmto číslom deliteľný aj ich rozdiel. Overte si toto pravidlo na nasledujúcich príkladoch:

a) $20 - 15 = 5$ (skúmajte deliteľnosť číslom 5)
b) $56 - 35 = 21$ (skúmajte deliteľnosť číslom 7)
c) $40 - 11 = 29$ (skúmajte deliteľnosť číslom 4)

R

PRÍKLAD 2

Jana má bez vydelenia určiť, či je číslo 165 deliteľné postupne číslami 7, 11 a 17.

R

RIEŠENIE

Jana využíva pravidlá o deliteľnosti súčtu a rozdielu dvoch čísel:

deliteľnosť číslom 7

$$165 = \underbrace{140}_{7\,.\,20} + \underbrace{25}_{7\,.\,3\,+\,4}$$

165 nie je deliteľné číslom 7

deliteľnosť číslom 11

$$165 = \underbrace{110}_{11\,.\,10} + \underbrace{55}_{11\,.\,5}$$

165 je deliteľné číslom 11

deliteľnosť číslom 17

$$165 = \underbrace{170}_{17\,.\,10} - 5$$

165 nie je deliteľné číslom 17

R

ÚLOHA 5

Vhodným rozkladom na súčet alebo rozdiel dvoch čísel odôvodnite, že platí:

a) 132 je deliteľné 12
b) 108 nie je deliteľné 12
c) 153 je deliteľné 17
d) 1 505 nie je deliteľné 15

CVIČENIA

1. Nájdite predpoklad a záver v nasledujúcich matematických vetách a napíšte k nim dva príklady.

a) Ak pre dve prirodzené čísla a, b platí nerovnosť $a < b$, tak pre opačné záporné čísla $-a$, $-b$ platí obrátená nerovnosť $-a > -b$.

b) Ak a, b, c sú strany trojuholníka, potom obvod tohto trojuholníka je $o = a + b + c$.

2. Použitím známeho pravidla o deliteľnosti tromi a tiež delením overte, že platí aj nasledujúce pravidlo o deliteľnosti tromi:
Každé prirodzené číslo dáva po delení tromi taký istý zvyšok, aký zvyšok dáva po delení tromi jeho ciferný súčet.
Overte to na číslach: 21, 31, 45, 102, 1 004.

3. Cvičenie 2 vyriešte ešte raz pre deliteľnosť číslom 9.

4. Na nasledujúcich príkladoch vysvetlite pravidlá deliteľnosti súčtu a rozdielu:

a) $70 + 140 = 210$ (skúmajte deliteľnosť číslom 10)
b) $48 + 78 = 126$ (skúmajte deliteľnosť číslom 6)
c) $100 - 14 = 86$ (skúmajte deliteľnosť číslom 7)
d) $170 - 34 = 136$ (skúmajte deliteľnosť číslom 17)

5. Vhodným rozkladom na súčet alebo rozdiel odôvodnite, že platí:

a) 176 je deliteľné 16
b) 741 je deliteľné 19
c) 500 nie je deliteľné 45
d) 833 je deliteľné 17
e) 2 346 je deliteľné 23
f) 4 376 nie je deliteľné 11

6. Rozhodnite, či platí:

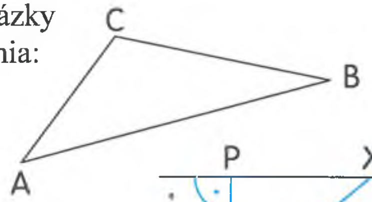
a) Ak nie je daným číslom deliteľný práve jeden z dvoch sčítancov, tak týmto číslom nie je deliteľný ani ich súčet.

b) Ak nie je daným číslom deliteľný žiadny z dvoch sčítancov, potom týmto číslom nie je deliteľný ani ich súčet.

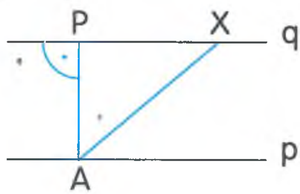
Ak niektorá z týchto viet neplatí, vysvetlite to na príkladoch.

7. Pozorne si pozrite nasledujúce obrázky a pokúste sa odôvodniť tieto tvrdenia:

a) Lomená čiara je vždy dlhšia ako úsečka spájajúca prvý a koncový bod lomenej čiary.



b) Vzdialenosť rovnobežiek sa vždy meria na úsečke kolmej na dané rovnobežky.



11 RIEŠENIE SLOVNÝCH ÚLOH S VYUŽITÍM NAJMENŠIEHO SPOLOČNÉHO NÁSOBKU A NAJVÄČŠIEHO SPOLOČNÉHO DELITEĽA

R

PRÍKLAD 1

Nájdite najmenší spoločný násobok a najväčšieho spoločného deliteľa čísel 12 a 40.

R

RIEŠENIE

Najmenší spoločný násobok:

$$n(12, 40) = ?$$
$$12 = 2 \,.\, 2 \,.\, 3$$
$$40 = 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 5$$
$$n(12, 40) = \underbrace{2 \,.\, 2 \,.\, 3}_{12} \,.\, \underbrace{2 \,.\, 5}_{10}$$
$$n(12, 40) = 120$$

alebo $n(12, 40) = \underbrace{2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 5}_{40} \,.\, 3$

$$n(12, 40) = 120$$

Najväčší spoločný deliteľ:

$$D(12, 40) = ?$$
$$12 = 2 \,.\, 2 \,.\, 3$$
$$40 = 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 5$$
$$D(12, 40) = 2 \,.\, 2$$
$$D(12, 40) = 4$$

Odpoveď: Najmenší spoločný násobok čísel 12 a 40 je číslo 120 a najväčší spoločný deliteľ je číslo 4.

R

PRÍKLAD 2

Na medzinárodnú konferenciu o ochrane životného prostredia sa prihlásilo menej ako 400 účastníkov. Organizátori ich majú posadiť za okrúhle stoly po piatich, šiestich, ôsmich alebo deviatich, ale štyria budú vždy zvyšovať.

Koľko bolo účastníkov?

Koľko účastníkov treba posadiť za jeden stôl (viac ako 2, menej ako 10), aby všetci sedeli a pri každom stole ich bol rovnaký počet?

RIEŠENIE

Hľadáme najmenší spoločný násobok čísel 5, 6, 8, 9 a k nemu pridáme 4, teda:

$$n(5, 6, 8, 9) = 360$$
$$360 + 4 = 364$$

Skúška:
$364 : 5 = 72$ (4 zv.)
$364 : 6 = 60$ (4 zv.)
$364 : 8 = 45$ (4 zv.)
$364 : 9 = 40$ (4 zv.)
$364 : 4 = 91$

Odpoveď: Na konferencii bolo 364 účastníkov. Pri jednom stole budú sedieť štyria účastníci.

PRÍKLAD 3

Sponzor daroval žiakom 7. A triedy ku Dňu detí 84 čokolád, 112 pomarančov a 140 žuvačiek. Každý žiak dostal rovnaký balíček. Koľko žiakov bolo v triede? Čo obsahoval jeden balíček?

RIEŠENIE

Musíme nájsť najväčšieho spoločného deliteľa čísel 84, 112, 140.

$$D(84, 112, 140) = 28$$

$$84 : 28 = 3 \qquad 112 : 28 = 4 \qquad 140 : 28 = 5$$

Odpoveď: V triede je 28 žiakov. Jeden balíček obsahoval 3 čokolády, 4 pomaranče a 5 žuvačiek.

ÚLOHA 1

Utvorte slovnú úlohu, ktorej riešením bude: a) $n(15, 25) = 75$
b) $D(20,32) = 4$

CVIČENIA

1. Zistite, či platí tvrdenie: súčin dvoch čísel sa rovná súčinu najmenšieho spoločného násobku a najväčšieho spoločného deliteľa.

.... **2.** Babička má skriňu, ktorej dĺžka je 2,10 m. Sú v nej tri rady zásuviek, ktoré majú rovnakú dĺžku. V prvom rade sú zásuvky široké 10 cm, R

v druhom 40 cm a v treťom rade 50 cm. Je možné, aby takáto skriňa existovala? Ivan hovorí, že oni majú doma skriňu dlhú 1,8 m a zásuvky sú rovnako široké ako u babičky. Je to možné?

.... **3.** Koľko korún ušetrila Katka a koľko Zuzka, ak vieme, že Katka ušetrila viac a najväčší spoločný deliteľ oboch súm je 15 a najmenší spoločný násobok je 210? Ani jedno číslo nie je násobkom druhého.

.... **4.** Dve stupnice sú priložené tak, že ich začiatočné deliace čiary splývajú. Ktoré ďalšie deliace čiary oboch stupníc sa kryjú, keď jedna stupnica má diely dlhé 8 mm a druhá 10 mm a dĺžka oboch stupníc je 240 mm?

.... **5.** Menšie škatuľky s rozmermi 3 cm, 12 cm a 28 cm sa majú uložiť do väčšej škatule tvaru kocky. Aké budú najmenšie možné rozmery veľkej škatule a koľko škatuliek sa do nej vmestí?

.... **6.** Štyri lode vyplávali v ten istý deň z prístavu. Po koľkých týždňoch sa opäť stretnú v prístave, ak plavba jednej lode trvá dva týždne, druhej tri týždne, tretej štyri týždne a štvrtej päť týždňov?

.... **7.** Koľko žiakov je v triede, ak vieme, že ich je menej ako 35 a ak ich postavíme do dvojradu, trojradu, päťradu alebo šesťradu, vždy vystane jeden žiak?

.... **8.** Dve ozubené kolesá zapadajú do seba. Veľké má 90 zubov, menšie 36 zubov. Zub menšieho kolesa je v medzere medzi zubami väčšieho kolesa. Zub aj medzera je označená bielou farbou. Koľkokrát sa otočia kolesá, kým zafarbený zub zapadne do zafarbenej medzery?

.... **9.** Koľko farebných látkových obdĺžnikov s rozmermi 30 cm a 18 cm potrebuje mamička na ušitie prikrývky tvaru najmenšieho štvorca, ktorý je možné ušiť z obdĺžnikov?

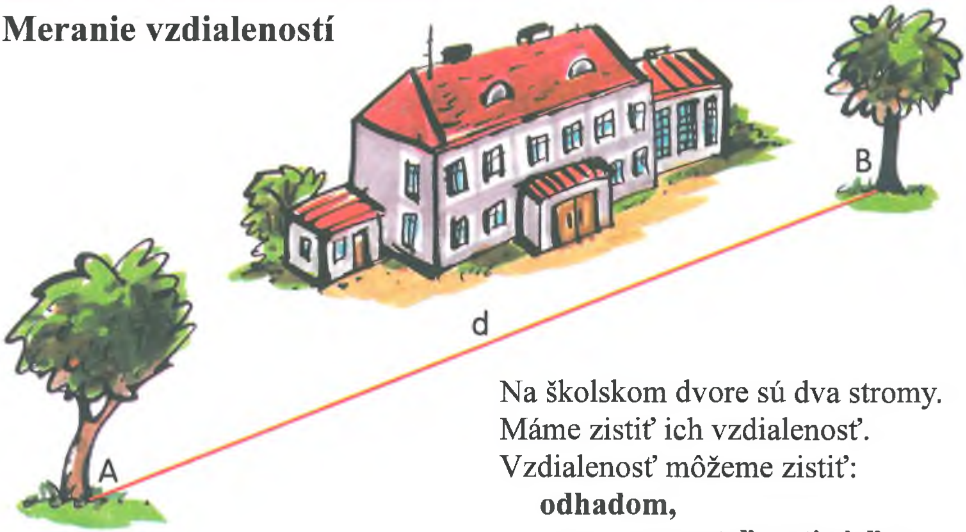
.... **10.** V kvetinárstve majú tri druhy ruží: 120 červených, 96 bielych a 48 ružových. Koľko rovnakých kytíc môže najviac kvetinárka urobiť zo všetkých ruží? Akým spôsobom bude aranžovaná každá kytica?

.... **11.** V elektrárni s nepretržitou prevádzkou je potrebné prístroje kontrolovať tak, že každé 2 hodiny musí technik skontrolovať prvý prístroj, každé 3 hodiny druhý prístroj, každé 4 hodiny tretí prístroj, každých 5 hodín štvrtý prístroj a každých 6 hodín piaty prístroj. Kontrolu všetkých prístrojov začal ráno o 6.00 h. Ktoré ďalšie hodiny v priebehu 3 dní bude technik kontrolovať všetky prístroje súčasne? Existuje taká hodina v priebehu 2 dní, že nemusí kontrolovať ani jeden z prístrojov?

12 TOPOGRAFICKÉ PRÁCE V TERÉNE

R Doteraz sme všetky úlohy riešili v zošite alebo na tabuli. Ukážeme si riešenie niektorých úloh aj na školskom dvore alebo priamo v teréne. Činnostiam, pri ktorých v prírode vymeriavame dĺžky, vytyčujeme úsečky, uhly alebo obrazce, hovoríme **topografické práce v teréne**.

12.1 Meranie vzdialeností



Na školskom dvore sú dva stromy. Máme zistiť ich vzdialenosť. Vzdialenosť môžeme zistiť:

odhadom,
pomocou zreteľnosti cieľa,
meraním.

Ak chceme zistiť vzdialenosť **odhadom,** musíme poznať dĺžky a veľkosti niektorých predmetov a tieto využiť na porovnávanie. Uveďme niektoré dĺžky (veľkosti), ktoré pri zdokonaľovaní správneho odhadu môžeme používať:

1. Dĺžka osobného auta je približne 4,5 m.
2. Výška stĺpov elektrického vedenia je asi 7 m.
3. Výška podlažia v panelovom dome je asi 3 m.
4. Volejbalové ihrisko má rozmery – šírku 9 m, dĺžku 18 m. Stĺpy na upevnenie siete majú zvyčajne výšku 2,5 m nad zemou.
5. Futbalové ihrisko má väčšinou dĺžku 100 m až 110 m a šírku 50 m až 60 m. Vzdialenosť bránkových žrdí je 7,32 m.
6. Priemerná výška muža je 1,75 m.

Pri nácviku odhadu vzdialeností v teréne nanášame očami známu vzdialenosť.

ÚLOHA 1

Odhadom zistite rozmery budovy vašej školy.

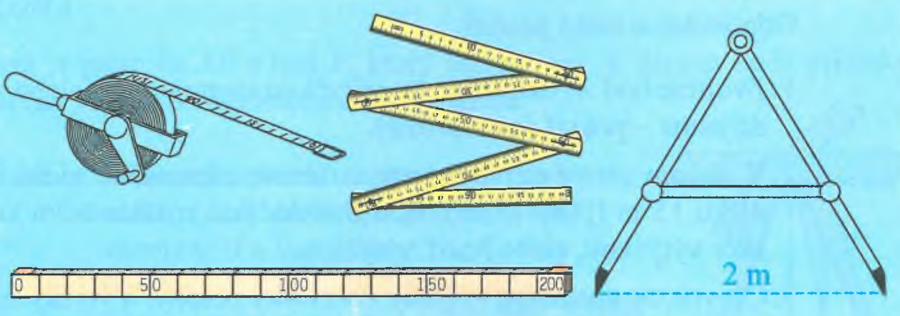
ÚLOHA 2

Odhadom zistite rozmery dvora vašej školy.

Pri odhadovaní vzdialenosti bližších a vzdialenejších cieľov si treba uvedomiť, že daná vzdialenosť sa do diaľky zdanlivo skracuje.

Ak pozorujeme v teréne **zreteľnosť** jednotlivých cieľov, zistíme napr., že oči človeka rozoznáme na vzdialenosť 100 m. Zo vzdialenosti 100 m rozoznáme jednotlivé tehly na budove, detaily osobného auta. To tiež môžeme uplatniť pri zisťovaní vzdialeností.
Ak chceme v prírode zistiť **meraním** určitú vzdialenosť dvoch objektov (v geometrii vzdialenosť dvoch bodov), môžeme to urobiť

a) **krokom,**
b) **pevným tyčovým meradlom** (skladacím meradlom),
c) **meracím pásmom,**
d) **poľnou siahovkou.**



Dĺžka kroku 12-ročného chlapca je asi 55 cm.
Dĺžka kroku dospelého človeka je asi 75 cm.

ÚLOHA 3

Rozmery školskej budovy zistite najprv krokom a potom meracím pásmom.
Výsledky zapíšte a porovnajte.

ÚLOHA 4

Poľnú siahovku často používajú na poľnohospodárskom družstve. Pri návšteve poľnohospodárskeho družstva požiadajte agronóma o zapožičanie a odmerajte ňou určitú dĺžku, napr. rozmery družstevného dvora.

POZNÁMKA

Ak máme za úlohu odmerať vzdialenosť dvoch predmetov na nerovnom teréne, postupujeme tak, že vzdialenosť meriame meracím pásmom po častiach, snažíme sa merať vždy vo vodorovnej polohe.

12.2 Vytyčovanie úsečiek v teréne

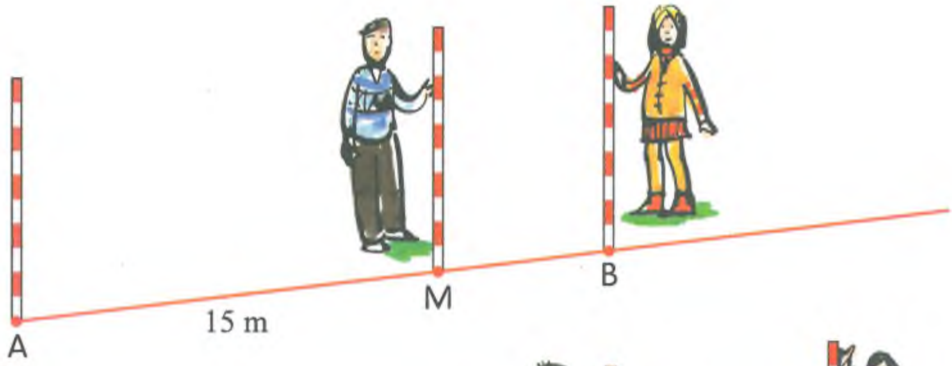
ÚLOHA

Z daného bodu A vytýčte v danom smere úsečku AB dĺžky 15 m. Na úsečke AB vytýčte v danom smere ďalšie dva rôzne body M, N ($A \neq N \neq B$).

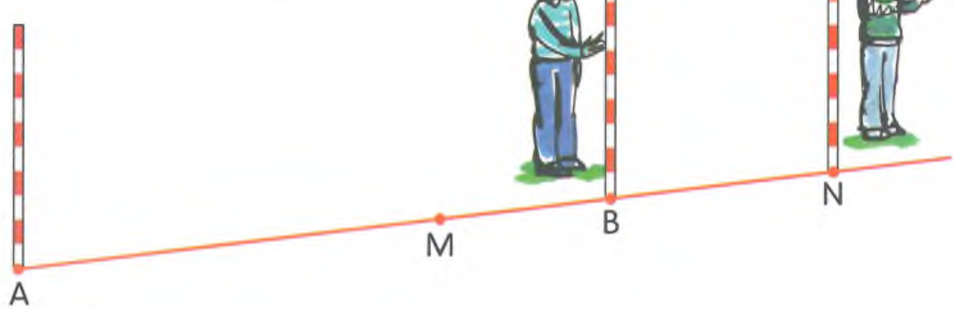
Pomôcky: 2 až 4 výtyčky
2 až 3 kolíky
20 m špagátu
olovnica
meracie pásmo

Odporúčame tento postup:

1. Zvolíme bod A; označíme ho výtyčkou so stojanom (alebo zapichneme do zeme – pokiaľ je to možné).
2. V danom smere na vodorovnom teréne odmeriame meracím pásmom dĺžku 15 m ($|AB|$=15 m). Bod B označíme značkovacím kolíkom, neskôr výtyčkou, alebo hneď výtyčkou.
3. Olovnicou upravíme výtyčky do zvislej polohy. Výtyčky majú byť pri vytyčovaní vždy vo zvislej polohe. Tým je splnená prvá časť úlohy.
4. Na vytýčenej úsečke AB zabodneme odhadom ďalšiu výtyčku – tým vyznačíme bod M. Ďalšou činnosťou premiestnime výtyčku tak, aby hrot skutočne bol na úsečke AB. To urobíme takto: žiak (merač) sa postaví asi 3 až 5 krokov za niektorú krajnú výtyčku tak, aby sa pri pohľade jedným okom na výtyčky, obidve výtyčky kryli v bodoch A, B. Iný žiak (figurant) posúva výtyčku v bode M podľa pokynov merača dovtedy, až kým sa všetky tri výtyčky A, M, B navzájom nekryjú.



5. Podobne to opakujeme aj s bodom N.



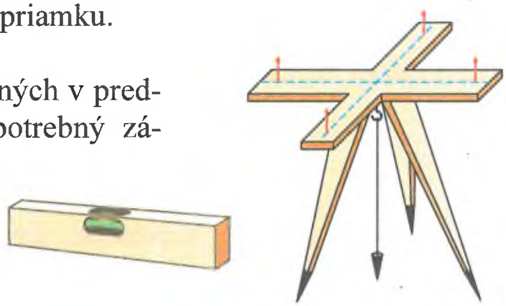
12.3 Vytýčenie pravého uhla

R

ÚLOHA

Daná je priamka AB a bod P, ktorý leží na nej. V danom bode priamky (úsečky) vytýčte kolmicu na danú priamku.

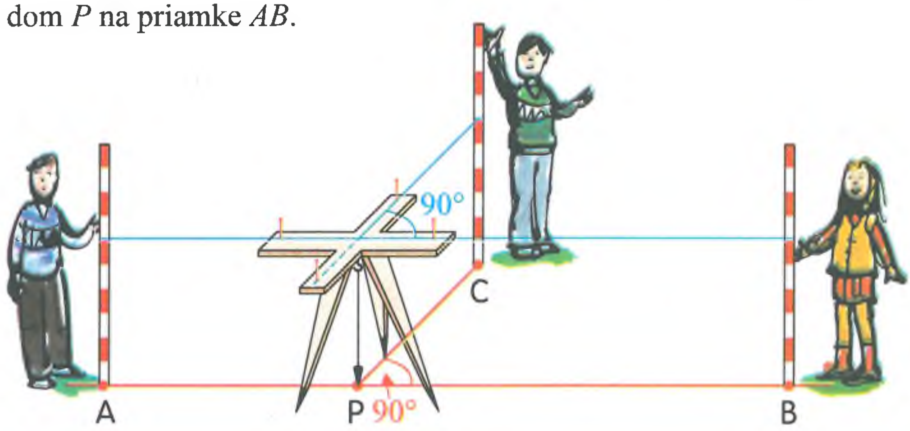
Pomôcky: Okrem pomôcok uvedených v predchádzajúcej úlohe je potrebný zámerný kríž a vodováha.



Odporúčame tento postup:

1. V teréne vytýčime dvoma výtyčkami priamku AB (úsečku AB).
2. Na priamke AB zvolíme bod P, ktorým chceme viesť kolmicu na priamku AB. Nad tento bod postavíme zámerný kríž a spresníme jeho polohu tak, aby sa zámerná priamka na kríži stotožňovala s priamkou AB. Vodováhou upresníme polohu zámerného kríža. Jeho ramená musia byť vo vodorovnej polohe.

3. Zámerná priamka druhého ramena zámerného kríža označuje kolmý smer, v ktorom výtyčkou určíme hľadanú kolmicu prechádzajúcu bodom P na priamke AB.



CVIČENIA

1. Odhadom zistite vzdialenosť dvoch elektrických stĺpov. Túto vzdialenosť potom odkrokujte. Výsledky porovnajte.

.... **2.** Na prechádzke v okolí vašej školy si vyhliadnite dva stromy, najskôr odhadnite a potom odmerajte ich vzdialenosť.

.... **3.** Koľko stôp má dvojmeter? Akú dĺžku v metroch má vaša stopa?

.... **4.** Vytýčte úsečku vopred zvolenej dĺžky a vo vopred zvolenom smere.

.... **5.** Zopakujte si vytýčenie pravého uhla.

Najmúdrejšie je číslo. *Pytagoras*

13 VOĽNÉ ROVNOBEŽNÉ PREMIETANIE

R

Naučili sme sa zobrazovať kváder a kocku vo voľnom rovnobežnom premietaní. Zopakujme si už známe vlastnosti voľného rovnobežného premietania a doplňme ich o nové:

1. Ak bod A leží na priamke MN, leží obraz bodu A na obraze priamky MN.
2. Rovinné obrazce, ktoré ležia v nákresni alebo v priečelných rovinách (t. j. rovinách rovnobežných s nákresňou), sa zobrazujú v skutočnom tvare a v skutočnej veľkosti (alebo zmenšené alebo zväčšené podľa zvolenej mierky).
3. Rovnobežné priamky sa zobrazujú ako rovnobežky.
4. Úsečky kolmé na nákresňu zobrazujeme obyčajne pod uhlom 45° a zmenšujeme na polovicu.
5. Rovnobežné a zhodné úsečky sa zobrazujú zase ako rovnobežné a zhodné úsečky.
6. Ak S je stred úsečky AB, obraz bodu S je stredom obrazu úsečky AB.

V ďalšom sa naučíme zobrazovať hranoly a ihlany. Preto sa najprv naučíme zostrojovať názorné obrazy štvorca, rovnostranného trojuholníka a pravidelného šesťuholníka.

Budeme rozlišovať dva prípady:

a) ležia tieto obrazce v priečelných rovinách,

b) neležia tieto obrazce v priečelných rovinách.

Ak ležia v priečelných rovinách, tak sa zobrazia v skutočnom tvare (vlastnosť 2).

Naučíme sa teda zostrojovať ich obrazy, ak ležia vo vodorovných rovinách.

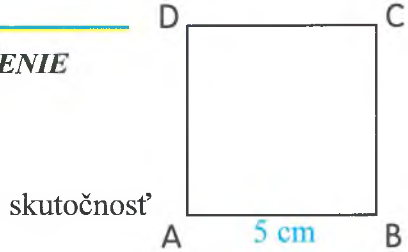
PRÍKLAD 1

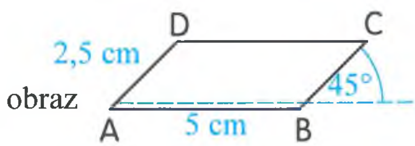
R

Zostrojte obraz štvorca ležiaceho vo vodorovnej rovine (a = 5 cm).

RIEŠENIE

R

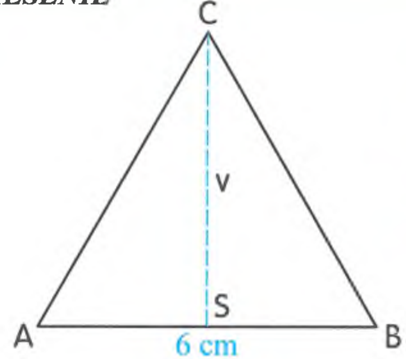




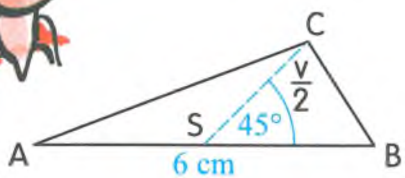
PRÍKLAD 2

Zostrojte obraz rovnostranného trojuholníka ležiaceho vo vodorovnej rovine ($a = 6$ cm).

RIEŠENIE



skutočnosť

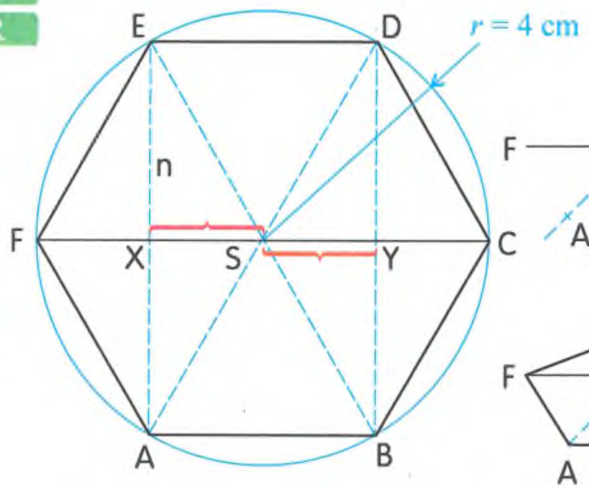


obraz

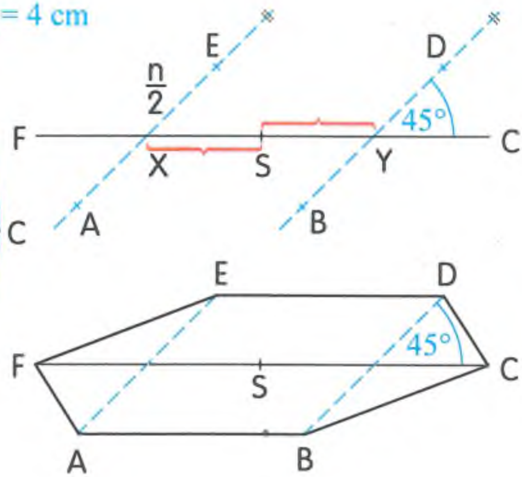
PRÍKLAD 3

Sledujte jednotlivé kroky konštrukcie obrazu pravidelného šesťuholníka vo voľnom rovnobežnom premietaní, ktorý leží vo vodorovnej rovine ($r = 4$ cm).

RIEŠENIE



skutočnosť



obraz

ÚLOHA 1

Všimnite si obraz pravidelného šesťuholníka.

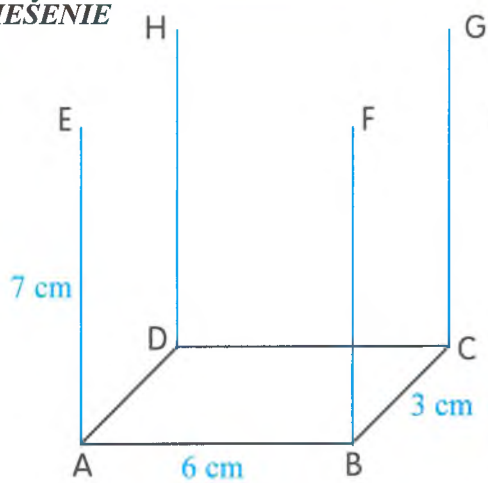
a) Vypíšte, ktoré úsečky v obraze sú rovnobežné.

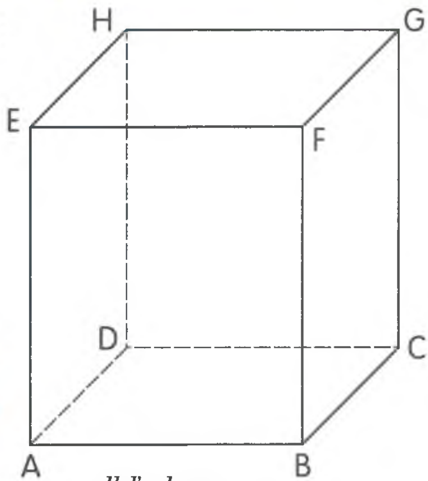
b) Napíšte dvojice bodov, ktoré si odpovedajú v stredovej súmernosti so stredom v bode *S*.

PRÍKLAD 4

Zostrojte obraz pravidelného štvorbokého hranola, ktorého jedna stena leží v priečelnej polohe.
(Riešte, keď podstavná hrana má dĺžku 6 cm a výška hranola je 7 cm.)

RIEŠENIE





nadhľad sprava

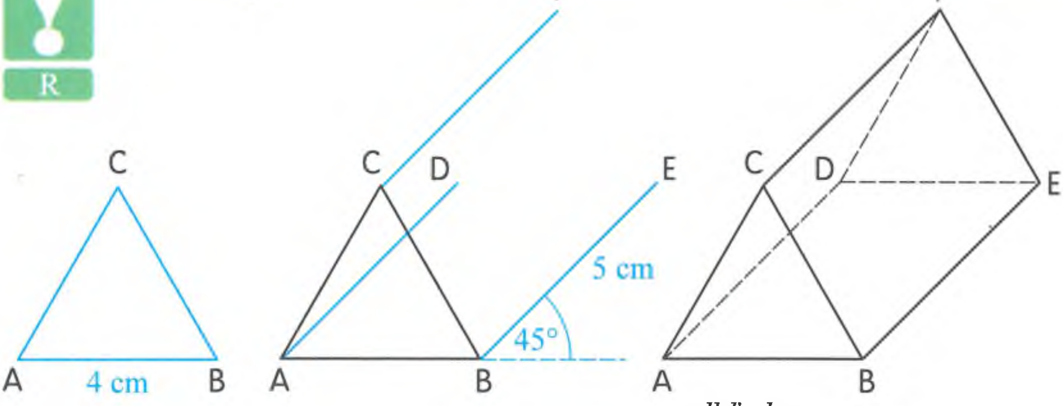
Postup:

1. Zostrojíme obraz podstavy (obraz štvorca – príklad 1), $|AB| = 6$ cm, $|BC| = 3$ cm.
2. Zostrojíme obrazy bočných hrán (v skutočnej veľkosti), $|AE| = 7$ cm.
3. Zostrojíme obraz hornej podstavy.
4. Vytiahneme viditeľné hrany plnou čiarou, neviditeľné hrany čiarkovane.

PRÍKLAD 5

Vo voľnom rovnobežnom premietaní zobrazte pravidelný trojboký hranol, ktorý má podstavnú hranu $a = 4$ cm a výšku 10 cm. Hranol umiestnite tak, aby podstava bola v priečelnej rovine a jedna stena vo vodorovnej rovine.

RIEŠENIE



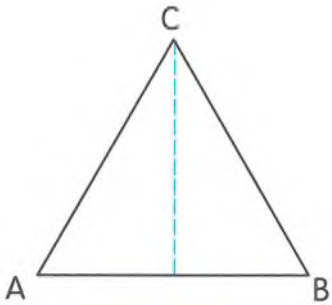
nadhľad sprava

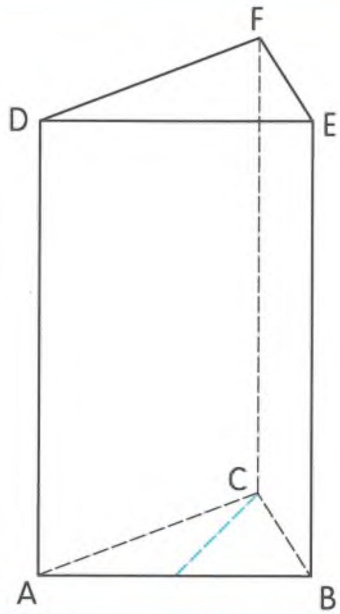
Postup:

1. Zostrojíme obraz podstavy – je to rovnostranný trojuholník ABC, leží v priečelnej rovine.
2. Zostrojíme obrazy bočných hrán ($|BE| = 5$ cm, polovica z výšky).
3. Zostrojíme obraz hornej podstavy.

ÚLOHA 2

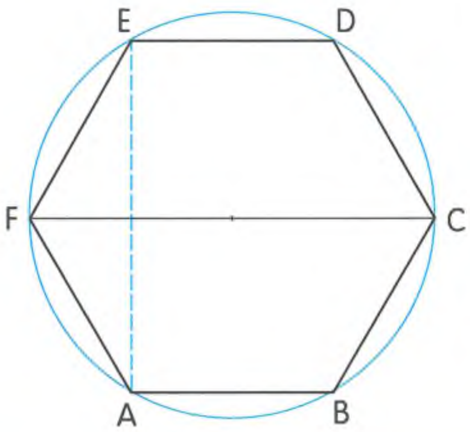
Na obrázku vidíte obraz pravidelného trojbokého hranola, ktorého jedna stena je v priečelnej polohe a podstava hranola je vo vodorovnej polohe. Opíšte konštrukciu a obraz hranola zostrojte v zošite. Ide o nadhľad sprava.

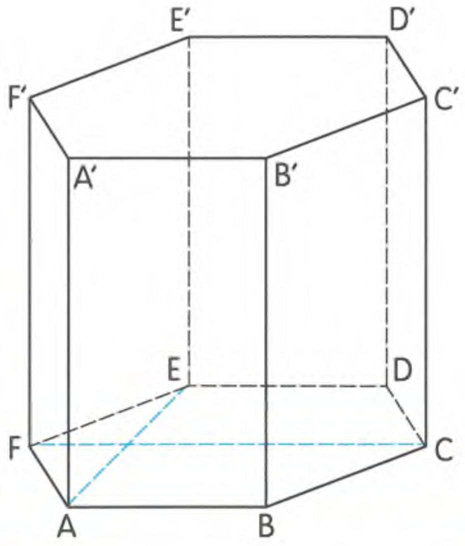




ÚLOHA 3

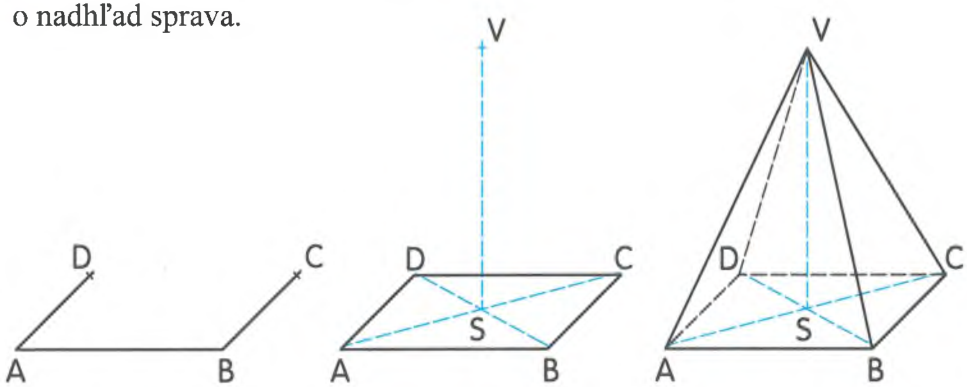
Na obrázku vidíte obraz pravidelného šesťbokého hranola. Popíšte postup konštrukcie a v zošite narysujte obraz hranola, ak dĺžka podstavnej hrany je 4 cm a výška hranola je 7 cm. Ide o nadhľad sprava.





ÚLOHA 4

Na obrázku pozorujte konštrukciu obrazu pravidelného štvorbokého ihlana vo voľnom rovnobežnom premietaní. Úsečka *VS* je výška ihlana. Ide o nadhľad sprava.



Odôvodnite:

a) ako sa zostrojí bod *S* a prečo?

b) prečo sa výška ihlana zobrazuje v skutočnej veľkosti?

CVIČENIA

1. Na obrázku je obdĺžnik. Zostrojte jeho obraz vo voľnom rovnobežnom premietaní, ak:

a) leží v priečelnej rovine,

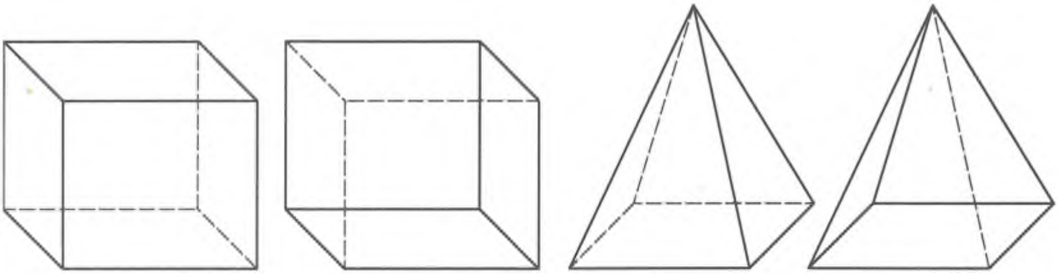
b) leží vo vodorovnej rovine.

R **2.** Vo voľnom rovnobežnom premietaní zostrojte obraz pravidelného šesťuholníka *ABCDEF* ak už máte dané obrazy *A*, *B*, *S* jeho vrcholov *A*, *B* a jeho stredu *S*.

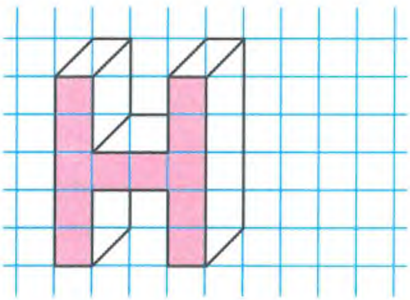
Návod: Nakreslite si pravidelný šesťuholník (skutočnosť) a využite rovnobežnosť úsečiek a stredovú súmernosť so stredom v bode *S*.

.... **3.** Vo voľnom rovnobežnom premietaní zobrazte pravidelný šesťboký hranol:
a) s podstavou v priečelnej rovine,
b) s podstavou vo vodorovnej rovine.
Dĺžka podstavnej hrany je 3,5 cm, výška hranola je 7 cm.

.... **4.** Všimnite si rôzne – dvojaké vyznačenie viditeľnosti hrán v obraze kvádra a ihlana. Vysvetlite prečo to tak môže byť a rozhodnite o aký obraz ide.

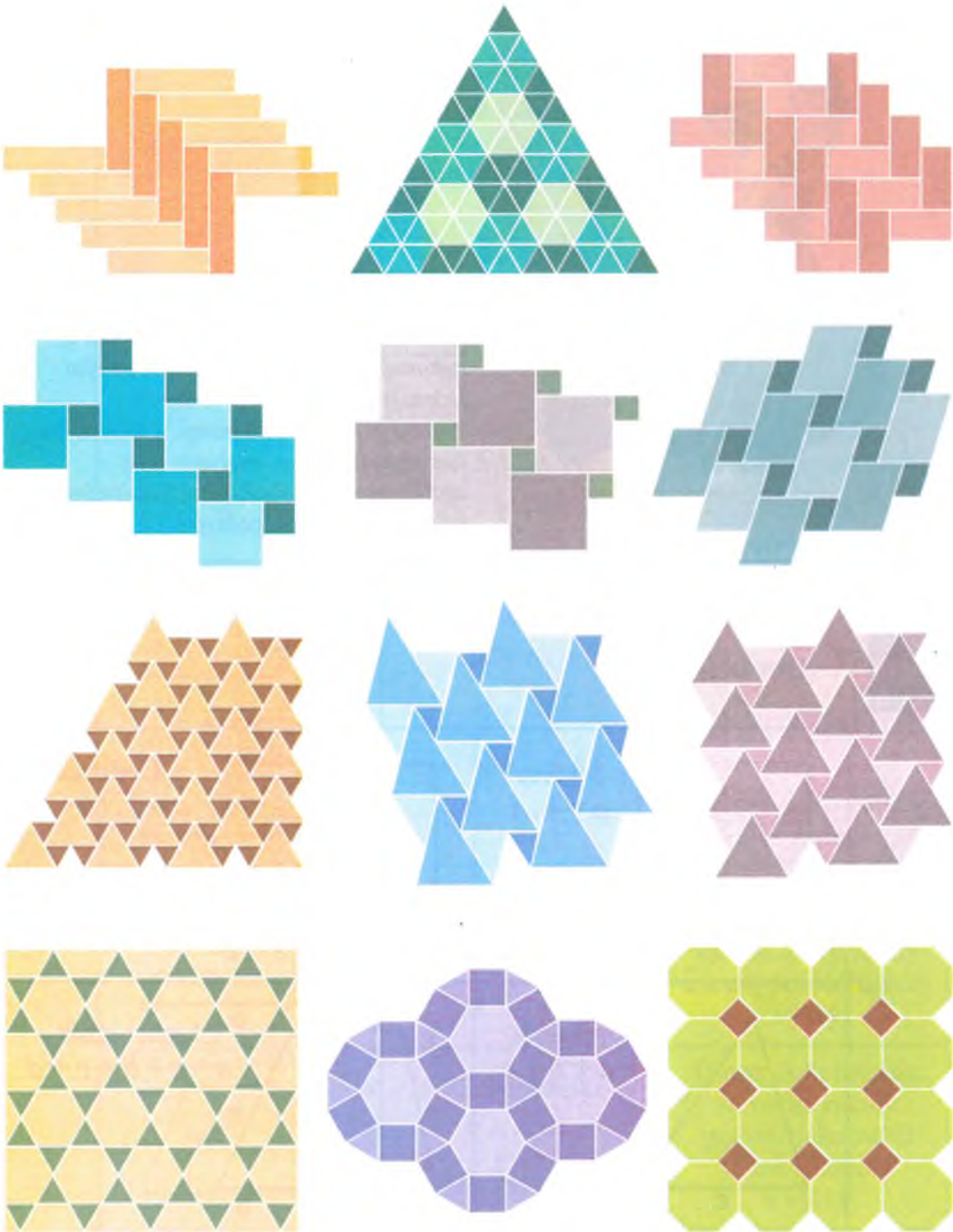


.... **5.** V štvorcovej sieti zostrojte obrazy písmen **L**, **N**, **E**, **Z**, **X** vo voľnom rovnobežnom premietaní podľa vzoru písmena **H**.



.... **6.** V nadhľade zľava zostrojte obraz pravidelného šesťbokého ihlana *ABCDEFV*:
a) s podstavou v priečelnej rovine,
b) s podstavou vo vodorovnej rovine.
Dĺžka podstavnej hrany je 3,5 cm a výška ihlana je 8 cm.

Ukážky použitia geometrických útvarov pri riešení dlažieb

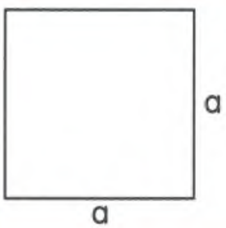


Camille Jordan
(čítaj Žordan)
(1838 až 1922)

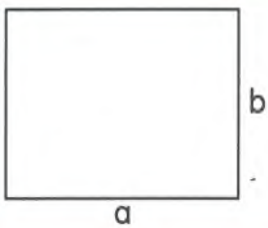
Francúzsky matematik.
Prvý napísal systematický kurz teórie grúp, zaviedol pojem faktogrupy a skúmal aj nekonečné grupy. V geometrii rozvíjal teóriu n-rozmerných priestorov.
Známa je jeho teória miery. Zaoberal sa tiež matematickou analýzou a jej aplikáciami. Napísal jednu z najznámejších učebníc analýzy 2. polovice 19. storočia.

Prehľad vzorcov

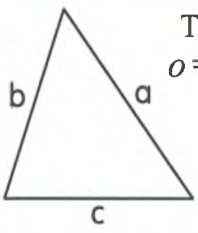
Obvod (o)



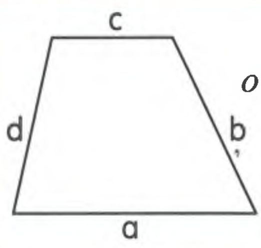
Štvorec
$o=4\,.\,a$



Obdĺžnik
$o=2\,.\,(a+b)$

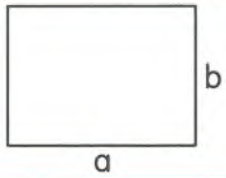


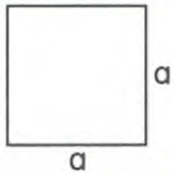
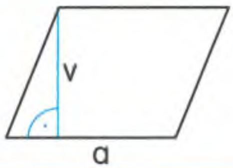
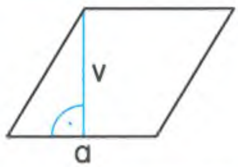
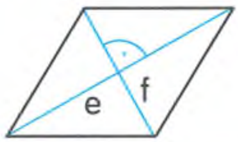
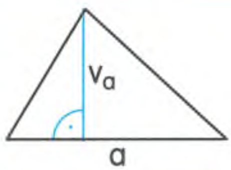
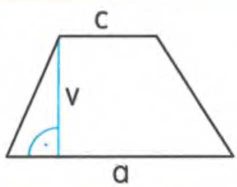
Trojuholník
$o=a+b+c$



Lichobežník
$o=a+b+c+d$

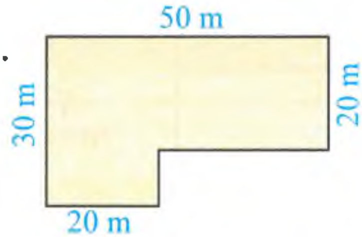
Obsah (S)

<table>
<tr>
<td></td>
<td>Obdĺžnik
$S=a\,.\,b$</td>
<td rowspan="4">Obsah každého
rovnobežníka
sa rovná súčinu
dĺžky strany
a k nej prislúchajúcej
výšky

$S=a\,.\,v$</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>Štvorec
$S=a\,.\,a$</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>Kosodĺžnik
$S=a\,.\,v$</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>Kosoštvorec
$S=a\,.\,v$
$S=\frac{e\,.\,f}{2}$
$S=\frac{1}{2}e.f$</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>Trojuholník
$S=\frac{a\,.\,v_a}{2}$
$S=\frac{1}{2}a\,.\,v_a$</td>
<td>Obsah trojuholníka
sa rovná polovici
súčinu dĺžky strany
a k nej prislúchajúcej
výšky</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>Lichobežník
$S=\frac{a+c}{2}v$
$S=\frac{1}{2}(a+c).v$</td>
<td>Obsah lichobežníka
sa rovná súčinu
polovičného súčtu
dĺžok základní
a výšky</td>
</tr>
</table>

ROZUM DO HRSTI

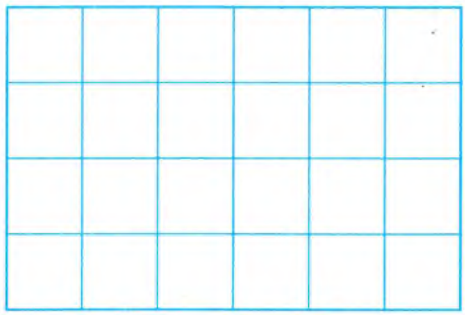
V predchádzajúcej časti učebnice sú uvedené úlohy menej i viac obtiažne. Sú to úlohy, ktoré slúžia na nácvik učiva a pomáhajú rozvíjať myslenie. V tejto časti predkladáme úlohy, ktoré bezprostredne nenadväzujú na učivo, o to však viac pomáhajú rozvoju myslenia a priestorovej predstavivosti. Opäť ich bude 13. Skúste ich riešiť, každý úspech v riešení vás iste poteší a vzbudí záujem o ďalšie úlohy. Všetky sú zo súťaží matematickej olympiády, mnohí žiaci boli v nich úspešní.

1. 

Otec zanechal trom synom záhradu, ktorej tvar je znázornený na obrázku, s podmienkou, že si ju rozdelia na tri časti tak, aby mali rovnaký obsah, rovnaký obvod aj tvar.

2. Nad uhlopriečkou AC daného obdĺžnika $ABCD$ zostrojte obdĺžnik $ACKL$ tak, aby obidva obdĺžniky mali rovnaký obsah.

3. Obdĺžnik s rozmermi $a = 6$ cm, $b = 4$ cm rozrežte na 4 zhodné časti tak, aby ich rozmery v cm boli vyjadrené prirodzenými číslami. Rezať možno len po čiarach siete. Nájdite všetky možnosti.



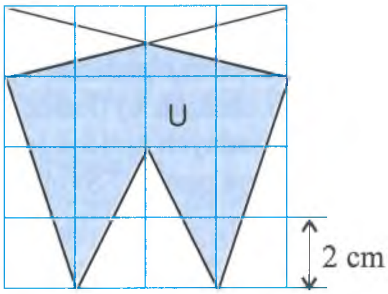
4. Rybár chytil sumca. Keď sa ho priatelia spýtali, aký dlhý bol úlovok, odpovedal: „Hlava je dlhá 9 cm. Dĺžka tela sa rovná dĺžke chvosta a hlavy spolu. Napokon chvost je taký ako hlava a polovica tela spolu.“ Akú dĺžku mal ulovený sumec?

.... **5.** Žiaci 6. A triedy denne sledovali počasie v priebehu dvoch týždňov a zaznamenali tieto údaje:

zamračené	zamračené a dážď	dážď
5 dní	3 dni	4 dni

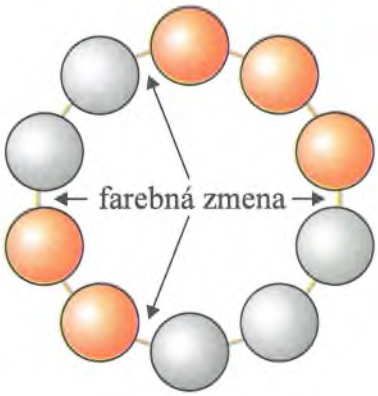
Koľko dní bolo jasné počasie (t.j. nezamračené a bez dažďa)?

.... **6.** Na obrázku je znázornený rovinný útvar *U*. Vypočítajte jeho obsah.



.... **7.** Na roľníkov dvor priletelo 35 vrán. Zrazu sa niečoho naľakali, vyleteli a rozdelili sa na dva kŕdle. Prvý kŕdeľ si sadol na vetvy topoľa, druhý na strechu sýpky. Po čase preletelo 5 vrán z topoľa na strechu a rovnaký počet vrán odletel zo strechy preč. Vtedy bolo na topoli dvakrát viac vrán ako na streche. Koľko vrán bolo v jednotlivých kŕdľoch na začiatku?

.... **8.** Závod na výrobu bižutérie vyrába detské náramky na gumičke z piatich červených a piatich bielych korálikov. Ako majú byť koráliky ponavliekané, aby náramok mal práve 6 farebných zmien? Nájdite aspoň 5 rôznych riešení. (Na obrázku je náramok so štyrmi farebnými zmenami.)



.... **9.** Myslím si štvorciferné číslo. Viem o ňom povedať:

a) Jeho ciferný súčet je stotina z čísla, ktoré dostanem zaokrúhlením mysleného čísla na stovky.

b) Jeho posledná číslica je o 1 väčšia ako predposledná číslica.

c) Súčet jeho posledných dvoch číslic sa rovná jeho druhej číslici.

Aké je to číslo?

.... **10.** Daný je pravouhlý trojuholník s preponou dĺžky 8 cm a odvesnou dĺžky 4 cm. Zistite, či sa zo šiestich takýchto neprekrývajúcich sa trojuholníkov dá zložiť rovnobežník, ktorého jeden vnútorný uhol je 30° (je to jeden uhol daného pravouhlého trojuholníka). Nájdite všetky možnosti.

.... **11.** Do tabuľky a) sme vpísali čísla 1, 2, 3, 4 tak, že súčet čísel zo susedných políčok je prvočíslo, teda:

$$1 + 2 = 3,\ \ 1 + 4 = 5,\ \ 2 + 3 = 5,\ \ 4 + 3 = 7$$

Peter tvrdí, že sa mu podarilo vpísať čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 do tabuľky na obrázku b) (každé práve raz) tak, že súčet čísel z každých dvoch susedných políčok je prvočíslo. Anička tvrdí, že sa to nedá. Kto z nich má pravdu? Svoj názor odôvodnite.

a)

1	2
4	3

b)

.... **12.** Písmená nahraďte číslicami (rovnaké písmená tou istou číslicou, rôzne inou) tak, aby bol naznačený počtový úkon správny.

$$\begin{array}{r} R\ Y\ B\ A \\ +\ R\ Y\ B\ A \\ \hline P\ L\ A\ V\ A \end{array}$$

.... **13.** Považujme čísla, ktoré padnú pri hode dvoma hracími kockami, za činitele súčinu. Koľko rôznych súčinov možno dostať pri hode dvoma hracími kockami?

VÝSLEDKY CVIČENÍ

5 Trojuholník

5.1 Opakovanie

Úlohy: **1.** $\alpha = \sphericalangle BAC$, $\beta = \sphericalangle ABC$, $\gamma = \sphericalangle ACB$; **2.** $a-b < c < a+b$, $b-c < a < b+c$, $a-c < b < a+c$; **3.** α, β, γ; **4.a)** vrcholové; **b)** susedné.
Cvičenia: **1.** 154°; **2.** $\alpha \cong \beta$, $\alpha \cong \gamma$; **3.a)** 150°; **b)** 132°40'; **c)** 64°30'; **d)** 1°; **e)** 79°15'; **f)** 177°25'; **4.a)** tupý; **b)** pravý; **c)** ostrý; **5.a)** tupý; **b)** pravý; **c)** ostrý.

5.2 Vnútorné a vonkajšie uhly trojuholníka

Úlohy: **1.** Grafický súčet je priamy uhol; **2.** grafický súčet je opäť priamy uhol.
Cvičenia: **1.a)** $\gamma = 90°$ pravouhlý; **b)** $\beta = 47°30'$ tupouhlý; **c)** $\alpha = 51°35'$, tupouhlý; **d)** $\alpha = 38°20'$, tupouhlý; **e)** $\alpha = 60°$, ostrouhlý **f)** $\beta = 30°$, tupouhlý; **g)** $\gamma = 119°$, tupouhlý; **h)** $\beta = 45°$, pravouhlý; **2.a)** $\alpha' = 145°$, $\beta' = 124°$, $\gamma' = 91°$; **b)** $\alpha' = 53°$, $\beta' = 166°$, $\gamma' = 141°$; **c)** $\alpha' = 146°$, $\beta' = 109°20'$, $\gamma' = 104°40'$; **3.a)** $\beta = 50°$, $\gamma = 85°$, $\alpha' = 135°$, $\gamma' = 95°$; **b)** $\alpha = 75°$, $\beta = 45°$, $\beta' = 135°$, $\gamma' = 120°$; **c)** $\alpha = 80°$, $\gamma = 28°$, $\beta = 108°$, $\gamma' = 152°$; **d)** $\alpha = 132°$, $\gamma = 18°$, $\beta' = 150°$, $\gamma' = 162°$; **4.a)** áno; **b)** nie; **c)** nie; **d)** nie, **5.** d).

5.3 Rovnoramenný trojuholník

Úlohy: **1.** 1, 4, 5; **2.** bod A splynie s bodom B, $\sphericalangle CAB \cong \sphericalangle CBA$; **3.** $z + a + a = z + 2a$; **4.** $\triangle ABC$, $\triangle BCD$, $\triangle CDA$, $\triangle DAB$; $\triangle ABS$, $\triangle BCS$, $\triangle CDS$, $\triangle DAS$; **5.** dobre, je ich 28.
Cvičenia: **1.** $\triangle MNS$, $\triangle NPS$, $\triangle PQS$, $\triangle QMS$; **3.** 7 m; **4.** 3 cm; **5.** áno; **6.** áno; **7.** nie; **8.** áno.

5.4 Rovnostranný trojuholník

Cvičenie: **2.** 120°.

5.5 Výška trojuholníka

Úlohy: **1.** áno; **2.** sú to stredy strán $\triangle ABC$.
Cvičenie: **4.a)** rovnostranný; **b)** rôznostranný; **c)** rovnoramenný.

5.6 Konštrukcia trojuholníka

Úloha: **1.** áno.

Vyskúšajte sa!
1. $\gamma = 66°55'$; **2.** $\beta = 64°30'$, $\gamma = 80°10'$, $\alpha' = 144°40'$, $\gamma' = 99°50'$; **3.** 66°20'; **4.** 40 cm.

6 Zlomky

6.1 Zlomok

Úlohy: **1.a)** môžeme, zapíšeme $\frac{1}{2}$; **b)** nemôžeme, lebo nevieme deliť na nula častí (nulou nikdy nedelíme); **c)** berieme jeden celok, zapíšeme 1.

Cvičenia: **4.a)** $\frac{1}{60}$; **b)** $\frac{7}{60}$; **c)** $\frac{1}{2}$; **d)** 1; **e)** $\frac{3}{2}$; **f)** $\frac{10}{3}$; **5.a)** $\frac{1}{24}$; **b)** $\frac{1}{4}$; **c)** $\frac{1}{2}$; **6.** 12, 8, 18, 21, 5;

7. 

8.a) $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$; **b)** $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$; **c)** $\frac{5}{8}$; **d)** $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$; **9.a)** $\frac{1}{100}, \frac{1}{20}, \frac{17}{100}$; **b)** $\frac{1}{5}, \frac{1}{2}$, 1.

6.2 Rovnosť zlomkov. Rozširovanie a krátenie zlomkov

Úlohy: **1.** $\frac{15}{36}, \frac{18}{36}, \frac{14}{36}, \frac{8}{36}$; **2.** $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{12}{13}, \frac{5}{9}, \frac{9}{11}$; **3. a)** $\frac{4}{7} = \frac{20}{35}$; **b)** $\frac{18}{20} = \frac{36}{40}$.

Cvičenia: **1.a)** $\frac{2}{8}, \frac{6}{10}, \frac{8}{18}, \frac{26}{30}$; **b)** $\frac{5}{10}, \frac{20}{35}, \frac{25}{40}, \frac{50}{55}$; **c)** $\frac{27}{36}, \frac{45}{54}, \frac{90}{117}, \frac{63}{900}$; **2.a)** $\frac{26}{72}, \frac{45}{72}, \frac{28}{72}, \frac{30}{72}, \frac{32}{72}, \frac{9}{72}$; **b)** $\frac{18}{100}, \frac{28}{100}, \frac{30}{100}, \frac{160}{100}, \frac{275}{100}, \frac{50}{100}$; **3.** $\frac{2}{10}, \frac{3}{7}, \frac{1}{5}, \frac{8}{6}$; **4.a)** $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{14}, \frac{1}{8}$; **b)** $\frac{3}{4}, \frac{2}{5}, \frac{5}{16}, \frac{4}{7}, \frac{2}{3}$; **c)** $\frac{7}{9}, \frac{4}{7}, \frac{2}{3}, \frac{3}{7}, \frac{2}{3}$; **5.a)** platí; **b)** neplatí, správne $\frac{15}{19} = \frac{30}{38}$; **c)** platí; **6.a)** 70, 35, 26; **b)** 7, 70, 3; **7.** pôvodný zlomok sa nezmenil.

6.3 Zápis zlomkov desatinnými číslami

Úloha: **1.** približne 416,67 g.

Cvičenia: **1.a)** $\frac{25}{100} = 0{,}25$; $\frac{6}{10} = 0{,}6$; $\frac{35}{100} = 0{,}35$; $\frac{324}{100} = 3{,}24$; **b)** $\frac{15}{10} = 1{,}5$; $\frac{14}{100} = 0{,}14$; $\frac{50}{100} = 0{,}5$; $\frac{44}{100} = 0{,}44$; **c)** $\frac{5}{10} = 0{,}5$; $\frac{15}{10} = 1{,}5$; $\frac{375}{1\,000} = 0{,}375$; $\frac{18}{10} = 1{,}8$; **d)** $\frac{5}{10} = 0{,}5$; $\frac{24}{100}$ 0,24; $\frac{1}{10} = 0{,}1$; $\frac{6}{100} = 0{,}06$; **2.** 0,12; 1,25; 0,55; $0{,}\overline{6}$; 0,25; 0,2; **3.** $0{,}\overline{7}$; $5{,}\overline{3}$; $0{,}\overline{185}$; $3{,}\overline{18}$; $0{,}\overline{36}$; $0{,}5\overline{3}$; $0{,}2\overline{3}$; **4.** asi 16,67 cm; **5.** približne 285,71 m; **6.** $\frac{2}{5}, \frac{3}{25}, \frac{3}{2}, \frac{52}{25}, \frac{65}{2}, \frac{1\,501}{25}, \frac{537}{25}, \frac{64}{5}$.

6.4 Usporiadanie zlomkov podľa veľkosti

Úlohy: **1.** $\frac{7}{11} < \frac{9}{11}, \frac{3}{14} < \frac{5}{14}, \frac{3}{10} < \frac{3}{4}, \frac{15}{17} > \frac{15}{22}$; **2.** $\frac{3}{4} > \frac{5}{8} > \frac{7}{12}$.

Cvičenia: **1.a)** $\frac{5}{7} > \frac{3}{8}, \frac{4}{9} < \frac{5}{6}, \frac{2}{5} < \frac{3}{7}$; **b)** $\frac{3}{4} > \frac{5}{8}, \frac{2}{5} > \frac{4}{15}, \frac{5}{6} = \frac{10}{12}$; **2.** $\frac{3}{5}$ a $\frac{1}{11}$; **3.a)** napr. $\frac{46}{63}$; **b)** napr. $\frac{3}{4}$; **c)** nekonečne veľa; **4.a)** $\frac{7}{4} > \frac{9}{10} > \frac{2}{5} > \frac{3}{8}$; **b)** $\frac{3}{5} = \frac{6}{10} > > \frac{4}{11} = \frac{8}{22}$; **5.** najväčšou **B**, najmenšou **C**; **6.** prvá – najslabšiu, tretia najvýkonnejšiu.

Vyskúšajte sa!

2. všetky sú rovnaké; **3.** 

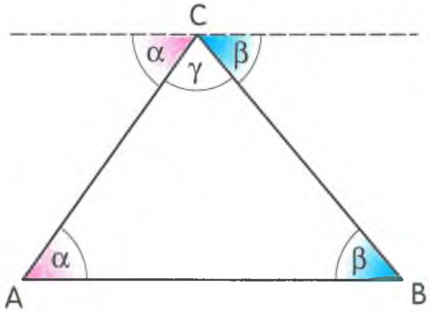
;

4.a) platí; **b)** platí; **c)** neplatí, správne: $\frac{5}{17} = \frac{10}{34}$; **d)** neplatí, správne: $\frac{3}{7} = \frac{12}{28} = \frac{24}{56}$; **5.** 3,5; 1,25; 0,95; 0,14; $0{,}\overline{1}$; 0,176; **6.** $\frac{1}{3}, \frac{7}{12}, \frac{3}{5}$; **7.** 350, 3, 290; **8.** $\frac{7}{24} < \frac{1}{3} < \frac{3}{8} < \frac{5}{12}$; **9.** najviac Peter, najmenej Katka.

7 Rovnobežnosť. Rovnobežník, lichobežník

7.1 Rovnobežky preťaté priečkou

Úloha: **2.**



Cvičenia: **1.a)** α, α'; β, β'; γ, γ'; δ, δ'; **b)** δ, β'; γ, α'; α, γ'; β, δ'; **c)** α, β; β, γ; δ, γ; α, δ; α', β'; β', γ'; γ', δ'; α', δ'; **d)** $\alpha, \gamma, \beta, \delta$; $\alpha', \gamma', \beta', \delta'$; **2.** $\beta = 104°30'$, $\gamma = 75°30'$, $\delta = 104°30'$, $\varepsilon = 104°30'$, $\omega = 75°30'$, $\varphi = 104°30'$, $\psi = 75°30'$; **3.** $\alpha = 55°30'$, $\beta = 124°30'$, $\gamma = 55°30'$, $\delta = 124°30'$; **4.** $p \| q$, $m \| n$, $a \| b$; **5.** $a \| b$; **6.** $\alpha = 35°$, $\beta = 35°$, $\gamma = 60°$, $\omega = 120°$, $\delta = 85°$, $\varphi = 145°$.

7.2 Rovnobežník a jeho vlastnosti

Úlohy: **1.** $\delta = 65°$; **2.** $\gamma = 135°$; **3.a)** 1, 2, 3, 6, 7, 4; **b)** 2, 3, 6, 7; **c)** 7; **d)** 2, 3, 6, 7; **e)** 2, 3, 6, 7; **f)** 1, 4; **g)** 7; **4.** protiľahlé uhly sú zhodné; súčet priľahlých uhlov je priamy uhol.

Cvičenia: **1.a)** *ABCD*, *ABHI*, *DCHI*, *AEFD*, *BEFC*, *CFGH*, *DFGI*; **b)** nie, nie; **2.** rovnobežníky; **a)** $|BC| = 3$ cm, $|CD| = 5$ cm; **b)** $|AD| = 4$ cm, $|CD| = 6$ cm; **3.** na obrázku **a)** je rovnobežník; **4.a)** nie – lebo uhly $\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle DCA$ nie sú zhodné; **b)** áno; **5.a)** $\beta = 55°$, $\alpha = 125°$, $\gamma = 125°$; **b)** $\alpha = 65°$, $\beta = 115°$, $\gamma = 65°$; **c)** $\alpha = 50°$, $\beta = 130°$, $\gamma = 50°$, $\delta = 130°$; **d)** $\alpha = 65°$, $\beta = 115°$, $\gamma = 65°$, $\delta = 115°$; **6.a)** $\alpha = 135°$, $\beta = 45°$, $\gamma = 135°$, $\delta = 45°$; **7.** využite vlastnosti uhlopriečok rovnobežníka; **8.a)** $\beta = 135°$, $\gamma = 45°$, $\delta = 135°$; **b)** $\alpha = 76°30'$, $\gamma = 76°30'$, $\delta = 103°30'$; **9.** dva; **10.** všetky sú pravé.

7.3 Obdĺžnik, kosodĺžnik, štvorec a kosoštvorec

Úlohy: **1.** sú zhodné; **2.** $BD \perp AC$, $|BS| = |DS|$, bod S je rovnako vzdialený od strán $\sphericalangle BAD$, analogicky to platí aj o ostatných uhloch; **3.a)** uhly kosodĺžnika nie sú pravé; **b)** uhlopriečky kosodĺžnika nie sú zhodné; **4.a)** každé dve protiľahlé strany sú rovnobežné a zhodné; **b)** uhlopriečky sa navzájom rozpoľujú.

Cvičenia: **1.a)** 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11; **b)** 7, 10; **c)** 3, 6; **d)** 1, 4, 8; **f)** 1, 3, 4, 6, 8, 10; **g)** 5, 9, 12; **3.** trojuholník, obdĺžnik, štvorec – pozor, priechod pre chodcov; pozor, cyklisti; podchod alebo nadchod; železničné priecestie bez závor; hlavná cesta; návestná tabuľa (240 m); návestná smerová tabuľa; obec.

7.4 Lichobežník

Úlohy: **1.** 360°; **2.** nie, bol by to obdĺžnik; **3.a)** áno – sú to uhly pri základniach; **b)** áno – sú to uhly pri ramene kolmom na základne.

Cvičenie: **2.** $\beta = 60°$, $\gamma = 120°$, $\delta = 120°$.

7.5 Konštrukcia rovnobežníka a lichobežníka

Cvičenie: **3.a)** nie; **b)** áno.

7.6 Obsah a obvod rovnobežníka

Úlohy: **1.**

m^2	dm^2	cm^2	mm^2
2,5	250	25 000	2 500 000
1,25	125	12 500	1 250 000
0,20	20	2 000	200 000
3,5	350	35 000	3 500 000

2. 5 . 4 = 20*j*; 5 . 4 = 20*j*; **3.** áno; **4.** áno; **5.** $a + a + a + a = 4a$.

Cvičenia: **1.a)** 17,5 cm²; **b)** 30,24 cm²; **c)** 54 dm²; **d)** 25,16 cm²; **2.a)** 18 cm; **b)** 22,6 m; **c)** 405 cm; **3.** 95,9 cm²; **4.** 47 cm; **5.** 26 m; **6.a)** 20 m; **b)** 1 500 cm; **c)** 8 km; **d)** 150 dm; **7.** o 20 m.

7.7 Obsah a obvod trojuholníka

Úlohy: **1.** $S = \frac{1}{2}a \,.\, b$; **2.** áno; **3.** $o = a + b + c$; **4.** majú rovnaké dĺžky základní a výšky, obvody nemajú rovnaké.

Cvičenia: **2.a)** 5 cm²; **b)** 5,625 cm²; **c)** 7,4 cm²; **d)** 7,5 cm²; **4.** $S_1 = S_2$; **5.** $S_1 = S_2$; **6.** 18 cm²; **7.** $S_1 = S_2 = S_3$; **8.** 7,88 cm², obsahy týchto trojuholníkov sú rovnaké; **9.** majú rovnako dlhé základne a rovnaké výšky.

7.8 Obsah a obvod lichobežníka

Úlohy: **1.** sú rovnaké; **2.** $o = a + b + c + d$.

Cvičenia: **1.a)** $S = 9{,}37$ cm²; **b)** $S = 2$ m²; **c)** $S = 7{,}4$ dm²; **d)** $S = 61\,500$ m²; **2.** obdĺžnik s rozmermi $\frac{1}{2}(a + c)$, v, $S = \frac{1}{2}(a + c) \,.v$; **3.**

základne		výška	obsah
20	13	8	132
25	15	11	220
30	10	18	360
75	65	50	3 500

4. $S = 18{,}15$ cm², $o = 18{,}5$ cm.

7.9 Slovné úlohy na výpočty obsahov a obvodov

Cvičenia: **1.** 14,4 m²; **2.** $S = 6$ m², 300 priesad; **3.** 37,44 m²; **4.** 500 m; **5.** 1,192 m²; **6.** 1 378,35 m²; **7.** záhrada 1 137 m², potreba pletiva 155,35 m; **8.** VÝŠKA; **9.** RAMENO.

Vyskúšajte sa!

1. $m \| n$, $a \| b$; **2.** b, c; **3.** áno; **5.** $a = 4{,}5$ cm, $v = 2$ cm; **7.** 67°, 38°, 75°; **8.** $z_1 = 6$ cm, $z_2 = 3$ cm; **9.** o 10 m; **10.** 713.

8 Kombinatorika

8.1 Všetky možné usporiadania daného počtu prvkov

Úlohy: **1.** dve (47, 74); **2.** dve (KA, AK); **3.** 359, 395, 539, 593, 935, 953; počet poradí je 6; **4. LOS, LSO, OLS, OSL, SLO, SOL**;

5. KPI, KIP, PKI, PIK, IKP, IPK; počet sedení je 6;

6. ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA; počet poradí je 6;

7. *abc*, *acb*, *bac*, *bca*, *cab*, *cba*; počet poradí je 6;

8. $32+24+16, 32+16+24, 24+32+16, 24+16+32, 16+32+24, 16+24+32$, všetkých poradí sčítancov v súčte je 6;

9. 2347, 2374, 2437, 2473, 2734, 2743,

3247, 3274, 3427, 3472, 3724, 3742,

4237, 4273, 4327, 4372, 4723, 4732,

7234, 7243, 7324, 7342, 7423, 7432;

10.

JVTB	JVTB	JVTB	JVTB
1 2 3 4	2 1 3 4	3 1 2 4	4 1 2 3
1 2 4 3	2 1 4 3	3 1 4 2	4 1 3 2
1 3 2 4	2 3 1 4	3 2 1 4	4 2 1 3
1 3 4 2	2 3 4 1	3 2 4 1	4 2 3 1
1 4 3 2	2 4 1 3	3 4 1 2	4 3 1 2
1 4 2 3	2 4 3 1	3 4 2 1	4 3 2 1

všetkých možností je 24;

11. označme Jakubko (J), Sobotné večery (S), Prešporský zvon (P), Skrytý prameň (M). JSPM, JSMP, JMSP, JMPS, JPSM, JPMS,
SJPM, SJMP, SPMJ, SPJM, SMJP, SMPJ,
PJSM, PJMS, PSJM, PSMJ, PMJS, PMSJ,
MJSP, MJPS, MSJP, MSPJ, MPJS, MPSJ; počet rôznych poradí je 24.

Cvičenia: **1.** 348, 384, 438, 483, 834, 843; počet čísel je 6; **2.** 234, 243, 324, 342, 423, 432; všetky sú deliteľné tromi, lebo ciferný súčet je stály a deliteľný 3; **3.** 1479, 1497, 1749, 1794, 1947, 1974, 4179, 4197, 4719, 4791, 4971, 4917, 7149, 7194, 7419, 7491, 7914, 7941, 9147, 9174, 9417, 9471, 9714, 9741; počet takýchto čísel je 24; počet párnych čísel je 6; **4.** BELO, BEOL, BOEL, BOLE, BLEO, BLOE, EBLO, EBOL, EOBL, EOLB, ELOB, ELBO, LBEO, LBOE, LOBE, LOEB, LBEO, LBOE, OBEL, OBLE, OEBL, OELB, OLBE, OLEB; možno zostaviť 24 slov; **5.** BKT, BTK, TBK, TKB, KBT, KTB;

6.

1 2 3 4	1 2 3 4	1 2 3 4	1 2 3 4
ABCD	BACD	CABD	DABC
ABDC	BADC	CADB	DACB
ACBD	BCAD	CBAD	DBAC
ACDB	BCDA	CBDA	DBCA
ADCB	ADBC	CDAB	DCAB
ADBC	ADCB	CDBA	DCBA

7. Čadca (C), Michalovce (M), Brezno (B), Komárno (K); všetky možné poradia sú: CMBK, CMKB, CKMB, CKBM, CBKM, CBMK, MCBK, MCKB, MBCK, MBKC, MKCB, MKBC, BCMK, BCKM, BMCK, BMKC, BKCM, BKMC, KCMB, KCBM, KMCB, KMBC, KBCM, KBMC; všetkých poradí je 24; **8.** možno vyfarbiť celkom 6 rôznych farebných domčekov.

8.2 Výber a usporiadanie prvkov

Úlohy: **1.** 78, 79, 87, 89, 97, 98; počet čísel je 6; **a)** 78, 98; **b)** 78, 87; **c)** 78; **2.** *ab*, *ac*, *ad*, *ba*, *bc*, *bd*, *ca*, *cb*, *cd*, *da*, *db*, *dc*; počet slov je 12; **3.** 12, 13, 14, 21, 23, 24, 31, 32, 34, 41, 42, 43; **4.** 567, 568, 576, 578, 586, 587, 657, 658, 675, 678, 685, 687, 756, 758, 765, 768, 785, 786, 856, 857, 865, 867, 875, 876; počet takýchto čísel je 24; **5.** 6; **6.** 12 kôl; **7.** v skupine zohrajú 30 zápasov; mužstvo Slovenskej republiky zohrá 10 zápasov; **8.** AA, AB, BA, BB; **9.** I J K: 111, 112, 113, 121, 122, 123, 131, 132, 133, 211, 212, 213, 221, 222, 223, 231, 232, 233, 311, 312, 313, 321, 322, 323, 331, 332, 333, počet trojíc známok je 27; **10.** *AAA*, *AAK*, *AAT*, *AKA*, *AKK*, *AKT*, *ATA*, *ATK*, *ATT*, *KAA*, *KAK*, *KAT*, *KKA*, *KKK*, *KKT*, *KTA*, *KTK*, *KTT*, *TAA*, *TAK*, *TAT*, *TKA*, *TKK*, *TKT*, *TTA*, *TTK*, *TTT*; počet takýchto slov je 27, z nich v slovenskom jazyku majú význam 3; **11.** RR, RS, RT, RU, RZ, SR, SS, ST, SU, SZ, TR, TS, TT, TU, TZ, UR, US, UT, UU, UZ, ZR, ZS, ZT, ZU, ZZ; počet monogramov je 25.

Cvičenia: **1.a)** 34, 35, 43, 45, 53, 54; 3 . 2 = 6; **b)** 33, 34, 35, 43, 44, 45, 53, 54, 55; 3 . 3 = 9; **2.** 5 . 4 = 20; **3.** 3 . 3 = 9; **4.** 3 . 3 = 9; **5.** 11, 12, 13, 14, 15, 16, 21, 22, 23, ..., 65, 66; 6 . 6 = 36; **6.** 3 . 3 . 3 = 27; **7.** Dvojprvkové bez opakovania: · — , — · 2 . 1 = 2; s opakovaním: · · , · — , — · , — — 2 . 2 = 4; trojprvkové bez opakovania: 0; s opakovaním: · · · , · · — , · — · , · — — , — · · , — · — , — — · , — — — 2 . 2 . 2 = 8; **8.** ččč, ččz, ččž, čzč, čzz, čzž, čžč, čžz, čžž, zčč, zčz, zčž, zzč, zzz, zzž, zžč, zžz, zžž, žčč, žčz, žčž, žzč, žzz, žzž, žžč, žžz, žžž; **9.** PRS: 111, 112, 113, 121, 122, 123, 131, 132, 133, 211, 212, 213, 221, 222, 223, 231, 232, 233, 311, 312, 313, 321, 322, 323, 331, 332, 333, počet možností je 3 . 3 . 3 = 27.

Vyskúšajte sa!

1. MKL, MLK, KML, KLM, LMK, LKM;

2. 4679, 4697, 4769, 4796, 4967, 4976,
6479, 6497, 6749, 6794, 6947, 6974,
7469, 7496, 7649, 7694, 7946, 7964,
9467, 9476, 9647, 9674, 9746, 9764;

3. 33, 34, 35, 36, 43, 44, 45, 46, 53, 54, 55, 56, 63, 64, 65, 66; **4.** možností je 24; **5.** kartičky možno vytiahnuť 4 . 4 . 4 = 64 spôsobmi.

9 Cvičenia na opakovanie

1. deväťciferné; **2.** 0 a 117; **3.** 739 251; **4.a)** 121; **b)** 3 663; **c)** 27 951; **5.a)** trojciferné alebo štvorciferné; **b)** päťciferné alebo šesťciferné; **c)** trojciferné; **8.a)** $a < -5$; **b)** $b > -7$; **c)** $c > 0$; **d)** $d < 0$; **9.a)** kladné 4, záporné –1; **b)** kladné 0,5, záporné –1; **c)** kladné 1, záporné –0,1; **d)** kladné 1, záporné –0,001; **10.a)** 8 a 9; **b)** –8 a –9; **c)** 45 a 50; **d)** –45 a –50; **11.a)** –540; –504; –450; –405; –54; –45; **b)** –2,1; –2,01; –1,2; –1,02; –0,21; –0,12; **12.a)** kladné; **b)** záporné; **c)** kladné; **d)** záporné; **e)** záporné aj kladné; **f)** záporné; **13.a)** 710; **b)** 200; **c)** 5; **14.a)** 96,756; 77,844; **b)** 61; 65; **c)** –55; 25; **d)** 0,7; 4,3;

15.

$x+y$	25	3	–13	20,6	0,7	–20,8
$x-y$	–5	–23	1	–0,6	–20,7	0,8

16.a) 0,07; **b)** 2,20; **c)** 4,05; **d)** 1,47; **17.a)** 3 100; **b)** 112,85; **18.a)** 22,2; **b)** 29,3; **19.** 1, 3, 5, 7, 15, 35, 105; **20.** 1 242; **21.** 1, 2, 5, 7, 10, 14, 35, 70; **22.** 36; **23.** 1 002; **24.** 60, 120, 180; **25.** 7 125; **26.** 2 . 2 . 2 . 3 . 5 . 5 . 19; **27.** 2; **28.** 3 222, 2 322, 2 232, 3 333; **29.** 36; **30.** 24 m; **31.** 181 ruží; **32.** 24; **33.** nemôže; **34.** 3 a 12; **35.** 1, 2, 4, 8, 16; **36.** 11 čísel; **37.** áno, napr. medzi 4, 6, 8, sú 5 a 7; **38.** 129; **39.** 3 + 5 + 13, 7 + 13 + 1; **40.** $\frac{1}{10}, \frac{3}{20}, \frac{1}{2}$; **41.** $\frac{4}{8}, \frac{4}{16}, \frac{8}{60}, \frac{4}{120}$; **42.** $\frac{5}{100}, \frac{4}{100}, \frac{40}{100}, \frac{75}{100}$; **43.** $\frac{12}{24}, \frac{27}{24}, \frac{44}{24}, \frac{10}{24}$; **44.** $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{3}$; **45.** platí; **46.** 0,4; 1,5; 0,28; 0,2, 0,03; **47.** 0,75; 0,88; 0,82; **48.** $\frac{5}{7} < \frac{12}{7}, \frac{4}{5} < \frac{6}{7}, \frac{3}{8} > \frac{1}{4}, \frac{2}{3} > \frac{5}{12}$; **49.a)** napr. 1, $\frac{2}{3}$, 2,5; **b)** napr. $\frac{1}{10}$, 0, –1, $-\frac{3}{2}$; **c)** napr. $\frac{3}{7}$, 1, $\frac{3}{2}$, 2; **50.** $\frac{1}{3} < \frac{4}{5} < \frac{7}{8} < \frac{8}{9} < \frac{9}{10}$; **51.** áno; **52.** 192 kusov; **53.** 264,6 m^3; **54.** 1 755 Sk; **55.a)** 2 m, **b)** 625 m^3; **56.a)** 18 l; **b)** 239,4 m^3; **57.** 1 000 cm^3; **58.** susedný: 54°, vrcholový: 126°; **59.a)** $\alpha' = 104°$, $\beta' = 137°$, $\gamma = 119°$; **b)** $\alpha' = 66°26'$, $\beta' = 132°15'$, $\gamma' = 150°19'$; **60.a)** 90°,45°; **b)** 30°, 60°; **c)** 75°, 105°; **61.** 48, 37, 95; 61, 71, 48; **62.** $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$, $\gamma = 90°$; pravouhlý; **63.** 15,5 cm, 14,2 cm; **64. a)** 53°; **b)** 62°30'; **c)** 22°46'; **65.** $\alpha = 53°$; $\beta = 37°$; **69.a)** áno; **b)** nie; **c)** áno; **d)** nie; **70.a)** áno; **b)** áno; **c)** nie; **d)** nie; **71.** kosoštvorec; **72.** 60°, 120°; **73.a)** 73°43'; **b)** 110°42', **c)** 59°45'; **78.** $a = 4,5$ cm; **79.** 7,488 m^2; **80.a)** 3 900 mm^2; **b)** 5 780 cm^2; **82.** MPJ, PMJ, JMP, MJP, PJM, JPM; **83.** 10 . 9 = 90.

10 Elementárne poznatky z logiky. Matematická veta

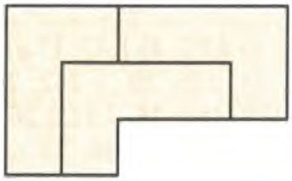
2. pre číslo 21: 21 : 3 = 7 zv. 0, ciferný súčet 2 + 1 = 3, 3 : 3 = 1 zv. 0; pre číslo 1 004: 1 004 : 3 = 334 zv. 2; ciferný súčet 1 + 4 = 5; 5 : 3 = 1 zv. 2; **4.a)** 10 . 7 + 10. 14 = 10 . 21; **b)** 6 . 8 + 6 . 13 = 6 . 21; **c)** 7 . 14 + 2 – 7 . 2 = = 7 . 12 + 2 nie je deliteľné; **d)** 17 . 10 – 17 . 2 = 17 . 8; **5.a)** 176 = 16 . 10 + 16; **b)** 741 = 760 – 19 = 40 . 19 – 19; **c)** 500 = 45 . 10 + 50 = 45 . 10 + (45 + 5); **d)** 833 = 850 – 17 = 50 . 17 – 17; **e)** 2 346 = 23 . 100 + 23 . 2; **f)** 4 376 = = 11 . 400 – 24 = 11 . 400 – (11. 2 + 2); **6.a)** platí; **b)** neplatí napríklad 2 a 8 nie sú deliteľné 5 ale ich súčet 2 + 8 = 10 je deliteľný 5; **7.** vychádzajte z trojuholníkovej nerovnosti.

11 Riešenie slovných úloh s využitím spoločného násobku a najväčšieho spoločného deliteľa

Cvičenia: **1.** platí; **2.** áno, nie; **3.** Katka 105 Sk, Zuzka 30 Sk; **4.** 40, 80, 120, 160, 200, 240; **5.** 84 cm, 588 malých škatúľ; **6.** 60; **7.** 31; **8.** veľké koleso dvakrát, malé päťkrát; **9.** 15; **10.** žiadna; o 7. hodine prvý deň; **11.** 24 kytíc; 5 červených, 4 biele a 2 ružové.

ROZUM DO HRSTI (VÝSLEDKY)

1.



2. $S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} S_{\square ABCD}$

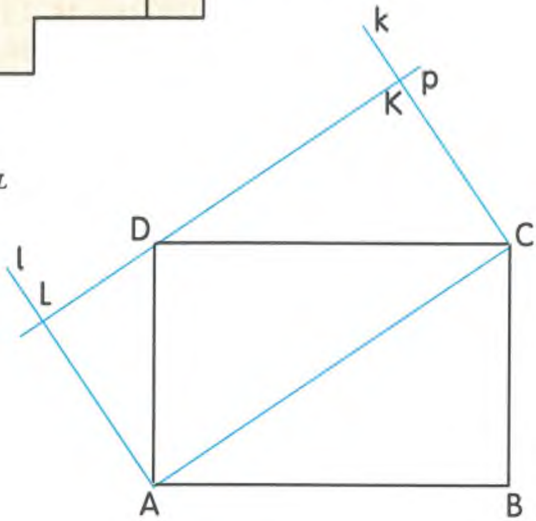
$S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2}|AC| \,.\, |AL| = \frac{1}{2} S_{\square ACKL}$

Z toho vyplýva

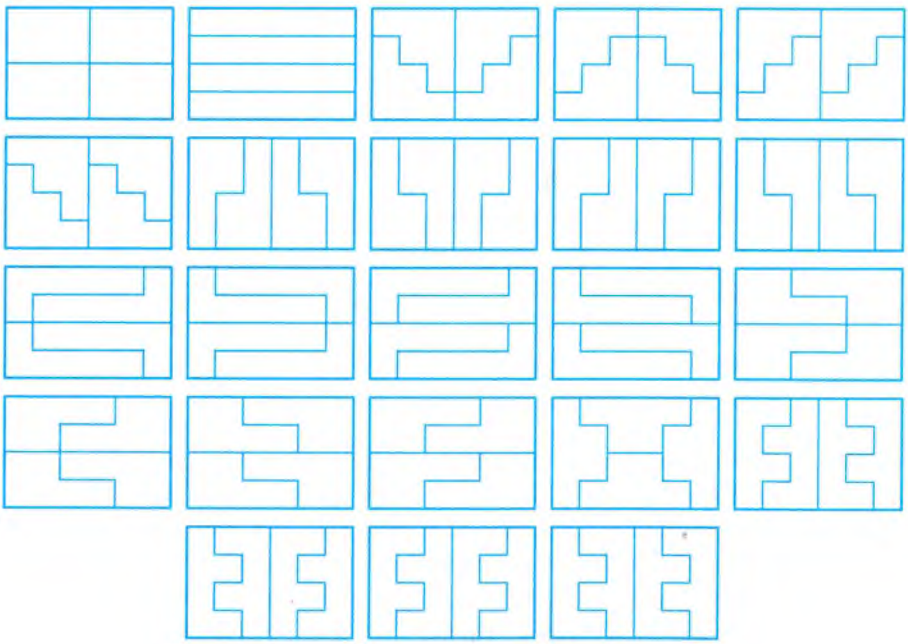
$S_{\square ABCD} = S_{\square ACKL}$

Konštrukcia

1. p; $p \parallel AC$, $D \in p$
2. k; $k \perp AC$, $C \in k$
3. K; $K \in k \cap p$
4. l; $l \perp AC$, $A \in l$
5. L; $L \in l \cap p$



3. Pri riešení možno s výhodou použiť sieť s rozmerom 1 cm. Je ich 23.

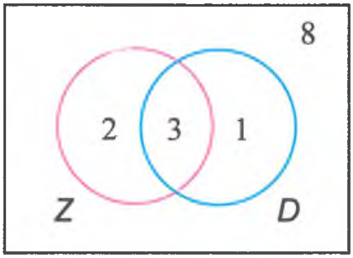


4. D – dĺžka sumca
H – dĺžka hlavy
T – dĺžka tela
CH – dĺžka chvosta
všetky rozmery v centimetroch

Platí
$H = 9$ (1)
$T = CH + 9$ (2)
$CH = 9 + \frac{T}{2} \Rightarrow CH = T - 9$

Porovnaním rovníc dostaneme
$9 + \frac{T}{2} = T - 9 \Rightarrow 9 + \frac{T}{2} = \frac{T}{2} + \frac{T}{2} - 9 \Rightarrow \frac{T}{2} = 18$, z toho $T = 36$.
Dosadením do (2) za $T = 36$, dostaneme $36 = CH + 9$, $CH = 27$.
$d = H + T + CH = 9 + 36 + 27 = 72$
Odpoveď: Ulovený sumec meral 72 cm.

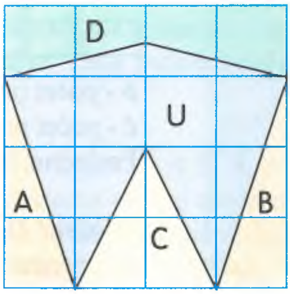
5. Použijeme Vennov diagram pre 2 množiny.
Označme D dážď, Z zamračené.



$|Z \cap D| = 3$
$|Z - (Z \cap D)| = 5 - 3 = 2$
$|D - (Z \cap D)| = 4 - 3 = 1$
$14 - 2 - 3 - 1 = 8$

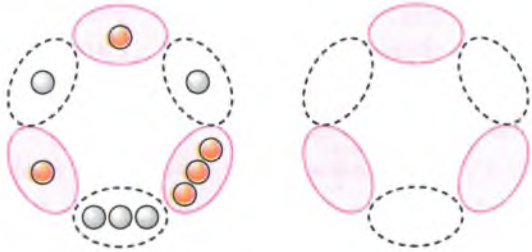
Odpoveď: V priebehu dvoch týždňov trvalo jasné počasie 8 dní.

6. Obsah útvaru U dostaneme, ak od obsahu štvorca 4×4 odčítame obsahy útvarov A, B, C, D.
Obsah útvaru A sa rovná obsahu útvaru B, čiže sa rovná obsahu obdĺžnika 3×1. Obsah A a obsah B spolu sa rovná 3 jednotkovým štvorčekom (j. š.). Podobne obsah C sa rovná 2 j. š.
Obsah D sa rovná $\frac{3}{4}$ obsahu obdĺžnika 4×1, teda obsah D sa rovná 3 j. š.
Obsah útvaru U sa rovná $4 \,.\, 4 - 3 - 2 - 3 = 8$ (j. š.)
Pretože 1 jednotkový štvorec je 4 cm^2, je obsah útvaru U 32 cm^2.
Odpoveď: Obsah útvaru U je 32 cm^2.



7. Na topoli a streche sýpky bolo pôvodne 35 vrán. Keď 5 vrán preletelo z topoľa na strechu a 5 vrán zo strechy odletelo, bolo na topoli a streche spolu 30 vrán. Na topoli ich však vtedy bolo 2-krát viac ako na streche. Teda na topoli bolo potom 20 a na streche 10 vrán. Takže v jednotlivých kŕdľoch bolo na začiatku 25 a 10 vrán.
Odpoveď: Na začiatku bolo v jednotlivých kŕdľoch 25 a 10 vrán.

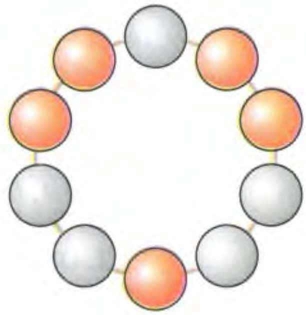
8. Skupina susediacich korálikov rovnakej farby tvorí jednu množinu. Aby bolo práve 6 zmien, musíme mať práve tri neprázdne množiny červených a práve 3 neprázdne množiny bielych korálikov a „navliekať" tieto množiny striedavo.



Zjednotením množín červených korálikov dostaneme päťprvkovú množinu, aj zjednotením množín bielych korálikov dostaneme päťprvkovú množinu. Pretože 5 = 1 + 1 + 3 alebo 5 = 1 + 2 + 2, počty prvkov v spomínaných množinách červených korálikov sú 1, 1, 3, alebo 1, 2, 2. To isté platí aj pre počty prvkov v množinách bielych korálikov.

Existuje 8 rôznych riešení

Riešenie	*b*	*č*	*b*	*č*	*b*	*č*
1.	1	3	3	1	1	1
2.	1	3	1	1	3	1
3.	2	3	2	1	1	1
4.	2	3	1	1	2	1
5.	1	1	1	2	3	2
6.	1	1	3	2	1	2
7.	2	1	1	2	2	2
8.	2	1	2	2	1	2



b - počet prvkov v množine bielych korálikov
č - počet prvkov v množine červených korálikov
Posledné, 8. riešenie, je na obrázku.

9. Myslené číslo môžeme zapísať ako $1\,000\,a + 100\,b + 10\,c + d$, kde a, b, c, d sú prirodzené čísla menšie ako 10, $a \neq 0$.
Potom zo zadania

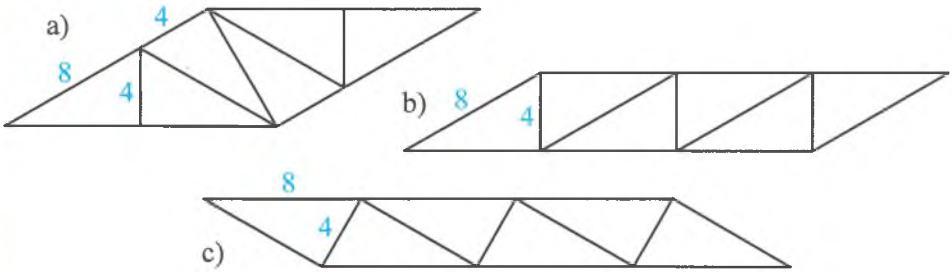
(1) $a + b + c + d = 10a + b$, ak $c < 5$

alebo

(2) $a + b + c + d = 10a + b + 1$, ak $c \geqq 5$

Z (1) určíme $9a = c + d$, potom $a = 1$, pretože ak $a = 2$, tak $c + d = 18$, z toho $c = d = 9$, a to odporuje podmienkam úlohy, ak $a > 2$, postupujeme podobne. Teda, ak $a = 1$, tak $c + d = 9$ a z podmienok úlohy $c = 4$, $d = 5$. Druh číslica b je súčtom posledných dvoch, teda $b = 9$. Hľadané číslo je 1 945.
Z (2) nenájdeme také c, d, aby vyhovovalo podmienkam úlohy.

10. Sú to tri možnosti rovnobežníkov s danou vlastnosťou – pozri obrázok.



11. Uvážme najskôr, ktoré čísla môžu byť susedné (teda také, aby ich súčet bol prvočíslo). Potom

s číslom	môžu susediť čísla
1	2, 4, 6
2	1, 3, 5, 9
3	2, 4, 8
4	1, 3, 7, 9
5	2, 6, 8
6	1, 5, 7
7	4, 6
8	3, 5, 9
9	2, 4, 8

V strede tabuľky musí byť buď číslo 4, alebo číslo 2, pretože len tieto čísla môžu mať štyroch vhodných susedov. Číslo 7, môže mať len dvoch susedov, preto musí byť v rohu tabuľky. Ale potom budú vedľa čísla 7 čísla 4 a 6. Takže číslo 4 nemôže byť v strede. Ale ani číslo 2 nemôže byť v strede, lebo by muselo susediť s číslom 4 (dokonca aj s číslom 6). Z toho už priamo vyplýva, že v strede nemôže byť pri danej podmienke nijaké z daných čísel, a teda Petrovi sa nemohlo podariť vpísať do tabuľky čísla požadovaných vlastností. Pravdu má Anička.

12. Z vlastnosti sčítania vyplýva, že A = 0, Y = 5, P = 1, 1 < B < 5, R > 5 (R + R … sčítanie s prechodom cez desiatku). Vyskúšame všetky možnosti pre B a R. Vylúčime prípady, keď pre rôzne písmená vyjde rovnaká číslica.

Zostávajú 4 riešenia:

6 520	8 520	8 530	6 540
6 520	8 520	8 530	6 540
13 040	17 040	17 060	13 080

13.

1 . 1 = 1	2 . 4 = 8	3 . 3 = 9	4 . 4 = 16	5 . 5 = 25	6 . 6 = 36
1 . 2 = 2	2 . 5 = 10	3 . 5 = 15	4 . 5 = 20	5 . 6 = 30	
1 . 3 = 3	2 . 6 = 12	3 . 6 = 18	4 . 6 = 24		
1 . 4 = 4					
1 . 5 = 5					
1 . 6 = 6					

6 + 3 + 3 + 3 + 2 + 1 = 18

Pri hádzaní dvoma hracími kockami možno dostať 18 rôznych súčinov.

Záznam o použití učebnice

Por. číslo	Meno žiaka	Školský rok	Stav učebnice	
			na začiatku škol. roku	na konci škol. roku
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

Prof. RNDr. Ondrej Šedivý, CSc.
PaedDr. Soňa Čeretková
PaedDr. Mária Malperová
PhDr. Ľudovít Bálint, CSc.

Matematika

pre 6. ročník základných škôl
2. časť

Zodpovedná redaktorka RNDr. Jana Belasová
Technická redaktorka Eva Onderčinová

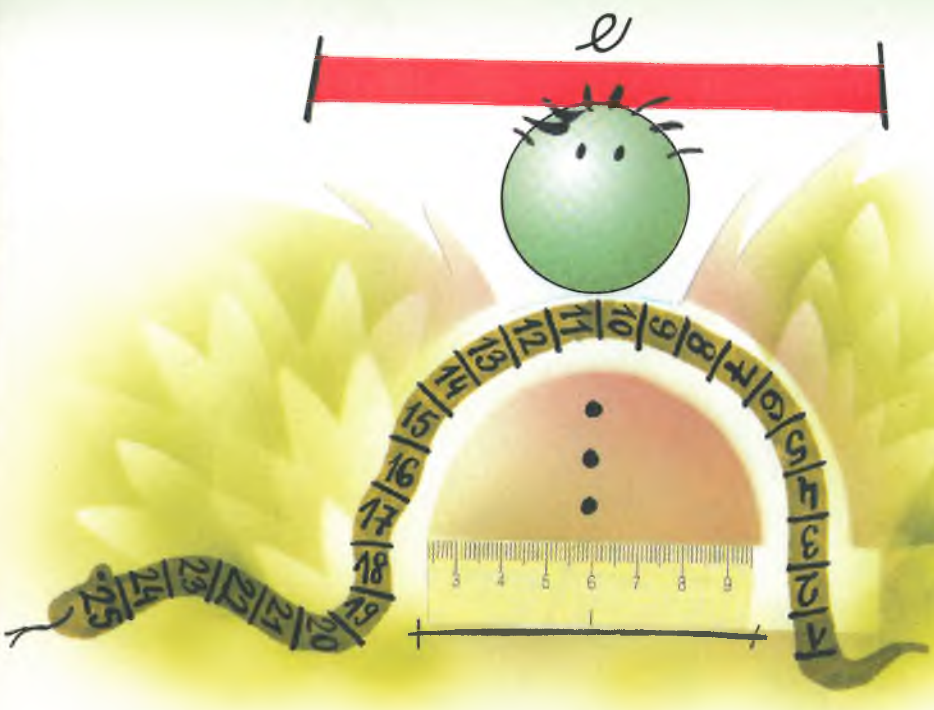
Grafická a počítačová úprava, počítačové kresby
a návrh obálky Igor Imro
Ilustrovala akad. maliarka Táňa Žitňanová

Vyšlo v MEDIA TRADE, spol. s r. o. – Slovenské pedagogické nakladateľstvo,
Sasinkova 5, 815 60 Bratislava 1

Litografie SHS, spol. s r. o., Leškova 10, 811 05 Bratislava
Vytlačili Tlačiarne BB, spol. s r. o., 974 01 Banská Bystrica

ISBN 80-08-02678-2

Slovenské p



ISBN 80-08-02678-2