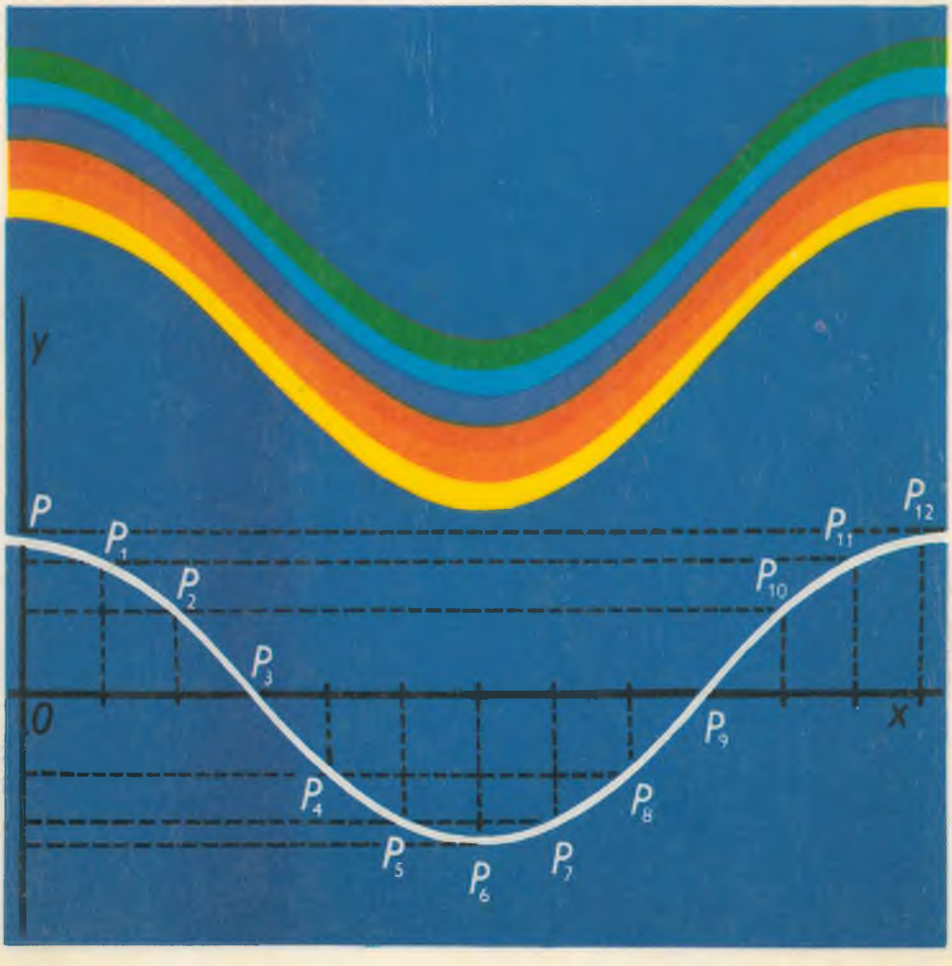
MATEMATIKA

8

II.diel



SPN

JÁN BOBOK
VLASTIMIL MACHÁČEK
JANA MÜLLEROVÁ
ONDREJ ŠEDIVÝ

SLOVENSKÉ
PEDAGOGICKÉ
NAKLADATEĽSTVO
BRATISLAVA 1983

MATEMATIKA

PRE 8. ROČNÍK ZÁKLADNEJ ŠKOLY

II. DIEL

8

Autori: PhDr. Ján Bobok, RNDr. Vlastimil Macháček,
PhDr. Jana Müllerová, CSc., a prof. RNDr. Ondrej Šedivý, CSc.
Recenzovali: PhDr. Ľudovít Bálint, CSc., dr. Jaroslav Barták,
Mária Križalkovičová a Cyril Vavřík
Výsledky kontroloval RNDr. Peter Švaňa
Koordinátor učebníc matematiky pre ZŠ prof. RNDr. Jaroslav Kurzweil, DrSc.

Schválilo Ministerstvo školstva SSR rozhodnutím č. 5970/1982-20
z 30. apríla 1982 ako učebnicu matematiky pre 8. ročník základnej školy
s vyučovacím jazykom slovenským.
Prvé vydanie

OBSAH

6. PODOBNOSŤ A ROVNOĽAHLOSŤ

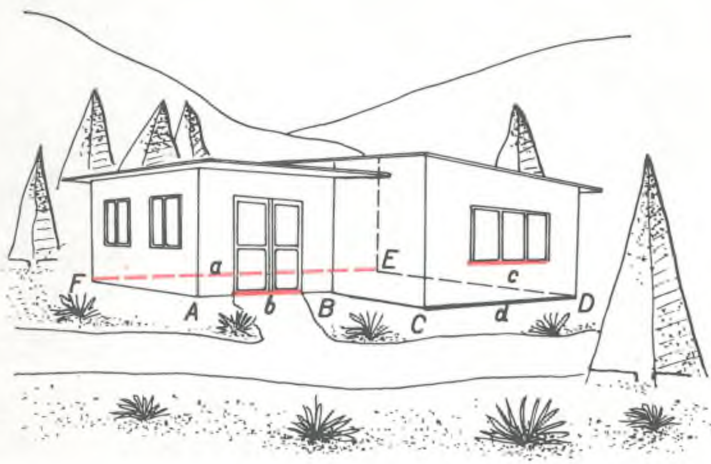
6.1 Podobnosť rovinných útvarov

Význam slova „podobný“ veľmi dobre poznáte. Hovoríme, že dve rôzne veľké fotografie vyvolané z toho istého negatívu predstavujú „podobné“ obrázky (obr. 6.1a,b).

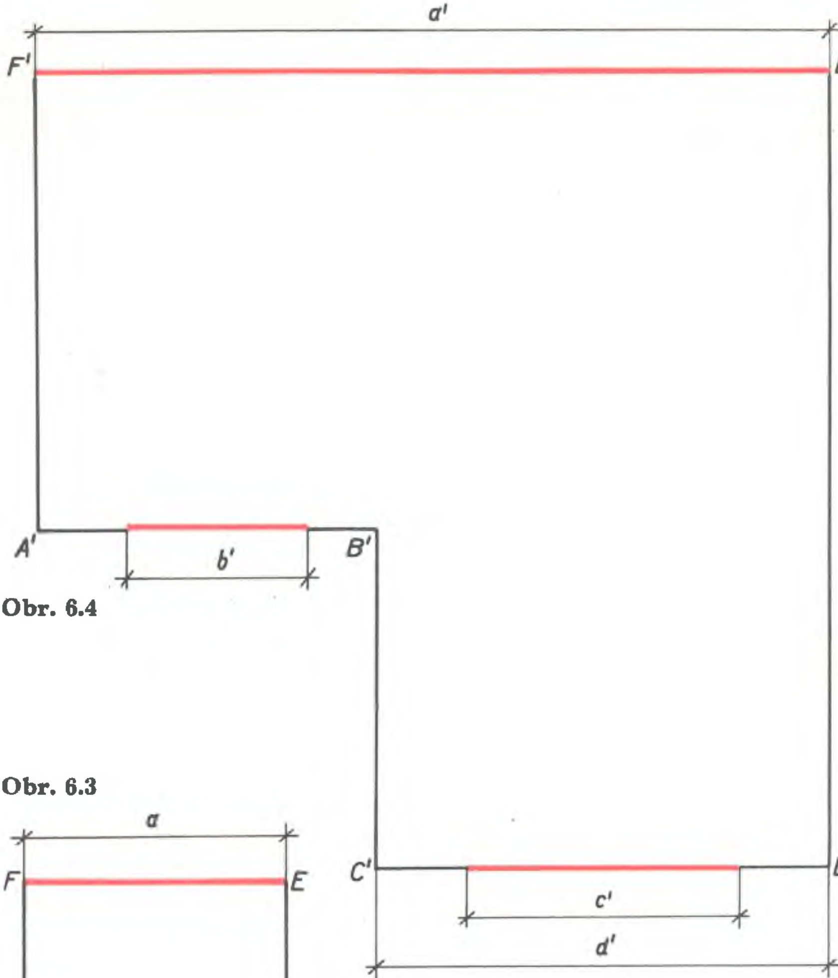
Obr. 6.1a

Obr. 6.1b

Na obrázku 6.2 je znázornená chatka a na obrázkoch 6.3 a 6.4 sú dva rôzne plány jej zjednodušeného pôdorysu. Pomocou písmen napríklad a, a' označíme dĺžky zodpovedajúcich si úsečiek v obidvoch plánoch a odmeriame ich. Zistíme, že dĺžka a zadnej steny na obrázku 6.3 je 35 mm, na obrázku 6.4 jej zodpovedajúca dĺžka a' sa rovná 105 mm. Odmeriame aj ďalšie vyznačené úsečky, ako je šírka dvier, okien, prednej steny a pod.

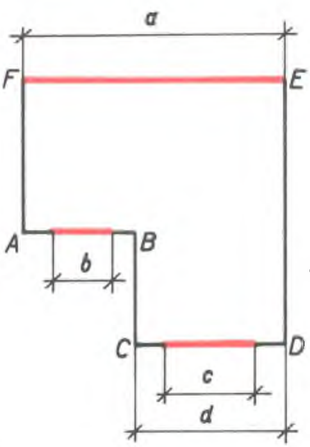


Obr. 6.2



Obr. 6.4

Obr. 6.3



v obidvoch plánoch a zapíšeme:

$a = 35$ mm;	$a' = 105$ mm;	(1)
$b = 8$ mm;	$b' = 24$ mm;	(2)
$c = 12$ mm;	$c' = 36$ mm;	(3)
$d = 20$ mm;	$d' = 60$ mm;	(4)

Ak teraz napíšeme pomery dĺžok navzájom si zodpovedajúcich úsečiek, zistíme, že

$$\frac{a'}{a} = \frac{105\ \text{mm}}{35\ \text{mm}} = 3$$

$$\frac{b'}{b} = \frac{24\ \text{mm}}{8\ \text{mm}} = 3$$

$$\frac{c'}{c} = \frac{35\ \text{mm}}{12\ \text{mm}} = 3\ \text{atď.}$$

Pre dĺžky úsečiek obidvoch našich plánov teda platí:

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = \ldots = 3$$

To znamená, že pomery dĺžok zodpovedajúcich si úsečiek sa rovnajú tomu istému číslu 3. Inak môžeme povedať, že dĺžky úsečiek druhého plánu sú priamo úmerné dĺžkam zodpovedajúcich si úsečiek v prvom pláne. Pomer dĺžok zodpovedajúcich si úsečiek je číslo 3. Teda platí

$a' = 3 \,.\, a$, $b' = 3 \,.\, b$, $c' = 3 \,.\, c$ atď.

Navzájom zodpovedajúce si body na obr. 6.3 a 6.4 sú napr. body A a A', B a B', ..., F a F', t. j. krajné body navzájom zodpovedajúcich si úsečiek. Pomocou týchto bodov sa dajú určiť aj zodpovedajúce si uhly v skúmanej podobnosti, napríklad uhly CDE a $C'D'E'$.

Teraz porovnajme zodpovedajúce si uhly v obidvoch plánoch, napríklad $F'A'B'$ a FAB; zistíme, že sú zhodné:

$\sphericalangle F'A'B' \cong \sphericalangle FAB$

Podobne platí

$\sphericalangle D'E'F' \cong DEF$, $\sphericalangle C'D'E' \cong \sphericalangle CDE$ atď.

Pomerom dĺžok zodpovedajúcich si úsečiek na obr. 6.3 a 6.4 bolo číslo 3. Pre iné dvojice obrázkov môže byť pomerom dĺžok zodpovedajúcich si úsečiek iné pevné kladné číslo, všeobecne číslo $k > 0$. Potom môžeme matematicky definovať podobnosť ľubovoľných rovinných geometrických útvarov takto:

Dva geometrické útvary nazveme podobné, ak pomery dĺžok všetkých párov navzájom si zodpovedajúcich úsečiek sa rovnajú tomu istému číslu $k > 0$. Číslo $k > 0$ nazývame pomer podobnosti. Aj navzájom zodpovedajúce si uhly sú zhodné.

Pomer podobnosti je pre tú istú podobnosť vždy rovnaký. Preto všeobecne pre dĺžky ktorýchkoľvek dvoch zodpovedajúcich si úsečiek XY a $X'Y'$ platí:

$$d(X'Y') = kd(XY)$$

Význam tohto zápisu už poznáte. Znamená priamu úmernosť dĺžok úsečiek XY a $X'Y'$.

Úloha

Dĺžku úsečky $XY = 6$ cm vynásobte: a) číslom $k = 1{,}5$; b) číslom $k = \frac{1}{2}$; c) číslom $k = 1$. Aké dĺžky majú úsečky $X'Y'$ v prípadoch *a, b, c*? Získané výsledky môžeme zovšeobecniť takto:

Pre $k > 1$ je úsečka $X'Y'$ väčšia ako úsečka XY (ide o zväčšenie), ak pre k platí $0 < k < 1$ je úsečka $X'Y'$ menšia ako úsečka XY (ide o zmenšenie).

Ak $k = 1$, tak zodpovedajúce úsečky sú zhodné.

Cvičenia

1. O obdĺžnikoch $ABCD$ a $EFGH$ viete, že sú podobné. Ak $d(AB) = 5$ cm, $d(BC) = 4$ cm, $d(EF) = 15$ cm, určte pomer podobnosti a vypočítajte dĺžku strany FG druhého obdĺžnika.

2. Dané sú trojuholníky I, II, III a IV s týmito dĺžkami strán: I. $a = 6$ cm, $b = 4$ cm, $c = 3$ cm; II. $m = 12$ cm, $n = 8$ cm, $o = 5$ cm; III. $x = 9$ cm, $y = 6$ cm, $z = 4{,}5$ cm; IV. $r = 3$ cm, $s = 2$ cm, $t = 1{,}5$ cm (strany si zodpovedajú v uvedenom poradí).

   a) Určte, ktoré dvojice trojuholníkov sú podobné a kedy ide o zväčšenie alebo zmenšenie.
   b) Niektorú dvojicu podobných trojuholníkov narysujte a odmerajte zodpovedajúce si uhly.

6.2 Podobnosť trojuholníkov

Podobnosť rovinných útvarov, o ktorej sme hovorili v predchádzajúcom článku, sa samozrejme vzťahuje aj na najjednoduchšie útvary — trojuholníky. Príkladom toho bolo cvičenie 2.

Postup, akým zistíme podobnosť trojuholníkov, sa podobá postupu zisťovania zhodnosti trojuholníkov. Preto si najskôr pripomenieme význam viet o zhodnosti trojuholníkov.

Zhodnosť dvoch daných trojuholníkov nemusíme vždy skúmať tak, že by sme ich prenášali priesvitkou, alebo hľadali zhodné zobrazenie, v ktorom jeden trojuholník je vzorom a druhý obrazom. Namiesto toho zisťujeme, či sú zhodné tri dvojice zodpovedajúcich si údajov, t. j. strán alebo uhlov. Tieto v e t y o z h o d n o s t i t r o j u h o l n í k o v si zopakujeme pomocou prehľadnej tabuľky:

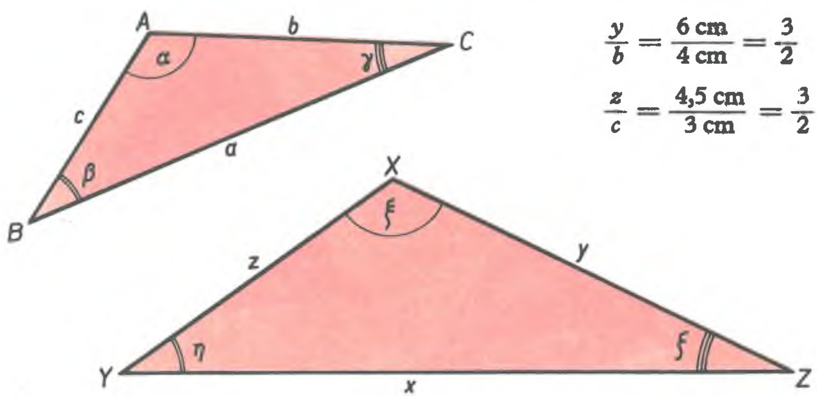
Číslo vety	Veta o zhodnosti trojuholníkov	Označenie vety	Príklad pre $\triangle ABC$ a $\triangle A'B'C'$
I	Ak sa dva trojuholníky zhodujú vo všetkých stranách, sú zhodné.	*sss*	$A'B' \cong AB$ $B'C' \cong BC$ $C'A' \cong CA$
II	Ak sa dva trojuholníky zhodujú v strane a obidvoch uhloch k nej priľahlých, sú zhodné.	*usu*	$A'B' \cong AB$ $\alpha' \cong \alpha$ $\beta' \cong \beta$
III	Ak sa dva trojuholníky zhodujú v dvoch stranách a v uhle nimi zovretom, sú zhodné.	*sus*	$A'B' \cong AB$ $\alpha' \cong \alpha$ $C'A' \cong CA$

Pri riešení cvičenia 2b ste výpočtom zistili, že napríklad trojuholníky I a III sú podobné (obr. 6.5), pretože pre pomery dĺžok párov zodpovedajúcich si strán platí:

$$\frac{x}{a} = \frac{9\ \text{cm}}{6\ \text{cm}} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{y}{b} = \frac{6\ \text{cm}}{4\ \text{cm}} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{z}{c} = \frac{4{,}5\ \text{cm}}{3\ \text{cm}} = \frac{3}{2}$$



Obr. 6.5

Pomer podobnosti trojuholníkov XYZ a ABC je teda $k = \frac{3}{2}$, zodpovedajúce si body sú X a A, Y a B, Z a C.

Ak urobíme presnú konštrukciu týchto trojuholníkov a ak porovnáme zodpovedajúce si uhly graficky (pozri označenie na obr. 6.5), zistíme, že

$$\xi \cong \alpha, \quad \eta \cong \beta, \quad \zeta \cong \gamma$$

Takto sme overili* i ďalšiu vlastnosť podobných útvarov, t. j. zhodnosť zodpovedajúcich si uhlov.

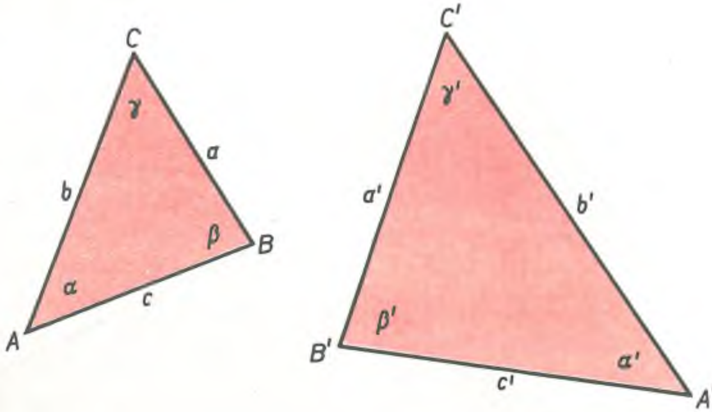
Pritom sme vyšetrovali pomery dĺžok iba troch párov zodpovedajúcich si úsečiek, a nie všetkých, ako sme uviedli v definícii na str. 11.

Tým sme ukázali, že podobnosť trojuholníkov sa dá zisťovať podobným postupom ako zhodnosť trojuholníkov podľa vety *sss*.

Teraz vyslovíme všeobecne tzv. vetu *sss* o podobnosti trojuholníkov:

> I. Ak sa rovnajú pomery dĺžok každých dvoch zodpovedajúcich si strán dvoch trojuholníkov, sú tieto trojuholníky podobné.

Vetu môžeme skrátene zapísať napríklad pre trojuholníky ABC a $A'B'C'$ (obr. 6.6) takto:



Obr. 6.6

* Táto vlastnosť sa dá matematicky dokázať, ale pre zdĺhavosť tento dôkaz vynecháme.

Ak $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = k$, tak trojuholníky $A'B'C'$ a ABC sú podobné a zároveň platí: $\alpha' \cong \alpha$, $\beta' \cong \beta$, $\gamma' \cong \gamma$.

Stručne píšeme

$$\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC \tag{1}$$

a čítame: Trojuholník $A'B'C'$ je podobný s trojuholníkom ABC.

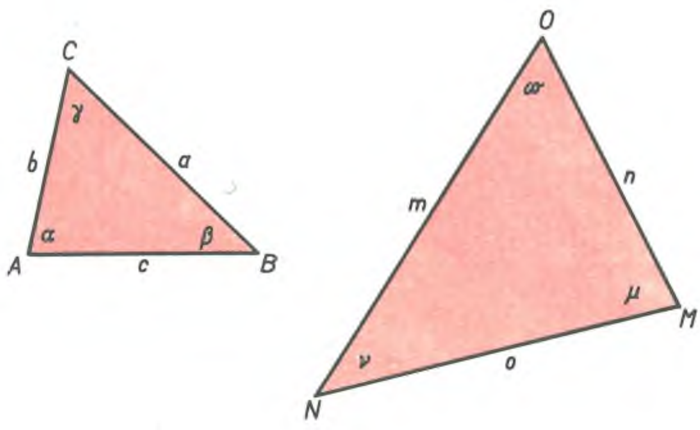
Poznámka

Poradie bodov v zápise (1) nie je náhodné. Zodpovedajúce si body sú na rovnakých miestach zápisu. Napríklad zodpovedajúce si body B' a B sú na druhom mieste zápisu (1).

Matematicky sa dá dokázať aj **obrátená veta**:

Ak sa zhodujú dva trojuholníky vo všetkých troch uhloch, rovnajú sa aj pomery dĺžok každých dvoch zodpovedajúcich si strán a obidva trojuholníky sú podobné.

Túto vetu môžeme skrátene zapísať napríklad pre trojuholníky ABC a MNO (obr. 6.7) takto:



Obr. 6.7

Ak $\mu \cong \alpha$, $\nu \cong \beta$, $\omega \cong \gamma$, tak $\frac{m}{a} = \frac{n}{b} = \frac{o}{c} = k$ a trojuholníky MNO a ABC sú podobné (pre $k = 1$ sú zhodné):

$\triangle MNO \sim \triangle ABC$

Pretože pre veľkosti vnútorných uhlov v trojuholníku platí $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ prípadne $\mu + \nu + \omega = 180°$, stačí vedieť, že sú zhodné dva páry zodpovedajúcich si uhlov. Preto uvedenú vetu obyčajne vyslovujeme v zjednodušenom znení ako tzv. vetu *uu* o podobnosti trojuholníkov:

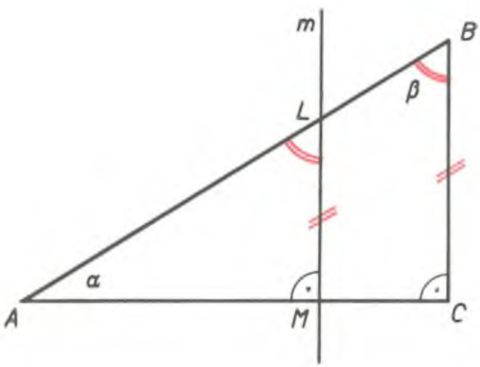
> II. Ak sa dva trojuholníky zhodujú v dvoch uhloch, sú podobné.

Táto veta zodpovedá vete *usu* o zhodnosti trojuholníkov. Prečo?

Príklad 1

Zostrojte ľubovoľný pravouhlý trojuholník ABC s pravým uhlom pri vrchole C (obr. 6.8). Bodom M, ktorý leží medzi bodmi A, C, veďte priamku m rovnobežne s priamkou BC. Označme písmenom L priesečník priamky m s preponou AB.
Dokážte, že trojuholníky ABC a ALM sú podobné.

Riešenie (obr. 6.8)



Obr. 6.8

Pretože priamky m a BC sú rovnobežné, platí podľa vety o dvoch rovnobežkách preťatých priečkou:

$$\sphericalangle ALM \cong \sphericalangle ABC$$

Podľa tej istej vety sú aj uhly AML a ACB zhodné (a dokonca pravé).

Trojuholníky ABC a ALM sa teda zhodujú v dvoch uhloch a podľa vety *uu* o podobnosti trojuholníkov sú podobné; stručne to zapisujeme takto:

$$\triangle ALM \sim \triangle ABC$$

Z podobnosti trojuholníkov ALM a ABC zároveň vyplýva

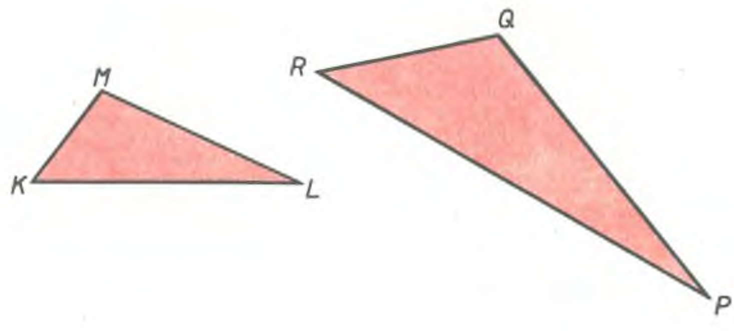
$$\frac{d(AL)}{d(AB)} = \frac{d(AM)}{d(AC)} = \frac{d(LM)}{d(BC)} = k$$

pričom číslo k znamená pomer podobnosti. V našom prípade zrejme $0 < k < 1$, takže trojuholník ALM je zmenšením trojuholníka ABC.

Cvičenia

1. Dokážte, že sú podobné a) každé dva rovnostranné trojuholníky; b) každé dva pravouhlé rovnoramenné trojuholníky.

2. Na obrázku 6.9 sú narysované trojuholníky KLM a PQR. Odmerajte ich strany a zistite, či sú podobné; v kladnom prípade podobnosť zapíšte a uveďte pomer podobnosti.



Obr. 6.9

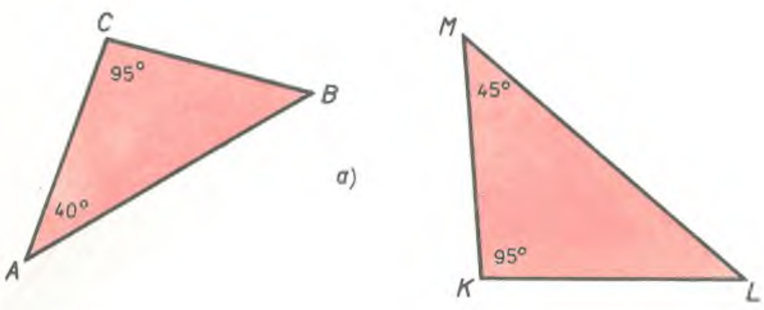
3. Zostrojte trojuholník $K'L'M'$ so stranou $d(K'L') = 6$ cm podobný trojuholníku KLM, ktorý má strany s dĺžkami $d(KL) = 4{,}5$ cm, $d(KM) = 5$ cm, $d(LM) = 7$ cm. (Návod: Zvyšné dĺžky strán trojuholníka $K'L'M'$ najskôr vypočítajte, potom porovnajte graficky i zodpovedajúce si uhly trojuholníkov.)

4. Dokážte, že v lichobežníku $ABCD$ ($\leftrightarrow AB \parallel \leftrightarrow CD$), ktorého uhlopriečky sa pretínajú v bode S, platí:

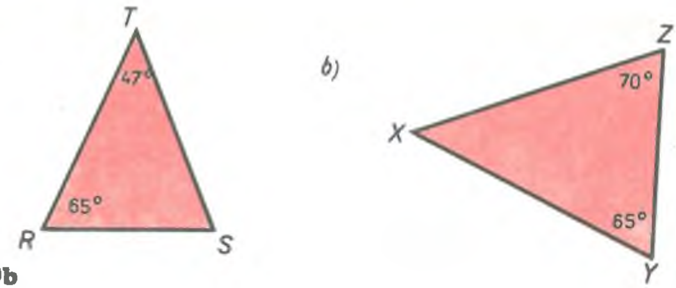
$$\frac{d(SA)}{d(SC)} = \frac{d(SB)}{d(SD)} = \frac{d(AB)}{d(CD)}$$

5. Trojuholníky ABC a TUV (v obvyklom označení) majú strany s dĺžkami $a = 8{,}8$ cm, $b = 5{,}6$ cm, $c = 4{,}2$ cm, $t = 84$ mm, $u = 132$ mm, $v =$ $= 63$ mm. Zistite, či sú podobné; ak áno, tak určte pomer podobnosti a zapíšte túto podobnosť. (Návod: Usporiadajte zodpovedajúce si dvojice strán.)

6. Zistite, či dvojice trojuholníkov na obr. 6.10 v prípadoch a, b sú podobné; podobnosť, ktorá platí, zapíšte.



Obr. 6.10a



Obr. 6.10b

7. Zostrojte trojuholník ABC, ak sú dané dĺžky strán $a = 8$ cm, $b = 6$ cm, $c = 7$ cm (uhly označte α, β, γ). Ďalej zostrojte trojuholník $A'B'C'$ tak, aby platilo $a' = \frac{3}{4}a$, $\beta' \cong \beta$, $\gamma' \cong \gamma$. Podľa ktorej vety sú tieto trojuholníky podobné?

8. K trojuholníku ABC ($a = 9$ cm, $b = 10{,}5$ cm, $c = 6$ cm) zostrojte podobný trojuholník $A'B'C'$ (pomer podobnosti zvoľte $\frac{2}{3}$). V týchto trojuholníkoch zostrojte: a) výšky vrcholmi C a C'; b) ťažnice t_a a t'_a. Tieto úsečky odmerajte a vypočítajte pomery $\frac{v'_c}{v_c}$ a $\frac{t'_a}{t_a}$. Viete svoj výsledok zovšeobecniť?

6.3 Tretia veta o podobnosti trojuholníkov; konštrukčné využitie

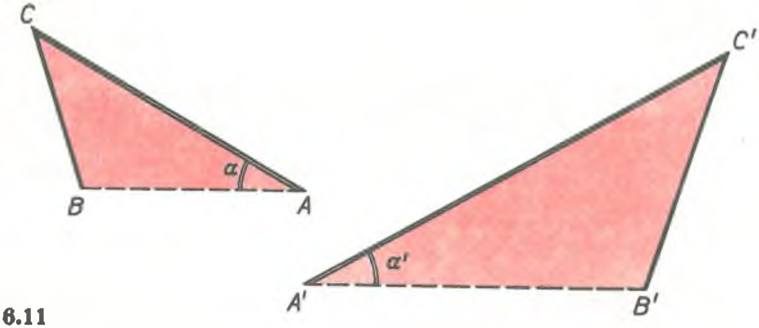
K vetám *sss* a *usu* o zhodnosti trojuholníkov sme už našli zodpovedajúce si vety o podobnosti trojuholníkov. Dá sa aj dokázať, že k vete *sus* o zhodnosti trojuholníkov existuje obdobná veta o podobnosti trojuholníkov *sus*:

> III. Ak majú dva trojuholníky rovnaký pomer dĺžok dvoch párov zodpovedajúcich si strán a ak sa zhodujú v uhle nimi zovretom, sú tieto trojuholníky podobné.

Napríklad na obr. 6.11 sú znázornené trojuholníky ABC a $A'B'C'$, pre ktoré platí:

$$\frac{d(A'B')}{d(A'C')} = \frac{d(AB)}{d(AC)} \qquad (1)$$

$$\alpha' \cong \alpha$$



Obr. 6.11

Obidve strany rovnosti (1) násobíme zlomkom $\frac{d(A'C')}{d(AB)}$. Na ľavej strane sa kráti $d(A'C')$, na pravej $d(AB)$. Takto dostaneme

$$\frac{d(A'B')}{d(AB)} = \frac{d(A'C')}{d(AC)}$$

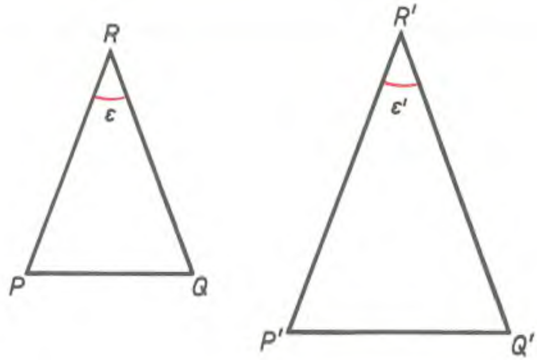
Potom sú trojuholníky ABC a $A'B'C'$ podľa III. vety o podobnosti trojuholníkov podobné.

Príklad 1

Dokážte, že každé dva rovnoramenné trojuholníky so zhodnými uhlami proti základniam sú podobné.

Dôkaz

Rovnoramenné trojuholníky PQR a $P'Q'R'$ na obr. 6.12 sa zhodujú v uhloch proti základniam; zrejme teda platí:



Obr. 6.12

$$\frac{d(R'Q')}{d(R'P')} = \frac{d(RQ)}{d(RP)} = 1$$

čiže

$$\frac{d(R'Q')}{d(RQ)} = \frac{d(R'P')}{d(RP)}$$

$$\varepsilon' \cong \varepsilon$$

Preto sú naše trojuholníky podľa tretej vety o podobnosti trojuholníkov podobné. Túto vlastnosť podobných rovnoramenných trojuholníkov použijeme pri konštrukcii pomocou tzv. redukčného uhla.

Príklad 2

Úsečku s dĺžkou a zmeňte v pomere $\frac{m}{n}$. (Konštrukciu urobte pre $a =$ $= 4{,}5$ cm, $m = 1{,}9$ cm, $n = 3$ cm.)

Riešenie

Zmeniť úsečku s dĺžkou a v pomere $\frac{m}{n}$ znamená určiť úsečku s dĺžkou x, pričom platí

$$x = \frac{m}{n} \cdot a$$

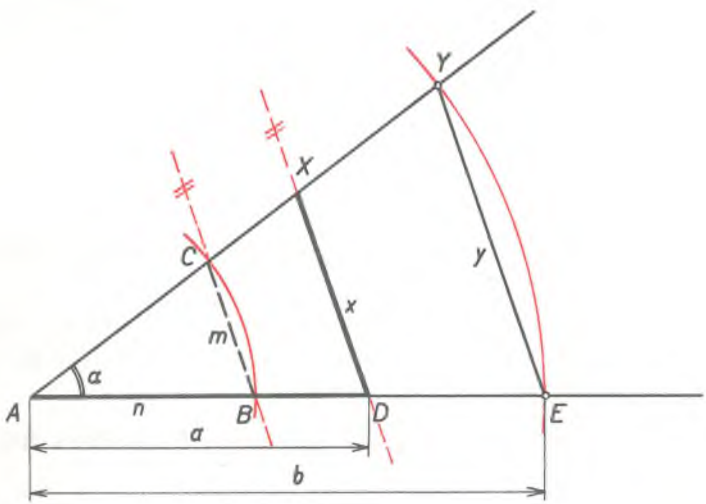
(Stručne hovoríme, že zmeníme úsečku v pomere $\frac{m}{n}$.)

Obidve strany rovnosti vynásobíme zlomkom $\frac{n}{mx}$. Na ľavej strane sa kráti x, na pravej čísla m a n. Takto dostaneme

$$\frac{n}{m} = \frac{a}{x}$$

Táto rovnosť môže predstavovať napríklad rovnosť pomerov dĺžok ramena a základne dvoch podobných trojuholníkov (ak však $m < 2n$). Tieto trojuholníky sa zhodujú v uhle proti základni. Z toho vyplýva jednoduchá konštrukcia pomocou **redukčného uhla:** Zostrojíme rovnoramenný trojuholník s ramenami dĺžok $d(AB) = d(AC) = n = 3$ cm a základňou s dĺžkou $d(BC) = m = 1{,}9$ cm (obr. 6.13). Jeho uhol α je redukčný uhol. Bod D zostrojíme tak, že $d(AD) = a = 4{,}5$ cm. Bodom D potom zostrojíme rovnobežku d s priamkou BC. Priesečník priamky d s ramenom AC redukčného uhla α je bod X; zrejme platí

$$\frac{n}{m} = \frac{a}{d(DX)}$$



Obr. 6.13

takže DX je hľadaná úsečka s dĺžkou $x = \frac{m}{n} . a = \frac{1,9}{3} . 4,5$ cm.

Získaný redukčný uhol môžeme potom výhodne použiť na zmenu ďalších úsečiek v tom istom pomere $\frac{m}{n}$. Na obr. 6.13 je $d(EY) = y$ dĺžka úsečky, ktorá vznikla z úsečky AE s dĺžkou b takisto zmenou v pomere $\frac{1,9}{3}$.

Redukčný uhol používame v technickej praxi, keď treba zmeniť väčší počet úsečiek v danom pomere. Nerysujeme však už rovnobežky so stranou BC, ale napr. bodom E opíšeme oblúk kružnice so stredom A tak, aby preťal rameno AC. Dostaneme tak bod Y. Hľadanú úsečku EY už ani nerysujeme; prenesieme ju priamo kružidlom (body E, Y sú určené).

Ako sme uviedli, opísaný redukčný uhol využívame pri zmenách úsečky v pomere $\frac{m}{n}$ iba pre $m < 2n$. Pri inom vzťahu čitateľa a menovateľa zlomku sa dá použiť konštrukcia, ktorej dôkaz sa opiera o vetu *uu* o podobnosti trojuholníkov. Ukážeme si to na príkladoch.

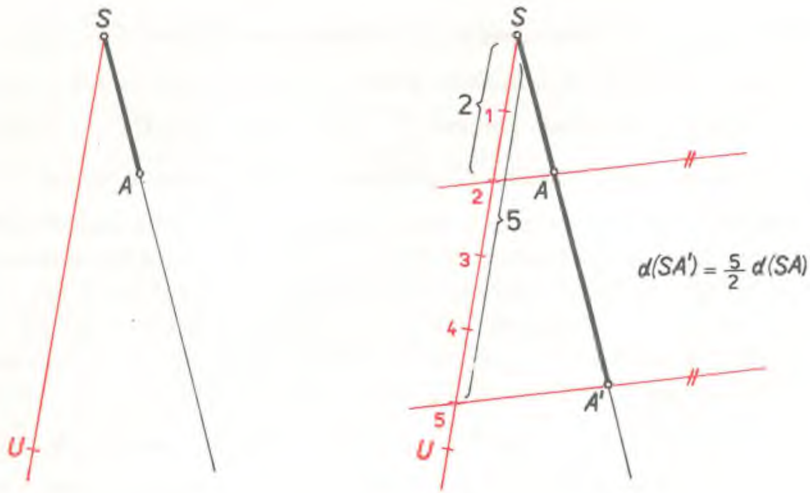
Príklad 3

Úsečku SA s dĺžkou 3,7 cm zmeňte v pomere $\frac{5}{2}$ (t. j. v pomere 5 : 2).

Riešenie

Narysujeme úsečku SA s dĺžkou 3,7 cm a bodom S ako začiatkom narysujeme pomocnú polpriamku SU (obr. 6.14a), ktorá neobsahuje úsečku SA. Na polpriamku SU nanesieme postupne päťkrát rovnakú úsečku napr. s dĺžkou 2 cm. Takto dostaneme body 2 a 5 (obr. 6.14b). Bod 2 (zodpovedá menovateľu zlomku) spojíme s bodom A priamkou $A2$. Rovnobežka m bodom 5 s priamkou $A2$ pretne polpriamku SA v bode A', pre ktorý platí:

$$d(SA') = \frac{5}{2}\, d(SA)$$



Obr. 6.14a, b

Dokážeme to: Pretože priamky m a $A2$ sú rovnobežné, uhly $S2A$ a $S5A'$ sú zhodné. Uhol $5SA'$ je spoločný pre trojuholníky $S2A$ a $S5A'$. Podľa vety uu sú teda obidva trojuholníky podobné a pre dĺžky ich strán platí

$$\frac{d(SA')}{d(SA)} = \frac{d(S5)}{d(S2)} = \frac{5}{2}$$

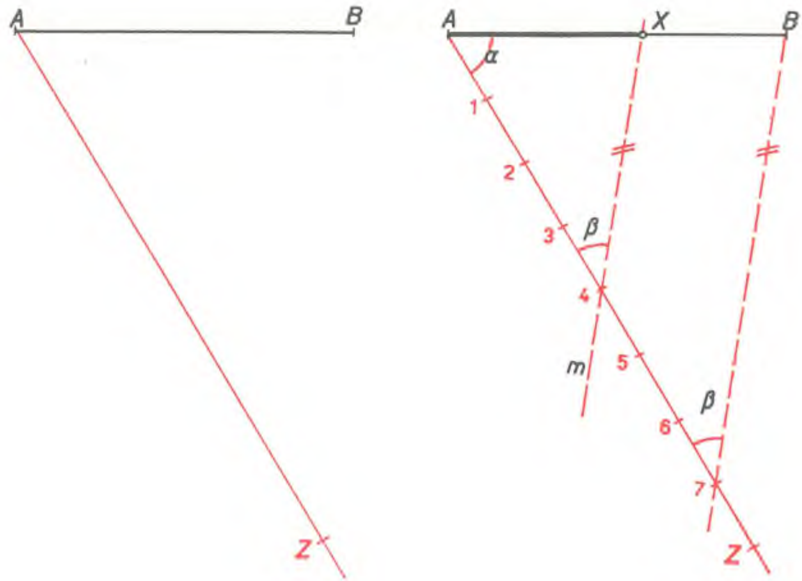
Teda

$$d(SA') = \frac{5}{2}\, d(SA)$$

v tomto prípade ide o zväčšenie úsečky SA.

Príklad 4

Zostrojte úsečku AX, ktorej dĺžka sa rovná $\frac{4}{7}$ dĺžky úsečky AB (obr. 6.15a), $d(AB) = 9$ cm.



Obr. 6.15a, b

Riešenie

Narysujeme úsečku $d(AB) = 9$ cm a bodom A ako začiatkom narysujeme pomocnú polpriamku AZ (neobsahuje úsečku AB). Na túto polpriamku nanesieme postupne sedemkrát ľubovoľnú úsečku (napr. s dĺžkou 1,5 cm) tak, aby vzniknuté úsečky mali vždy spoločný len jeden krajný bod (obr. 6.15b). Takto dostaneme body 1, 2, 3 až 7. Bodom označeným číslom 4 zostrojíme rovnobežku s priamkou $B7$. Priesečníkom priamky m a úsečky AB je hľadaný bod X, pre ktorý platí

$$d(AX) = \frac{4}{7}\, d(AB)$$

Dokážeme to: Pretože priamky m a $B7$ sú rovnobežné, uhly $A4X$ a $A7B$ sú zhodné. Uhol $BA7$ je spoločný trojuholníkom $A4X$ a $A7B$. Obidva trojuholníky sú teda podľa vety *uu* podobné a pre dĺžky ich strán platí

$$\frac{d(AX)}{d(AB)} = \frac{d(A4)}{d(A7)} = \frac{4}{7}$$

teda $d(AX) = \frac{4}{7}\, d(AB)$. V tomto príklade šlo o zmenšenie úsečky AB.

Poznámka

Text príkladu 4 môžeme vysloviť aj takto: Danú úsečku AB s dĺžkou 9 cm rozdeľte v pomere 4 : 3.

Riešenie

Na pomocnú polpriamku AZ (obr. 6.15b) nanesieme spolu $4 + 3 = 7$ zhodných úsečiek. Ďalej konštrukcia prebieha tak ako v príklade 4. Dĺžky úsečiek AX a XB sú potom v danom pomere 4 : 3.

Cvičenia

1. Zistite, ktoré dvojice trojuholníkov sú podobné, ak majú dĺžky strán a veľkosti uhlov (v obvyklom označení):

   a) $a = 6$ cm, $b = 8$ cm, $c = 9$ cm; $m = 10$ cm, $n = \frac{40}{3}$ cm, $p = 15$ cm;

   b) $d(RS) = 8$ cm, $d(RT) = 6$ cm, $v(\sphericalangle TRS) = 70°$, $d(KL) = 12$ cm, $d(KM) = 9$ cm, $v(\sphericalangle MKL) = 75°$;

   c) $a = 7{,}5$ cm, $b = 6$ cm, $c = 5$ cm; $a' = 5$ cm, $b' = 4$ cm, $c' = \frac{10}{3}$ cm.

2. Stredy strán AB, BC a CA trojuholníka ABC označme postupne C', A', B'. Dokážte, že trojuholníky ABC a $A'B'C'$ sú podobné a určte pomer tejto podobnosti. Čo platí o dĺžkach úsečiek BC a $B'C'$?

3. Ako sa zmení obsah obdĺžnika s dĺžkami strán $a = 50$ cm, $b = 72$ cm, ak dĺžku každej strany zväčšíme trikrát? (Uvažujte o obdĺžniku, ktorý je s hľadaným obdĺžnikom podobný s pomerom podobnosti $k = 3$.) Zovšeobecnite výsledok pre ľubovoľné $k > 0$.

4. V danom pomere k zmeňte úsečky s dĺžkami r, s, t (konštrukčne a skontrolujte výpočtom):

a) $k = \frac{1}{3}$, $r = 7$ cm, $s = 8{,}5$ cm, $t = 6{,}8$ cm;

b) $k = \frac{4}{5}$, $r = 10{,}5$ cm, $s = \frac{37}{4}$ cm, $t = \frac{23}{3}$ cm;

c) $k = \frac{7}{6}$, $r = 4{,}2$ cm, $s = 6{,}9$ cm, $t = 5{,}7$ cm.

5. Pomer podobnosti dvoch trojuholníkov je a) číslo 2; b) číslo $k > 0$. Určte pomer obsahov týchto trojuholníkov.

6. Zostrojte najprv trojuholník ABC s dĺžkami strán $a = 5$ cm, $b = 3{,}8$ cm, $c = 4{,}2$ cm. Potom zostrojte trojuholník $A'B'C'$ podobný s trojuholníkom ABC, ak je pomer podobnosti 1,7.

7. Trojuholník ABC má dĺžky strán $a = 5{,}2$ cm, $b = 48$ mm, $c = 0{,}6$ dm. K trojuholníku ABC zostrojte podobný trojuholník $A'B'C'$, ktorého obvod o' má dĺžku 13,5 cm.

8. Úsečku AB s dĺžkou 11 cm rozdeľte na takýto počet úsečiek: a) na tri; b) na päť; c) na osem.

9. Úsečku MN s dĺžkou 10 cm rozdeľte na dve úsečky v pomere a) 2 : 3; b) 4 : 3; c) 5 : 7.

10. Sami zostrojte prehľadnú tabuľku viet o podobnosti trojuholníkov podobnú tabuľke viet o zhodnosti trojuholníkov.

6.4 Použitie podobnosti

Všetci určite viete zo zemepisu, čo je mierka mapy, napr. 1 : 100 000 alebo 1 : 50 000 a pod. Nie je to nič iné, ako pomer podobnosti určený dĺžkou úsečky na mape a dĺžkou k nej prislúchajúcej úsečky v skutočnosti (obidve dĺžky sa musia vyjadriť v rovnakej jednotke). Na mape s mierkou 1 : 100 000 zodpovedá jeden centimeter na mape 100 000 centimetrom, teda 1 kilometru v skutočnosti. Táto mierka mapy je i pomerom podobnosti ľubovoľných obrazcov vytýčených na mape a v skutočnosti.

Príklad 1

Na obr. 6.16 vidíme časť z turistickej mapy Pavlovských vrchov v okolí Mikulova. Zistite vzdialenosť námestia v Mikulove od stredu Horných Věstonic.

Riešenie

Pretože cesta je pomerne priama, zistíme dosť presne vzdialenosti nanášaním úsečiek dĺžky 2 centimetre alebo 1 centimeter na príslušnú cestu. Zistíme, že vzdialenosť Mikulova M' a Horných Věstonic H' na mape s mierkou 1 : 50 000 je 17 centimetrov. To znamená rovnosť pomerov

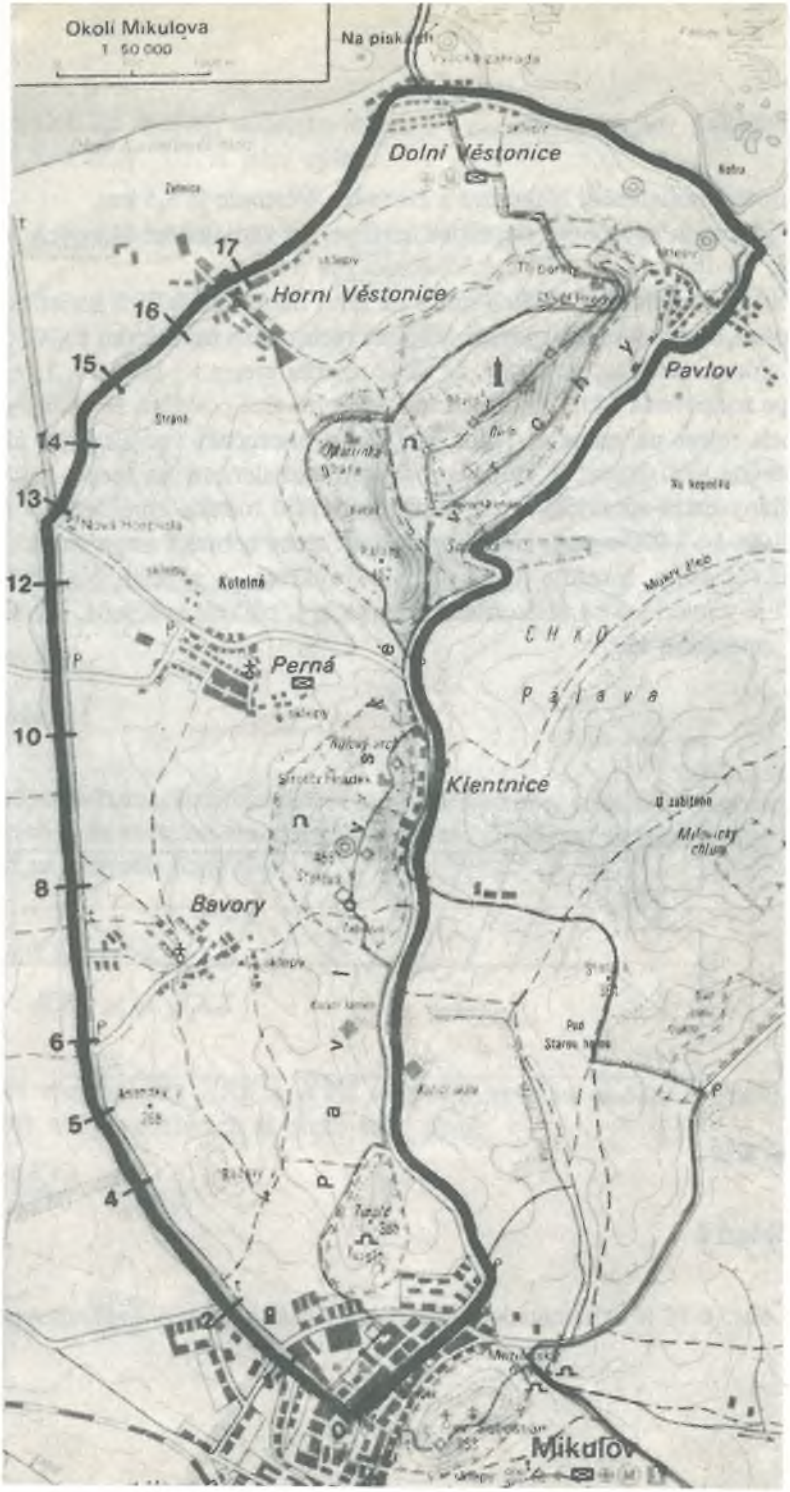
$$\frac{\text{vzdialenosť Mikulova } M' \text{ a Horných Věstonic } H' \text{ na mape}}{\text{vzdialenosť Mikulova } M \text{ a Horných Věstonic } H \text{ v skutoč.}} = \frac{1}{50\,000}$$

stručne

$$\frac{d(M'H')}{d(MH)} = \frac{1}{50\,000}$$

teda

$$d(MH) = 50\,000 \,.\, d(M'H') = 50\,000 \,.\, 17 \text{ cm} = 850\,000 \text{ cm} = 8{,}5 \text{ km}$$



Okolí Mikulova
1 50 000
Na pískách
Dolní Věstonice
Horní Věstonice
Pavlov
Na kopečku
Kotelná
Nová Hospoda
Perná
C H K O
P á l a v a
Klentnice
U zabitého
Milovický chlum
Bavory
Pod Starou horou
Mikulov
17
16
15
14
13
12
10
8
6
5
4
2

Obr. 6.16

Odpoveď:

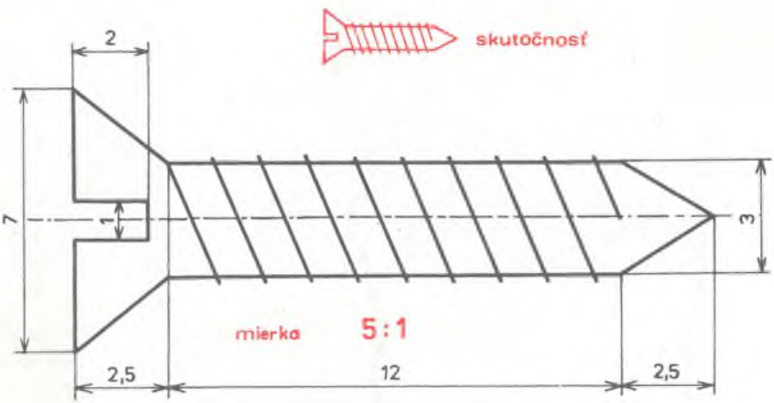
Skutočná vzdialenosť Mikulova a Horných Věstonic je 8,5 km.

Podobným spôsobom napríklad zistíme, že vzdialenosť Horných Věstonic od Pavlova (cez Dolné Věstonice) je 5 km.

Zistite vzdialenosti ďalších miest na tejto mape i na ďalších turistických mapách, ktoré máte k dispozícii. Väčšina týchto máp má mierku 1 : 100 000.

Ľahko si teda zapamätáme, že ak je mierka mapy 1 : 100 000, 1 cm na mape zodpovedá 1 km v skutočnosti. Môžeme tiež povedať, že vzdialenosť dvoch miest na mape je jedna stotisícina skutočnej vzdialenosti, alebo skutočná vzdialenosť je stotisícnásobkom vzdialenosti na mape.

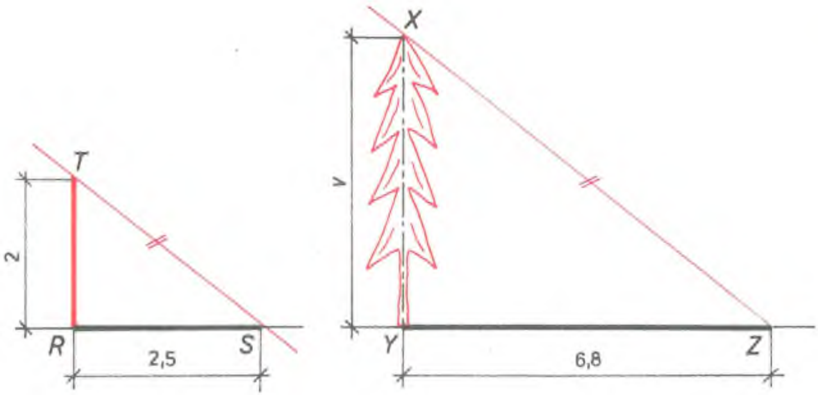
Plány majú spravidla mierky, ktoré udávajú menšie zmenšenie 1 : 10, 1 : 100, 1 : 1 000 a pod. Niekedy však, ak treba zobraziť napr. malú strojovú súčiastku, musíme ju na pláne — výkrese — zväčšiť. Na obrázku 6.17 je v mierke 5 : 1 znázornená skrutka, t. j. päťkrát zväčšená, ako zistíme zmeraním kót.



Obr. 6.17

Príklad 2

Na obr. 6.18 je schematicky znázornená situácia: Zvislá dvojmetrová tyč vrhá tieň 2,5 m dlhý, neďaleko je strom s neznámou výškou, ktorého tieň je 6,8 m dlhý. Určte jeho výšku.



Obr. 6.18

Riešenie

Predpokladajme, že dvojmetrová tyč i kmeň stromu stoja kolmo na zemský povrch a že svetelné slnečné lúče môžeme považovať za rovnobežné. Potom na obrázku 6.18 platí:

$$\sphericalangle\, TRS \cong \sphericalangle\, XYZ$$

$$\sphericalangle\, RTS \cong \sphericalangle\, YXZ$$

takže trojuholníky TRS a XYZ sú podľa vety *uu* podobné. Pre dĺžky párov zodpovedajúcich si strán teda platí:

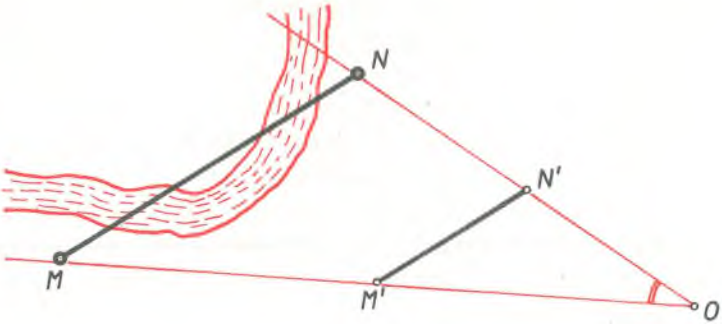
$$\frac{d(XY)}{d(TR)} = \frac{d(YZ)}{d(RS)}$$

čiže

$$\frac{v}{2\text{m}} = \frac{6{,}9\text{ m}}{2{,}5\text{ m}}$$

Po výpočte dostaneme, že $v = 2 \cdot 2{,}72 \text{ m} = 5{,}44 \text{ m}$. Výška stromu je teda približne necelých 5,5 m.

Príklad 3



Obr. 6.19

Na obr. 6.19 sú vyznačené dva stožiare vysokého napätia. Meander (ohyb) rieky nedovoľuje priamo zamerať ich vzdialenosť. Dokážte správnosť tohto postupu:

Zvolíme stanovište O, ktorého vzdialenosť od miest M a N sa môže v teréne zmerať. Určíme stred M' úsečky OM a stred N' úsečky ON. Vzdialenosť bodov M' a N' sa rovná polovici hľadanej vzdialenosti bodov M a N.

Dôkaz

Toto tvrdenie vyplýva z podobnosti trojuholníkov $OM'N'$ a OMN. Pretože platí

$$\frac{d(OM')}{d(OM)} = \frac{d(ON')}{d(ON)} = \frac{1}{2}$$

a uhly $M'ON'$ a MON sú zhodné. Preto podľa vety *sus* o podobnosti trojuholníkov platí

$$\triangle\ M'ON' \sim \triangle\ MON$$

a teda aj

$$\frac{d(M'N')}{d(MN)} = \frac{1}{2}$$

čiže

$$d(MN) = 2\ .\ d(M'N')$$

Poznámka

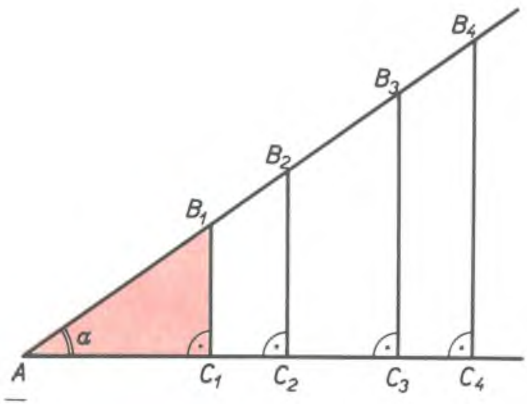
Úsečka, ktorá spája stredy dvoch strán trojuholníka, sa nazýva **stredná priečka**. V príklade 3 sme dokázali, že jej dĺžka sa rovná polovici dĺžky zvyšnej strany. Zdôraznite aj to, že priamky MN a $M'N'$ sú rovnobežné.

Príklad 4

Pravouhlé trojuholníky AB_1C_1, AB_2C_2, AB_3C_3 atď. na obr. 6.20 sa zhodujú v dvoch uhloch, t. j. v spoločnom uhle α a ďalej v pravom uhle pri vrcholoch C_1, C_2, C_3 atď. Sú teda navzájom podobné podľa vety *uu*:

$$\triangle\ AB_1C_1 \sim \triangle\ AB_2C_2 \sim \triangle\ AB_3C_3 \sim \text{atď.}$$

Napríklad v podobných trojuholníkoch AB_1C_1 a AB_2C_2 sa rovnajú



Obr. 6.20

pomery dĺžok odvesien, ktoré ležia proti uhlu α, a dĺžok odvesien priľahlých k uhlu α:

$$\frac{d(B_1C_1)}{d(B_2C_2)} = \frac{d(AC_1)}{d(AC_2)} \tag{1}$$

Podobne na základe podobnosti trojuholníkov AB_1C_1 a AB_3C_3 dostaneme

$$\frac{d(B_1C_1)}{d(B_3C_3)} = \frac{d(AC_1)}{d(AC_3)} \tag{2}$$

a z podobnosti trojuholníkov AB_1C_1 a AB_4C_4 vyplýva

$$\frac{d(B_1C_1)}{d(B_4C_4)} = \frac{d(AC_1)}{d(AC_4)} \tag{3}$$

(Tento výpočet môžeme použiť pre dĺžky strán ľubovoľného páru podobných trojuholníkov, z ktorých jeden je AB_1C_1.) Teraz rovnosti (1), (2), (3) a podobne získané upravíme tak, že zlomok na ľavej strane tvorí veľkosti strán trojuholníka AB_1C_1; dostaneme

$$\frac{d(B_1C_1)}{d(AC_1)} = \frac{d(B_2C_2)}{d(AC_2)}, \quad \frac{d(B_1C_1)}{d(AC_1)} = \frac{d(B_3C_3)}{d(AC_3)} \text{ atď.}$$

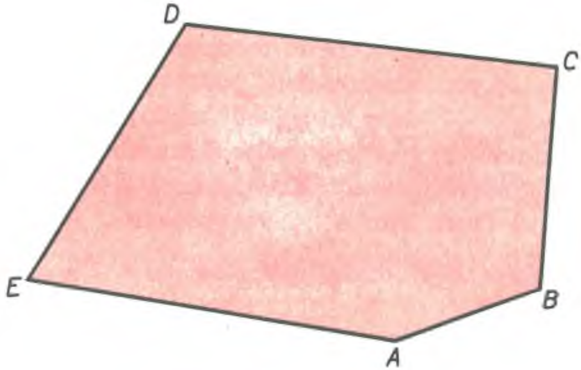
Teda platí

$$\frac{d(B_1C_1)}{d(AC_1)} = \frac{d(B_2C_2)}{d(AC_2)} = \frac{d(B_3C_3)}{d(AC_3)} = \ldots = t$$

Tento výsledok môžeme vyjadriť slovami: *Pomery dĺžok odvesien podobných pravouhlých trojuholníkov sa navzájom rovnajú tomu istému číslu t* (význam tohto čísla ešte budeme poznať).

Cvičenia

1. Na obr. 6.21 je v mierke 1 : 1 000 znázornený pozemok, ktorý má tvar nepravidelného päťuholníka $ABCDE$. Odmerajte dĺžku jeho strán na obr. 6.21 a potom vypočítajte, koľko pletiva treba na jeho oplotenie.



Obr. 6.21

2. Komín neznámej výšky vrhá tieň 45 m dlhý. V tom istom okamihu metrová tyč upevnená kolmo na povrch má tieň 85 cm. Vypočítajte výšku komína za predpokladu, že slnečné svetelné lúče sú rovnobežné a povrch zeme je vodorovný.

3. Rám obrazu je z lišty 6 cm širokej. Rozmery obrazu sú 74 cm a 57 cm. Tvorí vnútorná a vonkajšia hranica rámu dva podobné obdĺžniky?

4. Stavebná parcela má tvar štvoruholníka $MNOP$; jeho odmerané rozmery majú dĺžky $d(MN) = 38$ m, $d(NO) = 40$ m, $d(MP) = 42$ m, $d(OP) = 42$ m, $d(MO) = 60$ m. Narysujte plán tejto parcely v mierke 1 : 500. Zostrojte kolmice bodmi P a N na priamku OM. Ich päty označte P_1, prípadne N_1. Dĺžky úsečiek PP_1 a NN_1 využite na výpočet výmery parcely.

5. Na obr. 6.20 v príklade 4 sme zistili, že trojuholníky AB_1C_1, AB_2C_2, AB_3C_3 atď. sú podobné. Obdobným postupom overte, že aj pomery dĺžok odvesien a prepony týchto trojuholníkov sa navzájom rovnajú tomu istému číslu (napr. $\frac{d(B_1C_1)}{d(AB_1)}$ atď., prípadne $\frac{d(AC_1)}{d(AB_1)}$ atď.).

6.5 Rovnoľahlosť

Oboznámili ste sa už s rôznymi zobrazeniami, napríklad stredovou súmernosťou, osovou súmernosťou, posunutím a identitou. Pri týchto zobrazeniach je vždy daný jednoduchý konštrukčný predpis, ktorý každému bodu z množiny vzorov priradí bod množiny obrazov (tieto množiny sú spravidla priamky, roviny alebo priestor). Všetky uvedené zobrazenia majú tieto spoločné vlastnosti:

a) *Pre obraz $X'Y'$ úsečky XY platí*
$X'Y' \cong XY$

b) *Obraz uhla napr. $\sphericalangle A'V'B'$ je zhodný so svojím vzorom $\sphericalangle AVB$, t. j. platí*
$\sphericalangle A'V'B' \cong \sphericalangle AVB$

c) *Obraz geometrického útvaru je zhodný so svojím vzorom.*

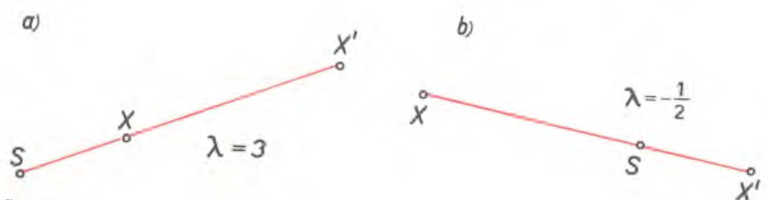
Vlastnosti a), b), c) sú príčinou, prečo **zobrazenia** *s týmito vlastnosťami nazývame* **zhodné**.

Teraz si opíšeme *zobrazenie, ktoré priraďuje ako vzor a obraz dva podobné obrazce*, tzv. **podobné zobrazenie**. Nazývame ho **rovnoľahlosť** a je dané týmto konštrukčným predpisom (obr. 6.22 a,b).

Daný je *pevný bod S*, tzv. *stred rovnoľahlosti* a *reálne číslo λ rôzne od nuly, tzv. koeficient rovnoľahlosti*. Ku každému vzoru, t. j. bodu X roviny, zostrojíme zodpovedajúci obraz, t. j. bod X' takto:

a) Ak bod $X = S$, splynie i jeho obraz X' s bodom S (tzn. $X' = X = S$ je *samodružný bod*).

b) Ak $X \neq S$, tak pre jeho obraz X' platí $d(SX') = |\lambda| \cdot d(SX)$ pričom bod X' leží na polpriamke SX pre $\lambda > 0$ (obr. 6.22a) a pre $\lambda < 0$ leží bod X' na polpriamke opačnej k polpriamke SX (obr. 6.22 b).

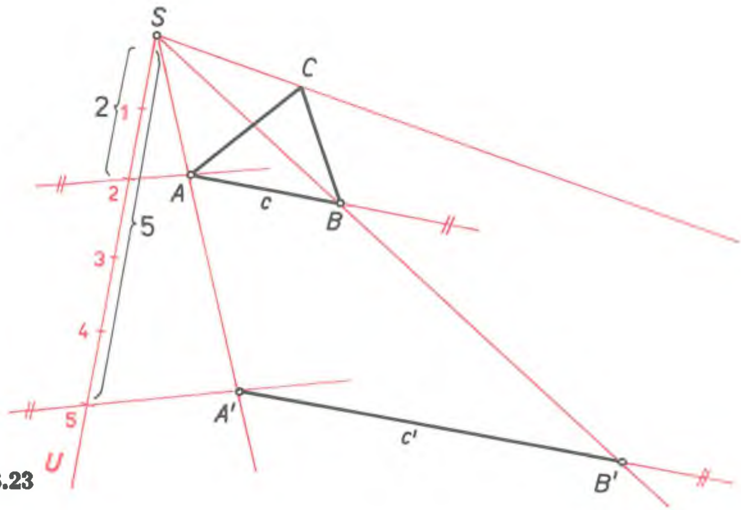


Obr. 6.22a, b

Skrátene zapisujeme rovnoľahlosť so stredom S a koeficientom λ takto: $\varkappa(S, \lambda)$.

Príklad 1

V rovnoľahlosti so stredom S a koeficientom $\lambda = \frac{5}{2}$ zostrojte trojuholník ABC (obr. 6.23)

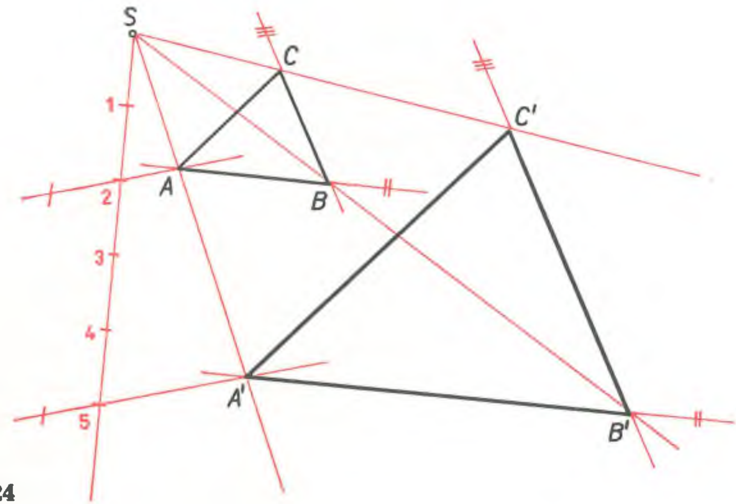


Obr. 6.23

Riešenie

Podľa predpisu b) v danej rovnoľahlosti zostrojíme k bodu A jeho obraz A' tak, aby ležal na polpriamke SA (pretože $\frac{5}{2} > 0$) a preň platí $d(SA') = \frac{5}{2} d(SA)$. Úsečku SA už vieme zmeniť v pomere $\frac{5}{2}$ (pozri príklad 3, obr. 6.14 a, b, str. 24). V našom prípade ide o zväčšenie (obr. 6.23). Ďalšie body by sme mohli zostrojiť rovnakým postupom. Jednoduchšie však bude zostrojiť napr. bod B', pre ktorý má platiť $d(SB') = \frac{5}{2}\, d(SB)$, na rovnobežke c' bodom A' s priamkou AB. Bod B' je potom priesečníkom priamky c' a polpriamky SB (obr. 6.23).

Na obr. 6.24 sú už zostrojené všetky hľadané body A', B' a C'. Z vlastnosti rovnobežiek preťatých priečkou vyplýva, že napríklad zodpovedajúce si uhly CAB a $C'A'B'$ a ďalej uhly ABC a $A'B'C'$ sú zhodné. Preto trojuholníky ABC a $A'B'C'$ sú podľa vety *uu* o podobnosti trojuholníkov podobné. Rovnoľahlosť je teda podobným zobrazením. Trojuholníky, ktoré sme takto zostrojili, budeme nazývať rovnoľahlé.



Obr. 6.24

Príklad 2

Využite obr. 6.24 a samostatne zdôvodnite nasledujúce vlastnosti rovnoľahlosti:

(1) Spojnica dvoch rovnoľahlých bodov (napr. priamka AA') prechádza stredom rovnoľahlosti.

(2) Dve rovnoľahlé priamky sú rovnobežné (napr. priamky AB, $A'B'$).

(3) Dve rovnoľahlé úsečky (napr. úsečky AB, $A'B'$) sú na rovnobežkách a pomer ich dĺžok sa rovná číslu $|\lambda|$, tzn., že platí

$$\frac{d(A'B')}{d(AB)} = |\lambda|$$

(4) Dva rovnoľahlé uhly sú zhodné (napr. uhly $C'A'B'$ a CAB).

(5) Dva rovnoľahlé geometrické útvary sú podobné (napr. trojuholníky ABC a $A'B'C'$).

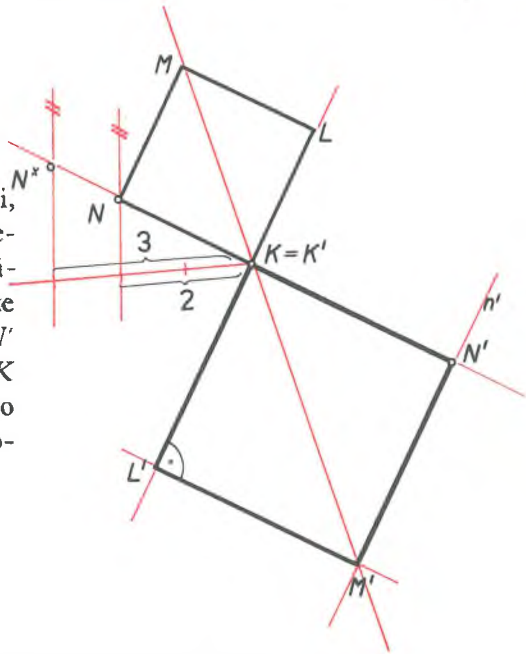
Tieto vlastnosti platia zrejme i v prípade, keď koeficient rovnoľahlosti je záporný ($\lambda < 0$). Uveďme taký príklad:

Príklad 3

Zostrojte obraz štvorca $KLMN$ v rovnoľahlosti so stredom K a s koeficientom rovnoľahlosti $\frac{3}{2}$.

Riešenie

Bod K je stredom rovnoľahlosti, a preto $K' = K$ (obr. 6.25). Pretože koeficient rovnoľahlosti je záporný, bude N' ležať na polpriamke opačnej k polpriamke KN. Bod N' je stredove súmerný podľa stredu K s pomocným bodom N^x, ktorý ľahko zostrojíme na polpriamke KN po-



Obr. 6.25

mocou vzťahu $d(KN^x) = -\frac{2}{3} \cdot d(KN)$. Pretože v rovnoľahlosti sú rovnoľahlé uhly zhodné, sú obidva uhly MNK a $M'N'K'$ pravé. Ďalší hľadaný bod M' leží teda na kolmici n' zostrojenej bodom N' k priamke $K'N'$ a na polpriamke opačnej k polpriamke KM (lebo koeficient rovnoľahlosti je záporný). Zostrojením kolmice bodom M' na priamku KL dostaneme na polpriamke opačnej k polpriamke KL bod L', a tým hľadaný štvorec $K'L'M'N'$. Z vlastností rovnoľahlých útvarov uvedených v príklade 2 je zrejmá správnosť tejto konštrukcie.

Poznámka

Vráťme sa teraz k významu koeficientu λ. Pre $\lambda = 0$ by sme dostali ako obraz každého bodu roviny stred rovnoľahlosti. Tým by však vlastnosti (1) až (5) neboli splnené. *Pre $\lambda = 1$ splynie každý vzor so svojím obrazom,* splynú i každé dve zodpovedajúce si úsečky atď.

Dostaneme tak vlastne *zhodné zobrazenie*, ktoré nazývame *totožnosť* (*identita*). Aj *pre koeficient $\lambda = -1$* dostaneme zhodné zobrazenie, a to *stredovú súmernosť*. Stredová súmernosť tvorí takto akýsi „most“ medzi zhodnými a podobnými zobrazeniami.

V rovnoľahlosti s koeficientom $|\lambda| > 1$ dostaneme *zväčšenie daného útvaru, pre $|\lambda| < 1$ jeho zmenšenie.*

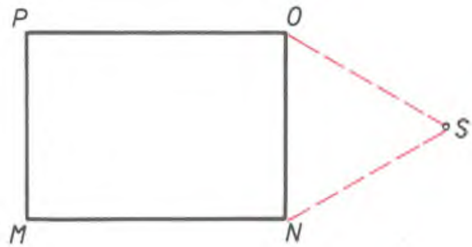
Cvičenia

1. Zvoľte si sami pravouhlý trojuholník. Zostrojte k nemu rovnoľahlý podľa priesečníka jeho výšok ako stredu rovnoľahlosti pre pomer rovnoľahlosti $-\frac{2}{3}$.

2. K pravidelnému šesťuholníku $ABCDEF$ so stranou dĺžky $a = 2{,}5$ cm

zostrojte rovnoľahlý útvar podľa stredu A s koeficientom rovnoľahlosti $\frac{3}{4}$.

3. K obdĺžniku $MNOP$ so stranami, ktorých dĺžky sú $d(MN) = 3{,}5$ cm, $d(NO) = 2{,}5$ cm, zostrojte útvary zodpovedajúce v rovnoľahlosti so stredom S (ktorý je vrcholom rovnostranného trojuholníka nad stranou NO — pozri obr. 6.26) a s koeficientom a) $\lambda = +\frac{5}{3}$; b) $\lambda = -\frac{5}{3}$. Čo viete povedať o obidvoch zostrojených obrazoch?

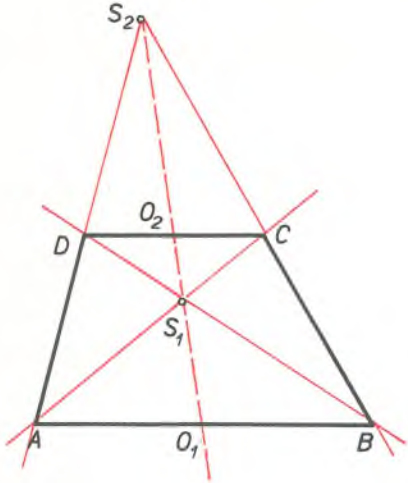


Obr. 6.26

4. Dá sa dokázať, že ťažnice každého trojuholníka sa pretínajú v jedinom bode, ktorý sa nazýva ťažisko trojuholníka a označuje sa T. Overte, že rovnoľahlosť so stredom v bode T a s koeficientom $-\frac{1}{2}$ premiesťuje každý vrchol trojuholníka do stredu jeho protiľahlej strany.

5. Pomocou vhodne volenej rovnoľahlosti dokážte, že stredná priečka $B'C'$ (kde B' je stred strany AC, C' je stred strany AB) v trojuholníku ABC je rovnobežná so stranou BC a jej dĺžka sa rovná polovici BC.

6. Daný je lichobežník $ABCD$ (obr. 6.27). a) Ukážte, že existujú dve rôzne rovnoľahlosti so stredmi S_1 a S_2, ktoré priraďujú ako rovnoľahlé obidve základne AB a CD. Aké sú koeficienty týchto rovnoľahlostí, ak $d(AB) = 6$ cm, $d(CD) = 4$ cm? b) Odôvodnite, prečo stredy základní O_1 a O_2 lichobežníka $ABCD$ (obr. 6.27) ležia na priamke S_1S_2.



Obr. 6.27

6.6 Konštrukčné využitie rovnoľahlosti

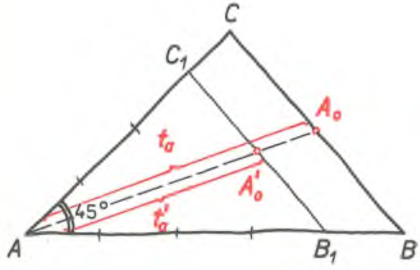
Príklad 1

Zostrojte trojuholník ABC, ak je daný uhol α s veľkosťou 45°, pomer dĺžok $b : c = 3 : 4$ a ťažnica AA_0 s dĺžkou $t_a = 5$ cm.

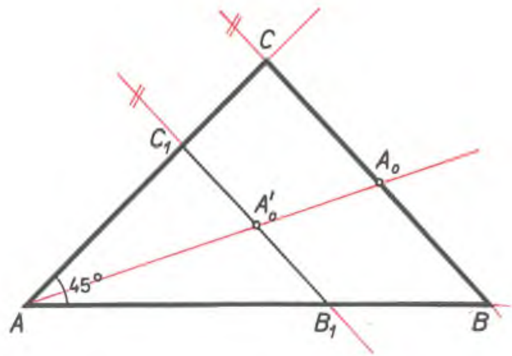
Riešenie

Rozbor.

Predpokladajme, že úloha má riešenie a že ním je trojuholník ABC (obr. 6.28a). Pomer dĺžok jeho strán b, c je teda $3 : 4$, uhol α má



Obr. 6.28a



Obr. 6.28b

predpísanú veľkosť 45° a úsečka AA_0 je ťažnicou t_a danej dĺžky 5 cm. Tento obrázok doplníme pomocnou konštrukciou: Na polpriamke AB zostrojíme bod B_1 tak, že $d(AB_1) = 4$ cm a na polpriamke AC bod C_1 tak, že $d(AC_1) = 3$ cm. Dostaneme tak trojuholník AB_1C_1, ktorý má s trojuholníkom ABC (t. j. s predpokladaným riešením úlohy) taký istý pomer dĺžok strán a uhly zovreté týmito stranami sú zhodné, dokonca totožné (uhol α patrí obom trojuholníkom). Sú teda obidva trojuholníky podľa výkladu vety *sus* o podobnosti trojuholníkov podobné.

Pretože vrcholy A obidvoch trojuholníkov splývajú a obidva páry zodpovedajúcich si bodov B, B_1 a C, C_1 ležia na polpriamkach so začiatkom A, sú trojuholníky AB_1C_1 a ABC aj rovnoľahlé. Stredom tejto rovnoľahlosti je bod A, koeficient je daný pomerom dĺžok zodpovedajúcich si úsečiek $\frac{d(AA_0')}{d(AA_0)} = \frac{t_a'}{t_a}$, pričom t_a' je dĺžka ťažnice trojuholníka AB_1C_1. Na základe tejto úvahy o rovnoľahlosti hľadaného trojuholníka ABC a pomocného trojuholníka AB_1C_1 zostavíme konštrukciu.

Konštrukcia:

Najskôr zostrojíme pomocný trojuholník AB_1C_1, ktorý má pomer dĺžok strán $\frac{b_1}{c_1} = \frac{3}{4}$, napríklad zvolíme ako v rozbore $b_1 = 3$ cm, $c_1 = 4$ cm. Nimi zovretý uhol α má veľkosť 45°. Zostrojíme aj ťažnicu $t_a' = AA_0'$ (obr. 6.28b).

Bod A zvolíme za stred rovnoľahlosti a na polpriamke AA_0' zostrojíme bod A_0 tak, aby $d(AA_0') = t_a = 5$ cm. Rovnobežka m s priamkou B_1C_1

vedená bodom A_0 pretne polpriamky AB_1 a AC_1 postupne v bodoch B, C, ktoré sú zvyšujúcimi vrcholmi hľadaného trojuholníka ABC. Postup konštrukcie môžeme napr. takto stručne zapísať:

(1) $\triangle AB_1C_1$; $b_1 : c_1 = 3 : 4$, $\alpha = 45°$
(2) A_0'; A_0' je stred BC
(3) A_0; $A_0 \in \mapsto AA_0'$, $d(AA_0) = t_a$
(4) m; $m \parallel \leftrightarrow C_1B_1$, $A_0 \in m$
(5) C; $C \in \mapsto AC_1 \cap m$
(6) B; $B \in \mapsto AB_1 \cap m$
(7) $\triangle ABC$

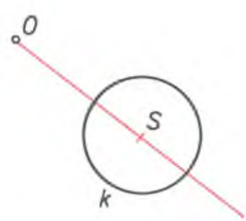
Pri samotnej konštrukcii premýšľajte, ako sa dá zdôvodniť každý jednotlivý krok.

Skúška

Trojuholník ABC má podľa konštrukcie uhol α, ťažnicu t_a s dĺžkou 5 cm a pretože je rovnoľahlý s trojuholníkom AB_1C_1, má s ním i rovnaký pomer veľkosti strán, ktoré zvierajú uhol α, t. j. $b : c = 3 : 4$.

Príklad 2

K danej kružnici $k(S,r)$ zostrojte útvar rovnoľahlý podľa stredu rovnoľahlosti O (obr. 6.29) s koeficientom rovnoľahlosti $\frac{7}{3}$.

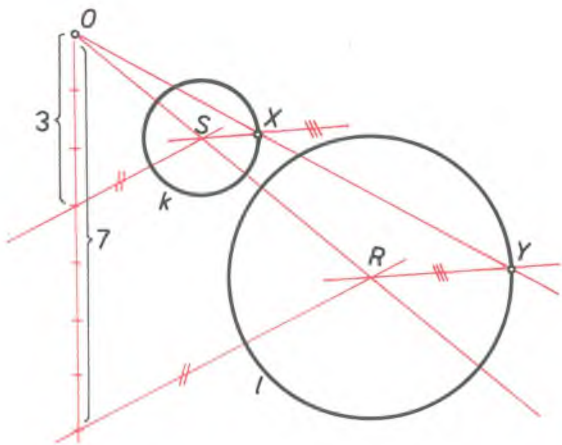


Obr. 6.29

Riešenie

Uvedieme len opis konštrukčného použitia rovnoľahlosti: Bod R, ktorý je obrazom stredu S kružnice k, stanovíme známou konštrukciou: Úsečku OS zmeníme v pomere $\frac{7}{3}$ (obr. 6.30), pričom platí:

$$d(OR) = \frac{7}{3} \,.\, d(OS)$$



Obr. 6.30

K ľubovoľnému bodu X kružnice k (ak neleží na OS) zostrojíme bod Y ako priesečník polpriamky OX a priamky m rovnobežnej s priamkou SX a vedenej bodom R. Vzhľadom na danú rovnoľahlosť platí:

$$d(RY) = \frac{7}{3} \,.\, d(SX) \tag{1}$$

Pre všetky body X kružnice k platí:

$$d(SX) = r$$

$r > 0$ je pevné dané číslo a ak ho dosadíme do (1), zistíme, že body Y (ako obrazy bodov X v danej rovnoľahlosti) majú od pevného bodu R stálu vzdialenosť. Ležia teda na kružnici l so stredom R a polomerom $\frac{7}{3}\,r$.

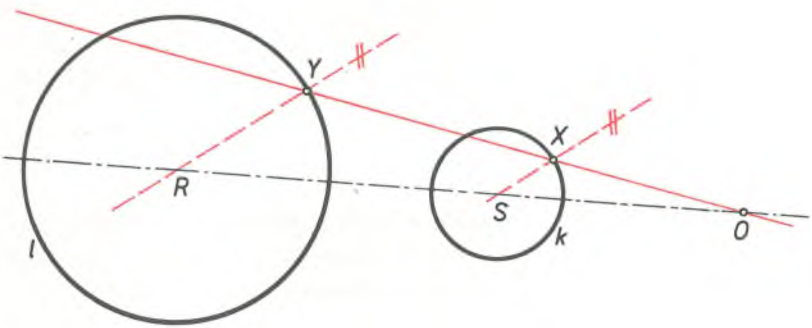
Obrátene sa dá podobne dokázať, že v rovnoľahlosti so stredom O a koeficientom $\frac{1}{\frac{7}{3}} = \frac{3}{7}$ je každý bod X kružnice k obrazom istého bodu Y kružnice l. Preto platí, že rovnoľahlosť zobrazuje kružnicu l na kružnicu k (alebo aj kružnica k je obrazom kružnice l).

Príklad 3

Určte rovnoľahlosť, ktorá priraďuje dve nesústredné kružnice $k(S, r_1)$ a $l(R, r_2)$, pričom $r_1 \neq r_2$.

Riešenie

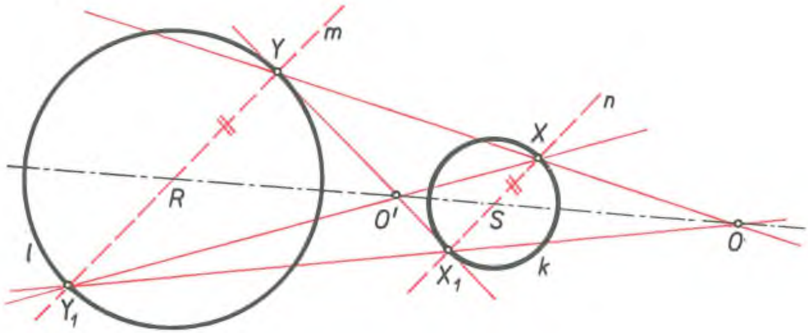
Rozbor



Obr. 6.31

Predpokladajme, že existuje rovnoľahlosť so stredom O, ktorá zobrazuje kružnicu k na kružnici l (obr. 6.31). Potom bod O leží na spojnici stredov kružníc S a R. Ak sú body S a X vzory a body R a Y im zodpovedajúce obrazy v rovnoľahlosti, tak priamky SX a RY musia byť rovnobežné a priamka XY takisto musí prechádzať bodom O. Tieto vlastnosti nás vedú ku konštrukcii.

Konštrukcia (obr. 6.32)



Obr. 6.32

(1) $\leftrightarrow SR$
(2) $m; R \in m, m \neq \leftrightarrow RS$
(3) $n; n \parallel m, S \in n$
(4) $Y; Y \in m \cap l$
(5) $X; X \in n \cap k$
(6) $O; O \in \leftrightarrow SR \cap \leftrightarrow XY$

Pri krokoch (4) a (5) zistíme, že na každej priamke existujú dva priesečníky, t. j. Y a Y_1 na priamke m, prípadne X a X_1 na priamke n. Preto dostaneme dva rôzne stredy rovnoľahlostí:

a) Stred O hľadanej rovnoľahlosti je priesečník priamok SR a XY; ak ste presne rysovali, prechádza bodom O aj priamka X_1Y_1.

b) Priesečník O' priamok SR a XY_1 je stredom ďalšej rovnoľahlosti, ktorá priraďuje kružnice k a l (bodom O' prechádza aj priamka X_1Y).

V prípade a) pár zodpovedajúcich si úsečiek tvoria úsečky SX a RY, prípadne úsečky SX_1 a RY_1. V prípade b) je vzorom úsečka SX a jej obrazom úsečka RY_1, prípadne úsečka SX_1 má za obraz úsečku RY.

Dĺžky uvedených úsečiek sú polomery vyšetrovaných kružníc. Preto platí

$$\frac{d(RY)}{d(SX)} = \frac{d(RY_1)}{d(SX_1)} = \frac{r_2}{r_1} = |\lambda|$$

Zhrnieme

V opísanej konštrukcii sme určili dve rovnoľahlosti.

a) *Rovnoľahlosť so stredom O a koeficientom $\frac{r_2}{r_1}$ kladným, lebo páry zodpovedajúcich si bodov (napr. X, Y) ležia vždy na tej istej polpriamke so začiatkom O. V tomto prípade bod O sa nazýva vonkajším stredom rovnoľahlosti.*

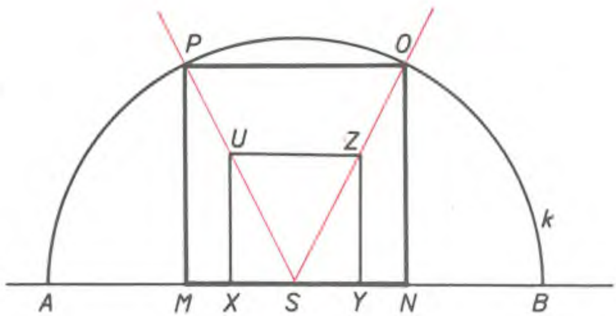
b) *Rovnoľahlosť so stredom O' má koeficient $-\frac{r_2}{r_1}$, pretože bod O' leží medzi vzorom a obrazom (napr. X a Y_1). Bod O' sa nazýva vnútorným stredom rovnoľahlosti.*

Príklad 4

Do daného polkruhu vpíšte štvorec MNOP tak, aby jedna jeho strana ležala na priemere *AB*, ktorý ohraničuje polkruh a aby ďalšie vrcholy ležali na oblúku ohraničujúcom polkruh.

Riešenie

Rozbor: Predpokladajme, že na obr. 6.33 sme znázornili predpokladané riešenie úlohy — štvorec *MNOP*. Je zrejmé, že stred *S* kružnice, ktorá ohraničuje polkruh, je aj stredom strany štvorca. Vieme už, že všetky štvorce sú podobné. Ak zostrojíme hocijaký štvorec *XYZU* so stranou na priamke *AB* a so stredom tejto strany v bode *S*, budú štvorce *MNOP* a *XYZU* nielen podobné, ale aj rovnoľahlé. Stredom tejto rovnoľahlosti je bod *S*, zodpovedajúce si body ležia na polpriamke so začiatkom *S*. Z toho vyplýva konštrukcia.



Obr. 6.33

Konštrukcia

Najprv zostrojíme ľubovoľný štvorec $XYZU$, ktorého strana XY má stred v bode S a leží na priamke AB daného polkruhu (konštrukciu už zvládnete sami). Ďalej zostrojíme polpriamky SU a SZ. Priesečníkom polpriamky SU s polkružnicou je hľadaný bod P. Rovnakým spôsobom určíme na polpriamke SZ bod O a potom už ľahko zostrojíme celý hľadaný štvorec (napr. $PM \parallel UX$; zdôvodnite prečo).

Cvičenia

1. Zostrojte trojuholník ABC, ak je daná veľkosť uhla $\beta = 60°$, pomer dĺžok strán $a : c = 2 : 3$ a výška $v_b = 4$ cm.

2. Využitím rovnoľahlosti zostrojte trojuholník ABC, ak:

   a) $b : c = 5 : 3$, $\alpha = 67{,}5°$, $t_b = 4{,}8$ cm;
   b) $\alpha = 60°$, $\beta = 82{,}5°$, $v_a = 5$ cm.

3. Zostrojte rovnobežník $ABCD$, ak:

   a) $\alpha = 60°$, $a : b = 4 : 7$, $d(AC) = 7{,}5$ cm;
   b) $v(\measuredangle ASB) = 120°$ (S je priesečník uhlopriečok), $d(AC) : d(BD) = 6 : 4{,}7$ a $d(AB) = 5$ cm.

4. Určte stred a koeficienty rovnoľahlosti, ktoré priraďujú dve sústredné kružnice rôznych polomerov.

5. Do daného ostrouhlého trojuholníka vpíšte štvorec tak, aby jedna jeho strana ležala na strane trojuholníka a každý z dvoch zvyšných vrcholov na jednej zo strán.

7. RIEŠENIE NEROVNÍC

7.1 Upevnenie a prehĺbenie učiva o nerovniciach

Už na 1. stupni ZŠ ste sa naučili riešiť slovné úlohy pomocou nerovníc.

Príklad 1

Na ihrisku bolo 5 chlapcov, dievčat bolo na ihrisku menej ako chlapcov. Koľko dievčat mohlo byť na ihrisku?

Riešenie

Ak označíme počet dievčat x, platí: $x < 5$. Oborom premennej je množina všetkých prirodzených čísel, pretože počet žiakov môžeme vyjadriť iba prirodzeným číslom. Množinu všetkých riešení $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ nerovnice $x < 5$ môžeme znázorniť na číselnej osi

Obr. 7.1

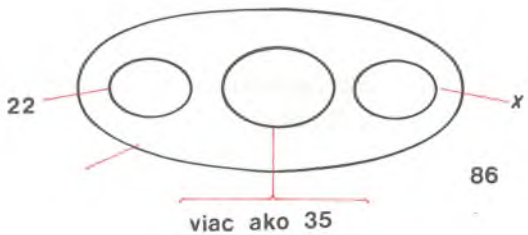
Na ihrisku mohlo byť 0 alebo 1 alebo 2 alebo 3 alebo 4 dievčatá.

Príklad 2

Na nákladnom aute bolo 86 debien minerálky. V prvej predajni zložili 22 debien, v druhej viac ako 35 debien. Koľko debien zložili v tretej (poslednej) predajni? (Úloha z 3. ročníka.)

Riešenie

V prvej predajni zložili	22 debien
v druhej	viac ako 35 debien
v tretej predajni zložili	x debien
Spolu bolo	86 debien



Obr. 7.2

$$\begin{aligned} 86 - (22 + 35) &> x \\ 86 - 57 &> x \\ 29 &> x \\ x &< 29 \end{aligned}$$

Množina všetkých riešení nerovnice $x < 29$ je $\{0, 1, 2, ..., 28\}$. V tretej (poslednej) predajni mohli zložiť 28 alebo 27... alebo 1 alebo 0 debien (jednoducho menej ako 29 debien).

Zhrnieme

Zápis $x < 29$ je nerovnica, x je premenná a oborom premennej je napríklad v riešenom príklade 2 množina všetkých prirodzených čísel, pretože počet debien môže byť vyjadrený iba prirodzeným číslom. Riešiť nerovnicu znamená určiť množinu všetkých riešení danej nerovnice, t. j. množinu všetkých čísel z oboru premennej, ktoré keď dosadíme do nerovnice, vznikne pravdivý zápis.

V piatom ročníku ste poznali neostrú nerovnicu. Napríklad $x \leqq 3$, čítame „x je menšie alebo sa rovná trom“.

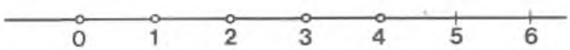
Príklad 3

Na číselnej osi vyznačte obrazy všetkých prirodzených čísel, ktoré sú riešením nerovnice:

a) $x < 5$
b) $x \leqq 5$

Riešenie

a) $x < 5$



Obr. 7.3a

b) $x \leqq 5$

Obr. 7.3b

Príklad 4

Určte aspoň jedno riešenie nerovnice $x - 11 < 7$, ak oborom premennej je množina všetkých prirodzených čísel.

Riešenie

Ak má platiť znamienko nerovnosti, tak na ľavej strane nerovnice musí byť číslo 6 alebo 5 alebo atď. až 0.

Teda $x - 11 = 6$ a $x = 17$
$x - 11 = 5$ a $x = 16$
.
.
.
$x - 11 = 0$ a $x = 11$

Množina všetkých riešení nerovnice $x - 11 < 7$ je $\{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17\}$.

Cvičenia

1. Nájdite aspoň jedno x z množiny všetkých prirodzených čísel, pre ktoré je zápis pravdivý:

a) $5x + 2 > 8$
b) $2x + 3 > 0$
c) $x + 245 < 345$
d) $708 + x > 1\,000$

2. Z množiny všetkých prirodzených čísel určte aspoň jedno x tak, aby platilo:

a) $x - 12 < 8$
b) $55 - x < 33$
c) $10x + 0 > 15$
d) $2x + 1 > 10$

3. Na číselnej osi vyznačte obrazy všetkých prirodzených čísel, ktoré vyhovujú nerovnici:

a) $x < 10$
b) $x \leqq 10$
c) $x < 7$
d) $x \leqq 7$

4. Zapíšte množinu všetkých riešení nerovnice, ak je oborom premennej množina všetkých prirodzených čísel:

a) $x < 4$
b) $x < 0$
c) $x + 4 < 12$
d) $x - 11 < 17$
e) $x \leqq 5$
f) $x + 3 \leqq 6$

5. Zostavte aspoň jednu nerovnicu, ktorej množina všetkých riešení v obore všetkých prirodzených čísel je:
a) $\{0, 1, 2, 3\}$
b) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
c) $\emptyset$

6. V obchode majú sardinky za 6 Kčs. Koľko kusov sardiniek si mohol kúpiť Peter, ak mal 25 Kčs?
Zostavte nerovnicu.

7. V kine sedelo 125 divákov, sedadiel však bolo 200. Koľko divákov ešte mohlo prísť tak, aby všetci sedeli?

8. V obore všetkých prirodzených čísel určte množinu všetkých riešení nerovnice $5{,}6 \leqq x < 12$ a znázornite na číselnej osi.

7.2 Riešenie nerovníc s jednou neznámou

V predchádzajúcich ročníkoch ste určovali aspoň jedno riešenie, prípadne množinu všetkých riešení danej nerovnice, keď bol daný obor premennej. V tomto článku si ukážeme, že pri určovaní množiny všetkých riešení danej nerovnice môžeme postupovať tak, ako pri riešení rovníc, teda k riešeniu môžeme dospieť pomocou ekvivalentných úprav nerovnice.

Príklad 1

Riešte nerovnicu $3x - 2 > 6 + 2x$ v množine všetkých reálnych čísel.

Riešenie

$$3x - 2 > 6 + 2x \quad /-2x \quad \text{(od oboch strán nerovnice odčítame výraz } 2x\text{)}$$

$$3x - 2 - 2x > 6 + 2x - 2x$$
$$x - 2 > 6 \quad /+2$$
$$x - 2 + 2 > 6 + 2$$
$$x > 8$$

Množina všetkých riešení danej nerovnice je množina všetkých reálnych čísel väčších ako 8.

Skúška

Z množiny všetkých riešení danej nerovnice náhodne vyberieme jeden alebo viac prvkov, dosadíme do pôvodnej rovnice a tak overíme správnosť riešenia.

Napríklad pre $x = 10$ platí
$$3 \cdot 10 - 2 > 6 + 2 \cdot 10$$
$$28 > 26$$

alebo pre $x = 20{,}3$ platí
$$3 \cdot 20{,}3 - 2 > 6 + 2 \cdot 20{,}3$$
$$60{,}9 - 2 > 6 + 40{,}6$$
$$58{,}9 > 46{,}6$$

Príklad 2

V obore všetkých reálnych čísel riešte nerovnicu
$3x - 2 \leqq x + 4.$

Riešenie

$$
\begin{aligned}
3x - 2 &\leqq x + 4 \quad /-x \\
3x - 2 - x &\leqq x + 4 - x \\
2x - 2 &\leqq 4 \quad /+2 \\
2x - 2 + 2 &\leqq 4 + 2 \\
2x &\leqq 6 \quad /.\,\frac{1}{2} \qquad \left(\text{obe strany nerovnice vynásobíme } \frac{1}{2}\right) \\
2x \,.\, \frac{1}{2} &\leqq 6 \,.\, \frac{1}{2} \\
x &\leqq 3
\end{aligned}
$$

Skúška

Napríklad pre $x = 3$ platí

$$
\begin{aligned}
3 \,.\, 3 - 2 &\leqq 3 + 4 \\
9 - 2 &\leqq 7 \\
7 &\leqq 7
\end{aligned}
$$

Odpoveď

Množina všetkých riešení danej nerovnice je množina všetkých reálnych čísel menších alebo rovnajúcich sa 3.

Pozor! Pri násobení oboch strán nerovnosti záporným číslom sa mení znak nerovnosti na opačný. Napríklad

$$
\begin{aligned}
3 &> 1 \qquad /.\,(-1) \\
\underline{-3} &\underline{< -1}
\end{aligned}
$$

Príklad 3

V obore všetkých reálnych čísel riešte nerovnicu
$x - 2 \leqq 3x + 5.$

Riešenie

$$
\begin{aligned}
x - 2 &\leqq 3x + 5 \qquad /-3x \\
x - 2 - 3x &\leqq 3x + 5 - 3x \\
-2x - 2 &\leqq 5 \qquad /+2 \\
-2x - 2 + 2 &\leqq 5 + 2 \\
-2x &\leqq 7 \qquad /.\left(-\frac{1}{2}\right) \\
-2x \,.\left(-\frac{1}{2}\right) &\geqq 7 \,.\left(-\frac{1}{2}\right) \\
x &\geqq -\frac{7}{2}
\end{aligned}
$$

Obe strany nerovnice sme násobili záporným číslom, zmenil sa znak nerovnosti.

Stručne

Úprava 1.
K obom stranám nerovnice môžeme pričítať alebo odčítať rovnaký výraz a množina všetkých riešení sa nezmení.

Úprava 2.
Ak vynásobíme alebo vydelíme obe strany nerovnice kladným číslom, znak nerovnosti sa nezmení. Ak vynásobíme alebo vydelíme obe strany nerovnice záporným číslom, znak nerovnosti sa obráti, v oboch prípadoch sa množina všetkých riešení nezmení.

Úpravy nerovnice uvedené v 1, 2 bode (ukážky v riešených príkladoch 1, 2, 3) sa nazývajú **ekvivalentné** a nerovnice pôvodné a upravené sa nazývajú **ekvivalentné nerovnice.**

Príklad 4

Riešte nerovnicu $x - 5 \leqq 1$ v množine všetkých reálnych čísel.

Riešenie

$$x - 5 \leqq 1 \quad /+5$$
$$x \leqq 6$$

Skúška

Napríklad pre $x \leqq 5$ platí

$$5 - 5 \leqq 1$$
$$0 \leqq 1$$

Odpoveď

x patrí do množiny všetkých reálnych čísel, ktoré sú menšie alebo sa rovnajú 6.

Pozor! *Ak nebude inak určené, bude oborom premennej v každej nerovnici množina všetkých reálnych čísel.*

Príklad 5

Riešte nerovnicu $\frac{3x}{2} + 1 \leqq \frac{x}{3}$

Riešenie

$$\frac{3x}{2} + 1 \leqq \frac{x}{3} \quad /.6$$

(číslo 6 je najmenší spoločný násobok menovateľov)

$$\frac{3x}{2} . 6 + 1 . 6 \leqq \frac{x}{3} . 6$$
$$9x + 6 \leqq 2x \quad /-2x$$
$$7x + 6 \leqq 0 \quad /-6$$
$$7x \leqq -6 \quad /:7$$
$$x \leqq -\frac{6}{7}$$

Skúška

Napríklad pre $x = -1$ platí:

$$\frac{3 \,.\, (-1)}{2} + 1 \leqq -\frac{1}{3}$$

$$-\frac{3}{2} + 1 \leqq -\frac{1}{3}$$

$$-\frac{1}{2} \qquad \leqq -\frac{1}{3}$$

Odpoveď

x patrí do množiny všetkých reálnych čísel, ktoré sú menšie alebo rovné $-\frac{6}{7}$.

Príklad 6

Riešte nerovnicu $\frac{3-2x}{5} + 8 > \frac{5x+2}{2} - x$

Riešenie

$$\frac{3-2x}{5} + 8 > \frac{5x+2}{2} - x \qquad /.10$$

$$\frac{3-2x}{5} \,.\, 10 + 8 \,.\, 10 > \frac{5x+2}{2} \,.\, 10 - x \,.\, 10$$

$$2(3-2x) + 80 > 5 \,.\, (5x+2) - 10x$$

$$6 - 4x + 80 > 25x + 10 - 10x$$

$$-4x + 86 > 15x + 10 \qquad /-15x - 86$$

$$-4x + 86 - 15x - 86 > 15x + 10 - 15x - 86$$

$$-99x > -76 \qquad /:(-19)$$

$$x < \frac{-76}{-19}$$

$$x < 4$$

Odpoveď

Obor premennej nie je bližšie určený, preto je to množina všetkých reálnych čísel, ktoré sú menšie ako 4.

Príklad 7

Ktoré prirodzené čísla vyhovujú nerovnici $8x - 19 + 10x < 70 - 10x$

Riešenie

$$8x - 19 + 10x < 70 - 10x$$
$$18x - 19 < 70 - 10x \quad / + 10x + 19$$
$$28x < 89$$
$$x < \frac{89}{28}$$
$$x < 3\frac{5}{28}$$

Skúška

Napríklad pre $x = 1$ platí:

$$8 \,.\, 1 - 19 + 10 \,.\, 1 < 70 - 10 \,.\, 1$$
$$18 - 19 < 60$$
$$-1 < 60$$

Odpoveď

$x \in \{0, 1, 2, 3\}$

Príklad 8

Ktoré celé záporné čísla vyhovujú nerovnici
$24x - 18 < (3x - 4) \,.\, 15 - 20x + 50$?

Riešenie

$$24x - 18 < (3x - 4) \,.\, 15 - 20x + 50$$
$$24x - 18 < 45x - 60 - 20x + 50$$
$$24x - 18 < 25x - 10 \qquad /-25x + 18$$
$$-x < 8 \qquad /.(-1)$$
$$x > -8$$
$$x \in \{-7, -6, -5, -4, -3, -2, -1\}$$

Skúška

Napríklad pre $x = -2$ platí:

$$24 \,.\, (-2) - 18 < [3 \,.\, (-2) - 4] \,.\, 15 - 20 \,.\, (-2) + 50$$
$$-48 - 18 < -10 \,.\, 15 + 40 + 50$$
$$-65 < -60$$

Príklad 9

V množine všetkých reálnych čísel riešte nerovnicu $5 + 3x < 4x - 1 - x$.

Riešenie

$$5 + 3x < 4x - 1 - x \qquad (1)$$
$$5 + 3x < 3x - 1 \qquad /-5$$
$$3x < 3x - 6 \qquad /-3x$$
$$3x - 3x < -6$$
$$(3 - 3) \,.\, x < -6$$
$$0 \,.\, x < -6 \qquad (2)$$

Ak do nerovnice (2) dosadíme za x akékoľvek reálne číslo, vždy dostaneme nepravdivé tvrdenie ($0 < -6$). Pretože sme nerovnicu (2) dostali z nerovnice (1) ekvivalentnými úpravami, platí aj pre nerovnicu (1), že ak za x dosadíme akékoľvek reálne číslo, dostaneme nepravdivé tvrdenie.

Presvedčme sa o tom dosadením:
napríklad pre $x = 10$ platí:

$$5 + 3 \,.\, 10 < 4 \,.\, 10 - 1 - 10$$
$$35 < 29 \qquad \text{čo nie je pravda,}$$

alebo ak pre $x = -7$ platí:

$$5 + 3 \,.\, (-7) < 4 \,.\, (-7) - 1 - (-7)$$
$$5 - 21 < -28 - 1 + 7$$
$$-16 < -29 + 7$$
$$-16 < -22 \qquad \text{čo nie je pravda.}$$

Odpoveď

Množina všetkých riešení nerovnice
$5 + 3x < 4x - 1 - x$ je prázdna.

Príklad 10

V množine všetkých reálnych čísel riešte nerovnicu
$2x + 3 \geqq 6x - 5 - 4x.$

Riešenie

$$2x + 3 \geqq 6x - 5 - 4x \qquad (1)$$
$$2x + 3 \geqq 2x - 5 \qquad /-3$$
$$2x \geqq 2x - 8 \qquad /-2x$$
$$2x - 2x \geqq -8$$
$$(2 - 2) \,.\, x \geqq -8$$
$$0 \,.\, x \geqq -8 \qquad (2)$$

Ak do nerovnice (2) dosadíme za x akékoľvek reálne číslo, vždy dostaneme pravdivé tvrdenie ($0 \geqq -8$). Pretože sme nerovnicu (2) dostali z nerovnice (1) ekvivalentnými úpravami, platí aj pre nerovnicu (1), že

ak za x dosadíme akékoľvek reálne číslo, dostaneme pravdivé tvrdenie. Presvedčme sa o tom dosadením:
napríklad pre $x = 0$ platí:

$$2 \cdot 0 + 3 \geqq 6 \cdot 0 - 5 - 4 \cdot 0$$
$$3 \geqq -5 \quad \text{čo je pravda,}$$

alebo pre $x = 7$ platí:

$$2 \cdot 7 + 3 \geqq 6 \cdot 7 - 5 - 4 \cdot 7$$
$$17 \geqq 42 - 5 - 28$$
$$17 \geqq 42 - 33$$
$$17 \geqq 9 \quad \text{čo je pravda.}$$

Odpoveď

Množina všetkých riešení nerovnice $2x + 3 \geqq 6x - 5 - 4x$ je množina všetkých reálnych čísel.

Príklad 11

Pre ktoré reálne číslo x je výraz $\frac{2x-3}{2}$ nezáporný?

Riešenie

Ak je výraz $\frac{2x-3}{2}$ nezáporný, potom platí $\frac{2x-3}{2} \geqq 0$.

$$\frac{2x-3}{2} \geqq 0 \qquad /.2$$
$$2x - 3 \geqq 0 \qquad /+3$$
$$2x \geqq 3$$
$$x \geqq \frac{3}{2}$$

Skúška

Napríklad pre $x = 2$ sa daný výraz rovná $\frac{1}{2}$.

$$\left(\frac{2 \cdot 2 - 3}{2} = \frac{4 - 3}{2} = \frac{1}{2}\right)$$

Odpoveď

Výraz $\frac{2x - 3}{2}$ je nezáporný pre každé reálne číslo $x \geqq \frac{3}{2}$.

Cvičenia

1. V množine všetkých reálnych čísel riešte nerovnice:
a) $5x + 3 < 7 + 4x$
b) $3x - 5 < 2x + 1$
c) $4y - 3 = 1 + 3x$

2. Pomocou ekvivalentných úprav riešte v množine všetkých reálnych čísel nerovnice:
a) $5x - 3 < 2x + 10$
b) $7x + 8 = 4 + 4x$
c) $2{,}4 + 3y \geqq 6 - y$
d) $0{,}7 - 2x > 1{,}5 - 5x$
e) $3x - 6 < 2x + 3{,}8$
f) $5x - 3{,}2 > 2x - 1{,}7$

3. Riešte nerovnice:
a) $2x - 7 \leqq 5x - 3$
b) $3x + 6 = 4x - 2$
c) $1{,}5x - 3{,}1 = 4{,}5x - 6{,}4$

4. Pomocou ekvivalentných úprav riešte nerovnice:
a) $y + 6 \leqq 7$
b) $3x - 5 > 3$
c) $3 + 5x \geqq -7$
d) $1 + 4x \leqq 2x + 6$

5. Riešte nerovnice:

a) $\frac{5x}{4} + \frac{3}{2} < x + \frac{1}{3}$

b) $1 + \frac{4x}{3} \leqq \frac{x}{2} + 3$

c) $\frac{6x}{5} + 3 \geqq \frac{2x}{3} + 4$

6. Riešte nerovnice:

a) $\frac{2x - 1}{2} + 2 < \frac{x + 2}{3} - 3$

b) $\frac{5x + 4}{2} \leqq \frac{2x + 3}{3}$

c) $\frac{3x + 4}{2} - \frac{2}{3} < \frac{5x - 2}{3} + 1$

7. Ktoré prirodzené čísla vyhovujú nerovnici?

a) $3y - 7 < 2y - 3$

b) $\frac{2x + 3}{4} > \frac{3x - 2}{3}$

c) $2(3x - 5) < 3(x - 2)$

8. Číslo 100 rozdeľte na dve časti tak, aby $\frac{3}{5}$ prvej časti boli väčšie ako $\frac{5}{7}$ druhej časti.

9. Ktoré celé záporné čísla vyhovujú nerovnici:

a) $2a - 7 < 8 + 5a$

b) $2b + 11 \geqq -3b - 4$

c) $\frac{x + 3}{2} \geqq -3$

10. Riešte nerovnice:

a) $2(3x - 5) \leqq 3(2x + 3)$

b) $\frac{2x - 3}{2} + 1 > \frac{3x + 3}{3} + 2$

c) $3(4y - 1) < 4(1 + 3y) - 2$

11. Pre ktoré y je výraz $\frac{5x - 3}{4}$ nezáporný?

12. Pre ktoré a je výraz $2(a - 1)$ kladný?

13. Nerovnicu $3(x - 2) < 2x - 4$ riešte:
a) v množine všetkých celých čísel
b) v množine všetkých prirodzených čísel
c) v množine všetkých reálnych čísel

14. Vážením sa zistilo, že 50 m kábla má väčšiu hmotnosť ako 10 m toho istého kábla s cievkou, ktorá má hmotnosť 50 kg. Zostavte nerovnicu a vypočítajte hmotnosť 1 m kábla.

15. Pre ktoré reálne číslo a je výraz $\frac{2a + 3}{5}$ menší ako 1?

16. Dokážte, že polovica obvodu ľubovoľného trojuholníka je väčšia ako každá z jeho strán.

7.3 Riešenie sústavy dvoch nerovníc s jednou neznámou

Zápis
$$\begin{aligned} x + 2 &> 3 \\ 2x - 1 &< x + 6 \end{aligned}$$

nazývame **sústava dvoch nerovníc s jednou neznámou.** Riešiť sústavu dvoch nerovníc znamená vyhľadať množinu všetkých hodnôt premennej x, pre ktorú súčasne platia obidve nerovnice. Množina všetkých riešení sústavy dvoch nerovníc je prienik množiny všetkých riešení jednej nerovnice s množinou všetkých riešení druhej nerovnice.

Príklad 1

Riešte sústavu nerovníc:

$$\begin{aligned} x + 2 &> 3 \\ 2x - 1 &< x + 6 \end{aligned}$$

Riešenie

Vyriešime obe nerovnice zvlášť

$x + 2 > 3$
$x > 1$

$2x - 1 < x + 6$
$x < 7$

Obidve nerovnice platia súčasne a preto môžeme zapísať:

$$1 < x < 7 \qquad (1)$$

Už z 5. ročníka viete, že zápis $1 < x < 7$ čítame „x je väčšie ako 1 a zároveň menšie ako 7“.

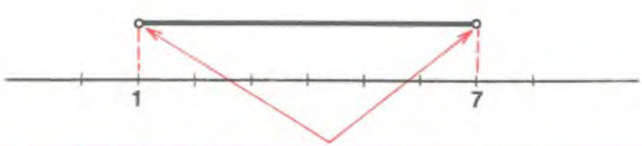
Namiesto zápisu $1 < x < 7$ píšeme tiež

$$x \in (1; 7) \qquad (2)$$

čo čítame: „*x je prvkom otvoreného intervalu ohraničeného číslami* 1 *a* 7“.

Množina všetkých reálnych čísel, ktoré vyhovujú podmienke (1) a (2) sa nazýva **otvorený interval**. Graficky môžeme tento interval znázorniť takto:

Obr. 7.4



Prázdny krúžok znamená, že čísla 1 a 7 do otvoreného intervalu nepatria.

Odpoveď

Sústave nerovníc $x + 2 > 3$
$2x - 1 < x + 6$
vyhovujú všetky reálne čísla, ktoré sú väčšie ako 1 a zároveň menšie ako 7, alebo ktoré sú z otvoreného intervalu $(1; 7)$.

Príklad 2

Riešte sústavu nerovníc $x + 1 \geqq 2$
$3x - 2 \leqq 2x + 3$

Riešenie

Obe nerovnice vyriešime zvlášť

$x + 1 \geqq 2$ $\qquad\qquad$ $3x - 2 \leqq 2x + 3$

$\underline{x \geqq 1}$ $\qquad\qquad$ $\underline{x \leqq 5}$

Obe nerovnice platia zároveň a preto píšeme:

$$\underline{1 \leqq x \leqq 5} \tag{1}$$

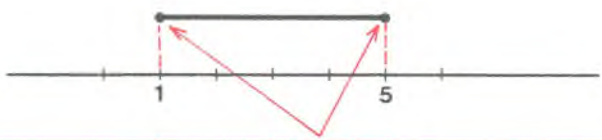
namiesto zápisu (1) zvykneme tiež písať:

$$x \in \langle 1; 5 \rangle \tag{2}$$

čo čítame: „x je prvkom uzavretého intervalu ohraničeného číslami 1 a 5".

Množina všetkých reálnych čísel, ktorá vyhovuje podmienke (1) a (2) sa nazýva **uzavretý interval**. Graficky môžeme tento interval znázorniť takto:

Obr. 7.5



Plný krúžok znamená, že čísla 1 a 5 patria do uzavretého intervalu.

Odpoveď

Sústave nerovníc

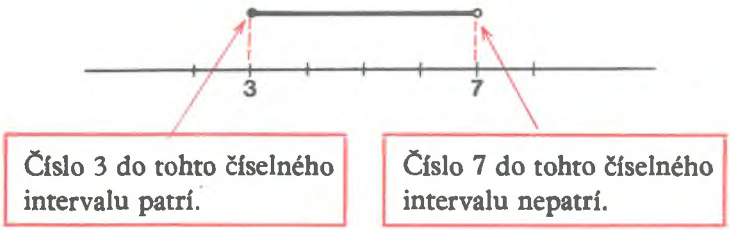
$$x + 1 \geqq 2$$
$$3x - 2 \leqq 2x + 3$$

vyhovujú všetky reálne čísla a) ktoré sú väčšie alebo rovnajú sa 1 a zároveň menšie alebo rovnajúce sa 5, alebo b) ktoré sú z uzavretého intervalu $\langle 1; 5 \rangle$.

Ukázali sme, že existujú otvorené a uzavreté intervaly. Zrejme ste už sami vydedukovali, že existujú tiež **polouzavreté číselné intervaly**.

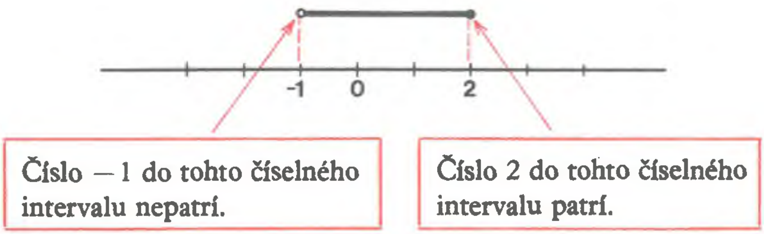
Množinu všetkých reálnych čísel vyhovujúcich nerovnici $3 \leqq x < 7$ môžeme tiež zapísať $x \in \langle 3; 7)$ a graficky znázorniť:

Obr. 7.6



Množinu všetkých reálnych čísel vyhovujúcich nerovnici $-1 < x \leqq 2$ môžeme tiež zapísať $x \in (-1, 2\rangle$ a graficky znázorniť:

Obr. 7.7



O číselnom intervale $\langle 3; 7)$ hovoríme, že je zdola uzavretý, zhora otvorený a znamená to, že číslo 3 do tohto intervalu patrí, číslo 7 nie.

O číselnom intervale $(3; 7\rangle$ hovoríme, že je zdola otvorený, zhora uzavretý a znamená to, že číslo 3 do tohto intervalu nepatrí, číslo 7 patrí.

Príklad 3

Riešte sústavu nerovníc

$$-1 < \frac{2 - 5x}{3} \leqq 2$$

Riešenie

Sústavu nerovníc $-1 < \frac{2 - 5x}{3} \leqq 2$ prepíšeme na ekvivalentnú sústavu

$$-1 < \frac{2 - 5x}{3}$$

$$\frac{2 - 5x}{3} \leqq 2$$

a riešime ju známym spôsobom:

$$\begin{array}{lll}
-1 < \dfrac{2 - 5x}{3} & \dfrac{2 - 5x}{3} \leqq 2 & \\
-3 < 2 - 5x & 2 - 5x \leqq 6 & \\
5x < 5 & -5x \leqq 4 & /:(-5) \\
x < 1 & x \geqq -\dfrac{4}{5} &
\end{array}$$

$$-\frac{4}{5} \leqq x < 1 \quad \text{alebo} \quad x \in \left\langle -\frac{4}{5}; 1\right)$$

graficky

Obr. 7.8

Skúška

pre $x = 9$ platí:

$$-1 < \frac{2 - 5 \,.\, 0}{3} \leqq 2$$

$$-1 < \frac{2}{3} \leqq 2 \qquad \text{čo je pravda.}$$

Príklad 4

Pre ktoré x z množiny všetkých reálnych čísel je zlomok $\frac{2x - 3}{7 - 3x}$ kladný?

Riešenie

Daný zlomok je kladný, teda $\frac{2x - 3}{7 - 3x} > 0$, ak je jeho čitateľ a zároveň menovateľ kladný, alebo ak je jeho čitateľ a zároveň menovateľ záporný.

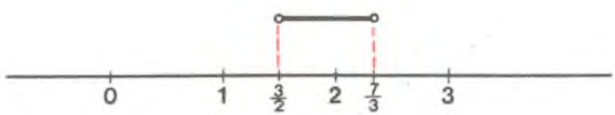
Platí: 1. $\frac{2x - 3}{7 - 3x} > 0$ ak $\begin{aligned} 2x - 3 &> 0 \\ 7 - 3x &> 0 \end{aligned}$

2. $\frac{2x - 3}{7 - 3x} > 0$ ak $\begin{aligned} 2x - 3 &< 0 \\ 7 - 3x &< 0 \end{aligned}$

1. $$\begin{aligned} 2x - 3 &> 0 \\ 2x &> 3 \\ x &> \frac{3}{2} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 7 - 3x &> 0 \\ -3x &> -7 \\ x &< \frac{7}{3} \end{aligned}$$

$$\frac{3}{2} < x < \frac{7}{3}$$

graficky



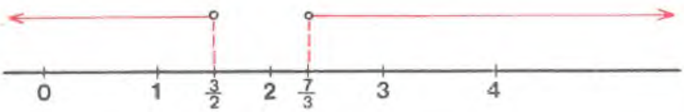
Obr. 7.9

2. $2x - 3 < 0$

$$2x < 3$$
$$x < \frac{3}{2}$$

$$7 - 3x < 0$$
$$-3x < -7$$
$$x > \frac{7}{3}$$

graficky



Obr. 7.10

Prienik je prázdna množina.

Také reálne číslo x, ktoré je väčšie ako $\frac{7}{3}$ a zároveň menšie ako $\frac{3}{2}$ neexistuje.

Odpoveď

Zlomok $\frac{2x-3}{7-3x}$ je kladný pre každé reálne číslo $x \in \left(\frac{3}{2}; \frac{7}{3}\right)$.

Cvičenia

1. V množine všetkých reálnych čísel riešte sústavu nerovníc:
$x + 1 > 2$
$2 + x < 8$

2. Prečítajte:
a) $x \in (5; 9)$
b) $x \in (0; 5)$
c) $x \in (-7; 0)$
d) $x \in (-5; 16)$

3. Napíšte podľa vzoru $0 < x < 10$, $x \in (0, 10)$:

a) $3 < x < 11$
b) $0 < x < 22$
c) $-10 < x < 0$
d) $-15 < x < 31$

4. Napíšte podľa vzoru $x \in (-9; 11)$, $-9 < x < 11$:

a) $x \in (10; 20)$
b) $x \in (-5; -3)$
c) $x \in (-8; 36)$

5. Graficky znázornite intervaly:

a) $-5 < x < 3$
b) $x \in (3; 7)$
c) $x \in (-3; 5)$

6. Riešte sústavy nerovníc:

a) $2x - 1 > 3$
$x - 1 < 8$

b) $5x - 3 < 7$
$x + 3 > -2$

7. Prečítajte:

a) $x \in \langle 0; 5 \rangle$
b) $x \in \langle -5; 13 \rangle$

8. Napíšte podľa vzoru $-3 \leqq y \leqq 10$, $y \in \langle -3; 10 \rangle$:

a) $7 \leqq y \leqq 34$
b) $-12 \leqq y \leqq 3{,}8$
c) $-1{,}3 \leqq y \leqq 6{,}9$

9. Napíšte podľa vzoru $x \in \langle -7{,}2; 3{,}1 \rangle$, $-7{,}2 \leqq x \leqq 3{,}1$

a) $x \in \langle 0{,}4; 8 \rangle$
b) $x \in \langle -9; 56{,}3 \rangle$

10. Graficky znázornite intervaly:

a) $-3 \leqq y \leqq 1$
b) $y \in \langle -1; 2{,}5 \rangle$

11. Prečítajte:

a) $x \in \langle -7; 10 \rangle$

b) $x \in \langle -5; 0 \rangle$

c) $x \in (6; 30 \rangle$

d) $x \in (-1; 0{,}9)$

12. Napíšte podľa vzoru $x \in \langle 0; 1{,}3)$, $0 \leqq x < 1{,}3$:

a) $x \in \langle -2{,}1; 3 \rangle$

b) $x \in \langle 0{,}6; 3{,}7)$

c) $y \in (-5{,}3; 0 \rangle$

13. Graficky znázornite intervaly:

a) $x \in \langle -3; 7)$

b) $x \in (-5; 1 \rangle$

14. Riešte sústavy nerovníc:

a)
$$\begin{aligned} 3 - x &< 5 \\ 5x + 17 &> 8x - 10 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x + 1 &> 2x + 1 \\ 5x + 2 &< 3x + 1 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 3x - 3 &\leqq x + 1 \\ x - 2 &< 2x + 1 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 3x - 1 &< x - 2 \\ x + 1 &\leqq 5x + 6 \end{aligned}$$

15. Riešte sústavy nerovníc:

a)
$$\begin{aligned} x - \frac{1}{2} &\leqq 0 \\ x + \frac{3}{4} &< 0 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 0{,}5x - 0{,}2 &> 0{,}1 \\ 1{,}2x + 2{,}1 &< 3{,}4 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 2x - 3 &\geqq x + 1 \\ x - 2 &> 2x + 1 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 3x - 1 &< x - 2 \\ x + 1 &\leqq 5x + 6 \end{aligned}$$

16. Ktoré celé čísla vyhovujú nerovniciam:

a)
$$\begin{aligned} 1 - \frac{3x - 8}{7} &< 5x \\ 4x + 5 - \frac{1}{6}(25x + 29{,}5) &> 0 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} \frac{2x - 11}{4} + \frac{19 - 2x}{2} &> 2x \\ \frac{2x + 15}{9} &< \frac{1}{5}(x - 1) + \frac{x}{3} \end{aligned}$$

17. Riešte sústavu nerovníc:

a) $-2 \leqq 2x + 3 < 7$ b) $-2 < \frac{3x+1}{2} < 3$

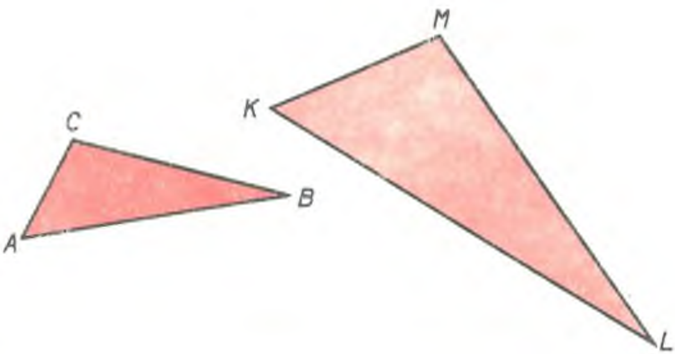
c) $2x + 3 > 3(x + 1) \geqq 9$

18. Pre ktoré hodnoty x nadobúda zlomok $\frac{x-1}{2x+3}$ kladné hodnoty?

19. Pre ktoré hodnoty y nadobúda zlomok $\frac{2x-3}{x+1}$ záporné hodnoty?

SÚHRNNÉ CVIČENIA 4

1. Na obr. 7.11 sú narysované trojuholníky ABC a KLM. Odmerajte ich strany a zistite, či sú podobné. V kladnom prípade zapíšte ich podobnosť a uveďte pomer podobnosti.



Obr. 7.11

2. Úsečky s dĺžkami a, b, c zmeňte v pomere k (konštrukčne i výpočtom) a zistite, či existuje trojuholník ABC, ktorý má strany s takýmito dĺžkami:

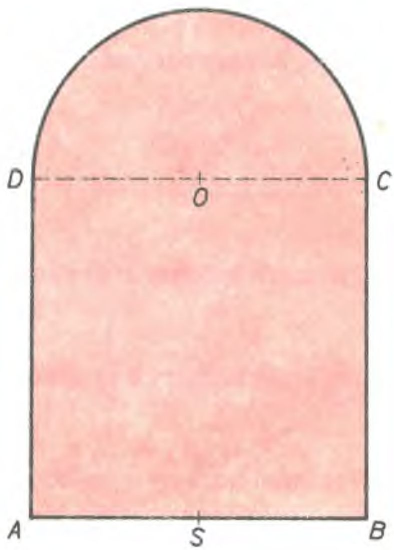
a) $k = \frac{2}{3}$, $a = 9$ cm, $b = 7{,}5$ cm, $c = 6{,}6$ cm;

b) $k = 1{,}7$, $a = 3$ cm, $b = 5$ cm, $c = 1{,}5$ cm.

3. Zadovážte si ľubovoľnú turistickú mapu (napr. Nízkych Tatier, Krkonôš a pod.). Prečítajte si jej mierku. Na mape zvoľte niekoľko miest a zistite ich vzdialenosť na mape a v skutočnosti. (Poznámka: Ak vyberiete miesta s veľmi rozdielnymi nadmorskými výškami, bude vypočítaná vzdialenosť miest o niečo menšia ako v skutočnosti. Prečo?)

4. Jeden z uhlov trojuholníka ABC má veľkosť 90°, jeden z uhlov trojuholníka PQR má veľkosť 95°. Môžu byť tieto trojuholníky podobné?

5. Najskôr zostrojte obrazec zložený zo štvorca a polkruhu ako na obr. 7.12. Potom zostrojte jeho obraz v rovnoľahlosti so stredom S a koeficientom $-\frac{3}{2}$.



Obr. 7.12

6. Zostrojte trojuholník ABC s dĺžkou strany $a = 5$ cm; pre dĺžky jeho strán ďalej platí $a : b : c = 2 : 3 : 5$. Zvyšné strany určte konštrukčne aj výpočtom.

7. V množine všetkých reálnych čísel riešte nerovnice:

a) $7x - 1 > 5x + 3$

b) $2(3x + 6) \geqq 3(x - 1)$

c) $\dfrac{2x+3}{3} \leqq 1$

8. Nerovnicu $5(x - 1) < 4x - 2$ riešte:
a) v množine všetkých prirodzených čísel,
b) v množine všetkých celých čísel,
c) v množine všetkých reálnych čísel.

9. Graficky znázornite intervaly:
a) $-2 < x \leqq 5$,
b) $x \in \langle 0, 7)$.

10. Riešte sústavy nerovníc:

a) $$\begin{aligned} 2x - \frac{1}{2} &\leqq 5{,}5 \\ x - \frac{3}{4} &< 0 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 1{,}2x + 3 &\leqq 0{,}5x - 1{,}9 \\ 3x - 1 &> 2x - 4 \end{aligned}$$

11. Pre ktoré hodnoty x sa výraz $\dfrac{2x-1}{3}$ rovná nule?

12. Pre ktoré hodnoty x je výraz $\dfrac{2x-1}{3}$ nezáporný?

13. Pre ktoré hodnoty x nadobúda výraz $\dfrac{x+3}{2x-1}$ kladné hodnoty?

8. FUNKCIE

8.1 Lineárna funkcia — opakovanie a prehĺbenie učiva

Príklad 1

Zostrojte grafy lineárnych funkcií:

a) $x \mapsto 2x + 3$ b) $x \mapsto -x + 3$ c) $x \mapsto \frac{1}{2}x + 3$

Riešenie

a)

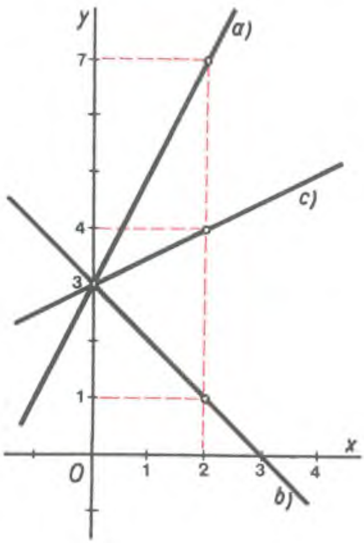
x	0	2
$2x + 3$	3	7

b)

x	0	2
$-x + 3$	3	1

c)

x	0	2
$\frac{1}{2}x + 3$	3	4



Obr. 8.1

Zopakujme si

Lineárna funkcia je každá funkcia $x \mapsto ax + b$, pričom a, b sú ľubovoľné reálne čísla. Definičným oborom lineárnej funkcie je množina všetkých reálnych čísel. Grafom lineárnej funkcie je priamka, ktorá prechádza bodom so súradnicami $[0, b]$.

Príklad 2

Zostrojte grafy lineárnych funkcií:

a) $x \mapsto 2x + 5$ b) $x \mapsto -2x + 5$

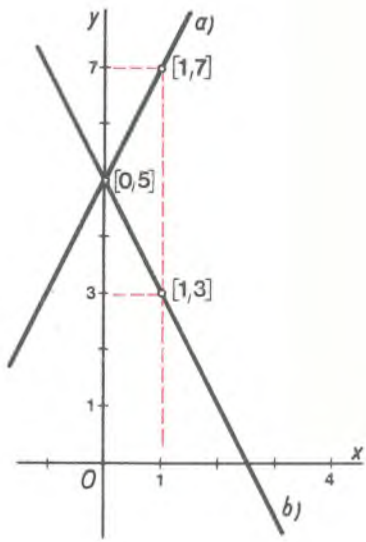
Riešenie

a)

x	0	1
$2x + 5$	5	7

b)

x	0	1
$-2x + 5$	5	3



Obr. 8.2

Úloha 1

Ktorá z funkcií v príklade 2 je rastúca, ktorá je klesajúca?

Zopakujme si

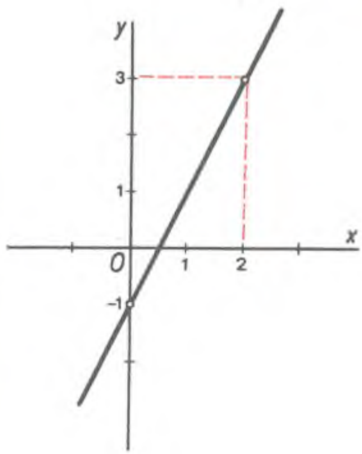
Funkciu $f(x)$ nazývame rastúcou, ak pre ľubovoľné dve hodnoty x_1 a x_2 z jej definičného oboru platí $f(x)_1 < f(x_2)$, ak $x_1 < x_2$. Funkciu $f(x)$ nazývame klesajúcou, ak pre ľubovoľné dve hodnoty x_1 a x_2 z jej definičného oboru platí $f(x_1) > f(x_2)$, ak $x_1 < x_2$.

Úloha 2

Zakreslite graf aspoň jedinej rastúcej a aspoň jedinej klesajúcej lineárnej funkcie.

Príklad 3

Zapíšte lineárnu funkciu danú grafom na obr. 8.3.



Obr. 8.3

Riešenie

Lineárnu funkciu všeobecne zapíšeme $x \mapsto ax + b$. Z grafu prečítame $b = -1$. Teda platí $x \mapsto ax - 1$. Ďalej na obrázku vidíme, že graf prechádza bodom so súradnicami [2, 3]. Teda platí

$$
\begin{aligned}
2 \mapsto a \,.\, 2 - 1 &= 3 \\
2a - 1 &= 3 \\
2a &= 4 \\
a &= 2
\end{aligned}
$$

$x \mapsto 2x - 1$

Grafom na obr. 8.3 je určená lineárna funkcia $x \mapsto 2x - 1$.

Poznámka

V matematike často používame aj zadanie funkcie rovnicou. Napríklad lineárnu funkciu $x \mapsto 3x + 2$ môžeme vyjadriť aj rovnicou $y = 3x + 2$, pretože ak nakreslíme graf tejto funkcie, pre súradnice x, y každého jej bodu platí, že y-ová súradnica sa rovná hodnote danej funkcie prislúchajúcej k hodnote x-ovej súradnice daného bodu. Napríklad y-ová súradnica bodu $A[2, y]$, ktorý leží na grafe funkcie $x \mapsto 3x + 2$ sa rovná $3 \,.\, 2 + 2 = 8$, y-ová súradnica bodu $B[-1, y]$, ktorý takisto leží na grafe funkcie $x \mapsto 3x + 2$ sa rovná $3 \,.\, (-1) + 2 = -1$.

Príklad 4

Riešte graficky sústavu dvoch rovníc s dvoma neznámymi:

1. $x - y = 2$
2. $3x + y = 4$

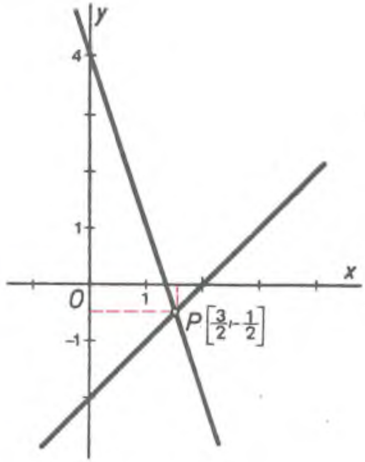
Riešenie

$$
\begin{aligned}
x - y &= 2 \\
3x + y &= 4
\end{aligned}
$$

Rovnice upravíme

$$
\begin{aligned}
y &= x - 2 \\
y &= -3x + 4
\end{aligned}
$$

Zakreslite ich grafy (pozri obr. 8.4).



Obr. 8.4

Prečítame súradnice priesečníka P obidvoch grafov: $P\left[\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right]$.

Súradnice priesečníka sú riešením danej sústavy:
$x = \frac{3}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$.

Urobíme skúšku:

$L_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2$
$P_1 = 2$
$L_1 = P_1$

$L_2 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = \frac{8}{2} = 4$
$P_2 = 4$
$L_2 = P_2$

Usporiadaná dvojica $\left[\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right]$ je jediným riešením sústavy

$$\underline{\begin{aligned} x - y &= 2 \\ 3x + y &= 4 \end{aligned}}$$

Príklad 5

Dĺžka pružiny l závisí od pôsobiacej sily F takto:
$l = l_0 + k \,.\, F$, pričom k je koeficient tuhosti pružiny. Narysujte graf

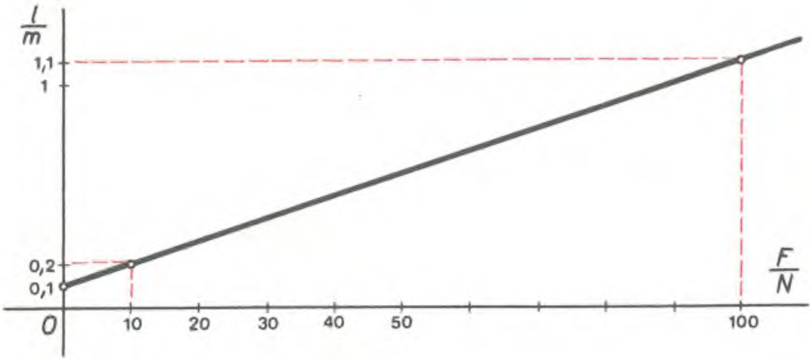
príslušnej funkcie, ktorá znázorňuje závislosť dĺžky pružiny od pôsobiacej sily, ak $l_0 = 10$ cm a $k = 0{,}01\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{N}}$. $F \geqq 0$.

Riešenie

$l = l_0 + k \,.\, F$
$F \mapsto l_0 + k \,.\, F$

Číselnú hodnotu fyzikálnej veličiny sily označme písmenom x, potom platí vzťah $x \mapsto 0{,}1 + 0{,}01x$, pričom $x = 0$.

x	10	100	0
$0{,}1 + 0{,}01x$	0,2	1,1x	0,1



Obr. 8.5

Grafom tejto funkcie je časť priamky, ktorá je grafom funkcie $x \mapsto 0{,}1 + 0{,}01x$. Je to polpriamka so začiatočným bodom so súradnicami $[0; 0{,}1]$. Všimnite si fyzikálny vzorec, z ktorého sme vyšli pri riešení tohto príkladu $l = l_0 + k \,.\, F$, ktorým je zadaná lineárna funkcia $F \mapsto l_0 + k \,.\, F$. Podobne z fyziky poznáme vzorec $s = v \,.\, t$, ktorý vyjadruje lineárnu funkciu $t \mapsto v \,.\, t$, alebo vzorec $U = R \,.\, I$, ktorý vyjadruje lineárnu funkciu $I \mapsto R \,.\, I$.

Príklad 6

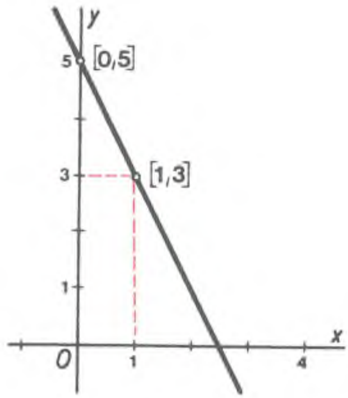
Zostrojte grafy lineárnych funkcií daných rovnicou:

a) $y = -2x + 5$ b) $y = x + \frac{1}{2}$

Riešenie

a) $y = -2x + 5$

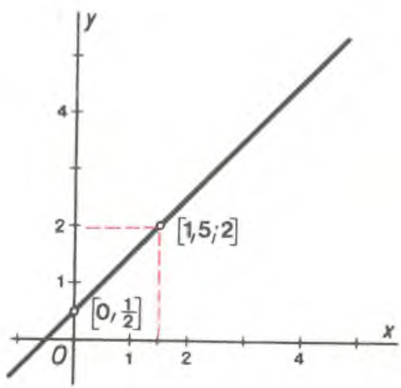
x	0	1
$-2x + 5$	5	3



Obr. 8.6

b) $y = x + \frac{1}{2}$

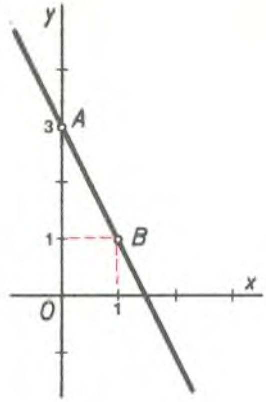
x	0	$1\frac{1}{2}$
$x + \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2



Obr. 8.7

Príklad 7

Zapíšte rovnicu, ktorá určuje lineárnu funkciu danú grafom na obr. 8.8.



Obr. 8.8

Riešenie

Graf danej funkcie prechádza bodmi $A[0, 3]$; $B[1, 1]$

$x_A = 0$ $\quad\quad$ $x_B = 1$

$y_A = 3$ $\quad\quad$ $y_B = 1$

$x \mapsto ax + b$

$b = 3$

$1 \mapsto a \,.\, 1 + 3 = 1$

$a \,.\, 1 + 3 = 1$

$a + 3 = 1$

$a = -2$

$x \mapsto -2x + 3$

$y = -2x + 3$

Zapamätajte si

Lineárnu funkciu $x \mapsto ax + b$ môžeme vyjadriť aj rovnicou $y = ax + b$.

Príklad 8

Výpočtom určte priesečníky grafu funkcie $x \mapsto 2x - 1$ s osami súradníc.

Riešenie

Priesečník s osou x musí byť taký bod grafu funkcie, ktorého druhá súradnica sa rovná nule ($y = 0$). Priesečník s osou y musí byť taký bod grafu funkcie, ktorého prvá súradnica sa rovná nule ($x = 0$).
Danú lineárnu funkciu $x \mapsto 2x - 1$ vyjadríme rovnicou $y = 2x - 1$. Priesečník P_1 s osou x určíme tak, že určíme hodnotu x pre $y = 0$.

$$0 = 2x - 1$$
$$2x = 1$$
$$x = \frac{1}{2}$$
$$P_1\left[\frac{1}{2}, 0\right]$$

Priesečník P_2 s osou y určíme tak, že vypočítame hodnotu y pre $x = 0$.

$$y = 2 \,.\, 0 - 1$$
$$y = 0 - 1$$
$$y = -1$$
$$P_2[0, -1]$$

Cvičenia

1. Zostrojte grafy lineárnych funkcií:

a) $x \mapsto -x + 1$ b) $x \mapsto -3x$ c) $x \mapsto 5$

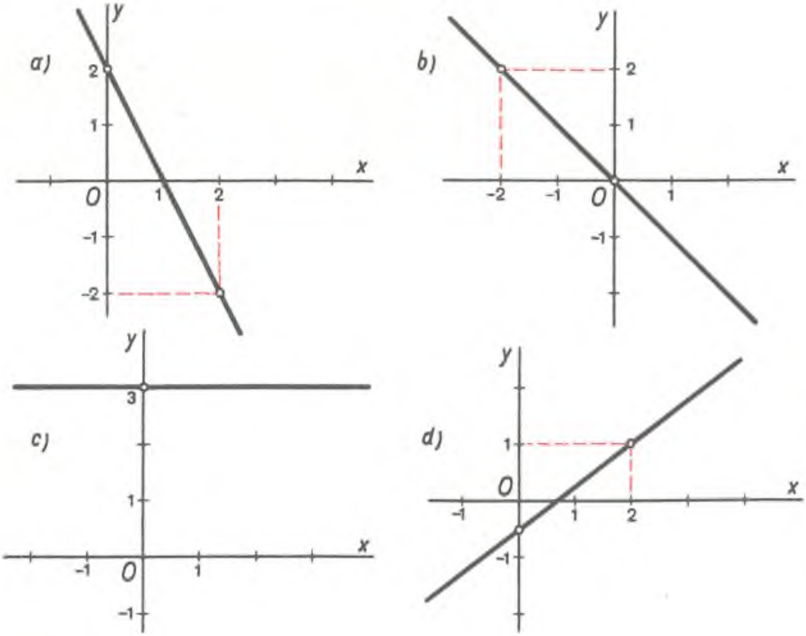
d) $x \mapsto -2$ e) $x \mapsto -x - \frac{3}{4}$ f) $x \mapsto 0$

2. Určte, či daná lineárna funkcia je rastúca alebo klesajúca:

a) $x \mapsto -3x + 1$ b) $x \mapsto -\frac{1}{2}x + 5$ c) $x \mapsto \sqrt{3}x$

d) $x \mapsto \frac{2}{3}x - 4$ e) $x \mapsto 5x + 2$ f) $x \mapsto -3$

3. Zapíšte zadanie lineárnych funkcií daných grafmi.



Obr. 8.9 a, b, c, d

4. Určte, pre ktoré x nadobúda daná lineárna funkcia nulovú hodnotu:

a) $x \mapsto 3x - 1$ b) $x \mapsto -\frac{1}{2}x + 2$ c) $x \mapsto 3$

d) $x \mapsto 2x$ e) $x \mapsto \frac{3}{4}x + 5$ f) $x \mapsto -x + 1$

5. Riešte graficky sústavy rovníc:

a) $\begin{aligned} 2a + 3b &= 24 \\ 5a - 2b &= 25 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} r - s &= 1 \\ -6r + 6s &= 10 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 3e - 6f &= 1 \\ 5e - f &= 1 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} 3x + 5y &= 11 \\ 6x + 10y &= 12 \end{aligned}$

6. Riešte graficky, kedy a kde dohoní cyklista chodca, ktorý ide rýchlosťou

4,5 km/h. Cyklista ide po tej istej ceste rýchlosťou 22 km/h. Chodec vyšiel o 7.30 h a cyklista o 12.15 h z toho istého miesta.

7. Zostrojte grafy lineárnych funkcií a určte, kedy je daná lineárna funkcia rastúca alebo klesajúca:

a) $y = \frac{1}{2}x + 1$ b) $y = -\frac{1}{2}x + 1$

c) $y = 2x - 2$ d) $y = -2x + 2$

8. Určte priesečníky grafu daných funkcií s osou súradníc:

a) $y = -x + 2$ b) $y = -\frac{1}{3}x + 0{,}5$ c) $y = -2x + 1$

8.2 Kvadratická funkcia typu $x \mapsto ax^2$

Príklad 1

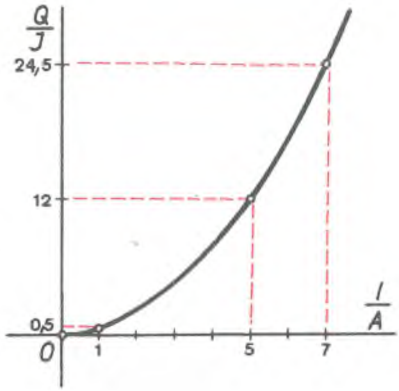
Pri prechode elektrického prúdu vodičom sa vodič zahrieva. Zostrojte graf závislosti tepla uvoľneného prechodom elektrického prúdu od veľkosti elektrického prúdu, ak viete, že platí $Q = R \,.\, I^2$, kde Q je množstvo uvoľneného tepla, R je odpor vodiča, I je veľkosť elektrického prúdu, ktorý prebieha vodičom. Príklad budeme riešiť pre $R = 0{,}5\ \Omega$, $0\text{A} \leqq I \leqq 20\ \text{A}$.

Riešenie

Zostavíme tabuľku pre niektoré hodnoty z definičného oboru funkcie $Q = R \,.\, I^2$.

$\frac{I}{A}$	0	1	5	7	10	14	16	20
$\frac{Q}{J}$	0	0,5	12	24,5	50	98	128	200

Zostrojíme graf.



Obr. 8.10

Grafom závislosti množstva tepla uvoľneného prechodom elektrického prúdu vodičom od intenzity elektrického prúdu je krivka. Je to časť krivky, ktorú nazývame parabola.

Príklad 2

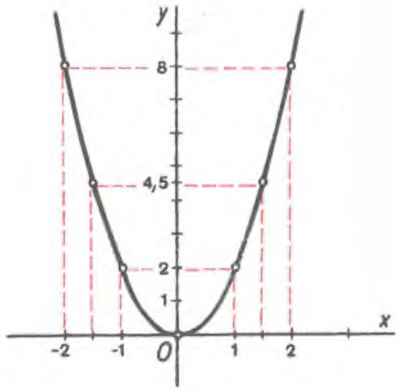
Zostrojte graf funkcie danej rovnicou $y = 2x^2$, ak definičný obor premennej x je množina všetkých reálnych čísel.

Riešenie

Zostavíme tabuľku

x	0	1	2	3	-1	-2	-3	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$
$2x^2$	0	2	8	18	2	8	18	$\frac{9}{2}$	$\frac{9}{2}$

Zostrojíme graf (obr. 8.11).



Obr. 8.11

Všetky funkcie $x \mapsto ax^2$ $(a \neq 0)$, ktorých definičný obor je množina všetkých reálnych čísel, nazývame kvadratická funkcia.

Poznámka

Kvadratickú funkciu $x \mapsto ax^2$ $(a \neq 0)$ môžeme zadať aj rovnicou $y = ax^2$ $(a \neq 0)$.

Úloha 1

Platí pre ľubovoľné dve hodnoty x_1, x_2 z definičného oboru D funkcie $x \mapsto 2x^2$, že $f(x_1) < f(x_2)$, ak platí $x_1 > x_2$?

Zapamätajme si

Funkcia $x \mapsto ax^2$ $(a > 0)$ je rastúca pre všetky $x \geq 0$ a je klesajúca pre všetky $x < 0$.

Príklad 3

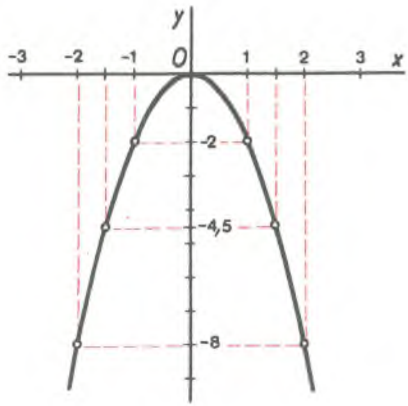
Zostrojte graf funkcie $x \mapsto -2x^2$.

Riešenie

Zostavíme tabuľku

x	0	1	2	3	-1	-2	-3	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$-2x^2$	0	-2	-8	-18	-2	-8	-18	$-4{,}5$	$-4{,}5$

Zostrojíme graf (pozri obr. 8.12).



Obr. 8.12

Úloha 2

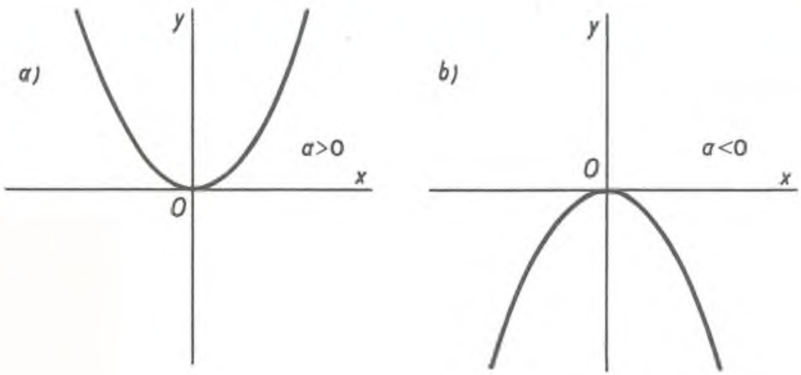
Určte, pre ktoré x je kvadratická funkcia $x \mapsto -2x^2$ rastúca a pre ktoré x je táto funkcia klesajúca.

Úloha 3

Zostrojte grafy kvadratických funkcií $y = 2x^2$, $y = -2x^2$ do jedného obrázka a rozhodnite, v ktorom zhodnom zobrazení sú si vzorom a obrazom.

Zapamätajte si

Grafom kvadratickej funkcie $x \mapsto ax^2$, kde $a > 0$ je parabola, ktorej vrchol je v začiatku, a všetky jej body ležia v polrovine ohraničenej osou x a určenej kladnou časťou osi y. Grafom kvadratickej funkcie $x \mapsto ax^2$, kde $a < 0$ je parabola, ktorej vrchol je v začiatku, a všetky jej body ležia v polrovine ohraničenej osou x a určenej zápornou časťou osi y.



Obr. 8.13a, b

Úloha 4

Určte, podľa ktorej osi je súmerný graf kvadratickej funkcie $x \mapsto ax^2$ a rozhodnite, ako sa dá táto súmernosť využiť pri zostrojovaní grafu.

Príklad 4

Zostrojte grafy kvadratických funkcií $x \mapsto \frac{7}{5}x^2$, $x \mapsto -\frac{7}{5}x^2$ čo najvýhodnejšie.

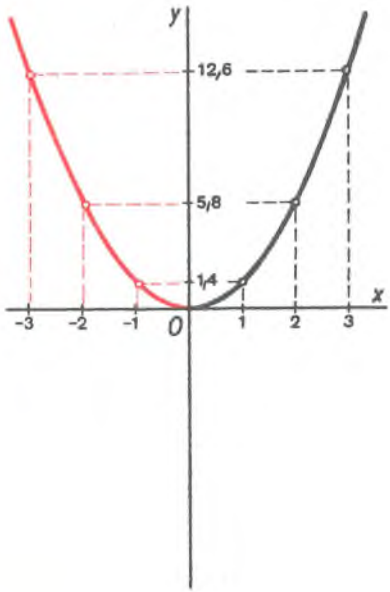
Riešenie

a)

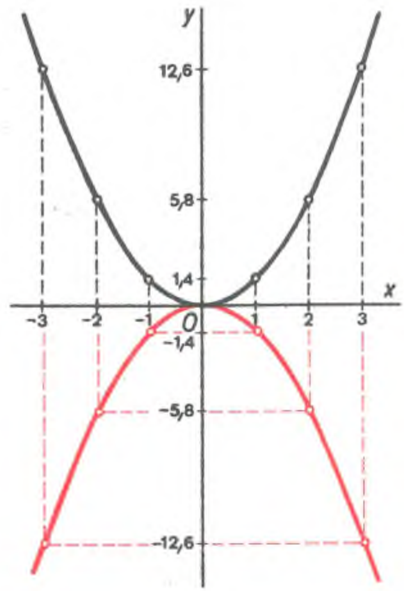
x	1	2	3	4	5	6	7	8
$\frac{7}{5}x^2$	1,4	5,6	12,6	22,4	−35	−50,4	−68,6	−89,6

Hodnoty funkcie pre $x < 0$ nebudeme určovať, pretože pri zostrojovaní grafu využijeme jeho súmernosť podľa osi y.

b) Graf funkcie $x \mapsto -\frac{7}{5}x^2$ zostrojíme tak, že využijeme súmernosť podľa osi x.



Obr. 8.14



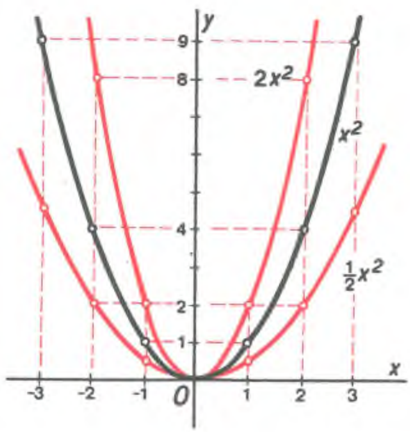
Obr. 8.15

Príklad 5

Zostrojte grafy funkcií $x \mapsto x^2$, $x \mapsto 2x^2$, $x \mapsto \frac{1}{2}x^2$ do jedného obrázka.

Riešenie

x	0	1	2	3	4	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$
x^2	0	1	4	9	16	$\frac{9}{4}$	$\frac{25}{4}$
$2x^2$	0	2	8	18	32	$\frac{9}{2}$	$\frac{25}{2}$
$\frac{1}{2}x^2$	0	$\frac{1}{2}$	2	4,5	8	$\frac{9}{8}$	$\frac{25}{8}$



Obr. 8.16

Cvičenia

1. Zostrojte grafy funkcií:

a) $x \mapsto 4x^2$ b) $x \mapsto -4x^2$ c) $x \mapsto \frac{1}{2}x^2$

d) $y = -\frac{1}{2}x^2$ e) $y = x^2$ f) $y = -x^2$

2. Do jedného obrázka zostrojte grafy funkcií $x \mapsto -x^2$, $x \mapsto -3x^2$, $x \mapsto \frac{1}{3}x^2$.

3. Na milimetrovom papieri zostrojte graf funkcie $x \mapsto 0{,}5x^2$ a zistite z neho hodnoty funkcie pre $x = 0{,}5;\ 3{,}5;\ -5{,}7;\ -8{,}1$.

4. Určte funkciu, ktorá vyjadruje závislosť počtu litrov vody pretekajúcej potrubím kruhového priemeru od priemeru potrubia pri stálej rýchlosti $v = 0{,}5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Zostrojte graf tejto funkcie.

5. Vyjadrite hmotnosť oceľovej tyče 1 m dlhej so štvorcovým prierezom ako funkciu dĺžky strany štvorca. Zostrojte graf tejto funkcie.

6. Vyjadrite číselnú hodnotu hmotnosti hliníkového drôtu ako funkciu polomeru jeho kruhového prierezu, ak viete, že dĺžka drôtu je 1 m. Zostrojte graf tejto funkcie.

8.3 Kvadratická funkcia typu $x \mapsto ax^2 + c$

Príklad 1

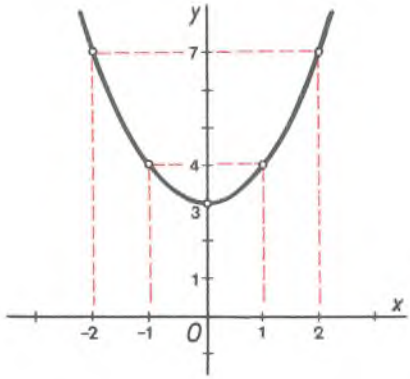
Zostrojte graf funkcie $x \mapsto x^2 + 3$ $(D = R)$.

Riešenie

Zostavíme tabuľku

x	0	1	2	3	-1	-2	-3	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$
$x^2 + 3$	3	4	7	12	4	7	12	$5\frac{1}{4}$	$5\frac{1}{4}$

Zostrojíme graf



Obr. 8.17

Funkciu $x \mapsto ax^2 + c$, ktorej definičným oborom je množina všetkých reálnych čísel, pričom a, c sú ľubovoľné reálne čísla, $a \neq 0$, nazývame kvadratická funkcia. Jej grafom je parabola. Kvadratickú funkciu $x \mapsto ax^2 + c$ $(a \neq 0)$ môžeme zadať aj rovnicou $y = ax^2 + c$ $(a \neq 0)$.

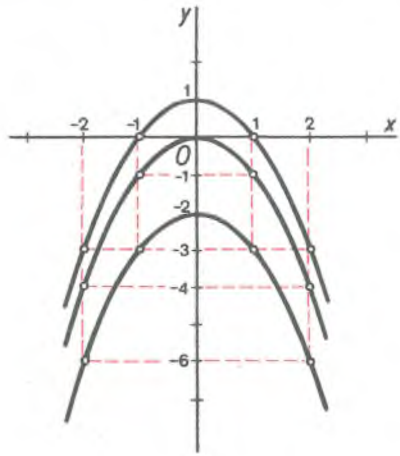
Príklad 2

Zostrojte grafy funkcií $x \mapsto -x^2 + 1$, $x \mapsto -x^2$, $y = -x^2 - 2$.

Riešenie

Zostavíme tabuľku

x	0	1	2	3	$\frac{3}{2}$
$-x^2$	0	-1	-4	-9	$-\frac{9}{4}$
$-x^2+1$	1	0	-3	-8	$-\frac{5}{4}$
$-x^2-2$	-2	-3	-6	-11	$-\frac{17}{4}$



Obr. 8.18

Úloha 1

Uvažujte. V ktorom bode bude vrchol paraboly, ktorá je grafom kvadratickej funkcie $x \mapsto ax^2 + c$?

Cvičenia

1. Zostrojte grafy funkcií:
   a) $x \mapsto x^2 + 1$ b) $x \mapsto x^2 - 2$ c) $x \mapsto x^2$

2. Zostrojte grafy funkcií:
   a) $y = 2x^2 + 2$ b) $y = -2x^2 - 2$

3. Zostrojte grafy funkcií:

a) $y = x^2 + \frac{1}{2}$ b) $y = x^2$

c) $x \mapsto x^2 - \frac{1}{2}$ d) $x \mapsto -x^2$

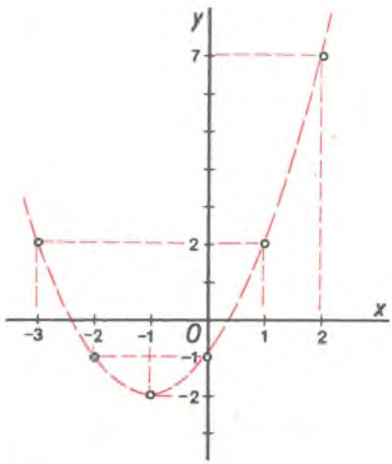
8.4 Všeobecná kvadratická funkcia

Príklad 1

Zostrojte graf funkcie $x \mapsto x^2 + 2x - 1$, ak $D = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

Riešenie

x	-2	-1	0	1	2	-3
$x^2 + 2x - 1$	-1	-2	-1	2	7	2



Obr. 8.19

Grafom sú body, ktoré ležia na parabole nesúmernej podľa osi y.

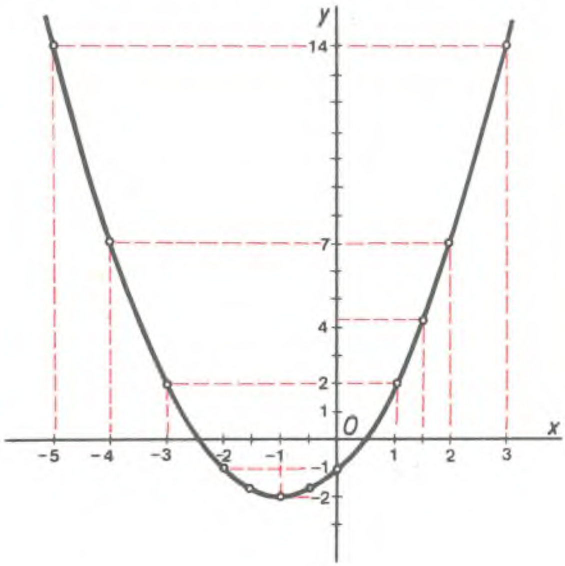
Príklad 2

Zostrojte graf funkcie $x \mapsto x^2 + 2x - 1$, kde $D = R$.

Riešenie

x	-5	-4	-3	-2	$-1{,}5$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$1{,}5$	2	3
$x^2 + 2x - 1$	14	7	2	-1	$-\frac{7}{4}$	-2	$-\frac{5}{4}$	-1	$-\frac{1}{4}$	2	$3{,}25$	7	14

Zostrojíme graf



Obr. 8.20

Grafom je parabola, ktorá nie je súmerná podľa osi y.

Zapamätajte si

Každú funkciu $x \mapsto ax^2 + bx + c$, kde $a \neq 0$, ktorej definičným oborom je množina všetkých reálnych čísel, nazývame kvadratická funkcia.
Grafom kvadratickej funkcie je parabola.

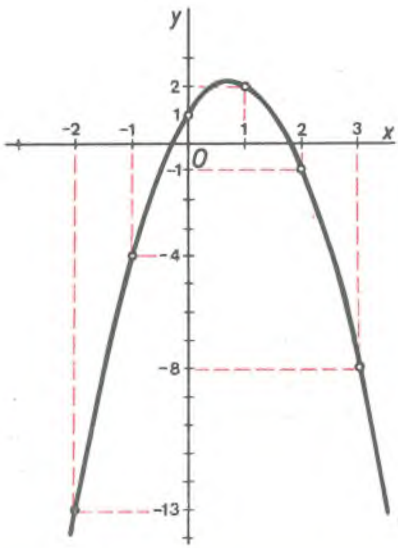
Kvadratickú funkciu $x \mapsto ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ môžeme zadať aj rovnicou $y = ax^2 + bx + c$.

Príklad 3

Zostrojte graf kvadratickej funkcie $x \mapsto -2x^2 + 3x + 1$.

Riešenie

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$-2x^2 + 3x + 1$	-26	-13	-4	1	2	-1	-8



Obr. 8.21

Príklad 4

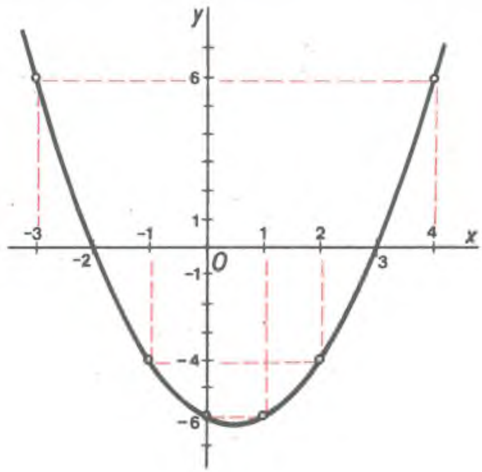
Určte graficky nulové hodnoty kvadratickej funkcie $y = x^2 - x - 6$.

Riešenie

Zostavíme tabuľku

x	0	2	4	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-3
$x^2 - x - 6$	-6	-4	6	$-6{,}15$	$-5{,}25$	-4	6

Zostrojíme graf



Obr. 8.22

Kvadratická funkcia $y = x^2 - x - 6$ má nulovú hodnotu v bodoch $[-2, 0]$ a $[3, 0]$, teda pre x rovnajúce sa -2 a 3.

Zapamätajte si

Nulové hodnoty funkcie určíme graficky tak, že zostrojíme graf funkcie a určíme jeho priesečníky s osou x.

Úloha 1

Uvažujte! Nadobúda každá kvadratická funkcia dve nulové hodnoty? Ako by musel vyzerať graf kvadratickej funkcie, aby daná funkcia nenadobúdala pre nijaké x nulové hodnoty? Ako by musel vyzerať graf kvadratickej funkcie, aby nadobúdala nulové hodnoty práve pre jednu hodnotu premennej x?

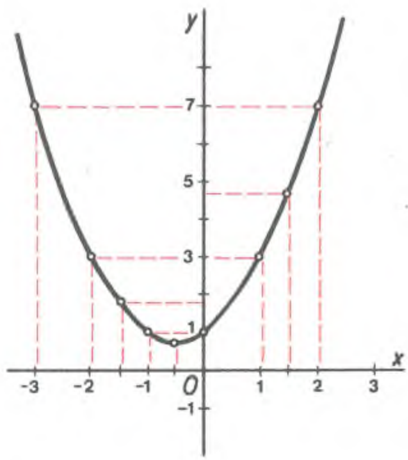
Príklad 5

Určte nulové hodnoty funkcie $y = x^2 + x + 1$.

Riešenie

x	0	2	3	1,5	−1	−2	−3	−1,5	−0,5
$x^2 + x + 1$	1	7	12	2,75	1	3	7	1,75	0,75

Zostrojíme graf



Obr. 8.23

Funkcia $y = x^2 + x + 1$ nenadobúda pre nijaké x nulové hodnoty Všetky jej hodnoty sú kladné.

Úloha 2

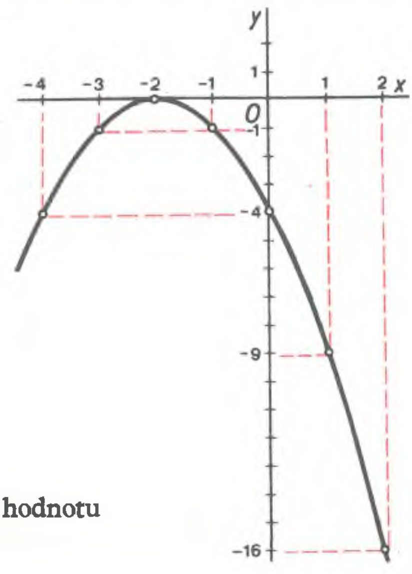
Ako bude vyzerať graf kvadratickej funkcie, ktorej všetky hodnoty budú záporné? Určte aspoň jednu takú funkciu.

Príklad 6

Určte nulové hodnoty funkcie $y = -x^2 - 4x - 4$.

Riešenie

x	0	1	2	−1	−2	−3
$-x^2 - 4x - 4$	−4	−9	−16	−1	0	−1

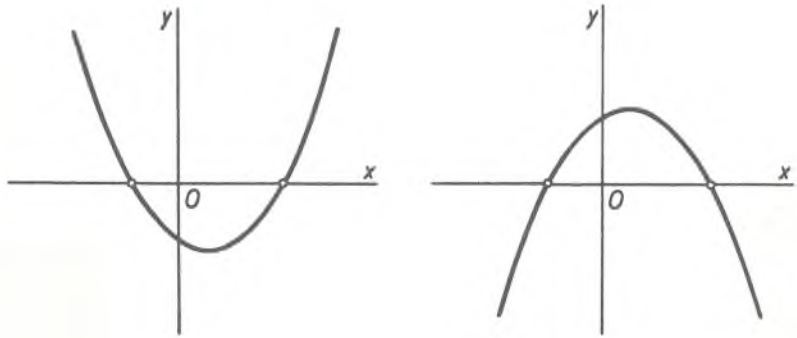


Obr. 8.24

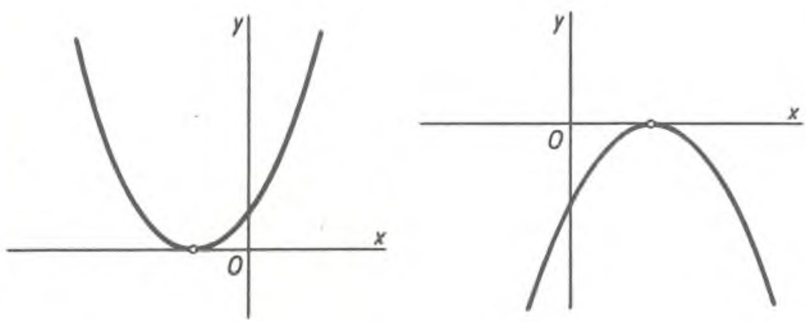
Táto funkcia nadobúda nulovú hodnotu pre jediné x, a to pre $x = -2$.

Zapamätajte si

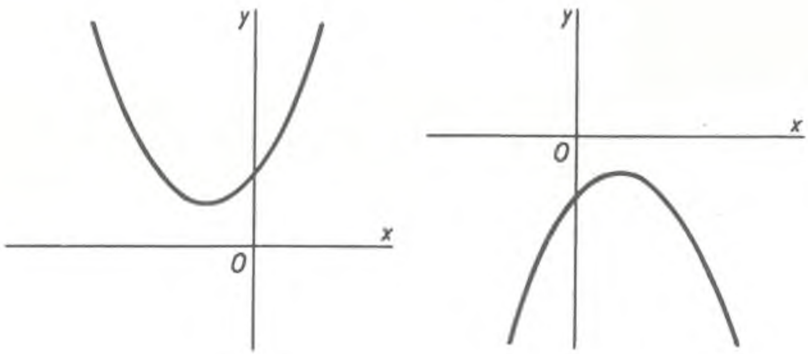
Kvadratická funkcia nadobúda nulové hodnoty buď pre dve hodnoty premennej x (napr. obr. 8.25a,b), buď pre jednu hodnotu premennej x (napr. obr. 8.26a,b), alebo pre nijakú hodnotu premennej x (obr. 8.27a,b).



Obr. 8.25a, b



Obr. 8.26a, b



Obr. 8.27a, b

Príklad 7

Určte prirodzené číslo, pre ktoré platí, že jeho súčin s číslom o jednu väčším je 72.

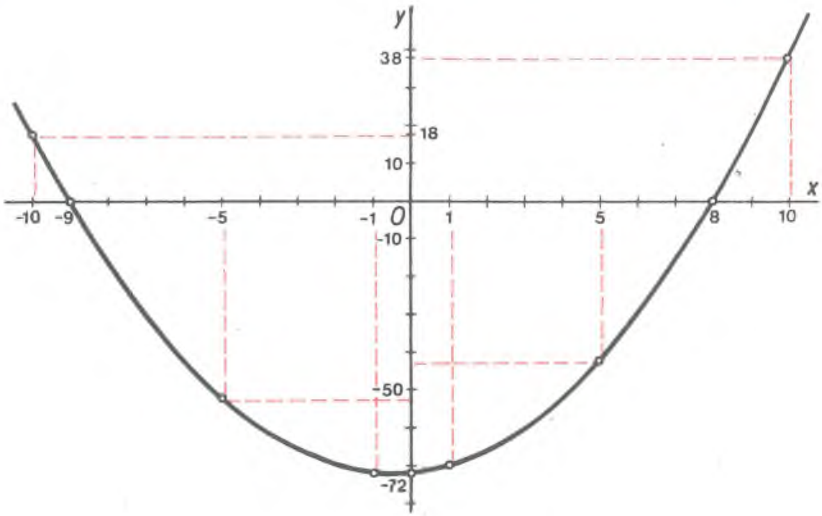
Riešenie

Hľadané číslo označíme x. Číslo o 1 väčšie bude teda $x + 1$.
Podmienku tejto úlohy zapíšeme takto: $x(x + 1) = 72$.
Rovnicu upravíme a dostaneme $x^2 + x - 72 = 0$.

Riešenie úlohy nás privedie k rovnici, ktorá obsahuje neznámu s druhou mocninou.

Takéto rovnice sme doteraz neriešili. Využijeme však vedomosti, ktoré sme získali pri štúdiu kvadratických funkcií. Na ľavej strane rovnice $x^2 + x - 72 = 0$ je vlastne zapísaná hodnota tejto kvadratickej funkcie $x \mapsto x^2 + x - 72$. Zostrojíme jej graf a na ňom zistíme, kedy nadobúda daná funkcia nulové hodnoty. Tým určíme hodnotu x, ktorá bude riešením rovnice $x^2 + x - 72 = 0$.

x	1	0	-1	10	-10	5	-5
$x^2 + x - 72$	-70	-72	-72	38	18	-42	-52



Obr. 8.28

Existujú dve hodnoty premennej x, pre ktoré nadobúda funkcia $x \mapsto x^2 + x - 72$ nulovú hodnotu, sú to čísla -9 a 8.

Zistené hodnoty premennej x dosadíme do rovnice $x^2 + x - 72 = 0$ a dostaneme

1. $(-9)^2 - 9 - 72 = 81 - 9 - 72 = 0$
2. $8^2 + 8 - 72 = 64 + 8 - 72 = 0$

Nájdené hodnoty premennej x sú riešením rovnice $x^2 + x - 72 = 0$.
Nájdené hodnoty dosadíme do textu slovnej úlohy a urobíme skúšku:
Číslo -9 nezodpovedá podmienke úlohy, pretože sme mali nájsť prirodzené číslo.
Urobíme skúšku pre číslo 8. Platí $8 . 9 = 72$. Hľadané prirodzené číslo je číslo 8.

Definícia

Rovnice, ktoré obsahujú neznámu najviac s druhou mocninou, nazývame kvadratické.
Všeobecne zapisujeme kvadratickú rovnicu s jednou neznámou takto: $ax^2 + bx + c = 0$, pričom $a \neq 0$.
ax^2 je kvadratický člen, bx je lineárny člen, c je absolútny člen, a, b sú koeficienty.

Príklad 8

Riešte kvadratickú rovnicu $x^2 - x - 6 = 0$.

Riešenie

Zostrojíme graf kvadratickej funkcie $x \mapsto x^2 - x - 6$.

x	0	1	-1	2	-2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$x^2 - x - 6$	-6	-6	-4	-4	0	$-6{,}25$	$-5{,}25$

Funkcia $x \mapsto x^2 - x - 6$ nadobúda nulovú hodnotu pre $x = -2$ a $x = 3$. Dosadením do rovnice $x^2 - x - 6 = 0$ overíme, či sú hľadané čísla riešením príslušnej kvadratickej rovnice:

1. $L = (-2)^2 - (-2) - 6 = 4 + 2 - 6 = 6 - 6 = 0$
   $L = P$
2. $L = 3^2 - 3 - 6 = 9 - 9 = 0$
   $L = P$

Kvadratická rovnica $x^2 - x - 6 = 0$ má dve riešenia, a to -2 a 3.

Úloha 3

Uvažujte. Môže mať kvadratická rovnica viac ako dve riešenia? Môže mať kvadratická rovnica menej ako dve riešenia?

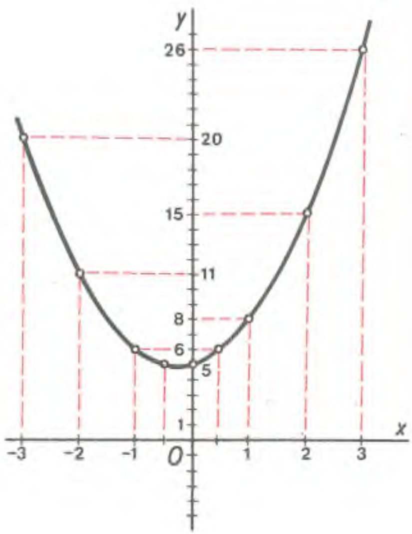
Príklad 9

Riešte kvadratickú rovnicu $2x^2 + x + 5 = 0$.

Riešenie

Zostrojíme najskôr graf príslušnej kvadratickej funkcie $x \mapsto 2x^2 + x + 5$.

x	1	-1	2	-2	3	-3	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$2x^2 + x + 5$	8	6	15	11	26	20	5	6	5



Obr. 8.29

Táto kvadratická funkcia nenadobúda nulovú hodnotu pre nijaké x. Daná kvadratická rovnica nemá nijaké riešenie.

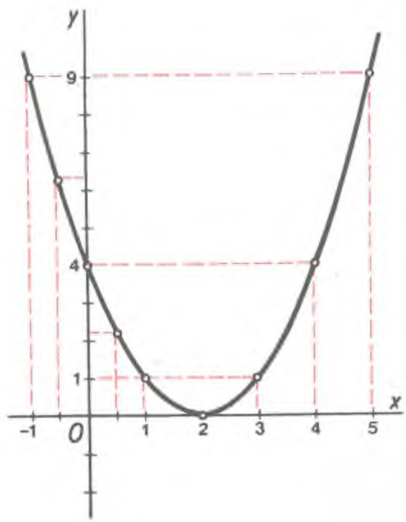
Príklad 10

Riešte kvadratickú rovnicu $x^2 - 4x + 4 = 0$.

Riešenie

Najskôr zostrojíme graf príslušnej kvadratickej funkcie $x \mapsto x^2 - 4x + 4$.

x	0	1	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$x^2 - 4x + 4$	4	1	9	2,25	6,25



Obr. 8.30

Daná kvadratická funkcia nadobúda nulovú hodnotu pre práve jednu hodnotu $x = 2$.

Túto hodnotu dosadíme do danej kvadratickej rovnice a dostaneme:

$L = +2^2 - 4 \cdot 2 + 4 = +4 - 8 + 4 = 0$
$L = P$

Číslo 2 je jediným riešením rovnice $x^2 - 4x + 4 = 0$.

Zhrnieme

Kvadratická rovnica má najviac dve riešenia (korene).

Úloha 4

Načrtnite, ako vyzerajú grafy kvadratických funkcií prislúchajúcich kvadratickej rovnici, ktorá má

a) dve riešenia,
b) jedno riešenie,
c) nijaké riešenie.

Poznámka

Kvadratické rovnice sú veľmi dôležité, pretože pri riešení slovných úloh k nim často dochádzame. Grafické riešenie nie je vždy dostatočne presné. Kvadratické rovnice sa dajú riešiť aj výpočtom. Riešime ich pomocou vzorca na výpočet koreňov:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

kde a, b, c sú koeficienty danej kvadratickej rovnice $ax^2 + bx + c = 0$. Odvodiť tento vzorec sa naučíte až vo vyšších ročníkoch. Použitie vzorca si ukážeme v príklade 11.

Príklad 11

Riešte pomocou vzorca kvadratickú rovnicu $x^2 + 2x - 15 = 0$.

Riešenie

$$x^2 + 2x - 15 = 0$$
$$a = 1 \quad b = 2 \quad c = -15$$
$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \,.\, 1 \,.\, (-15)}}{2}$$
$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{2}$$
$$x_1 = \frac{-2 + 8}{2} = 3$$
$$x_2 = \frac{-2 - 8}{2} = -5$$

Skúška

1. $Ľ = 3^2 + 2 \,.\, 3 - 15 = 9 + 6 - 15 = 0$
   $Ľ = P$
2. $Ľ = (-5)^2 + 2 \,.\, (-5) - 15 = 25 - 10 - 15 = 0$
   $Ľ = P$

Kvadratická rovnica $x^2 + 2x - 15 = 0$ má riešenie 3 a -5.

Príklad 12

Riešte rovnice:
a) $3x^2 + 5x = 0$ b) $4x^2 - 9 = 0$ c) $5x^2 = 0$

Riešenie

a) $3x^2 + 5x = 0$ je kvadratická rovnica bez absolútneho člena. Môžeme ju riešiť tak, že použijeme vzorec, alebo dvojčlen $3x^2 + 5x$ upravíme vyňatím x pred zátvorku.
Dostaneme: $x(3x + 5) = 0$.
Súčin $x(3x + 5) = 0$ práve vtedy, keď buď $x = 0$, alebo $3x + 5 = 0$.

Z rovnosti $3x + 5 = 0$ vyplýva $x = \frac{-5}{3}$. Kvadratická rovnica $3x^2 + 5x = 0$ má teda dve riešenia: $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{-5}{3}$.

Skúška

1. $x = 0$
$Ľ = 3 . 0^2 + 5 . 0 = 3 . 0 + 5 . 0 = 0 + 0 = 0$
$P = 0$
$Ľ = P$
2. $x = -\frac{5}{3}$
$Ľ = 3\left(-\frac{5}{3}\right)^2 + 5\left(-\frac{5}{3}\right) = 3 . \frac{25}{9} + \frac{-25}{3} = \frac{25}{3} - \frac{25}{3} = 0$
$P = 0$
$Ľ = P$

b) $4x^2 - 9 = 0$ je kvadratická rovnica bez lineárneho člena. Môžeme ju riešiť buď pomocou vzorca, alebo tak, že dvojčlen $4x^2 - 9$ rozložíme podľa vzorca $A^2 - B^2 = (A - B) . (A + B)$.
Dostaneme:
$(2x - 3)(2x + 3) = 0$
Súčin $(2x - 3)(2x + 3) = 0$ práve vtedy, keď buď $2x - 3 = 0$, alebo $2x + 3 = 0$.
Z podmienky $2x - 3 = 0$ vyplýva $x = \frac{3}{2}$.
Z podmienky $2x + 3 = 0$ vyplýva $x = -\frac{3}{2}$.
Kvadratická rovnica $4x^2 - 9 = 0$ má teda dve riešenia:
$x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = -\frac{3}{2}$.

Skúška

1. $x = \frac{3}{2}$
$Ľ = 4\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 9 = 4 . \frac{9}{4} - 9 = 9 - 9 = 0$

$P = 0$

$Ľ = P$

2. $x = -\frac{3}{2}$

$Ľ = 4\left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 9 = 4 \cdot \frac{9}{4} - 9 = 9 - 9 = 0$

$P = 0$

$Ľ = P$

c) $5x^2 = 0$ je kvadratická rovnica bez lineárneho člena a bez absolútneho člena. Jediným riešením tejto rovnice je číslo nula.
Platí

$Ľ = 5 \cdot 0^2 = 5 \cdot 0 = 0$

$P = 0$

$Ľ = P$

Cvičenie

1. Zostrojte grafy funkcií:

a) $x \mapsto \frac{1}{2} x^2$

b) $x \mapsto \frac{1}{2} x^2 - 2$

c) $x \mapsto \frac{1}{2} x^2 - x - 2$

2. Zostrojte grafy funkcií:

a) $y = 2x^2 + 3x - 5$

b) $y = x^2 - 4x + 3$

c) $y = -3x^2$

d) $y = -x^2 - 6x + 8$

3. Určte, pre ktoré hodnoty x nadobúdajú funkcie

a) $y = x^2 - 10x + 20$

b) $y = -x^2 - 4x + 1$

c) $y = 2x^2 - 2x + 1$

nulové hodnoty.

4. Riešte graficky kvadratické rovnice:

a) $x^2 - 3x - 4 = 0$

b) $x^2 - \frac{1}{4} = 0$

c) $-x^2 + x - 6 = 0$

d) $5x^2 + 4x + 8 = 0$

e) $5x^2 - 4x = 0$

5. Pomocou vzorca riešte kvadratické rovnice:

a) $x^2 + 6x + 5 = 0$

b) $\frac{x}{x+2} + \frac{x+2}{x} = 3$

c) $\frac{2x-1}{2} + \frac{2}{2x-1} = 2$

d) $x^2 - 16x - 80 = 0$

e) $5x^2 - 4x = 0$

f) $\frac{x-2}{x-3} + \frac{x-3}{x-2} = \frac{13}{6}$

6. Určte prirodzené číslo, pre ktoré platí, že jeho druhá mocnina zmenšená o 6 sa rovná 283.

7. Dvaja turisti vyšli súčasne z miest A a B proti sebe. Stretli sa za tri hodiny od štartu. Prvý prišiel do B o $2\frac{1}{2}$ h neskôr ako druhý do A. Za aký čas prešiel každý z nich celú vzdialenosť?

8. Dvaja robotníci môžu vykonať spoločnú prácu za 12 hodín. Prvý z nich by túto prácu vykonal sám o 10 hodín skôr, ako by túto prácu bol schopný vykonať druhý. Za aký čas vykoná túto prácu prvý robotník a za aký čas druhý?

8.5 Nepriama úmernosť

Príklad 1

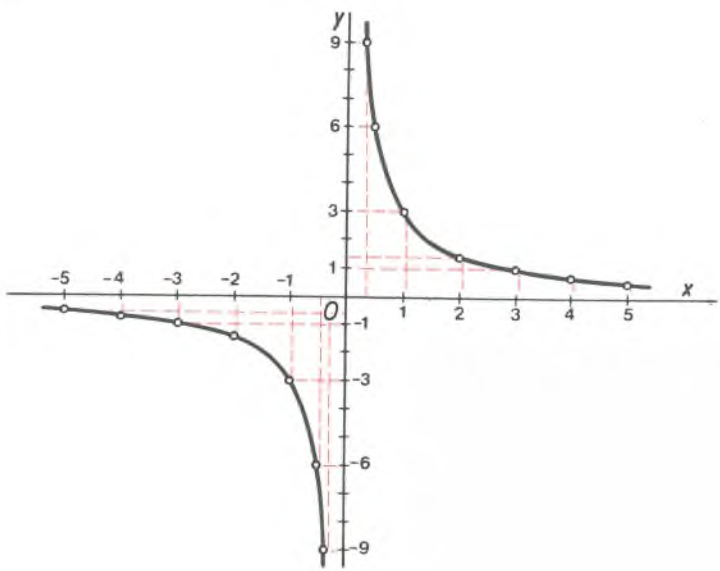
Zostrojte graf funkcie $x \mapsto \frac{3}{x}$, $x \in R - \{0\}$.

Riešenie

Zostavíme tabuľku

x	1	2	3	4	5	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	-1	-2	-3	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$
$\frac{3}{x}$	3	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	6	9	12	-3	$-\frac{3}{2}$	-1	-6	-9

Zostrojíme graf



Obr. 8.31

Zapamätajte si

Funkcia typu $x \mapsto \frac{k}{x}$ $(D = R - \{0\})$ je racionálna lomená funkcia.
Nazývame ju nepriama úmernosť.
Graf racionálnej lomenej funkcie je krivka, ktorá sa nazýva hyperbola.

(Racionálnu lomenú funkciu $x \mapsto \frac{k}{x}$ môžeme zadať aj rovnicou $y = \frac{k}{x}$.) :adať aj

Poznámka

Všimnite si. Hyperbola sa skladá z dvoch častí, ktoré nazývame vetvy hyperboly.

Úloha 1

Uvažujte. V ktorom zobrazení je jedna vetva hyperboly obrazom druhej vetvy? Ako môžeme využiť súmernosť hyperboly pri konštrukcii grafu nepriamej úmernosti?

Príklad 2

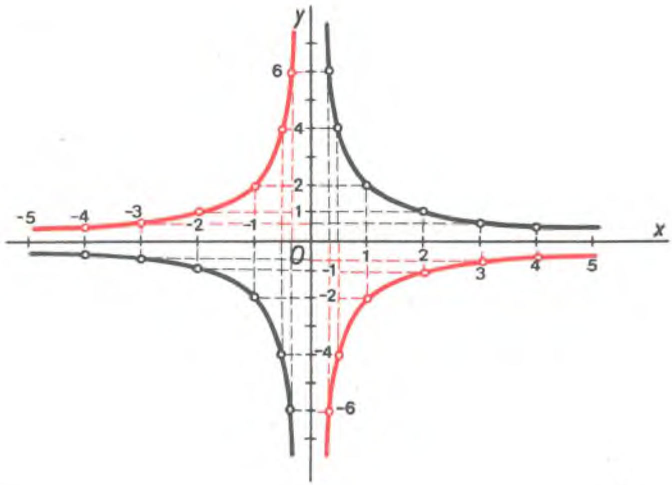
Zostrojte grafy racionálnych lomených funkcií $y = \frac{2}{x}$, $y = -\frac{2}{x}$.

Riešenie

Zostrojíme tabuľku

x	1	2	3	$\frac{1}{2}$	-1	-2	-3	$-\frac{1}{2}$
$\frac{2}{x}$	2	1	$\frac{2}{3}$	4	-2	-1	$-\frac{2}{3}$	-4
$\frac{-2}{x}$	-2	-1	$-\frac{2}{3}$	-4	2	1	$\frac{2}{3}$	4

Zostrojíme grafy



Obr. 8.32

Úloha 2

Podľa ktorej osi sú súmerné grafy funkcií $x \mapsto \frac{k}{x}$ a $x \mapsto \frac{-k}{x}$?

Úloha 3

Je funkcia $x \mapsto \frac{2}{x}$ klesajúca? Je funkcia $x \mapsto \frac{-2}{x}$ klesajúca?

Zapamätajte si

Funkcia $x \mapsto \frac{k}{x}$ $(D = R - \{0\})$ nie je ani klesajúca ani rastúca v celom svojom definičnom obore.

Funkcia $x \mapsto \frac{k}{x}$ $(k > 0)$ je klesajúca pre všetky x menšie ako nula a klesajúca pre všetky x väčšie ako nula.

Funkcia $x \mapsto \frac{k}{x}$ $(k < 0)$ je rastúca pre všetky x menšie ako nula a pre všetky x väčšie ako nula.

Príklad 3

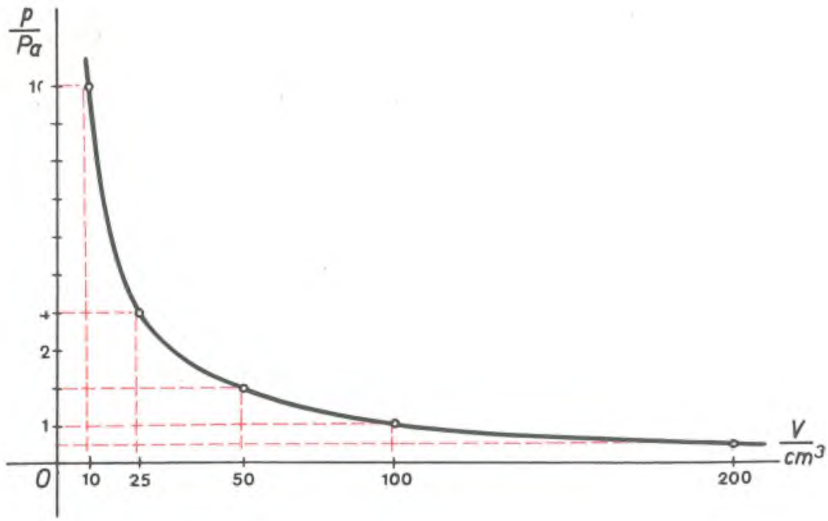
Vo valcovej nádobe s objemom 1 000 cm³ je uzavretý plyn piestom, ktorým sa dá posúvať. Pri posunutí piesta sa mení objem uzavretého plynu, a tým sa mení aj jeho tlak. Ak sa nemení teplota plynu, platí vzorec $p \, . \, V = k$, kde k je fyzikálna konštanta. K danej hodnote objemu V vypočítame hodnotu tlaku p takisto zo vzťahu $p \, . \, V = k$. Platí $p = \frac{k}{V}$. Zakreslíme graf danej funkcie pre číselnú hodnotu konštanty rovnajúcu sa 100.

Definičným oborom funkcie budú iba kladné číselné hodnoty objemu menšie ako 1 000, ako vyplýva z podmienky úlohy.

Zostavíme tabuľku

$\frac{V}{\text{cm}^3}$	10	25	50	100	200	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{p}{\text{Pa}}$	10	4	2	1	$\frac{1}{2}$	200	400

Zostrojíme graf



Obr. 8.33

Graf je časťou jednej vetvy hyperboly.

Cvičenia

1. Zostrojte grafy funkcií:
   a) $x \mapsto \frac{1}{x}$, $D = R - \{0\}$ b) $x \mapsto -\frac{1}{x}$, $D = R - \{0\}$

2. Zostrojte grafy funkcií:
   a) $x \mapsto \frac{5{,}1}{x}$, $D = R - \{0\}$ b) $x \mapsto \frac{-0{,}5}{x}$, $D = R - \{0\}$
   a zapíšte funkcie, ktorých grafy sú súmerné s grafmi uvedených funkcií podľa osi x.

3. Zistite, ktorý z bodov $[1; -1]$, $[-1; -1{,}5]$, $\left[-5, -\frac{1}{3}\right]$ leží na grafe funkcie $y = \frac{1{,}5}{x}$.

4. Určte rovnicu nepriamej úmernosti, ktorej graf prechádza bodom $\left[2, \frac{3}{2}\right]$.

5. Zostrojte grafy funkcií:

a) $y = \frac{2}{x}$ c) $y = \frac{\frac{1}{2}}{x}$

b) $y = \frac{1}{x}$ d) $y = \frac{1}{2x}$

6. Určte konštantu k, keď viete, že graf funkcie $y = \frac{k}{x}$ prechádza bodom so súradnicami [2, 3]. Zostrojte graf tejto funkcie.

7. Napätie v elektrickej sieti je 220 V. Zapíšte funkciu, ktorá vyjadruje závislosť prúdu od veľkosti odporu R. Zostrojte graf.

8.6 Lineárna lomená funkcia $x \mapsto \frac{k}{ax + b}$

Príklad 1

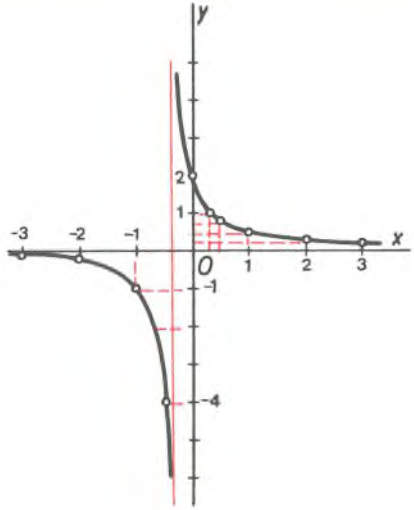
Zostrojte graf funkcie $x \mapsto \frac{2}{3x + 1}$, $D = R - \left\{-\frac{1}{3}\right\}$.

Riešenie

Zostavíme tabuľku

x	1	2	3	-1	-2	-3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{-1}{2}$
$\frac{2}{3x+1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{5}$	-1	$\frac{-2}{5}$	$\frac{-1}{9}$	$\frac{-1}{4}$	1	2	-4

Zostrojíme graf



Obr. 8.34

Zapamätajte si

Funkciu $x \mapsto \dfrac{k}{ax+b}$, $D = R - \left\{-\dfrac{b}{a}\right\}$ nazývame lineárna lomená funkcia. Grafom lineárnej lomenej funkcie je hyperbola.

Lineárnu lomenú funkciu $x \mapsto \dfrac{k}{ax+b}$ môžeme vyjadriť aj rovnicou $y = \dfrac{k}{ax+b}$.

Príklad 2

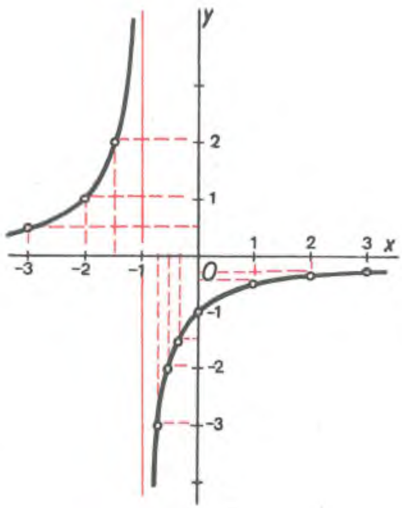
Zostrojte graf funkcie $y = \dfrac{-1}{x+1}$, $D = R - \{-1\}$.

Riešenie

Zostavíme tabuľku

x	0	1	2	3	-2	-3	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$
$\frac{-1}{x+1}$	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$	-2	$-\frac{3}{2}$

Zostrojíme graf



Obr. 8.35

Úloha 1

Určte, na ktorých intervaloch je funkcia z príkladu 2 klesajúca alebo rastúca.

Cvičenia

1. Zostrojte grafy funkcií:

a) $x \mapsto \frac{1}{x}$, $D = R - \{0\}$

b) $x \mapsto \frac{1}{x+1}$, $D = R - \{-1\}$

c) $x \mapsto \frac{1}{x-2}$, $D = R - \{2\}$

2. Zostrojte grafy funkcií:

a) $y = \dfrac{2}{x - 5}$ c) $y = \dfrac{-1{,}5}{x - 1}$

b) $y = \dfrac{-3}{2x + 1}$

3. Zostrojte graf závislosti odporu R medeného drôtu dlhého 1 km od priemeru S, keď priemery drôtu sú od 1 mm² do 10 mm² a špecifický odpor $\varphi = 0{,}0175\ \Omega/\mathrm{m}$. $\left(R = \varrho \cdot \frac{1}{s}.\right)$

4. Určte graf závislosti napätia U od prúdu I pri stálom výkone žiarovky 100 W. Prúd určujte od 1 A do 5 A ($P = U \cdot I$).

8.7 Grafické riešenie sústavy jednej lineárnej rovnice a jednej kvadratickej rovnice s dvoma neznámymi

Vieme už riešiť graficky sústavu dvoch lineárnych rovníc s dvoma neznámymi, a to tak, že zostrojíme grafy lineárnych funkcií prislúchajúcich k daným rovniciam a určíme ich priesečník. Teraz sa naučíme podobne graficky riešiť sústavu dvoch rovníc s dvoma neznámymi, z ktorých jedna je lineárna a druhá kvadratická.

Príklad 1

$$x - y = -6$$
$$x^2 - y = 0$$

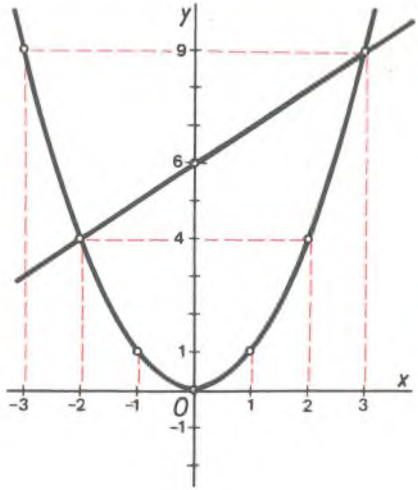
Riešenie

Rovnice najskôr upravíme tak, že na ľavej strane osamostatníme neznámu y.

$y = x + 6$
$y = x^2$
Zostrojíme grafy funkcií $y = x + 6$ a $y = x^2$.

x	0	-2
$x + 6$	6	4

x	0	1	2	3
x^2	0	1	4	9



Obr. 8.36

Body A, B ležia súčasne na grafoch obidvoch funkcií. Ich súradnice sú riešením prvej i druhej rovnice, sú teda riešením danej sústavy.
Platí: $A[-2, 4]$, $B[3, 9]$, teda $x_1 = -2$, $y_1 = 4$ a $x_2 = 3$, $y_2 = 9$.

Urobíme skúšku

1. $L_1 = (-2) - 4 = -6$
$P_1 = -6$
$L_1 = P_1$

$L_2 = (-2)^2 - 4 = 4 - 4 = 0$
$P_2 = 0$
$L_2 = P_2$

2. $L_1 = 3 - 9 = -6$
$P_1 = -6$
$L_1 = P_1$

$L_2 = (3)^2 - 9 = 9 - 9 = 0$
$P_2 = 0$
$L_2 = P_2$

Sústava má dve riešenia: 1. $[-2, 4]$, 2. $[3, 9]$.

Príklad 2

Riešte sústavu rovníc:

$$x^2 - y + 3 = 0$$

$$\frac{1}{2}x - y - \frac{5}{2} = 0$$

Riešenie

Rovnice upravíme

$$x^2 + 3 = y$$

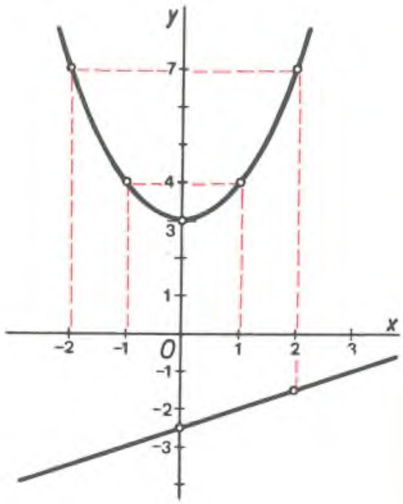
$$\frac{1}{2}x - \frac{5}{2} = y$$

Zostrojíme grafy funkcií $y = x^2 + 3$ a $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$

Zostrojíme grafy obidvoch funkcií.

x	0	2
$\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$	$-\frac{5}{2}$	$-1{,}5$

x	0	1	2	-1	-2
$x^2 + 3$	3	4	7	2	7



Obr. 8.37

Nenašli sme nijaký bod, ktorý by súčasne patril obidvom grafom funkcií. Daná sústava rovníc nemá spoločné riešenie.

Úloha 1

Uvažujte, kedy bude mať sústava rovníc typu

$$\begin{aligned} ax + b &= 0 \\ ax^2 + bx + c &= 0 \end{aligned}$$

jediné riešenie.

Cvičenia

1. Riešte graficky tieto sústavy:

a) $$\begin{aligned} x^2 &= y \\ -3x + y &= 5 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x^2 + 2y + 1 &= 0 \\ y &= 2x \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} x^2 - 4 &= y \\ x - 2 &= y \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} y &= x^2 \\ y - 4x + 4 &= 0 \end{aligned}$$

e) $$\begin{aligned} y &= x^2 - 1 \\ x - 3y &= 2 \end{aligned}$$

2. Riešte graficky i výpočtom sústavy:

a) $$\begin{aligned} x^2 - 4x + 3 &= y \\ x - 5 &= 0 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x^2 - x + 2 &= y \\ x &= y \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} y &= x^2 - 2 \\ 2x &= y - 1 \end{aligned}$$

3. Číslo 100 rozdeľte na dva sčítance tak, aby súčet ich štvorcov bol 5 018.

4. Dva vlaky vychádzajú súčasne z priesečníka tratí, ktoré sú na seba kolmé. Priemerná rýchlosť prvého vlaku je o 3 km za hodinu väčšia ako druhého. Po polhodine sú obidva vlaky od seba vzdialené 43,5 km. Aké rýchlosti majú obidva vlaky?

9. GONIOMETRICKÉ FUNKCIE

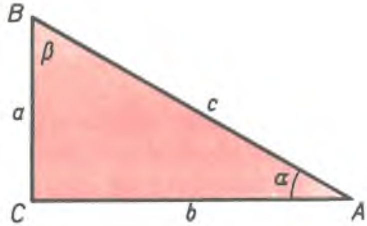
9.1 Opakovanie a prehĺbenie poznatkov o podobnosti geometrických útvarov

1. Nech sú dané dva trojuholníky ABC a $A'B'C'$. Čo možno povedať o trojuholníkoch ABC, $A'B'C'$, ak o veľkosti ich strán platí: $d(A'B') = k \cdot d(AB)$, $d(B'C') = k \cdot d(BC)$, $d(A'C') = k \cdot d(AC)$; $k > 0$.

2. Narysujte trojuholník ABC, v ktorom $d(AB) = 5$ cm, $d(BC) = 4$ cm, $d(CA) = 3$ cm. Pomocou obrátenej Pytagorovej vety rozhodnite, či daný trojuholník je pravouhlý. Čo možno povedať o uhloch tohto trojuholníka?

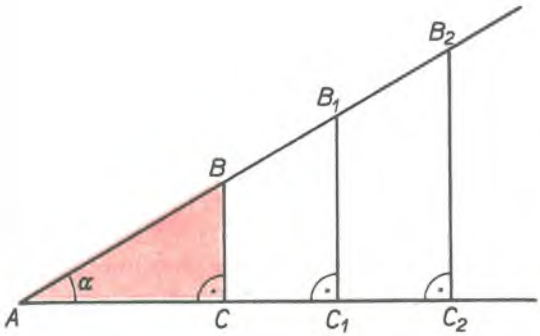
3. Vyslovte vety o podobnosti pravouhlých trojuholníkov.

9.2 Goniometrické funkcie ostrého uhla



Obr. 9.1

Na obr. 9.1 je pravouhlý trojuholník ABC, v ktorom označme uhol α pri vrchole A. Strana $c = AB$ je **prepona,** leží proti pravému uhlu, strana $a = BC$ je **odvesna protiľahlá k uhlu** α, strana $b = AB$ je **odvesna priľahlá k uhlu** α.



Obr. 9.2

Na obr. 9.2 sú narysované pravouhlé trojuholníky ABC, AB_1C_1, AB_2C_2, ktoré majú spoločný uhol α pri vrchole A. Podľa vety *uu* sú uvedené pravouhlé trojuholníky podobné, a preto o pomeroch dĺžky ich strán platí:

1. $\dfrac{d(BC)}{d(AB)} = \dfrac{d(B_1C_1)}{d(AB_1)} = \dfrac{d(B_2C_2)}{d(AB_2)}$

   Pomer dĺžky protiľahlej odvesny a dĺžky prepony pravouhlého trojuholníka sa nazýva **sínus uhla** α; skrátene píšeme sin α.

2. $\dfrac{d(AC)}{d(AB)} = \dfrac{d(AC_1)}{d(AB_1)} = \dfrac{d(AC_2)}{d(AB_2)}$

   Pomer dĺžky priľahlej odvesny a dĺžky prepony pravouhlého trojuholníka sa nazýva **kosínus uhla** α; píšeme cos α.

3. $\dfrac{d(BC)}{d(AC)} = \dfrac{d(B_1C_1)}{d(AC_1)} = \dfrac{d(B_2C_2)}{d(AC_2)}$

   Pomer dĺžky protiľahlej odvesny a dĺžky priľahlej odvesny pravouhlého trojuholníka sa nazýva **tangens uhla** α; píšeme tg α.

4. $\dfrac{d(AC)}{d(BC)} = \dfrac{d(AC_1)}{d(B_1C_1)} = \dfrac{d(AC_2)}{d(B_2C_2)}$

Pomer dĺžky priľahlej odvesny a dĺžky protiľahlej odvesny pravouhlého trojuholníka sa nazýva **kotangens uhla** α; píšeme cotg α.

Úloha

Rozhodnite od čoho závisia pomery dĺžok strán pravouhlého trojuholníka:

a) od voľby jednotky dĺžky,
b) od voľby pravouhlého trojuholníka,
c) od veľkosti uhla α.

So zmenou veľkosti uhla menia sa pomery dĺžok strán pravouhlého trojuholníka. Každej veľkosti uhla prislúchajú pomery dĺžok strán. Zaviedli sme **goniometrické funkcie**.

Vzhľadom na to, že uhol α je uhlom pravouhlého trojuholníka, môže v stupňovej miere nadobudnúť hodnoty z intervalu $(0°, 90°)$. Preto hovoríme o **goniometrických funkciách ostrého uhla**.

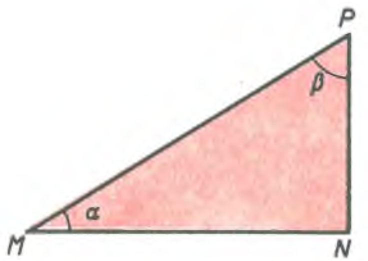
Príklad 1

Riešenie

Vzhľadom na to, že $d(AB') = 9{,}8$ cm, $d(AC) = 8$ cm, $d(AB) = 6{,}6$ cm, hodnoty pomerov sú

$$\sin 35° = \frac{d(BC)}{d(AB)} = \frac{5{,}6\ \text{cm}}{9{,}8\ \text{cm}} \doteq 0{,}57;$$
$$\cos 35° = \frac{d(AC)}{d(AB)} \doteq \frac{8\ \text{cm}}{9{,}8\ \text{cm}} \doteq 0{,}81;$$
$$\operatorname{tg} 35° = \frac{d(BC)}{d(AC)} \doteq \frac{5{,}6\ \text{cm}}{8\ \text{cm}} \doteq 0{,}70;$$
$$\operatorname{cotg} 35° = \frac{d(AC)}{d(BC)} \doteq \frac{8\ \text{cm}}{5{,}6\ \text{cm}} \doteq 1{,}42.$$

Cvičenia

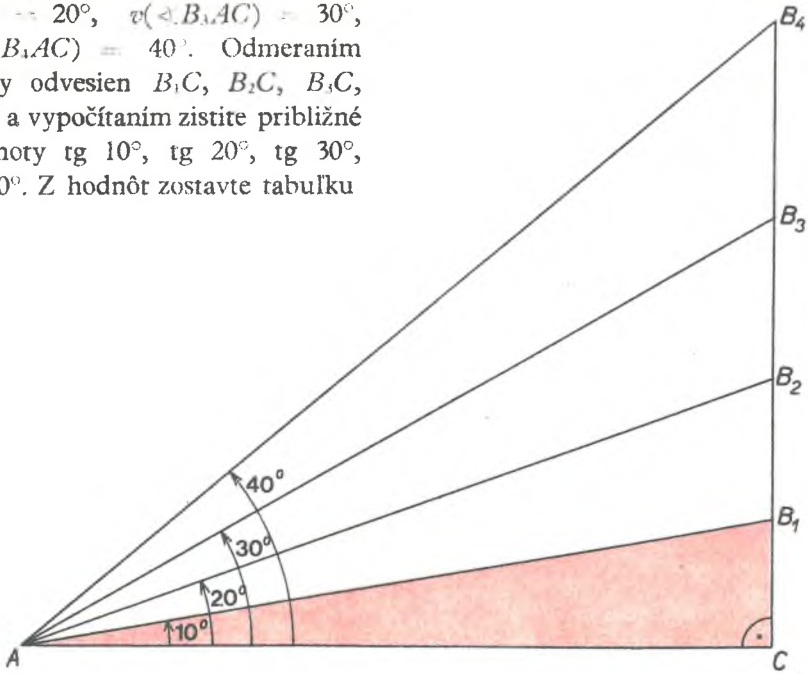


Obr. 9.4

1. Na obr. 9.4 je narysovaný pravouhlý trojuholník MNP. Jeho ostré uhly sú označené α, β. Pomermi dĺžok strán vyjadrite sin α, cos α, tg α, cotg α, sin β, cos β, tg β, cotg β. V akom vzťahu sú čísla a) sin α a cos β; b) tg α, cotg β?

2. Na obr. 9.5 sú narysované pravouhlé trojuholníky AB_1C, AB_2C, AB_3C, AB_4C, ktoré majú spoločnú odvesnu AC, ktorej dĺžka je

10 cm, $v(\sphericalangle B_1AC) = 10°$, $v(\sphericalangle B_2AC) = 20°$, $v(\sphericalangle B_3AC) = 30°$, $v(\sphericalangle B_4AC) = 40°$. Odmeraním dĺžky odvesien B_1C, B_2C, B_3C, B_4C a vypočítaním zistite približné hodnoty tg 10°, tg 20°, tg 30°, tg 40°. Z hodnôt zostavte tabuľku



Obr. 9.5

3. Narysujte pravouhlý trojuholník ABC tak, aby v ňom platilo: a) tg $\alpha = 1$, b) sin $\alpha = \frac{1}{2}$, c) cos $\alpha = \frac{1}{2}$.

9.3 Tabuľky hodnôt goniometrických funkcií ostrého uhla

Hodnoty goniometrických funkcií sú zoradené do tabuliek.

V matematických tabuľkách pre základnú školu sú uvedené hodnoty funkcií sínus, kosínus, tangens a kotangens uhlov veľkosti od 0° do 90°

rastúcich po 10 minútach (tabuľky M8A – M8D). Hodnoty týchto funkcií sú zaokrúhlené na štyri alebo na tri desatinné miesta.

Pomocou týchto tabuliek riešime dve základné úlohy:

1. k veľkosti daného ostrého uhla určiť hodnotu príslušnej funkcie,
2. k danej hodnote funkcie určiť veľkosť uhla.

Príklad 1

Určte sin $18°30'$.

Riešenie

V tabuľke M8A pre funkciu sin x v stĺpci označenom „°" vyhľadáme číslo 18, v riadku 18 a v stĺpci „30" prečítame hodnotu 0,3173. (Celé čísla nie sú písané pri každom čísle.)

Príklad 2

Určte veľkosť uhla α, ak cos $\alpha = 0{,}7314$.

Riešenie

V tabuľke M8B pre funkciu cos x vyhľadáme číslo 0,7314. V stĺpci označenom „0" v príslušnom riadku prečítame číslo 43. Číslo 0,7314 sa nachádza v stĺpci „0", preto $\alpha = 43°00'$.

Príklad 3

Určte veľkosť uhla β, ak tg $\beta = 1{,}405$.

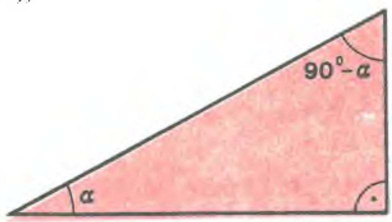
Riešenie

V tabuľke M8C hľadáme číslo 1,405. Pretože toto číslo nie je v tabuľke, nájdeme k nemu najbližšie. Tým je číslo 1,402, ktorému zodpovedá uhol veľkosti 54°30′.

$\beta = 54°30'$.

V tabuľkách nie sú uvedené hodnoty funkcie kotangens. Môžeme ich vypočítať na základe vzťahu

$\operatorname{cotg} \alpha = \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} (90° - \alpha)$,



Obr. 9.6

ktorý vyplýva priamo z definície uvedených funkcií (pozri obr. 9.6).

Príklad 4

Určte cotg 53°.

Riešenie

$\operatorname{cotg} 53° = \operatorname{tg} (90° - 53°) = \operatorname{tg} 37° = 0,7536$.

V tabuľkách M9A, M9B, M9C, M9D sú uvedené hodnoty goniometrických funkcií, ak veľkosti uhlov sú vyjadrené v radiánoch.

Príklad 5

Určte sin 1,26.

Riešenie

V tabuľke M9A v stĺpci „x“ nájdeme riadok 1,2 a v stĺpci „6“ odčítame číslo 0,9521.

Príklad 6

Určte veľkosť uhla α v radiánoch, ak tg $\alpha = 0{,}7445$.

Riešenie

V tabuľke M9C vyhľadáme číslo 0,7445. Je v riadku 0,6 a v stĺpci „4“, $\alpha = 0{,}64$ rad.

Cvičenia

1. V tabuľke vyhľadajte:
a) sin 15°30′, b) sin 88°30′, c) sin 42°, d) sin 0,34.

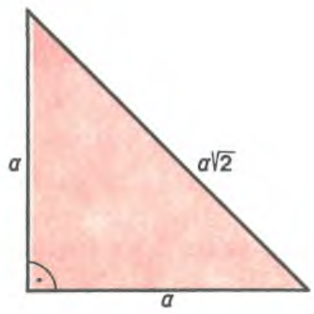
2. V tabuľke vyhľadajte:
a) cos 23°, b) cos 37°30′, c) cos 1°30′, d) cos 0,73.

3. V tabuľke vyhľadajte:
a) tg 42°, b) cotg 37°30′, c) cotg 87°, d) tg 0,69.

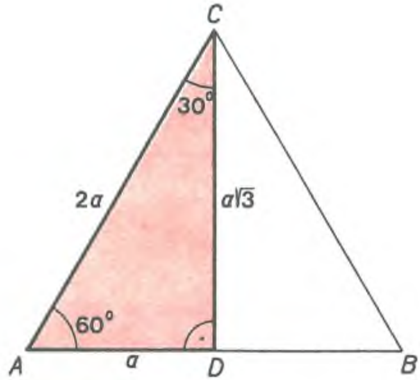
4. Nájdite veľkosť ostrého uhla α, ak a) sin $\alpha = 0{,}1449$, b) cos $\alpha =$ $= 0{,}9890$, c) tg $\alpha = 0{,}5658$.

5. Nájdite veľkosť ostrého uhla α v radiánoch, ak a) sin $\alpha = 0{,}4969$, b) tg $\alpha = 0{,}9131$, c) cos $\alpha = 0{,}7109$.

9.4 Tabuľka hodnôt goniometrických funkcií pre veľkosti uhla $\alpha = 30°$ (45°, 60°)



Obr. 9.7a



Obr. 9.7b

Na obr. 9.7a je narysovaný pravouhlý trojuholník, ktorého odvesny označíme a. Je to rovnoramenný pravouhlý trojuholník, ktorého veľkosť vnútorných ostrých uhlov je 45°. Podľa Pytagorovej vety určíme preponu, je $a\sqrt{2}$. Potom

$\sin 45° = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\mathrm{tg}\, 45° = 1$, $\mathrm{cotg}\, 45° = 1$.

Na obrázku 9.7b narysovaný rovnostranný trojuholník ABC a v ňom vyznačený je pravouhlý trojuholník ADC, ktorého vnútorné uhly majú veľkosť 30°, 60°. Jeho prepona je $2a$, odvesna protiľahlá uhlu veľkosti 30° je potom a. Druhú odvesnu vypočítame pomocou Pytagorovej vety, je $a\sqrt{3}$.

Platí

$\sin 30° = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$, $\cos 30° = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{3}{2}$, $\mathrm{tg}\, 30° = \frac{a}{a\sqrt{3}} =$

$= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\mathrm{cotg}\, 30° = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}$;

$$\sin 60^\circ = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \ \cos 60^\circ = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}, \ \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{a} =$$

$$= \sqrt{3}, \ \operatorname{cotg} 60^\circ = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Vypočítané výsledky zostavíme do tabuľky

α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{cotg} \alpha$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Z tabuľky vidíme, že

$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ$, $\sin 60^\circ = \cos 30^\circ$,

všeobecne platí

$\sin (90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$, $\cos (90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ (obr. 9.6).

Túto vlastnosť pozorujte v tabuľkách hodnôt goniometrických funkcií (pozri cv. 1, článok 9.2).

Ďalej platí

$\operatorname{tg} 60^\circ = \operatorname{cotg} 30^\circ$, $\operatorname{cotg} 60^\circ = \operatorname{tg} 30^\circ$,

všeobecne

$\operatorname{tg} (90^\circ - \alpha) = \operatorname{cotg} \alpha$, $\operatorname{cotg} (90^\circ - \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$.

Cvičenia

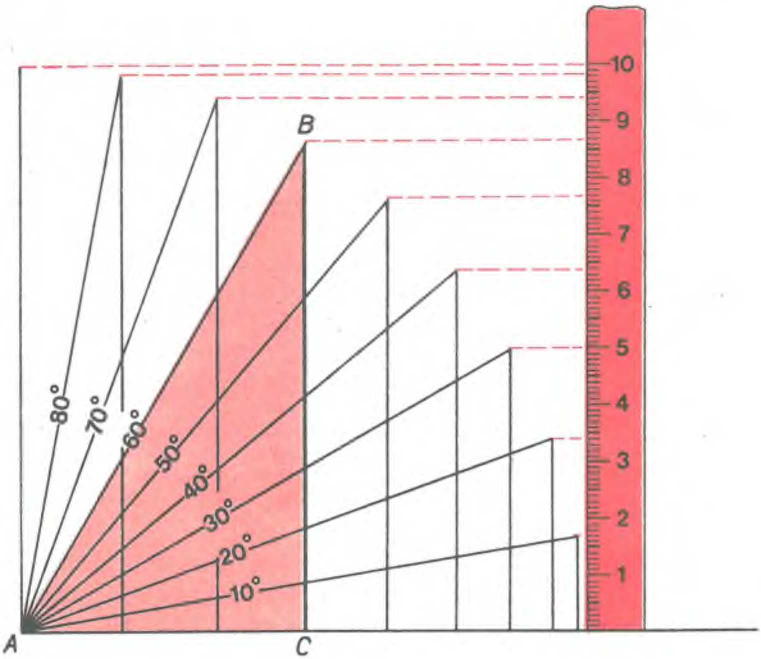
1. Vieme, že $\sin 27^\circ = 0{,}4540$. Čomu sa rovná $\cos 63^\circ$?

2. Vieme, že $\sin 62^\circ = 0{,}8829$, $\cos \alpha = 0{,}8829$. Bez tabuliek počítajte α!

3. Bez tabuliek vypočítajte veľkosť α ak viete, že tg $67° = 2{,}356$, cotg $\alpha = 2{,}356$.

9.5 Funkcia $x \mapsto \sin x$

a) Vlastnosti funkcie



Obr. 9.8

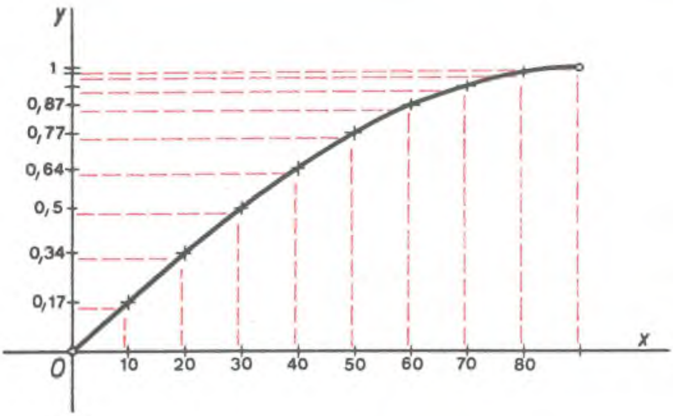
Na obr. 9.8 sú narysované pravouhlé trojuholníky s preponou dĺžky 10 cm a s uhlami 10°, 20°, 30°, ... vo vrchole A. Meraním a výpočtom určíme sínus uhlov 10°, 20°, 30°, ...: Napr. $\sin 60° = \frac{8{,}7 \text{ cm}}{10 \text{ cm}} = 0{,}87$.

Získané hodnoty zostavíme do tabuľky.

x	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$\sin x$	0	0,17	0,34	0,50	0,64	0,77	0,87	0,94	0,99	1,00

Z uvedenej tabuľky a z tabuliek hodnôt funkcie $x \mapsto \sin x$ pozorujeme, že v intervale $(0°, 90°)$ so vzrastajúcimi hodnotami premennej x, rastú aj hodnoty $\sin x$. Hovoríme, že funkcia $x \mapsto \sin x$ na tomto intervale je **rastúcou funkciou**.

Ďalej možno pozorovať, že hodnoty $\sin x$ pre $x \in (0°, 90°)$ sú z intervalu $(0, 1)$.



Obr. 9.9

Teraz s použitím predchádzajúcej tabuľky zostrojme **graf funkcie sínus**. Veľkosť uhla v stupňoch znázorníme na vodorovnej osi x (obr. 9.9). Uhol s veľkosťou 10° je znázornený úsečkou dĺžky 1 cm. Na zvislej osi y zvoľme za jednotku úsečku dĺžky 5 cm a vyznačíme na nej body príslušné k číslam 0,17; 0,34; 0,50; 0,64; ... zvolenej jednotky. Zostrojíme body krivky tak, že postupne zostrojíme body so súradnicami [10, 0,17], [20, 0,34]. Takto zostrojené body plynule spojíme a dostaneme **graf funkcie sínus**, na ktorom môžeme pozorovať závislosť hodnôt $\sin x$ od veľkosti uhla x.

Príklad 1

V pravouhlom trojuholníku ABC je známa dĺžka prepony $d(AB) = 5$ cm, dĺžka odvesny $d(AC) = 3$ cm. Vypočítajte veľkosť ostrých uhlov v danom trojuholníku.

Riešenie

a) Označme α uhol pri vrchole A, β uhol pri vrchole B.
   $\sin \beta = \frac{3}{5} = 0{,}600$; z tabuľky $\beta \doteq 37°$.

b) Dĺžku zvyšnej odvesny $a = BC$ vypočítame pomocou Pytagorovej vety $a^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$; $d(BC) = 4$ cm.
   $\sin \alpha = \frac{4}{5} = 0{,}800$; z tabuľky $\alpha \doteq 53°$.

Skúška

$\alpha + \beta = 90°$; skutočne $37° + 53° = 90°$.

Príklad 2

V pravouhlom trojuholníku MNP s pravým uhlom pri vrchole P poznáme $d(MN) = 7$ cm, $v(\sphericalangle PMN) = 37°$. Vypočítajte dĺžky oboch odvesien.

Riešenie

a) Nech $\sphericalangle PMN = \alpha$. Potom

$$\frac{d(PN)}{d(MN)} = \sin \alpha,$$
$$d(PN) = d(MN) \sin \alpha,$$
$$d(PN) \doteq 7 \text{ cm} \,.\, 0{,}6018$$
$$d(PN) = 4{,}2 \text{ cm}.$$

b) Druhý ostrý uhol označme β, potom

$$\alpha + \beta = 90°$$
$$\beta = 53°$$

$$\frac{d(PM)}{d(MN)} = \sin \beta$$

$$d(PM) = d(MN) \, . \sin \beta$$

$$d(PM) \doteq 7 \text{ cm} \, . \, 0{,}7986$$

$$d(PM) \doteq 5{,}6 \text{ cm}.$$

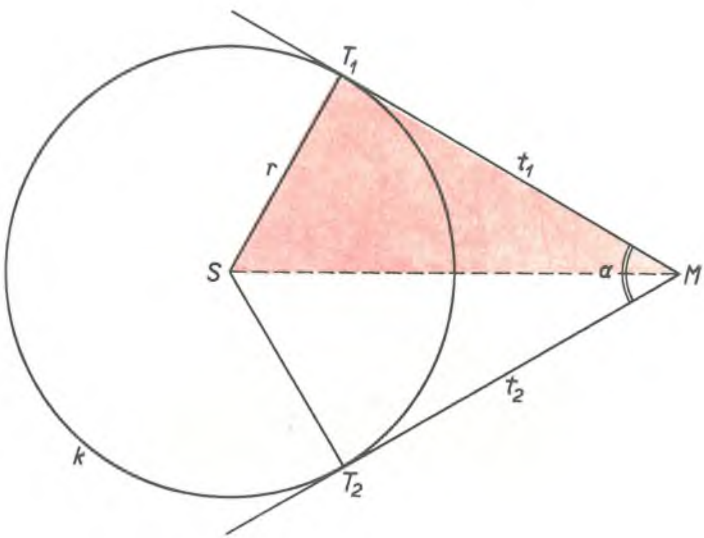
Jedna odvesna má dĺžku 4,2 cm, druhá 5,6 cm.

Cvičenia

1. Pravouhlý trojuholník má preponu c a odvesny a, b. Určte pomocou funkcie sínus jeho uhly, ak a) $a = 7$ cm, $c = 25$ cm; b) $b = 10$ m, $c = 14$ m.

2. Pravouhlý trojuholník má preponu c, odvesny a, b a ostré uhly α, β. Vypočítajte jeho zvyšné prvky, ak poznáme a) $c = 10$ cm, $\alpha = 55°30'$; b) $c = 25$ m, $\beta = 36°30'$.

3. Vypočítajte veľkosť uhla, ktorý určujú dotyčnice t_1, t_2 vedené z bodu M ku kružnici k (S, 6 cm), ak $d(MS) = 12$ cm (obr. 9.10).



Obr. 9.10

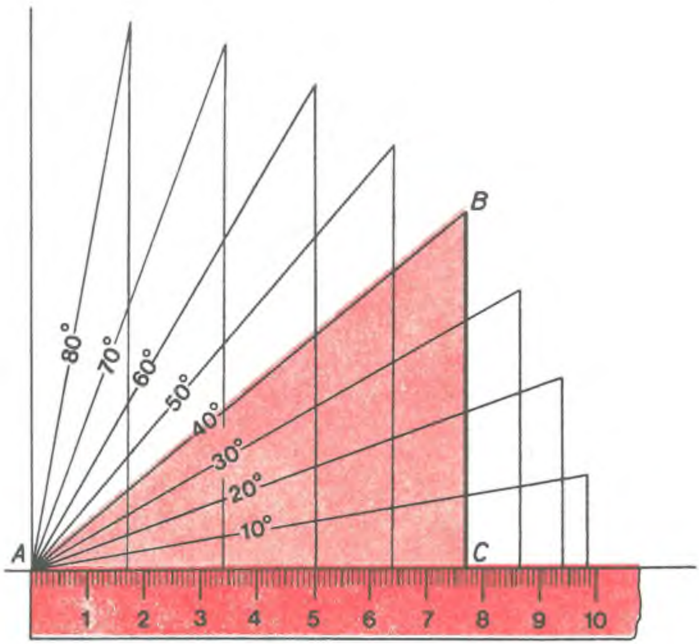
4. Dráha lanovky stúpa priemerne pod uhlom veľkosti 18° a spája hornú a dolnú stanicu s výškovým rozdielom 400 m. Aká dlhá je dráha lanovky?

5. Chlapci púšťali šarkana na šnúre dlhej 100 m. Asi ako vysoko vyletel šarkan, ak odhadli uhol napnutej šnúry od vodorovnej roviny na 60°?

9.6 Funkcia $x \mapsto \cos x$

a) Vlastnosti funkcie

Pomer dĺžky priľahlej odvesny a dĺžky prepony sme nazvali kosínus uhla α. Teraz sa zoznámime bližšie s uvedenou funkciou.



Obr. 9.11

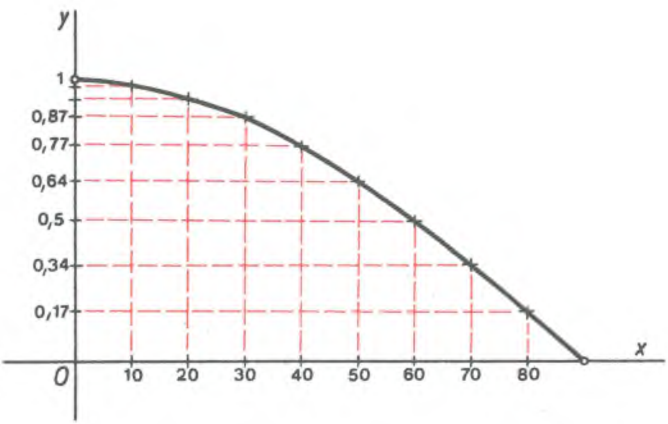
Na obr. 9.11 sú narysované pravouhlé trojuholníky so zhodnou preponou dĺžky 10 cm a s uhlami veľkosti 10°, 20°, 30°, ... pri vrchole A. Meraním a výpočtom určíme kosínus uhlov veľkosti 10°, 20°, 30°, ... a z výsledkov zostavíme tabuľku

x	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$\cos x$	1,00	0,99	0,94	0,87	0,77	0,64	0,50	0,34	0,17	0

Z uvedenej tabuľky a z tabuliek hodnôt funkcie $x \mapsto \cos x$ pozorujeme, že v intervale (0°, 90°) so vzrastajúcimi hodnotami premennej x klesajú hodnoty $\cos x$ od jednej do nuly. Hovoríme, že funkcia $x \mapsto \cos x$ na tomto intervale je **klesajúcou funkciou.**

Z obrázku i z tabuľky možno pozorovať, že hodnoty $\cos x$ pre $x \in (0°, 90°)$ sú z intervalu $(0, 1)$.

Opäť zostrojíme **graf funkcie kosínus uhla** x, ak rastie po 10°, od 0° do 90°. Budeme postupovať obdobne ako pri zostrojovaní grafu funkcie sínus uhla (obr. 9.12).



Obr. 9.12

Príklad 1

V pravouhlom trojuholníku ABC s pravým uhlom pri vrchole C poznáme $d(AB) = 13$ cm a $d(AC) = 5$ cm. Vypočítajte veľkosť priľahlého uhla k odvesne AC.

Riešenie

Označme tento uhol α. Podľa definície funkcie kosínus je $\cos \alpha = \frac{d(AC)}{d(AB)} =$
$= \frac{5\ \text{cm}}{13\ \text{cm}} \doteq 0{,}3846;$
V tabuľke vyhľadáme príslušný uhol.
Veľkosť priľahlého uhla k odvesne AC je približne $67°30'$.

Príklad 2

V pravouhlom trojuholníku ABC s pravým uhlom pri vrchole C s uhlom veľkosti $v(\sphericalangle BAC) = \alpha = 38°$ je dĺžka prepony $d(AB) = 18{,}2$ cm. Vypočítajte dĺžku priľahlej odvesny $b = AC$.

Riešenie

Daný je ostrý uhol α a prepona c. Máme vypočítať priľahlú odvesnu b k uhlu α. Na výpočet použijeme kosínus uhla α;

$$\cos \alpha = \frac{d(AC)}{d(AB)} = \frac{b}{c}.$$

Dosadíme a dostaneme

$$\cos 38° = \frac{b}{18{,}2\ \text{cm}}.$$

Po dosadení hodnoty $\cos 38°$ je $0{,}7880 \doteq \frac{b}{18{,}2\ \text{cm}}$;

$b \doteq 0{,}7880 \cdot 18{,}2\ \text{cm} = 14{,}3416\ \text{cm} \doteq 14{,}3\ \text{cm}$.

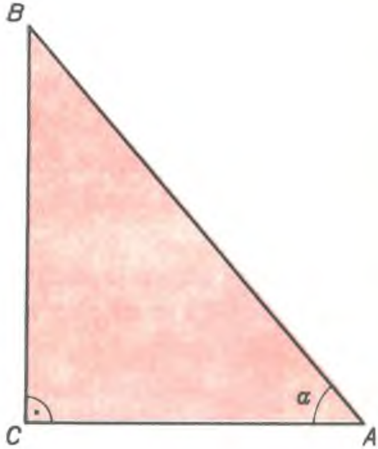
Dĺžka odvesny b je asi 14,3 cm.

Príklad 3

Zrnomet stojí 4,5 m od sýpky. Rúry zrnometu zvierajú so zemou uhol 50°. Aké dlhé sú rúry? Ako vysoko je okno sýpky?

Riešenie

Urobme si jednoduchý náčrt (obr. 9.13). Miesto polohy zrnometu označme A, miesto polohy okna označme B, pätu kolmice idúcej bodom B na zemi označme C. Takto je vytvorený pravouhlý trojuholník ABC s pravým uhlom pri vrchole C. V ňom poznáme $d(CA) = 4{,}5$ m, $v(\sphericalangle BAC) = 50° = \alpha$. Dĺžka $d(AB)$ je dĺžka rúry a $d(BC)$ je výška okna.



Obr. 9.13

a) Použijeme funkciu kosínus α.

$$\cos \alpha = \frac{d(AC)}{d(AB)}$$

$$\cos 50° = \frac{4{,}5\text{ m}}{d(AB)}$$

$$d(AB) \,.\, \cos 50° = 4{,}5\text{ m}$$

$$d(AB) = \frac{4{,}5\text{ m}}{\cos 50°}$$

$$d(AB) = \frac{4{,}5\text{ m}}{0{,}642\,8}$$

$$d(AB) = 6{,}9\text{ m.}$$

Dĺžka rúry je približne 6,9 m.

b) Výšku môžeme vypočítať použitím funkcie sínus α.

$$\sin \alpha = \frac{d(BC)}{d(AB)}$$

$$\sin 50° = \frac{d(BC)}{6{,}9\ \text{m}}$$

$d(BC) = 6{,}9 \,.\, 0{,}766$ m

$d(BC) \doteq 5{,}3$ m.

Okno sýpky je približne 5,3 m vysoko.

Cvičenia

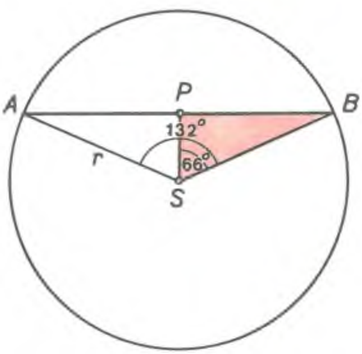
1. V pravouhlom trojuholníku ABC s pravým uhlom pri vrchole C sa $c = 100$ m, $\alpha = 81°$. Vypočítajte dĺžku odvesny b.

2. V pravouhlom trojuholníku ABC s preponou AB sa a) $\alpha = 60°$, $b = 75$ mm; b) $\beta = 73°$, $a = 8{,}3$ cm. Vypočítajte dĺžku prepony.

3. Pod akým uhlom je napnuté upínacie lano stožiara 10 m dlhé, ak je upevnené 6,5 m od päty stožiara?

4. Vypočítajte základňu rovnoramenného trojuholníka, ktorého dĺžka ramena je 90 mm a uhol pri základni $\alpha = 74°$.

5. Tetiva AB v kružnici, príslušná stredovému uhlu $\sphericalangle ASB$ veľkosti 132°, má od stredu S kružnice vzdialenosť 82 mm. Vypočítajte veľkosť polomeru r kružnice (obr. 9.14).

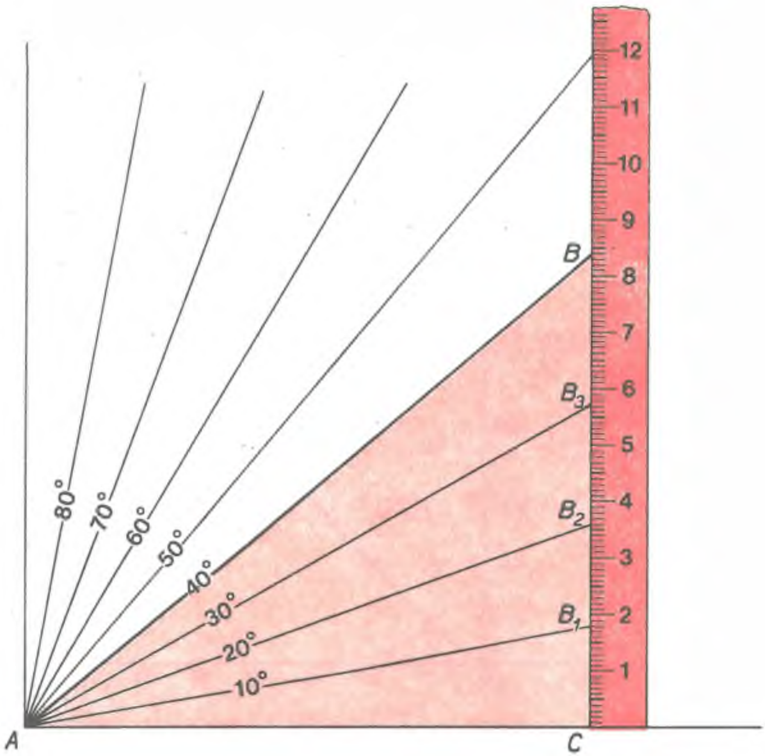


Obr. 9.14

9.7 Funkcia $x \mapsto \operatorname{tg} x$

a) Vlastnosti funkcie

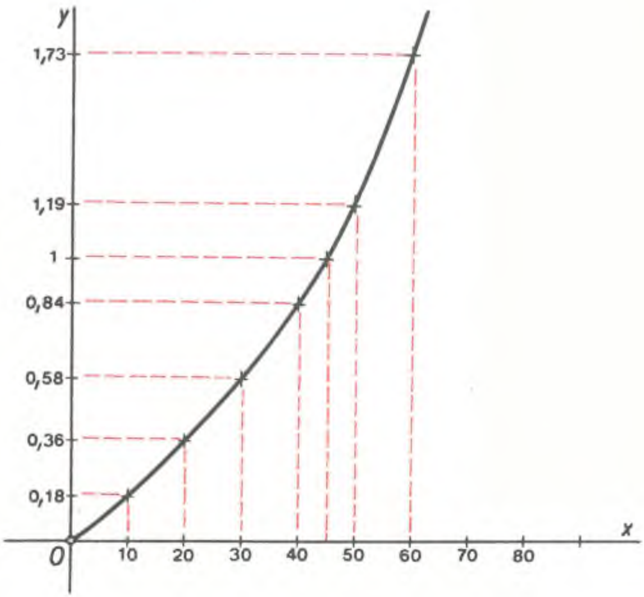
Pomer dĺžky protiľahlej a dĺžky priľahlej odvesny v pravouhlom trojuholníku sme nazvali tangens uhla α.



Obr. 9.15a

Na obr. 9.15a sú narysované pravouhlé trojuholníky so spoločnou odvesnou AC, ktorej dĺžka je 10 cm a je priľahlá k uhlom veľkosti 10°, 20°, 30°, ... Odmerajme dĺžky príslušných protiľahlých odvesien. V trojuholníku *ABC* je napr. k uhlu veľkosti 40° protiľahlá odvesna, ktorej dĺžka je 8,4 cm, dĺžka priľahlej odvesny je 10 cm, potom $\text{tg}\,40° = \dfrac{8{,}4\ \text{cm}}{10\ \text{cm}} = 0{,}84$. Takto získané hodnoty zostavme do tabuľky:

x	10°	20°	30°	40°	45°	50°	60°	70°	80°
tg x	0,18	0,36	0,58	0,84	1	1,19	1,73	—	—



Obr. 9.15b

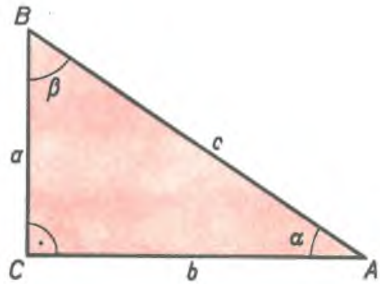
Pomocou týchto hodnôt zostrojíme graf funkcie tangens; budeme postupovať obdobne ako pri funkciách sínus a kosínus (obr. 9.15b).

Z grafu vidíme, že ak rastie uhol x od 0° do 90°, hodnoty tg x rastú od nuly do nekonečna. Hovoríme, že funkcia tangens v intervale (0°, 90°) je rastúca. Graf funkcie tangens prudko stúpa a blíži sa ku kolmici na os x v bode označenom 90°; spoločný bod s kolmicou však nemá.

Príklad 1

Odvesny v pravouhlom trojuholníku ABC s pravým uhlom pri vrchole C majú dĺžky 12 cm a 18 cm. Vypočítajte veľkosti obidvoch ostrých uhlov.

Riešenie



Obr. 9.16

Na obr. 9.16 sú označené strany a, b, c a uhly α, β. Použijeme tangens uhla α.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{12 \text{ cm}}{18 \text{ cm}} \doteq 0{,}667$$

$$\alpha \doteq 33°30'$$

$$\alpha + \beta = 90°$$

$$\beta \doteq 90° - 33°30'$$

$$\beta \doteq 56°30'$$

Veľkosti ostrých uhlov sú 33°30′ a 56°30′.

Príklad 2

V pravouhlom trojuholníku je daný ostrý uhol $\alpha = 32°$ a dĺžka priľahlej odvesny $b = 72$ cm. Vypočítajte dĺžku protiľahlej odvesny a.

Riešenie

Použijeme funkciu tangens uhla α.

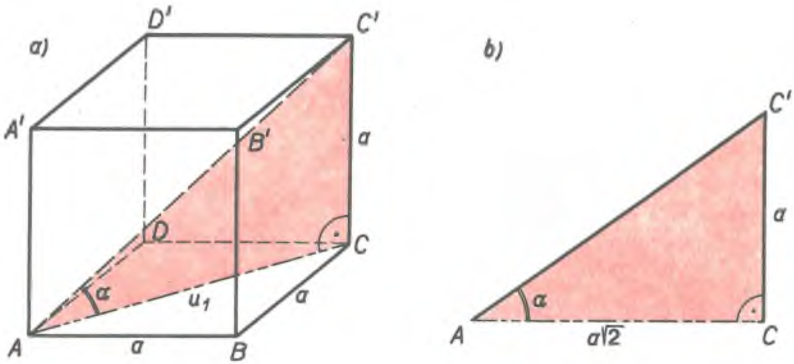
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$
$$a = b \,.\, \operatorname{tg} \alpha$$
$$a = 72\ \text{cm} \,.\, \operatorname{tg} 32°$$
$$a \doteq 72\ \text{cm} \,.\, 0{,}6249$$
$$a \doteq 45\ \text{cm}$$

Dĺžka odvesny a je približne 45 cm.

Príklad 3

Aká je veľkosť uhla, ktorý zviera stenová a telesová uhlopriečka kocky?

Riešenie



Obr. 9.17a, b

Nech je daná kocka $ABCDA'B'C'D'$. Na obr. 9.17a vyznačme stenovú uhlopriečku AC a telesovú uhlopriečku AC'. Trojuholník ACC' je pravouhlý s pravým uhlom pri vrchole C. Veľkosť $\sphericalangle CAC'$ je veľkosť uhla, ktorý určuje stenová uhlopriečka AC s telesovou uhlopriečkou AC'.

Najskôr vypočítame veľkosť stenovej uhlopriečky, ktorá je preponou pravouhlého rovnoramenného trojuholníka s odvesnami veľkosti a, teda $u_1 = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$.

Na výpočet veľkosti uhla α použijeme funkciu tangens uhla α (obr. 9.17b).

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \doteq \frac{1{,}41}{2} = 0{,}705$$

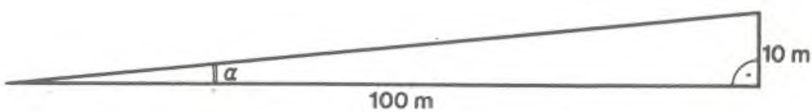
$$\alpha \doteq 35°$$

Veľkosť uhla určeného telesovou a stenovou uhlopriečkou kocky je približne 35°.

Príklad 4

Pod akým uhlom stúpa hradská, ak je stúpanie 10 %?

Riešenie



Obr. 9.18

Ak povieme, že hradská má stúpanie 10 %, znamená to, že hradská stúpne na vodorovne meranú vzdialenosť 100 m o 10 m (obr. 9.18); odtiaľ vyplýva, že

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{10\ \text{m}}{100\ \text{m}} = \frac{1}{10} = 0{,}100;$$

z tabuliek

$\alpha \doteq 6°$

Hradská stúpa pod uhlom veľkosti 6°.

Poznámka

Stúpanie hradskej sa udáva v percentách, stúpanie železničnej trate v promile.

Cvičenia

1. V pravouhlom trojuholníku s dĺžkami odvesien 50 cm a 70 cm určte veľkosť uhla α, ktorý leží oproti odvesne dĺžky 50 cm.

2. Aký vysoký je komín tepelnej elektrárne, ak jeho vrchol vidíme zo vzdialenosti $d = 95$ m od päty komína pod uhlom $\varphi = 45°$?

3. Priama železničná trať má najvyššie možné stúpanie 16 ‰. V akom uhle stúpa?

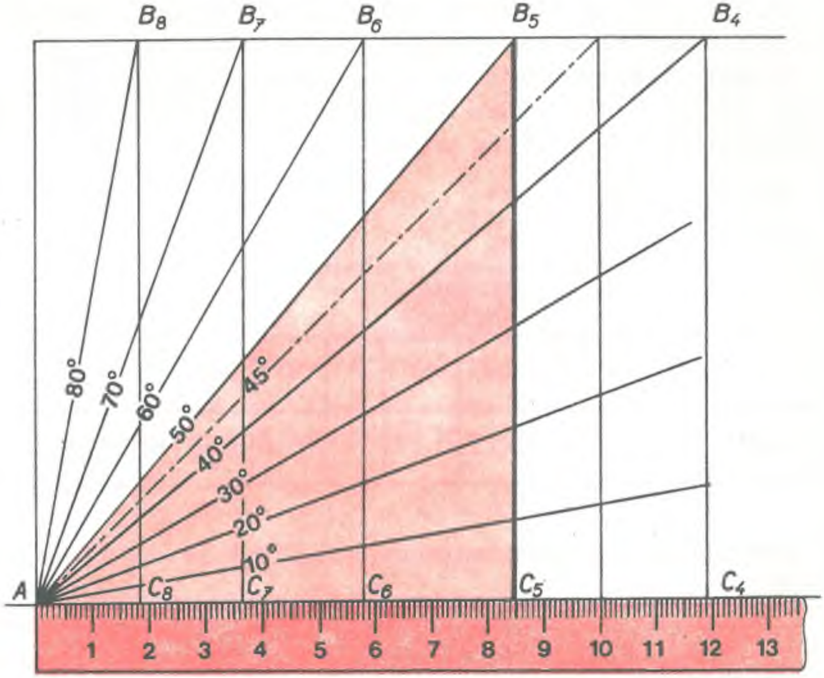
4. Odmerajte výšku a šírku jedného stupňa na schodišti a vypočítajte, v akom uhle stúpa školské schodište.

5. Dĺžky uhlopriečok kosoštvorca $ABCD$ sú $d(AC) = 16{,}4$, $d(BD) = 6{,}4$. Vypočítajte veľkosti vnútorných uhlov a dĺžku strany kosoštvorca.

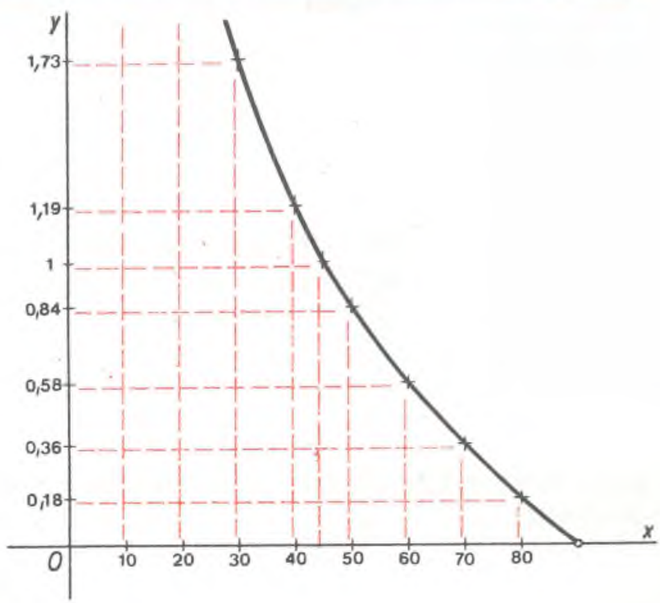
9.8 Funkcia $x \mapsto \operatorname{cotg} x$

Opäť si pripomenieme definíciu funkcie kotangens uhla.

Pomer dĺžky priľahlej a dĺžky protiľahlej odvesny pravouhlého trojuholníka sme nazvali kotangens uhla α.



Obr. 9.19a



Obr. 9.19b

Na obr. 9.19a sú narysované pravouhlé trojuholníky s odvesnami, ktorých dĺžka je 10 cm a sú protiľahlé k uhlom veľkosti 10°, 20°, 30°, ... Odmerajme dĺžky príslušných priľahlých odvesien. Tak napr. v trojuholníku AB_5C_5 je k uhlu veľkosti 50° priľahlá odvesna dĺžky 8,4 cm, dĺžka protiľahlej odvesny je 10 cm, potom

$$\operatorname{cotg} 50° = \frac{8{,}4 \text{ cm}}{10 \text{ cm}} = 0{,}84.$$

Takto získané hodnoty uvedieme v tabuľke:

x	0°	10°	20°	30°	40°	45°	50°	60°	70°	80°	90°
cotg x	—	—	—	1,73	1,19	1	0,84	0,58	0,36	0,18	0

Pomocou týchto hodnôt zostrojíme **graf funkcie kotangens** (obr. 9.19b).

Z grafu na obr. 9.19b vidíme, že ak rastie uhol x od 0° do 90°, hodnoty cotg x klesajú od nekonečna do nuly. Hovoríme, že funkcia kotangens v intervale (0°, 90°) je **klesajúca**. Graf s osou y nemá spoločný bod.

Príklad 1

V pravouhlom trojuholníku ABC s pravým uhlom pri vrchole C je daný uhol $\alpha = 37°$ a dĺžka protiľahlej odvesny $a = 45$ cm. Vypočítajte dĺžku priľahlej odvesny.

Riešenie

Na obr. 9.20 je narysovaný trojuholník ABC. Pre výpočet dĺžky odvesny b použijeme

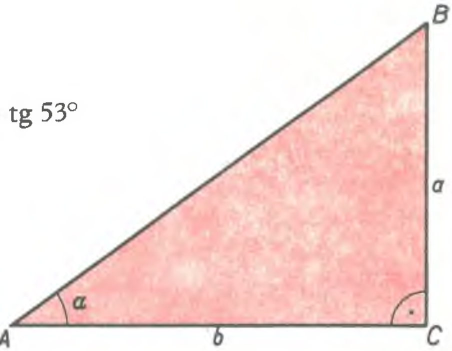
$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{b}{a},$$

$$\operatorname{cotg} 37° = \frac{b}{45 \text{ cm}},$$

$b = 45 \text{ cm} \operatorname{cotg} 37°$, $\operatorname{cotg} 37° = \operatorname{tg} 53°$

$b \doteq 45 \text{ cm}\ 1{,}327$

$b \doteq 60 \text{ cm}$



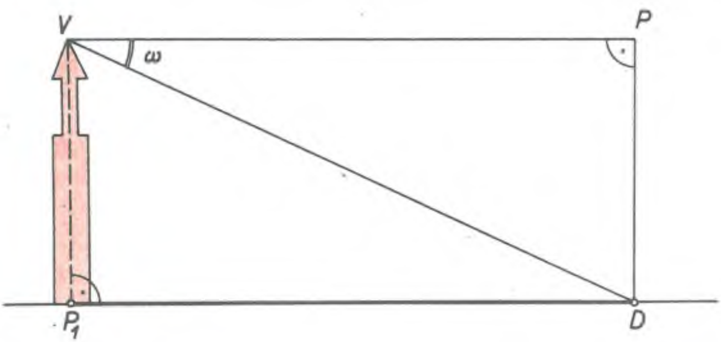
Obr. 9.20

Dĺžka priľahlej odvesny je približne 60 cm.

Príklad 2

Pod akým hĺbkovým uhlom vidieť z vrcholu 35 m vysokej veže domček vo vzdialenosti 125 m?

Riešenie



Obr. 9.21

Na obr. 9.21 je vyznačený hĺbkový uhol ω v trojuholníku DVP. Použijeme funkciu $\operatorname{cotg} \omega$.

$$\operatorname{cotg} \omega = \frac{d(VP)}{d(PD)}$$

$$\operatorname{cotg} \omega = \frac{125 \text{ cm}}{35 \text{ cm}}$$

$\operatorname{cotg} \omega = 3{,}5714$ (vyhľadáme v tab. pomocou funkcie tangens)

$\omega \doteq 15°30'$

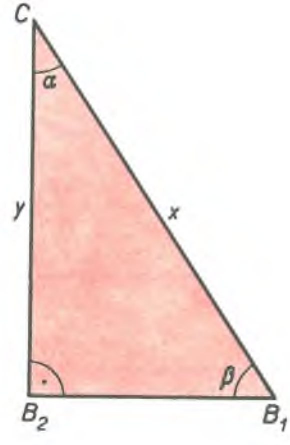
Domček vidieť pod hĺbkovým uhlom veľkosti 15°30′.

Cvičenia

1. V pravouhlom trojuholníku ABC s pravým uhlom pri vrchole C je uhol veľkosti $\alpha = 73°$ a jemu protiľahlá odvesna dĺžky 17 cm. Vypočítajte dĺžku priľahlej odvesny.

2. Od päty stožiara elektrickej siete na brehu rieky vidíme vrchol stožiara na druhom brehu pod uhlom 19°. Vypočítajte vzdialenosť medzi stožiarmi, keď výška stožiara je 23,8 m. Päty stožiarov ležia vo vodorovnej rovine.

3. Vzdialenosť dvoch delostreleckých batérií B_1, B_2, ktoré odstreľujú cieľ C, $d(B_1B_2) = d = 1\,250$ m a veľkosť uhla $\sphericalangle CB_1B_2$ je 57°20′, veľkosť uhla $\sphericalangle CB_2B_1$ je 90°. Určte vzdialenosť obidvoch batérií od cieľa (obr. 9.22).



Obr. 9.22

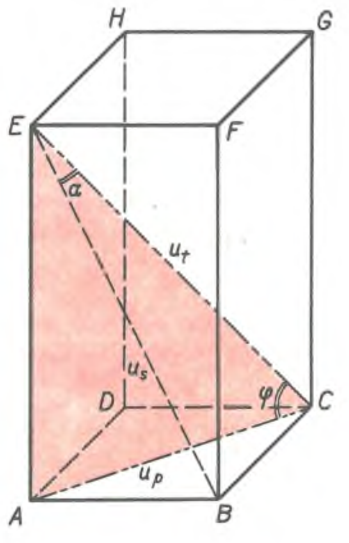
9.9 Riešenie úloh

Pri rôznych úlohách sa často stretávame s výpočtami prvkov trojuholníkov, najmä pravouhlých. Vyriešime niekoľko takých úloh.

Príklad 1

Je daný pravidelný štvorboký hranol *ABCDEFGH*, ktorého hrana podstavy má dĺžku 5 cm, dĺžka výšky je 10 cm. Vypočítajte dĺžku telesovej uhlopriečky *EC*, veľkosť uhla φ, ktorý zviera telesová uhlopriečka *EC* a uhlopriečka *AC* a veľkosť uhla α, ktorý zviera telesová uhlopriečka *EC* s uhlopriečkou *BE* prednej steny *ABFE*.

Riešenie



Obr. 9.23

Telesová uhlopriečka *EC* (obr. 9.23) je preponou pravouhlého trojuholníka *ACE* s pravým uhlom pri vrchole *A*, ktorého jedna odvesna je *AE* dĺžky 10 cm a druhá odvesna AC je uhlopriečka u_p podstavy. Dĺžka uhlopriečky AC je $5 \cdot \sqrt{2}$ cm (prepona pravouhlého rovnoramenného trojuholníka), potom dĺžku telesovej uhlopriečky u_t vypočítame

$$u_t^2 = (d(EC))^2 = (d(AC))^2 + (d(AE))^2 = (5 \cdot \sqrt{2})^2 + 10^2 = 150$$
$$u_t = \sqrt{150}\ \text{cm} \doteq 12{,}3\ \text{cm}.$$

Na výpočet veľkosti $\sphericalangle ECA = \varphi$ použijeme funkciu tangens.

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{d(EA)}{d(AC)} = \frac{10\ \text{cm}}{5 \cdot \sqrt{2}\ \text{cm}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \doteq 1{,}41$$
$$\varphi \doteq 54°30'.$$

Na výpočet veľkosti uhla $\sphericalangle BEC = \alpha$ použijeme pravouhlý trojuholník ECB s pravým uhlom pri vrchole B.

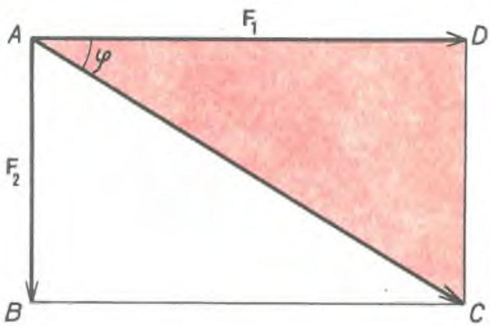
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{d(BC)}{d(EB)} = \frac{5\ \text{cm}}{11{,}2\ \text{cm}} \doteq 0{,}446$$
$$\alpha \doteq 24°$$

Telesová uhlopriečka daného hranola je dlhá 12,3 cm, veľkosť uhla φ je 54°30′ a veľkosť uhla α je 24°.

Príklad 2

Sila $F = 2\,000$ N sa rozkladá na dve kolmé zložky F_1, F_2, z ktorých zložka F_1 zviera s výslednicou F uhol φ veľkosti 32°. Určte sily F_1 a F_2.

Riešenie



Obr. 9.24

Zostrojíme rovnobežník síl $ABCD$, v našom prípade je to obdĺžnik, v ktorom sú dané prvky F, φ (obr. 9.24).

Vychádzame z trojuholníka ACD. V ňom poznáme preponu F a uhol φ. Jeho odvesny sú F_1, F_2, ktorých dĺžky treba vypočítať.

Na výpočet zložky F_2 použijeme sínus uhla φ, teda $\sin \varphi = \frac{F_2}{F}$.

Dosadíme za F a φ, dostaneme

$$\sin 32° = \frac{F_2}{2\,000\ \text{N}},$$

$$0{,}530 \doteq \frac{F_2}{2\,000\ \text{N}},$$

z toho $F_2 = 0{,}530 \,.\, 2\,000\ \text{N} = 1\,060\ \text{N}$.

F_1 vypočítame z toho istého trojuholníka pomocou funkcie $\cos \varphi$.

$$\cos \varphi = \frac{F_1}{2\,000\ \text{N}},$$

$$\cos 32° = \frac{F_1}{2\,000\ \text{N}},$$

$$0{,}8480 = \frac{F_1}{2\,000\ \text{N}},$$

$$F_1 \doteq 0{,}8480 \,.\, 2\,000\ \text{N}$$

$$F_1 \doteq 1\,700\ \text{N}.$$

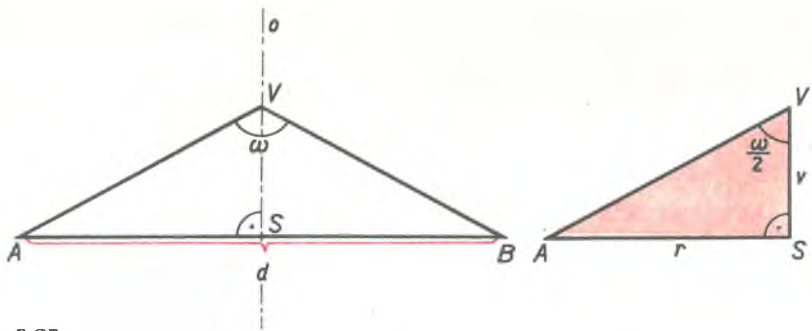
Sila $F_1 \doteq 1\,700$ N a sila $F_2 \doteq 1\,060$ N.

Príklad 3

Vypočítajte objem rotačného kužeľa, ktorého osový rez má pri vrchole uhol ω veľkosti 132° a veľkosť priemeru podstavy 12 cm.

Riešenie

Osový rez rotačného kužeľa je rovnoramenný trojuholník s uhlom ω pri hlavnom vrchole a základňou d; označme ho ABV (obr. 9.25a). Otáčaním trojuholníka ABV okolo osi $\leftrightarrow o = \leftrightarrow VS$ vznikne rotačný kužeľ, ktorého objem máme vypočítať.



Obr. 9.25

Objem rotačného kužeľa je $V = \frac{1}{3} \pi r^2 v$. V tomto vzorci poznáme $r = \frac{1}{2} d$, nepoznáme v.

Os $\leftrightarrow o = \leftrightarrow VS$ delí rovnoramenný trojuholník ABV na dva zhodné pravouhlé trojuholníky ASV a BSV. Použijeme jeden z nich, napr. trojuholník ASV (obr. 9.25b).

Na výpočet výšky v použijeme kotangens uhla $\frac{\omega}{2}$, t. j.

$\operatorname{cotg} \frac{\omega}{2} = \frac{v}{r}$,

$\frac{\omega}{2} = 66°$, $r = 6$ cm, po dosadení je

$\operatorname{cotg} 66° = \frac{v}{6 \text{ cm}}$,

$\operatorname{cotg} 66° = \operatorname{tg} 24° = 0{,}4452$

$v \doteq 6 \text{ cm} \cdot 0{,}4452$

$v \doteq 2{,}7$ cm.

Dosadíme za v a r do vzorca pre objem rotačného kužeľa:

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot v$$

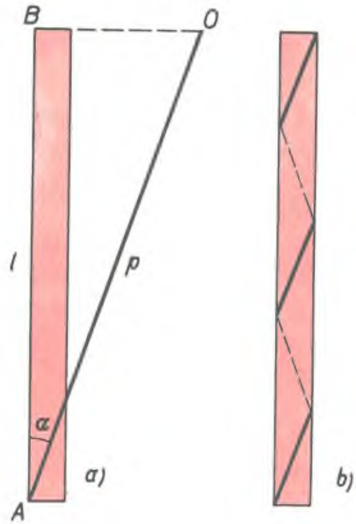
$$V = \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 6^2 \cdot 2{,}7 \text{ cm}^3$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 36 \cdot 2{,}7 \text{ cm}^3$$

$$V \doteq 102 \text{ cm}^3.$$

Objem rotačného kužeľa je asi 102 cm³.

Príklad 4



Obr. 9.26

Pri točení prameňov na lano zviera prameň so smerom lana uhol, ktorý nazývame uhol vinutia. Ak chceme stočiť lano s dĺžkou l, musíme na to použiť prameň s dĺžkou p, ktorá je väčšia ako l. Závislosť medzi obidvoma dĺžkami znázorňuje obr. 9.26 a,b. Vypočítajte, na akú dĺžku lana vystačí prameň dĺžky 200 m, ak uhol vinutia je 18°.

Riešenie

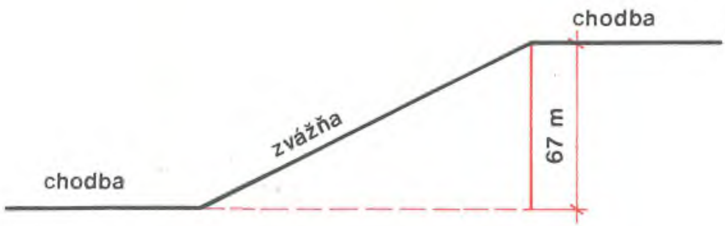
Použijeme trojuholník ABO (obr. 9.26a). Tento je pravouhlý s pravým uhlom pri vrchole B. Potom

$$\cos \alpha = \frac{l}{p},$$

$l = p \cdot \cos \alpha = 200 \text{ m} \cdot \cos 18° \doteq 200 \text{ m} \cdot 0{,}9511 \doteq 190 \text{ m}$. 200 m prameňa vystačí na 190 m lana.

Cvičenia

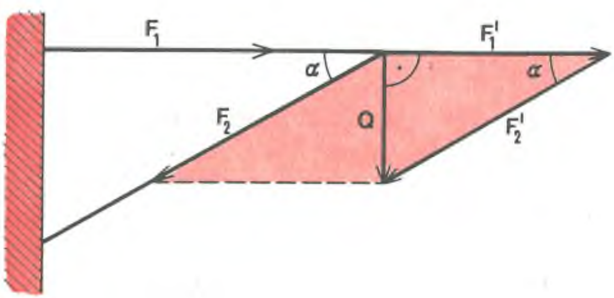
1. Vypočítajte neurčené uhly a rozmery rovnoramenného trojuholníka, keď poznáte:
   a) základňu dlhú 20,8 cm a veľkosť uhla pri základni 68°30′;
   b) rameno dĺžky 168,5 cm a veľkosť uhla pri základni 75°30′.



Obr. 9.27

2. Prevýšenie dvoch chodieb v bani je 67 m a zvážňa má dĺžku 143 m. Vypočítajte úklon sloja (obr. 9.27).

3. Konzola podľa obrázku 9.28 je zaťažená bremenom $Q = 1\,500$ N. Vypočítajte veľkosť síl F_1 a F_2 v prútoch pri uhle $\alpha = 30°$.

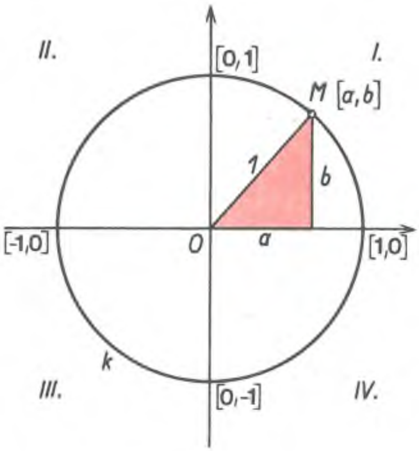


Obr. 9.28

4. Vypočítajte dĺžku výšky v a stenovej výšky v_s pravidelného štvorbokého ihlana s hranou podstavy dĺžky $a = 120$ mm, ak bočná stena s podstavou zviera uhol veľkosti 70°.

9.10 Jednotková kružnica

Uvažujme o kružnici k, ktorá má polomer jednotky dĺžky. Takúto kružnicu nazývame **jednotkovou kružnicou**. Umiestnime ju v súradnicovej sústave tak, aby jej stred bol v začiatku súradnicovej sústavy (obr. 9.29).



Obr. 9.29

Ak bod $M[a, b]$ bude meniť svoju polohu po kružnici, budú sa meniť jeho súradnice a, b. Ak bod M splynie s niektorým bodom na súradnicovej osi, bude mať súradnice, ktoré sú vyznačené na obrázku. V ostatných prípadoch vznikne pravouhlý trojuholník OM_1M a podľa Pytagorovej vety platí

$$a^2 + b^2 = 1 \qquad (1)$$

Túto rovnosť spĺňajú aj súradnice bodov, v ktorých kružnica k pretína súradnicové osi.

Súradnicové osi rozdelia celú rovinu na štyri časti, ktoré nazývame **kvadranty**. Potom jednotková kružnica je rozdelená na štyri kružnicové oblúky, z ktorých každý leží v jednom z kvadrantov I, II, III, IV.

Vieme vypočítať dĺžku kružnice, $o = 2\pi r$, kde r je polomer a $\pi \doteq 3{,}14$. Dĺžka jednotkovej kružnice potom je $o = 2\pi$. Z toho vyplýva, že uhol veľkosti 360° je 2π rad. Potom ľahko vypočítame, že priamy uhol má veľkosť π rad, pravý uhol má veľkosť $\frac{\pi}{2}$ rad.

Cvičenia

1. Narysujte sústredné kružnice so stredom v začiatku súradnicovej sústavy s polomermi: a) $r = 3$j . d; b) $r = 2{,}5$j . d; c) $r =$ j . d kde za jednotku dĺžky si zvoľte ľubovoľnú úsečku. Vyznačte jednotkovú kružnicu.

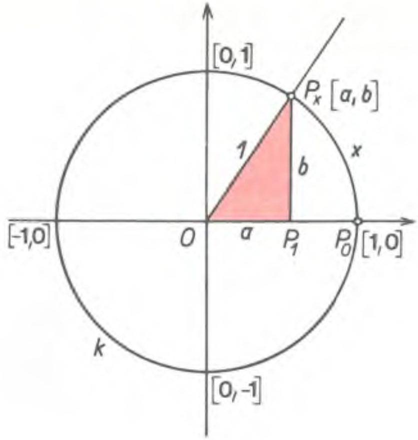
2. Na kružnici $k(0, r = 1$j . d) je daný bod M [0,8; 0,6]. Aké súradnice bude mať bod súmerný s bodom M:
a) podľa začiatku súradnicovej sústavy; b) podľa prvej súradnicovej osi; c) podľa druhej súradnicovej osi.

3. Vyjadrite v radiánoch veľkosti uhlov, ktorých veľkosti v stupňoch sú: 45°, 90°, 135°, 180°, 270°.

4. Vyjadrite v stupňoch veľkosti uhlov, ktorých veľkosti v radiánoch sú: a) $\frac{\pi}{4}$ rad; b) $\frac{\pi}{2}$ rad; c) $\frac{\pi}{3}$ rad; d) $\frac{3}{2}\pi$ rad; e) $\frac{3}{4}\pi$ rad.

9.11 Funkcia sínus a kosínus v intervale $\langle 0, 2\pi \rangle$

Doteraz sme poznali goniometrické funkcie uhlov, ktorých veľkosti boli v intervale (0°, 90°), v rad $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Teraz budeme definovať goniometrické funkcie v intervale $\langle 0°, 360° \rangle$, v radiánoch je to interval $\langle 0, 2\pi \rangle$.



Obr. 9.30

Zvoľme jednotkovú kružnicu so stredom v začiatku súradnicovej sústavy (obr. 9.30). Bod, v ktorom kružnica k pretína kladnú časť prvej súradnicovej osi, označme P_0. Otáčajme tento bod po kružnici k v kladnom zmysle, jednu z polôh označme P_x. Usporiadaná dvojica polpriamok $[OP_0, OP_x]$ určuje uhol P_0OP_x. Veľkosť uhla P_0OP_x vyjadrenú v radiánoch označme x.

Súradnice bodu P_x závisia od jeho polohy na kružnici k, teda od veľkosti x. Tieto súradnice označíme takto:

$$b = \sin x \qquad \text{(sínus } x\text{)} \qquad (2)$$

$$a = \cos x \qquad \text{(kosínus } x\text{)} \qquad (3)$$

Definícia:

a) Sínusom uhla veľkosti x nazývame druhú súradnicu bodu P_x jednotkovej kružnice k zodpovedajúceho uhlu x otáčania $R\ [O,\ x = v(\sphericalangle\ P_0OP_x)]$.

b) Kosínusom uhla veľkosti x nazývame prvú súradnicu bodu P_x jednotkovej kružnice k zodpovedajúceho uhlu x otáčania $R\ [O,\ x = v(\sphericalangle\ P_0OP_x)]$.

So zmenou uhla veľkosti x menia sa aj súradnice a, b bodu P_x, teda sin x a cos x sú funkciami premennej x.

$x \mapsto \sin x$

$x \mapsto \cos x$

Keď sa pohybuje bod P_x po kružnici k, nadobúda x všetky hodnoty od 0 do 2π. Teda **číselný interval $\langle 0, 2\pi \rangle$ je definičným oborom funkcií sínus a kosínus.**

Druhá súradnica bodu P_x pri otáčaní po kružnici k nadobúda najväčšiu hodnotu 1 (ak je P_x na kladnej časti druhej súradnicovej osi) a najmenšiu hodnotu -1 (ak je P_x na zápornej časti druhej súradnicovej osi). Potom platí

$$-1 \leqq \sin x \leqq 1,$$

pre každé $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

Analogicky môžeme zistiť, že prvá súradnica bodu P_x pri pohybe po kružnici k nadobúda všetky hodnoty od -1 po 1. Potom

$$-1 \leqq \cos x \leqq 1$$

pre každé $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

Množina funkčných hodnôt funkcií sínus a kosínus je číselný interval $\langle -1, 1 \rangle$.

Po dosadení z (2) a (3) do (1) dostaneme

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1. \qquad (4)$$

Veľkosť uhla x môžeme vyjadriť aj v stupňovej miere. Potom definičný obor pre funkcie sínus a kosínus vyjadrený v stupňovej miere je $\langle 0°, 360° \rangle$.

Takto zavedené funkcie sínus a kosínus pre interval $(0°, 90°)$ sú v úplnej zhode s funkciami sínus a kosínus, ktoré sme definovali pomocou pravouhlého trojuholníka (pozri obr. 28, $\triangle\ OP_1P_x$).

Cvičenia

1. Aké majú súradnice body jednotkovej kružnice:

a) $P_{\frac{\pi}{2}}$; b) P_{π}; c) $P_{\frac{3}{2}\pi}$; d) $P_{2\pi}$?

2. Aké hodnoty má funkcia sínus uhla veľkosti:
a) $\frac{\pi}{2}$; b) π; c) $\frac{3}{2}\pi$; d) 2π?

3. Aké hodnoty má funkcia kosínus uhlov veľkostí:
a) $\frac{\pi}{2}$; b) π; c) $\frac{3}{2}\pi$; d) 2π?

4. Napíšte hodnoty funkcií sínus a kosínus uhlov veľkostí:
a) 0°; b) 90°; c) 180°; d) 270°; e) 360°.

5. Určte veľkosť uhla, ak
a) $\sin x = 1$; b) $\sin x = -1$; c) $\sin x = 0$; d) $\cos x = 0$;
e) $\cos x = 1$; f) $\cos x = -1$.

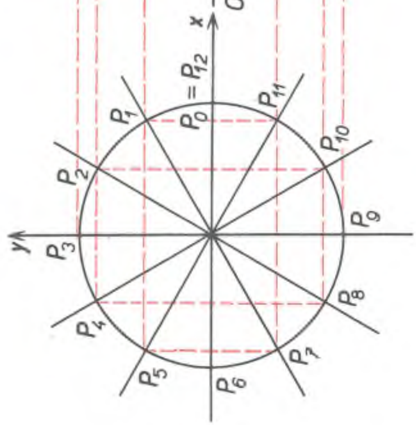
9.12 Grafy funkcií sin x a cos x

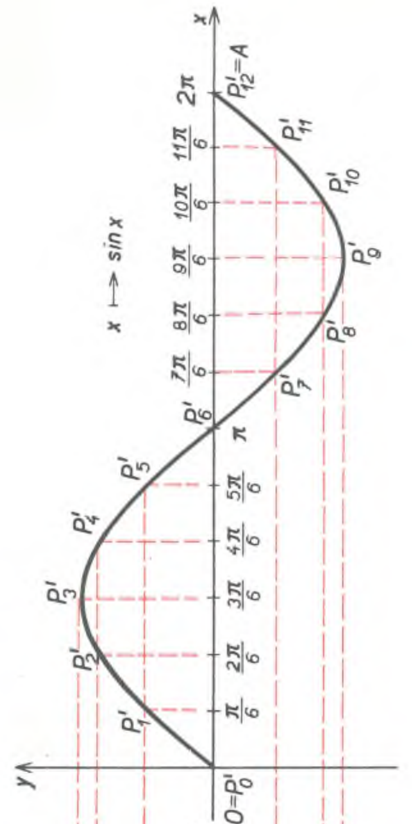
a) Graf funkcie $x \mapsto \sin x$, $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$

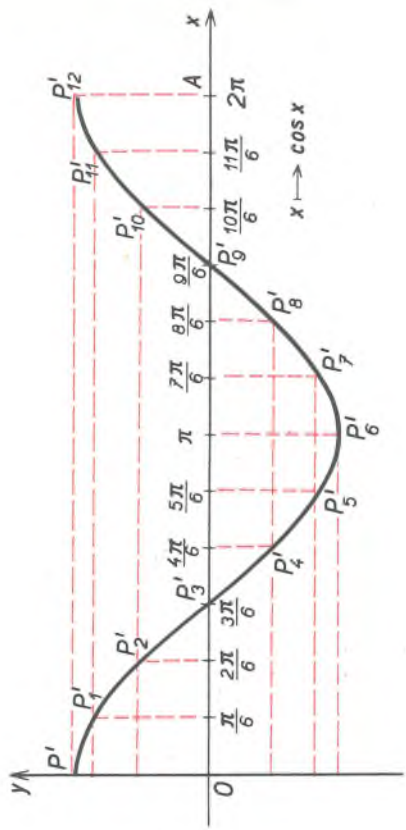
Predstavu o priebehu funkcie $\sin x$, $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$ získame na základe jej grafu. **Grafom funkcie sin** x je množina všetkých bodov $[x, \sin x]$, kde $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

Zostrojíme ho pomocou niekoľkých bodov, ktoré potom spojíme súvislou čiarou. Jednotkovú kružnicu rozdelíme bodmi $P_0, P_1, \ldots, P_{12} = P_0$ napr. na dvanásť zhodných kružnicových oblúkov (obr. 9.31). K týmto bodom prislúchajú uhly, ktorých veľkosti sú $0, \frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{6}, \frac{3\pi}{6}, \ldots \frac{11}{6}\pi, 2\pi$. Druhé súradnice bodov $P_0, P_1, \ldots, P_{12}$ sú funkčné hodnoty funkcie $\sin x$ zodpovedajúce hodnotám $0, \frac{\pi}{6}, \ldots, 2\pi$. Postupne zostrojíme body $P'_0, P'_1, \ldots, P'_{12}$, ktoré spojíme súvislou čiarou (obr. 9.32). Dĺžka úsečky OA je približne 6,28.

Graf funkcie $y = \sin x$, $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$ sa nazýva **sínusoida**. Na grafe vidíme už známu vlastnosť:
$-1 \leqq \sin x \leqq 1$ pre všetky $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$.







Obr. 9.31

Obr. 9.32

Obr. 9.33

Rozdeľme interval $\langle 0, 2\pi\rangle$ na štyri intervaly, urobme prehľad o priebehu funkcie $y = \sin x$:

v intervale $\left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$ funkcia rastie, (túto vlastnosť už poznáme)

„	$\left\langle \frac{\pi}{2}, \pi\right\rangle$	„	klesá,
„	$\left\langle \pi, \frac{3}{2}\pi\right\rangle$	„	klesá,
„	$\left\langle \frac{3}{2}\pi, 2\pi\right\rangle$	„	rastie.

Z grafu ďalej vidieť, že na narysovanie sínusoidy v ľubovoľnom intervale stačí jediné krividlo s oblúkom sínusoidy pre interval $\left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$.

b) Graf funkcie $x \mapsto \cos x$, $x \in \langle 0, 2\pi\rangle$

Obdobne zostrojíme graf funkcie kosínus uhla. Grafom funkcie $y = \cos x$ je množina všetkých bodov $[x, \cos x]$, pre $x \in \langle 0, 2\pi\rangle$. Použijeme obrázok 9.33. Prvé súradnice bodov $P_0, P_1, \ldots, P_{12}$ sú funkčné hodnoty funkcie $\cos x$ zodpovedajúce hodnotám $0, \frac{\pi}{6}, \frac{2}{6}\pi, \ldots, 2\pi$. Postupne zostrojíme body $P'_0\,[0, \cos 0]$, $P'_1\left[\frac{\pi}{6}, \cos\frac{\pi}{6}\right]$, $\ldots$, $P'_{12}\,[2\pi, \cos 2\pi]$ (obr. 9.33).

Body $P'_0, P'_1, \ldots, P'_{12}$ spojíme súvislou čiarou. Táto krivka sa nazýva **kosínusoida.**

Z grafu funkcie $y = \cos x$ názorne vidieť, že

$-1 \leqq \cos x \leqq 1$ pre všetky $x \in \langle 0, 2\pi\rangle$.

Opäť rozdeľme interval $\langle 0, 2\pi\rangle$ na štyri intervaly.

Vidíme, že v intervale $\left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$ funkcia $\cos x$ klesá,

„	$\left\langle \frac{\pi}{2}, \pi\right\rangle$	„	klesá,
„	$\left\langle \pi, \frac{3}{2}\pi\right\rangle$	„	rastie,
„	$\left\langle \frac{3}{2}\pi, 2\pi\right\rangle$	„	rastie.

Cvičenia

1. Narysujte na milimetrovom papieri graf funkcie $y = \sin x$, $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$.
a) Farebne vyznačte tie časti sínusoidy, kde funkcia $y = \sin x$ rastie.
b) Inou farbou vyznačte tie časti sínusoidy, kde funkcia $y = \sin x$ klesá.

2. Narysujte na milimetrovom papieri graf funkcie $y = \cos x$, $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$.
a) Farebne vyznačte tie časti kosínusoidy, kde funkcia $y = \cos x$ rastie.
b) Inou farbou vyznačte tie časti kosínusoidy, kde funkcia $y = \cos x$ klesá.

3. Pomocou sínusoidy nájdite veľkosť x uhla, ak
a) $\sin x = \frac{2}{3}$; b) $\sin x = -\frac{5}{6}$; c) $\sin x = -2$.

4. Pomocou kosínusoidy nájdite veľkosť x uhla, ak
a) $\cos x = -1$; b) $\cos x = 0$; c) $\cos x = \frac{2}{3}$; d) $\cos x = 2$.

9.13 Funkcia tangens a kotangens v intervale $\langle 0, 2\pi \rangle$

Funkciu $x \mapsto \mathrm{tg}\, x$ a $x \mapsto \mathrm{cotg}\, x$ budeme definovať pomocou už známych funkcií $\sin x$ a $\cos x$.

Funkcia tg x je definovaná vzťahom
$$\mathrm{tg}\, x = \frac{\sin x}{\cos x} \text{ pre } \cos x \neq 0.$$

Definičným oborom funkcie $y =$ tg x sú všetky reálne čísla x z intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$ s výnimkou tých, pre ktoré $\cos x = 0$. Sú to $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3}{2}\pi$.

Funkcia $x \mapsto$ cotg x je definovaná vzťahom

$$\text{cotg}\, x = \frac{\cos x}{\sin x} \text{ pre } \sin x \neq 0.$$

Definičným oborom funkcie $y =$ cotg x sú všetky reálne čísla x z intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$ s výnimkou tých, pre ktoré $\sin x = 0$. Sú to $x = 0$, $x = \pi$, $x = 2\pi$.

Úloha

Zdôvodnite, že nová definícia funkcie tangens a funkcie kotangens pre ostré uhly je v zhode s definíciou týchto funkcií pomocou pravouhlého trojuholníka.

V tabuľke č. 1 je prehľad znamienok hodnôt goniometrických funkcií. Táto je urobená na základe grafov funkcií sínus, kosínus a definícií funkcií tangens a kotangens.

Tab. č. 1.

Funkcia	Veľkosť uhla z kvadrantu			
	I.	II.	III.	IV.
sínus	+	+	−	−
kosínus	+	−	−	+
tangens	+	−	+	−
kotangens	+	−	+	−

Tab. č. 2. Prehľad hodnôt goniometrických funkcií pre veľkosti 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3}{2}\pi$, 2π uhlov.

Funkcia	Hodnoty				
	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
sínus	0	1	0	−1	0
kosínus	1	0	−1	0	1
tangens	0	*	0	*	0
kotangens	*	0	*	0	*

*Značka * znamená, že funkcia pre danú hodnotu x nie je definovaná.*

9.14 Grafy funkcií tg x a cotg x

a) Graf funkcie tg x

Zostrojíme znovu jednotkovú kružnicu k. Bod P_0 je bod kružnice k ležiaci na kladnej časti prvej súradnicovej osi. Otáčame polpriamkou OP_0 tak, že stred otáčania bude v bode O, obraz bodu P_0 v tomto otáčaní označme P_x. (Obr. 9.34a.) Zostrojme v bode P_0 dotyčnicu t kružnice k. Polpriamka OP_x pretne dotyčnicu t v bode T_x. Bodom P_x veďme rovnobežku s priamkou t, ktorá kladnú časť prvej súradnicovej osi pretne v bode R_0. Z podobnosti trojuholníkov OR_0P_x, OP_0T_x plynie

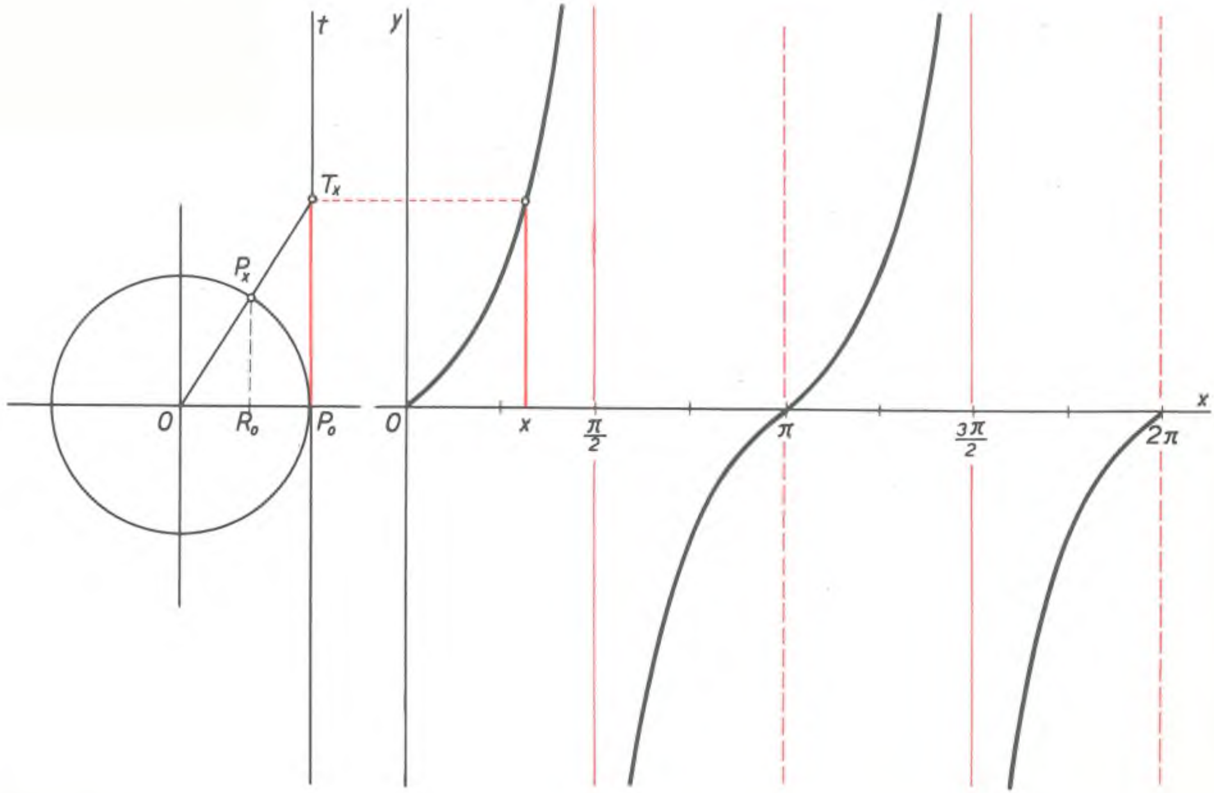
$$\frac{d(P_xR_0)}{d(OR_0)} = \frac{d(T_xP_0)}{d(OP_0)}$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{d(T_xP_0)}{1}$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = d(T_xP_0)$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$$

$$\operatorname{tg} x = d(T_xP_0).$$



Obr. 9.34a, b

Vidíme, že druhá súradnica bodov T_x je hodnota funkcie tg x. Toto využijeme na konštrukciu bodov grafu funkcie $y = f(x)$, $x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right)$.

Na obrázku 9.34b je doplnený graf aj v ostatných kvadrantoch.

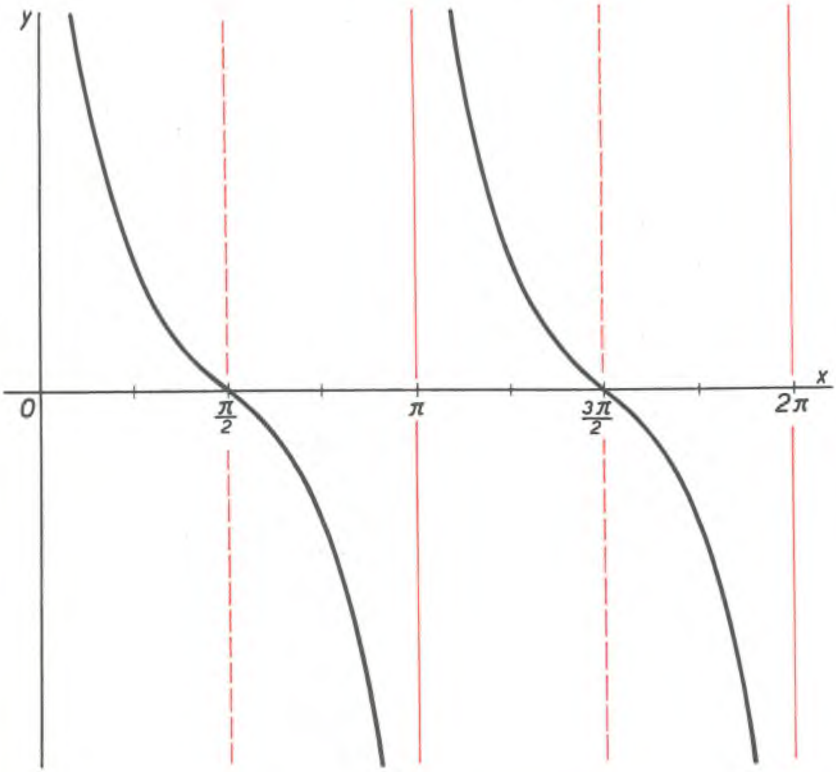
Krivku, ktorá je grafom funkcie $y =$ tg x nazývame **tengentoida**.

Z grafu vidieť, že funkcia $y =$ tg x je v intervale $\left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right)$ rastúca,

v intervale $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi \right)$ rastúca,

$\left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi \right\rangle$ rastúca.

b) Graf funkcie cotg x



Obr. 9.35

Na obr. 9.35 je narysovaný graf funkcie $y = \operatorname{cotg} x$ v intervale $(0, 2\pi)$. Graf funkcie $y = \operatorname{cotg} x$ nazývame **kotangentoida**. Z grafu vidieť, že funkcia $y = \operatorname{cotg} x$ je klesajúca na intervale $(0, \pi)$ a na intervale $(\pi, 2\pi)$.

Cvičenia

1. Na milimetrový papier narysujte časť tangentoidy pre uhly, ktorých veľkosti sú z intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ s výnimkou $x = \frac{\pi}{2}$.

2. Na milimetrový papier narysujte časť tangentoidy a kotangentoidy pre uhly, ktorých veľkosti sú z intervalu $\left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$. Grafy vyznačte farebne.

SÚHRNNÉ CVIČENIA 5

1. Určte priesečníky grafov lineárnych funkcií s osami súradníc:

a) $x \mapsto -2x + 0{,}5$

b) $x \mapsto -\frac{1}{2}x$

c) $x \mapsto \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}$

d) $y = 2x - \frac{1}{2}$

e) $y = -0{,}3x + 0{,}01$

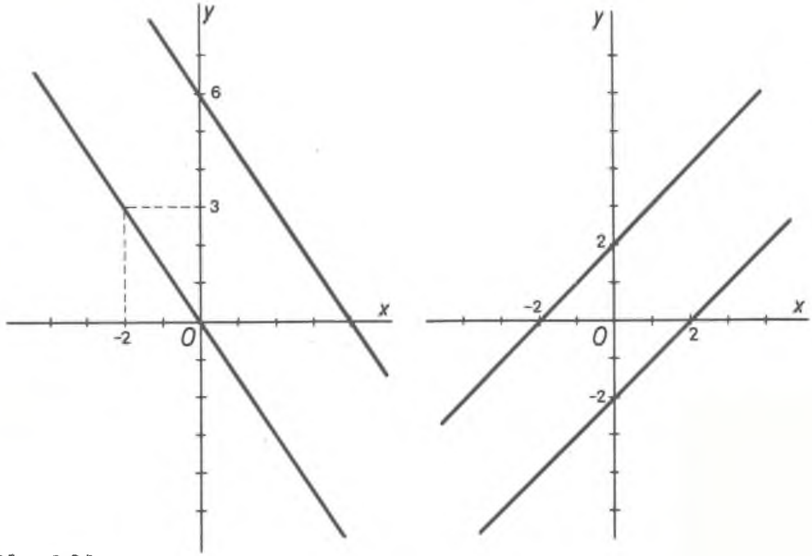
f) $y = -2x + 2$

2. Určte priesečníky grafov lineárnych funkcií:

a) $x \mapsto -x + 1$
$x \mapsto x - 1$

b) $y = 3{,}2x + 0{,}8$
$y = -x - 2$

3. Určte rovnice lineárnych funkcií, ktorých grafy sú na obrázkoch:
a) b)



Obr. 9.36

4. Zostrojte grafy funkcií:

a) $x \mapsto 2x^2$

b) $x \mapsto \frac{1}{2} x^2$

c) $x \mapsto x^2$

d) $x \mapsto -\frac{1}{2} x^2$

e) $x \mapsto -2x^2$

5. Zostrojte grafy funkcií:

a) $x \mapsto x^2$

b) $x \mapsto x^2 + 3$

c) $x \mapsto x^2 - 3$

d) $x \mapsto -x^2$

e) $x \mapsto -x^2 + 3$

f) $x \mapsto -x^2 - 3$

6. Zostrojte grafy funkcií:

a) $y = x^2 - 2x - 2$

b) $y = 3x^2 - 5$

c) $y = 3x - 5$

7. Riešte graficky kvadratické rovnice:

a) $x^2 + 1 = 0$ c) $x^2 - 6x + 8 = 0$

b) $x^2 - 3x = 0$

8. Riešte rovnice:

a) $x^2 - 16 = 0$ c) $x^2 - 16x = 0$

b) $x^2 + 16 = 0$ d) $x^2 + 16x = 0$

9. Riešte rovnice:

a) $x^2 - x + 2 = 0$ b) $x^2 + x - 12 = 0$

10. Pre ktoré x sú dané funkcie rastúce. Zostrojte ich grafy:

a) $x \mapsto \frac{1}{x}$ b) $x \mapsto -\frac{2}{x}$ c) $x \mapsto \frac{2}{x-2}$

11. Určte lineárnu lomenú funkciu, ak viete, že jej graf prechádza bodmi $A\,[0, -1]$, $B\,[-2, -\frac{1}{2}]$, $C\,[5, 3]$.

12. Ktoré čísla môžeme napísať v tvare zlomku, ktorého čitateľ je o 6 menší ako toto číslo a menovateľ o 4 menší ako toto číslo?

13. Za 120 Kčs nakúpila školská družina výtlačky rovnakej knihy. Keby bola za rovnaký obnos nakúpila výtlačky inej knihy o 1 Kčs drahšie, dostala by ich o 4 menej. Koľko výtlačkov kúpila?

14. Vodná nádrž sa naplní dvoma prítokmi za $\frac{1}{2}$ hodinu. Jedným z nich, ak sa plní len ním, sa naplní o dve hodiny skôr, ako druhým. Ako dlho sa plní každým z nich?

15. Nájdite v tabuľke sin α, cos α, tg α, cotg α, ak $\alpha = 17°$ (32°, 46°30′, 57°30′, 86°).

16. Aký veľký je uhol pri základni rovnoramenného trojuholníka, ak dĺžka strany a je 18 cm, dĺžka strany $b = c = 24$ cm?

17. Uhlopriečka obdĺžnika meria 28,4 cm a určuje s dlhšou stranou uhol 31°. Vypočítajte obsah obdĺžnika.

18. Aká je dĺžka strany pravidelného päťuholníka vpísaného do kružnice s polomerom dĺžky 10 cm?

19. Kosoštvorec má stranu $a = 17{,}6$ cm a uhol $\alpha = 64°$. Vypočítajte dĺžku jeho uhlopriečok.

20. Tetiva MN v kružnici, príslušná stredovému uhlu $\sphericalangle MSN = \omega = 132°$, má od stredu S kružnice vzdialenosť v. Vypočítajte vzdialenosť v, ak polomer kružnice $r = 10$ cm.

21. Plavec pláva naprieč riekou rýchlosťou $v_1 = 0{,}5$ m/s. Prúd rieky má rýchlosť $v_2 = 2$ m/s. O aký uhol sa plavec odchýli od pôvodného smeru?

22. Ako vysoko je Slnko nad obzorom, keď tyč jeden meter dlhá postavená zvisle na vodorovnej rovine vrhá tieň 90 cm dlhý?

23. Kosoštvorec má uhlopriečky $e = 18$ cm, $f = 14$ cm. Vypočítajte dĺžku strany, veľkosť uhla a dĺžku výšky.

24. Výška bočnej steny pravidelného štvorbokého ihlana má dĺžku 126 cm a určuje s príslušnou strednou priečkou v podstave uhol veľkosti 72°. Vypočítajte povrch ihlana.

VÝSLEDKY

6. Podobnosť a rovnoľahlosť

6.1 Podobnosť rovinných útvarov

1. $k = 3$, $d(FG) = 12$ cm. **2.** I $\sim$ III $\left(\text{zväčšenie, } k = \frac{3}{2}\right)$; I $\sim$ IV $\left(\text{zmenšenie, } k = \frac{1}{2}\right)$, III $\sim$ IV $\left(\text{zmenšenie, } k = \frac{1}{3}\right)$.

6.2 Podobnosť trojuholníkov

1. a) Podobné podľa vety *uu* o podobnosti trojuholníkov (majú všetky uhly zhodné veľkosti 60°); b) podobné podľa vety *uu* (pri preponách zhodné uhly veľkosti 45°). **2.** Nie sú podobné. **3.** $k = \frac{4}{3}$, $d(K'M') = \frac{20}{3}$ cm, $d(L'M') = \frac{28}{3}$ cm; zodpovedajúce si uhly obidvoch trojuholníkov sú zhodné. **4.** Vyplýva z podobnosti $\triangle ABS \sim \triangle CDS$ (podľa vety *uu*: $\sphericalangle CSD \cong \sphericalangle ASB$, $\sphericalangle SAB \cong \sphericalangle SCD$). **5.** $\triangle ABC \sim \triangle UTV$, $k = 15$. **6.** a) $\triangle ABC \sim \triangle LMK$ (*uu*); b) $\triangle RST \sim \triangle YZX$ (*uu*). **7.** $a' = 6$ cm; podobné podľa vety *uu*. **8.** $\frac{v_c'}{v_c} = \frac{t_a'}{t_a} = \frac{2}{3}$; ak sú dva trojuholníky podobné s pomerom podobnosti k, pomer dĺžok ľubovoľných dvoch zodpovedajúcich si úsečiek sa rovná číslu k.

6.3 Tretia veta o podobnosti trojuholníkov

1. a) $\triangle ABC \sim \triangle MNP$ (podľa vety *sss* o podobnosti trojuholníkov), $k = \frac{5}{3}$; b) $\triangle RST$ a $\triangle KLM$ nie sú podobné, i keď $\frac{d(KM)}{d(RT)} = \frac{d(KL)}{d(RS)} = \frac{3}{2}$, no veľkosti zovretých uhlov sú rôzne: $75° \neq 70°$; c) $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, $k = \frac{2}{3}$. **2.** Z vlastností stredných priečok, $k = \frac{1}{2}$. **3.** Obsah sa zväčší deväťkrát, všeobecne pri pomere podobnosti strán k, je pomer obsahov k^2. **4.** a) $r' = \frac{7}{3}$ cm, $s' = \frac{8{,}5}{3}$ cm, $t' = \frac{6{,}8}{3}$ cm; b) $r' = 8{,}4$ cm, $s' = 7{,}4$ cm, $t' \doteq 6{,}13$ cm; c) $r' = 4{,}9$ cm, $s' = 8{,}05$ cm, $t' = 6{,}65$ cm. **5.** a) $S' : S = 4$; b) $S' : S = k^2$. **6.** Buď podľa vety o podobnosti trojuholníkov *sss* alebo *uu* tak, že najskôr zostrojíme napr. stranu s dĺžkou $a' = 1{,}7 \cdot 5$ cm a potom uhly $\beta' \cong \beta$, $\gamma' = \gamma$. **7.** Úsečku s dĺžkou $o' = 13{,}5$ cm rozdelíme v pomere dĺžok strán trojuholníka ABC, t. j. 5,2 : 4,8 : 6. **8.** a **9.** Podľa konštrukcie príkladu 3 alebo 4. **10.** Tabuľka napr. takto:

Číslo vety	Veta o podobnosti trojuholníkov	Označenie vety	Príklad pre $\triangle ABC \sim \sim \triangle A'B'C'$
I	Ak sa rovnajú pomery dĺžok dvoch zodpovedajúcich si strán dvoch trojuholníkov, sú tieto trojuholníky podobné.	*sss*	$d(A'B') = = k \cdot d(AB)$ $d(B'C') = = k \cdot d(BC)$ $d(C'A') = = k \cdot d(CA)$
II	Ak sa zhodujú dva trojuholníky v dvoch uhloch, sú podobné.	*uu*	$\alpha' \cong \alpha$ $\beta' \cong \beta$
III	Ak majú dva trojuholníky rovnaký pomer dĺžok dvoch párov zodpovedajúcich si strán a zhodujú sa v uhle nimi zovretom, sú tieto trojuholníky podobné.	*sus*	$d(A'B') = = k \cdot d(AB)$ $d(A'C') = = k \cdot d(AC)$ $\alpha' \cong \alpha$

6.4 Použitie podobnosti

1. 190 m pletiva. **2.** Výška komína $v \doteq 52{,}9$ m. **3.** Nie sú podobné, pretože $\frac{74}{57} \neq \frac{74 + 12}{57 + 12}$. **4.** $v_P \doteq 29{,}4$ m, $v_N \doteq 24{,}9$ m, $S \doteq 1\,629$ m². **5.** Napr. $\frac{d(B_1C_1)}{d(AC_1)} = \frac{d(B_2C_2)}{d(AC_2)} = \ldots = s$ (konštantné).

6.5 Rovnoľahlosť

1. Priesečník výšok je vrchol pravého uhla; rovnoľahlosť toho istého druhu ako v príklade 3. **2.** Podobná konštrukcia ako v príklade 1. **3.** Obrazy obdĺžnika $MNOP$ získané v rovnoľahlosti a) a b) sú súmerné podľa stredu S. **4.** Pre $\varkappa\left(T, \lambda = -\frac{1}{2}\right)$ podľa konštrukcie platí $C \mapsto B'$, $B \mapsto C'$, $B'C' \parallel CB$. **6.** a) V $\varkappa_1\left(S_1, \lambda = -\frac{d(S_1C)}{d(S_1A)}\right)$ platí: $A \mapsto C$, $B \mapsto D$; v $\varkappa_2\left(S_2, \lambda = \frac{d(S_2D)}{d(S_2A)}\right)$ platí $A \mapsto D$, $B \mapsto C$. b) Pretože obrazom stredu O_1 úsečky AB je napr. v $\varkappa_1$ stred O_2 úsečky CD, leží S_1 na priamke O_1O_2. Vzhľadom na $\varkappa_2$ leží aj S_2 na priamke O_1O_2.

6.6 Konštrukčné využitie rovnoľahlosti

1. Postup ako v príklade 1. **2.** a) Postup ako v príklade 1; b) v rozbore zostrojiť k hľadanému podobný trojuholník podľa vety *uu*, potom pomocne napr. $\varkappa\left(A, \lambda = \frac{v_a'}{v_a}\right)$. **3.** V rozbore pomocne napr. $A'B'C'D'$ s $a' = 4$ cm, $b' = 7$ cm, $\alpha = 60°$. Potom napr. v $\varkappa\left(A' = A, \lambda = \frac{d(AC)}{d(A'C')}\right)$ platí $C' \mapsto C$ atď. b) Pomocne $\triangle A'SB'$ s $d(SA') = \frac{1}{2} \cdot d(AC), d(SB') = \frac{1}{2} \cdot d(BD)$, $v(\sphericalangle A'SB') = 120°$. Potom napr. v $\varkappa\left(S, \lambda = \frac{d(AB)}{d(A'B')}\right)$ platí $A' \mapsto A$ atď. **4.** $\varkappa_1\left(S, \lambda_1 = \frac{r_2}{r_1}\right)$, $\varkappa_2\left(S, \lambda_2 = -\frac{r_2}{r_1}\right)$. **5.** Pomocne napr. štvorec $O'P'Q'R'$ tak, že $R' \in AC$, $Q' \in BC$, $\leftrightarrow Q'R' \parallel \leftrightarrow AB$. Potom v $\varkappa\left(C, \lambda = \frac{d(CO)}{d(CO')}\right)$, kde $O \in \leftrightarrow CO' \cap \leftrightarrow AB$, platí aj $R' \mapsto R$, $Q' \mapsto Q$, $P' \mapsto P \in AB$.

7. Riešenie nerovníc

7.1 Upevnenie a prehĺbenie učiva o nerovniciach

1. a) $x \in \{2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$,
b) x je z množiny všetkých prirodzených čísel,
c) $x \in \{1, 2, 3, 4, \ldots, 99\}$,

d) $x \in \{293, 294, 295, \ldots\}$.

2. a) $x \in \{1, 2, 3, \ldots, 19\}$,
b) $x \in \{23, 24, 25, \ldots\}$,
c) $x \in \{2, 3, 4, 5, \ldots\}$,
d) $x \in \{5, 6, 7, \ldots\}$.

4. a) $\{1, 2, 3\}$,
b) $\emptyset$,
c) $\{1, 2, 3, \ldots 7\}$,
d) $\{1, 2, 3, \ldots, 27\}$,
e) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$,
f) $\{1, 2, 3\}$.

5. a) $x < 4$, b) $x < 7$, c) $x + 2 < 2$.

6. $6x < 25$, mohol si kúpiť štyri a menej škatúľ sardiniek.

7. Mohlo prísť najviac 75 divákov.

8. $\{6, 7, 8, 9, 10, 11\}$.

7.2 Riešenie nerovníc s jednou neznámou

1. a) $x < 4$, b) $x < 6$, c) $y \geqq 4$.

2. a) $x < \frac{13}{3}$,
b) $x \leqq -\frac{4}{3}$,
c) $y \geqq 0{,}9$,
d) $x > \frac{4}{15}$,
e) $x < 9{,}8$,
f) $x > 0{,}5$.

3. a) $x \geqq -\frac{4}{3}$, b) $x \leqq 14$, c) $x \geqq 1{,}1$.

4. a) $y \leqq 1$, b) $x > \frac{8}{3}$, c) $x \geqq -2$, d) $x \leqq \frac{5}{2}$.

5. a) $x < \frac{22}{3}$, b) $x \leqq \frac{12}{5}$, c) $x \geqq \frac{15}{8}$.

6. a) $x < -\frac{23}{4}$, b) $x \leqq -\frac{6}{11}$, c) $x > 6$.

7. a) $y \in \{1, 2, 3\}$, b) $x \in \{1, 2\}$, c) $x = 1$.

8. Napríklad 55 a 45 (jedna z častí musí byť väčšia ako 54).

9. a) $a \in \{-4; -3; -2; -1\}$,
b) $b \in \{-3; -2; -1\}$,
c) $x \in \{-9; -8, \ldots, -2; -1\}$.

10. a) x je ľubovoľné reálne číslo,
b) nemá riešenie,
c) x je ľubovoľné reálne číslo.

11. $x \geqq \frac{3}{5}$.

12. $a > 1$.

13. a) $x \in \{\ldots, -3; -2; -1; 0; 1\}$,
b) $x \in \{1\}$,
c) $x < 2$.

14. Jeden meter kábla má väčšiu hmotnosť ako 1,25 kg.

15. $a < 1$.

7.3 Riešenie sústavy dvoch nerovníc s jednou neznámou

1. $1 < x < 6$

3. a) $x \in (3; 11)$, b) $x \in (0; 22)$, c) $x \in (-10; 0)$,
d) $x \in (-15; 31)$.

4. a) $10 < x < 20$, b) $-5 < x < -3$, c) $-8 < x < 36$.

6. a) $x \in (3; 8)$, b) $x \in (-5; 2)$.

8. a) $y \in \langle 7; 34 \rangle$, b) $y \in \langle -12; 3{,}8 \rangle$, c) $y \in \langle -1{,}3; 6{,}9 \rangle$.

9. a) $0{,}4 \leqq x \leqq 8$, b) $-9 \leqq x \leqq 56{,}3$.

12. a) $-2{,}1 \leqq x \leqq 3$, b) $0{,}6 \leqq x < 3{,}7$, c) $-5{,}3 < y \leqq 0$.

14. a) $-2 < x < 9$, b) $x < -\frac{1}{2}$, c) $-3 < x \leqq 2$,
d) $-\frac{5}{4} \leqq x \leqq -\frac{1}{2}$.

15. a) $x < -\frac{3}{4}$, b) $\frac{3}{5} < x < \frac{13}{12}$, c) nemá riešenie,
d) $-\frac{5}{4} < x < \frac{3}{2}$.

16. a) nemá riešenie, b) $x \in \{\dots, -86, -85\}$

17. a) $x \in \left\langle -\frac{5}{2}; 2\right)$, b) $x \in \left(-\frac{5}{3}; \frac{5}{3}\right)$, c) nemá riešenie.

18. $x > 1$ alebo $x < -\frac{3}{2}$.

19. $x \in \left(-1; \frac{3}{2}\right)$.

Súhrnné cvičenia 4

1. $k = \frac{5}{3}$, $\triangle ABC \sim \triangle KLM$.

2. a) $a' = 6$ cm, $b' = 5$ cm, $c' = 4{,}4$ cm; trojuholník sa dá zostrojiť; b) $a' = 5{,}1$ cm, $b' = 8{,}5$ cm, $c' = 2{,}55$ cm; trojuholník sa nedá zostrojiť. **3.** Riešte podľa príkladu 1 v odseku 6.4. **4.** Nemôžu, pretože zvyšné uhly obidvoch trojuholníkov musia byť ostré, takže ani jeden z nich nemôže byť zhodný podľa vety *uu* s uhlom veľkosti 90° alebo 95°. **5.** Podľa príkladu 3 v odseku 6.5. **6.** Dĺžka = 5 cm zodpovedá dvom zhodným dielom, b) trom, c) piatim; konštrukčne postupujeme ako v poznámke k príkladu 4 v odseku 6.3.

7. a) $x > 2$; b) $x \geqq -5$; c) $x \leqq 0$.

8. a) $x \in \{1, 2\}$; b) $x \in \{\dots -2, -1, 0, 1, 2\}$; c) $x < 3$.

10. a) $x < -\frac{3}{4}$; b) nemá riešenie.

11. $x = \frac{1}{2}$.

12. $x \geqq \frac{1}{2}$.

13. Pre všetky reálne čísla okrem reálnych čísel z intervalu $\left\langle -3, \frac{1}{2}\right\rangle$.

8. Funkcie

8.1 Lineárna funkcia — opakovanie a prehĺbenie učiva

2. Rastúca c, d, e; klesajúca a, b; konštantná f. **3.** a) $x \mapsto -2x + 2$; b) $x \mapsto -x$; c) $x \mapsto 3$; d) $x \mapsto \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$. **4.** a) $\frac{1}{3}$; b) 4; c) nijaké; d) 0; e) $-\frac{20}{3}$; f) 1. **5.** a) $a \doteq 6{,}5$; $b \doteq 3{,}7$; b) nemá riešenie; c) $\frac{5}{27}$; $-\frac{2}{27}$; d) nemá riešenie, $x \in R$. **6.** Približne za $1\frac{1}{3}$ h. **7.** a) rastúca; b) klesajúca; c) rastúca; d) klesajúca. **8.** a) [0, 2], [2, 0]; b) [0; 0,5], [1,5; 0]; c) [0, 1], $\left[\frac{1}{2}, 0\right]$.

8.2 Kvadratická funkcia typu $x \mapsto ax^2$

3. $0{,}5 \mapsto 0{,}125$; $3{,}5 \mapsto 6{,}125$; $-5{,}7 \mapsto 16{,}245$; $-8{,}1 \mapsto 32{,}805$. **4.** $d \mapsto \frac{\pi d^2}{4} \cdot v$. **5.** $a \mapsto \varrho a^2$. **6.** $r \mapsto \pi r^2 \varrho$.

8.4 Všeobecná kvadratická funkcia

3. a) $5 \pm \sqrt{5}$; b) $-2 \pm \sqrt{5}$; c) pre nijaké x. **4.** a) [4, −1]; b) $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$; c) nemá riešenie v R; d) nemá riešenie; e) $\left[0, \frac{4}{5}\right]$. **5.** a) −5, −1; b) 1,236, −3,236; c) $\frac{3}{2}$; d) 20, −4; e) 0, $\frac{4}{5}$; f) 0,5. **6.** 17. **7.** $7\frac{1}{2}$ h, 5 h. **8.** 20 h, 30 h.

8.5 Nepriama úmernosť

3. −1; −1,5. **4.** $y = \frac{3}{x}$. **6.** $k = 6$. **7.** $\langle R\rangle \mapsto \frac{220}{\langle R\rangle}$.

8.7 Grafické riešenie sústavy jednej lineárnej rovnice a jednej kvadratickej rovnice s dvoma neznámymi

1. a) 4,2; −1,2; b) −0,3; −3,7; c) 2, −1; d) 2; e) 2,3; −1,3. **2.** a) 5, 8;

b) nemá riešenie; c) 3, —1. **3.** 53, 47.

9. Goniometrické funkcie

9.1 Opakovanie o podobnosti geometrických útvarov

1. $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

2. $\triangle ABC$ je pravouhlý, jeden pravý, dva ostré.

9.2 Goniometrické funkcie ostrého uhla

1. $\sin \alpha = \frac{d(NP)}{d(MP)}$, $\cos \alpha = \frac{d(MN)}{d(MP)}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{d(PN)}{d(MN)}$, $\operatorname{cotg} \alpha = \frac{d(MN)}{d(PN)}$,
$\sin \beta = \frac{d(MN)}{d(MP)}$, $\cos \beta = \frac{d(NP)}{d(MP)}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{d(MN)}{d(PN)}$, $\operatorname{cotg} \beta = \frac{d(PN)}{d(MN)}$.
a) $\sin \alpha = \cos \beta$, b) $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{cotg} \beta$.

2.

α	10°	20°	30°	40°
$\operatorname{tg} \alpha$	0,17	0,36	0,58	0,84

9.3 Tabuľka hodnôt goniometrických funkcií ostrého uhla

1. a) 0,2672; b) 0,9997; c) 0,6691; d) 0,3335.

2. a) 0,9205; b) 0,7934; c) 0,9997; d) 0,7452.

3. a) 0,9004; b) 1,303; c) 0,0524; d) 0,8253.

4. a) $\alpha = 8°20'$; b) $\alpha = 8°30'$; c) $\alpha = 20°30'$.

5. a) $\alpha = 0{,}52$ rad; b) $\alpha = 0{,}74$ rad; c) $\alpha = 0{,}78$ rad.

9.4 Tabuľka hodnôt goniometrických funkcií pre veľkosti uhla $\alpha = 30°$ (45°, 60°)

1. $\cos 63° = 0{,}4540$.

2. $\alpha = 28°$.

3. $\alpha = 23°$.

9.5 Funkcia $x \mapsto \sin x$

1. a) $\alpha \doteq 16°20'$, $\beta \doteq 73°40'$.
b) $\alpha \doteq 44°20'$, $\beta \doteq 45°40'$.

2. a) $a \doteq 8{,}2$ cm, $b \doteq 5{,}7$ cm, $\beta = 34°30'$.
b) $a \doteq 20$ m, $b \doteq 14{,}9$ m, $\alpha = 53°30'$.

3. $\alpha = 60°$.

4. 1 294 m.

5. 86,6 m.

9.6 Funkcia $x \mapsto \cos x$

1. $b \doteq 15{,}6$ m.

2. a) $c \doteq 150°$; c) 28,4 cm.

3. $\alpha \doteq 49°$.

4. $a \doteq 49{,}6$ mm.

5. $z \doteq 20$ cm.

9.7 Funkcia $x \mapsto \operatorname{tg} x$

1. $\alpha = 35°30'$.

2. Komín je vysoký 95 m.

3. Stúpa pod uhlom 1°.

9.8 Funkcia $x \mapsto \operatorname{cotg} x$

1. $b \doteq 5{,}19$ cm.

2. Vzdialenosť stožiarov je 69 m.

3. $d(B_1C) = 2\,315$ m a $d(B_2C) = 1\,950$ m.

9.9 Riešenie úloh

1. a) Rameno má dĺžku 28,3 cm, veľkosť uhla pri hlavnom vrchole je 43°.
   b) Základňa má dĺžku 84,4 cm, veľkosť uhla pri hlavnom vrchole je 29°.

2. Úklon sloja je 28°.

3. $F_1 \doteq 2\,598$ N, $F_2 \doteq 3\,000$ N.

4. $v \doteq 165$ mm, $v_s \doteq 175{,}4$ mm.

9.10 Jednotková kružnica

2. a) $M_1\,[-0{,}8; -0{,}6]$, b) $M_2\,[0{,}8; -0{,}6]$, c) $M_3\,[-0{,}8; 0{,}6]$.

3. $\frac{\pi}{4}$ rad $\doteq 0{,}79$ rad, $\frac{\pi}{2}$ rad $\doteq 1{,}57$, $\frac{3}{4}\pi$ rad $\doteq 2{,}36$ rad, π rad $\doteq 3{,}14$ rad, $\frac{3}{2}\pi$ rad $\doteq 4{,}71$ rad.

4. a) 45°; b) 90°; 60°; 270°; 135°.

9.11 Funkcia sínus a kosínus v intervale $\langle 0, 2\pi \rangle$

1. a) [0, 1]; b) [−1, 0], c) [0, −1], d) [1, 0].
2. a) 1; b) 0; c) −1; d) 0.
3. a) 0; b) −1; c) 0; d) 1.
4. a) $\sin 0° = 0$, $\cos 0° = 1$; b) $\sin 90° = 1$, $\cos 90° = 0$;
   c) $\sin 180° = 0$, $\cos 180° = -1$; d) $\sin 270° = -1$, $\cos 270° = 0$,
   e) $\sin 360° = 0$, $\cos 360° = 1$.

5. a) $x = 90°$; b) $x = 270°$; c) $x = 0°$ alebo $x = 360°$; d) $x = 90°$ alebo $x = 270°$; e) $x = 0°$ alebo $x = 360°$; f) $x = 180°$.

Súhrnné cvičenia 5

1. a) [0; 0,5], [0,25; 0]; b) [0; 0]; c) [0; −0,25]; [0,75; 0]; d) [0; −0,5]; [0,25; 0]; e) [0; 0,01]; $\left[\frac{1}{30}; 0\right]$; f) [0; 2]; [1; 0].

2. a) [1, 0]; b) $\left[-\frac{14}{21}; -\frac{28}{21}\right]$.

3. a) $y = -\frac{3}{2}x$, $y = -\frac{3}{2}x + 6$; b) $y = x + 2$; $y = x - 2$.

8. a) $x_1 = 4$, $x_2 = -4$; b) nemá riešenie; c) $x_1 = 0$, $x_2 = 16$; d) $x_1 = 0$; $x_2 = -16$.

9. a) nemá riešenie; b) $x_1 = 3$; $x_2 = -4$.

11. Napr. ak $x \leqq 0$, tak $y = -\frac{1}{4}x - 1$; ak $x \geqq 0$, tak $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

12. 2,3.

13. 24 ks po 5 Kčs.

14. Prvým prítokom sa naplní asi za 36 min a druhým za 2 h 36 min.

16. $\alpha \doteq 68°$.

17. $S = 358{,}58\ \text{cm}^2$.

18. $a = 11{,}7$ cm.

19. $f \doteq 30$ cm; $e \doteq 18{,}65$ cm.

20. $v \doteq 4$ cm.

21. $\alpha \doteq 76°$.

22. $\alpha \doteq 48°$.

23. $a = 11{,}4$ cm, $\alpha \doteq 75°40'$, $v = 11$ cm.

24. $S \doteq 2{,}47\ \text{m}^2$.

JÁN BOBOK
VLASTIMIL MACHÁČEK
JANA MÜLLEROVÁ
ONDREJ ŠEDIVÝ

MATEMATIKA

pre 8. ročník základnej školy

II. diel

1. vydanie

Vydalo Slovenské pedagogické nakladateľstvo v Bratislave

Zodpovedná redaktorka Zdena Horniačková
Technická redaktorka Alena Zvěřinová
Grafickú úpravu navrhol Václav Hanuš

Vytlačil Tisk, knižní výroba, n. p., Brno, závod 3, Český Těšín —
Strán 192 — AH 7,77 — VH 8,24 (text 5,30, grafika 2,94) — 10/24
Náklad 99 870 — Typ písma garmond Plantin — Technika tlače ofset
Schválené výmerom SÚKK-GR č. 1866/I-1982

67-185-83	Kčs 9,50 v.

Záznam o použití učebnice

Por. číslo	Meno žiaka	Školský rok	Stav učebnice	
			na zač. šk. r.	na konci šk. r.
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

Skl. č. 1-11-859
67-185-83
10/24 Kčs 9,50 v.