176.796 2 570

MATEMATIKA

5

II. diel

SPN

MATEMATIKA
PRE 5. ROČNÍK
ZÁKLADNEJ ŠKOLY

GEOMETRIA

JIŘÍ KABELE
MARIE JANKŮ
JAROSLAVA URBANOVÁ

SLOVENSKÉ
PEDAGOGICKÉ
NAKLADATEĽSTVO
BRATISLAVA 1985

MATEMATIKA

PRE 5. ROČNÍK ZÁKLADNEJ ŠKOLY II. DIEL

GEOMETRIA

5

Spracovali: RNDr. Jiří Kabele, CSc., PaedDr. Marie Janků a PhDr. Jaroslava Urbanová

Koordinátor učebnic matematiky pre 5.—8. ročník ZŠ:
prof. Jaroslav Kurzweil, DrSc.

Recenzovali: PaedDr. František Běloun, dr. Vlastimil Macháček,
dr. Jarmila Panochová a Marie Remešová

Schválilo Ministerstvo školstva SSR výnosom č. 6955/1979-20
zo dňa 28. 4. 1979 ako učebnicu geometrie pre 5. ročník
základnej školy s vyučovacím jazykom slovenským

Translation © Ján Bobok, 1980
4. vydanie

OBSAH

MILÉ DETI,

z geometrie ste sa už mnoho naučili na 1. stupni základnej školy. Učebnica vás povedie pri opakovaní, čo ste sa už z geometrie naučili, a pomôže vám pri ďalšom učení, pri získavaní nových poznatkov z geometrie. **Z tejto knihy sa neučte len spamäti odriekavať vety. Pri učení vždy rysujte, modelujte, konštruujte to, o čom sa v učebnici píše.** Takto učivo lepšie porozumiete a lepšie si ho zapamätáte.

Všetko, čo sa z tejto knihy naučíte, budete vo svojom živote potrebovať. Poznatky z geometrie potrebuje každý. Vaši rodičia využívajú poznatky z geometrie pri zariaďovaní bytu, napr. keď kupujú koberec alebo inú podlahovú krytinu. Aj mamička pri nákupe rôznych čistiacich prostriedkov uvažuje napr. o tom, či má kúpiť jednu alebo dve škatule pasty na parkety. Geometriu potrebuje vedieť sústružník aj krajčírka, stavbár aj obrábač kovov, brúsič skla, vodič auta, astronóm aj kozmonaut, maliar-umelec, poľnohospodári aj zamestnanci v závode a veľa a veľa ďalších ľudí využíva pri svojej práci poznatky z geometrie.

Geometria pomáhala oddávna človeku poznávať svet, poznávať priestor, v ktorom sa pohybuje. Ako človek poznával svet, tak si prehlboval a získaval nové poznatky z geometrie a tie často zase viedli k novým objavom a vynálezom.

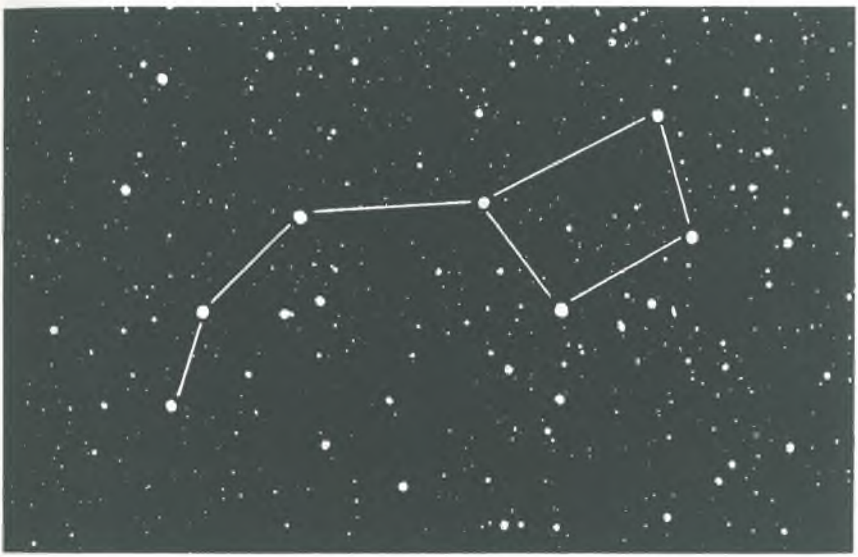
My dospelí, vaši učitelia, vám želáme, aby sa vám geometria páčila, aby ste sa ju učili rady. Lebo to, čo sa človeku páči, čo sa učí rád, naučí sa lepšie, lepšie si to zapamätá a lepšie vie využiť to, čo sa naučil. V prípade, že sa vám bude geometria páčiť a ak budete chcieť vyriešiť viac úloh, ako je zaradených v tejto učebnici, vyhľadajte si ďalšie úlohy z geometrie v cvičebnici. Tam sú aj rôzne zaujímavé a zábavné úlohy.

I/ UTVRDZOVANIE A PREHLBOVANIE UČIVA

1. Bod, úsečka, priamka. Trojuholník. Rovina

BOD

Geometricky môžeme zobrazovať ako **body, množiny bodov, úsečky, priamky** najrôznejšie objekty z nášho okolia.

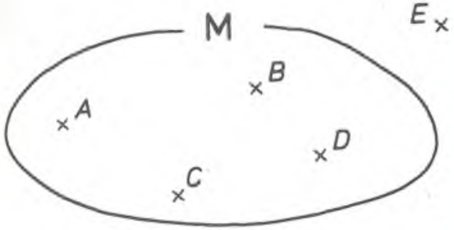


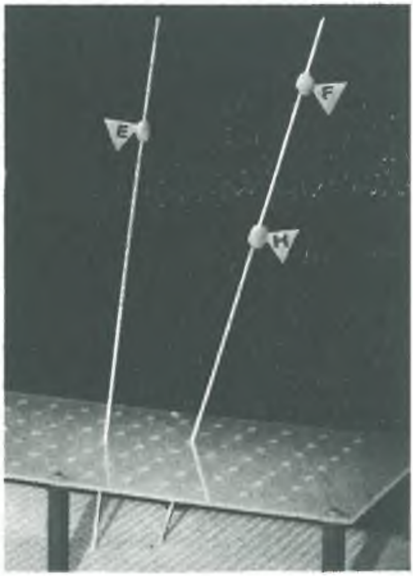
Aj hviezdy na oblohe môžeme chápať ako body.

Úloha 1

Povedzte, čo napríklad môžeme geometricky zobrazovať ako body.

Úloha 2

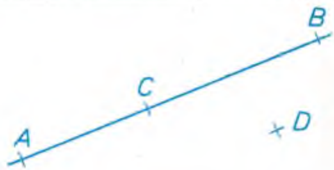




Množina M je množinou vyznačených bodov A, B, C, D.
$M = \{A, B, C, D\}$ $C \in M$ $E \notin M$

Zapíšte množinu všetkých vyznačených bodov, ktoré vidíte na fotografii. Označte ju B.

ÚSEČKA



Bod C **leží medzi** bodmi A, B.
Body A, B, C **ležia na úsečke**; možno zostrojiť úsečku, ktorej patria všetky tri body.

$A \in AB$, $B \in AB$, $C \in AB$

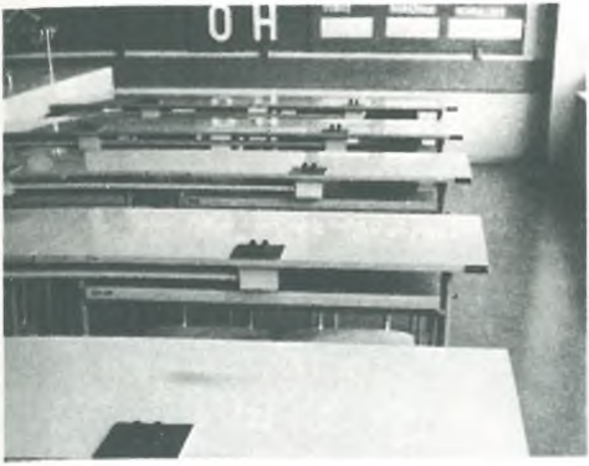
Body A, B, D **neležia na úsečke**; nemôžeme zostrojiť úsečku, ktorej patria všetky tri body.

$D \notin AB$, $A \notin BD$, $B \notin AD$

Úloha 3

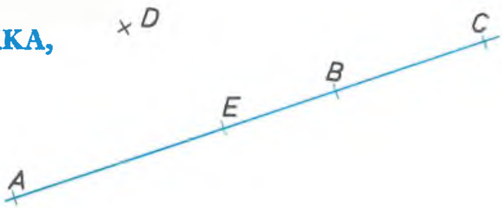
Rozhodnite, ktoré tri z vyznačených bodov ležia na úsečke a ktoré tri z vyznačených bodov neležia na úsečke. Povedzte, prečo.

Úloha 4



Povedzte, čo okolo vás v triede môže predstavovať úsečku.

POLPRIAMKA, PRIAMKA



Každý bod X **polpriamky** AB je bodom úsečky AB, alebo preň platí, že bod B **leží** medzi bodmi A, X.
Dvoma rôznymi bodmi A, B je určená polpriamka AB a **polpriamka k nej opačná** i polpriamka BA a polpriamka k nej opačná. Bod A sa nazýva **začiatok** polpriamky AB.

Zápis: $\mapsto AB$ čítame: polpriamka AB.
Zápis: $\leftarrow\!\!\mid AB$ čítame: polpriamka opačná k polpriamke AB.
Zápis: $C \in \mapsto AB$ čítame: bod C patrí polpriamke AB.

Priamka AB je zjednotenie polpriamok AB, BA.
Zápis: $\leftrightarrow AB$ čítame: priamka AB.

Body A, B, C **ležia na priamke.** Možno zostrojiť priamku, ktorej patria všetky tri body.

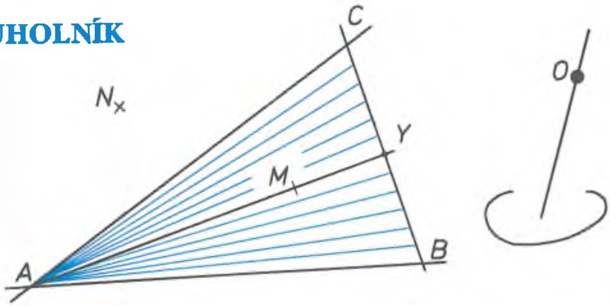
Úloha 5

Pozrite sa na predchádzajúci obrázok. Zapíšte množinu všetkých vyznačených bodov, ktoré patria polpriamke AB.

Zapíšte množinu všetkých vyznačených bodov, ktoré patria polpriamke BA.

Zapíšte množinu všetkých vyznačených bodov, ktoré nepatria priamke AB.

TROJUHOLNÍK



Body A, B, C neležia na priamke. Bod Y patrí úsečke BC.

Trojuholník ABC je množina všetkých bodov všetkých úsečiek AY.

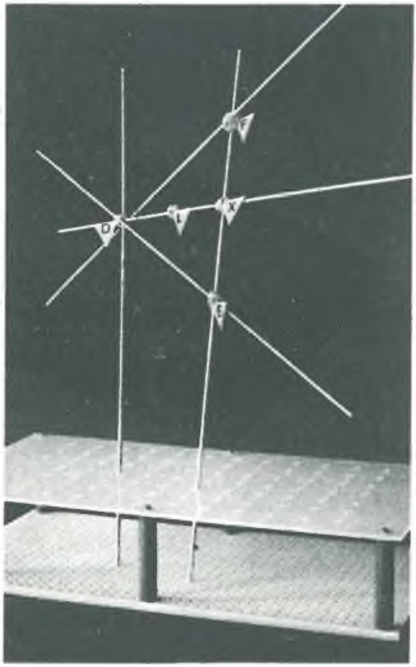
Zápis ABC čítame: trojuholník ABC sa označuje aj $\triangle ABC$.

$M \in \triangle ABC$ čítame: bod M patrí trojuholníku ABC.

$O \notin \triangle ABC$ čítame: bod O nepatrí trojuholníku ABC.

Body A, B, C sú **vrcholy** trojuholníka ABC.

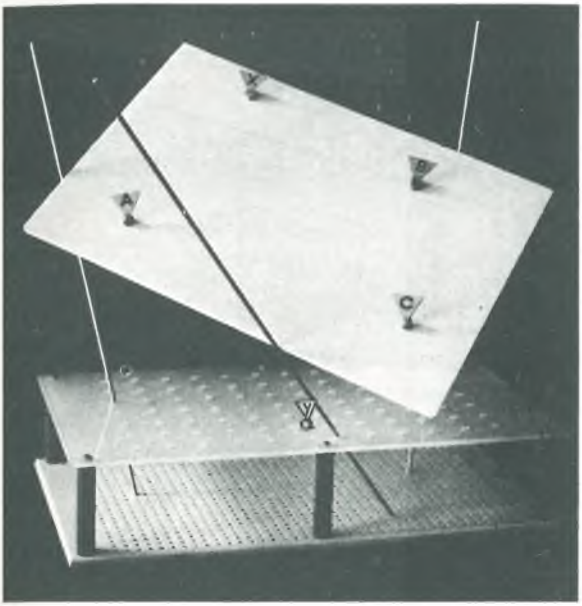
Úsečky AB, AC, BC sú **strany** trojuholníka ABC.



Úloha 6

Vyznačte body A, B, C, D tak, aby sa dal zostrojiť trojuholník, ktorému body A, B, C, D patria.
Vymodelujte body K, L, M, N tak, že nemožno zostrojiť trojuholník, ktorému body K, L, M, N patria.

ROVINA

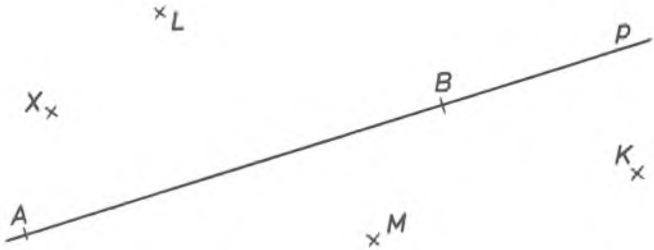


Rovina ABC je určená tromi bodmi A, B, C, ktoré neležia v priamke.

Zápis: $\leftrightarrow ABC$ čítame: rovina ABC.
Možno vyznačiť trojuholník, ktorému body A, B, C, X patria, bod X patrí rovine ABC. Píšeme $X \in \leftrightarrow ABC$.
Nemožno vyznačiť trojuholník, ktorému body A, B, C, Y patria; bod Y nepatrí rovine ABC.
Roviny niekedy označujeme písmenami gréckej abecedy α, β a pod. Hovoríme potom rovina alfa, rovina beta.

Úloha 7

Znázornite rovinu KLM. Vyznačte priamku p, ktorá je podmnožinou tejto roviny.
Rovinu KLM môžeme označiť aj pomocou priamky p a niektorého bodu roviny KLM, ktorý nepatrí priamke p, napr. L. Píšeme $\leftrightarrow pL$.
Tromi bodmi A, B, L, ktoré neležia na priamke, je určená **polrovina** ABL i **polrovina k nej opačná.**



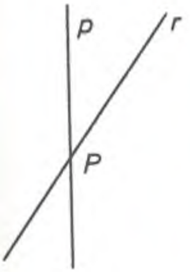
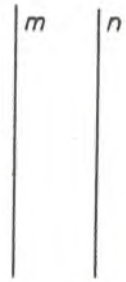
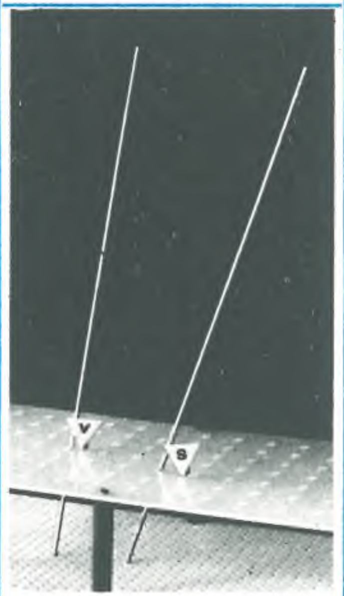
Polrovinu ABL alebo aj pL označíme $\mapsto ABL$ alebo $\mapsto pL$.
Priamka p je hraničnou priamkou polroviny pL aj polroviny pM.
Medzi bodmi M, L leží bod hraničnej priamky polrovín pL a pM.
Polroviny pL a pM sú navzájom opačné polroviny.
Zápis: $\leftarrow ABL$ čítame: polrovina opačná k polrovine ABL.

Úloha 8

Vymenujte množinu všetkých vyznačených bodov, ktoré patria polrovine pX.
Vymenujte množinu všetkých vyznačených bodov, ktoré nepatria polrovine pX.

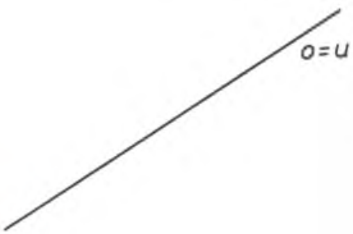
VZÁJOMNÁ POLOHA DVOCH PRIAMOK

Dve rôzne priamky môžu mať buď prázdny prienik, alebo je ich prienikom množina, ktorej patrí jediný bod. Takýto bod sa nazýva **priesečník.**

$p \cap r = \{P\}$	$n \cap m = \{\ \}$	$s \cap v = \{\ \}$
		
Rôznobežky p, r	Rovnobežky $m \parallel n$ m, n sú podmnožiny tej istej roviny	Mimobežky s, v nie sú podmnožiny tej istej roviny

Aj priamky, ktoré splývajú, považujeme za rovnobežné.

$o = u$ $\qquad$ $o \cap u = u$



Úloha 9

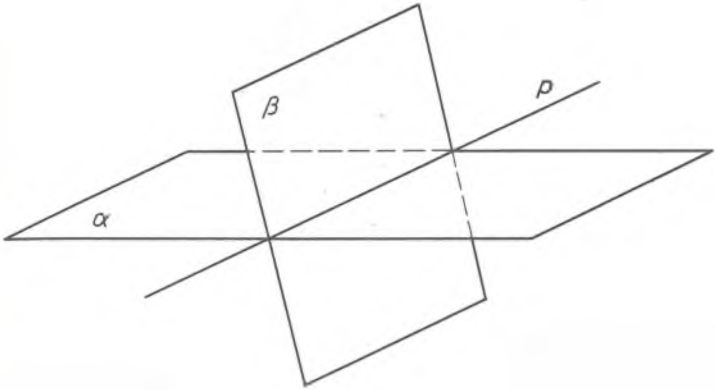
Čo môžeme na obrázku geometricky zobraziť rovnobežnými priamkami alebo úsečkami?
Čo môžeme vo vašom okolí geometricky zobraziť rovnobežnými priamkami?

Úloha 10

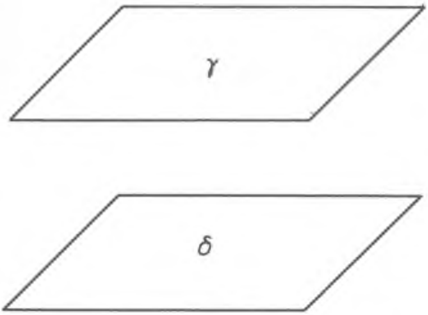
Kto konštruuje pri svojej práci rovnobežné priamky?

VZÁJOMNÁ POLOHA DVOCH ROVÍN

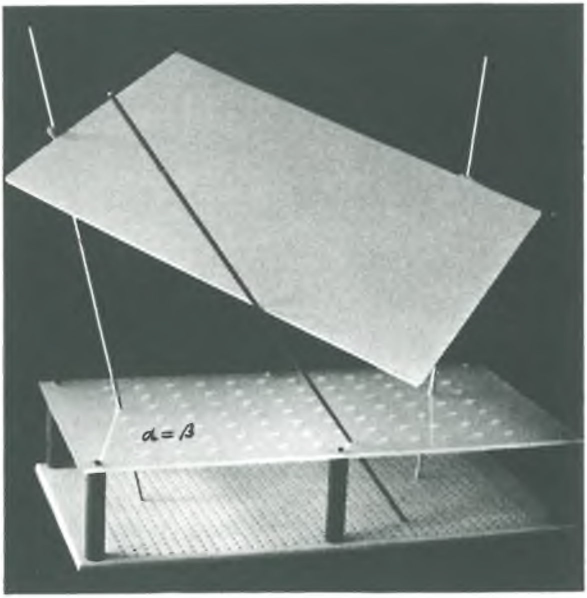
Dve rôzne roviny môžu mať alebo prázdny prienik, alebo ich prienikom je priamka.



$\alpha \cap \beta = p$
Rôznobežné roviny



$\gamma \cap \delta = \{ \}$
Rovnobežné roviny, $\gamma \parallel \delta$



Aj roviny, ktoré splynú, považujeme za rovnobežné.

$\alpha \cap \beta = \alpha$

$\alpha = \beta$, $\alpha \parallel \beta$

Úloha 11

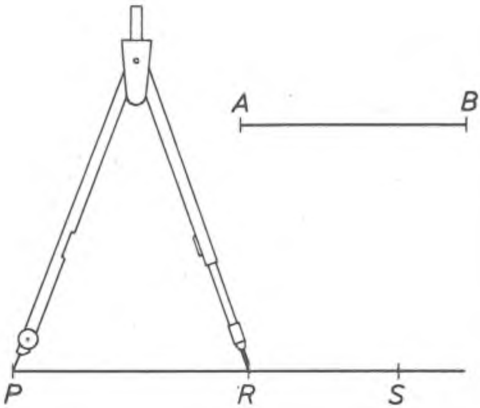
Čo možno vo vašom okolí geometricky zobraziť rovnobežnými rovinami?

ZHODNÉ ÚSEČKY

Ak prenesieme úsečku na polpriamku PS, zostrojíme úsečku PR **zhodnú** s úsečkou AB.

$AB \cong PR$

Na našom obrázku leží bod R medzi bodmi P, S; hovoríme, že $PR < PS$ a $AB < PS$.



Cvičenie

1. Vyznačte body R, S. Zostrojte trojuholník ABC, ktorému body R, S patria.

2. Vyznačte dva rôzne body A, B. Veďte priamku p tak, aby body A, B patrili opačným polrovinám s hraničnou priamkou p. Veďte priamku m tak, aby body A, B patrili tej istej polrovine s hraničnou priamkou m.

3. Narysujte rovnobežné priamky m, n.

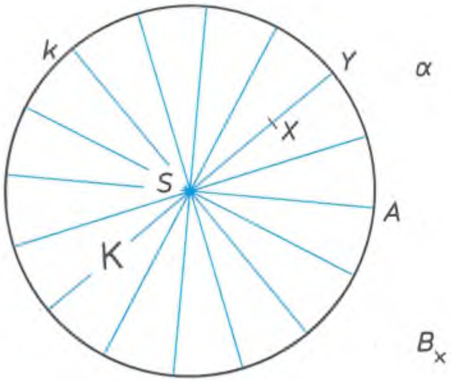
4. Narysujte priamku p a vyznačte bod A, ktorý jej nepatrí. Bodom A veďte priamku s rovnobežnú s priamkou p.

5. Narysujte úsečku KL a polpriamku UV. Preneste úsečku KL na polpriamku UV.

6. Narysujte úsečky EF a OP. Porovnajte ich.

2. Mnohouholníky

KRUH. KRUŽNICA



$SA \cong SY$
$X \in SY, \quad X \in K, \quad Y \in K$
$Y \in k$

$S \in K \qquad S \notin k$
$B \notin K \qquad B \notin k$

Každý bod **kruhu** K patrí rovine α. Úsečka SA sa nazýva **polomer** kruhu K. Bod S sa nazýva stred kruhu K. Každý bod kruhu K patrí úsečke s jedným krajným bodom S, ktorá je zhodná s úsečkou SA.

Každý bod **kružnice** k patrí rovine α. Úsečka SA sa nazýva **polomer** kružnice k. Bod S je stredom kružnice k. Ak úsečka SY je zhodná s úsečkou SA, je bod Y bodom kružnice k.

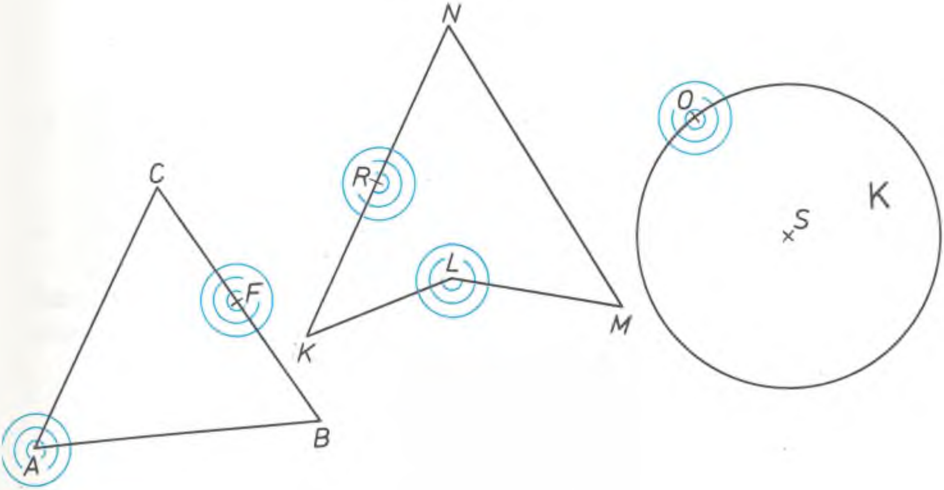
Úloha 1

Čo môžete vo vašom okolí geometricky zobraziť kružnicou alebo kruhom?

Úloha 2

Čo by napríklad nebolo, keby ľudia nepoznali kruh a nevedeli vytvoriť nič, čo má kruhový tvar?

HRANICA



Bod F je **hraničným bodom** trojuholníka ABC.
Každému jeho okoliu patrí niektorý bod trojuholníka ABC aj bod, ktorý trojuholníku ABC nepatrí.

Úloha 3

Ukážte iný hraničný bod trojuholníka ABC.
Povedzte, prečo je bod R hraničným bodom štvoruholníka $KLMN$.
Prečo je bod O hraničným bodom kruhu K?

Množina všetkých hraničných bodov sa nazýva **hranicou** geometrického útvaru. Hranicou mnohouholníka je zjednotenie všetkých jeho strán. Hranicou kruhu je kružnica.

Úloha 4

Stáli ste niekedy na hranici Československa a niektorého susedného štátu?
Videli ste hraničný kameň napr. na hranici Československa s Poľskom?
Vedeli by ste povedať, prečo je tento kameň hraničným kameňom Československa?

Úloha 5

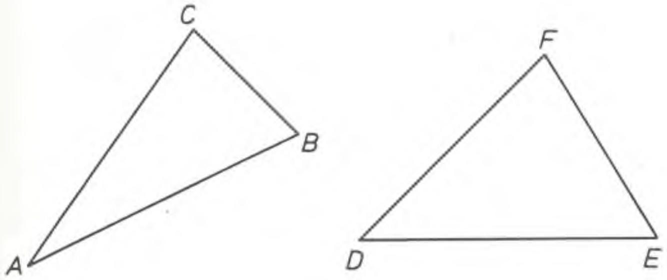
Ako je vyznačená hranica vašej záhradky?

Úloha 6

Každý obvod v meste, každý okres i každý kraj v našej republike má svoju hranicu. Pozrite na mapu mesta, okresu alebo kraja, v ktorom žijete, a ukážte hranicu vášho obvodu, okresu alebo kraja. Podľa mapy sa potom choďte pozrieť na niektoré miesto hranice obvodu, mesta alebo vášho kraja.

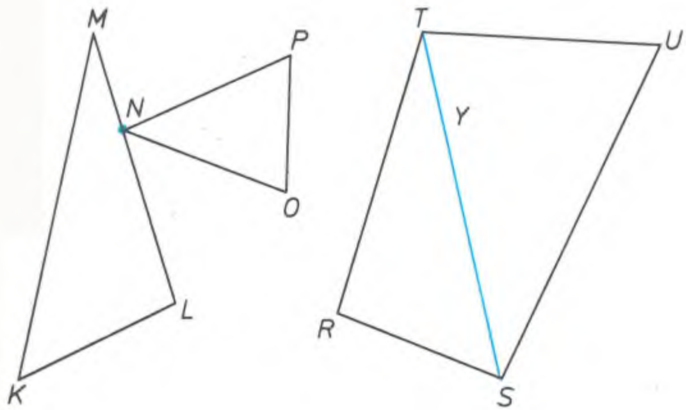
Dva geometrické útvary **sa neprekrývajú,** ak ich prienik je prázdny, alebo mu patria len hraničné body každého z útvaru a žiadne iné.

Trojuholníky sa **neprekrývajú.**



$\triangle\, ABC \cap \triangle\, DEF = \{\ \}$

Prienik trojuholníkov je prázdny.

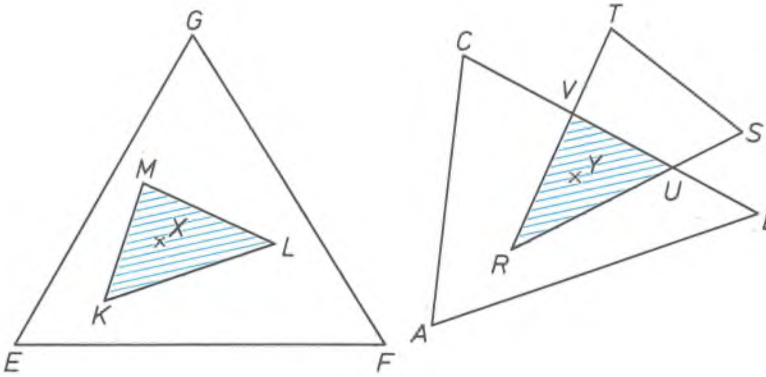


$\triangle\, KLM \cap \triangle\, NOP = \{N\}$

$\triangle\, RST \cap \triangle\, SUT = ST$

Každý bod prieniku trojuholníkov je hraničným bodom jedného aj druhého trojuholníka.

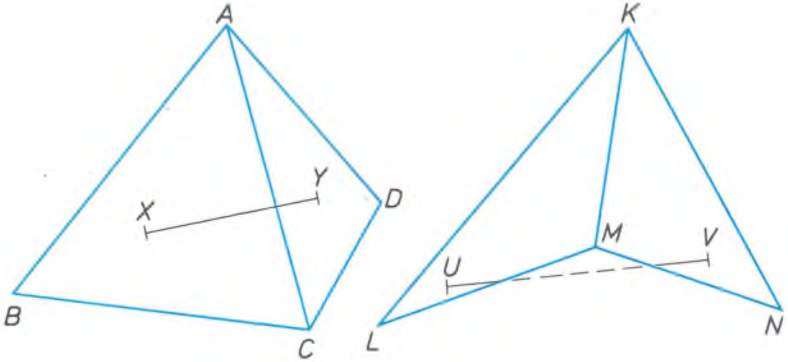
Dva geometrické útvary sa **prekrývajú;** ich prieniku patrí bod, ktorý nie je hraničným bodom aspoň jedného z týchto dvoch útvarov.



$\triangle EFG \cap \triangle KLM = \triangle KLM$ $\triangle ABC \cap \triangle RST = \triangle RUV$

Trojuholníky sa prekrývajú, ich prieniku patrí bod, napr. bod X (Y) trojuholníka, ktorý nie je hraničným bodom aspoň jedného z trojuholníkov.

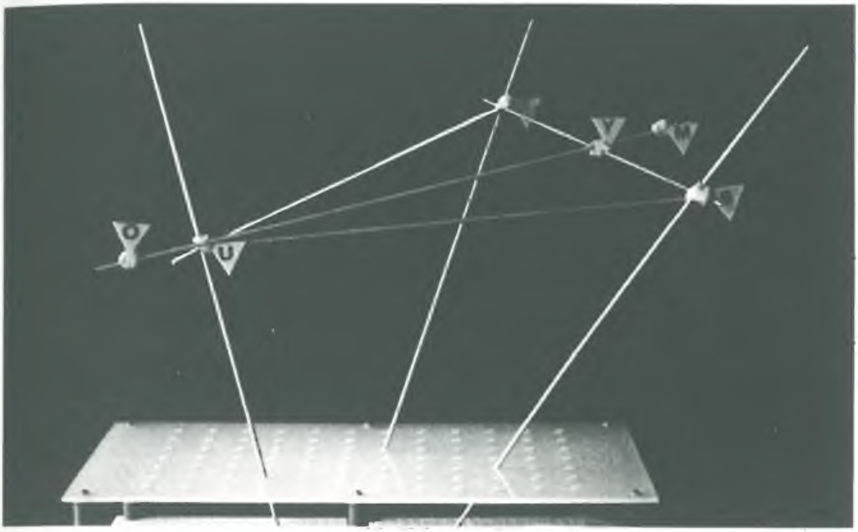
MNOHOUHOLNÍKY

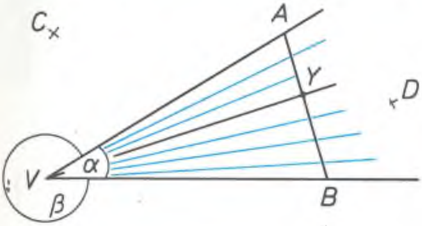


Štvoruholník $ABCD$ je zjednotením trojuholníkov ABC a ACD. Štvoruholník $KLMN$ je zjednotením trojuholníkov KLM a KMN

Štvoruholník $ABCD$ je konvexný, lebo každá úsečka s krajnými bodmi X, Y, ktoré patria štvoruholníku $ABCD$, je jeho podmnožinou. Štvoruholník $KLMN$ je nekonvexný, lebo aspoň jedna úsečka, napr. s krajnými bodmi U, V, ktoré patria štvoruholníku $KLMN$, nie je jeho podmnožinou.

UHOL



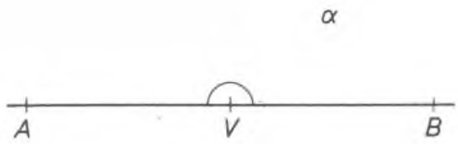


Zápisy:

∢ AVB čítame: konvexný uhol AVB
$\sphericalangle AVB = \alpha$

∝ AVB čítame: nekonvexný uhol AVB
∝ $AVB = \beta$

Body A, V, B neležia na priamke. Bod Y patrí úsečke AB.
Konvexným uhlom AVB sa nazýva množina všetkých bodov všetkých polpriamok VY.
Nekonvexným uhlom AVB sa nazýva množina všetkých bodov roviny AVB, ktoré nepatria konvexnému uhlu AVB, alebo patria jeho ramenám.



Bod V leží medzi bodmi A, B. Priamka AB leží v rovine α.
Priamym uhlom nazývame ktorúkoľvek z polrovín vyznačených priamkou AB v rovine α.

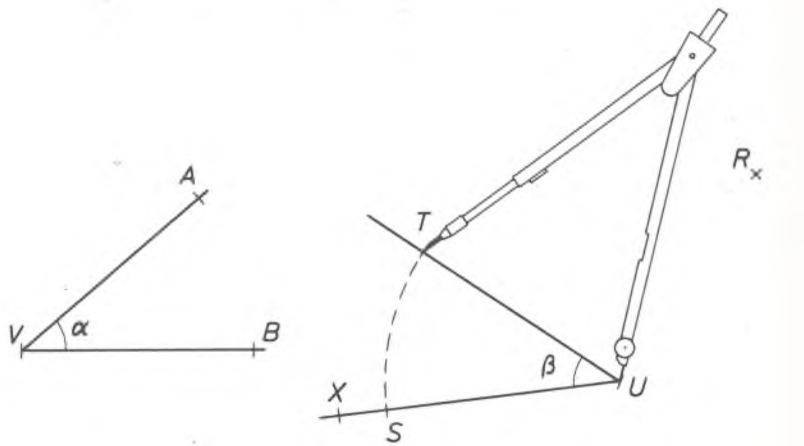
Úloha 7

Prečítajte nasledujúce zápisy a povedzte, prečo sú pravdivé (podľa obrázka a fotografie na str. 25):

$D \in \measuredangle AVB$ $\quad$ $M \in \measuredangle TUS$
$C \notin \measuredangle AVB$ $\quad$ $O \notin \measuredangle TUS$
$C \in \sphericalangle AVB$ $\quad$ $O \in \sphericalangle TUS$

ZHODNÉ UHLY

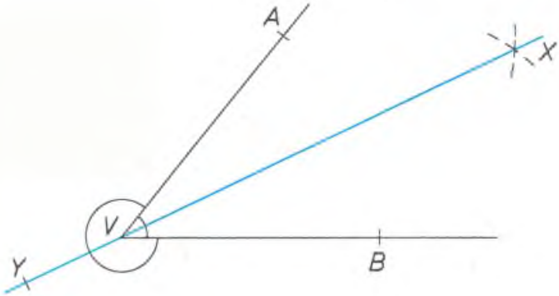
Ak prenesieme uhol α k polpriamke UX do polroviny UXR, dostaneme uhol β zhodný s uhlom α. $\beta \cong \alpha$.



$\measuredangle AVB \cong \measuredangle SUT$
$\sphericalangle AVB \cong \sphericalangle SUT$ $\quad$ $VA \cong US$ $\quad$ $VB \cong UT$ $\quad$ $AB \cong ST$

OS UHLA

Priamka VX sa nazýva **osou** uhla AVB práve vtedy, keď sú konvexné uhly AVX a BVX zhodné.



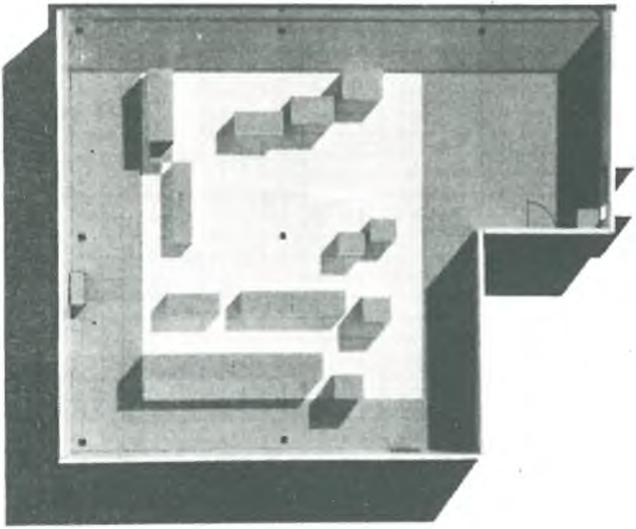
$\sphericalangle AVX \cong \sphericalangle BVX$
$\sphericalangle AVY \cong \sphericalangle BVY$
Priamka VX je osou $\sphericalangle AVB$.
Priamka VX je osou $\measuredangle AVB$.

PRAVÝ UHOL, KOLMÉ PRIAMKY

$\sphericalangle SUT$ je priamy.
Priamka UX je osou priameho uhla SUT.
Uhol TUX je **pravý.**
Priamky ST a UX sú **na seba kolmé.**
Píšeme: $\leftrightarrow ST \perp \leftrightarrow XU$

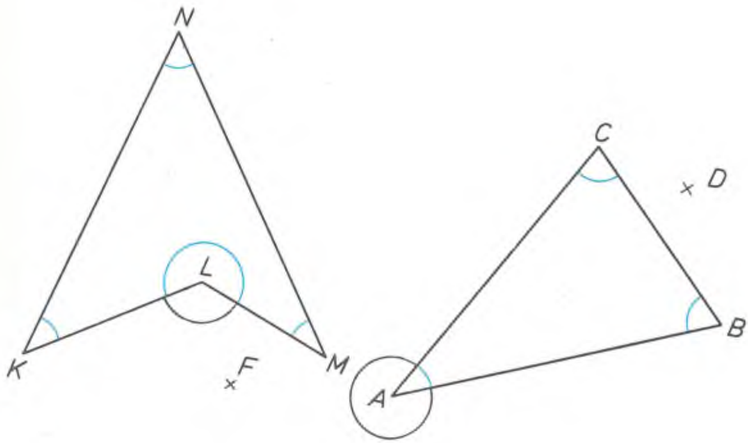
Úloha 8

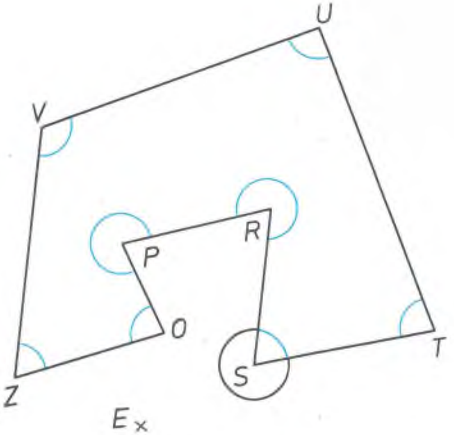
Pozrite sa okolo seba a povedzte, kde vidíte pravé uhly. Kto pri svojej práci zostrojuje pravé uhly?



Videli ste niekedy, ako sa vytyčujú základy nového domu?

VNÚTORNÝ UHOL MNOHOUHOLNÍKA





Na obrázku sú farebnými oblúčikmi vyznačené vnútorné uhly mnohouholníkov.

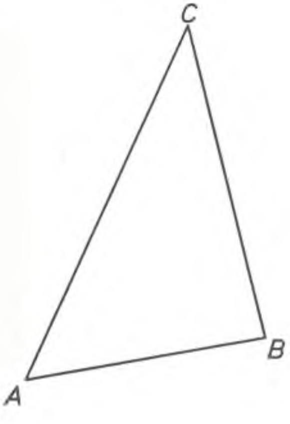
Úloha 9

Prečítajte nasledujúce zápisy o vnútorných uhloch mnohouholníkov *KLMN*, *ABC* a *OPRSTUVZ*. Rozhodnite, či sú tieto zápisy pravdivé.

$F \in \sphericalangle MNK$	$D \in \sphericalangle CAB$	$E \in \sphericalangle RPO$
$N \in \sphericalangle MLK$	$ABC \subset \sphericalangle CAB$	$S \in \sphericalangle RPO$

TROJUHOLNÍKOVÁ NEROVNOSŤ

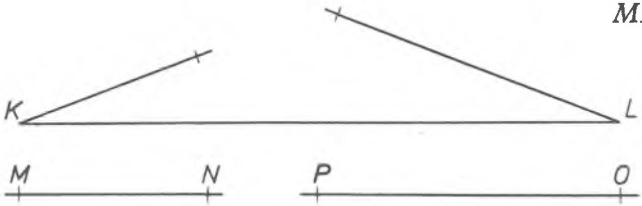
Grafický súčet každých dvoch strán trojuholníka je väčší ako tretia strana.



$$AB + BC > AC$$
$$BC + CA > AB$$
$$AB + AC > BC$$

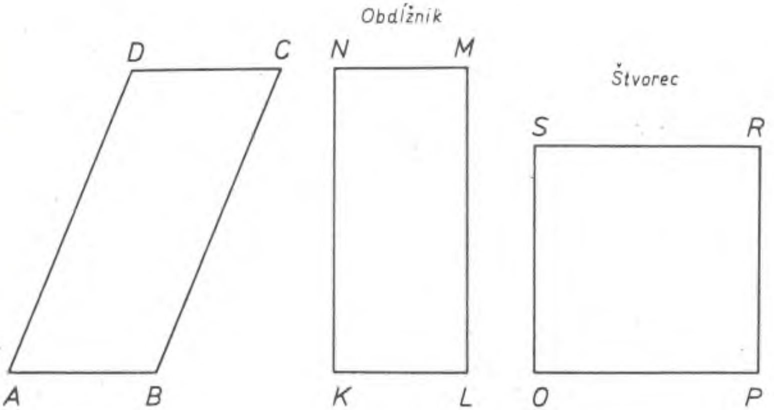
Ak je grafický súčet aspoň jednej dvojice úsečiek (napr. MN a OP) menší ako tretia úsečka (KL), nemožno zostrojiť trojuholník, ktorého strany by boli zhodné s týmito úsečkami (MN, OP, KL).

$$MN + PO < KL$$



ROVNOBEŽNÍK

Na obrázku sú narysované štvoruholníky. Každé dve ich protiľahlé strany sú rovnobežné. Takéto štvoruholníky sa nazývajú **rovnobežníky.**



$AB \parallel CD$	$KL \parallel MN$	$OS \parallel PR$
$AD \parallel BC$	$KN \parallel LM$	$OP \parallel SR$
	$KN \perp KL$	$OS \perp OP$
	$KL \cong KN$	$OS \cong OP$

Úloha 10

Porovnajte uhlopriečky AC a BD rovnobežníka $ABCD$. Porovnajte uhlopriečky obdĺžnika $KLMN$. Porovnajte uhlopriečky obdĺžnika, ktorý predstavuje list papiera vo vašom zošite. Porovnajte uhlopriečky štvorca $OPRS$.

Úloha 11

Porovnajte vnútorné uhly štvorca a obdĺžnika.

Cvičenie

1. Narysujte úsečku AB a bod S. Narysujte kružnicu so stredom S a polomerom zhodným s úsečkou AB.

2. Na modeli kruhu vymodelujte bod A, ktorý patrí kruhu a nepatrí kružnici, ktorá je jeho hranicou. Vymodelujte bod B, ktorý nepatrí kruhu.

3. Narysujte dva geometrické útvary, ktoré sa prekrývajú, a dva geometrické útvary, ktoré sa neprekrývajú.

4. Narysujte konvexný mnohouholník. Narysujte nekonvexný mnohouholník.

5. Narysujte, vymodelujte konvexný uhol AVB. Vyznačte bod nekonvexného uhla AVB.

6. Narysujte, vymodelujte priamy uhol NOP.

7. Zostrojte konvexný uhol α. Zostrojte jeho os.

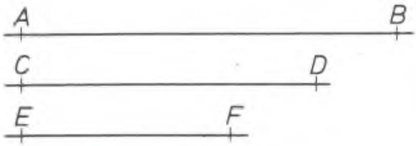
8. Zostrojte priamy uhol β. Zostrojte jeho os.

9. Zostrojte pravý uhol γ.

10. Narysujte ľubovoľný mnohouholník. Vyznačte bod X, ktorý narysovanému mnohouholníku nepatrí, ale patrí niektorému jeho vnútornému uhlu.

11. Rozhodnite, či môžete zostrojiť trojuholník, ktorý by mal strany zhodné s danými úsečkami.

a)

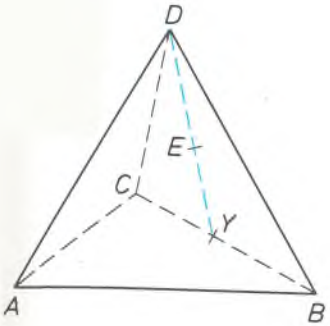


b)

12. Narysujte ľubovoľný rovnobežník. Povedzte, ako ste postupovali.
Narysujte štvorec.
Narysujte obdĺžnik.

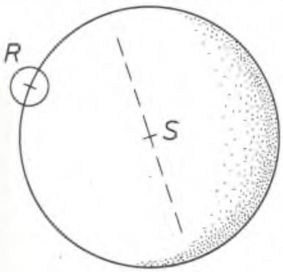
3. Teleso

HRANICA TELESA



Bod E je hraničným bodom štvorstena $ABCD$.

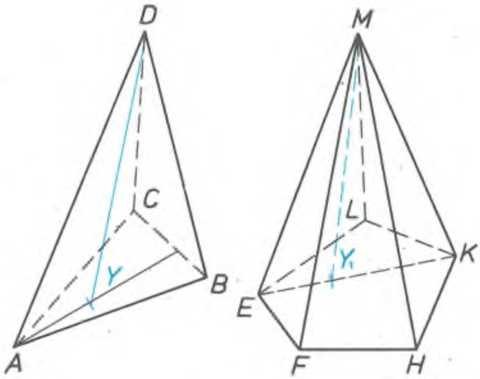
Hranica štvorstena je množina všetkých jeho hraničných bodov. Tvorí ju
$\triangle ABC \cup \triangle ABD \cup \triangle BCD \cup$
$\cup \triangle ACD$
E patrí štvorstenu $ABCD$
$E \in DY$, $Y \in \triangle BCA$



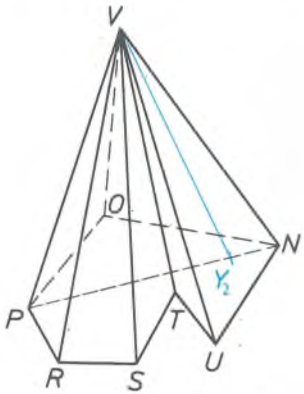
Hranicou gule je guľová plocha.

IHLANY

konvexné



nekonvexné

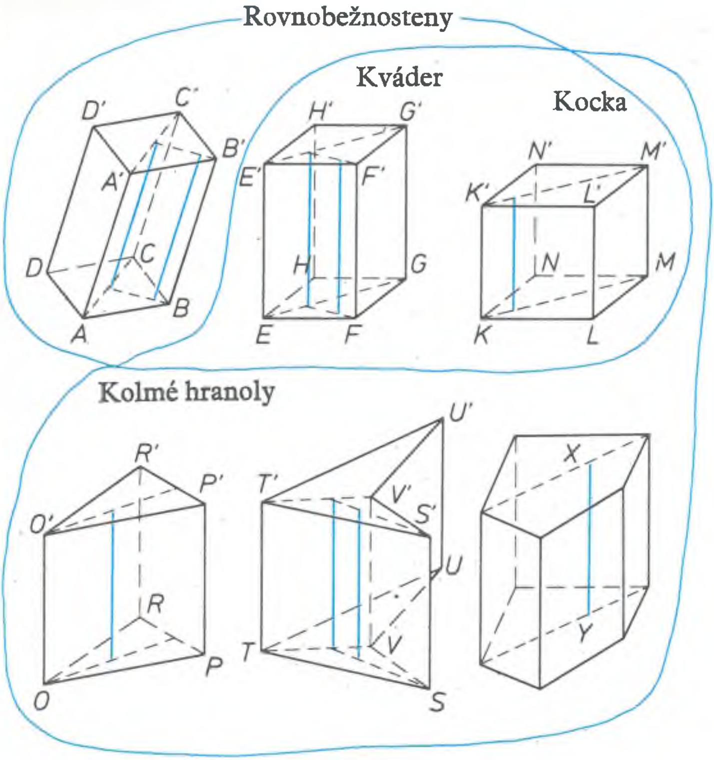


Podstavou ihlana je mnohouholník.
Hlavný vrchol ihlana nepatrí rovine podstavy.
Na obrázku je farebne vyznačená úsečka VY_2. Jej jedným krajným bodom je vrchol ihlana, druhý krajný bod patrí podstave ihlana. Každý bod ihlana patrí niektorej takejto úsečke.

Úloha 1

Vymenujte mnohouholníky, ktorých zjednotenie tvorí hranicu niektorého z ihlanov na obrázku.

HRANOLY



Každý hranol má dve **podstavy.** Podstavou hranola je mnohouholník. Podstavy hranolov, ktoré vidíte na obrázku, ležia v rovnobežných rovinách.

Bočné steny hranola sú rovnobežníky.
Hranol, ktorého všetky steny sú rovnobežníky, sa nazýva **rovnobežnosten.**

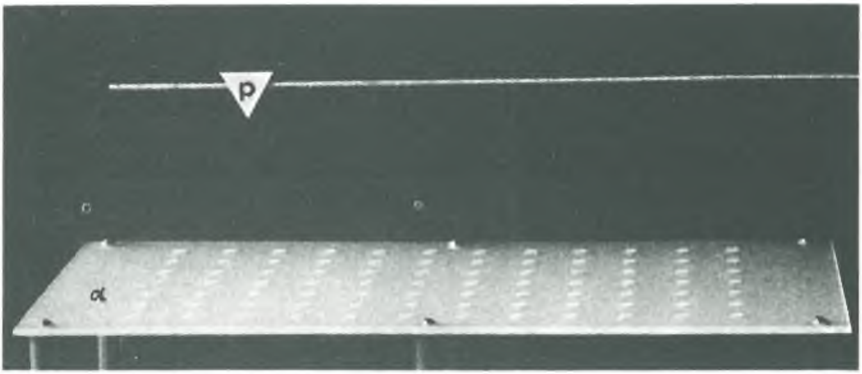
Bočné steny kolmého hranola sú obdĺžniky alebo štvorce. Na obrázkoch sú farebne vyznačené úsečky. Farebne vyznačená úsečka je rovnobežná s každou bočnou hranou hranola a jej krajné body patria podstavám hranola. Každý bod hranola patrí niektorej takejto úsečke.

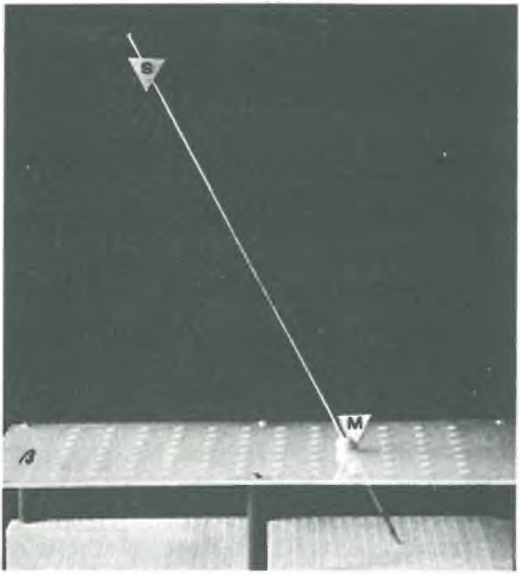
Úloha 2

Čo je hranicou hranolov na obrázku? Vymenujte mnohouholníky, ktorých zjednotenie tvorí hranicu niektorého hranola na obrázku.

VZÁJOMNÁ POLOHA PRIAMKY A ROVINY

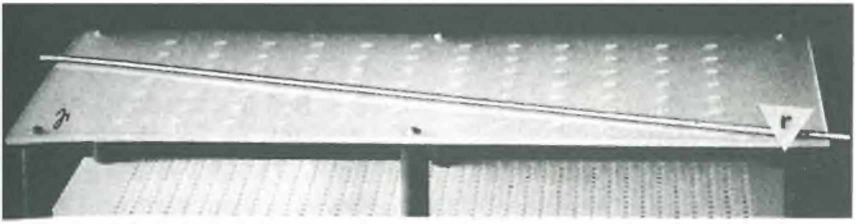
Prienik priamky a roviny môže byť prázdny alebo neprázdny.





$\alpha \cap p = \{\ \}$
Priamka p je rovnobežná s rovinou α.

$\beta \cap s = \{M\}$
Priamka s je rôznobežná s rovinou β.

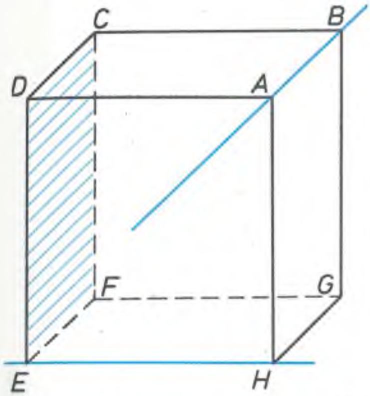


$\gamma \cap r = r$

Priamka r je podmnožinou roviny γ.

Aj priamka r je rovnobežná s rovinou γ.

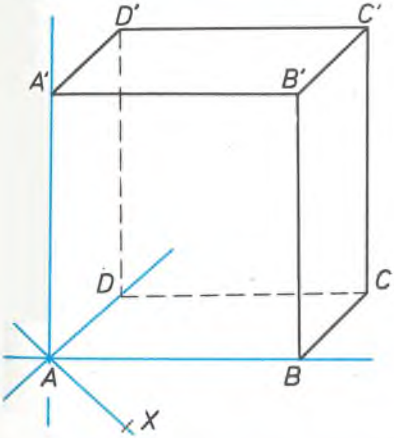
Pomocou modelu kvádra alebo kocky ľahko určíme vzájomnú polohu priamky a roviny.



Priamka EH je s rovinou DCE rôznobežná.
$\leftrightarrow DCE \cap \leftrightarrow EH = \{E\}$

Priamka AB je rovnobežná s rovinou DCE.
$\leftrightarrow AB \cap \leftrightarrow DCE = \{\ \}$

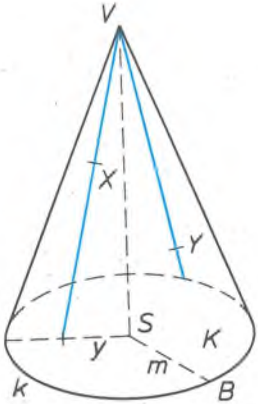
Priamka AB leží v rovine ABH.
$\leftrightarrow AB \parallel \leftrightarrow ABH$



$\leftrightarrow AA' \perp \leftrightarrow AB$ a $\leftrightarrow AA' \perp$
$\perp \leftrightarrow AD$
Priamka AA' je kolmá na rovinu ABD.

Ľubovoľná priamka AX ležiaca v rovine ABD je kolmá na priamku AA'.

ROTAČNÝ KUŽEĽ

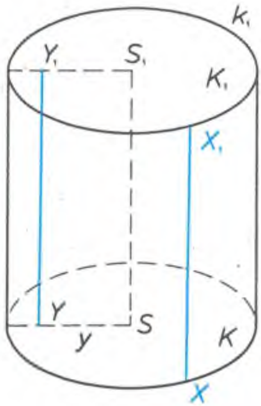


Bod V nepatrí tej istej rovine ako kruh K. Bod S je stredom kruhu K. Úsečka VS je kolmá na rovinu kruhu K. **Rotačným kužeľom** sa nazýva množina všetkých bodov všetkých úsečiek, ktorých jeden krajný bod patrí kruhu K a druhým krajným bodom je bod V.
Každý bod hranice kužeľa patrí kruhu K, alebo patrí úsečke s jedným krajným bodom V a druhým krajným bodom na kružnici k.

Úloha 3

Na modeli rotačného kužeľa ukážte jeho hranicu.

ROTAČNÝ VALEC



Kruhy K a K_1 sú zhodné a ležia v rovnobežných rovinách. Úsečka SS_1 je kolmá na rovinu kruhu K. Množina všetkých bodov všetkých úsečiek, ktorých jeden krajný bod patrí kruhu K a druhý krajný bod kruhu K_1, sa nazýva **rotačný valec.**
Každý bod hranice valca patrí kruhu K alebo kruhu K_1, alebo patrí úsečke, ktorá je kolmá na rovinu kruhu K a jej krajné body patria kružnici k a kružnici k_1. Na obrázku je jedna takáto úsečka vyznačená. Je to úsečka XX_1.

Úloha 4

Na modeli valca vymodelujte bod jeho hranice.

Cvičenie

1. Na drôtenom modeli ihlana vymodelujte bod X jeho hranice. Vymodelujte bod M ihlana, ktorý nepatrí jeho hranici.

2. Na drôtenom modeli hranola vymodelujte bod, ktorý mu patrí. Rozhodnite, či ste vymodelovali bod jeho hranice alebo bod, ktorý nie je hraničným bodom hranola.

3. Na škatuli tvaru kvádra označte vrcholy A, B, C, D, E, F, G, H. Pomocou rovín určených stenami a priamok určených hranami tohto kvádra zapíšte:
   dvojicu rovnobežných rovín;
   rovinu a priamku na ňu kolmú;
   rovinu a priamku s ňou rovnobežnú.

4. Vymodelujte štvorsten. Vyznačte hraničné body štvorstena. Vyznačte bod štvorstena, ktorý nie je jeho hraničným bodom. Vyznačte bod, ktorý nepatrí štvorstenu.

5. Pomocou drôteného modelu ihlana vymodelujte bod A, ktorý mu patrí, a vymodelujte bod S, ktorý mu nepatrí.

6. Pomocou škatule tvaru kvádra vymodelujte

   a) bod A, ktorý patrí kvádru, ale nepatrí jeho hranici,
   b) bod P, ktorý patrí hranici kvádra, ale nepatrí žiadnej jeho hrane,
   c) bod C, ktorý kvádru nepatrí.

7. Vymenujte predmety, ktoré majú tvar hranola, rotačného kužeľa, rotačného valca.

8. Vymodelujte bod, ktorý danému valcu patrí, a bod, ktorý mu nepatrí.

II/ VZDIALENOSŤ DVOCH GEOMETRICKÝCH ÚTVAROV

1. Vzdialenosť dvoch bodov, bodu od priamky, bodu od roviny

VZDIALENOSŤ DVOCH BODOV

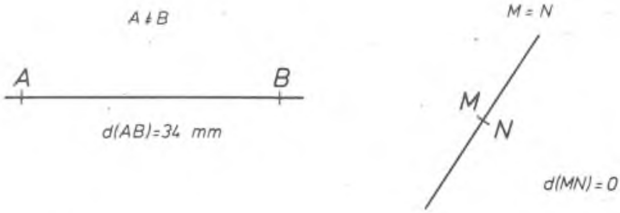
Na oznamovacej tabuli si prečítame, že vzdialenosť od rázcestia na vrchol Ještědu je po modrej značke 3 km, po červenej značke 5 km. Čo je vlastne vzdialenosť? V geometrii sa vzdialenosť bodu R od bodu J nazýva dĺžka úsečky RJ.
$d(RJ) = 2$ km

Pri zápise dĺžky úsečky dávame označenie úsečky do zátvorky.

Príklad 1

Určte vzdialenosť bodov A, B a bodov M, N.

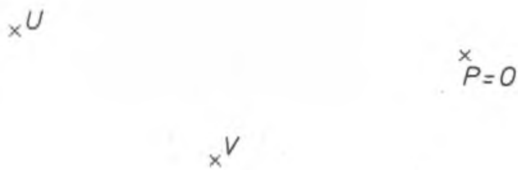
Riešenie:



Vzdialenosť bodov A, B je 34 mm. Vzdialenosť bodov M, N, ktoré splynuli ($M = N$), sa rovná 0 jednotiek dĺžky, krátko 0.

Cvičenie

1. Určte vzdialenosť bodov U, V.
   Určte vzdialenosť bodov O, P.

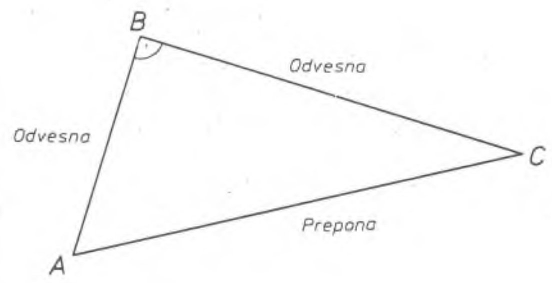


2. Na priamke p vyznačte bod M. Vyznačte všetky body priamky p, ktorých vzdialenosť od bodu M sa rovná 60 mm.

3. Vyznačte bod S. Narysujte kružnicu so stredom S a polomerom SA, $d(SA) = 45$ mm. Na kružnici vyznačte bod B. Aká je vzdialenosť bodu B od bodu S?

VZDIALENOSŤ BODU OD PRIAMKY

Pravouhlý trojuholník ABC



Platí: V každom pravouhlom trojuholníku je prepona väčšia ako ktorákoľvek z odvesien.

$$AC > AB$$
$$AC > BC$$

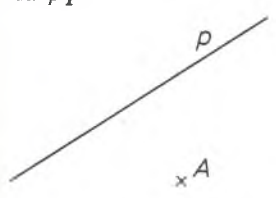
Úloha 1

Zostrojte priamky m, n; $m \perp n$. Označte ich priesečník písmenom R. Na priamke m vyznačte bod M vo vzdialenosti 8 cm od bodu R. Na priamke n vyznačte bod N vo vzdialenosti 6 cm od bodu R. Porovnajte vzdialenosť bodov M, N so vzdialenosťou bodov R, M a R, N. Svoju odpoveď zdôvodnite.

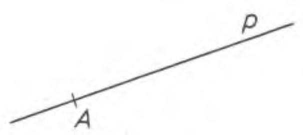
V z d i a l e n o s ť b o d u A o d p r i a m k y p

Ak uvažujeme o bode A a priamke p, môžu nastať dva prípady:

a) $A \notin p$



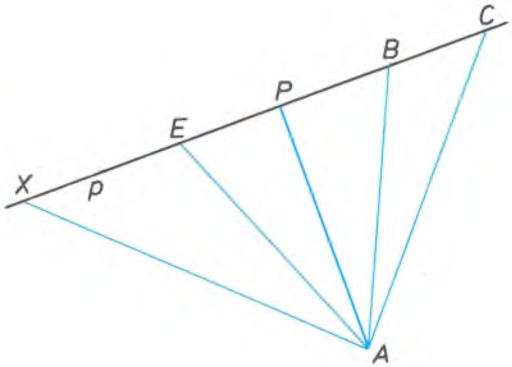
b) $A \in p$



Príklad 2

Problém (v prípade, že $A \notin p$):
Možno zostrojiť úsečku, ktorá je najmenšia zo všetkých možných úsečiek s jedným krajným bodom A a s druhým krajným bodom na priamke p?

Pokus:



Zápis pozorovania:

$AP < AX$
$AP < AE$
$AP < AB$
$AP < AC$

Domnienka:

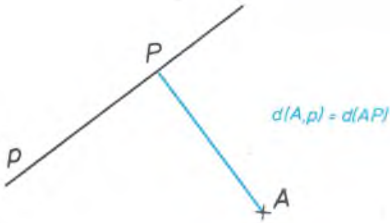
Zdá sa, že zo všetkých úsečiek s jedným krajným bodom A a s druhým krajným bodom na priamke p je najmenšou úsečkou úsečka AP. Bod P je päta kolmice vedená bodom A na priamku p.

Overenie domnienky:

Na obrázku je priamka AP kolmá na priamku p. Bod P je pätou tejto kolmice. Body A, P a každý iný bod X priamky p sú vrcholy pravouhlého trojuholníka APX. Každá úsečka AX je jeho preponou. Úsečka PA je jeho odvesnou. Preto je $AX > AP$. Úvaha je overená.

Zistili sme:

Ak $A \notin p$ a $\leftrightarrow AP \perp p$ a $P \in p$, je úsečka AP najmenšia zo všetkých úsečiek AX, kde $X \in p$.



Vzdialenosť bodu A **od priamky** p je dĺžka najmenšej úsečky zo všetkých úsečiek s jedným krajným bodom A a druhým krajným bodom na priamke p. Je to úsečka AP. Bod P je päta kolmice vedená bodom A na priamku p.

Píšeme: $d(A, p) = d(AP)$

V prípade, že bod A je bodom priamky p ($A \in p$), vzdialenosť bodu A od priamky p sa rovná nule. Píšeme: $d(A, p) = 0$.

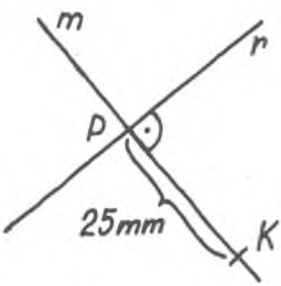
Príklad 3

Zostrojte bod K, ktorého vzdialenosť od priamky r je 25 mm.

Riešenie:

Stručný zápis: r .... daná
$d(K, r)$ .... 25 mm
bod K .... ?

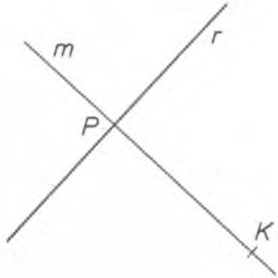
Rozbor a náčrt:



Zápis konštrukcie:

1. m; $m \perp r$
2. P; $\{P\} = m \cap r$
3. K; $K \in m$, $d(KP) = 25$ mm

Konštrukcia:

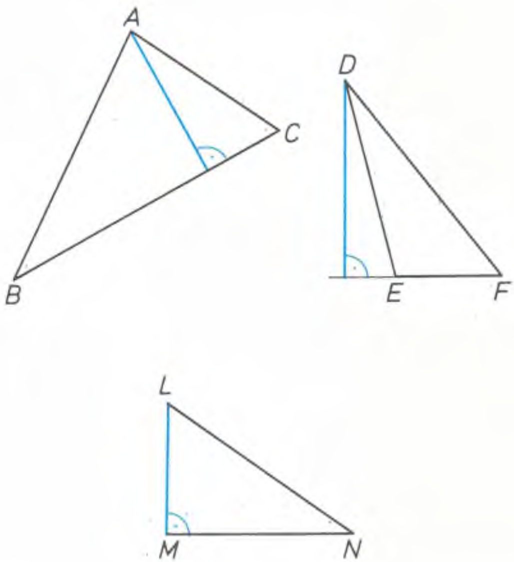


$d(K, r) = 25$ mm

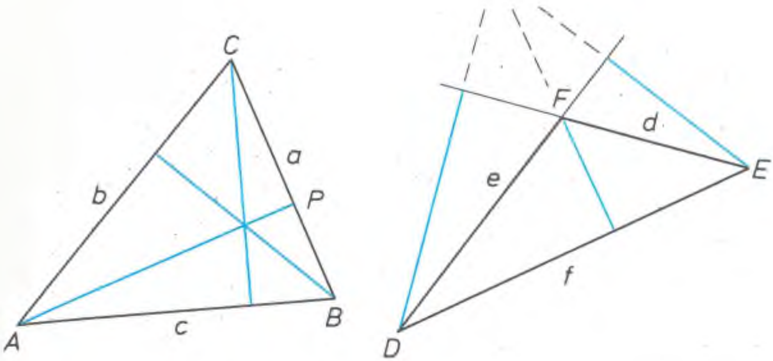
Ďalšie možnosti: Napr. úsečku dlhú 25 mm možno naniesť na opačnú polpriamku k polpriamke PK, alebo možno zostrojiť inú kolmicu na priamku r.
Konštrukciu skontrolujte.

Úloha 2

Určte vzdialenosť bodu A od priamky BC, bodu D od priamky EF a bodu L od priamky MN.



VÝŠKA TROJUHOLNÍKA



Výškou trojuholníka sa nazýva vzdialenosť vrcholu trojuholníka od priamky určenej protiľahlou stranou trojuholníka. Niekedy výškou sa rozumie aj úsečka, napr. AP.
Na obrázku sú výšky trojuholníka vyznačené farebne.
Priamka určená dvoma vrcholmi trojuholníka sa zvyčajne označuje malým písmenom, ktoré zodpovedá označeniu protiľahlého vrcholu.

Na obrázku: $\leftrightarrow BC = a$, $\leftrightarrow AB = c$, $\leftrightarrow AC = b$

Výška príslušná vrcholu A sa potom označuje v_a; $v_a = d(AP)$.

Úloha 3

Odmerajte farebne vyznačené úsečky na obrázku a zapíšte výšky oboch trojuholníkov ABC a DEF.

Cvičenie

4. Narysujte priamku t a bod S

a) $S \notin t$ b) $S \in t$

Určte vzdialenosť bodu S od priamky t a zapíšte, čomu sa rovná $d(S, t)$.

5. Vymodelujte priamku AB, ktorá leží v rovine podložky, a bod C, ktorý
   a) nepatrí rovine podložky,
   b) patrí priamke AB.
   Určte vzdialenosť bodu C od priamky AB a zapíšte, čomu sa rovná.

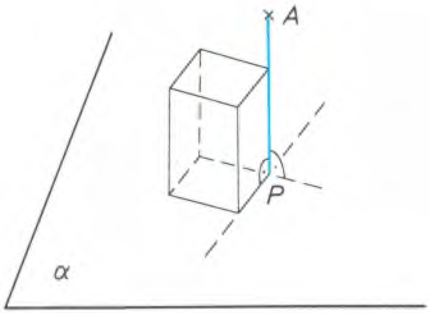
6. Narysujte priamku p. Zostrojte bod R, ktorého vzdialenosť od priamky p je 60 mm.

7. Narysujte trojuholník, označte jeho vrcholy X, Y, Z. Určte všetky výšky tohto trojuholníka a zapíšte príslušné dĺžky.

VZDIALENOSŤ BODU OD ROVINY

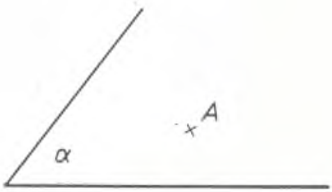
Ak uvažujeme o bode a rovine, môžu nastať dva prípady:

$A \notin \alpha$



$d(A, \alpha) = d(AP)$

$A \in \alpha$



$d(A, \alpha) = 0$

Na obrázku je farebne vyznačená úsečka AP. Úsečka je kolmá na rovinu α. Je to najkratšia úsečka zo všetkých možných úsečiek s jedným krajným bodom A a s druhým krajným bodom v rovine α.

Vzdialenosť bodu A od roviny α je dĺžka úsečky AP, ktorej krajný bod P je päta kolmice AP na rovinu α.

Píšeme: $\leftrightarrow AP \perp \alpha$, $P \in \alpha$

$$d(A, \alpha) = d(AP)$$

V prípade, že bod A je bodom roviny α ($A \in \alpha$), vzdialenosť bodu A od roviny α sa rovná nule.

$$d(A, \alpha) = 0$$

Cvičenie

8. Určte vzdialenosť rohu stola od roviny dlážky.

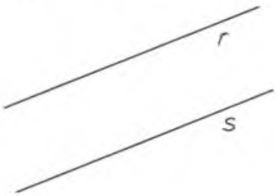
9. Vymodelujte bod, ktorého vzdialenosť od roviny prednej steny vašej triedy je 220 cm.

2. Vzdialenosť dvoch rovnobežných priamok, dvoch rovnobežných rovín

VZDIALENOSŤ DVOCH ROVNOBEŽIEK

Ak uvažujeme o rovnobežných priamkach r, s, môžu nastať dva prípady:

a) $r \neq s$



b) $r = s$

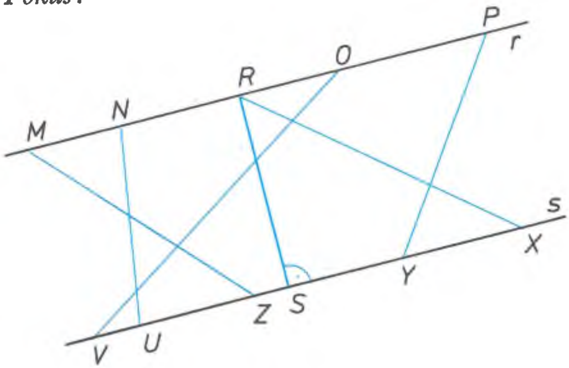
Priamky r, s splynú.

Príklad 1

Problém (v prípade, že $r \neq s$):

Môžeme zostrojiť úsečku s jedným krajným bodom na priamke *r* a s druhým krajným bodom na priamke *s*, ktorá je najmenšia zo všetkých možných úsečiek?

Pokus:



Zápis pozorovania:

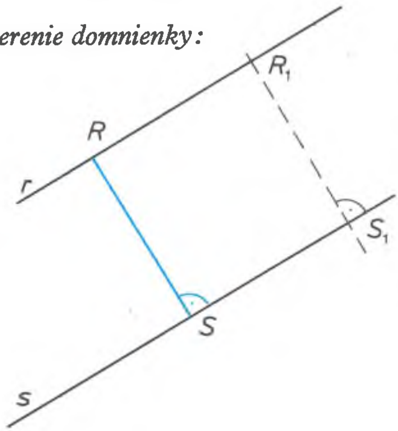
$RS < RX$
$RS < YP$
$RS < ZM$
$RS < UN$
$RS < VO$

Domnienka:

Zdá sa, že najmenšou úsečkou s jedným krajným bodom na priamke *r* a druhým krajným bodom na priamke *s* je úsečka vyznačená priesečníkmi týchto priamok s priamkou na ňu kolmou.

$R \in r,\ S \in s \quad \leftrightarrow RS \perp r$

Overenie domnienky:



Štvoruholník RSS_1R_1 je obdĺžnik alebo štvorec.

Platí: $RS \cong R_1S_1$

Nezáleží na tom, kde priamku *RS* vyznačíme.

Najmenšia zo všetkých úsečiek s jedným krajným bodom na priamke s a s druhým krajným bodom na priamke r je úsečka SR. Je najmenšia aj zo všetkých úsečiek s jedným krajným bodom R na priamke r a s druhým krajným bodom S na priamke s. Zo všetkých možných úsečiek s jedným krajným bodom na priamke r a druhým na priamke s je úsečka RS najmenšia. **Vzdialenosť dvoch rovnobežiek** r, s je dĺžka úsečky, ktorú rovnobežky vyznačujú na priamke na ňu kolmej.

Píšeme: $r \parallel s$, $R \in r$, $S \in s$, $\leftrightarrow RS \perp s$

$d(r, s) = d(RS)$, $d(r, s) = 32$ cm

V prípade, že $r = s$, vzdialenosť rovnobežiek r, s sa rovná nule.

$$d(r, s) = 0$$

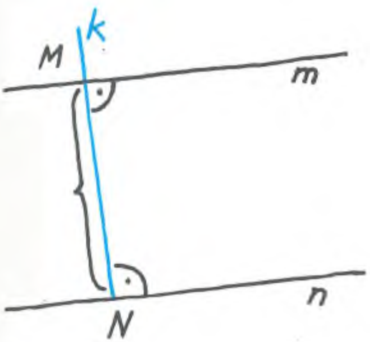
Príklad 2

Zostrojte priamku n, ktorá je rovnobežná s priamkou m, tak, aby vzdialenosť rovnobežiek n, m sa rovnala 30 mm.

Riešenie:

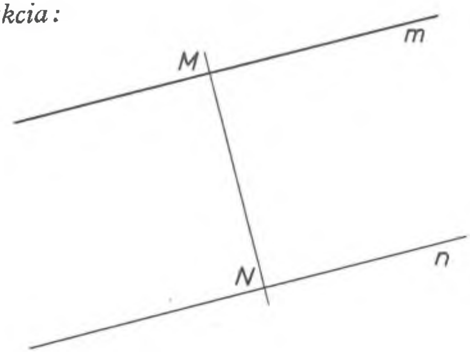
Stručný zápis: m . . . . daná
$d(m, n) = 30$ mm
$m \parallel n$
n . . . . ?

Rozbor a náčrt:



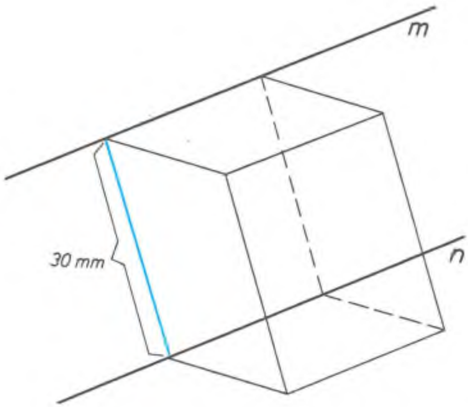
Zápis konštrukcie:
1. k; $k \perp m$
2. M; $k \cap m = \{M\}$
3. N; $N \in k$, $d(MN) = 30$ mm
4. n; $n \parallel m$, $N \in n$

Konštrukcia:



$d(m, n) = 30$ mm

Iná možnosť: Napr. úsečka dĺžky 30 mm sa nanesie na opačnú polpriamku k polpriamke MN. Rovnobežku s priamkou m vo vzdialenosti 30 mm môžeme vymodelovať aj pomocou kvádra.



Cvičenie

1. Narysujte rovnobežky a, b. Určte ich vzdialenosť.

2. Narysujte rovnobežné priamky m, n tak, aby ich vzdialenosť bola
a) 55 mm, b) 0 mm.

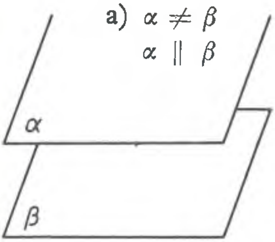
3. 

Kto pri svojej práci modeluje rovnobežné priamky v danej vzdialenosti?

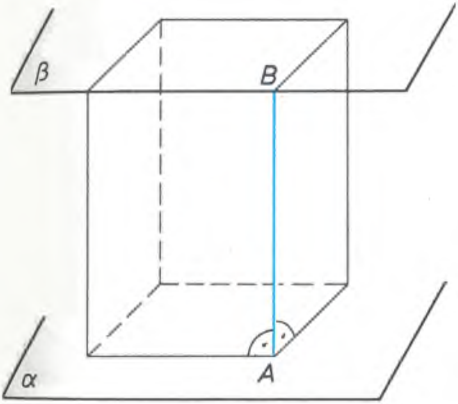
VZDIALENOSŤ DVOCH ROVNOBEŽNÝCH ROVÍN

Ak hovoríme o rovnobežných rovinách α a β, môžu nastať dva prípady:

a) $\alpha \neq \beta$
$\alpha \parallel \beta$



b) $\alpha = \beta$
$\alpha \parallel \beta$



Roviny α a β sú rôzne, $\alpha \neq \beta$. Sú určené napr. dvoma protiľahlými stenami kvádra, $\alpha \parallel \beta$.
Na obrázku je farebne vyznačená úsečka AB. Je kolmá na rovinu α i β. Je to najkratšia úsečka zo všetkých možných úsečiek s jedným krajným bodom v rovine α a s druhým krajným bodom v rovine β.

Vzdialenosť dvoch rovnobežných rovín α **a** β $(\alpha \neq \beta)$ je dĺžka úsečky, ktorú rovnobežné roviny vyznačujú na priamke na ne kolmej.

Píšeme: $\alpha \parallel \beta$, $A \in \alpha$, $B \in \beta$, $\leftrightarrow AB \perp \alpha$

$d(\alpha, \beta) = d(AB)$

V prípade, že $\alpha = \beta$, $d(\alpha, \beta) = 0$.

Cvičenie

4. Ako určíte vzdialenosť rovín, ktoré sú určené protiľahlými stenami kocky?

5. Naznačte pohybom ruky rovinu rovnobežnú s rovinou hornej dosky vašej lavice, ak sa vzdialenosť týchto rovín rovná nule.

6. Kto pri svojej práci modeluje rovnobežné roviny v danej vzdialenosti?

SÚHRNNÉ CVIČENIA

1. Narysujte priamku m. Vyznačte na nej bod M. Zostrojte bod A, ktorého vzdialenosť od priamky m sa rovná jeho vzdialenosti od bodu M, ktorá meria 40 mm.

m . . . . daná
$M \in m$
$d(A, m) = d(AM) = 40$ mm
A . . . . ?

2. Narysujte priamku p. Zostrojte bod T vo vzdialenosti 60 mm od priamky p.
Na priamke p vyznačte bod R, ktorého vzdialenosť od bodu T je 70 mm.

Priamka p . . . . . daná
$d(p, T) = 60$ mm
T . . . . ?

$R \in p$
$d(RT) = 70$ mm
R . . . . ?

3. Narysujte priamku a, vyznačte bod R, ktorý priamke a nepatrí. Určte vzdialenosť bodu R od priamky a.
V polrovine aR vyznačte bod S, ktorého vzdialenosť od priamky a sa rovná vzdialenosti bodu R od priamky a.
V polrovine opačnej k polrovine aR vyznačte bod T, ktorého vzdialenosť od priamky a sa rovná vzdialenosti bodu R od priamky a.

4. Určte vzdialenosť rovnobežných priamok vymodelovaných protiľahlými hranami vašej učebnice.

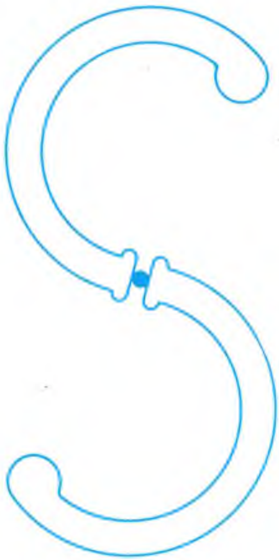
5. Narysujte rovnobežné priamky m, n, ktorých vzdialenosť je 5 cm. Na priamke m vyznačte bod A. Na priamke n vyznačte bod B, ktorého vzdialenosť od bodu A je 7 cm.

6. Vymodelujte rovnobežné roviny α, β; $d(\alpha, \beta) = 20$ cm.

III/ STREDOVÁ SÚMERNOSŤ

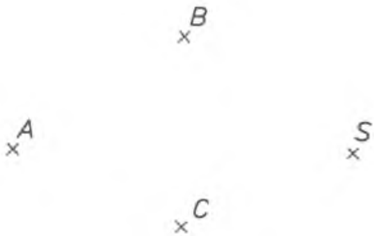
1. Množiny bodov súmerné podľa stredu

Hovoríme, že ozdobné písmeno S je súmerné podľa stredu, ktorý predstavuje modrá bodka.

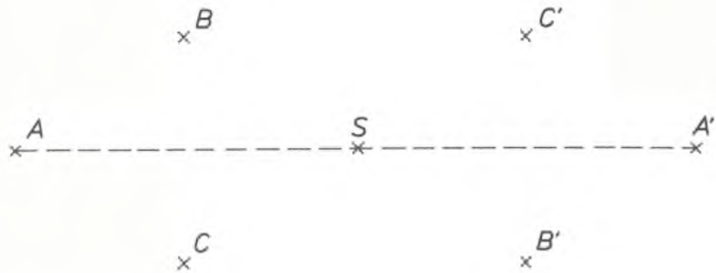


OBRAZ BODU, ÚSEČKY, PRIAMKY V SÚMERNOSTI PODĽA STREDU

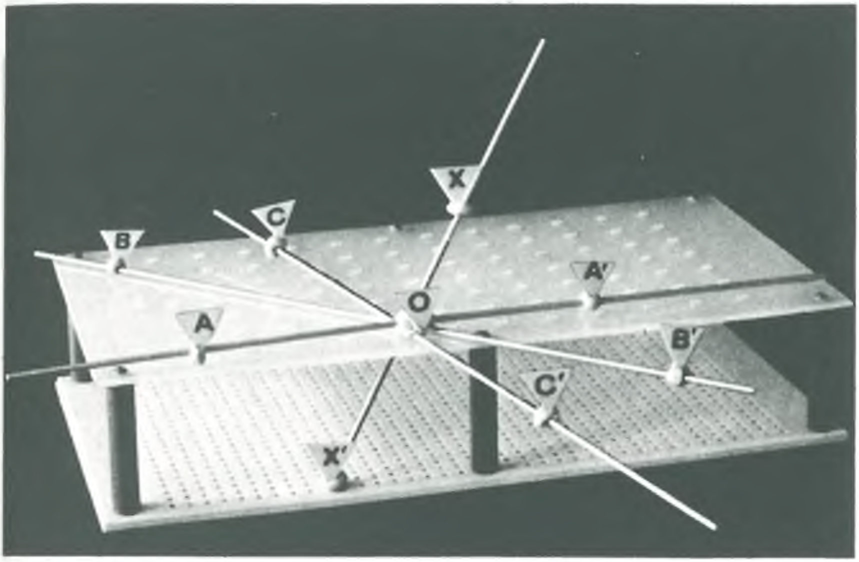
Úloha 1



Vyznačte si na papieri body A, B, C, S tak ako na obrázku. Priložte priesvitný papier k listu zošita. Zapichnite špendlík do bodu S a vyznačte na priesvitnom papieri body A, B, C. Teraz otáčajte priesvitným papierom okolo bodu S, až na ňom vyznačený bod A sa stane bodom opačnej polpriamky k polpriamke SA ako na obrázku.



Prepichnutím vyznačte na papieri nové polohy bodov A, B, C. Tieto body označte A', B', C'. Bod S je stredom úsečky AA', úsečky BB' i úsečky CC'. Platí: $SA \cong SA'$, $SB \cong SB'$, $SC \cong SC'$. Zostrojili ste množinu bodov $\{A', B', C'\}$, ktorá je súmerná s množinou bodov $\{A, B, C\}$ podľa stredu S.



Bod O je stred súmernosti (na fotografii).

V tejto stredovej súmernosti je obrazom bodu O bod O.
Obrazom každého bodu X rôzneho od bodu O je taký bod X', že bod O je stredom úsečky XX'.

$$OX' \cong OX$$

Body X, X' sú súmerné podľa stredu O.
Množina bodov $\{A, B, C, O, X\}$ a množina všetkých ich obrazov $\{A', B', C', O, X'\}$ sú množiny bodov súmerné podľa stredu O.

Príklad 1

Zostrojte obraz úsečky AB v súmernosti podľa stredu S.

Riešenie:

Stručný zápis: úsečka AB .... daná
stred S .... daný
obraz úsečky AB .... ?

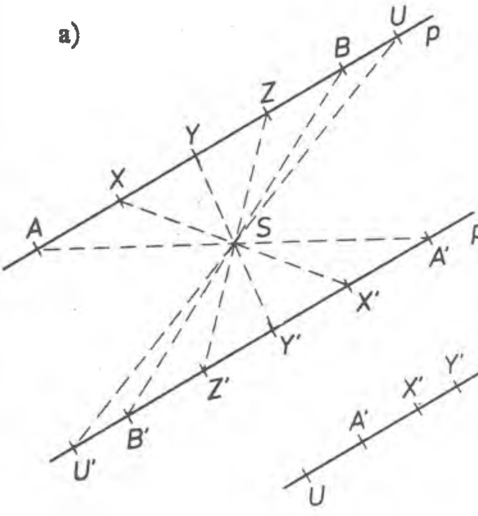
Problém: Čo je obrazom úsečky AB v súmernosti podľa stredu?

Pokus: Pri pokuse budeme rozlišovať dva prípady:

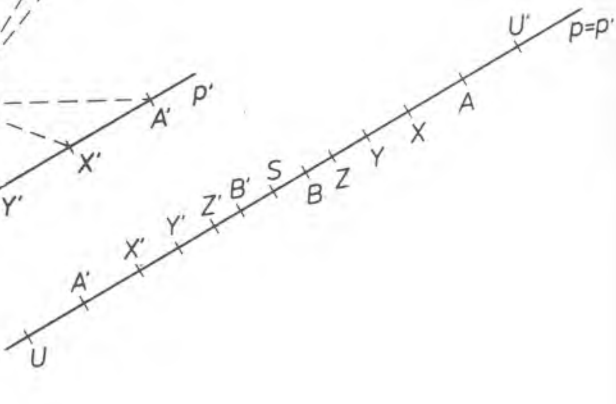
a) $S \notin \leftrightarrow AB$ b) $S \in \leftrightarrow AB$

Vyznačíme body X, Y, Z úsečky AB a zostrojíme ich obrazy v súmernosti podľa stredu S.

a)



b)



Domnienka:

Zdá sa, že obraz každého bodu úsečky AB patrí úsečke $A'B'$, ktorej krajné body sú obrazy bodov A, B, a že každý bod úsečky $A'B'$ je obrazom niektorého bodu úsečky AB.
Skúsme ešte porovnať úsečky AB a $A'B'$. Zdá sa, že $AB \cong A'B'$. Neskoršie sa naučíme overiť si túto úvahu.

Záver:

Obraz každej úsečky v súmernosti podľa stredu je úsečka zhodná so svojím vzorom.
Úsečku súmernú s danou úsečkou podľa stredu S zostrojíme tak, že zostrojíme obrazy krajných bodov danej úsečky.

Problém: Čo je obrazom polpriamky AB v súmernosti podľa stredu S?

Domnienka:

Zdá sa, že obrazom polpriamky AB v súmernosti podľa stredu S je polpriamka $A'B'$ a že každý bod polpriamky $A'B'$ je obrazom niektorého bodu polpriamky AB.
Vo vyšších ročníkoch sa naučíte odôvodniť, či táto úvaha je pravdivá.

Záver:

Obrazom každej polpriamky AB v súmernosti podľa stredu S je polpriamka $A'B'$.
Polpriamku súmernú s danou polpriamkou podľa stredu S zostrojíme tak, že zostrojíme obraz začiatku danej polpriamky a obraz niektorého ďalšieho jej bodu.

Problém: Ktorý geometrický útvar je súmerný s priamkou AB podľa stredu S?

Záver:

V súmernosti podľa stredu S je obrazom priamky AB priamka $A'B'$. Ak patrí bod S priamke AB, sú priamky AB a $A'B'$ splývajúce rovnobežky. Ak nepatrí bod S priamke AB, sú priamky AB a $A'B'$ rôzne rovnobežné priamky.

Cvičenie

1. Vyznačte na liste papiera bod S a body A, B, C, D, E ako na obrázku.

Zostrojte obrazy všetkých bodov A, B, C, D, E, S v súmernosti podľa stredu S.

2. Vymodelujte bod M. Vymodelujte body N, N', R, R' súmerné podľa stredu M.

3. Vyznačte body A, B, C asi ako na obrázku a zostrojte obraz úsečky AB v súmernosti podľa stredu C.

4. Vymodelujte úsečku EF a bod K. Zostrojte obraz úsečky EF v súmernosti podľa stredu K.

5. Vymodelujte polpriamku $U'V'$ súmernú s polpriamkou UV podľa stredu S.

a) $S \in \leftrightarrow UV$ b) $S \notin \leftrightarrow UV$

6. Vytýčte na ihrisku polpriamku RS. Vytýčte polpriamku súmernú s polpriamkou RS podľa stredu O, ktorý si zvolíte.

7. Narysujte priamku p a vyznačte bod M. a) $M \in p$, b) $M \notin p$. Zostrojte priamku p' súmernú s priamkou p podľa stredu M.

8. Vymodelujte také tri body R, S, T, že bod R leží medzi bodmi S, T. V súmernosti podľa stredu S vymodelujte obraz polpriamky RT. Čo pozorujete?

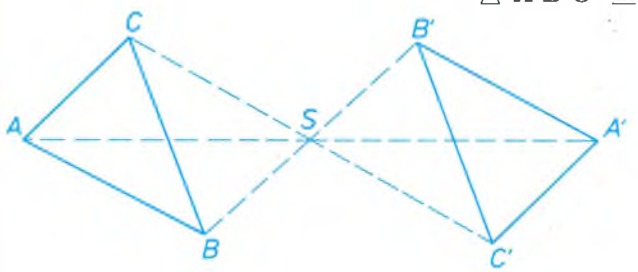
OBRAZ MNOHOUHOLNÍKA, ROVINY, KRUHU, TELESA V SÚMERNOSTI PODĽA STREDU

Príklad 2

Zostrojte obraz trojuholníka ABC v súmernosti podľa stredu S.

Riešenie:

$\triangle A'B'C' \cong \triangle ABC$



Obrazom množiny bodov $\{A, B, C\}$ je množina bodov $\{A', B', C'\}$.
Obrazom úsečky AB je úsečka $A'B'$ s ňou zhodná.
Vymenujte ďalšie strany trojuholníka ABC a ich obrazy.

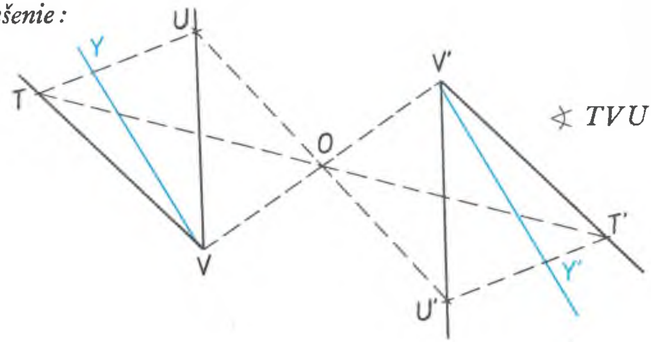
Záver:

V súmernosti podľa stredu je obrazom každého trojuholníka trojuholník s ním zhodný.

Príklad 3

Zostrojte obraz konvexného uhla $\sphericalangle\, TVU$ v súmernosti podľa stredu S.

Riešenie:



$\sphericalangle\, TVU \cong \sphericalangle\, T'V'U'$

Obrazom každej polpriamky VY, kde bod Y je bodom úsečky TU, je polpriamka $V'Y'$, kde bod Y' je bodom úsečky $T'U'$. Úsečky TU a $T'U'$ sú zhodné.

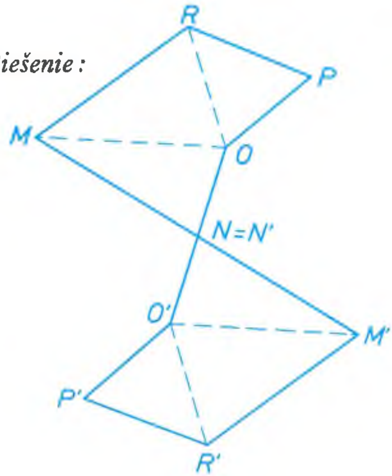
Záver:

V súmernosti podľa stredu je obrazom každého konvexného uhla uhol s ním zhodný.

Príklad 4

Zostrojte obraz päťuholníka $MNOPR$ v súmernosti podľa stredu N.

Riešenie:



Päťuholník $MNOPR$ je zjednotením neprekrývajúcich sa trojuholníkov

$MNOPR = \triangle\, MNO \cup$
$\cup\ \triangle\, OPR \cup\ \triangle\, MOR$

Obrazom každého trojuholníka je trojuholník s ním zhodný,

$M'N'O'P'R' = \triangle\, M'N'O' \cup$
$\cup\ \triangle\, O'P'R' \cup\ \triangle\, M'O'R'$

$MNOPR \cong M'N'O'P'R'$

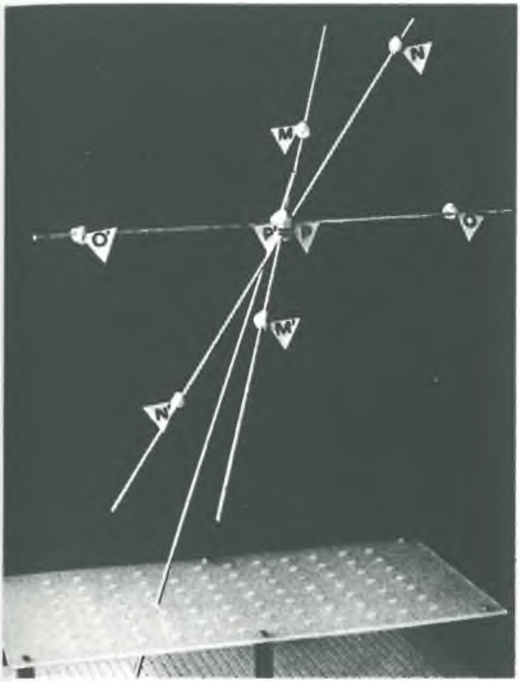
Záver:

V súmernosti podľa stredu je obrazom každého mnohouholníka mnohouholník s ním zhodný.

Príklad 5

Vymodelujte obraz roviny MNO v súmernosti podľa stredu P.

Riešenie:



Obrazom množiny bodov $\{M, N, O\}$ je množina bodov $\{M', N', O'\}$. Body M, N, O neležia na priamke, ani body M', N', O' neležia na priamke.

$\leftrightarrow MNO \parallel \leftrightarrow M'N'O'$

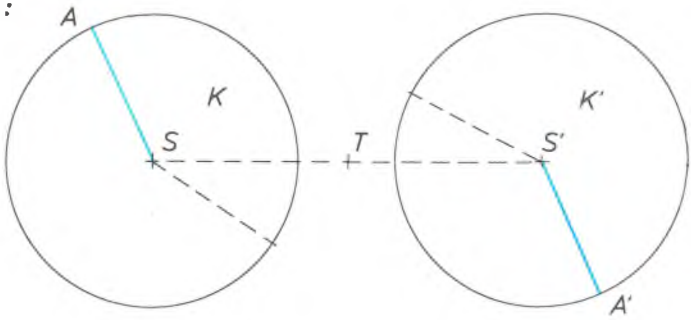
Záver:

V súmernosti podľa stredu je obrazom každej roviny rovina rovnobežná s danou rovinou. V prípade, že stred súmernosti patrí rovine, súmerné roviny sú splývajúce rovnobežné roviny.

Príklad 6

Zostrojte obraz kruhu K v súmernosti podľa stredu T.

Riešenie:



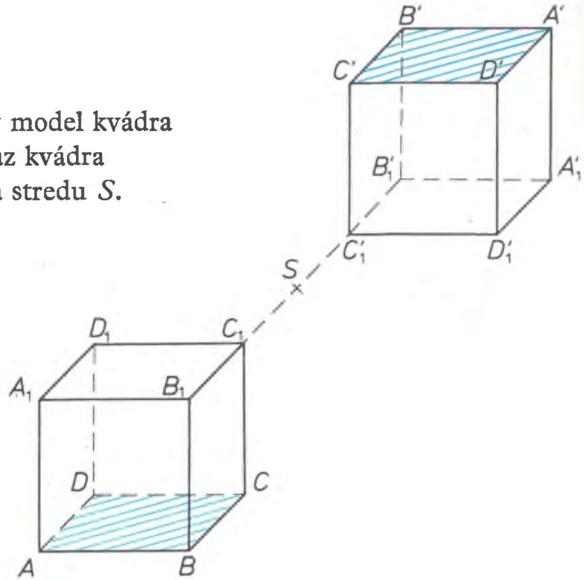
Obrazom stredu S je bod S' súmerný s bodom S.
Obrazom polomeru SA je polomer $S'A'$ zhodný s polomerom SA.

Záver:

V súmernosti podľa stredu je obrazom každého kruhu kruh zhodný s daným kruhom.

Príklad 7

Vezmite si drôtený model kvádra a vymodelujte obraz kvádra v súmernosti podľa stredu S.



Riešenie:

Obrazom každej úsečky s krajnými bodmi v protiľahlých podstavách kvádra $ABCDA_1B_1C_1D_1$ je úsečka s ňou zhodná, ktorá má krajné body v protiľahlých podstavách kvádra $A'B'C'D'A'_1B'_1C'_1D'_1$.

Záver:

V súmernosti podľa stredu je obrazom každého kvádra kváder s ním zhodný.

V súmernosti podľa stredu je obrazom každého telesa teleso, ktoré je zhodné s daným telesom.

Cvičenie

9. Narysujte ľubovoľný trojuholník KLM. Zostrojte jeho obraz podľa stredu M.

10. Narysujte ľubovoľný trojuholník OPR. Vyznačte stred S jeho strany OP. Zostrojte obraz trojuholníka OPR v súmernosti podľa stredu S.

11. Narysujte konvexný uhol AVB. Zostrojte jeho obraz v súmernosti podľa stredu V.

12. Narysujte kružnicu l so stredom O a vyznačte na nej bod A. Zostrojte kružnicu súmernú s kružnicou l podľa stredu A.

13. Vezmite kocku stavebnice a vyznačte bod M na jednej jej hrane. Umiestite rovnakú kocku stavebnice tak, aby bola obrazom prvej v súmernosti podľa stredu M.

14. Umiestite dve rukavice tak, aby boli približne súmerné podľa stredu.

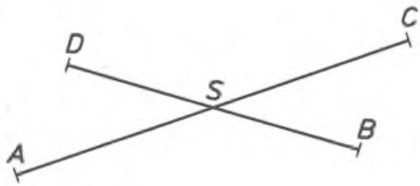
2. Stred súmernosti geometrického útvaru

Stredovú súmernosť ľudia oddávna používali pri výzdobe rôznych predmetov i v staviteľstve.

Úloha 1

Viete nájsť stred súmernosti, podľa ktorého bola vytvorená táto výzdoba v chráme sv. Víta v Prahe?

Úloha 2

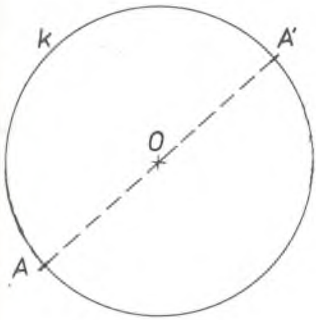


Bod S je stredom úsečky AC. Je stredom aj úsečky BD. Ktorý bod je obrazom bodu A v stredovej súmernosti podľa stredu S? Ktorý bod je obrazom bodu B v tejto súmernosti? Ktorý bod je obrazom bodu C?

V stredovej súmernosti podľa stredu S je obrazom každého bodu množiny bodov $\{A, B, C, D, S\}$ opäť niektorý bod množiny $\{A, B, C, D, S\}$ a zároveň každý bod množiny $\{A, B, C, D, S\}$ je vzorom niektorého bodu množiny $\{A, B, C, D, S\}$. Hovoríme, že množina bodov $\{A, B, C, D, S\}$ je stredove súmerná — má stred súmernosti.

Úloha 3

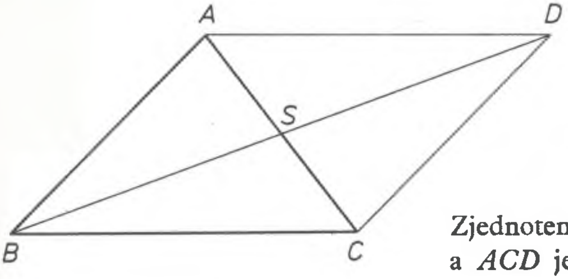
Narysujte ľubovoľnú kružnicu k so stredom O. Vyznačte bod A kružnice k. Zostrojte jeho obraz v súmernosti podľa stredu O.



Ak ste presne rysovali, patrí bod A' kružnici k. Obraz každého bodu kružnice k patrí kružnici k a každý bod kružnice k je vzorom niektorého jej bodu.
Každá kružnica a každý kruh sú súmerné podľa svojho stredu.

Úloha 4

Narysujte ľubovoľný trojuholník ABC. Zostrojte stred S úsečky AC. Zostrojte obraz trojuholníka ABC v súmernosti podľa stredu S. Obraz bodu B označte písmenom D.



Zjednotením trojuholníkov ABC a ACD je rovnobežník. Stredom súmernosti rovnobežníka je priesečník jeho uhlopriečok.

Cvičenie

1. Zostrojte obdĺžnik s dĺžkami susedných strán 55 mm a 73 mm. Zostrojte jeho stred súmernosti.

2. Zostrojte štvorec s dĺžkou strany 83 mm. Zostrojte jeho stred súmernosti.

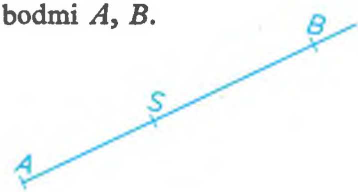
3. Kto pri svojej práci využíva poznatky o stredovej súmernosti?

SÚHRNNÉ CVIČENIA

1. Vyznačte tri body A, B, S a zostrojte obrazy bodov A, B v súmernosti podľa stredu S.
Pri riešení úlohy uvažujte o troch prípadoch:

a) A, B, S neležia na úsečke.

b) S leží medzi bodmi A, B.



c) B leží medzi bodmi A, S.

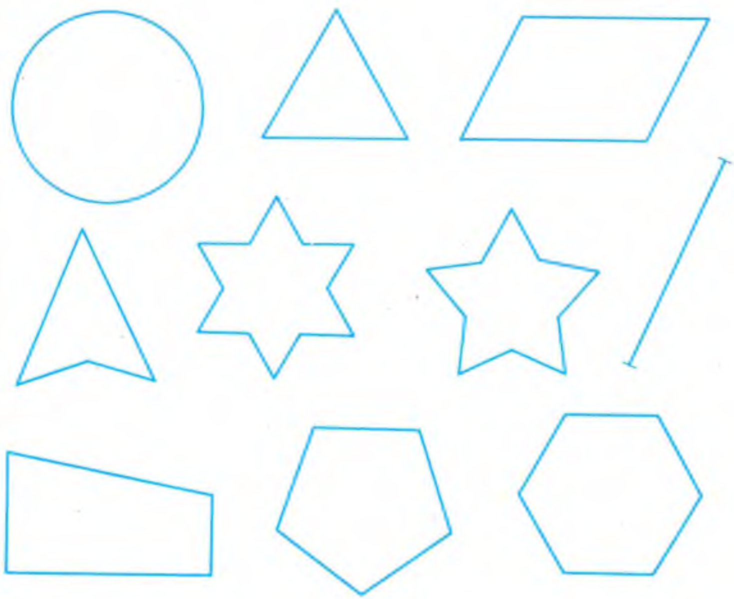
Čo viete o úsečke AB a jej obraze v súmernosti podľa stredu S?

2. Narysujte úsečku CD. Vyznačte jej stred O. Medzi bodmi C, O vyznačte bod X. Zostrojte obrazy všetkých vyznačených bodov v súmernosti podľa stredu O. Doplňte tabuľku:

Vzor	C	D	X	O	CD
Obraz					

3. Narysujte trojuholník ABC. Vyznačte bod S, ktorý mu nepatrí, a zostrojte obraz trojuholníka ABC v súmernosti podľa stredu S.

4. Rozhodnite, ktoré z nasledujúcich geometrických útvarov sú stredove súmerné.

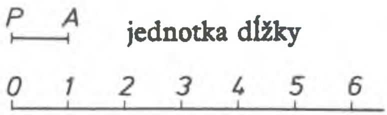


IV/ OBSAH

V geometrii a v prírodopise ste merali dĺžky, čas, hmotnosť, objem, teplotu. Poznali ste, že jednotku merania si môžete ľubovoľne zvoliť, ale že je výhodnejšie voliť jednotky merania nielen jednotne v jednej krajine, ale jednotne na celom svete.
Najprv si zopakujeme učivo o dĺžke úsečky.

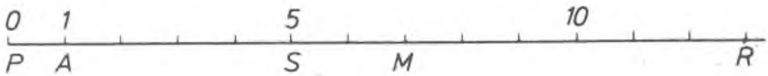
1. Dĺžka úsečky (opakovanie)

DĹŽKA ÚSEČKY. ZJEMNENIE STUPNICE MERADLA



jednotka dĺžky

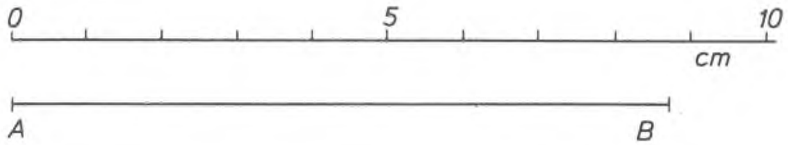
meradlo s jednotkou dĺžky *PA*



Krajné body úsečky *PM* sú deliace body meradla. Dĺžka úsečky *PM* je 7 dĺžkových jednotiek.
Píšeme: $d(PM) = 7$ j.d. Dĺžka dielika stupnice meradla je 1 j.d. Úsečky *AM* a *MR* sú zhodné ($AM \cong MR$). Úsečky *AM* a *MR* majú rovnaké dĺžky, $d(AM) = d(MR)$. Úsečka *AM* je grafickým súčtom úsečiek *AS* a *SM* ($AM = AS + SM$). Dĺžka úsečky *AM* sa rovná súčtu dĺžok úsečiek *AS* a *SM*, $d(AM) = d(AS) + d(SM)$.

Príklad 1

Určte hornú a dolnú hranicu dĺžky úsečky AB a odmerajte ju s presnosťou na centimetre. Prečo je 8 cm dolná hranica dĺžky úsečky?

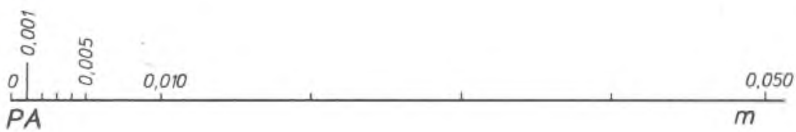


Riešenie:

$$\underset{\substack{\text{dolná hranica}\\ \text{dĺžky úsečky}}}{\underset{\downarrow}{8\ \text{cm}}} \leqq d(AB) \leqq \underset{\substack{\text{horná hranica}\\ \text{dĺžky úsečky}}}{\underset{\downarrow}{9\ \text{cm}}}$$

Bod B je bližšie k deliacemu bodu 9. $d(AB) = 9$ cm (s presnosťou na centimetre).

ZJEMNENIE STUPNICE MERADLA



1 m = 1 000 . PA alebo 1 m = 1 000 mm

PA = 0,001 m alebo 1 mm = 0,001 m

Stupnica meradla s dielikmi dlhými 0,001 m je zjemnenie stupnice meradla s dielikmi dlhými 1 m.

Cvičenie

1. Vezmite povraz a vyznačte na ňom úsečky AB a CD dlhé 3,30 m a 6,6 m.
   a) Vypočítajte dĺžku grafického súčtu týchto úsečiek.
   b) Vypočítajte dĺžku ich grafického rozdielu.

2. Vezmite povraz a vyznačte na ňom úsečku MN dlhú 5,40 m. Aký dlhý povraz by ste potrebovali, aby ste na ňom mohli vyznačiť trojnásobok tejto úsečky? Koľko centimetrov meria úsečka 3 . MN?

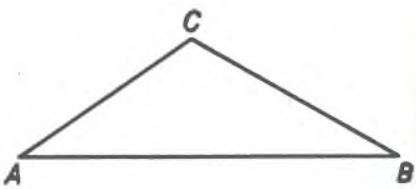
3. Odmerajte úsečku AB na centimetre.
   Určte hornú a dolnú hranicu dĺžky úsečky AB, ak ju meriate na centimetre.

Odmerajte úsečku AB na desatiny centimetra. Určte hornú a dolnú hranicu dĺžky úsečky AB, ak ju meriate na desatiny centimetra.

OBVOD MNOHOUHOLNÍKA

Príklad 2

a) Odmerajte strany trojuholníka ABC na centimetre a vypočítajte jeho obvod.
b) Odmerajte strany trojuholníka ABC na desatiny centimetra a vypočítajte jeho obvod.
c) Určte obvod trojuholníka ABC pomocou grafického súčtu jeho strán.



Riešenie:

a) $d(AB) = 5$ cm
$d(BC) = 3$ cm
$d(AC) = 3$ cm
$5 \text{ cm} + 3 \text{ cm} + 3 \text{ cm} =$
$= 11$ cm
$o(\triangle ABC) = 11$ cm

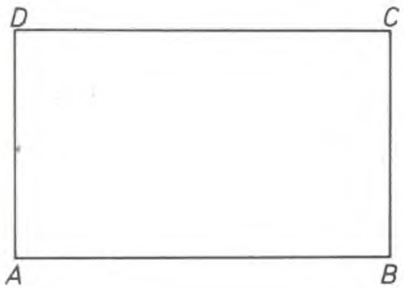
b) $d(AB) = 5{,}1$ cm
$d(BC) = 3{,}2$ cm
$d(AC) = 2{,}8$ cm
$5{,}1 \text{ cm} + 3{,}2 \text{ cm} + 2{,}8 \text{ cm} =$
$= 11{,}1$ cm
$o(\triangle ABC) = 11{,}1$ cm

c)

Grafický súčet strán AB, BC a AC: $MN = AB + BC + AC$
$d(AB) + BC + AC) = 11{,}1$ cm

Príklad 3

Odmerajte strany obdĺžnika $ABCD$ na centimetre a vypočítajte jeho obvod.



Musíte merať všetky štyri strany obdĺžnika $ABCD$, aby ste mohli vypočítať jeho obvod?

Riešenie:

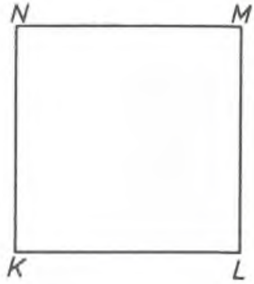
$o(ABCD) = (3 \text{ cm} + 5 \text{ cm}) \,.\, 2$
$o(ABCD) = 8 \text{ cm} \,.\, 2$
$o(ABCD) = 16$ cm

Obvod obdĺžnika vypočítame, keď sčítame dĺžky dvoch susedných strán a potom vynásobíme dvoma.

Cvičenie

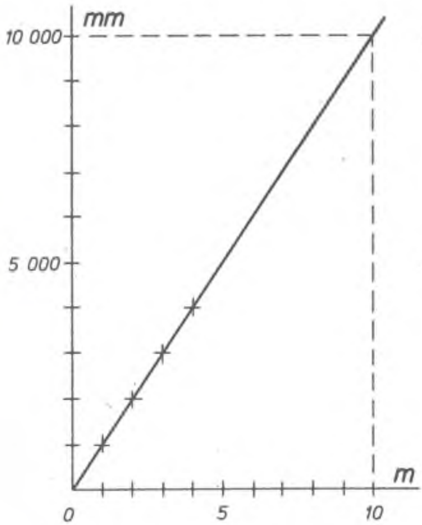
4. Jedna strana obdĺžnika meria 3,7 cm a jeho susedná strana meria 5,8 cm. Vypočítajte jeho obvod.

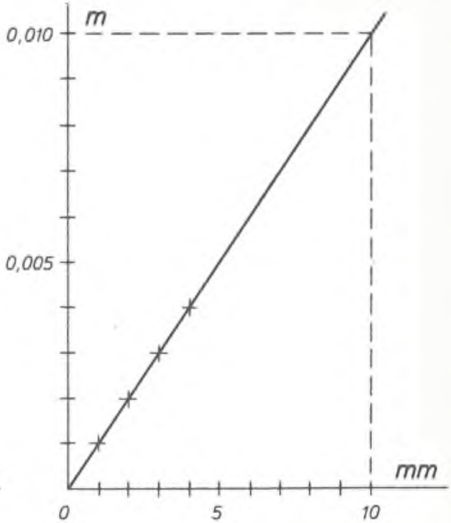
5. Odmerajte jednu stranu štvorca *KLMN* na centimetre a vypočítajte jeho obvod.



PREMIEŇANIE JEDNOTIEK

1 mm		1 mm = 0,001 m
1 cm	= 10 mm	1 cm = 0,01 m
1 dm	= 100 mm	1 dm = 0,1 m
1 m	= 1 000 mm	1 m = 0,001 km
1 km	= 1 000 m	





(Na obrazoch sú vyznačené len niektoré body grafu.)

Počet milimetrov y je priamo úmerný počtu metrov x ($y = 1\,000 \cdot x$).
Počet metrov y je priamo úmerný počtu milimetrov x ($y = 0{,}001 \cdot x$).

Príklad 4

Premeňte 128 cm a) na metre, b) na milimetre.

Riešenie:

a) 1 cm = 0,01 m
128 cm = 128 . 0,01 m
128 cm = 1,28 m

b) 1 cm = 10 mm
128 cm = 128 . 10 mm
128 cm = 1 280 mm

Výpočet skontrolujte napr. pomocou skladacieho dvojmetra.

Cvičenie

6. Premeňte na a) metre, b) milimetre: 72 cm, 45 cm, 148,6 cm, 36,2 cm, 2 200 cm, 0,7 cm.

7. Premeňte na metre: 426 km, 5 km, 378 km, 15 km.

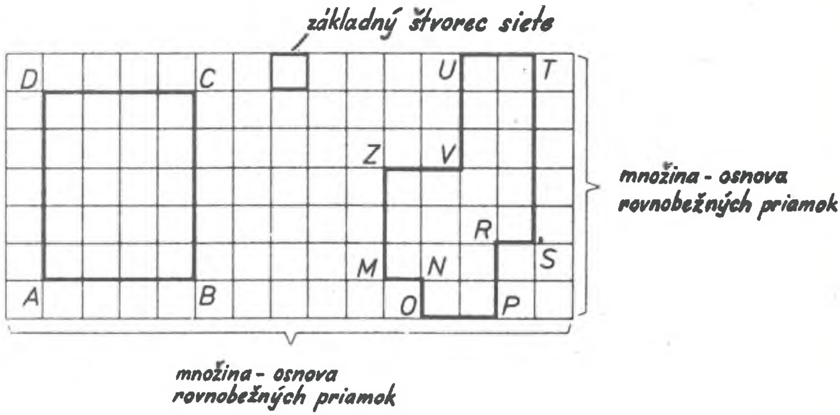
8. Premeňte na decimetre: 2 m, 15 m, 120 cm, 240 cm, 1 500 mm, 6 000 mm.

2. Obsah mnohouholníka štvorcovej siete

Tak ako pri meraní dĺžky úsečky ste najprv zvolili jednotku dĺžky a potom ste použili meradlo, zvolíme na meranie obsahu štvorec za jednotku obsahu a meradlom bude štvorcová sieť.

ŠTVORCOVÁ SIEŤ

V štvorcovej sieti sa vzdialenosti každých dvoch susedných rovnobežiek rovnajú.



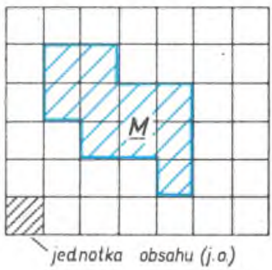
Každá priamka jednej osnovy je kolmá na každú priamku druhej osnovy. Mnohouholník, ktorý je zjednotením základných štvorcov siete, je mnohouholník štvorcovej siete.

Úloha 1

Ukážte mnohouholníky štvorcovej siete, ktoré sú na obrázku vyznačené.

Príklad 1

Určte obsah mnohouholníka M štvorcovej siete vyznačeného na obrázku farebne.

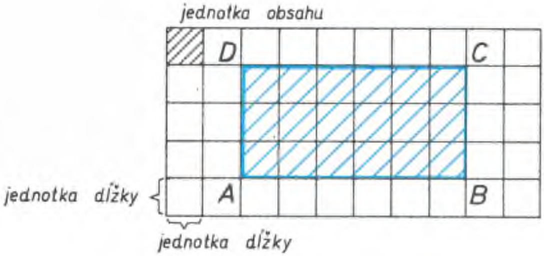


Riešenie:

Za jednotku obsahu (j.o.) zvolíme základný štvorec štvorcovej siete. **Obsah mnohouholníka** M štvorcovej siete sa rovná počtu jednotiek obsahu (základných štvorcov siete), ktorých zjednotením je mnohouholník M.
Mnohouholník M je zjednotením desiatich (10) jednotiek obsahu. Píšeme: $S(M) = 10$ j.o.

Príklad 2

Určte obsah obdĺžnika $ABCD$ štvorcovej siete. $d(AB) = a = 6$ j.d., $d(BC) = b = 3$ j.d.



Riešenie:

Obsah obdĺžnika $ABCD$ **sa rovná počtu jednotiek obsahu (základných štvorcov siete), ktorých zjednotením je obdĺžnik** $ABCD$**. Vypočítame ho násobením 6 . 3.**
(Základný štvorec siete tvorí 6 stĺpcov, v každom z nich sú 3 štvorce.)
Obsah obdĺžnika $ABCD$ **je 18 j.o.**
Hovoríme, že sme obsah obdĺžnika štvorcovej siete vypočítali násobením dĺžok jeho susedných strán a píšeme:

$$S(ABCD) = a \cdot b$$

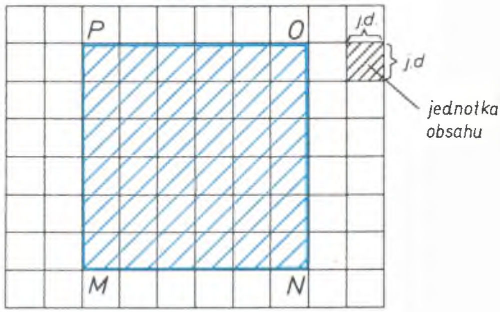
$$S(ABCD) = \underbrace{6 \text{ j.d.}}_{\text{činiteľ}} \cdot \underbrace{3 \text{ j.d.}}_{\text{činiteľ}}$$

súčin

$$S(ABCD) = 18 \text{ j.o.}$$

Príklad 3

Určte obsah štvorca *MNOP* štvorcovej siete; $d(MN) = a = 6$ j.d.



Riešenie:
Obsah štvorca *MNOP* sa rovná počtu jednotiek obsahu (základných štvorcov siete), ktorých zjednotením je štvorec *MNOP*. Vypočítame ho násobením 6 . 6 = 36. Obsah štvorca *MNOP* vypočítame násobením dĺžok susedných strán a píšeme:

$$S(MNOP) = a \,.\, a$$
$$S(MNOP) = 6 \text{ j.d.} \,.\, 6 \text{ j.d.} = 36 \text{ j.o.}$$

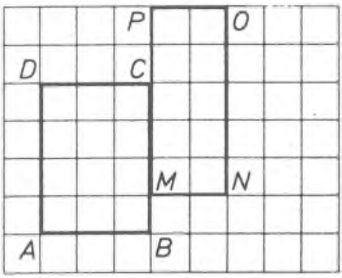
Namiesto $a \,.\, a$ píšeme krátko a^2. Zápis a^2 čítame *a* na druhú. Zápisy

$$S(ABCD) = a \,.\, b, \quad S(MNOP) = a^2$$

sú tzv. vzorce na výpočet obsahu obdĺžnika, štvorca.

Príklad 4

Určte obsah mnohouholníka štvorcovej siete, ktorý je zjednotením dvoch neprekrývajúcich sa mnohouholníkov štvorcovej siete.



Riešenie:

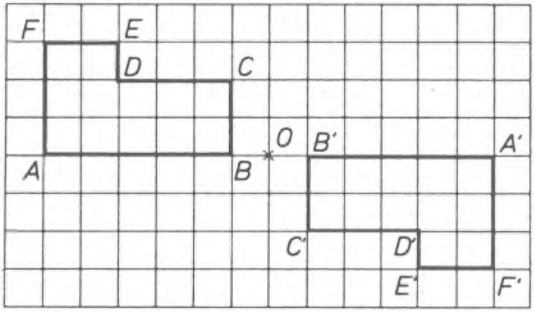
$S(ABCD) = 12$ j.o.
$S(MNOP) = 10$ j.o.
$S(ABMNOPCD) = 22$ j.o.

12 j.o. + 10 j.o. = 22 j.o.   22 j.o. — 10 j.o. = 12 j.o.
10 j.o. + 12 j.o. = 22 j.o.   22 j.o. — 12 j.o. = 10 j.o.

Pri súčte a pri oboch sčítancoch sú rovnaké jednotky obsahu. Obsah mnohouholníka štvorcovej siete, ktorý je zjednotením dvoch neprekrývajúcich sa mnohouholníkov štvorcovej siete, sa rovná súčtu obsahov týchto dvoch mnohouholníkov.

Príklad 5

Určte obsahy mnohouholníkov štvorcovej siete, ktoré sú na obrázku vyznačené.



Riešenie:

Mnohouholníky štvorcovej siete $ABCDEF$ a $A'B'C'D'E'F'$ na obrázku sú súmerné podľa stredu O. Sú zhodné.

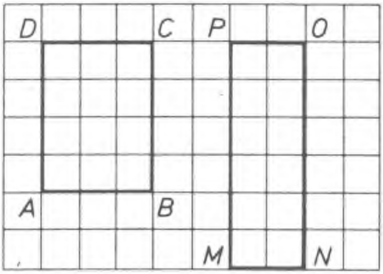
$$ABCDEF \cong A'B'C'D'E'F'$$

Mnohouholníky $ABCDEF$ a $A'B'C'D'E'F'$ majú rovnaké obsahy.

$$S(ABCDEF) = 12 \text{ j.o.} \qquad S(A'B'C'D'E'F') = 12 \text{ j.o.}$$
$$S(ABCDEF) = S(A'B'C'D'E'F')$$

Každé dva zhodné mnohouholníky štvorcovej siete majú rovnaké obsahy.

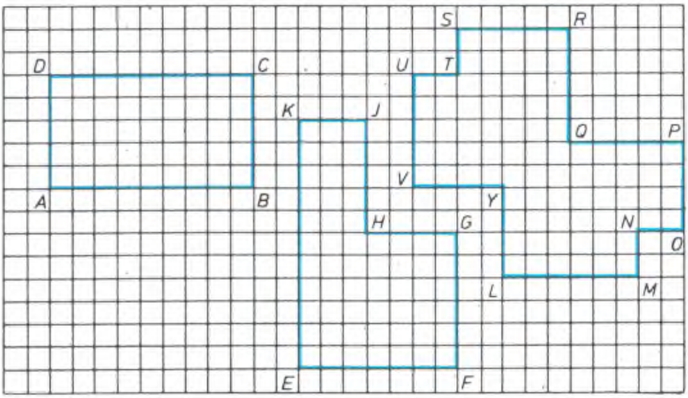
Ak majú dva mnohouholníky štvorcovej siete rovnaké obsahy (ako na obrázku), nemusia byť zhodné.



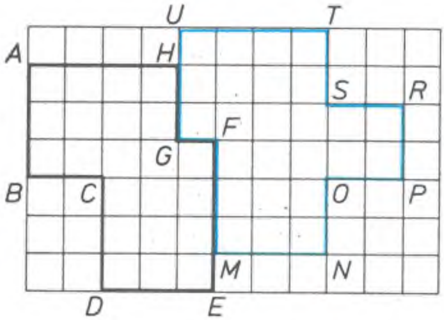
$S(ABCD) = 12$ j.o.
$S(MNOP) = 12$ j.o.
$ABCD \not\cong MNOP$

Cvičenie

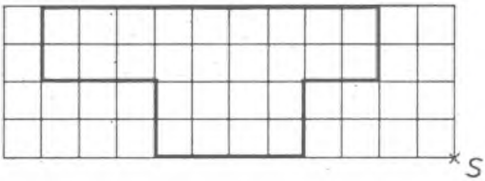
1. Zvoľte základný štvorec siete za jednotku obsahu.
Určte obsahy farebne vyznačených mnohouholníkov štvorcovej siete.



2. Určte obsah zjednotenia vyznačených mnohouholníkov štvorcovej siete a zapíšte všetky príklady, ktoré obrázok znázorňuje.

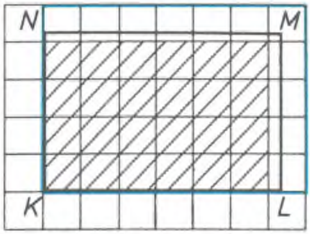


3. Určte obsah mnohouholníka súmerného podľa stredu S s mnohouholníkom na obrázku. Zostrojte oba mnohouholníky na štvorčekovaný papier a presvedčte sa, že ste obsah určili dobre.



3. Obsah pravouholníka

DOLNÁ A HORNÁ HRANICA OBSAHU PRAVOUHOLNÍKA



Pravouholník $KLMN$ nie je pravouholník štvorcovej siete. Dolná a horná hranica dĺžok susedných strán KL a LM:

6 jd. $\leqq d(KL) \leqq$ 7 j.d. 4 j.d. $\leqq d(LM) \leqq$ 5 j.d.

Farebne vyznačený obdĺžnik (f.obd.) má dĺžky susedných strán 5 j.d. a 7 j.d.

Šrafovane vyznačený obdĺžnik (š.obd.) má dĺžky susedných strán 4 j.d. a 6 j.d.

Platí: š.obd. $\subset KLMN \subset$ f.obd.

S(š.obd. $\leqq S(KLMN) \leqq S$(f.obd.)

24 j.o. $\leqq S(KLMN) \leqq$ 35 j.o.

dolná hranica obsahu obdĺžnika *KLMN*

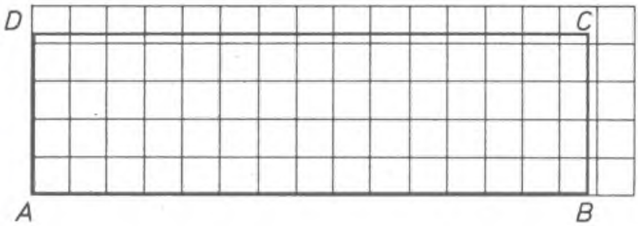
horná hranica obsahu obdĺžnika *KLMN*

Obdĺžnik *KLMN* má obsah. Vieme, že je väčší alebo sa rovná 24 j.o. a menší alebo sa rovná 35 j.o.
Obsah obdĺžnika *KLMN* je v medziach 24 j.o. a 35 j.o.

VÝPOČET OBSAHU PRAVOUHOLNÍKA

Príklad 1

Vypočítajte obsah pravouholníka $ABCD$.



Riešenie:

$a = d(AB) = 15$ j.d. $\qquad b = d(BC) = 4$ j.d.

Dĺžky susedných strán pravouholníka $ABCD$ sú zaokrúhlené na zvolenú jednotku dĺžky (j.d.). Aj v tomto prípade povieme, že

obsah pravouholníka vypočítame, ak vynásobíme dĺžku jednej strany dĺžkou susednej strany.

$S(ABCD) = a \,.\, b$

$S(ABCD) = 15$ j.d. . 4 j.d.

15 j.d. . 4 j.d. = 60 j.o.

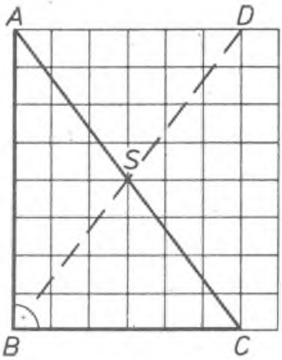
$S(ABCD) = 60$ j.o.

Obsah pravouholníka sme vypočítali približne.
Vypočítame dolnú a hornú hranicu obsahu pravouholníka $ABCD$.
Dolná hranica obsahu pravouholníka $ABCD$ je 4 j.d. . 14 j.d. = 56 j.o.
Horná hranica obsahu pravouholníka $ABCD$ je 5 j.d. . 15 j.d. = 75 j.o.
Vypočítaný obsah pravouholníka je v medziach 56 j.o. a 75 j.o.

56 j.o. $\leqq$ 60 j.o. $\leqq$ 75 j.o.

Príklad 2

Určte obsah trojuholníka ABC s pravým uhlom pri vrchole B.



Riešenie:

Štvoruholník $ABCD$ je pravouholník a je zjednotením neprekrývajúcich sa trojuholníkov $\triangle ABC$ a $\triangle CDA$.

$ABCD = \triangle ABC \cup \triangle CDA$

Platí:

$S(ABCD) = S(\triangle ABC) +$
$+ S(\triangle CDA)$

$\triangle ABC \cong \triangle CDA$ (súmernosť podľa stredu S)

Pretože $S(\triangle ABC) = S(\triangle CDA)$, platí $S(ABCD) = 2 \,.\, S(\triangle ABC)$.

Píšeme: $S(\triangle ABC) =$
$= S(ABCD) : 2$.

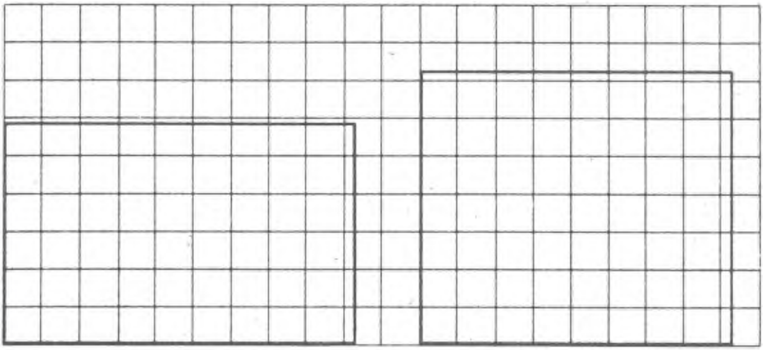
Označíme $a = d(AB)$, $b = d(BC)$.

Pretože obsah obdĺžnika $ABCD$ sa rovná $a \,.\, b$, platí

$S(\triangle ABC) = a \,.\, b : 2$.

Obsah pravouhlého trojuholníka sa rovná súčinu dĺžok jeho odvesien delený dvoma.

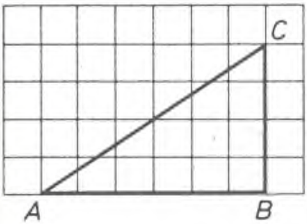
1.



Určte hornú a dolnú hranicu obsahu vyznačených pravouholníkov.

2. Vypočítajte obsahy pravouholníkov vyznačených v cvičení 1.

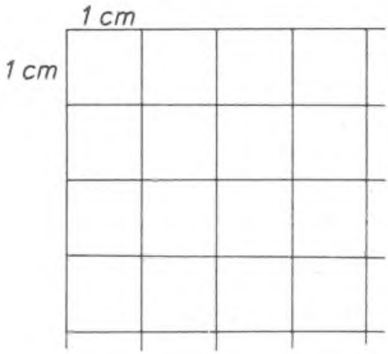
3. Vypočítajte obsah trojuholníka *ABC*.



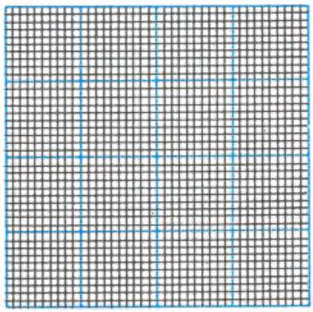
4. Jednotky obsahu

JEDNOTKY OBSAHU

Centimetrová štvorcová sieť



Milimetrová štvorcová sieť

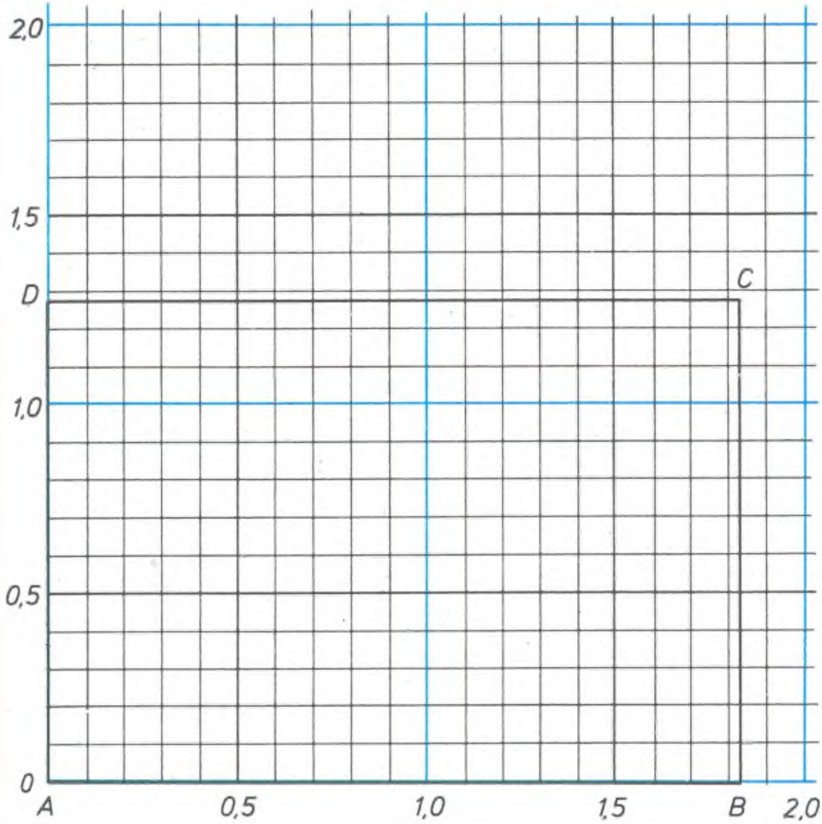


Štvorcový milimeter ..... štvorec so stranou dlhou 1 mm — 1 mm^2
Štvorcový centimeter .... štvorec so stranou dlhou 1 cm — 1 cm^2
Štvorcový decimeter ..... štvorec so stranou dlhou 1 dm — 1 dm^2
Štvorcový meter .... štvorec so stranou dlhou 1 m — 1 m^2
Štvorcový kilometer ..... štvorec so stranou dlhou 1 km — 1 km^2
Štvorcová sieť s dĺžkou strany základného štvorca 0,1 cm = 1 mm (čierna štvorcová sieť) sa nazýva zjemnením štvorcovej siete s dĺžkou strany základného štvorca 1 cm (farebná štvorcová sieť).

Príklad 1

Vypočítajte rozdiel hornej a dolnej hranice obsahu pravouholníka *ABCD*, ak meriame na jednotky dĺžky a potom na desatiny jednotky dĺžky.

Riešenie:



Farebná sieť	Čierna sieť
1 j.d. $\leqq d(AD) \leqq$ 2 j.d.	1,2 j.d. $\leqq d(AD) \leqq$ 1,3 j.d.
1 j.d. $\leqq d(AB) \leqq$ 2 j.d.	1,8 j.d. $\leqq d(AB) \leqq$ 1,9 j.d.

1,2 . 1,8 = 2,2; 1,3 . 1,9 = 2,5

1 j.o. $\leqq S(ABCD) \leqq$ 4 j.o. 2,2 j.o. $\leqq S(ABCD) \leqq$ 2,5 j.o.

Dolná hranica obsahu Horná hranica obsahu Dolná hranica obsahu Horná hranica obsahu

4 j.o. — 1 j.o. = 3 j.o. 2,5 j.o. — 2,2 j.o. = 0,3 j.o.

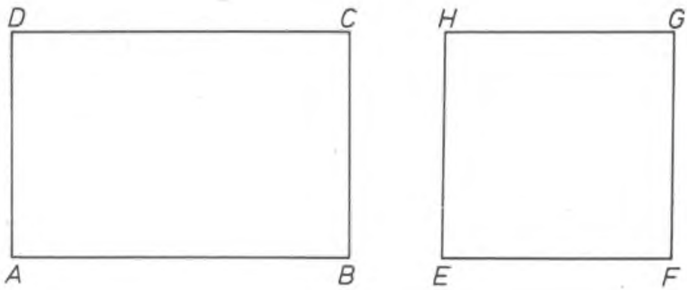
Zjemnením štvorcovej siete sme dostali menší rozdiel hornej a dolnej hranice obsahu. Určili sme obsah pravouholníka $ABCD$, t. j. $S(ABCD)$, s menšou nepresnosťou.

Cvičenie

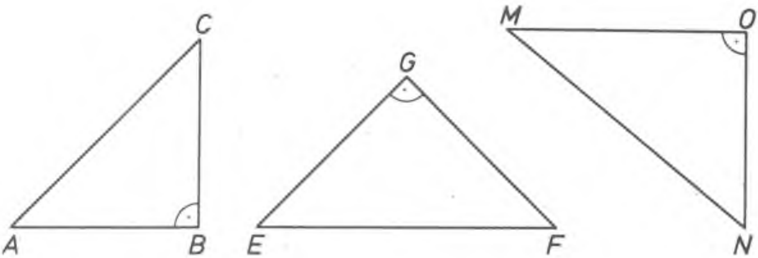
1. a) Vystrihnite štvorcový centimeter.
b) Vystrihnite štvorcový decimeter.

2. Zlepte listy novín tak, aby ste mohli vystrihnúť štvorcový meter.

3. Odmerajte strany obdĺžnika $ABCD$ a štvorca $EFGH$ na centimetre a vypočítajte ich obsah. Určte hornú a dolnú hranicu ich obsahu v štvorcových centimetroch.



4. a) Odmerajte dĺžky odvesien pravouhlých trojuholníkov na milimetre a vypočítajte ich obsahy.

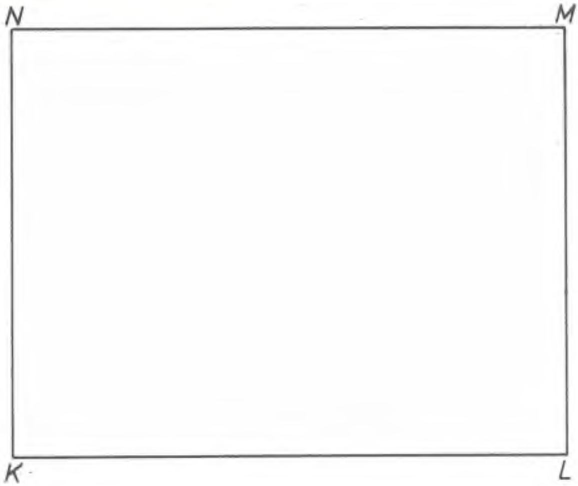


b) Určte obsah pravouhlého trojuholníka, ak $a = 60$ mm, $b = 40$ mm.

c) Určte obsah pravouhlého trojuholníka, ak $a = 2$ m, $b = 3$ m (a, b sú dĺžky odvesien).

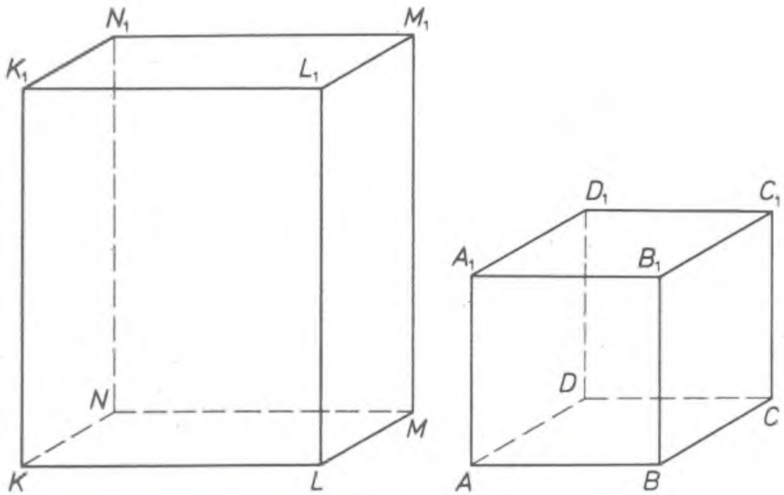
5. Horná a dolná hranica dĺžok strán obdĺžnika $KLMN$ je daná v desatinách a stotinách metra. Určte dolnú a hornú hranicu obsahu obdĺžnika $KLMN$. Rozhodnite, kedy je obsah obdĺžnika určený s menšou nepresnosťou a prečo.

$$0{,}7 \text{ m} \leqq d(KL) \leqq 0{,}8 \text{ m}$$
$$0{,}5 \text{ m} \leqq d(LM) \leqq 0{,}6 \text{ m}$$
$$0{,}73 \text{ m} \leqq d(KL) \leqq 0{,}74 \text{ m}$$
$$0{,}56 \text{ m} \leqq d(LM) \leqq 0{,}57 \text{ m}$$



6. 1 m^2 oceľovej platne hrúbky 1,5 mm má hmotnosť 11,7 kg. Akú hmotnosť má obdĺžniková platňa tej istej hrúbky s dĺžkami susedných hrán 2,3 m a 1,6 m?

POVRCH KVÁDRA A KOCKY



Hranicou kvádra je zjednotenie všetkých jeho stien.
Povrchom kvádra sa nazýva súčet obsahov všetkých jeho stien.
Povrchom kocky sa nazýva súčet obsahov všetkých jej stien.

Príklad 2

Vypočítajte povrch kvádra $KLMNK_1L_1M_1N_1$. $d(KL) = 8$ cm, $d(LM) = 4$ cm, $d(LL_1) = 10$ cm.

Riešenie:

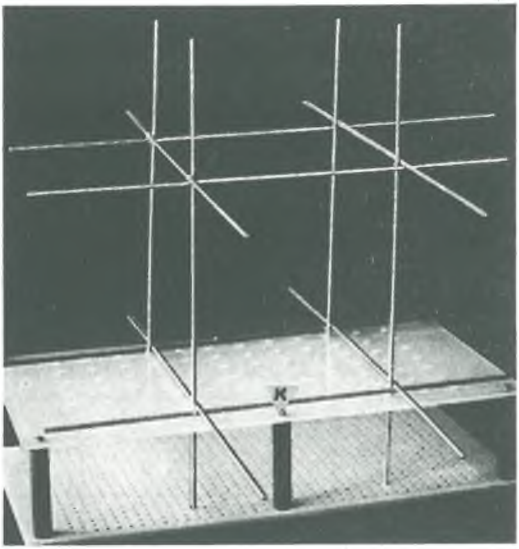
$S(KLL_1K_1) = 8 \text{ cm} \,.\, 10 \text{ cm}$ $\quad$ $S(LMM_1L_1) = 4 \text{ cm} \,.\, 10 \text{ cm}$
$S(KLL_1K_1) = 80 \text{ cm}^2$ $\quad$ $S(LMM_1L_1) = 40 \text{ cm}^2$

$$S(KLMN) = 8 \text{ cm} \,.\, 4 \text{ cm}$$
$$S(KLMN) = 32 \text{ cm}^2$$

$$P(KLMNK_1L_1M_1N_1) = 80 \text{ cm}^2 + 80 \text{ cm}^2 + 40 \text{ cm}^2 + 40 \text{ cm}^2 + 32 \text{ cm}^2 + 32 \text{ cm}^2$$
$$P(KLMNK_1L_1M_1N_1) = 304 \text{ cm}^2$$

7. Vypočítajte povrch kvádra, ak
a) $d(AB) = 15$ cm, $d(BC) = 12$ cm, $d(BB_1) = 23$ cm;
b) $d(AB) = 2{,}5$ dm, $d(BC) = 4{,}8$ dm, $d(BB_1) = 7{,}6$ dm.

8.



Vypočítajte povrch kocky K s hranou dlhou 7 cm.

9. Úsečka AB je zhodná s hranou kocky K.

Určte povrch kocky K, ak meriate dĺžky jej strán a) na centimetre, b) na desatiny centimetra. Porovnajte rozdiely hornej a dolnej hranice povrchu kocky K pri oboch meraniach.

10. Stačí na vymaľovanie izby jedna škatuľa „Primalexu" (farby na maľovanie izieb), ak je výška izby 2,60 m, dĺžka 5,75 m a šírka 4,25 m a ak jedna škatuľa vystačí na 50 m^2?

11. Koľko štvorcových centimetrov kartónu treba na škatuľu (bez viečka) v tvare kocky s hranou dĺžky 12 cm?

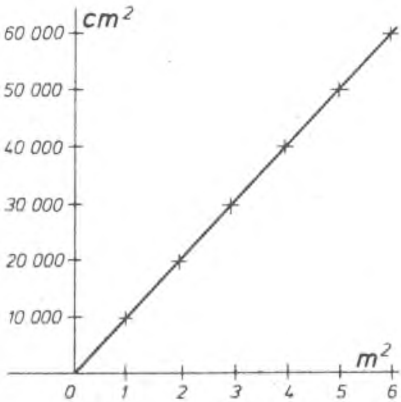
PREMIEŇANIE JEDNOTIEK OBSAHU

$1\ m^2 = 1\ 000\ mm\ .\ 1\ 000\ mm = 1\ 000\ 000\ mm^2$
$1\ m^2 = 100\ cm\ .\ 100\ cm = 10\ 000\ cm^2$
$1\ m^2 = 10\ dm\ .\ 10\ dm = 100\ dm^2$
$1\ km^2 = 1\ 000\ m\ .\ 1\ 000\ m = 1\ 000\ 000\ m^2$
$1\ dm^2 = 0{,}1\ m\ .\ 0{,}1\ m = 0{,}01\ m^2$
$1\ cm^2 = 0{,}001\ m\ .\ 0{,}01\ m = 0{,}0001\ m^2$
$1\ mm^2 = 0{,}001\ m\ .\ 0{,}001\ m = 0{,}000\ 001\ m^2$
$1\ m^2 = 0{,}001\ km\ .\ 0{,}001\ km = 0{,}000\ 001\ km^2$

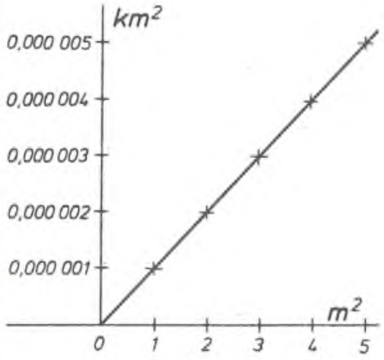
Na premieňanie jednotiek obsahu môžeme zostaviť tabuľku alebo zostrojiť graf.

x	0	1	2	3	4	5	6
$y = 10\ 000\ .\ x$	0	10 000	20 000	30 000	40 000	50 000	60 000

x	0	1	2	3	4
$y = 0{,}000\ 001\ .\ x$	0,000 000	0,000 001	0,000 002	0,000 003	0,000 004



Počet štvorcových centimetrov je priamo úmerný počtu štvorcových metrov.



Počet štvorcových kilometrov je priamo úmerný počtu štvorcových metrov.

Cvičenie

12. Vyjadrite v štvorcových a) decimetroch, b) centimetroch, c) milimetroch:

328 m^2, 6 m^2, 25 m^2, 10 m^2, 100 m^2.

13. Vyjadrite v štvorcových metroch:

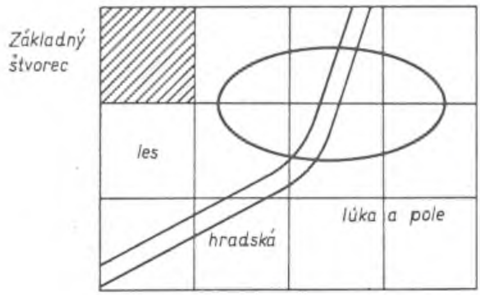
50 km^2, 16 km^2, 4 km^2, 10 km^2, 1 km^2, 0 km^2.

14. Vyjadrite v štvorcových a) metroch, b) decimetroch, c) milimetroch:

1 800 cm^2, 27 000 cm^2.

15. Koľko štvorcových dláždic s hranou dlhou 10 cm potrebujeme na chodbu dlhú 3,6 m a širokú 2,5 m?

16. Vojenské mapy sú zakresľované do štvorcovej siete, v ktorej základný štvorec znázorňuje 1 km² v skutočnosti. Na obrázku je hrubou čiarou vyznačený podmínovaný vojenský terén. Určte hornú hranicu výmery tohto terénu v štvorcových kilometroch.



17. Vypočítajte:

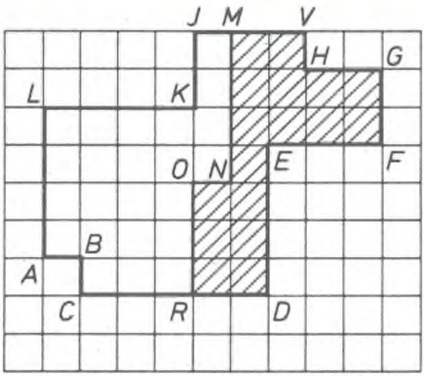
150 cm² + 60 cm²	2 400 km² — 900 km²
242 cm² + 400 cm²	7 000 mm² — 4 000 mm²
1 350 cm² + 800 cm²	0,28 m² — 0,14 m²

2 m² + 10 000 cm²
36 km² + 6 000 000 m²
34 cm² + 900 m²

18. V roku 1971 bolo v ČSR 44 650 km² poľnohospodárskej pôdy. Je to o 16 370 km² viac, ako bolo poľnohospodárskej pôdy v SSR. Koľko poľnohospodárskej pôdy bolo v ČSSR?

SÚHRNNÉ CVIČENIA

1. Vypočítajte obvod štvorca so stranou *EF*.

2. 

Na obrázku je vyznačený mnohouholník štvorcovej siete, ktorý je zjednotením dvoch mnohouholníkov štvorcovej siete.
Zapíšte všetky príklady, ktoré sú znázornené na obrázku.

3. Koľko zaplatí pani Pokorná za vyčistenie koberca širokého 2,50 m a dlhého 3,25 m, ak vyčistenie 1 m² stojí 9,70 Kčs?

4. Kto pri svojej práci potrebuje počítať obsahy rôznych mnohouholníkov?

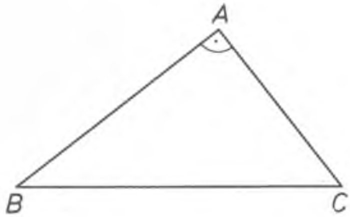
5. Koľko farby spotrebujú lakovníci na prelakovanie všetkých tabulí vo vašej škole, ak 1 kg farby vystačí na 6 m²? Zisťovanie potrebných údajov a výpočtov si rozdeľte na skupiny.

6. Odmerajte šírku a dĺžku vašej triedy. Určte obsah podlahy.

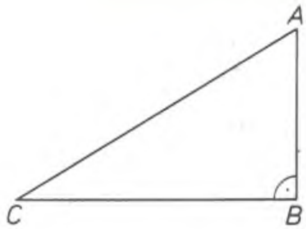
7. Vaňa v kúpeľni je 150 cm dlhá, 62 cm vysoká a 70 cm široká. Treba ju obložiť z obidvoch strán štvorcovými kachličkami so stranou 10 cm. Koľko kachličiek budeme potrebovať?

8. Odmerajte odvesny narysovaných trojuholníkov a vypočítajte ich obsah.

a)



b)



9. Niekedy sa používa ako jednotka obsahu tzv. hektár (ha). Je to štvorec so stranou dlhou 100 m. Hektárový výnos obilnín je 4,2 t. Koľko ton obilnín zožalo jednotné roľnícke družstvo na výmere 10 600 ha?

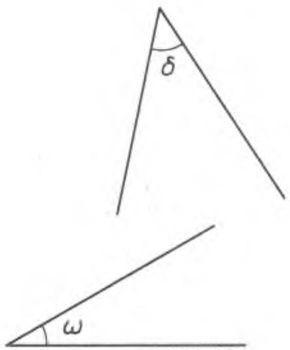
10. Určte v decimetroch a potom ešte v desatinách decimetra dĺžky strán obdĺžnikov, ktoré predstavujú obaly vašej učebnice a obaly vašej cvičebnice. Určte v obidvoch prípadoch dolnú a hornú hranicu obsahov týchto obdĺžnikov (v metroch štvorcových a v centimetroch štvorcových).

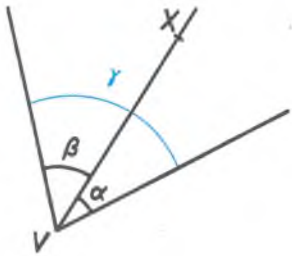
11. Vypočítajte povrch kocky s dĺžkou hrany $a = 0{,}28$ m. Vyjadrite povrch tejto kocky v štvorcových centimetroch.

V/ VEĽKOSŤ UHLA

1. Opakovanie

GRAFICKÝ SÚČET UHLOV





$\beta \cong \delta \qquad \alpha \cong \omega$

$\alpha + \beta = \gamma \qquad \gamma - \beta = \alpha \qquad \delta + \omega = \gamma \qquad \gamma - \omega = \delta$

$\beta + \alpha = \gamma \qquad \gamma - \alpha = \beta \qquad \omega + \delta = \gamma \qquad \gamma - \delta = \omega$

Uhol γ je zjednotením styčných uhlov α a β.

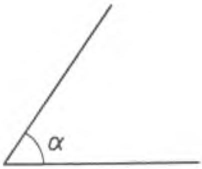
$$\gamma = \alpha \cup \beta \qquad \alpha \cap \beta = \mapsto VX$$

Uhol γ je grafickým súčtom uhlov α a β a každých dvoch uhlov zhodných s uhlami α a β.
Uhol β je grafickým rozdielom uhlov γ a α a každých dvoch uhlov zhodných s uhlami γ a α.

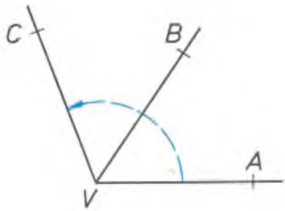
Úloha 1

Narysujte dva styčné uhly $\sphericalangle AVB$ a $\sphericalangle CVB$.
Červeným oblúkom vyznačte ich grafický súčet.
Zapíšte uhol, ktorý je ich grafickým súčtom.
Každý z troch uhlov, ktorý ste zostrojili a vyznačili oblúkom, zapíšte ako grafický súčet alebo rozdiel zostávajúcich dvoch uhlov.

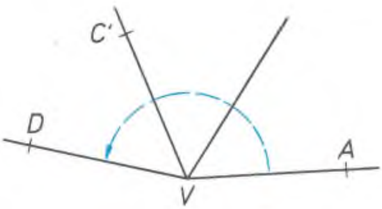
NÁSOBOK UHLA



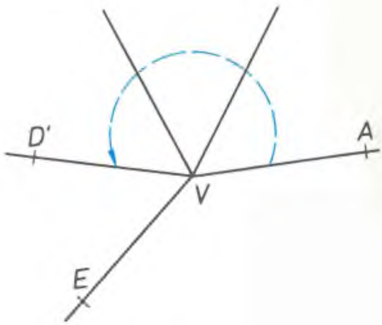
$\alpha = 1 \, . \, \alpha$



$\alpha \cong \sphericalangle AVB, \quad \alpha \cong \sphericalangle BVC$
$\sphericalangle AVC = \alpha + \alpha$
$\sphericalangle AVC = 2 \, . \, \alpha$



$\sphericalangle AVD = 2 \, . \, \alpha + \alpha$
$\sphericalangle AVD = 3 \, . \, \alpha$

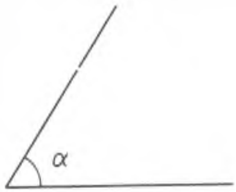


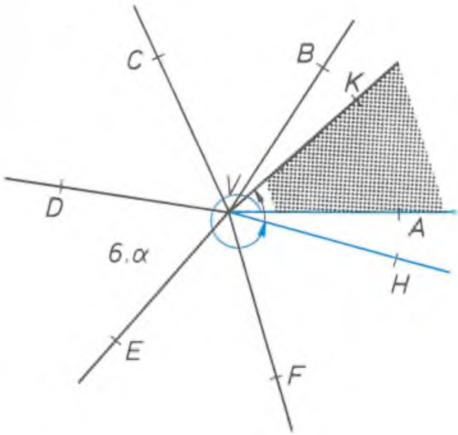
$\sphericalangle AVE = 3 \, . \, \alpha + \alpha$
$\sphericalangle AVE = 4 \, . \, \alpha$

Trojnásobok uhla α zostrojíme tak, že nanesieme uhol α k polpriamke VA postupne trikrát, napr. tak, ako je vyznačené šípkou na obrázku. Uhol, ktorý je trojnásobkom uhla α, je zjednotením troch neprekrývajúcich sa uhlov zhodných s uhlom α.

Príklad 1

Narysujte konvexný uhol α a polpriamku VA ako na obrázku. Zostrojte uhol $AVH = 6 \cdot \alpha$.
Možno zostrojiť grafický súčet uhlov $\sphericalangle AVH + \alpha$?





$\sphericalangle AVH = 6 \cdot \alpha$

$\sphericalangle AVH$ a $\measuredangle HVK$ sa prekrývajú.

Grafický súčet uhla $\sphericalangle AVH$ a uhla α nemožno zostrojiť.

Cvičenie

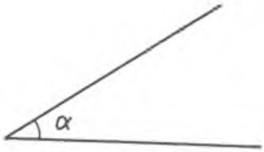
1. Narysujte konvexný uhol α a konvexný uhol β. Zostrojte grafický súčet uhlov α a β.

2. Narysujte uhly ω a δ. $\omega > \delta$.
Zostrojte grafický rozdiel uhlov ω a δ.

3. Narysujte trojuholník ABC. Zostrojte uhol γ, ktorý je grafickým súčtom vnútorných uhlov trojuholníka ABC.

$$\gamma = \sphericalangle ABC + \sphericalangle BCA + \sphericalangle BAC$$

4. Vystrihnite si z papiera model uhla α.
Pomocou tohto modelu zostrojte $2 . \alpha$, $3 . \alpha$, $4 . \alpha$, $5 . \alpha$, pokiaľ je to možné.

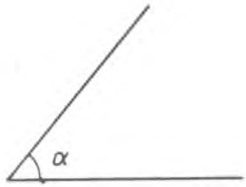


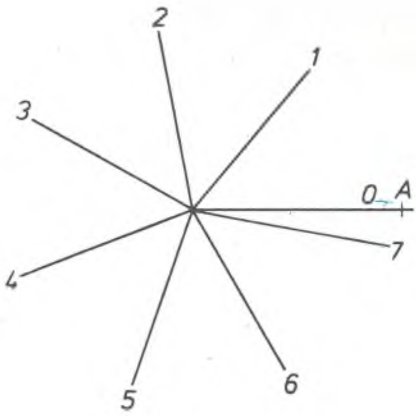
5. Zostrojte pravý uhol β. Zostrojte jeho trojnásobok.

2. Uhlomer, veľkosť uhla

UHLOMER

Merali sme úsečky a určovali ich dĺžku. Merali sme obdĺžniky, trojuholníky a iné geometrické útvary v rovine a určovali sme ich obsah. Pri meraní úsečiek sme si najprv zvolili jednotku dĺžky a pri meraní geometrických útvarov v rovine sme si najprv zvolili jednotku obsahu. Pri meraní sme použili meradlo. Teraz budeme merať uhly, a preto si zvolíme **jednotku veľkosti uhla** a vyhotovíme si meradlo — **uhlomer.**
Môžeme si zvoliť napr. uhol α za jednotku veľkosti uhla a naniesť ho postupne niekoľkokrát na polpriamku VA ako na obrázku. Polpriamky potom očíslujeme.



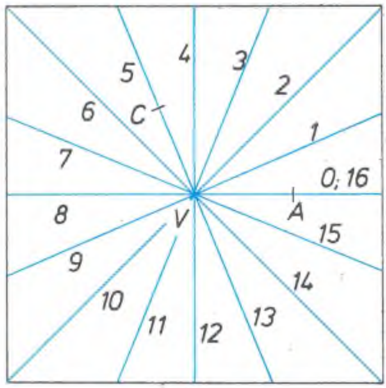


Postupovať môžeme aj ináč.

Úloha 1

Zoberte si list papiera a postupne ho prekladajte ako na obrázku, napr. štyrikrát.
Prekladaním ste vytvorili model uhla.
Zvoľte si tento uhol za jednotku veľkosti uhla. Označte ho napr. ω.
Teraz papier rozložte. Prekladaním vyznačené polpriamky očíslujte číslami 0, 1, . . ., 16 ako na obrázku.
Zostrojili ste meradlo — uhlomer s jednotkou veľkosti uhla ω.

Jednotka veľkosti uhla
ω = j.u.



Uhlomer s jednotkou veľkosti uhla ω.

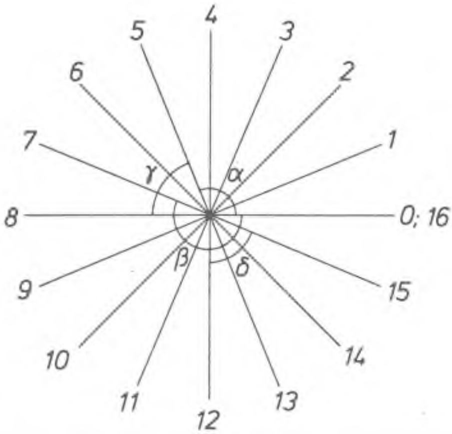
Uhol AVC na uhlomere je zjednotením 5 neprekrývajúcich sa jednotiek veľkosti uhla. Veľkosť uhla AVC je 5 j.u.
Píšeme: $v(\sphericalangle AVC) = 5$ j.u.

Cvičenie

1. Na svojom uhlomere určte veľkosť uhlov s ramenami 0 a 14; 9 a 12.

2. Na svojom uhlomere vyznačte uhly, ktorých ramená sú polpriamky uhlomera, tak, aby $\alpha = 3$ j.u., $\beta = 8$ j.u.

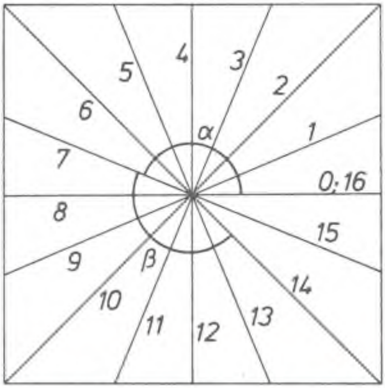
3. Zapíšte veľkosť uhlov vyznačených na uhlomere.



VEĽKOSŤ ZHODNÝCH UHLOV

Príklad 1

Vyznačte na svojom uhlomere konvexný uhol α s ramenami 0 a 7 a konvexný uhol β s ramenami 6 a 13. Porovnajte tieto uhly a určte ich veľkosť.



Riešenie:

$\alpha \cong \beta$
$\alpha = 7$ j.u.
$\beta = 7$ j.u.
$\alpha = \beta$

Každé dva zhodné uhly určené polpriamkami uhlomera majú rovnaké veľkosti.

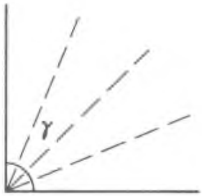
$\alpha \cong \beta$ $\qquad\qquad$ $\alpha = \beta$

V zápise $\alpha \cong \beta$ sú α, β uhly. V zápise $\alpha = \beta$ sú α, β veľkosti uhlov.

Príklad 2

Zostrojte uhol γ zhodný s konvexným uhlom na uhlomere s ramenami 0 a 4. Zapíšte veľkosť uhla γ.

Riešenie:



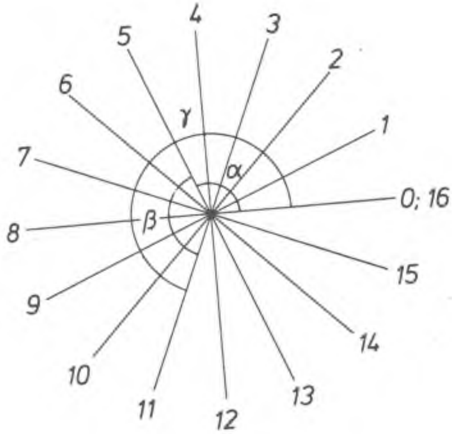
$\gamma = 4$ j.u.

VEĽKOSŤ GRAFICKÉHO SÚČTU UHLOV

Príklad 3

Na svojom uhlomere vyznačte uhol α s ramenami 0 a 5 a uhol β s ramenami 5 a 11. Uhly α a β sú styčné. Vyznačte uhol γ, ktorý je zjednotením uhlov α a β. Zapíšte uhol γ ako grafický súčet uhlov α a β. Určte veľkosť uhlov α, β, γ.

Riešenie:



$\alpha = 5$ j.u. $\qquad \beta = 6$ j.u. $\qquad \gamma = 11$ j.u.

$$\alpha + \beta = \gamma$$

$$5 \text{ j.u.} + 6 \text{ j.u.} = 11 \text{ j.u.}$$

Veľkosť grafického súčtu dvoch uhlov na uhlomere určených polpriamkami uhlomera sa rovná súčtu veľkostí týchto uhlov.

O veľkostiach týchto uhlov α, β, γ platí:

$5 \text{ j.u.} + 6 \text{ j.u.} = 11 \text{ j.u.}$ $\qquad 11 \text{ j.u.} - 5 \text{ j.u.} = 6 \text{ j.u.}$

$6 \text{ j.u.} + 5 \text{ j.u.} = 11 \text{ j.u.}$ $\qquad 11 \text{ j.u.} - 6 \text{ j.u.} = 5 \text{ j.u.}$

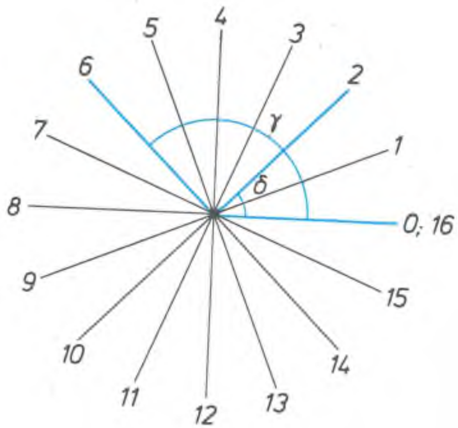
VEĽKOSŤ NÁSOBKU UHLA

Príklad 4

Na svojom uhlomere vyznačte uhol δ, ktorého veľkosť je 2 j.u.

Riešenie:

Vyznačte na uhlomere uhol γ, ktorý je trojnásobkom uhla δ. Zapíšte uhol γ ako trojnásobok uhla δ. Určte veľkosť uhla δ a γ.



$\delta = 2$ j.u.
$\gamma = 6$ j.u.

Píšeme: $\gamma = 3\ \delta$

$3 \cdot 2$ j.u. $= 6$ j.u.

$\gamma = 6$ j.u.

Veľkosť uhla γ sa rovná trojnásobku veľkosti uhla δ

Veľkosť násobku každého uhla určeného polpriamkami uhlomera sa rovná tomu istému násobku jeho veľkosti.

O veľkosti uhlov δ a γ platí:

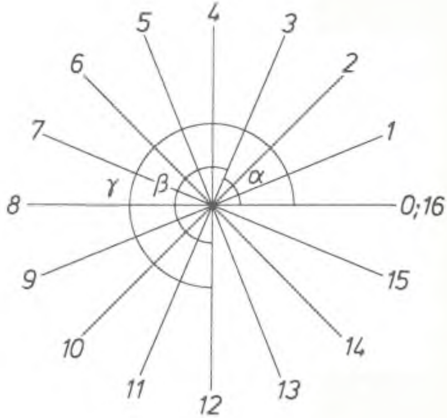
$3 \cdot 2$ j.u. $= 6$ j.u. $\qquad$ 6 j.u. $: 3 = 2$ j.u.

Cvičenie

4. Zostrojte uhol α zhodný s uhlom určeným ramenami 2 a 7 na uhlomere. Zapíšte jeho veľkosť.

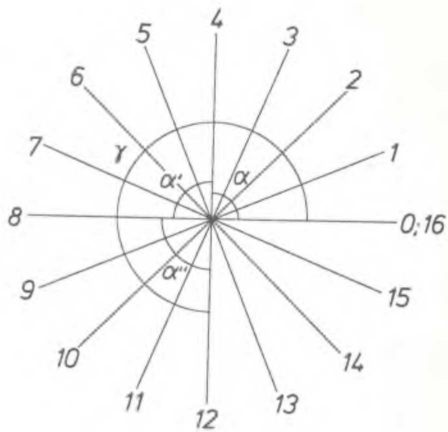
5. Uhol γ je grafickým súčtom uhlov α a β, ktorých veľkosti sú 3 j.u., 9 j.u. Vypočítajte veľkosť uhla γ.

6. Zapíšte všetky príklady, ktoré sú znázornené na obrázku uhlomera.



7. Uhol δ je päťnásobkom uhla α, ktorého veľkosť je 3 j.u. Vypočítajte veľkosť uhla δ.

8. Zapíšte všetky príklady, ktoré sú znázornené na obrázku uhlomera.

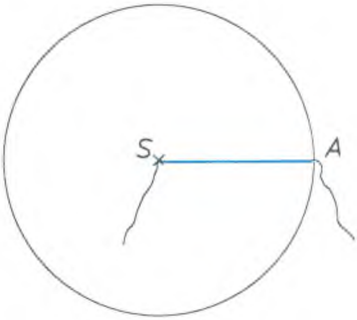


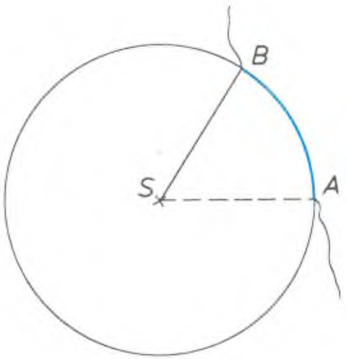
3. Jednotky veľkosti uhla; radián, stupeň

RADIÁN

Na meranie uhlov sa používa jednotka veľkosti uhla, tzv. radián. Uhol radián si môžete približne zostrojiť.

Narysujte ľubovoľnú kružnicu a vyznačte jej polomer SA. K polomeru SA priložte napnutú niť tak ako na obrázku. Vyznačte si na nitke miesta, ktoré sa kryjú s bodom S a s bodom A na kružnici. Nitku priložte ku kružnici tak ako na obrázku. Na kružnici vyznačte bod B, ktorý sa kryje s označeným miestom na nitke. Narysujte uhol ASB. Takto ste približne zostrojili uhol, ktorý sa nazýva **radián.**

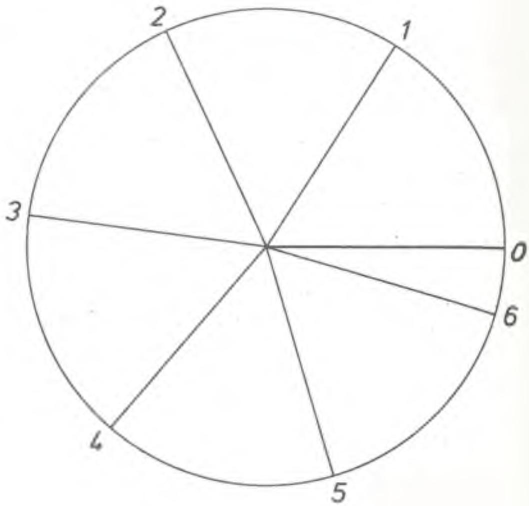




Jednotka veľkosti uhla radián — píšeme rad

Uhlomer s jednotkou veľkosti uhla radián

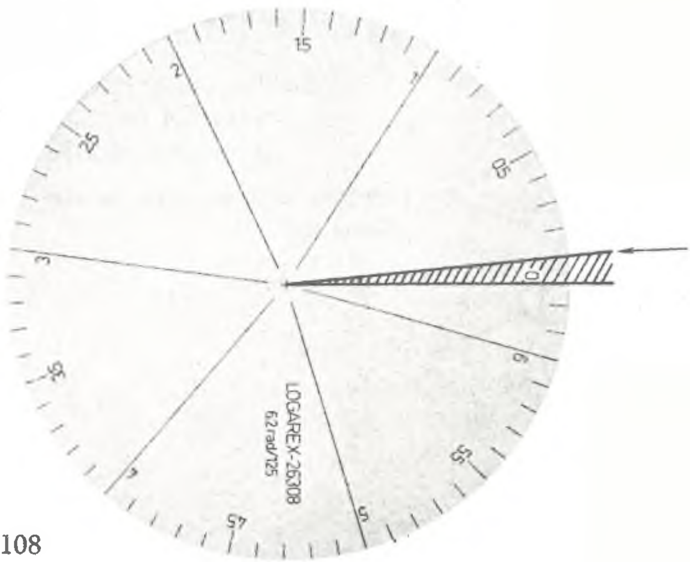
Konvexné uhly s ramenami 0 a 1, 1 a 2 atď. sú tzv. **základné uhly na uhlomere.**



ZJEMNENIE STUPNICE UHLOMERA

Uhlomerom, na ktorom je základným uhlom radián, možno merať s nepresnosťou 1 rad. Niekedy potrebujeme merať s menšou nepresnosťou. Preto treba stupnicu uhlomera zjemniť.

Na uhlomere, ktorý máme na obrázku, je radián desaťnásobkom základného uhla γ.



γ základný uhol na uhlomere

Veľkosť základného uhla γ je 0,1 rad. Stupnica so základným uhlom veľkosti 0,1 rad je **zjemnením stupnice so základným uhlom radián.**

Úloha 1

Ukážte na svojich uhlomeroch radián.
Na uhlomere je stupnica, vyznačená ramenami základných uhlov na uhlomere.
Ukážte na svojich uhlomeroch základný uhol.
Ukážte na uhlomere polpriamky 1,1; 0,9; 4,7.
Zapíšte veľkosť uhla s ramenami 0 a 1,5.
Ukážte na uhlomere uhol, ktorého veľkosť je 2,4 rad.

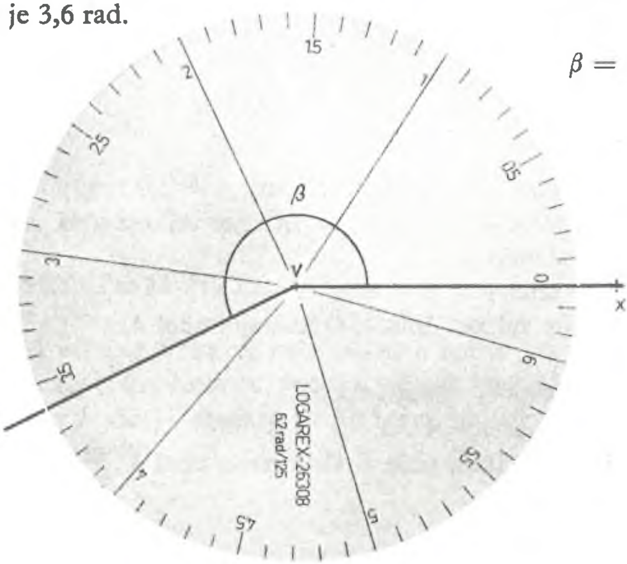
Príklad 1

Zostrojte uhol β veľkosti 3,6 rad.

Riešenie:

Narysujeme polpriamku VX. Priložíme uhlomer k polpriamke VX tak, aby sa polpriamka 0 (nula) na uhlomere kryla s polpriamkou VX. Vyznačíme bod R, ktorý sa prekrýva s niektorým bodom polpriamky 3,6 na uhlomere. Narysujeme rameno VR. Zostrojený uhol označíme písmenom β. Uhol β je zhodný s uhlom určeným polpriamkami 0 a 3,6. Jeho veľkosť je 3,6 rad.

$\beta = 3{,}6$ rad

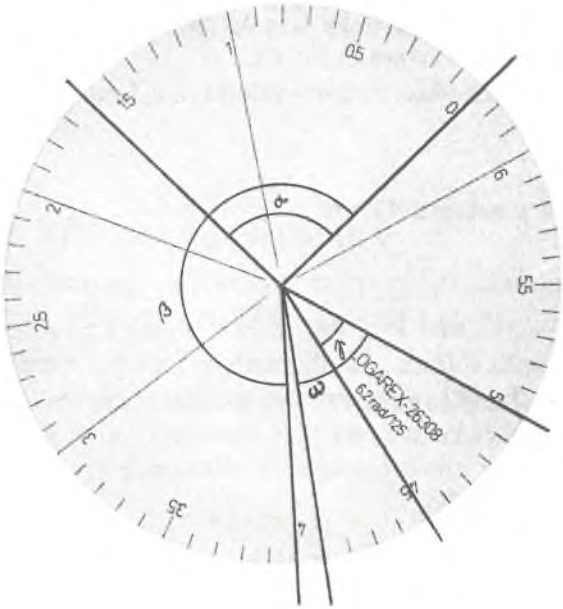


Cvičenie

1. Vystrihnite si z papiera model jednotky veľkosti uhla radián. Pomocou tohto modelu zostrojte uhly daných veľkostí:

   $\alpha = 2$ rad, $\quad \beta = 3$ rad, $\quad \delta = 5$ rad

2. Zapíšte veľkosti uhlov α, β, ω, γ vyznačených na uhlomere na obrázku.



3. Zostrojte uhly α a β týchto veľkostí: $\alpha = 1{,}2$ rad, $\beta = 2{,}6$ rad.
   Zostrojte uhol $\gamma = \alpha + \beta$. Vypočítajte veľkosť uhla γ.
   Odmerajte uhol γ.
   Zostrojte uhol $\delta = \beta - \alpha$.
   Vypočítajte veľkosť uhla δ. Odmerajte uhol δ.

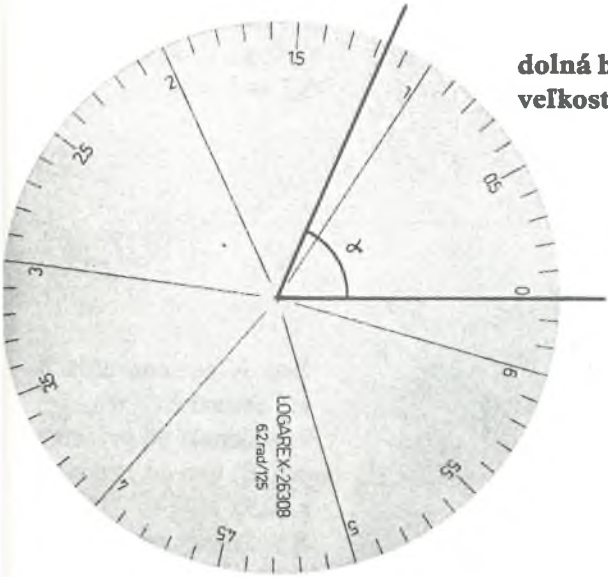
4. Zostrojte uhol ω veľkosti 0,6 rad.
   Zostrojte uhol $\delta = 4 \,.\, \omega$.
   Vypočítajte veľkosť uhla δ. Odmerajte uhol δ.

HORNÁ A DOLNÁ HRANICA VEĽKOSTI UHLA

Príklad 2

Odmerajte uhol α.

Postup: Priložte uhlomer tak, aby sa polpriamka 0 prekrývala s jedným ramenom uhla α ako na obrázku. Druhé rameno uhla α sa neprekrýva so žiadnou polpriamkou na uhlomere. Uhol α nie je zhodný so žiadnym uhlom určeným ramenami uhlomera. Uhol s ramenami 0 a 1,1 je podmnožinou uhla α a ten je podmnožinou uhla s ramenami 0 a 1,2.

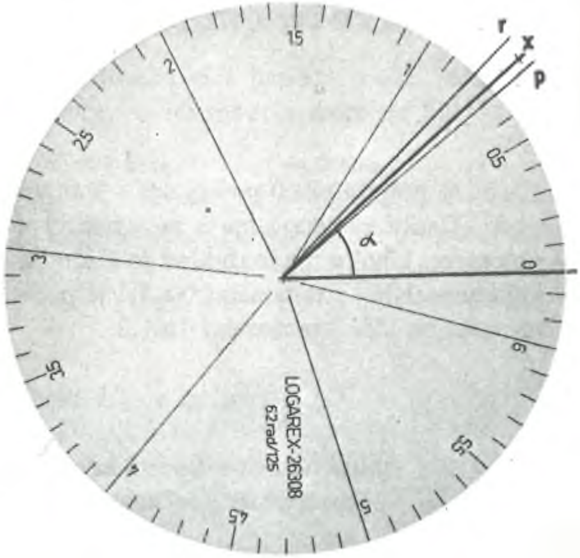


$1{,}1 \text{ rad} \leqq \alpha \leqq 1{,}2 \text{ rad}$

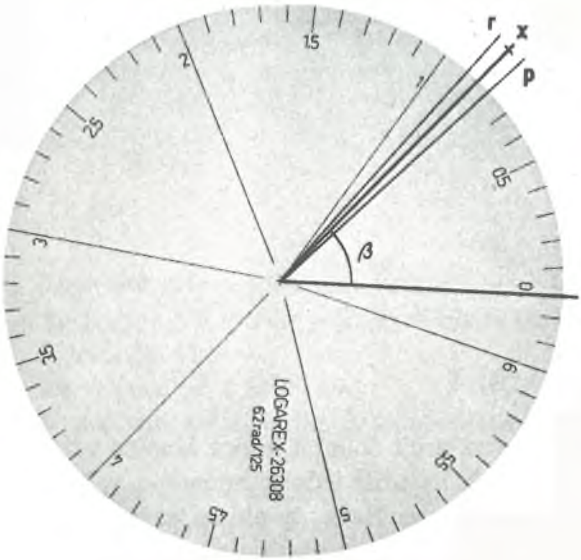
dolná hranica veľkosti uhla **horná hranica veľkosti uhla**

MERANIE VEĽKOSTI UHLA

Každý uhol má veľkosť. Viete už určiť dolnú a hornú hranicu veľkosti uhla. V praxi však treba niekedy vyjadriť jednou hodnotou veľkosť aj takého uhla, ktorý nie je zhodný so žiadnym uhlom určeným polpriamkami uhlomera.



Bod X ramena uhla α je bližšie k priamke p (0,7) ako k priamke r (0,8).
Hovoríme, že veľkosť uhla α je 0,7 rad.
Zápis:
$0{,}7 \text{ rad} \leqq \alpha \leqq 0{,}8 \text{ rad}$
$d(X, p) < d(X, r)$
$0{,}7 \text{ rad} = \alpha$



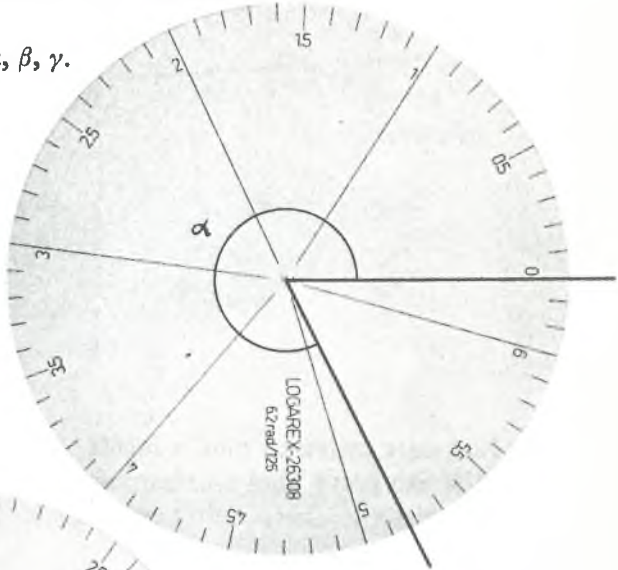
Bod X ramena uhla β má rovnakú vzdialenosť od priamky p (0,8) ako od priamky r (0,9).
S ohľadom na zaokrúhlenie čísel povieme, že $\beta = 0{,}8$ rad.

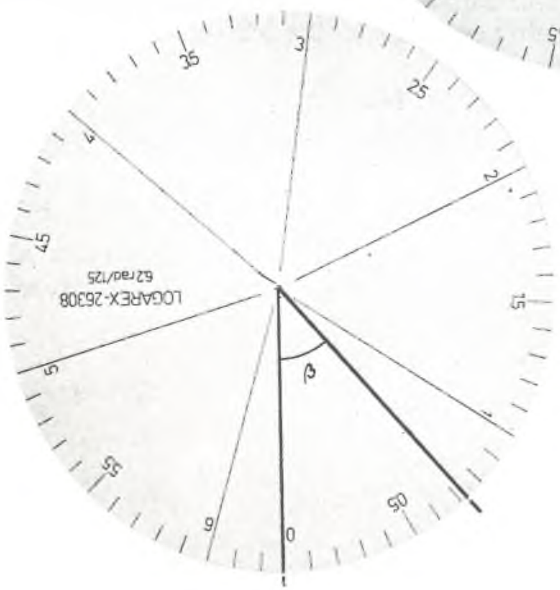
Cvičenie

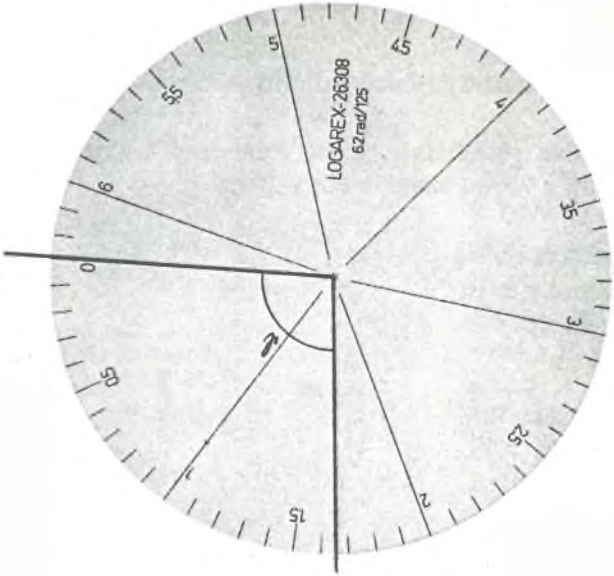
5. Určte dolnú a hornú hranicu veľkosti priameho uhla.

6. Narysujte dva rôzne uhly, jeden konvexný a druhý nekonvexný. Určte dolnú a hornú hranicu ich veľkostí.

7. Zapíšte veľkosť uhlov α, β, γ. Zapíšte dolnú a hornú hranicu veľkostí týchto uhlov.





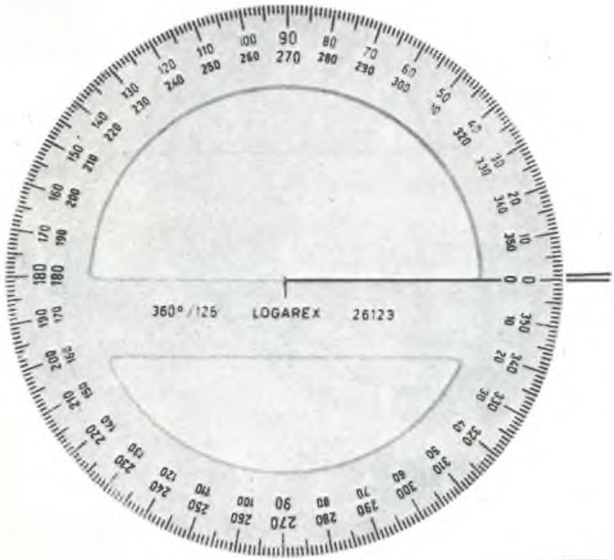


8. Narysujte konvexný uhol α menší ako pravý uhol, konvexný uhol β väčší ako pravý uhol a nekonvexný uhol γ.
Odmerajte ich na desatiny radiánu. Zapíšte ich veľkosti.

9. Narysujte ľubovoľný trojuholník ABC.
   a) Odmerajte každý z jeho vnútorných uhlov na desatiny radiánu. Ich veľkosti zapíšte.
   b) Určte dolnú a hornú hranicu veľkostí vnútorných uhlov trojuholníka.

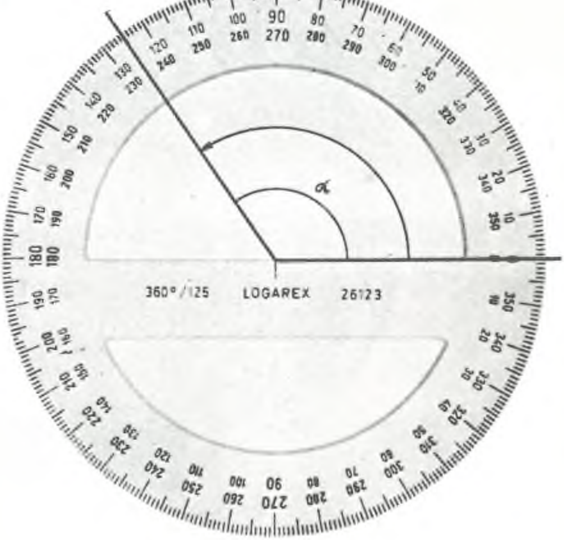
STUPEŇ

Pri meraní uhlov sa používa aj jednotka veľkosti uhla, tzv. **stupeň.**



Jednotka veľkosti uhla

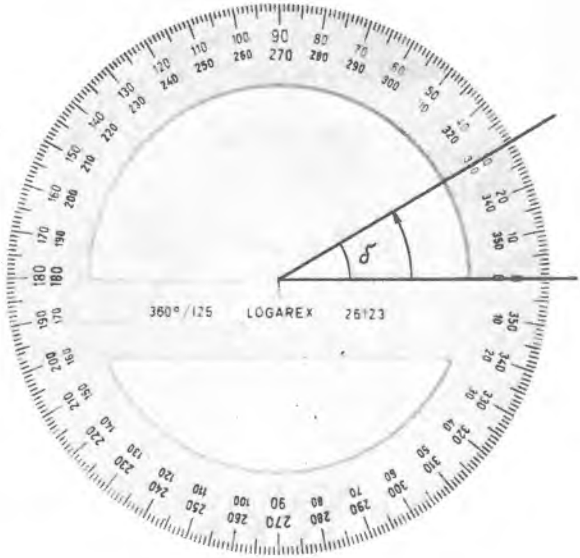
stupeň



Na uhlomere sú niekedy vyznačené dve stupnice. Ako sa s takýmto uhlomerom meria, je naznačené na obrázkoch.

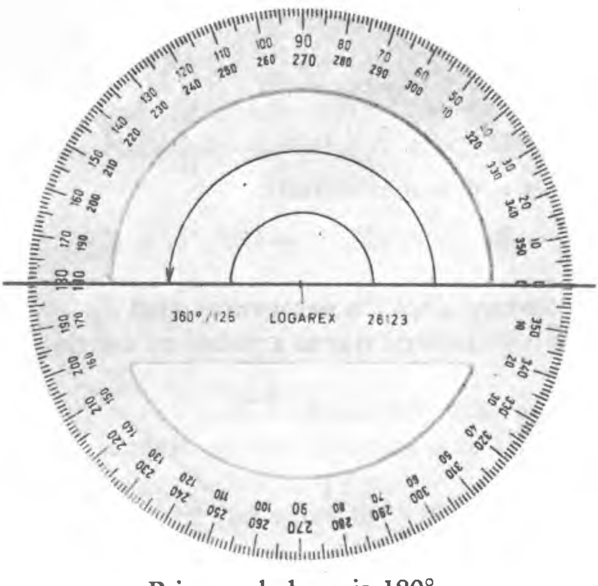
$\alpha = 125°$

$\beta = 60°$

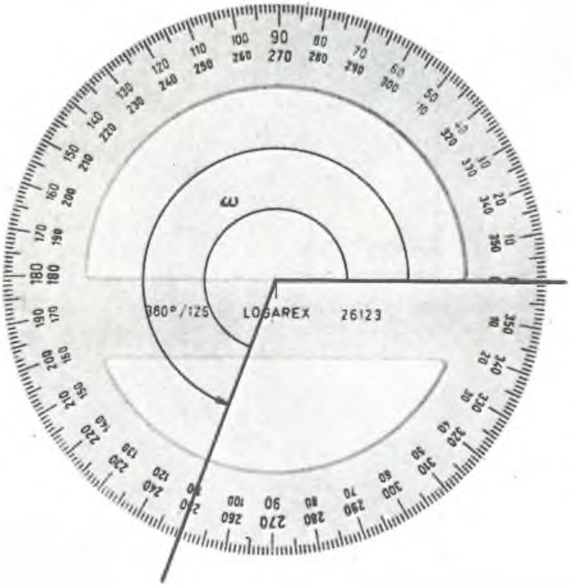


$\delta = 30°$

Pravý uhol meria 90°.



Priamy uhol meria 180°.



$\omega = 250°$

Uhol, ktorý je menší ako pravý, meria menej ako 90° a nazýva sa **ostrý uhol.**

Uhol, ktorý je väčší ako pravý a menší ako priamy, meria viac ako 90° a menej ako 180°, sa nazýva **tupý uhol.**

Cvičenie

10. Narysujte uhly α, β, γ, δ, ω veľkostí:

$\alpha = 60°$, $\beta = 90°$, $\gamma = 75°$, $\delta = 120°$, $\omega = 180°$

11. Narysujte konvexný uhol α a nekonvexný uhol β.
Obidva uhly odmerajte na stupne a potom na desatiny radiánu.

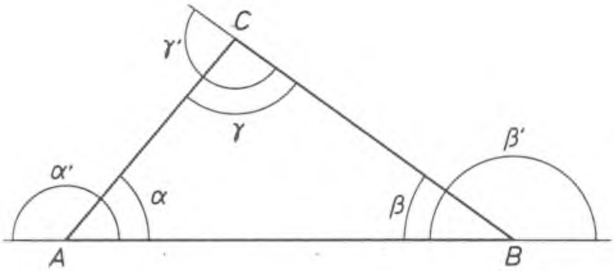
12. Narysujte ľubovoľný trojuholník ABC.
Odmerajte každý jeho vnútorný uhol na stupne.

13. Narysujte ostrý uhol α a odmerajte ho.

14. Narysujte tupý uhol β a odmerajte ho.

TROJUHOLNÍK (*s u s*)

Viete zostrojiť trojuholník, ak sú dané jeho strany a ak viete, že dva trojuholníky sú zhodné práve vtedy, keď majú zhodné zodpovedajúce si strany. Teraz sa naučíte zostrojovať trojuholník, ak sú dané dve strany a uhol, a oboznámite sa aj s ďalšou vetou o zhodnosti trojuholníkov. V trojuholníku ABC sú vyznačené jeho vnútorné uhly α, β, γ a priame uhly α', β', γ'. Pretože $\alpha \subset \alpha'$, $\beta \subset \beta'$, $\gamma \subset \gamma'$, je $\alpha < \alpha'$, $\beta < \beta'$, $\gamma < \gamma'$. Každý vnútorný uhol trojuholníka je menší ako priamy uhol.

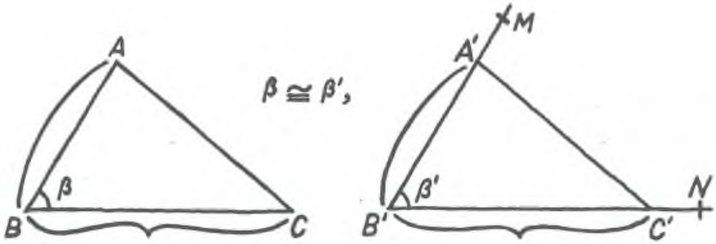


Príklad 3

Narysujte ľubovoľný trojuholník ABC. Zostrojte trojuholník $A'B'C'$, ak $A'B' \cong AB$, $B'C' \cong BC$ a $\sphericalangle A'B'C' \cong \sphericalangle ABC$.

Riešenie:

Rozbor a náčrt:

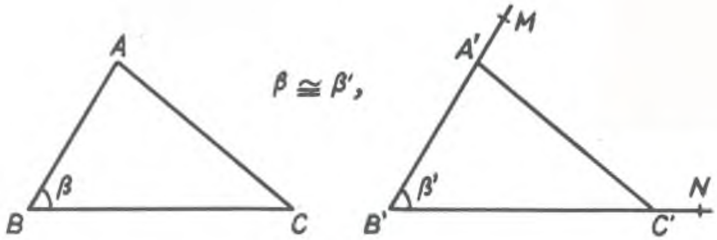


$AB \cong A'B'$, $\qquad BC \cong B'C'$

Postup konštrukcie:

1. β'; $\beta' \cong \beta$, $\beta' = \sphericalangle MB'N$
2. A'; $A' \in \mapsto B'M$, $A'B' \cong AB$
3. C'; $C' \in \mapsto B'N$, $C'B' \cong BC$
4. $A'C'$

Konštrukcia:



Uvážime ďalšie možnosti konštrukcie: Môžeme vychádzať od strany BC alebo AC.
Pomocou priesvitky sa presvedčte, že po premiestení sa trojuholníky ABC a $A'B'C'$ prekrývajú.

Trojuholníky ABC a $A'B'C'$ sú zhodné.

Veta *sus* o zhodnosti trojuholníkov:

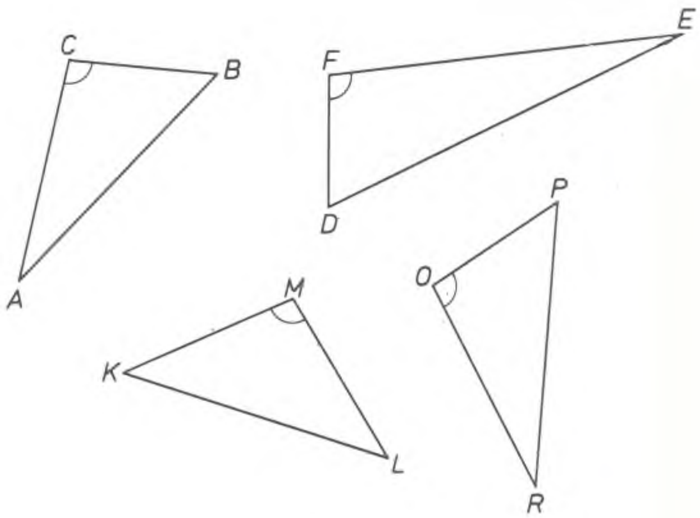
> Dva trojuholníky sú zhodné práve vtedy, keď sa zhodujú v uhle a stranách, ktoré ležia na ramenách tohto uhla.

Podobne ako v príklade 3 môžeme vždy zostrojiť trojuholník, ak je určený jeho vnútorný uhol (menší ako priamy) a strany, ktoré ležia na ramenách tohto uhla.

> Hovoríme, že trojuholník je určený dvoma stranami a uhlom nimi zovretým.

15. Zostrojte trojuholník MNP, $v(\sphericalangle MNP) = 0{,}9$ rad, $d(MN) = 120$ mm, $d(NP) = 94$ mm.

16. Určte, ktoré z dvoch narysovaných trojuholníkov sú zhodné, a povedzte, prečo.



SÚHRNNÉ CVIČENIA

1. Narysujte uhly α a β, ktorých veľkosti sú $\alpha = 0{,}7$ rad, $\beta = 1{,}5$ rad. Zostrojte ich grafický súčet, uhol γ. Vypočítajte veľkosť uhla γ. Odmerajte uhol γ. Výsledky porovnajte.

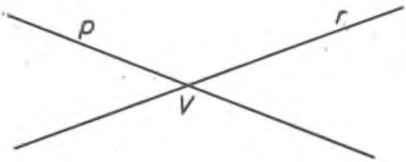
2. Narysujte uhly δ a ω, ktorých veľkosti sú $\delta = 142°$, $\omega = 85°$. Zostrojte ich grafický súčet. Vypočítajte jeho veľkosť. Výsledok skontrolujte meraním.

3. Zostrojte uhol α veľkosti 0,7 rad. Zostrojte jeho päťnásobok. Vypočítajte jeho veľkosť a výsledok skontrolujte meraním.

4. Zostrojte uhol β veľkosti 60°. Zostrojte jeho trojnásobok. Vypočítajte veľkosť $3 \,.\, \beta$.

5. Zostrojte pravý uhol AVB. Zostrojte jeho os. Na osi vyznačte bod C, ktorý patrí uhlu $\sphericalangle AVB$ ($C \in \sphericalangle AVB$). Vypočítajte veľkosť konvexného uhla AVC v stupňoch. Veľkosť pravého uhla je 90°.

6. Zostrojte pravý uhol. Jeho vrchol označte písmenom A. Na jeho ramenách zostrojte úsečky AC a AB dĺžky 6 cm. Odmerajte vnútorné uhly trojuholníka pri vrcholoch B a C. Zostrojte ich grafický súčet. Ak ste presne rysovali, je ich grafickým súčtom pravý uhol.

7. 

Narysujte rôznobežky p, r ako na obrázku. Písmenom α označte ostrý uhol nimi určený. Písmenom β označte tupý uhol nimi určený.

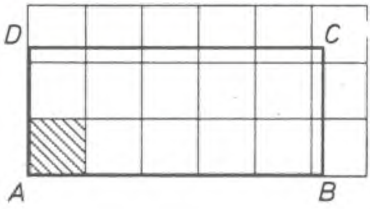
Uhly α a β odmerajte a ich veľkosti zapíšte.
Čo môžete povedať o obrazoch uhlov α a β v súmernosti podľa stredu V a o ich veľkosti?

PREHĽAD POZNATKOV O DĹŽKE ÚSEČKY, OBSAHU GEOMETRICKÉHO ÚTVARU A VEĽKOSTI UHLA

1. Dĺžka úsečky

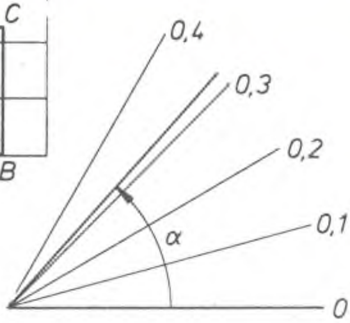
$d(AB) = 4$ j.d.
4 j.d. $\leqq d(AB) \leqq$
$\leqq 5$ j.d.

Obsah geometrického útvaru

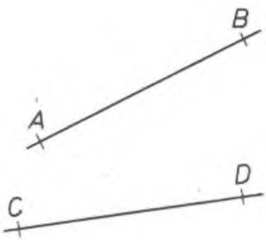


$S(ABCD) = 10$ j.o.
10 j.o. $\leqq S(ABCD) \leqq$
$\leqq 18$ j.o.

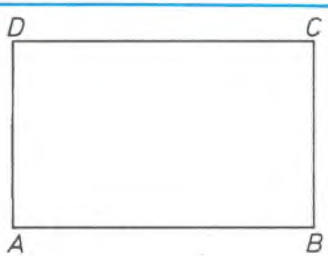
Veľkosť uhla

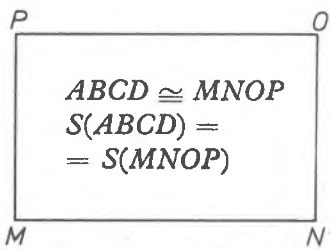


$\alpha = 0{,}3$ j.u.
$0{,}3$ j.u. $\leqq \alpha \leqq 0{,}4$ j.u.

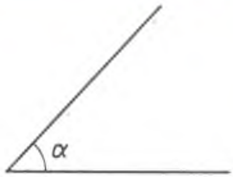


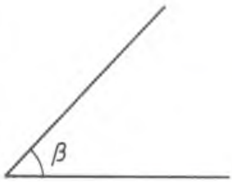
2. $AB \cong CD$
$d(AB) = d(CD)$



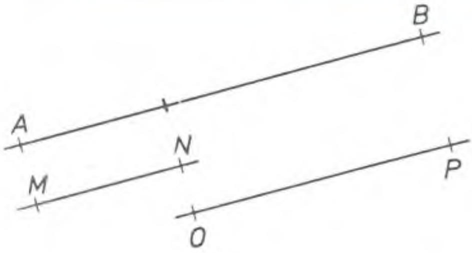


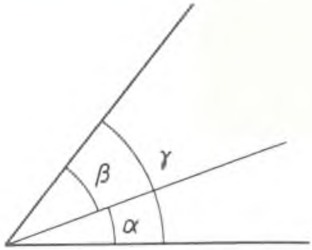
$ABCD \cong MNOP$
$S(ABCD) =$
$= S(MNOP)$

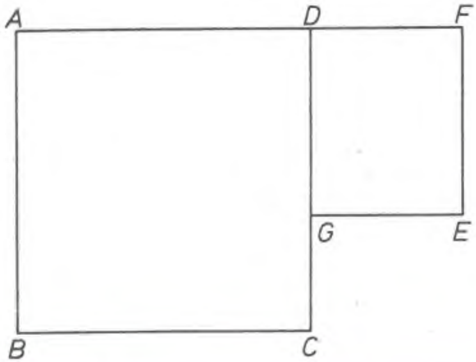




$\alpha \cong \beta$
$\alpha = \beta$







3. $AB = MN + OP$ $d(AB) = d(MN) +$ $+ d(OP)$	$ABCGEF =$ $= ABCD \cup GEFD$ $S(ABCGEF) =$ $= S(ABCD) +$ $+ S(GEFD)$	$\gamma = \alpha + \beta$

Zoznam značiek používaných v učebnici

Bod A	A
Množina bodov A, B, C	$\{A, B, C\}$
Úsečka AB	AB
Polpriamka AB	$\mapsto AB$
Polpriamka opačná k polpriamke AB	$\mapsfrom AB$
Priamka AB	$\leftrightarrow AB$
Bod C patrí úsečke AB	$C \in AB$
Bod C nepatrí úsečke AB	$C \notin AB$
Bod C patrí polpriamke AB	$C \in \mapsto AB$
Bod C patrí priamke AB (p)	$C \in \leftrightarrow AB, C \in p$
Trojuholník ABC	$\triangle ABC$
Päťuholník $KLMNO$	$KLMNO$
Rovina ABC (pM)	$\leftrightarrow ABC, \leftrightarrow pM$
Polrovina ABC (pM)	$\mapsto ABC, \mapsto pM$
Polrovina opačná k polrovine ABC (pM)	$\mapsfrom ABC, \mapsfrom pM$
Body A, B sú rôzne	$A \neq B$
Body M, N splývajú, sú totožné	$M = N$
Vzdialenosť bodov A, B / Dĺžka úsečky AB	$d(AB)$
Vzdialenosť bodu A od priamky p	$d(A, p)$
Vzdialenosť dvoch rovnobežných priamok r a s	$d(r, s)$
Vzdialenosť bodu A od roviny α	$d(A, \alpha)$
Vzdialenosť dvoch rovnobežných rovín α a β	$d(\alpha, \beta)$
Obsah $\triangle ABC$	$S(\triangle ABC)$
Povrch gule K	$P(K)$
Kolmé priamky r a s (AB a CD)	$r \perp s, \leftrightarrow AB \perp \leftrightarrow CD$

Rovnobežné priamky r a s (AB a CD)	$r \parallel s$, $\leftrightarrow AB \parallel \leftrightarrow CD$
Bod P — priesečník priamok a, b	$a \cap b = \{P\}$
Výška trojuholníka vedená vrcholom A na priamku a, určenú stranou BC	v_a
Konvexný uhol AVB	$\sphericalangle AVB$
Nekonvexný uhol AVB	$\measuredangle AVB$
Veľkosť uhla α	α
Veľkosť konvexného uhla AVB	$v(\sphericalangle AVB)$
nekonvexného uhla AVB	$v(\measuredangle AVB)$
Jednotka veľkosti uhla radián	rad napr. 0,5 rad
Jednotka veľkosti uhla stupeň	° napr. 75°
Je zhodná	$\cong$
Zhodné úsečky AB, CD	$AB \cong CD$
Zhodné trojuholníky ABC, KLM	$\triangle ABC \cong \triangle KLM$
Zhodné uhly α, β ($\sphericalangle AVB$, $\sphericalangle CUD$) ..	$\alpha \cong \beta$, $\sphericalangle AVB \cong \sphericalangle CUD$

RNDr. Jiří Kabele CSc., PaedDr. Marie Janků, PhDr. Jaroslava Urbanová

MATEMATIKA
pre 5. ročník základnej školy

II. diel
Geometria

4. vydanie

Vydalo Slovenské pedagogické nakladateľstvo v Bratislave

Zodpovedná redaktorka Jolana Cziprusová
Obálku navrhla Miroslava Jakešová
Graficky upravil Václav Rytina
Obrázky rysoval Karel Čížek
Technická redaktorka Valéria Bundzelová

Tlačila Svoboda, grafické závody, n. p., Praha 10-Malešice — Strán 128 — AH 5,35 (text 2,24, grafika 3,11) — VH 5,90 — 10/24 — Náklad 49 870 — Technika tlače ofset — Typ písma garmond Plantin — Schválené výmerom SÚKK GR č. 1197/I-1983

67-299-85 Kčs 5,50 b.

ZÁZNAM O POUŽITÍ UČEBNICE

Por. čís.	Meno žiaka	Školský rok	Stav učebnice	
			na začiatku škol. roku	na konci škol. roku
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

176 796

Univerzita Mateja Bela
Univerzitná knižnica
285000166476

SPN Skl. č. 1-11-553

67-299-85
10/24 • Kčs 5,50 b.